3 第二十三次作业

23.1：设 X, Y 为 Banach 空间，并且存在 X 到 Y 的 Fredholm 算子，证明如下结论：

- X 是自反的，当且仅当 Y 是自反的；
- X 是可分的，当且仅当 Y 是可分的。

Proof. (1-1) 必要性。设 Fredholm 算子 $T : X \to Y$，则 $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ 仍然是 Fredholm 算子，并且 $T^{**} \circ l_X(x) = l_Y \circ T(x)$，则

$$X \xrightarrow{l_X} l_X(X) = X^{**} \xrightarrow{T^{**}} l_Y \circ T(X) \subseteq Y^{**}$$

由 Fredholm 算子定义 $l_Y \circ T(X) = \mathrm{Ran}(T^{**})$ 是闭子空间。进一步由性质，以及 l_Y 是等距嵌入，知道

$$\dim \left({Y^{**}} \Big/ {l_Y \circ T(X)} \right) = \dim \operatorname{coker} T^{**} = \dim \ker\ T^{*} = \dim \operatorname{coker} T = \dim \left({Y} \Big/ {T(X)} \right) = \dim \left({l_Y(Y)} \Big/ {l_Y \circ T(X)} \right) < \infty$$

比较维数（或者取 $l_Y(Y)/(l_Y \circ T(X))$ 的代表元，这也是 $Y^{**}/l_Y \circ T(X)$ 的代表元，有限性使得它们一一对应，而它们相差 $l_Y \circ T(X) \subseteq l_Y(Y)$ 中的元素）即可知道 $Y^{**} = l_Y(Y)$，从而 Y 自反。

(1-2) 充分性。由于 Banach 空间，所以充分性命题等价于如果 Y^* 是自反的，X^* 也是自反的。因为 T^* 仍然是 Fredholm 算子，所以考虑 T^{***}，同上分析，可以证明。

(2-1) 必要性。选取 X 的可数稠密子集 $\{x_n\}_{n\ge1}$。因为 Fredholm 算子 $T : X \to Y$ 满足 $T(X)$ 是 Y 的闭子空间。$\overline{T(\{x_n\})}$ 是 Y 的闭集，而对任意 $x \in X$ 都存在 $x_{n_k} \to x$，由 T 的连续性知道 $T(x_{n_k}) \to T(x)$，所以 $\overline{T(\{x_n\})} = T(X)$。而 Fredholm 算子满足 $\dim(Y/T(X)) < \infty$，所以不妨设 $Y/T(X) \cong \mathbb{R}^m$ 是等距同构，就可以取商空间的稠密子集 $\{[y_n]\}_{n\ge1}$。综合起来，$\{y_i + T(x_j)\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 就是 Y 上的可数稠密子集。

(2-2) 充分性。因为 $\dim \ker T < \infty$，所以可以取其上的可数稠密子集 $\{x_n\}_{n\ge1}$。因为 $\tilde{T} : X/\ker T \to T(X) \subseteq Y$ 是双射，所以根据 Y 的可分性，选取 $T(X)$ 的可数稠密子集 $\{y_n\}_{n\ge1}$。由闭算子定理知道，$\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(T(X); X/\ker T)$，所以 $\{\tilde{T}^{-1}(y_n)\}_{n\ge1}$ 是 $X/\ker T$ 的可数稠密子集。综合起来，$\{x_i + T^{-1}(y_j)\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数稠密子集。 □

23.2：设 X 为实 Banach 空间，证明：任意两个 X 的余维数为 1 的闭子空间是同构的。

Proof. 不妨设任意两个 X 的余维数为 1 的闭子空间分别为 Y, Z，由可补充性，设 $Y \oplus \mathbb{R}y = Z \oplus \mathbb{R}z = X$。由闭子空间，可以定义商映射 $\pi_Y : X \to X/Y$，则 $\pi_Y(Z) = Z/(Y \cap Z)$。

- 若 $\dim Z/(Y \cap Z) = 0$，则 $Z \subseteq Y$，说明 $Z \oplus \mathbb{R}y = Y \oplus \mathbb{R}y$，取 X 上的恒等映射，限制在 Y 上有同构；
- 若 $\dim Z/(Y \cap Z) > 0$，则 $\dim Z/(Y \cap Z) \le \dim X/Y = 1$，只能取 1，由可补充性，设 $(Y \cap Z) \oplus \mathbb{R}x = Z$；同理考虑 $\pi_Z : X \to X/Z$，得到 $(Y \cap Z) \oplus \mathbb{R}x' = Y$，定义映射

$$T : Y \to Z, \quad \begin{cases} x'' \mapsto x'' & x'' \in Y \cap Z \\ bx' \mapsto bx & bx' \in \mathbb{R}x', b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

这是线性双射。证明有界：

$$\|T(x''+bx')\|_Z = \|x''+bx\|_Y \le \|x''+bx'\|_Z + \|bx'\| \cdot \left\| \frac{x}{\|x'\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\|_X \le C\|x''+bx'\|_Z$$

其中用到了类勾股定理。逆有界是同理的。从而这是线性同胚。 □

23.3：设 X 为无限维实 Banach 空间，证明如下命题等价：

- X 和 $X\times\mathbb{R}$ 同构；
- 存在 X 的余维数为 1 的子空间和 X 同构；
- 所有 X 的余维数为 1 的闭子空间和 X 同构；
- 存在指数为 1 的 Fredholm 算子 $A: X\to X$。

