

2 第二十二次作业

22.1: 设 X, Y 为 Banach 空间, $K : X \rightarrow Y$ 为紧算子, 证明如下结论:

- 若 $\text{Im}(K)$ 是闭集, 则 $\dim \text{Im}(K) < \infty$;
- $\text{Im}(K) \subseteq Y$ 是可分子空间;
- 若 Y 可分, 则存在 Banach 空间 X 以及具有稠密像的紧算子 $K : X \rightarrow Y$ 。

Proof. (1) $\text{Im}(K)$ 是 Banach 空间 Y 的闭子空间, 从而是 Banach 空间。将值域限制, 考虑 $K : X \rightarrow \text{Im}(K)$ 是满射, 由开映射定理, $\delta \mathbb{B}_{\text{Im}(K)} \subseteq K \mathbb{B}_X$, 而后者是紧的, 所以 $\mathbb{B}_{\text{Im}(K)}$ 是闭集, 推出是紧集, 这等价于 $\dim \text{Im}(K) < \infty$ 。

(2) K 是紧算子, 所以 $K \mathbb{B}_X$ 紧集, 在度量拓扑下是完全有界集。从而可以选取 $K \mathbb{B}_X$ 的子集作为 $K \mathbb{B}_X$ 的可数稠密子集, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n K \mathbb{B}_X$ 是 $\text{Im}(K)$ 的可数稠密子集。

(3) 熟知, 有界秩算子是紧算子, 而紧算子的极限仍然是紧算子。所以现在构造有界秩算子。因为 Y 是可分的, 所以取可数稠密子集 $\{y_n\} \subseteq \mathbb{B}_Y$, 选取 ℓ^1 作为 X , 分量对应 y_n , 通过截断定义有界秩算子

$$A_m : \ell^1 \rightarrow Y, e_n \mapsto \begin{cases} y_n & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}; \quad A_m(a_n)_{n \geq 1} = \sum_{k=1}^m \frac{a_k y_k}{k^2}; \quad A(a_n)_{n \geq 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k y_k}{k^2}$$

因为 A_m 是有界秩算子, 所以是紧算子。下面证明 $\|A - A_m\| \rightarrow 0$, 因为

$$\|A - A_m\| = \sup_{\|\xi\|_{\ell^1}=1, \xi \in \ell^1} |\langle A - A_m, \xi \rangle| \leq \sup_{\|\xi\|_{\ell^1}=1} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k y_k}{k^2} \right| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

所以 A 是紧算子。另一方面, 对任意 $y \in Y$, 取有理数逼近 $r_k \rightarrow \|y\|$, 则有 $r_k y_{n_k} \rightarrow y$ ($\{r_i y_n\}_{i,n}$ 是 Y 上的可数稠密子集), 并且 $r_i y_n = K(r_i e_n)$, 所以 A 具有稠密像。 \square

22.2: 设 X 为 Banach 空间, $C \subseteq X$ 为闭子集, 则如下结论等价:

- C 是紧集;
- 存在序列 $x_n \in X$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$, $C \subseteq \overline{\text{Conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ 。

(1) 必要性。在度量空间中, 紧集是完全有界的, 所以可以通过以下方式选取折线序列逼近 C 的点。给定 $r_1 = 1/3$, 则存在有限个球 $B(x, 1/3)$ 覆盖 C , 记这些球心构成 A_1 ; 归纳地构造, 取 $r_n = 1/3^n$, 则存在有限个球覆盖 C , 并且球心构成 $A_n \subseteq A_{n-1}$ 。设每次构造的球心都和其所属前一次构造的球的球心连线, 并放大长度

$$\tilde{A}_n := \{2^n(x - x') \in X : x \in A_n \cap B(x', r_{n-1}), x' \in A_{n-1}\}; \quad \tilde{A}_1 := \{2x \in X : x \in A_1\}$$

这样我们得到了序列 $\bigcup_i \tilde{A}_i \subseteq X$, 其顺序是取尽指标低的元素, 再取指标高的元素。我们在向量长度上做一些让步, 以留出余地安排凸包的线性组合。至此, 对于任意 $x \in C$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 总是存在 $x_n \in A_n$ 使得 $x \in B(x_n, 3^{-n})$, 由归

纳性质知道 $x_n \in B(x_{n-1}, 3^{-n+1}), \dots$, 设 $x_0 = 0$, 所以每个点都能找到对应的序列 $\{x_n\} \in \bigcup_i \tilde{A}_i$ 线性组合逼近

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \frac{2^n(x_n - x_{n-1})}{2^n} \right\| \leq 3^{-n}$$

此外, 由于以下结果, 序列 $\bigcup_i \tilde{A}_i \subseteq X$ 满足 $\lim \|x\| \rightarrow 0$. 结合以上, 说明命题

$$\|\tilde{x}\| \leq 2^n r_{n-1} \leq \frac{2^n}{3^{n-1}}, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{A}_n$$

(2) 充分性. 只需要证明 $K := \overline{\text{Conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ 是紧集, 在度量空间中只需证明是列紧的. 对于任意点列 $\{y^n\} \subseteq K$, 满足 $y^n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n x_k$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得 $\|x_k\| \leq \varepsilon/2$ 对任意 $k \geq N(\varepsilon) + 1$ 成立. 因此我们关心前 N 个分量, 由于 $[0, 1]^N$ 是紧集, 所以总能找到无穷子列 $\{y^{n_i}\}$ 使得

$$\left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k^{n_i} - \lambda_k^{n_j} \right\| \leq \varepsilon/2 \implies \|y^{n_i} - y^{n_j}\| \leq \varepsilon$$

