---

title: 泛函分析作业 18 date: 2025-11-24 22:30:00 tags:

- Functional Analysis
- Homework categories:
- [Functional Analysis Homework] cover: fa-hw18.jpg excerpt: "第十八次作业" tikzjax: true mathjax: true math: true

---

:::danger (0) 子基的处理； :::

> **18.1** 设 X 为拓扑空间，Y 为度量空间，记
>
> $$C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ continuous}\}$$
>
> $(C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{compact-open}})$ 上的**紧开拓扑** $\mathcal{T}_{\text{compact-open}}$ 是对任意紧集 $K \subseteq X$ 和开集 $V \subseteq Y$，集合
>
> $$\mathcal{L}(K,V) := \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subseteq V\}$$
>
> 为开集的最小拓扑。试证明：
>
> (0) 集合 $\mathcal{U} \subseteq C(X,Y)$ 在紧开拓扑中是开集，当且仅当对任意 $f \in \mathcal{U}$，存在有限个紧集 $K_1, \dots, K_m \subseteq X$ 以及有限个开集 $V_1, \dots, V_m \subseteq Y$，使得
>
> $$f \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{L}(K_i, V_i) \subseteq \mathcal{U}$$
>
> (1) 若 X 是紧的，证明 $(C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{compact-open}})$ 与由度量
>
> $$d(f,g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)), \quad f, g \in C(X,Y)$$
>
> 诱导的拓扑一致。
>
> (2) 对每个紧集 $K \subseteq X$，定义半范数 $p_K : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 为
>
> $$p_K(f) := \sup_K |f|, \quad \forall f \in C(X,\mathbb{R})$$
>
> 证明这些半范数生成了紧开拓扑，即 $(C(X,\mathbb{R}), \mathcal{T}_{\text{compact-open}})$ 是使得对任意的 p_K 连续的最小拓扑，其中 K 取遍 X 的所有紧子集。
>
> (3) 证明：$(C(X,\mathbb{R}), \mathcal{T}_{\text{compact-open}})$ 是局部凸拓扑向量空间。
>
> (4) 证明：集合 $\mathcal{F} \subseteq C(X,Y)$ 在 $(C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{compact-open}})$ 中是预紧的，当且仅当对任意紧集 $K \subseteq X$
>
> $$\mathcal{F}_K := \{f|_K : f \in \mathcal{F}\} \subseteq C(K,Y)$$
>
> 是预紧的。

> (5) 证明如下的变种 Arzela-Ascoli 定理：设 X 为拓扑空间，Y 为度量空间，则集合 $\mathcal{F} \subseteq C(X,Y)$ 在 $(C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{compact-open}})$ 中是预紧的，当且仅当它点态预紧并且对任意紧集 $K \subseteq X$，$\mathcal{F}_K$ 等度连续。

(0) 根据紧开拓扑的定义，$\mathcal{L}(K,V)$ 是紧开拓扑的子基。先证充分性。对任意 $f \in \mathcal{U}$，存在有限个紧集 $K_1, \ldots, K_m \subseteq X$ 以及有限个开集 $V_1, \ldots, V_m \subseteq Y$，使得

$$f \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{L}(K_i, V_i) \subseteq \mathcal{U}$$

则 $\mathcal{U}$ 可以表示为

$$\mathcal{U} = \bigcup_{f \in \mathcal{U}} \left(\bigcap_{i=1}^{m_f} \mathcal{L}(K_{f,i}, V_{f,i}) \right)$$

因为 $\mathcal{L}(K,V)$ 是紧开拓扑的开集，所以 $\mathcal{U}$ 是开集的有限交的任意并，也是开集。

再证明必要性。由子基的性质，任意开集 $\mathcal{U}$ 都可以表示为

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i=1}^{n_\alpha} \mathcal{L}(K_{\alpha,i}, V_{\alpha,i}) \right)$$

对任意 $f \in \mathcal{U}$，存在 $\alpha_0 \in A$，使得

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha_0}} \mathcal{L}(K_{\alpha_0,i}, V_{\alpha_0,i}) \subseteq \mathcal{U}$$

取 $m = n_{\alpha_0}$，$K_i = K_{\alpha_0,i}$，$V_i = V_{\alpha_0,i}$ 即可。

(1) 证明两个拓扑相互包含。首先证明 $\mathcal{T}_{\text{c.o.}} \supseteq \mathcal{T}_d$。只需要说明对任意 $f \in C(X,Y)$ 和 $B_\varepsilon(f)$，存在 $U \in \mathcal{T}_{\text{c.o.}}$，使得

$$f \in U \subseteq B_\varepsilon(f) := \left\{ g \in C(X,Y) \mid \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon \right\}$$

