---

title: 微分几何作业 6 date: 2025-11-01 21:00:00 tags:

- Differential Geometry categories:
- [DifferentialGeometry Homework] cover: cover.jpg excerpt: "第六次作业" tikzjax: true mathjax: true math: true

---

:::danger 等温变换。 :::

> **Question.[Peng.Sec4.7].** 证明：平均曲率为常数的曲面，或是全脐点曲面，或者它的第一、第二基本形式可以表示为
>
> $$I=\lambda(u,v)(\mathrm{d}u\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\mathrm{d}v),\quad \lambda>0$$
>
> $$II=(1+\lambda H)\mathrm{d}u\mathrm{d}u-(1-\lambda H)\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$

(1) 如果曲面为全脐点曲面，则第一、第二基本形式成比例

$$H=\frac{1}{2}\frac{GL-2FM+NE}{EG-F^2}$$

所以为常数。

(2-1) 如果曲面不是全脐点曲面，则只需处理非脐点处，则可以取主方向参数系，使得

$$I=E\mathrm{d}u\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v\mathrm{d}v,\quad II=L\mathrm{d}u\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$

其中 $F=M=0$。由平均曲率 H 为常数，得到

$$H=\frac{1}{2}\frac{GL+NE}{EG}=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)$$

参见 [Peng.Sec4.6] 的结论，当 (u,v) 是曲面的正交曲率线网时，Codazzi 方程可以简化为

$$L_v=HE_v,\quad N_u=HG_u$$

根据平均曲率为常数，得到

$$\frac{L}{E}=H+a(u,v),\quad \frac{N}{G}=H-a(u,v)$$

积分，逐项比较，推出 $a(u,v)=a$。

$$L=HE+b(v)=HE+Ea(u,v),\quad N=HG+c(u)=HG-Ga(u,v)$$

因此 $L=E(H+a),\quad N=G(H-a)$。现在只需证明 $E=G$，再调整比例系数即可完成本题。

(2-2) 只需要寻找新坐标 $(\tilde{u},\tilde{v})$，使得 $\tilde{E}=\tilde{G}$。只需要分别调整 u,v 即可。取

$$\tilde{u}(u)=\int_0^u\sqrt{E(u,v_0)}\mathrm{d}u,\quad \tilde{v}(v)=\int_0^v\sqrt{G(u_0,v)}\mathrm{d}v$$

> **Question.[Peng.Sec4.8].** 证明：第一、第二基本形式的系数均为常数的曲面是平面或圆柱面。

(1) 如果 I 和 II 成比例，则曲面为全脐点曲面，即平面或球面。但球面的 I 不是常数，所以曲面为平面。

(2) 如果 I 和 II 不成比例，则主曲率为常数且不相同，因此曲面为圆柱面。

> **Question.[Peng.Sec4.9].** 问是否有曲面，以 φ 和 ψ 为第一、第二基本形式？
>
> 1. $\varphi = \mathrm{d}u\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\mathrm{d}v$，$\psi = \mathrm{d}u\mathrm{d}u - \mathrm{d}v\mathrm{d}v$；
> 2. $\varphi = \mathrm{d}u\mathrm{d}u + \cos^2 u\mathrm{d}v\mathrm{d}v$，$\psi = \cos^2 u\mathrm{d}u\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\mathrm{d}v$。

曲面参数是正交参数系，从而只需要验证是否满足 Gauss-Codazzi 方程，具体地

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\} = \frac{LN-M^2}{EG}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v - \left(\dfrac{M}{\sqrt{E}}\right)_u - N\dfrac{(\sqrt{E})_v}{G} - M\dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = 0 \\ \left(\dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_u - \left(\dfrac{M}{\sqrt{G}}\right)_v - L\dfrac{(\sqrt{G})_u}{E} - M\dfrac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = 0 \end{cases}$$

(1) 代入系数，Gauss 方程不成立，因此不存在这样的曲面。

(2) 代入系数，Codazzi(II) 成立等价于

$$\sin u\left(\frac{1}{\cos^2 u} + \cos^2 u\right) = 0$$

而根据第一基本形式的要求，$\cos u \neq 0$，所以只能有 $\sin u = 0$ 时成立，但这是离散，不存在开区域使得 Codazzi(II) 恒成立，所以不存在这样的曲面。

:::danger Reference: Curvature formulas for implicit curves and surfaces by Ron Goldman :::

