---

title: 拓扑学作业 11 date: 2025-12-10 03:00:00 tags:

- Topology
- Homework categories:
- [Topology Homework] cover: cover.jpg excerpt: "第十二周作业" tikzjax: true mathjax: true math: true

---

> **[Arm.C5.T15]** Show that the Mobius strip and the cylinder both have fundamental group $\mathbb{Z}$.

根据粘合空间的定义，考虑全空间 $X := \mathbb{R} \times [0,1]$，那么 Mobius 带可以作为以下群作用的轨道空间，我们只写出生成元的作用：

$$g : (x,y) \mapsto (x+1, 1-y)$$

生成群为 $G$。首先全空间 $X$ 是单连通的，$g$ 作用是 $X$ 上的同胚映射，且是自由的，对于任意一点 $(x,y) \in X$，都存在邻域 $B(x,y;\frac{1}{2})$ 使得 $g^n(B) \cap B = \varnothing$ 对任意 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 成立。因此

$$\pi_1(\mathcal{M}) = \pi_1(X/G) \cong G \cong \mathbb{Z}$$

类似地，圆柱面可以作为以下群作用的轨道空间，我们只写出生成元的作用：

$$h : (x,y) \mapsto (x+1, y)$$

生成群为 $H$。同样可以分析，因此

$$\pi_1(\mathcal{C}) = \pi_1(X/H) \cong H \cong \mathbb{Z}$$

就说明了圆柱面和 Mobius 带的基本群均同构于 $\mathbb{Z}$。

> **[Arm.C10.T23]** If $X$ is a connected, locally path-connected, Hausdorff space, and if a finite group $G$ of order $n$ acts freely on $X$, show that $X$ is an $n$-sheeted covering of $X/G$.

连通且局部道路连通的空间是道路连通空间。在群作用下得到商映射

$$p : X \to X/G, \quad x \mapsto Gx$$

根据粘合空间的定义，商空间 $X/G$ 上的集合 $U \subseteq X/G$ 为开集，当且仅当 $p^{-1}(U)$ 在 $X$ 中为开集。结合 $X$ 是连通空间，这就保证了商空间 $X/G$ 也是连通空间；同样可以说明 $X/G$ 也是道路连通空间，因为在 $X$ 中的道路 $\gamma$ 可以诱导在 $X/G$ 上的道路 $p \circ \gamma$。从而 $X/G$ 的层数在全局是良定义的。现在只需要考虑 $X/G$ 上任意一点的层数即可。任取一点 $[x] \in X/G$，由于 $G$ 作用是自由的，所以

$$p^{-1}([x]) = \{gx : g \in G\} = \{g_1x, g_2x, \cdots, g_nx\}$$

自由保证了这 $n$ 个点两两不同。接下来取邻域：由于 $X$ 是 Hausdorff 空间，可以构造 $n$ 个互不相交的开邻域 $U_i$，使得

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} U_i \subseteq X, \quad g_i x \in U_i, \quad [U] := \bigcap_{i=1}^{n} p(U_i)$$

那么 $[U]$ 是 $X/G$ 上的一个开邻域，并且

$$p^{-1}([U]) = \bigsqcup_{i=1}^{n} U_i$$

从而

$$p|_{U_i \cap p^{-1}([U])} : U_i \cap p^{-1}([U]) \to [U]$$

是同胚映射。因此 $p : X \to X/G$ 是一个 $n$ 层覆叠映射。

> **[Hat.C2S1.T11]** Show that if $A$ is a retract of $X$ then the map $H_n(A) \to H_n(X)$ induced by the inclusion $A \subseteq X$ is injective.

由于 $A$ 是 $X$ 的收缩，所以 $A \simeq X$，而同伦等价会诱导同构的同调群。具体地，考虑嵌入映射和收缩映射，都是连续映射

$$i : A \to X, \quad r : X \to A$$

则同调函子诱导出同调群之间的群同态

$$i_* : H_n(A) \to H_n(X), \quad r_* : H_n(X) \to H_n(A)$$

由于 $r \circ i = \mathrm{id}_A$，所以

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{id}_{H_n(A)}$$

因此 $i_*$ 是单射。

> **[Hat.C2S1.T13]** Verify that $f \simeq g$ implies $f_* = g_*$ for induced homomorphisms of reduced homology groups.

约化同调群和同调群对应的增广链复形和链复形在 $n \geq 1$ 时是一致的，我们已经知道同伦等价映射在同调群之间诱导相同的同态，因此只需要考虑 $n = 0$ 的情形。对于任意空间 $X$，增广链复形为

$$\cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

所以只需证明

$$f_* : \widetilde{H}_0(X) \to \widetilde{H}_0(Y), \quad g_* : \widetilde{H}_0(X) \to \widetilde{H}_0(Y)$$

是相等映射。仿照之前的证明，考虑棱柱算子

$$P: C_0(X) \to C_1(Y), \quad P\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \sum_i n_i F \circ (\sigma_i \times \mathrm{id})|_{[y_i, \tilde{y}_i]}$$

其中 $F: X \times [0,1] \to Y$ 是 $f$ 和 $g$ 之间的同伦。然后计算

$$\partial P = \sum_i n_i \left(F(\sigma_i \times \mathrm{id})|_{[y_i]}\right) - \sum_i n_i \left(F(\sigma_i \times \mathrm{id})|_{[\tilde{y}_i]}\right) = \sum_i n_i (g\sigma_i - f\sigma_i) = g_* - f_*$$

所以对任意 $[c] \in \widetilde{H}_0(X)$，有 $c \in \ker \varepsilon$，因此

$$g_*([c]) - f_*([c]) = [g_*(c) - f_*(c)] = [\partial P(c)] = 0$$

这是因为 $\partial P(c) \in \operatorname{im} \partial$，所以 $f_* = g_*$。

> **[Hat.C2S1.T30]** In each of the following commutative diagrams assume that all maps but one are isomorphisms. Show that the remaining map must be an isomorphism as well.
>
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & C \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C \arrow[r] & D \arrow[u] \end{tikzcd}$$

同构映射 $f: A \to B$ 的逆映射 $f^{-1}: B \to A$ 也是同构映射。所以，不失一般性，第一个交换图本质在说同构映射的复合仍然是同构映射。后面也是显然的。