

5 第二十五次作业

25.1: 说明右平移算子 $R: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ 使得 $R(\{x_i\}_{i \geq 1}) = (0, x_1, x_2, \dots)$, 满足 $C_\sigma(R) = \{|\lambda| = 1\}$ 且 $R_\sigma(R) = \{|\lambda| < 1\}$ 。

Proof. (1) 先说明不存在点谱, 因为对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 对任意 $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots)$ 和 $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots)$ 都有

$$(\lambda I - R)(x^1) = (\lambda x_1^1, \lambda x_2^1 - x_1^1, \dots) = (\lambda x_1^2, \lambda x_2^2 - x_1^2, \dots) = (\lambda I - R)(x^2) \implies x^1 = x^2$$

(2) $\{|\lambda| = 1\}$ 是连续谱。对于任意 $y \in \ell^2$, 注意到取截断数列, 配备均匀 m 项的衰减:

$$x_N := \left(\sum_{i=1}^1 y_i, \sum_{i=1}^2 y_i, \dots, \sum_{i=1}^{N-1} y_i, \sum_{i=1}^N y_i, \frac{(m-1) \sum_{i=1}^N y_i}{m}, \frac{(m-2) \sum_{i=1}^N y_i}{m}, \dots, 0, 0, \dots \right)$$

则有如下估计, 结合 $y \in \ell^2$ 可知尾部受到控制, 所以能说明 $y \in \overline{\text{Ran}(I - R)}$:

$$y - (I - R)(x_N) = (0, 0, \dots, 0, y_{N+1} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m}, y_{N+2} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m}, \dots, y_{N+m} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m}, 0, 0, \dots)$$

只要 N 足够大, y_{N+1}, \dots, y_{N+m} 就可以被控制 (且与 m 无关); 然后取 m 足够大, 也能控制:

$$\sum_{k=1}^m \left| y_{N+k} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m} \right|^2 \leq 2 \sum_{k=1}^m |y_{N+k}|^2 + 2 \cdot \frac{|\sum_{i=1}^N y_i|^2}{m} \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k|^2 + 2 \cdot \frac{|\sum_{i=1}^N y_i|^2}{m}$$

接下来说明 $\text{Ran}(I - R) \neq \ell^2$, 只需要找一个反例, 如 $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^2 \setminus \text{Ran}(I - R)$ 。假设存在 $x \in \ell^2$ 使得 $(I - R)x = y$, 那么解得 $x = (1, 1, 1, \dots)$, 矛盾。

(3) $\{|\lambda| < 1\}$ 是剩余谱。对于任意 $|\lambda| < 1$, 可以验证 $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^2 \setminus \text{Ran}(\lambda I - R)$ 。另外, 注意到 $\text{Ran}(\lambda I - R) \subseteq \{(\bar{\lambda}^k)_{k \geq 1}\}^\perp$ 。具体而言, 在 Hilbert 空间 ℓ^2 中, 定义连续线性算子: $\Phi_\lambda: \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$, 使得对任意 $x \in X$ 有

$$\Phi_\lambda(x) = (x, (\bar{\lambda}^k)_{k \geq 1})$$

而作用在 $\text{Ran}(\lambda I - R)$ 上, 可以得到

$$((\lambda I - R)x, (\bar{\lambda}^k)_{k \geq 1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} x_k - \lambda^k x_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{k+1} x_k = 0$$

因此 $\text{Ran}(\lambda I - R) \subseteq \ker \Phi_\lambda$, 后者复维数为 1 并且是闭子空间。 ℓ^2 为无穷维复线性空间, 所以 $\overline{\text{Ran}(\lambda I - R)} \subseteq \ker \Phi_\lambda \subsetneq \ell^2$ 。

(4) $\{|\lambda| > 1\}$ 是正则集。显然 $\|R\| = 1$, 应用 Neumann 定理说明 $\lambda I - R$ 是有界线性双射, 所以 $\lambda \in \rho(R)$ 。 \square

25.2: 设 X 为复 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X)$ 为双射且是有界复线性算子, 实数 ε, r 使得 $0 < \varepsilon < \|A^{-1}\|^{-1} \leq \|A\| < r$, 证明 $\{\varepsilon < |\lambda| < r\} \supseteq \sigma(A)$ 。

