3 第十四次作业

14.1：Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面称为极小曲面，如果 Σ 的平均曲率为零。设 $z = f(x, y), (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为极小曲面：

- 推导 $z = f(x, y)$ 为极小曲面满足的微分方程；
- 验证以下曲面为极小曲面
  - 正螺面 (Helicoid)：$z = \arctan \frac{y}{x}$；
  - 悬链面 (Catenoid)：$z = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$；
  - Scherk 曲面：$z = \ln \frac{\cos x}{\cos y}$。

Proof. (1) 图 $\Sigma : \boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y))$ 的第一、二基本形式为

$$I = (1 + f_x^2)\mathrm{d}x^2 + 2f_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (1 + f_y^2)\mathrm{d}y^2, \quad II = \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2}}(f_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2f_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f_{yy}\mathrm{d}y^2)$$

计算平均曲率 H 得

$$H = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} = \frac{1}{2W^3}((1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy})$$

取 $H = 0$ 就得到极小曲面方程（极小图）。

(2) 需要验证的曲面都是图，所以计算需要的量，代入 (1) 的极小曲面方程即可验证：

- 对正螺面：$z_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$，$z_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$，$z_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$，$z_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$，$z_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$，验证成立；
- 对悬链面，记 $A = \sinh(\cosh^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}))$，则 $z_x := \frac{x}{A\sqrt{x^2 + y^2}}$，$z_{xx} = \frac{A^2y^2 - x^2(x^2 + y^2)}{A^3(x^2 + y^2)^{3/2}}$，$z_{xy} = \frac{A^2xy - xy(x^2 + y^2)}{A^3(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- 对 Scherk 曲面：$z_x = -\tan x$，$z_y = \tan y$，$z_{xx} = -\frac{1}{\cos^2 x}$，$z_{yy} = \frac{1}{\cos^2 y}$，$z_{xy} = 0$ □

14.2：给出定义在全平面上的极小图是（平面）全测地的另一个证明：

- 证明 Jorgens 定理：如果定义在整个 xy 参数平面上的函数 $\varphi(x, y)$ 满足

  $$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1$$

  且 $\varphi_{xx} > 0$，则 $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ 必为常数。
  - 证明 $F(w) = F(u + iv) = (x - \varphi_x(x, y)) - i(y - \varphi_y(x, y))$ 是复解析函数；
  - 证明 $F'(w)$ 为有界的解析函数，由此推出 $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ 为常值。
- 用 Jorgens 定理证明 Bernstein 定理。

Proof. (1-1) 定义变换 $(u,v)=(x+\varphi_x, y+\varphi_y)$，计算 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ 有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}1+\varphi_{xx} & \varphi_{xy}\\ \varphi_{xy} & 1+\varphi_{yy}\end{pmatrix} \implies \det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=2+\varphi_{xx}+\varphi_{yy}$$

因为 $\varphi_{xx}>0$，所以由题设方程知道 $\varphi_{yy}>0$，所以这个变换是保定向的坐标变换，可以取逆矩阵即可得到 x_u,x_v,y_u,y_v 的表达，在新坐标诱导的复坐标下，下式为零说明 $F(w)$ 是复解析的：

$$\frac{\partial F(w)}{\partial\overline{w}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+i\frac{\partial F}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}\frac{F_xx_u+F_yy_u+iF_xx_v+iF_yy_v}{2+\varphi_{xx}+\varphi_{yy}}=\frac{1-\varphi_{xx}\varphi_{yy}+\varphi_{xy}^2}{2+\varphi_{xx}+\varphi_{yy}}=0$$

(1-2) 直接计算 $F'(w)=(\varphi_{yy}-\varphi_{xx})+2i\varphi_{xy}$，取模长，由 $S:=\varphi_{xx}+\varphi_{yy}>0$ 知道

$$|F'(w)|=\frac{\sqrt{(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})^2-4}}{|2+\varphi_{xx}+\varphi_{yy}|}\le 1$$

由 Liouville 定理，知道 φ_{xy} 和 $\varphi_{yy}-\varphi_{xx}$ 为常数，而再加上题设的条件方程，推出结果。

(2) 如果 $f(x,y)$ 是全平面 $\mathbb{R}^2$ 上的极小曲面方程的解：$(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0$，则存在 Levi 变换，即对应存在全平面函数 φ，这满足 Jorgens 定理的条件，所以 $\varphi_{xx},\varphi_{yy},\varphi_{xy}$ 为常数，从而

$$\varphi_{xx}=\frac{1+f_x^2}{W},\quad \varphi_{xy}=\frac{f_xf_y}{W},\quad \varphi_{yy}=\frac{1+f_y^2}{W}$$

