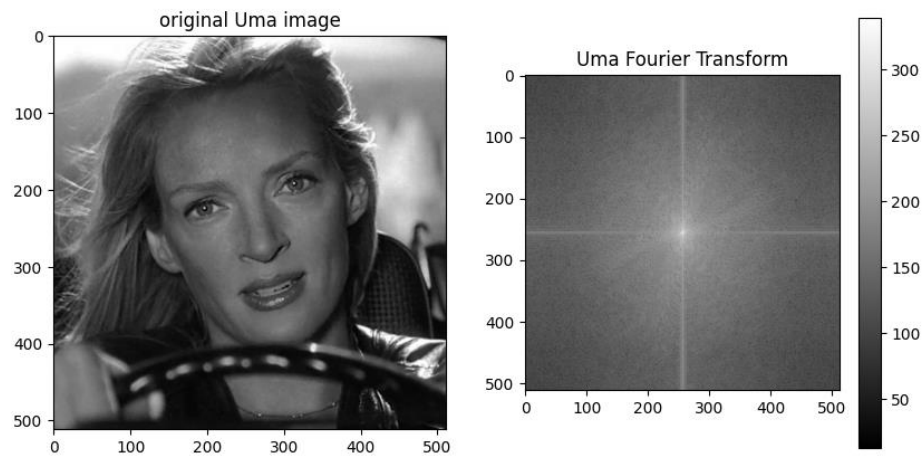
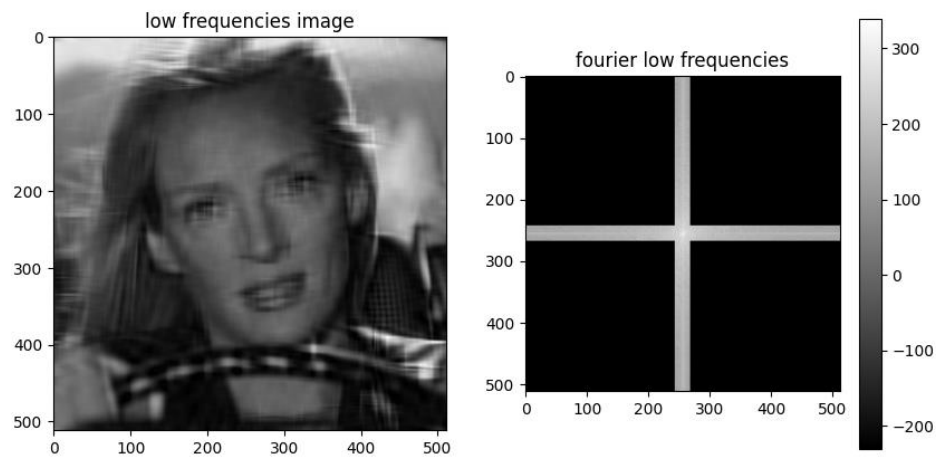


Question 1 - frequency in images

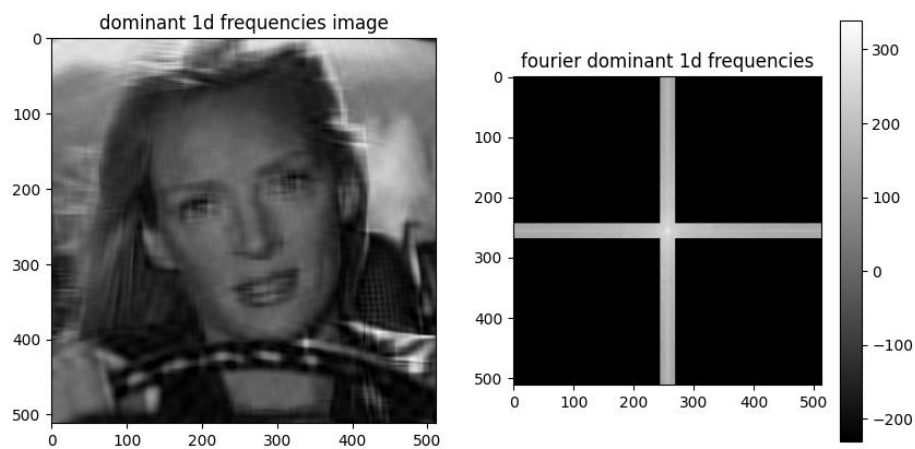
a.



b.



c,d,e.

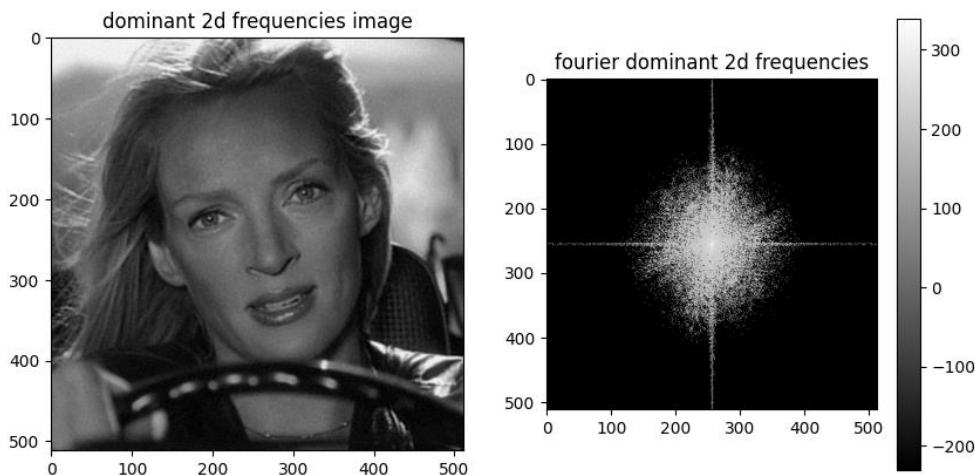


Comparing to Section B: In this section, we sorted the most dominant frequencies, so we might have expected the reconstructed image to be better. However, looking at the Fourier transform of the image in Section B, we can see that the lower frequencies are, in fact, the most dominant in the image. Hence, we could have anticipated some similarity between the two methods. Indeed, we observe a significant (or even complete) similarity in both the reconstructed image and the masked Fourier transform.

The Importance of Low Frequencies for Visualizing the Image:

Considering these results, we can infer that low frequencies effectively represent the general structure and main details of the image. Further analysis suggests that higher frequencies capture fine details and sharp edges, which is why filtering them out results in a "blurry" reconstructed image that still preserves the overall structure and primary details of the image.

f.