变动 $\varepsilon > 0$, 结合对角线法, 我们找到了 Cauchy 列, 而 K 是 Banach 空间的闭子集, 所以是收敛列, 故列紧. \square

22.3: 设 $1 \leq p < q < \infty$, 按照如下流程证明所有有界线性算子 $A: \ell^q \rightarrow \ell^p$ 都是紧的:

- 固定有界线性算子 $A: \ell^q \rightarrow \ell^p$, $\|A\| = 1$ 和 ℓ^q 中弱收敛于 0 的序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 则只需证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_p = 0$;
- 若 $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 ℓ^p 中弱收敛于 0 的序列, 则 $\overline{\lim} \|y + y_n\|_p^p = \|y\|_p^p + \overline{\lim} \|y_n\|_p^p$ 对任意 $y \in \ell^p$ 成立;
- 考虑 (1) 中的 $(x_n)_n, A$, 固定常数 $\varepsilon > 0$ 并选取 $x \in \ell^q$ 使得 $\|x\|_q = 1, 1 - \varepsilon < \|Ax\|_p < 1$, 则对任意 $\lambda > 0$ 成立

$$(\|Ax\|_p^p + \lambda^p \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\|x\|_q^q + \lambda^q \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_q^q)^{\frac{1}{q}}$$

- 存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $\lambda > 0, \varepsilon > 0$ 成立

$$\lambda^p \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_p^p \leq (1 + \lambda^q C^q)^{\frac{p}{q}} - (1 - \varepsilon)^p$$

- 在 (4) 中不等式令 $\lambda := C^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{q}}$ 得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_p^p \leq C^p \varepsilon^{1 - \frac{p}{q}} \left[\frac{(1 + \varepsilon)^{\frac{p}{q}} - 1}{\varepsilon} + \frac{1 - (1 - \varepsilon)^p}{\varepsilon} \right]$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 成立, 在上式中取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 来证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_p = 0$.

Proof. (1) 如果 (1) 中的前提成立, 则对于 ℓ^q 中的弱收敛列 $x_n \xrightarrow{w} x$, 都有 $x_n - x \xrightarrow{w} 0$, 从而应用前提, 推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(x_n - x)\|_p = 0 \implies Ax_n \xrightarrow{s} Ax$$

(2) 一方面, 由于 $p \geq 1$, 所以由 x^p 的凸性可知

$$\|y + y_n\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y^k + y_n^k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |y^k|^p + |y_n^k|^p \leq \|y\|_p^p + \|y_n\|_p^p$$

同时取上极限即可. 另一方面, 由于弱收敛 $y_n \xrightarrow{w} 0$, 所以 $p \in [1, \infty)$ 时, 可以选取测试函数 $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

$$|\langle y_n, e_k \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies y_n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

这说明可以控制 y_n 的有限项一致收敛, 而 $y \in \ell^p$ 在选定后, 可以控制 $\sum_{m=N+1}^{\infty} |y^m|^p$ 的收敛。因此

$$\begin{aligned} \|y + y_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^N |y^k + y_n^k|^p + \sum_{k=1}^N |y_n^k|^p - \sum_{k=1}^N |y_n^k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k + y_n^k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p - \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p \\ &\geq \sum_{k=1}^N |y^k|^p - \sum_{k=1}^N |y_n^k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_n^k|^p - \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p - \sum_{k=1}^N |y_n^k|^p \end{aligned}$$

固定 N , 同时取 n 的上极限, 得到

$$\overline{\lim}_n \|y + y_n\|_p^p \geq \sum_{k=1}^N |y^k|^p + \overline{\lim}_n \|y_n\|_p^p - \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p$$

取 N 的极限, 由收敛性得证。

(3) 直接计算, 应用 (2) 的结论即可

$$(\|x\|_q^q + \lambda^q \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_q^q)^{\frac{1}{q}} = (\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x + \lambda x_n\|_q^q)^{\frac{1}{q}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x + \lambda x_n\|_q \cdot \|A\| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Ax + \lambda Ax_n\|_p$$

剩最后一步, 再次应用 (2) 的结果即可。为此, 我们需要说明 $Ax_n \xrightarrow{w} 0$, 这是因为 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 所以对任意 $\varphi_p \in (\ell^p)^*$, 有

$$|\langle \varphi_p, Ax_n \rangle| \leq |\langle \varphi_p \circ A, x_n \rangle| \rightarrow 0 \implies Ax_n \xrightarrow{w} 0$$

(4) 由 (3) 的结果知道, 取 $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_q$ 即可。

$$\lambda^p \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_p^p \leq (\|x\|_q^q + \lambda^q \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_q^q)^{\frac{p}{q}} - \|Ax\|_p^p \leq (1 + \lambda^q C^q)^{\frac{p}{q}} - (1 - \varepsilon)^p$$

(5) 由题目表述即可证明完整命题, 具体估计只需用到 $(1+x)^p \approx 1+xp$ 的展开。 □