这能解得 f_x,f_y 为常数，所以 f 是线性函数。 □

14.3： 设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，$\boldsymbol{r}$ 为位置向量，取正交标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，$\boldsymbol{e}_3$ 为单位法向，设 $\omega_{i3}=h_{ij}\omega_j$，设 H 为平均曲率，Δ_Σ 为 Σ 的 Laplace 算子：

1. 对任意常向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$，设 $l=\langle\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{a}\rangle$，证明：

$$l_i=-h_{ij}\langle\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{a}\rangle,\qquad l_{ij}=-h_{ik,j}\langle\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{a}\rangle-h_{ik}h_{jk}\langle\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{a}\rangle,$$

   其中 $h_{ik,j}$ 的共变导数定义为：$h_{ik,j}\omega_j=\mathrm{d}h_{ik}+h_{jk}\omega_{ji}+h_{ij}\omega_{jk}$，且 Codazzi 方程为：$h_{ik,j}=h_{ij,k}$；

2. 证明：$\Delta_\Sigma\boldsymbol{e}_3=-2H_k\boldsymbol{e}_k-|A|^2\boldsymbol{e}_3$，其中第二基本形式模长平方 $|A|^2=\sum_{i,k}h_{ik}^2$；

3. 若 Σ 为极小图 $z=f(x,y)$，记 $W=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$，证明：Σ 的 Gauss 曲率可表示为

$$K=\frac{1}{2}W\,\Delta_\Sigma\left(\frac{1}{W}\right)$$

4. 若 Σ 为极小图 $z=f(x,y)$，记

$$W=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2},$$

   在第一问的计算中取 $\vec{a}=(0,0,1)$，试证明：

$$\left|\nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right|^2=-K\left(1-\frac{1}{W^2}\right),$$

   其中 ∇ 是 Σ 的梯度。由此进一步证明，对极小图，公式 $(***)$ 和下面重要公式等价：

$$K=\Delta_\Sigma\log\left(1+\frac{1}{W}\right).\qquad(**)$$

Proof. (1) 取外微分：$\mathrm{d}l = l_i\omega_i = \langle \mathrm{d}e_3, \boldsymbol{a}\rangle + \langle e_3, \mathrm{d}\boldsymbol{a}\rangle = \langle \boldsymbol{e}_j\omega_{3j}, \boldsymbol{a}\rangle = -\langle \boldsymbol{e}_j h_{ji}\omega_i, \boldsymbol{a}\rangle$，所以 $l_i = -h_{ji}\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}\rangle = -h_{ij}\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}\rangle$。同理 $\mathrm{d}l_i = l_{ij}\omega_j + l_k\omega_{ik} = -\mathrm{d}h_{ik}\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}\rangle - h_{ik}\langle \boldsymbol{e}_A\omega_{kA}, \boldsymbol{a}\rangle = -h_{ik,j}\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}\rangle\omega_j + (h_{jk}\omega_{ji} + h_{ij}\omega_{jk})\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}\rangle - h_{ik}\langle \boldsymbol{e}_3 h_{kj}\omega_j, \boldsymbol{a}\rangle - h_{ik}\langle \boldsymbol{e}_j\omega_{kj}, \boldsymbol{a}\rangle$，注意到 $h_{ij}\langle \boldsymbol{e}_k\omega_{jk}, \boldsymbol{a}\rangle = -h_{ij}\langle \boldsymbol{e}_k\omega_{kj}, \boldsymbol{a}\rangle = -h_{ik}\langle \boldsymbol{e}_j\omega_{jk}, \boldsymbol{a}\rangle$，并且 $\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}\rangle h_{jk}\omega_{ji} = -l_j\omega_{ji}$，所以命题得证。

(2) 由 (1) 知道 $\Delta_\Sigma\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}\rangle = \langle \Delta_\Sigma \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}\rangle = -h_{ik,i}\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}\rangle - h_{ik}^2\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}\rangle$，由 $\boldsymbol{a}$ 的任意性，所以 $\Delta_\Sigma \boldsymbol{e}_3 = -h_{ii,j}\boldsymbol{e}_j - h_{ik}^2\boldsymbol{e}_3 = -2H_k\boldsymbol{e}_k - |A|^2\boldsymbol{e}_3$，这里 H_k 认为是平均曲率的 k 偏导，满足 $DH = H_k\omega_k$。

(3)

注意到对极小曲面，

$$K = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = -(h_{11}^2 + h_{12}^2) = -\frac{1}{2}|A|^2,$$

且由于 $H \equiv 0$，则

$$\Delta_\Sigma \vec{e}_3 = 2K\vec{e}_3.$$

接下来，取 $\vec{a} = (0, 0, 1)$ 是常向量，则

$$\langle \vec{e}_3, \vec{a}\rangle = \frac{1}{W},$$

于是

$$\Delta_\Sigma\left(\frac{1}{W}\right) = \langle \Delta_\Sigma \vec{e}_3, \vec{a}\rangle = 2K\langle \vec{e}_3, \vec{a}\rangle = \frac{2}{W}K,$$