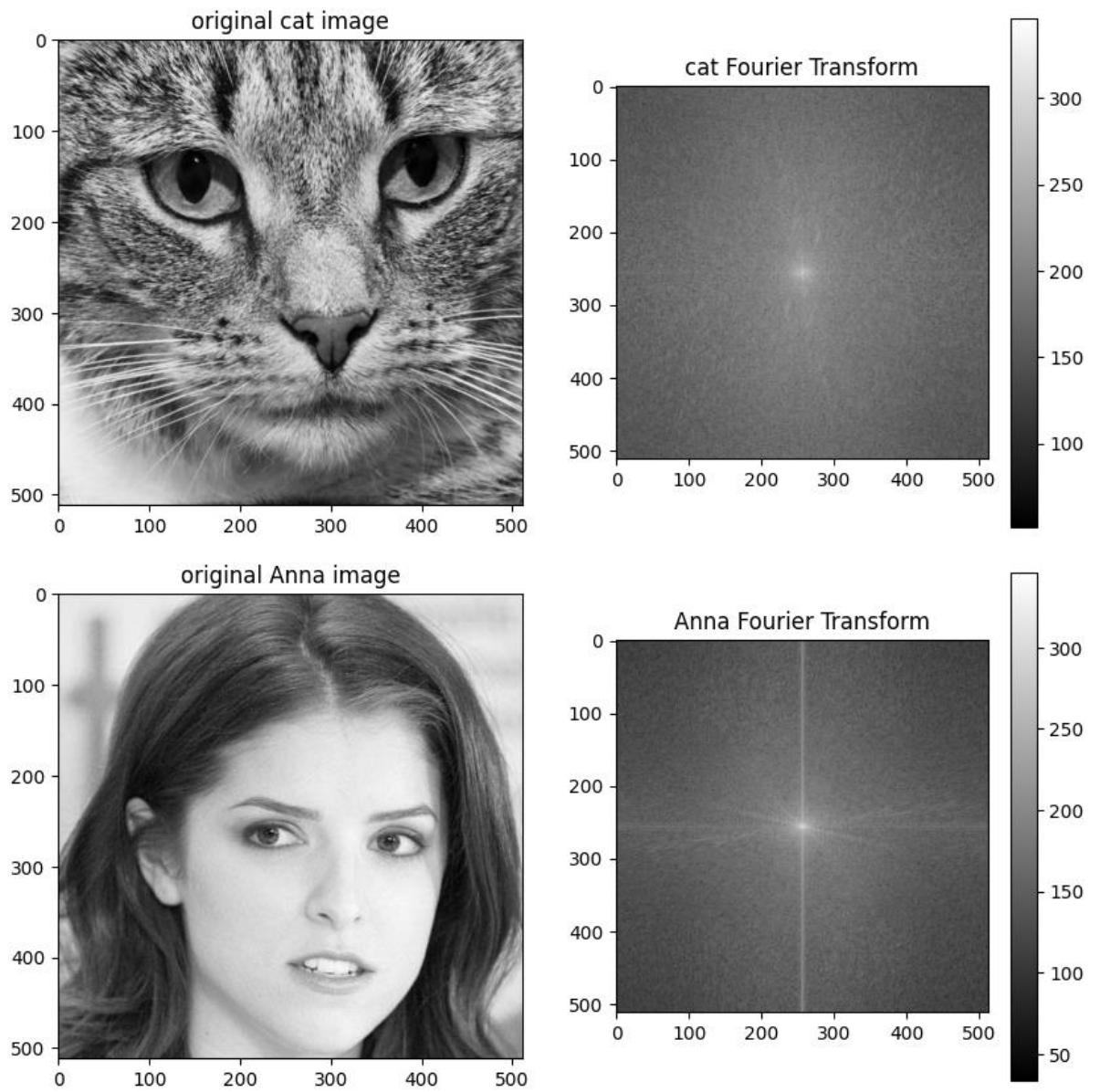


In section E, we selected frequency **vectors** based on the sum of their elements (per row and per col). This means that we selected entire vectors, while probably only part of the elements within the vectors were actually dominant and important for the representation. As a result, we may have used elements that are less significant than others in the Fourier transform.

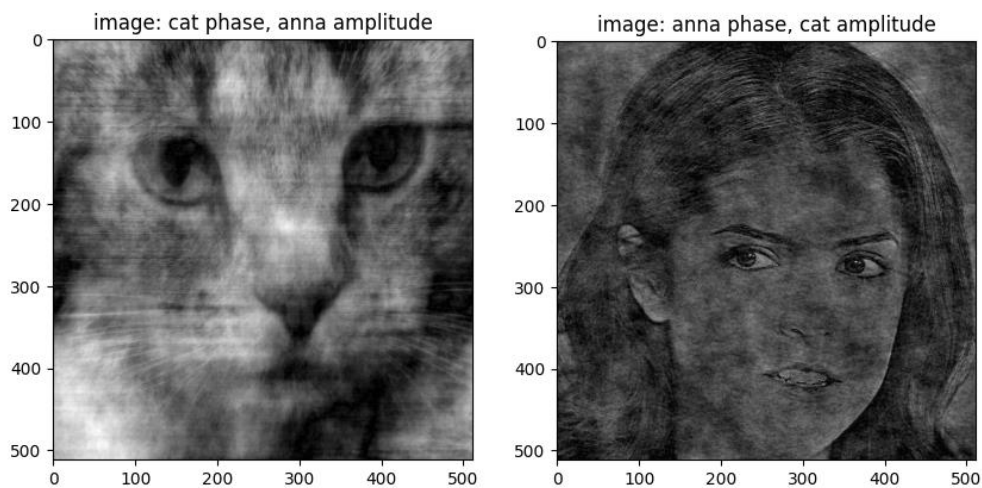
On the other hand, in this section, we selected the most dominant 2D frequencies, meaning we only took the dominant elements in the Fourier transform, independent of the other values in the same row or column. This method dramatically enhanced the visualization of the reconstructed image, while still using the same amount of data ($\leq 10\%$ frequencies).

Question 2 - Phase and amplitude in images

a.