由于 $f \in C(X,Y)$，所以考虑开覆盖

$$\bigcup_{x \in X} f^{-1}(B_{\varepsilon/4}(f(x))) = X$$

由 X 的紧性，存在有限子覆盖

$$\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B_{\varepsilon/4}(f(x_i))) := \bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$$

取 $K_i = \overline{U_i}$，则 K_i 是紧集。取 $V_i = B_{\varepsilon/4}(f(x_i))$，则 V_i 是开集，并且 $f(K_i) \subseteq V_i$。取

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}(K_i, V_i)$$

则 $U\in\mathcal{T}_{\text{c.o.}}$，且 $f\in U$。对于任意 $g\in U$，则对任意 $x\in X$，由开覆盖知道存在某个 U_i，使得 $x\in U_i\subseteq K_i$，所以

$$\begin{aligned} d_Y(f(x),g(x)) &\le d_Y(f(x),f(x_i))+d_Y(f(x_i),g(x_i))+d_Y(g(x_i),g(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon \end{aligned}$$

其次证明度量拓扑比紧开拓扑更细。即 $\mathcal{T}_{\text{c.o.}}\subseteq\mathcal{T}_d$。只需要说明对任意 $f\in C(X,Y)$ 和 $U\in\mathcal{T}_{\text{c.o.}}$，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$f\in B_\varepsilon(f)\subseteq U$$

由开集和拓扑基的定义，存在有限个紧集 $K_1,\dots,K_m\subseteq X$ 以及有限个开集 $V_1,\dots,V_m\subseteq Y$，使得

$$f\in\bigcap_{i=1}^m\mathcal{L}(K_i,V_i)\subseteq U$$

由于 $f(K_i)$ 是紧集，且 V_i 是开集，所以对每个 $i=1,2,\dots,m$，存在 $\varepsilon_i>0$，使得

$$B_{\varepsilon_i}(f(x))\subseteq V_i,\quad \forall x\in K_i$$

取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_m\}$。则对任意 $g\in B_\varepsilon(f)$，有

$$\sup_{x\in X}d_Y(f(x),g(x))<\varepsilon \implies g(K_i)\subseteq B_\varepsilon(f(K_i))\subseteq V_i,\quad \forall i=1,2,\dots,m$$

所以 $g\in\bigcap_{i=1}^m\mathcal{L}(K_i,V_i)\subseteq U$，即 $B_\varepsilon(f)\subseteq U$。

(2) 由半范数诱导的拓扑 $\mathcal{T}_{\{p_K\}}$ 的基形如

$$\bigcap_{i=1}^n\{p_{K_i}^{-1}(O_i):O_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

首先证明 $\mathcal{T}_{\text{c.o.}}\supseteq\mathcal{T}_{\{p_K\}}$。只需要说明对任意 $f\in C(X,\mathbb{R})$ 和 $U\in\mathcal{T}_{\{p_K\}}$，存在 $V\in\mathcal{T}_{\text{c.o.}}$，使得

$$f\in V\subseteq U$$

而由 $U\in\mathcal{T}_{\{p_K\}}$ 的定义，存在有限个紧集 $K_1,\dots,K_m\subseteq X$ 以及有限个开区间 $O_1,\dots,O_m\subseteq\mathbb{R}$，使得

$$f\in\bigcap_{i=1}^m p_{K_i}^{-1}(O_i)\subseteq U$$

则对于固定的 i，由 $f\in p_{K_i}^{-1}(O_i)$ 知道，存在 $\delta_i>0$，使得

$$(p_{K_i}(f)-\delta_i,p_{K_i}(f)+\delta_i)\subseteq O_i$$

从而 $B_{\delta_i}(f):=\{g\in C(X,\mathbb{R}):p_{K_i}(f-g)<\delta_i\}$ 满足

$$f \in B_{\delta_i}(f) \subseteq p_{K_i}^{-1}(O_i)$$

取 K_i 的开覆盖

$$\bigcup_{x \in K_i} f^{-1}(B_{\delta_i/2}(f(x))) \supseteq K_i$$

由 K_i 的紧性，存在有限子覆盖

$$\bigcup_{j=1}^{n_i} f^{-1}(B_{\delta_i/2}(f(x_{i,j}))) := \bigcup_{j=1}^{n_i} U_{i,j} \supseteq K_i$$

取 $\overline{U_{i,j} \cap K_i}$ 为紧集，记为 $K_{i,j}$；取 $V_{i,j} = B_{\delta_i/2}(f(x_{i,j}))$ 为开集。我们可以构造紧开拓扑的开集

$$V_i := \bigcap_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}(K_{i,j}, V_{i,j})$$