从而

$$K = \frac{1}{2}\, W\, \Delta_\Sigma\left(\frac{1}{W}\right).$$

(4)

设 $t_i = \langle \vec{e}_i, \vec{a}\rangle$，则

$$t_1^2 + t_2^2 = |\vec{a}|^2 - t_3^2 = 1 - \frac{1}{W^2}.$$

又由于是极小曲面，则

$$|\nabla(1/W)|^2 = l_1^2 + l_2^2 = (h_{11}t_1 + h_{12}t_2)^2 + (h_{12}t_1 - h_{11}t_2)^2 = -K\left(1 - \frac{1}{W^2}\right).$$

接下来我们证明以下公式：

$$\Delta_\Sigma(F(u)) = F'(u)\Delta_\Sigma(u) + F''(u)|\nabla u|^2.$$

由于

$$dF(u) = F'(u)\, du = F'(u)u_1\omega_1 + F'(u)u_2\omega_2,$$

则 $F_1 = F'u_1$, $F_2 = F'u_2$，从而

$$\begin{aligned} DF_1 &= dF_1 + F_2\omega_{21} \\ &= F''(u)(u_1\omega_1 + u_2\omega_2)u_1 + F'(u)du_1 + F'(u)u_2\omega_{21} \\ &= F''(u)(u_1\omega_1 + u_2\omega_2)u_1 + F'(u)Du_1. \end{aligned}$$

对 DF_2 同理，可得

$$F_{11} = F''(u)u_1^2 + F'(u)u_{11}, \qquad F_{22} = F''(u)u_2^2 + F'(u)u_{22}.$$

于是

$$\Delta_\Sigma(F(u)) = F''(u)(u_1^2 + u_2^2) + F'(u)(u_{11} + u_{22}),$$

得证。

于是设 $u=\frac{1}{W}$, $F=\log(1+u)$，则

$$\begin{aligned}\Delta_\Sigma \log\left(1+\frac{1}{W}\right) &= \frac{1}{1+u}\Delta_\Sigma(u)-\frac{1}{(1+u)^2}|\nabla u|^2\\ &= \frac{W}{W+1}\frac{2K}{W}+\frac{W^2}{(W+1)^2}K\left(1-\frac{1}{W^2}\right)=K,\end{aligned}$$

得证。反过来也容易得到。

14.4：验证在 Weierstrass 表示中以下 $\{f,g\}$ 对应的极小曲面：

1. $f=1, g=0$ 对应的极小曲面为平面；
2. $f=1, g=z$，定义域为 $\mathbb{C}$，对应的极小曲面为 Enneper 曲面，即
$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u-\frac{1}{3}u^3+uv^2, v-\frac{1}{3}v^3+u^2v, u^2-v^2)$$
3. $f=1, g=\frac{1}{z}$，定义域为 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$，对应的极小曲面为正螺面；
4. $f=i, g=\frac{1}{z}$，定义域为 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$，对应的极小曲面为悬链面；
5. $f=\frac{1}{1-z^4}, g=z$，定义域为 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$，对应的极小曲面是 Scherk 曲面。

(1)

$$\begin{cases}x_1=\Re\frac{1}{2}\int 1\cdot 1\,\mathrm{d}z=\frac{u}{2},\\ x_2=\Re\frac{i}{2}\int 1\cdot 1\,\mathrm{d}z=-\frac{v}{2},\\ x_3=\Re\int 0\,\mathrm{d}z=0.\end{cases}$$

由于 $x_3=0$，则为平面

(2)

$$\begin{cases}x_1=\Re\frac{1}{2}\int 1\cdot(1-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\Re\left(z-\frac{1}{3}z^3\right)=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{3}u^3+uv^2\right),\\ x_2=\Re\frac{i}{2}\int 1\cdot(1+z^2)\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\Im\left(z+\frac{1}{3}z^3\right)=-\frac{1}{2}\left(v-\frac{1}{3}v^3+u^2v\right),\\ x_3=\Re\int z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}(u^2-v^2).\end{cases}$$

(3) 应为悬链面。设 $z=re^{i\theta}$，则

$$\begin{cases}x_1=\Re\frac{1}{2}\int 1\cdot\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\Re\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\\ x_2=\Re\frac{i}{2}\int 1\cdot\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\Im\left(z-\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta,\\ x_3=\Re\int\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\Re\log z=\log r.\end{cases}$$

设 $u=\log r$，则

$$\begin{cases}x_1=\cosh u\cos\theta,\\ x_2=-\cosh u\sin\theta,\\ x_3=u,\end{cases}$$