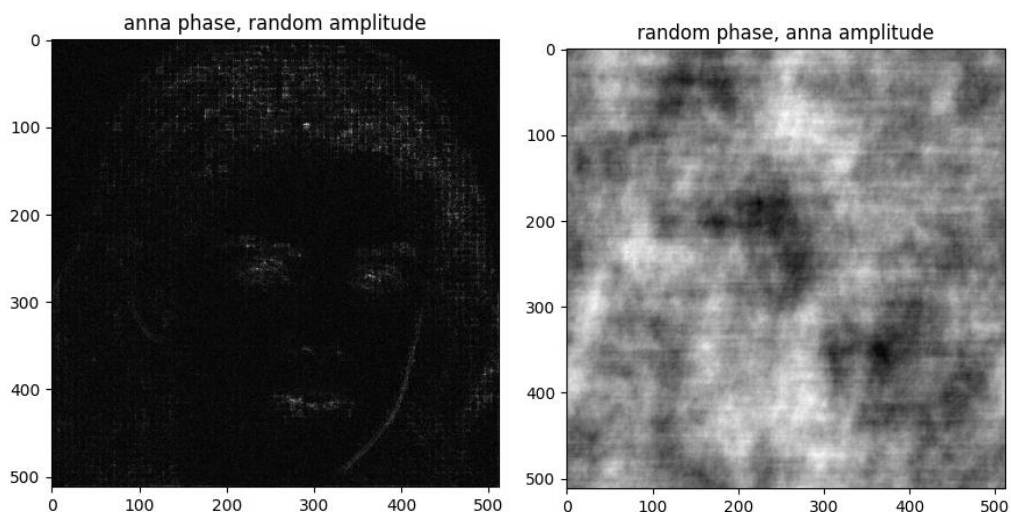


b.



The image created by the **anna phase and the cat amplitude** is substantially more similar to the original 'anna' image.

c.



The image constructed with the **'anna' phase** and random amplitude is better. Based on the images we retrieved above, along with the calculations they are based on, we can infer that:

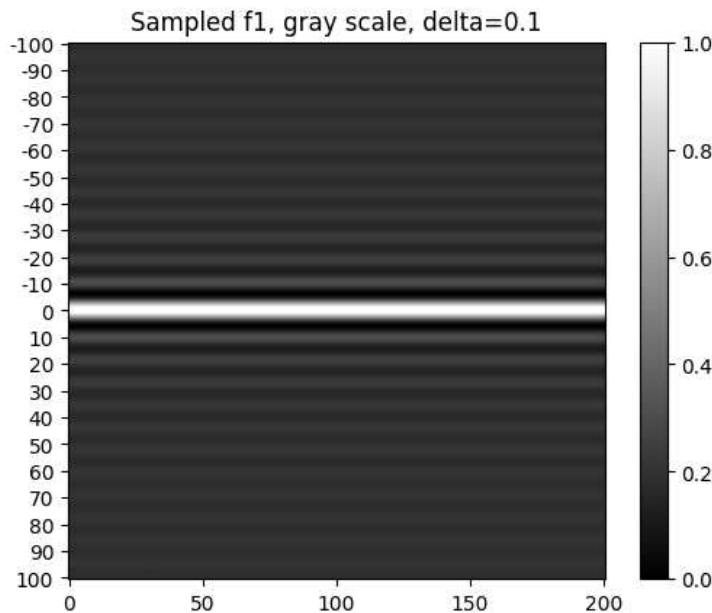
- i. The phase of the transform represents the spatial arrangement of the image features, indicating the position of the various frequencies within the image, thus preserving the overall structure of the image.
- ii. The amplitude represents the strength or intensity of the frequency components.

- d. Based on the previous sections, we conclude that **the phase is the more important and informative part for visualizing an image**. This is in line with our previous explanation, which assumes the phase represents the dominant structures in the image. When we look at an image, the spatial features usually carry most of the information compared to finer details such as colours, intensities, etc.

Question 3 - Sampling and Reconstruction

Part A

b.



Explaining the image:

First, we can see that the image is uniform across the x-axis. This is because by its definition, $f_1(x, y)$ is only affected by the y value.

Second, we can see that the function is cyclical across the y-axis.

Examining the sampled function, we can estimate that the period is approximately 9 pixels long, which means

$$T = 9 \times \Delta y = 9 \times 0.1 = 0.9$$

hence

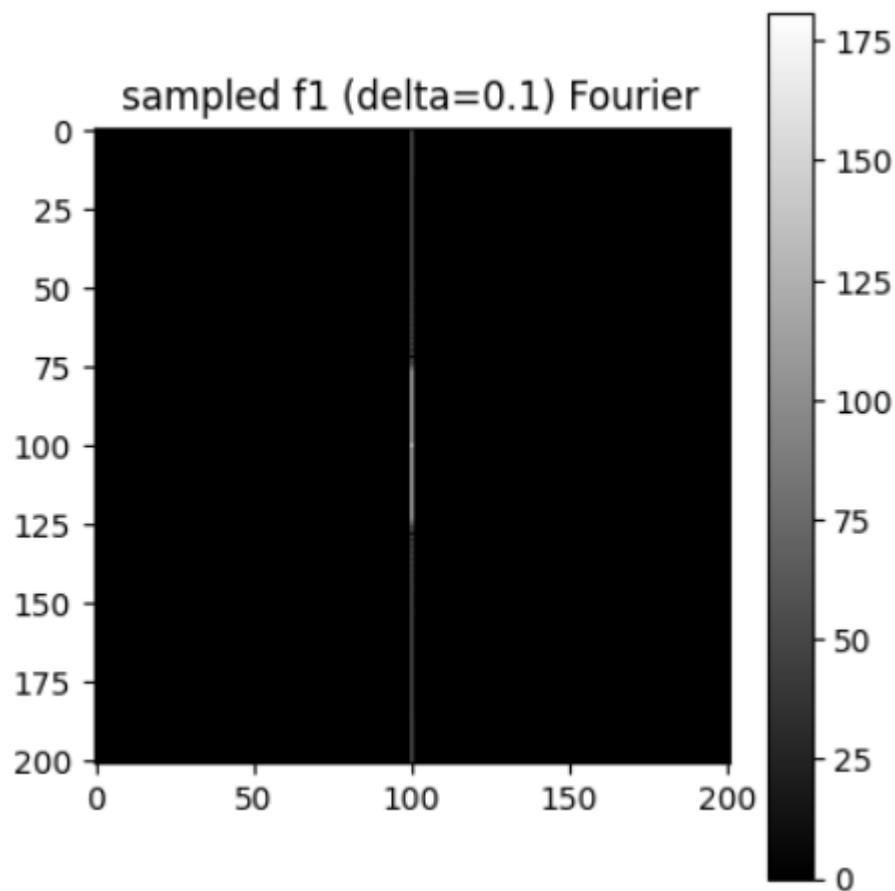
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.9} \approx 1.11$$

Calculating the theoretical frequency of the function yields:

$$f = \frac{\pi \times \frac{50}{21}}{2 \times \pi} = \frac{25}{21} \approx 1.19$$

* It is important to mention that while the Sinc function has a cyclic nature due to the sin nominator, it is not "completely" cyclic due to the denominator, which makes the amplitude lower as y grows. this phenomenon is clearly seen in the sampled image as well.

