

# 5 第二十五次作业

**25.1:** 说明右平移算子  $R : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  使得  $R(\{x_i\}_{i \geq 1}) = (0, x_1, x_2, \dots)$ , 满足  $C_\sigma(R) = \{|\lambda| = 1\}$  且  $R_\sigma(R) = \{|\lambda| < 1\}$ 。

**Proof.** (1) 先说明不存在点谱, 因为对于任意  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 对任意  $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots)$  和  $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots)$  都有

$$(\lambda I - R)(x^1) = (\lambda x_1^1, \lambda x_2^1 - x_1^1, \dots) = (\lambda x_1^2, \lambda x_2^2 - x_1^2, \dots) = (\lambda I - R)(x^2) \implies x^1 = x^2$$

(2)  $\{|\lambda| = 1\}$  是连续谱。对于任意  $y \in \ell^2$ , 注意到取截断数列, 配备均匀  $m$  项的衰减:

$$x_N := \left( \sum_{i=1}^1 y_i, \sum_{i=1}^2 y_i, \dots, \sum_{i=1}^{N-1} y_i, \sum_{i=1}^N y_i, \frac{(m-1) \sum_{i=1}^N y_i}{m}, \frac{(m-2) \sum_{i=1}^N y_i}{m}, \dots, 0, 0, \dots \right)$$

则有如下估计, 结合  $y \in \ell^2$  可知尾部受到控制, 所以能说明  $y \in \overline{\text{Ran}(I-R)}$ :

$$y - (I - R)(x_N) = (0, 0, \dots, 0, y_{N+1} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m}, y_{N+2} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m}, \dots, y_{N+m} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m}, 0, 0, \dots)$$

只要  $N$  足够大,  $y_{N+1}, \dots, y_{N+m}$  就可以被控制 (且与  $m$  无关); 然后取  $m$  足够大, 也能控制:

$$\sum_{k=1}^m \left| y_{N+k} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m} \right|^2 \leq 2 \sum_{k=1}^m |y_{N+k}|^2 + 2 \cdot \frac{|\sum_{i=1}^N y_i|^2}{m} \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k|^2 + 2 \cdot \frac{|\sum_{i=1}^N y_i|^2}{m}$$

接下来说明  $\text{Ran}(I-R) \neq \ell^2$ , 只需要找一个反例, 如  $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^2 \setminus \text{Ran}(I-R)$ 。假设存在  $x \in \ell^2$  使得  $(I-R)x = y$ , 那么解得  $x = (1, 1, 1, \dots)$ , 矛盾。

(3)  $\{|\lambda| < 1\}$  是剩余谱。对于任意  $|\lambda| < 1$ , 可以验证  $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^2 \setminus \text{Ran}(\lambda I - R)$ 。另外, 注意到  $\text{Ran}(\lambda I - R) \subseteq \overline{(\bar{\lambda}^k)_{k \geq 1}}^\perp$ 。具体而言, 在 Hilbert 空间  $\ell^2$  中, 定义连续线性算子:  $\Phi_\lambda : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , 使得对任意  $x \in X$  有

$$\Phi_\lambda(x) = (x, (\bar{\lambda}^k)_{k \geq 1})$$

而作用在  $\text{Ran}(\lambda I - R)$  上, 可以得到

$$((\lambda I - R)x, (\bar{\lambda}^k)_{k \geq 1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} x_k - \bar{\lambda}^k x_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{k+1} x_k = 0$$

因此  $\text{Ran}(\lambda I - R) \subseteq \ker \Phi_\lambda$ , 后者复维数为 1 并且是闭子空间。 $\ell^2$  为无穷维复线性空间, 所以  $\overline{\text{Ran}(\lambda I - R)} \subseteq \ker \Phi_\lambda \subseteq \ell^2$ 。

(4)  $\{|\lambda| > 1\}$  是正则集。显然  $\|R\| = 1$ , 应用 Neumann 定理说明  $\lambda I - R$  是有界线性双射, 所以  $\lambda \in \rho(R)$ 。  $\square$

**25.2:** 设  $X$  为复 Banach 空间,  $A \in \mathcal{L}^\mathbb{C}(X)$  为双射且是有界复线性算子, 实数  $\varepsilon, r$  使得  $0 < \varepsilon < \|A^{-1}\|^{-1} \leq \|A\| < r$ , 证明  $\{\varepsilon < |\lambda| < r\} \supseteq \sigma(A)$ 。