> **Question.[Peng.Sec4.10].** 求曲面 $F(x,y,z)=0$ 的 Gauss 曲率。

求解 Gauss 曲率，只需要求解主曲率 k_1, k_2（可重），则 $K = k_1k_2$。

注意到隐函数给出的曲面，其每个点上的切平面的方向应满足约束条件

$$\langle \nabla F, \mathrm{d}r\rangle = 0$$

记 $n = \dfrac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$，取外微分

$$\langle \mathrm{d}\nabla F, \mathrm{d}r\rangle + \langle \nabla F, \mathrm{d}^2 r\rangle = 0$$

考虑第一项，直接计算得到

$$\mathrm{d}\nabla F=\left(\begin{array}{ccc} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{array}\right):=\mathcal{H}(F)\mathrm{d}r$$

$\mathcal{H}(F)$ 是 F 的 Hessian 矩阵。考虑第二项，因为 $\langle n,\mathrm{d}r\rangle=0$ 恒成立，取外微分得到

$$\langle\nabla F,\mathrm{d}^2r\rangle=\|\nabla F\|\langle n,\mathrm{d}^2r\rangle=\|\nabla F\|II$$

而为了寻找法曲率的极值（如果是脐点，则所有方向法曲率相同），则当法曲率 κ 取极值时，$\mathrm{d}r$ 满足

$$\kappa(\mathrm{d}r)=\frac{II(\mathrm{d}n,\mathrm{d}r)}{I(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)}=\frac{-\langle\mathrm{d}\nabla F,\mathrm{d}r\rangle/\|\nabla F\|}{I(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)}$$

因此根据已知的等式构造函数，不妨归一化 $I(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)=1$，则我们需要极值化

$$\kappa(\mathrm{d}r)=-\frac{\mathrm{d}r^T\mathcal{H}(F)\mathrm{d}r}{\|\nabla F\|}$$

在约束条件下，定义 Lagrange 函数

$$\mathcal{L}(\mathrm{d}r,\lambda,\mu)=-\frac{\mathrm{d}r^T\mathcal{H}(F)\mathrm{d}r}{\|\nabla F\|}-\mu(\mathrm{d}r^T\mathrm{d}r-1)-\lambda\langle\nabla F,\mathrm{d}r\rangle$$

则在极值点处，满足 Lagrange 乘数法的条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathrm{d}r}=-\dfrac{2\mathcal{H}(F)\mathrm{d}r}{\|\nabla F\|}-2\mu\mathrm{d}r-\lambda\nabla F=0 \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=-\langle\nabla F,\mathrm{d}r\rangle=0 \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu}=-(\mathrm{d}r^T\mathrm{d}r-1)=0 \end{cases}$$

写成矩阵形式，通过对 $\mathrm{d}r,\lambda$ 换元调整系数（保持记号不变），得到

$$\left(\begin{array}{cc} \mathcal{H}(F)+\|\nabla F\|\mu I_3 & \nabla F \\ (\nabla F)^T & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \mathrm{d}r \\ \lambda \end{array}\right)=0$$

并且 $\mathrm{d}r\neq 0$。这要求矩阵形式有非零解处处成立。这当且仅当

$$\left|\begin{array}{cccc} F_{xx}+\lambda & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy}+\lambda & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz}+\lambda & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{array}\right|=\det\left(\begin{array}{cc} \mathcal{H}(F)+\lambda I_3 & \nabla F \\ (\nabla F)^T & 0 \end{array}\right)=0$$

其中 $\lambda=\mu\|\nabla F\|$。展开行列式，得到 λ 的特征多项式，是一个二次方程。由于 $\mathrm{d}r\neq 0$ 的约束条件，知道只有当 λ 是该方程的两个不同根时，极值才能取到

$$
-\frac{\mathrm{d}r^T\mathcal{H}(F)\mathrm{d}r}{\|\nabla F\|}=\kappa(\mathrm{d}r)
$$

而回到已知条件，在极值点处，同时和 $\mathrm{d}r$ 作内积，知道

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathrm{d}r}\cdot\mathrm{d}r=-\frac{2\mathrm{d}r^T\mathcal{H}(F)\mathrm{d}r}{\|\nabla F\|}-2\mu\mathrm{d}r^T\mathrm{d}r=0
$$