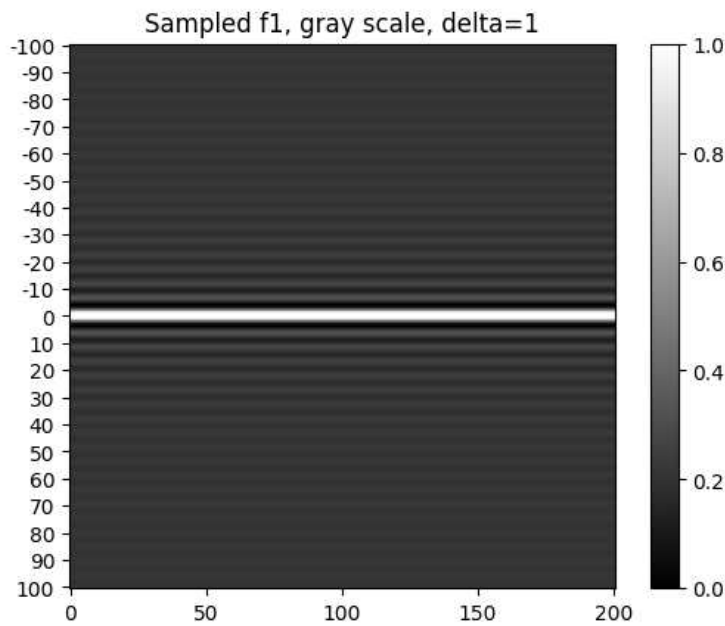
c.



The Fourier transform of the sampled function with $\delta=0.1$ presents a relatively short, centred band of frequencies, parallel to the V-axis. We can also see that along the V-axis, the further we are from the centre, the lower the amplitude is. This indicates a small range of low frequencies in the sampled image solely in the y-axis, due to the constant nature of f across the x-axis.

This sits well with the Rect() function - the theoretical Fourier transform of the Sinc(y) function, along with the effect of the sampling on the frequencies.

d.



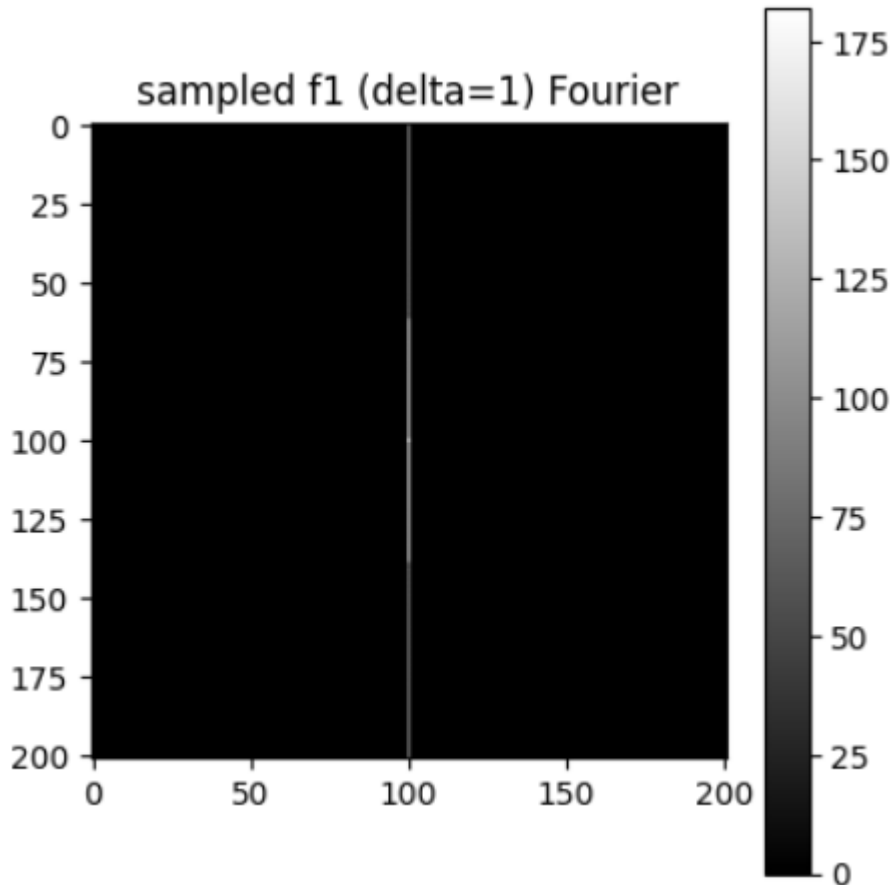
Explaining the image:

Like before we can see that the image is uniform across the x-axis as $f_1(x,y)$ is only affected by the y value and cyclical across the y-axis with a theoretical frequency of:

$$f = \frac{\pi \times \frac{50}{21}}{2 \times \pi} = \frac{25}{21} \approx 1.19$$

The difference is in the actual frequency of the cycle in the sampled image, as we changed the sampling rate. We estimate the new sampled cycle is approximately 5 pixels long, which means $f = \frac{1}{5 \times 1} = 0.2$

This frequency is a result of **aliasing** in our sampled function.



The general structure of the Fourier transform of the function when sampled in $\Delta=1$ rate, is similar to the sampling with $\Delta=0.1$. The main visible difference is the length of the high-amplitude vector: for the higher sampling rate we get longer vector.

At first, this went against our theoretical intuition: we expected to see lower frequencies for the larger sampling rate as a result of aliasing. One way to settle this is considering the fact that we are not sampling the same range in the original signal. That is, we are not limiting ourselves to one interval from which we sample at different rates, rather we chose the sampling rate and the rate sets the interval : for $\Delta = 1: x, y \in [-100, 100]$ while for $\Delta = 0.1: x, y \in [-10, 10]$. This means that the sampling at higher rate might capture wider amount of data with more frequencies along it.