**Proof.** 原题干存在问题, 已将  $\subseteq$  改为  $\supseteq$ , 前者显然与谱的紧性矛盾。在更新后的题目中, 应用 Neumann 定理。对任意  $|\lambda| > \|A\|$  有  $\lambda \in \rho(A)$ ; 另一边, 对任意  $|\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}$  有  $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$  (忽略  $\lambda = 0$ , 显然 0 是  $A, A^{-1}$  的正则值, 因为由逆算子定理知道  $A^{-1}$  是有界复线性算子), 结合  $A^{-1}, A$  是同构, 知道  $(\lambda^{-1}I - A^{-1})A = -\lambda^{-1}(\lambda I - A)$  仍然是同构, 所以  $\lambda \in \rho(A)$ 。综上  $\{|\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}\} \cup \{|\lambda| > \|A\|\} \subseteq \rho(A)$ , 取补集

$$\{r > |\lambda| > \varepsilon\} \supseteq \{\|A\| \geq |\lambda| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\} \supseteq \sigma(A)$$

得证。  $\square$

25.3: 设  $X$  为复 Banach 空间,  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  为开集,  $f: \Omega \rightarrow X$  为全纯函数:

- $f$  的导数  $f': \Omega \rightarrow X$  也是全纯的;
- $f$  是光滑的;
- 取  $z_0 \in \Omega, r > 0$  使得  $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$ , 定义  $\gamma(t) := z_0 + re^{2\pi it}$ , 证明  $f$  在  $w \in B_r(z_0)$  处的第  $n$  阶导数由 Cauchy 积分公式给出:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz$$

**Proof.** 类似于讲义中的证明, 可以说明:  $f$  是全纯的, 当且仅当对任意  $z_0 \in \Omega, r > 0$ , 满足  $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$ , 并且对任意  $x^* \in X^*, w \in B_r(z_0)$  都有 Cauchy 公式成立

$$\langle x^*, f(w) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w} dz$$

而  $f'$  满足  $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(w+h) - f(w) - hf'(w)\| = 0$ , 所以取  $0 < |h| < r - |w|$ , 有

$$\langle x^*, f(w+h) - f(w) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w-h} dz - \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w} dz = \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w-h)(z-w)} dz$$

两边同除  $h \in \mathbb{C}$ , 取极限  $h \rightarrow 0$ 。根据定义 (全纯定义和 Riemann 积分定义)

$$\frac{\langle x^*, f(w+h) - f(w) \rangle}{h} \rightarrow \langle x^*, f'(w) \rangle; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w-h)(z-w)} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w)^2} dz$$

因为  $f(z)$  是连续函数, 所以在  $\gamma$  上是有界的, 故向量值积分收敛, 说明满足如下交换

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w)^2} dz = \left\langle x^*, \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right\rangle$$

由于  $X$  是 Banach 空间, 所以由  $x^*$  的任意性知道

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$$

在这个表达下, 用定义验证全纯性:

$$0 = \frac{f'(w+h) - f'(w) - \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)(2z-2w-h)}{(z-w-h)^2(z-w)^2} dz}{h} \rightarrow \frac{f'(w+h) - f'(w) - h \cdot \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^3} dz}{h}$$

这说明  $f''(w)$  存在, 所以  $f'(w)$  是全纯的

$$f''(w) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^3} dz$$

而这个过程可以不断递推下去, 从而说明  $f$  是复光滑的。此外, 仿照上述第 2 阶导数的求解过程, 可以归纳地得到第  $n$  阶导数, 即由归纳前提

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz$$

推出

$$\frac{f^{(k)}(w+h) - f^{(k)}(w) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)[(z-w)^{k+1} - (z-w-h)^{k+1}]}{(z-w-h)^{k+1}(z-w)^{k+1}} dz}{h} \rightarrow \frac{f^{(k)}(w+h) - f^{(k)}(w) - h \cdot \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+2}} dz}{h}$$

整理得证。  $\square$

**25.4:** 设  $X$  为复 Banach 空间,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  为  $X$  中序列, 且

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{1/n}} > 0$$

证明幂级数  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  对任意满足  $|z| < \rho$  的复数  $z$  收敛, 并且  $f : B_\rho(0) \rightarrow X$  是全纯函数; 取  $0 < r < \rho$  并定义环路  $\gamma(t) = re^{2\pi it}$ , 证明系数  $a_n$  由以下公式给出:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