于是得到悬链面。

(4) 应为正螺面。设 $z = re^{i\theta}$，则

$$
\begin{cases}
x_1 = \Re \dfrac{1}{2} \int i \cdot \left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = -\dfrac{1}{2} \Im \left(z + \dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{2} \left(r - \dfrac{1}{r}\right) \sin\theta, \\
x_2 = \Re \dfrac{i}{2} \int i \cdot \left(1 + \dfrac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = -\dfrac{1}{2} \Re \left(z - \dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{2} \left(r - \dfrac{1}{r}\right) \cos\theta, \\
x_3 = \Re \int i \dfrac{1}{z} \mathrm{d}z = -\Im \log z = -\theta.
\end{cases}
$$

设 $u = r - \dfrac{1}{r}$, $v = \theta$，则为正螺面。

(5)

$$
\begin{cases}
x_1 = \Re \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{1 - z^4} (1 - z^2) \mathrm{d}z = \dfrac{1}{2} \Re \int \dfrac{1}{1 + z^2} \mathrm{d}z = \dfrac{1}{4} \Re \left(i \log \dfrac{z + i}{z - i}\right) = -\dfrac{1}{4} \arg \left(\dfrac{z + i}{z - i}\right), \\
x_2 = \Re \dfrac{i}{2} \int \dfrac{1}{1 - z^4} (1 + z^2) \mathrm{d}z = \dfrac{1}{2} \Re \int \dfrac{i}{1 - z^2} \mathrm{d}z = \dfrac{1}{4} \Re \left(i \log \dfrac{z + 1}{z - 1}\right) = -\dfrac{1}{4} \arg \left(\dfrac{z + 1}{z - 1}\right), \\
x_3 = \Re \int \dfrac{1}{1 - z^2} \mathrm{d}z = \dfrac{1}{4} \Re \big(\log(1 + z^2) - \log(1 - z^2)\big) = \dfrac{1}{4} \log \left|\dfrac{1 + z^2}{1 - z^2}\right|.
\end{cases}
$$

先同步放大四倍，则

$$
\begin{cases}
x_1 = -\arg \left(\dfrac{z + i}{z - i}\right), \\
x_2 = -\arg \left(\dfrac{z + 1}{z - 1}\right), \\
x_3 = \log \left|\dfrac{1 + z^2}{1 - z^2}\right|.
\end{cases}
$$

则

$$
\frac{z + i}{z - i} = \frac{(z + i)(\bar{z} + i)}{|z - i|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z - i|^2} + iC_1, \qquad \frac{z + 1}{z - 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z - 1|^2} + iC_2,
$$

于是

$$
\log \left|\frac{\cos x_2}{\cos x_1}\right| = \log \left|\frac{\frac{|z|^2 - 1}{|z - 1|^2}}{\frac{|z|^2 - 1}{|z + i|^2}}\right| = x_3,
$$

得证。

14.5：设曲面 Σ 的等温坐标参数为 (u, v)，那么第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2 = \lambda^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$，验证

$$
\Delta_\Sigma = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v^2}\right)
$$

已知

$$
\begin{cases}
\omega_1 = \lambda \, \mathrm{d}u, \\
\omega_2 = \lambda \, \mathrm{d}v,
\end{cases}
$$

则

$$
\mathrm{d}f = f_u \, \mathrm{d}u + f_v \, \mathrm{d}v = \frac{f_u}{\lambda} \omega_1 + \frac{f_v}{\lambda} \omega_2,
$$

于是

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{f_u}{\lambda}, \\ f_2 = \dfrac{f_v}{\lambda}. \end{cases}$$

已知

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_1 = -\lambda_v \,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \lambda \,\omega_{12} \wedge \omega_2, \\ \mathrm{d}\omega_2 = \lambda_u \,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \lambda \,\omega_1 \wedge \omega_{12}, \end{cases}$$

则

$$\omega_{12} = -\frac{\lambda_v}{\lambda}\,\mathrm{d}u + \frac{\lambda_u}{\lambda}\,\mathrm{d}v.$$

$$Df_1 = \mathrm{d}f_1 + f_2\omega_{21} = \frac{f_{uu}\lambda - f_u\lambda_u}{\lambda^2}\,\mathrm{d}u + \frac{f_{uv}\lambda - f_u\lambda_v}{\lambda^2}\,\mathrm{d}v,$$

$$Df_2 = \mathrm{d}f_2 + f_1\omega_{12} = \frac{f_{uv}\lambda - f_v\lambda_u}{\lambda^2}\,\mathrm{d}u + \frac{f_{vv}\lambda - f_v\lambda_v}{\lambda^2}\,\mathrm{d}v.$$

于是

$$\Delta_\Sigma(f) = \frac{f_{uu}\lambda - f_u\lambda_u}{\lambda^3} + \frac{f_{vv}\lambda - f_v\lambda_v}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda^2}(f_{uu} + f_{vv}),$$

得证。