- e. Yes, there is a limitation on the sampling rate on this function. As seen in the above sections, high sampling rate can lead to aliasing. To prevent this we should calculate V_{max} , by the Nyquist condition: $V_{max} = \frac{50}{21}$ hence

$$\Delta y < \frac{1}{2V_{max}} = \frac{21}{100}$$

Part B

- g. It takes 19 frames to complete a full circle. Thus $f = \frac{1}{19}$ [circles per frame]



- h. First, we'll convert the frequency from [circles per frame] to [circles per second] by multiplying f with our selected fps ($N=10$):

Considering $f = \frac{1}{19} \left[\frac{\text{circles}}{\text{frame}} \right] \times 10 \left[\frac{\text{frames}}{\text{second}} \right] = \frac{10}{19} \left[\frac{\text{circles}}{\text{second}} \right]$ as the maximal frequency of this data, the Nyquist sampling rate is $f_{\text{nyquist}} = \frac{20}{19} \left[\frac{\text{circles}}{\text{second}} \right]$

- i. Let us denote the original video as $V = [f_0, \dots, f_n]$, where N is the number of frames in the video. One circle is 19 frames long, so we can denote it as $C = [f_0, \dots, f_{18}]$. The video V is periodic/cyclic with a frequency of $f = 1/19$, which means $\forall i \in [0, N - 19]: f_i = f_{i+19}$.

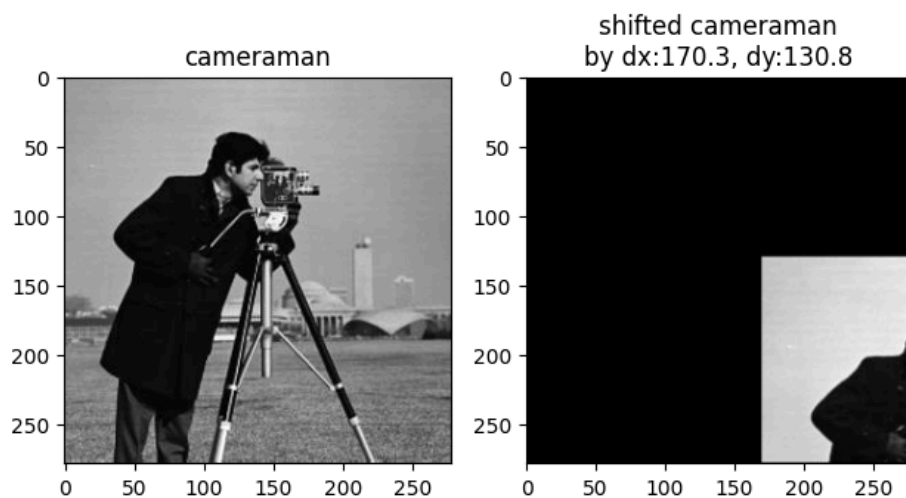
To get a reverse circle, we would like to obtain a sequence of frames $R = [f_{18}, \dots, f_0]$. Sampling the video with a rate $s = (1/f) - 1 = 18$ will create a sequence $[\dots, f_i, f_{i+18}, f_{i+36}, \dots]$. By the periodic property of the video, we deduce that the sequence is $[\dots, f_i, f_{i-1}, f_{i-2}, \dots]$, which is the reverse circle we aimed for.

In words: We sample the video at a rate that is 1 lower than the number of frames it takes to complete a circle. Thus, with each iteration, we land at the "previous frame" in the "next circle."