则对于任意 $g \in V_i$，对任意 $x \in K_i$，存在某个 $U_{i,j}$，使得 $x \in U_{i,j} \subseteq K_{i,j}$，所以

$$|f(x) - g(x)| \quad < |f(x) - f(x_{i,j})| + |f(x_{i,j}) - g(x)|$$

$$< \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i$$

即 $p_{K_i}(f-g) < \delta_i$，所以 $V_i \subseteq B_{\delta_i}(f) \subseteq p_{K_i}^{-1}(O_i)$。

然后证明 $\mathcal{T}_{\text{c.o.}} \subseteq \mathcal{T}_{\{p_K\}}$。只需要说明对任意 $f \in C(X, \mathbb{R})$ 和 $U \in \mathcal{T}_{\text{c.o.}}$，存在 $V \in \mathcal{T}_{\{p_K\}}$，使得

$$f \in V \subseteq U$$

由 $U \in \mathcal{T}_{\text{c.o.}}$ 的定义，存在有限个紧集 $K_1, \ldots, K_m \subseteq X$ 以及有限个开集 $V_1, \ldots, V_m \subseteq \mathbb{R}$，使得

$$f \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{L}(K_i, V_i) \subseteq U$$

由于 $f(K_i)$ 是紧集，且 V_i 是开集，所以对每个 $i = 1, 2, \ldots, m$，存在 $\delta_i > 0$，使得

$$(f(K_i) - \delta_i, f(K_i) + \delta_i) \subseteq V_i$$

从而可以构造半范数拓扑的开集 $V \in \mathcal{T}_{\{p_K\}}$：

$$V := \bigcap_{i=1}^{m} \{g \in C(X, \mathbb{R}) : p_{K_i}(f-g) < \delta_i\}$$

且 $f \in V$。对于任意 $g \in V$，有

$$|f(x) - g(x)| \leq p_{K_i}(f-g) < \delta_i, \quad \forall x \in K_i$$

所以 $g(K_i) \subseteq (f(K_i)-\delta_i, f(K_i)+\delta_i) \subseteq V_i$，所以 $f \in V \subseteq U$。

(3) 根据 (2) 的结论，紧开拓扑由一族半范数生成，而由第十五次作业 15.2 可知由半范数生成的拓扑是局部凸拓扑向量空间。

(4) 令 $\mathcal{K} \subseteq 2^X$ 为紧集构成的集合，定义乘积映射

$$\Phi : (C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}}) \to \prod_{K \in \mathcal{K}} (C(K,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}}), \quad \Phi(f) = (f|_K)_{K \in \mathcal{K}}$$

则 Φ 给出了嵌入。首先，Φ 是单射，因为对任意 $f, g \in C(X,Y)$，若 $\Phi(f) = \Phi(g)$，则对任意 $K \in \mathcal{K}$，都有 $f|_K = g|_K$，而单点集是紧集，所以 $f = g$。所以

$$\Phi : (C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}}) \hookrightarrow \Phi((C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}})) \subseteq \prod_{K \in \mathcal{K}} (C(K,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}})$$

是嵌入。接着说明在这个拓扑下，$(C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}})$ 和 $\Phi((C(X,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}}))$ 同胚。只需要说明 Φ 是连续的，并且 Φ^{-1} 也是连续的。

首先证明 Φ 是连续的。根据乘积拓扑的定义，其基础开集形如

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{K_i}^{-1}(U_{K_i}), \quad U_{K_i} \in \mathcal{T}_{\text{c.o.}}(C(K_i, Y))$$

则 $\Phi^{-1}(U)$ 可以表示为

$$\Phi^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}(K_i, U_{K_i}) \in \mathcal{T}_{\text{c.o.}}(C(X,Y))$$

其次证明 Φ^{-1} 是连续的。根据紧开拓扑的定义，其基础开集形如下，其中 K_i 是紧集，V_{K_i} 是开集：

$$V := \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{L}(K_i, V_{K_i})$$

则 $(\Phi^{-1})^{-1}(V) = \Phi(V)$ 可以表示为

$$\Phi(V) = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{L}(K_i, V_{K_i}) \times \prod_{K \in \mathcal{K} \setminus \{K_1, \ldots, K_m\}} C(K,Y) \in \mathcal{T}\left(\prod_{K \in \mathcal{K}} (C(K,Y), \mathcal{T}_{\text{c.o.}})\right)$$

至此，我们证明了 Φ 是到其像的同胚映射。

$\mathcal{F}$ 是预紧的，当且仅当 $\overline{\mathcal{F}}^{(C(X,Y),\mathcal{T}_{\text{c.o.}})}$ 是紧的，当且仅当 $\Phi(\overline{\mathcal{F}}^{(C(X,Y),\mathcal{T}_{\text{c.o.}})})$ 是紧的，由 Tychonoff 定理，当且仅当 $\overline{\mathcal{F}}^{(C(X,Y),\mathcal{T}_{\text{c.o.}})}|_K$ 是紧的，对任意紧集 $K \subseteq X$。而

$$\overline{\mathcal{F}_K}^{(C(K,Y),\mathcal{T}_{\text{c.o.}})} = \overline{\mathcal{F}}^{(C(X,Y),\mathcal{T}_{\text{c.o.}})}|_K$$