这说明 μ 就是极值点处的法曲率 κ。因此，主曲率 k_1,k_2 就是该二次方程的两个根，从而 Gauss 曲率为

$$
K=k_1k_2=\frac{\det(\mathcal{H}(F))}{\|\nabla F\|^4}
$$

最后一步直接展开行列式即可。

:::danger Liouville 方程 :::

> **Question.[Peng.Sec4.12].** 已知两个微分式
>
> $$
> \varphi=E\mathrm{d}u\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v\mathrm{d}v(E,G>0),\quad \psi=\lambda(u,v)\varphi
> $$
>
> 1. E,G,λ 满足什么条件时，φ 和 ψ 可以作为曲面的第一、第二基本形式?
> 2. $E=G$ 时，求解 E,G 和 λ。

(1) 同样是正交参数系，所以验证 Gauss-Codazzi 方程：

$$
-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}=\lambda^2,\quad \lambda_v=\lambda_u=0
$$

Codazzi 方程等价于 λ 为常数。

(2) 当 $E=G$ 时，取 $W(u,v)=E=G=e^{2\rho}$，则上述方程等价于

$$
-\frac{1}{e^{2\rho}}\Delta\rho=-\frac{1}{e^{2\rho}}\left\{\rho_{uu}+\rho_{vv}\right\}=\lambda^2
$$

所以 $E=G=e^{2\rho}$，其中 ρ 满足 $\Delta\rho(u,v)=-\lambda^2e^{2\rho}$，$\lambda$ 为一常数。

> **Question.[Peng.Sec4.13].** 在旋转曲面 $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,f(u))$ 上建立正交标架场 $\{e_1,e_2\}$ 并求相应和诸微分形式 $\{\omega_1,\omega_2,\omega_{12},\omega_{13},\omega_{23}\}$。

计算

$$
r_u=(\cos v,\sin v,f'(u)),\quad r_v=(-u\sin v,u\cos v,0)
$$

注意到 $\langle r_u,r_v\rangle=0$，所以取

$$
e_1=\frac{r_u}{\|r_u\|}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(\cos v,\sin v,f'(u)),\quad e_2=\frac{r_v}{\|r_v\|}=(-\sin v,\cos v,0)
$$

从而

$$\omega_1=\langle \mathrm{d}r,e_1\rangle=\sqrt{1+f'^2}\mathrm{d}u,\quad \omega_2=\langle \mathrm{d}r,e_2\rangle=u\mathrm{d}v$$

$$e_3=e_1\wedge e_2=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(-f'\cos v,-f'\sin v,1)$$

计算

$$\omega_{12}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\mathrm{d}v$$

$$\omega_{13}=\langle \mathrm{d}e_1,e_3\rangle=\frac{f''}{1+f'^2}\mathrm{d}u,\quad \omega_{23}=\langle \mathrm{d}e_2,e_3\rangle=\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\mathrm{d}v$$

> **Question.[Peng.Sec4.14].** 证明 $\frac{\mathrm{d}\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$ 与正交标架 e_1,e_2 的选取无关。

由 Gauss 绝妙定理，K 只与 I 有关，而正交标架与 I 无关，所以

ParseError: KaTeX parse error: Can't use function '$' in math mode at position 58: …ge \omega_2}=-K$$ 与正交标架的选取无关。 …

注意到 $\langle r_u,r_v\rangle=0$，所以取

$$e_1=\frac{r_u}{\|r_u\|}=(-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,\cos u),\quad e_2=\frac{r_v}{\|r_v\|}=(-\sin v,\cos v,0)$$

定义 $e_3=e_1\wedge e_2$ 得到正交活动标架。

$$e_3=-(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u)$$

(2) 因为这是正交标架，所以直接

$$\omega_1=\sqrt{E}\mathrm{d}u=a\mathrm{d}u,\quad \omega_2=\sqrt{G}\mathrm{d}v=a\cos u\mathrm{d}v$$

$$\omega_{12}=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v=-\sin u\mathrm{d}v$$

$$\omega_{13}=\langle \mathrm{d}e_1,e_3\rangle=\mathrm{d}u,\quad \omega_{23}=\langle \mathrm{d}e_2,e_3\rangle=\cos u\mathrm{d}v$$

(3) 第二基本形式

$$II=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}=a\mathrm{d}u\mathrm{d}u+a\cos^2u\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$