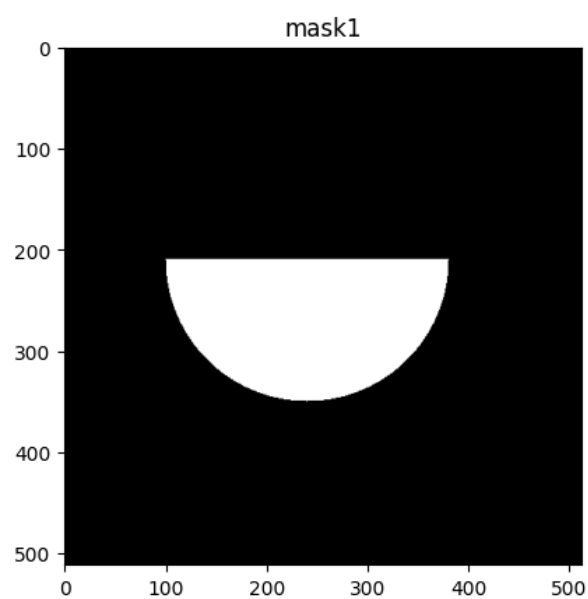
שאלה 4

סעיף ג

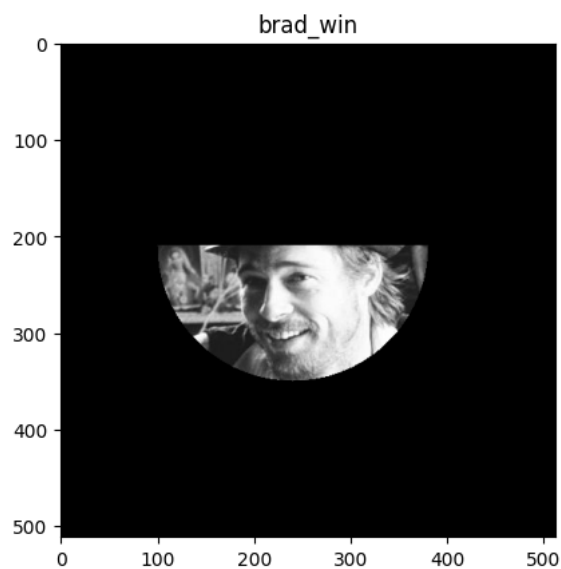
cameraman before and after shift



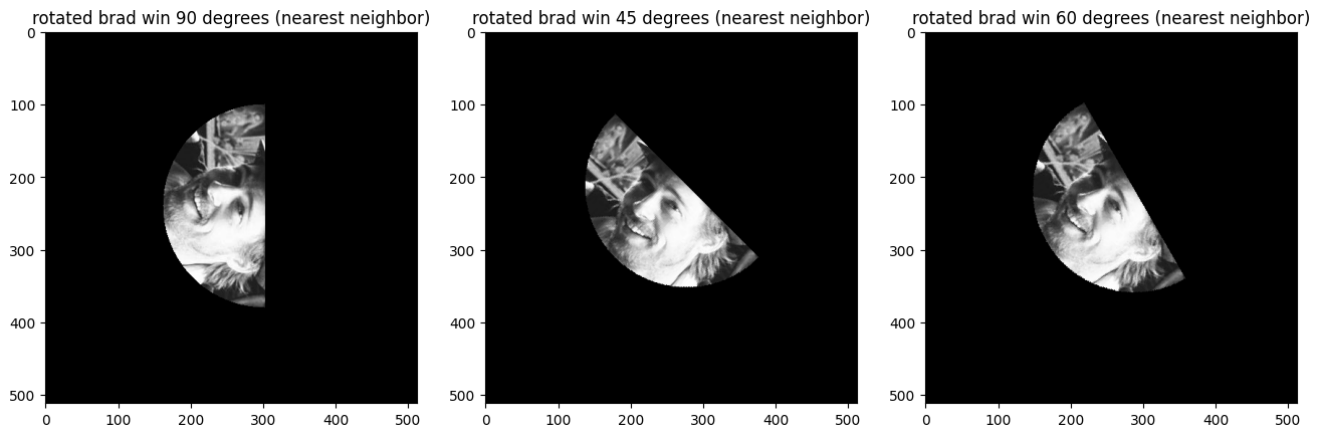
סעיף ד



סעיף ה

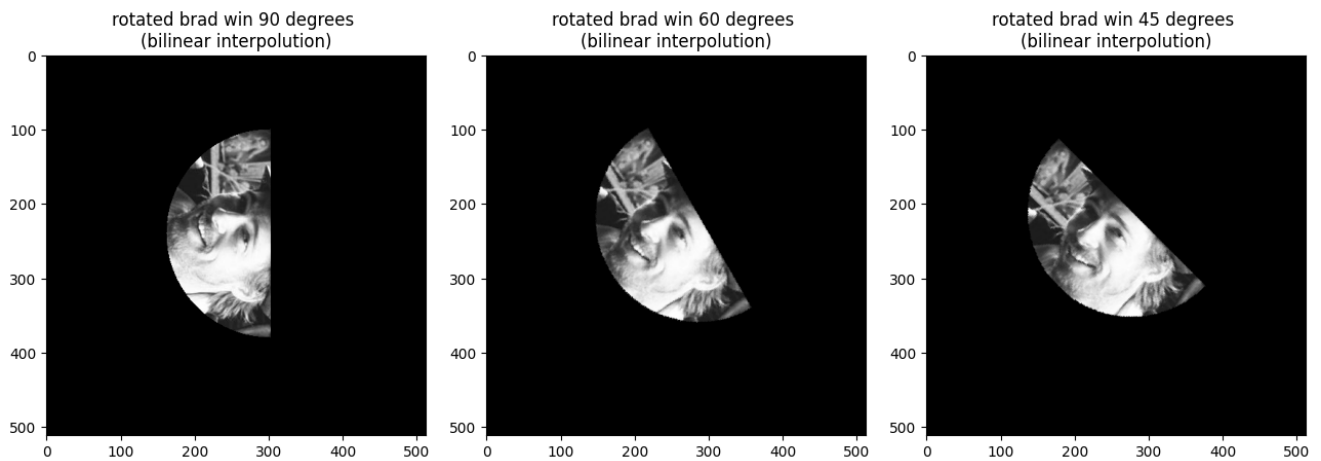


סעיף 1



הבעיה בתמונות האלו היא שהשימוש בעיגול הערכים הלא שלמים לפי nearest neighbors יוצר טשטוש בתמונה בגלל הזזת פיקסלים למקומות יחסית רחוקים מהמקום בו יועדו להיות וכך התמונה נראית פחות חדה. בנוסף גם המסגרת של המסכה מתעוותת בעקבות הסיבוב.

סעיף 2

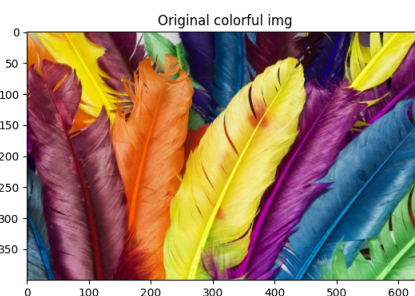
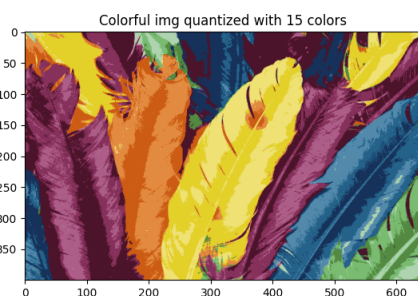
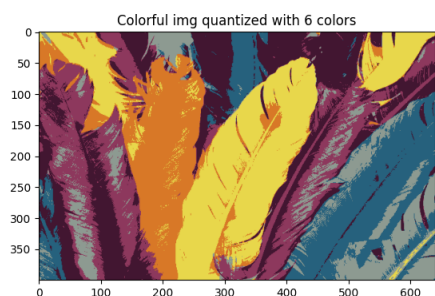
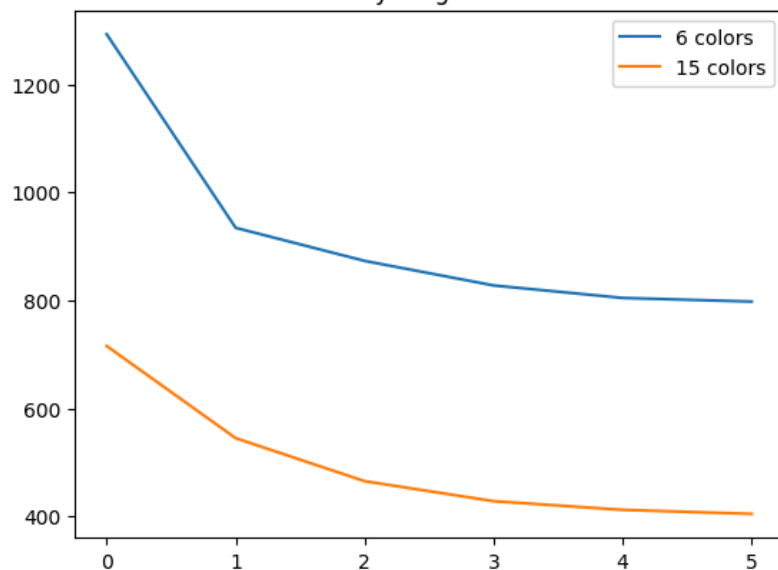


התצאות החדשות שקיבלנו נראות חדות יותר ופחות מעוותות (בעיקר במסגרת) מאשר התמונות הקודמות. זאת מאחר שבשיטה החדשה אנו מבצעים ממוצע משוקלל של פיקסלים שכנים במקרה של אינדקס לא שלם, במקום פשוט לעגל לערך הקרוב, מה שיוצר תמונה חלקה יותר. עבור סיבובים בכפולות של 90 מעלות לא יהיה הבדל בין השיטות מאחר שכל פיקסל יתמפה למיקום שלם ולא יהיה צורך לבצע אינטרפולציה או קירוב לשכן קרוב עבור אף פיקסל.