Proof. 原题干存在问题, 已将 \subseteq 改为 \supseteq , 前者显然与谱的紧性矛盾。在更新后的题目中, 应用 Neumann 定理。对任意 $|\lambda| > \|A\|$ 有 $\lambda \in \rho(A)$; 另一边, 对任意 $|\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}$ 有 $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$ (忽略 $\lambda = 0$, 显然 0 是 A, A^{-1} 的正则值, 因为由逆算子定理知道 A^{-1} 是有界复线性算子), 结合 A^{-1}, A 是同构, 知道 $(\lambda^{-1}I - A^{-1})A = -\lambda^{-1}(\lambda I - A)$ 仍然是同构, 所以 $\lambda \in \rho(A)$ 。综上 $\{|\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}\} \cup \{|\lambda| > \|A\|\} \subseteq \rho(A)$, 取补集

$$\{r > |\lambda| > \varepsilon\} \supseteq \{\|A\| \geq |\lambda| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\} \supseteq \sigma(A)$$

得证。 \square

25.3: 设 X 为复 Banach 空间, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 为开集, $f: \Omega \rightarrow X$ 为全纯函数:

- f 的导数 $f': \Omega \rightarrow X$ 也是全纯的;
- f 是光滑的;
- 取 $z_0 \in \Omega, r > 0$ 使得 $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$, 定义 $\gamma(t) := z_0 + re^{2\pi it}$, 证明 f 在 $w \in B_r(z_0)$ 处的第 n 阶导数由 Cauchy 积分公式给出:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz$$

Proof. 类似于讲义中的证明, 可以说明: f 是全纯的, 当且仅当对任意 $z_0 \in \Omega, r > 0$, 满足 $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$, 并且对任意 $x^* \in X^*, w \in B_r(z_0)$ 都有 Cauchy 公式成立

$$\langle x^*, f(w) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w} dz$$

而 f' 满足 $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(w+h) - f(w) - hf'(w)\| = 0$, 所以取 $0 < |h| < r - |w|$, 有

$$\langle x^*, f(w+h) - f(w) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w-h} - \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w} dz = \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w-h)(z-w)} dz$$

两边同除 $h \in \mathbb{C}$, 取极限 $h \rightarrow 0$ 。根据定义 (全纯定义和 Riemann 积分定义)

$$\frac{\langle x^*, f(w+h) - f(w) \rangle}{h} \rightarrow \langle x^*, f'(w) \rangle; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w-h)(z-w)} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w)^2} dz$$

因为 $f(z)$ 是连续函数, 所以在 γ 上是有界的, 故向量值积分收敛, 说明满足如下交换

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w)^2} dz = \left\langle x^*, \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right\rangle$$

由于 X 是 Banach 空间, 所以由 x^* 的任意性知道

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$$

在这个表达下, 用定义验证全纯性:

$$0 = \frac{f'(w+h) - f'(w) - \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)(2z-2w-h)}{(z-w-h)^2(z-w)^2} dz}{h} \rightarrow \frac{f'(w+h) - f'(w) - h \cdot \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^3} dz}{h}$$

这说明 $f''(w)$ 存在, 所以 $f'(w)$ 是全纯的

$$f''(w) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^3} dz$$

而这个过程可以不断递推下去, 从而说明 f 是复光滑的。此外, 仿照上述第 2 阶导数的求解过程, 可以归纳地得到第 n 阶导数, 即由归纳前提

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz$$

推出

$$\frac{f^{(k)}(w+h) - f^{(k)}(w) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)[(z-w)^{k+1} - (z-w-h)^{k+1}]}{(z-w-h)^{k+1}(z-w)^{k+1}} dz}{h} \rightarrow \frac{f^{(k)}(w+h) - f^{(k)}(w) - h \cdot \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+2}} dz}{h}$$

整理得证。 □

25.4: 设 X 为复 Banach 空间, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 为 X 中序列, 且

$$\rho := \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{1/n}}} > 0$$

证明幂级数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 对任意满足 $|z| < \rho$ 的复数 z 收敛, 并且 $f: B_\rho(0) \rightarrow X$ 是全纯函数; 取 $0 < r < \rho$ 并定义环路 $\gamma(t) = re^{2\pi it}$, 证明系数 a_n 由以下公式给出:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