**Proof.** (1) 对于幂级数, 由几何级数控制模长。其中由上极限知道, 当  $N$  足够大时, 存在  $\varepsilon > 0$  使得  $|1 + \varepsilon\rho||z| < \rho$  并且  $\|a_n\|^{1/n} \leq \rho^{-1} + \varepsilon$  对任意  $n \geq N$  成立, 则

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n \right\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} (\rho^{-1} + \varepsilon)^n \cdot |z|^n \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|1 + \varepsilon\rho|^n |z|^n}{\rho^n}$$

由定义验证全纯性。对于任意  $z \in B_\rho(0)$ , 和  $0 < |h| < \rho - |z|$ , 有 (下面有说明)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(z+h) - f(z) - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{h} \right\| &= \left\| \frac{f(z+h) - f(z) - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{h} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^n z^{n-k} h^{k-1} \binom{n}{k} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^{-1} + \varepsilon)^n (\varepsilon + |z|)^n \cdot \sqrt[n]{h} = \sqrt[n]{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1 + \varepsilon\rho|^n (\varepsilon + |z|)^n}{\rho^n} \end{aligned}$$

第一步放缩是直接展开, 然后用三角不等式; 第二步放缩是做了简化, 因为之前分析知道 (可以加强), 给定  $z \in B_\rho(0)$  后, 存在一个足够小的  $\varepsilon > 0$  满足关系式  $|1 + \varepsilon\rho|(\varepsilon + |z|) < \rho$ , 那么总是存在一个足够大的  $N$  使得当  $n \geq N$  时总是有  $\|a_n\|^{1/n} \leq \rho^{-1} + \varepsilon$ 。因为  $N$  之前是有限项, 每一项都带  $h$ , 所以当  $h \rightarrow 0$  时可以被控制。据此, 不妨设  $N = 1$ 。同时, 不妨设  $|h| < 1$ , 当  $|h| < \varepsilon^3$  时, 可以具体写出第二个放缩过程

$$\left| \sum_{k=2}^n z^{n-k} h^{k-1} \binom{n}{k} \right| \leq \sqrt[n]{h} \cdot \sum_{k=2}^n |z|^{n-k} (\sqrt[n]{h})^{k-1} \binom{n}{k} \leq \sqrt[n]{h} \cdot (|z| + \varepsilon)^n$$

从而当  $h \rightarrow 0$  时, 左端趋于 0, 说明全纯。因为幂级数在定义域上绝对收敛, 积分求和可以换序, 由题目 25.3 知道

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k}{z^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\gamma} z^{k-n-1} dz = n! a_n$$

这是根据复积分计算得到的。  $\square$

**25.5:** 设  $X$  为复 Banach 空间,  $A : X \rightarrow X$  为有界复线性算子,  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  为复系数多项式, 直接证明算子  $p(A) := \sum_{k=0}^n a_k A^k$  满足  $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ 。

**Proof.** 不使用算子演算的性质。(1) 首先证明  $\sigma(p(A)) \supseteq p(\sigma(A))$ , 固定  $\lambda \in \sigma(A)$ , 则存在复系数多项式  $q$  使得  $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$ , 即  $p(\lambda)I - p(A) = (\lambda I - A)q(A)$ , 根据定义,  $\lambda I - A$  不是双射, 所以  $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$ 。

(2) 其次证明  $\sigma(p(A)) \supseteq \sigma(p(A))$ , 不妨设  $a := a_n \neq 0$ , 固定  $\mu \in \sigma(p(A))$  以及  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  为多项式  $p - \mu$  的零点, 于是  $p(z) - \mu = a \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)$ , 则  $p(A) - \mu I = a \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)$ , 如果  $A - \lambda_i I$  都是双射, 那么左侧也是双射, 与  $\mu$  的定义矛盾, 因此至少存在一个  $\lambda_i$  使得  $\lambda_i I - A$  不是双射, 所以  $\lambda_i \in \sigma(A)$ , 因此代入多项式得到  $p(\lambda_i) - \mu = 0$ , 即  $\mu \in p(\sigma(A))$ 。  $\square$