שאלה 5

סעיף ב

Distortions of Max-Lloyd Algorithm for each iteration

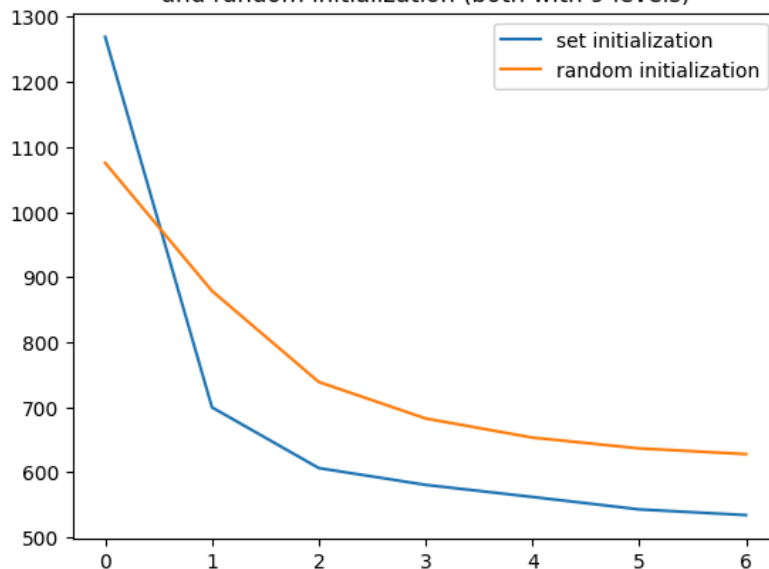


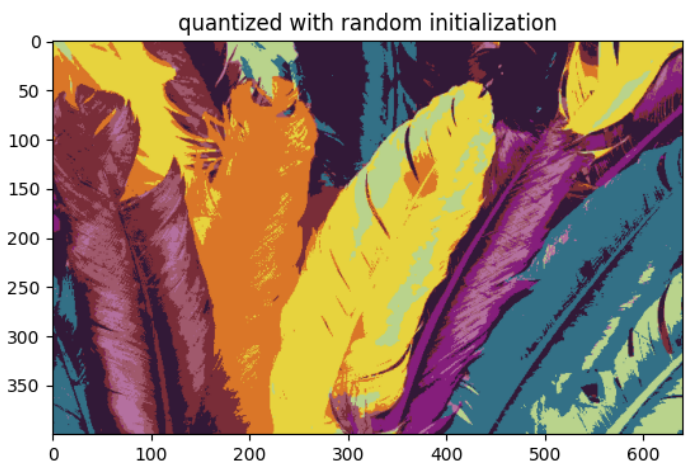
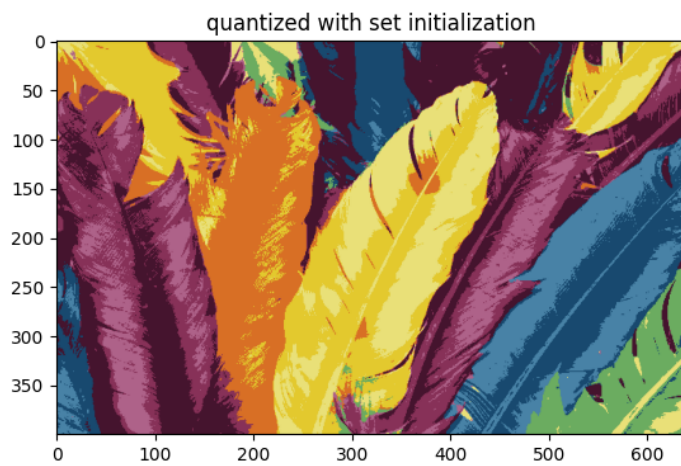
סעיף ג

התוצאה משתנה בכל פעם מאחר שערכי ההתחלה של האלגוריתם משתנים בכל ריצה ומאחר שהבעיה אינה קמורה בכל המרחב, ישנן נקודות מינימום לוקליות שונות שאליהן האלגוריתם יגיע בכל פעם לפי האתחול. כל נקודת מינימום כזאת תיצור לנו ייצוג שונה לתמונה בעזרת רמות ייצוג שונות.

סעיף ד

Distortions of Max-Lloyd Algorithm for each iteration with set initialization and random initialization (both with 9 levels)





התוצאות עבור האיתחול הקבוע (שמאל) טובות יותר מאשר עם איתחול רנדומלי עם אותו מספר של רמות ייצוג. לדעתנו הדבר נגרם מאחר שבאיתחול הקבוע אנו משתמשים בערכי ייצוג יחסית נפוצים בתמונה המקורית ולכן המרחק שעליהם לעבור כדי להתכנס קטן יותר והסיכוי שלהם להיתקע בנקודת מינימום לוקאלית קטן יותר, מה שמביא לתוצאות טובות יותר. בהתאם אנו רואים כי עבור האיתחול הקבוע, האלגוריתם מתכנס מהר יותר מאשר באיתחול רנדומלי. זה מעיד על כך שבחירת איתחול נכונה יכולה לעזור בהרצת האלגוריתם והגעה לתוצאות טובות יותר.

שאלה 6

סעיף א

האנטרופיה של התמונה היא: 7.011.

