

1 第二十一一次作业

21.1: 假设 $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ 使得 $T((x_i)_{i \geq 1}) = (i^{-1}x_i)_{i \geq 1}$, 则 $\text{Ran}(T)$ 不是 ℓ^2 的闭子空间。

Proof. 因为 $\ker T = \{0\}$ 和如下事实

$$\frac{\|(0, \dots, 0, n, 0, \dots)\|_{\ell^2/\ker T}}{\|T(0, \dots, 0, n, 0, \dots)\|_{\ell^2}} = \frac{n}{1} = n \rightarrow \infty$$

由闭像集定理, 所以 $\text{Ran}(T)$ 不是 ℓ^2 的闭子空间。□

21.2: 假设 X, Y 是 Banach 空间, T 是单射, N 是 Y 的闭子空间, 使得 $Y = \text{Ran}(T) \oplus N$, 则 $\text{Ran}(T)$ 是闭子空间。

Proof. N 是 Y 的闭子空间, 所以 $Y/N = (\text{Ran}(T) \oplus N)/N$ 是 Banach 空间, 且令 $\pi: Y \rightarrow Y/N, y \mapsto [y]_N$, 有

$$T' := \pi \circ T: X \rightarrow Y/N, x \mapsto [T(x)]_N$$

因为 T 是单射, 所以 T' 是双射。由逆算子定理, $T'^{-1} \in \mathcal{L}(Y/N; X)$, 所以

$$\|[x]_{\ker T}\|_{X/\ker T} = \|x\|_X = \|[T'^{-1}[Tx]]\|_X \leq \|T'^{-1}\| \|[Tx]\|_{Y/N} \leq \|T'^{-1}\| \|Tx\|_Y$$

应用闭像集定理, 知道 $\text{Ran}(T)$ 是闭子空间。□

21.3: 假设 X, Y 是 Banach 空间, $S, T \in \mathcal{L}(X; Y)$ 。若存在 $c > 0$ 使得 $\|Sx\| \leq c\|Tx\|$ 对任意 $x \in X$ 成立, 且 $\ker(T) = \ker(S)$, 则 $\text{Ran}(T)$ 是闭的, 如果 $\text{Ran}(S)$ 是闭的。

Proof. 由闭像集定理, $\|[x]_{\ker T}\|_{X/\ker T} = \|[x]_{\ker S}\|_{X/\ker S} \leq c'\|Sx\| \leq cc'\|Tx\|$, 知道 $\text{Ran}(T)$ 也是闭的。□

21.4: 假设 X, Y 是 Hilbert 空间, $S, T \in \mathcal{L}(X; Y)$ 。若存在 $c > 0$ 使得 $\|Sx\| \leq c\|Tx\|$ 对任意 $x \in X$ 成立, 且 $T(\ker(S)) \subseteq T(\ker(S)^\perp)$, 则 $\text{Ran}(T)$ 是闭的, 如果 $\text{Ran}(S)$ 是闭的。

Proof. 这里的 $\ker(S)^\perp$ 是在内积意义下的。一方面, 根据 $\|Sx\| \leq c\|Tx\|$ 推出 $\ker T \subseteq \ker S$ 。另一方面, 对于任意 $\alpha \in \ker S$, 都存在 $\beta \in \ker(S)^\perp \subseteq X$ 使得 $T\alpha = T\beta$, $(\alpha, \beta) = 0$, 那么 $\alpha - \beta \in \ker T$, 推出 $\alpha - \beta \in \ker S$, 从而 $\beta \in \ker S \cap \ker(S)^\perp$, 作内积 $(\beta, \beta) = 0$, 说明 $T\alpha = 0$, 即 $\ker S \subseteq \ker T$ 。应用 21.3 题的结论即可。□