所以当且仅当对任意紧集 $K \subseteq X$，$\mathcal{F}_K$ 是预紧的。

(5) 由 (4) 的结论，$\mathcal{F}$ 在 $(C(X,Y),\mathcal{T}_{\text{c.o.}})$ 中是预紧的，当且仅当对任意紧集 $K\subseteq X$，$\mathcal{F}_K$ 是预紧的。根据 (1) 的结论，$(C(K,Y),\mathcal{T}_{\text{c.o.}})$ 与由度量

$$d_K(f,g):=\sup_{x\in K} d_Y(f(x),g(x)),\quad f,g\in C(K,Y)$$

诱导的拓扑一致。意思就是说这是一个紧度量拓扑空间（在上确界范数下），所以由 Arzela-Ascoli 定理可知，$\mathcal{F}_K$ 是预紧的，当且仅当它点态预紧并且等度连续。

> **18.2** 设 X 为赋范线性空间，试由上述的变种 Arzela-Ascoli 定理推出 Banach-Alaoglu 定理。

Banach-Alaoglu 定理：$X=(X,\|\cdot\|)$ 是实赋范空间，则 $\mathbb{B}^*$ 是 $w*$-紧集。

$$\mathbb{B}^*:=\{x^*\in X^*:\|x^*\|\le 1\}$$

证明思路是这样的：首先要说明的是 $\mathbb{B}^*$ 是 $w*$-闭集，其次要说明 $\mathbb{B}^*$ 是 $w*$-预紧的。从而 $\mathbb{B}^*$ 是 $w*$-紧集。而说明 $\mathbb{B}^*$ 是 $w*$-预紧的关键在于说明 X^* 上的拓扑 $\mathcal{T}_{\text{c.o.}}\supseteq\mathcal{T}_{w*}$，从而如果 $w*$ -闭集 $\mathbb{B}^*$ 在紧开拓扑下是预紧的，那么它在 $w*$ 拓扑下也是预紧的。最后利用变种 Arzela-Ascoli 定理，只要证明 $\mathbb{B}^*$ 点态预紧并且 $\mathbb{B}^*_K$ 等度连续，其中 K 是 X 的任意紧集，就可以说明 $\mathbb{B}^*$ 在紧开拓扑下是预紧的。

(1) 证明 $\mathbb{B}^*$ 是 $w*$-闭集。熟知 $\mathbb{B}^*=\overline{\mathbb{S}^*}^{w*}$，所以 $\mathbb{B}^*$ 是 $w*$-闭集。

(2) 证明 $\mathcal{T}_{\text{c.o.}}\supseteq\mathcal{T}_{w*}$。对于任意 $x^*\in X^*$ 和 $x^*\in U\in\mathcal{T}_{w*}$，存在有限个 $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$ 以及 $\varepsilon>0$，使得

$$x^*\in\bigcap_{i=1}^n\{y^*\in X^*:|y^*(x_i)-x^*(x_i)|<\varepsilon\}\subseteq U$$

取 $K_i=\{x_i\}$ 为紧集，$V_i=(x^*(x_i)-\varepsilon,x^*(x_i)+\varepsilon)$ 为开集，则

$$x^*\in\bigcap_{i=1}^n\mathcal{L}(K_i,V_i)\subseteq U$$

所以 $\mathcal{T}_{\text{c.o.}}\supseteq\mathcal{T}_{w*}$。

(3) 证明 $\mathbb{B}^*$ 点态预紧。对于任意 $x\in X$，考虑映射

$$\delta_x:\mathbb{B}^*\to\mathbb{R},\quad \delta_x(x^*)=x^*(x)$$

则 $\delta_x(\mathbb{B})\subseteq[-\|x\|,\|x\|]$ 是紧集，所以 $\mathbb{B}^*$ 在点态下是预紧的。

(4) 证明 $\mathbb{B}^*_K$ 等度连续。由于 $x^*\in\mathbb{B}^*$ 是有界线性泛函，所以

$$|x^*(x)-x^*(y)|\le\|x^*\|\|x-y\|\le\|x-y\|,\quad\forall x,y\in X,\forall x^*\in\mathbb{B}^*$$

所以 $\mathbb{B}^*_K$ 等度连续，自然限制在任意紧集 $K\subseteq X$ 上也是等度连续的。