כלומר אם נבנה היסטוגרמה $h(x)$ של ערכי התמונה וממנה נייצר פונקציית צפיפות $p(x) = \frac{h(x)}{\sum_{x' \in [0,255]} h(x')}$ אז נקבל לפי חישוב

$$H(\text{heisenberg}) = -\sum_{x \in [0,255]} p(x) \log p(x) = 7.011$$
 האנטרופיה כי:

סעיף ג

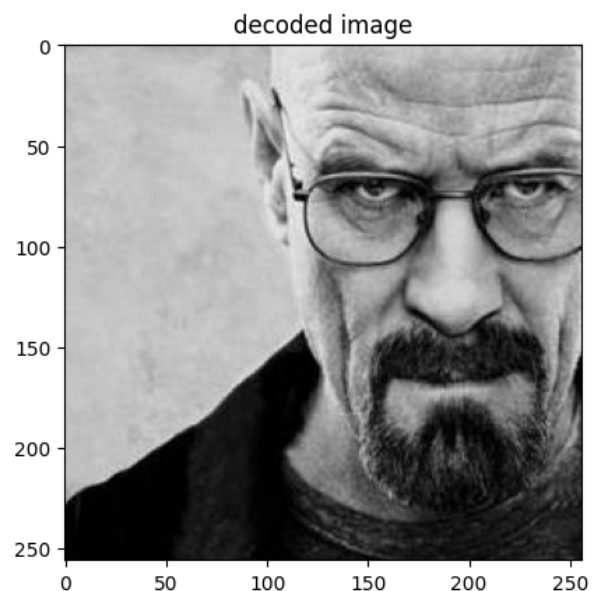
אורך כל הקוד (סה"כ תווים) הוא 460977.

$$C = \frac{460977 \text{ סה"כ תווים}}{256 \cdot 256 \text{ סה"כ פיקסלים}} = 7.0339$$
 אורך הקוד במוצע לפיקסל הוא 7.0339

$$r = \frac{L}{C} = \frac{\log_2(256)}{7.0339} = 1.13734$$
 יחס הדחיסה הוא 1.13734

סעיף ד

התמונה המשוחזרת:



ה-MSE שהתקבל הוא 0. זאת משום שקידוד Huffman הוא קידוד משמר ולכן התמונה המשוחזרת בהכרח זהה לתמונה המקורית.

סעיף ה

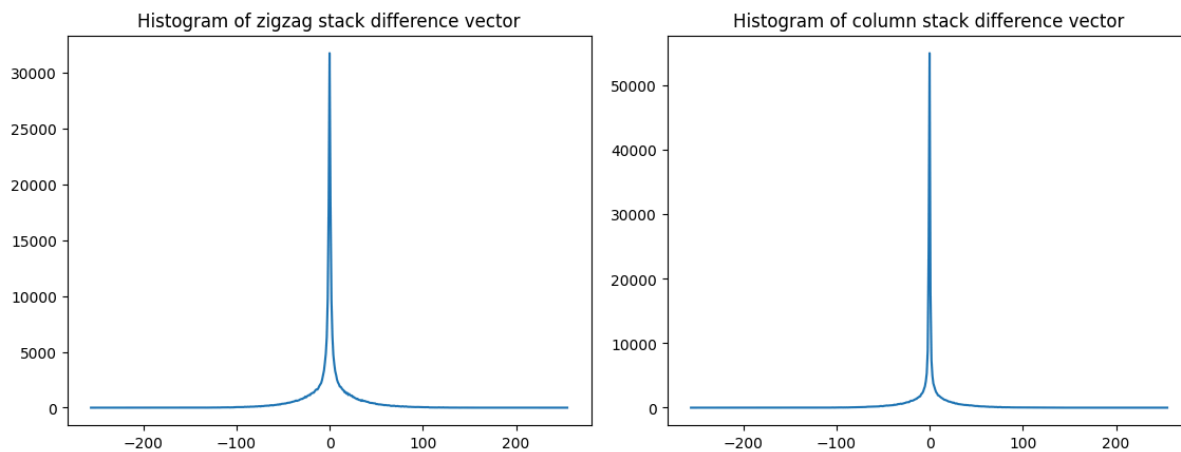
האנטרופיה של התמונה היא 2.0.

קצב המידע הממוצע שמתקבל מביניית קוד Huffman לתמונה הוא 2.0.

התוצאה התקבלה משום שבתמונה ישנם 4 ערכים שונים בסה"כ, שכמות הפעמים של אחד חוזר היא שווה ולכן גם ההסתברויות לכל אחד מהערכים זהה ל-0.25, לכן ההסתברויות של כל הערכים הן חזקות שלמות של 2 וכפי שלמדנו זה אומר שקוד Huffman ייתן תוצאה עם קצב מידע ממוצע ששווה לאנטרופיה.

סעיף ו

2. ניתן לראות כי בשני המקרים, ישנו ריכוז גבוה של ערכים סביב ה-0 ומעט ערכים בקצוות הטווח, דבר המצביע על כך שקיים קשר מרחבי בתמונה. סידור העמודות מקבל תוצאות מעט טובות יותר משל הזיג-זג, כנראה מאחר שקיים קשר חזק יותר בין פיקסלים בתוך העמודות מאשר באלכסון.



3. קצב המידע הממוצע עבור תמונת הפרשים של הוקטור שנוצר בסידור עמודה הוא 6.0172.

קצב המידע הממוצע עבור תמונת הפרשים של הוקטור שנוצר בסידור זיגזג הוא 5.9918.

כלומר קיבלנו ששיטת סידור העמודות עדיפה מאחר שהיא דורשת בממוצע פחות מידע עבור כל פיקסל.

הדבר הגיוני מאחר שהיסטוגרמת התמונה שסודרה סידור עמודות היא יותר צפופה סביב ה-0 ולכן ישנם פחות אותיות לקודד וכמות החזרות של כל אות שכן צריך לקודד היא יותר גבוהה ולכן נדרשים פחות ביטים לקידוד כל פיקסל בממוצע.

סעיף 2

קיימות תמונות כאלו, לדוגמא תמונות שישנם שינויים גדולים בין פיקסלים שכנים אשר יגררו תמונת הפרשים אשר מכילה ערכים גבוהים ושונים. השינויים הגדולים ידרשו כמות גדולה של ביטים יחסית לתמונה המקורית מאחר והערכים של תמונת הפרשים נמצאים בטווח כפול משל התמונה המקורית. בד"כ תמונת הפרשים עדיפה למרות הכפלת הטווח בגלל הצפיפות הגבוהה של הערכים סביב ה-0 אך בתמונות כמו שצינו היתרון הזה לא תקף.