Proof. (1) 对于幂级数, 由几何级数控制模长。其中由上极限知道, 当 N 足够大时, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $|1 + \varepsilon\rho||z| < \rho$ 并且 $\|a_n\|^{1/n} \leq \rho^{-1} + \varepsilon$ 对任意 $n \geq N$ 成立, 则

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n \right\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} (\rho^{-1} + \varepsilon)^n \cdot |z|^n \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|1 + \varepsilon\rho|^n |z|^n}{\rho^n}$$

由定义验证全纯性。对于任意 $z \in B_\rho(0)$, 和 $0 < |h| < \rho - |z|$, 有 (下面有说明)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(z+h) - f(z) - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{h} \right\| &= \left\| \frac{f(z+h) - f(z) - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{h} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^n z^{n-k} h^{k-1} \binom{n}{k} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^{-1} + \varepsilon)^n (\varepsilon + |z|)^n \cdot \sqrt[3]{h} = \sqrt[3]{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1 + \varepsilon\rho|^n (\varepsilon + |z|)^n}{\rho^n} \end{aligned}$$

第一步放缩是直接展开, 然后用三角不等式; 第二步放缩是做了简化, 因为之前分析知道 (可以加强), 给定 $z \in B_\rho(0)$ 后, 存在一个足够小的 $\varepsilon > 0$ 满足关系式 $|1 + \varepsilon\rho|(\varepsilon + |z|) < \rho$, 那么总是存在一个足够大的 N 使得当 $n \geq N$ 时总是有 $\|a_n\|^{1/n} \leq \rho^{-1} + \varepsilon$ 。因为 N 之前是有限项, 每一项都带 h , 所以当 $h \rightarrow 0$ 时可以被控制。据此, 不妨设 $N = 1$ 。同时, 不妨设 $|h| < 1$, 当 $|h| < \varepsilon^3$ 时, 可以具体写出第二个放缩过程

$$\left| \sum_{k=2}^n z^{n-k} h^{k-1} \binom{n}{k} \right| \leq \sqrt[3]{h} \cdot \sum_{k=2}^n |z^{n-k}| (\sqrt[3]{h})^k \binom{n}{k} \leq \sqrt[3]{h} \cdot (|z| + \varepsilon)^n$$

从而当 $h \rightarrow 0$ 时, 左端趋于 0, 说明全纯。因为幂级数在定义域上绝对收敛, 积分求和可以换序, 由题目 25.3 知道

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k}{z^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\gamma} z^{k-n-1} dz = n! a_n$$

这是根据复积分计算得到的。 □

25.5: 设 X 为复 Banach 空间, $A: X \rightarrow X$ 为有界复线性算子, $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 为复系数多项式, 直接证明算子 $p(A) := \sum_{k=0}^n a_k A^k$ 满足 $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ 。

Proof. 不使用算子演算的性质。(1) 首先证明 $\sigma(p(A)) \supseteq p(\sigma(A))$, 固定 $\lambda \in \sigma(A)$, 则存在复系数多项式 q 使得 $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$, 即 $p(\lambda)I - p(A) = (\lambda I - A)q(A)$, 根据定义, $\lambda I - A$ 不是双射, 所以 $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$ 。

(2) 其次证明 $p(\sigma(A)) \supseteq \sigma(p(A))$, 不妨设 $a := a_n \neq 0$, 固定 $\mu \in \sigma(p(A))$ 以及 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为多项式 $p - \mu$ 的零点, 于是 $p(z) - \mu = a \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)$, 则 $p(A) - \mu I = a \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)$, 如果 $A - \lambda_i I$ 都是双射, 那么左侧也是双射, 与 μ 的定义矛盾, 因此至少存在一个 λ_i 使得 $\lambda_i I - A$ 不是双射, 所以 $\lambda_i \in \sigma(A)$, 因此代入多项式得到 $p(\lambda_i) - \mu = 0$, 即 $\mu \in p(\sigma(A))$ 。 □