Proof. ($1 \implies 2$) 取非零元素 $x_0\in X$，则 $\mathbb{R}x_0$ 是一维闭子空间，由可补充性知道，存在闭子空间 $Z\subseteq X$ 使得 $Z\oplus\mathbb{R}x_0 = X$ 且余维数为 1，显然 $\dim Z=\infty$，所以 $X = Z\oplus\mathbb{R}x_0 \cong Z\times\mathbb{R}\cong Z$。其中用到了如下线性同胚，其中 $Z\times\mathbb{R}$ 配备乘积范数

$$T: Z\oplus\mathbb{R}x_0 \to Z\times\mathbb{R},\quad z+\lambda x_0 \mapsto (z,\lambda)$$

这是双射，有界性和逆有界性可参照题目 **23.2** 证明中用类勾股定理的方法。

($2 \implies 3$) 设存在 X 的余维数为 1 的子空间 Z 与 X 同构。由于 X 是 Banach 空间，所以对于 Z 中的 Cauchy 列必收敛，说明 Z 是 Banach 空间，题目 **1.1** 说明 Z 是 X 的闭子空间。因此，应用题目 **23.2** 就能得到结论。

($3 \implies 4$) 取这样的闭子空间 Y，补充为 $Y\oplus\mathbb{R}z = X$，所以构造 Fredholm 算子为 $A: X = Y\oplus\mathbb{R}z \to Y\cong X,\ y+\lambda z = y$，这是有界线性算子（用到类勾股定理）。其像空间 Y 为闭子空间，并且 $\dim\ker A = 1,\ \dim\operatorname{coker} A = 0$，所以指数为 1。

($4 \implies 1$) 由于 A 是 Fredholm 算子，所以 $\dim\ker A,\ \dim\operatorname{coker} A < \infty$，可以补充为 $Z\oplus\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{n+1}\} = \operatorname{Im} A\oplus\operatorname{span}\{y_1,\dots,y_n\} = X$。其中，$A: Z\to\operatorname{Im} A$ 是双射，由闭算子定理知道这构成线性同胚（同构）$Z\cong\operatorname{Im} A$，而 $\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}\cong\operatorname{span}\{y_1,\dots,y_n\}$，所以存在同构 $Z\oplus\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}\cong\operatorname{Im} A\oplus\operatorname{span}\{y_1,\dots,y_n\}$，而事实上根据 ($1\implies 2$) 的证明，知道 $X = Z\oplus\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{n+1}\}\cong[Z\oplus\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}]\times\mathbb{R}\cong[\operatorname{Im} A\oplus\operatorname{span}\{y_1,\dots,y_n\}]\times\mathbb{R}\cong X\times\mathbb{R}$。 □

23.4：记 $I=[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ 为单位区间，固定实数 $p\ge 1$，定义

$$W^{1,p}(I) := \left\{ f: I\to\mathbb{R} \middle| f \text{ 绝对连续且 } \int_0^1 |f'(t)|^p \mathrm{d}t < \infty \right\}$$

为 I 上 $W^{1,p}$ 函数的 Sobolev 空间，并装备了范数

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \left(\int_0^1 (|f(t)|^p + |f'(t)|^p)\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}},\quad \forall f\in W^{1,p}(I)$$

特别地，$W^{1,1}(I)$ 是由绝对连续函数组成的 Banach 空间。证明

- $W^{1,p}(I)$ 在上述范数下是 Banach 空间；
- 从 $W^{1,p}(I)$ 到 $C(I)$（配备上确界范数）的嵌入映射是有界线性算子；
- 上述嵌入映射在 $p>1$ 时是紧算子，而 $p=1$ 时不是。

(1) 需要验证线性空间、赋范空间、Banach 空间。

- 绝对连续函数定义为，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于在 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 (a_i,b_i)，当 $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$ 时，就有 $\sum_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$。显然在数乘下绝对连续函数保持，在加法下应用三角不等式，同样说明绝对连续函数在加法下保持。所以绝对连续空间是 $\mathbb{R}$-线性空间，进一步可以说明 $W^{1,p}$ 是 $\mathbb{R}$-线性空间。

- 题设给出的范数确实是一个范数。容易验证齐次性。而正定性需要注意到 $\|f\|_{W^{1,p}}=0$ 的必要条件是 $\|f\|_{L^p}=0$，而 f 是连续函数，所以为零函数。三角不等式应用 Holder 不等式证明：

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{W^{1,p}}^p &\le (\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})^p+(\|f'\|_{L^p}+\|g'\|_{L^p})^p \\
&= \|f\|_{L^p}(\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})^{p-1}+\|f'\|_{L^p}(\|f'\|_{L^p}+\|g'\|_{L^p})^{p-1} \\
&\quad +\|g\|_{L^p}(\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})^{p-1}+\|g'\|_{L^p}(\|f'\|_{L^p}+\|g'\|_{L^p})^{p-1} \\
&\le (\|f\|_{W^{1,p}}^p+\|g\|_{W^{1,p}}^p)^{1/p}[(\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})^p+(\|f'\|_{L^p}+\|g'\|_{L^p})^p]^{1/q}
\end{aligned}
$$

- 下面说明在配备范数的意义下构成 Banach 空间。对于任意 Cauchy 列 $\{f_n\}$，有

$$\|f_n-f_m\|_{W^{1,p}}\ge 2^{-1/q}[\|f_n-f_m\|_{L^p}+\|f_n'-f_m'\|_{L^p}]$$

  由 $\mathcal{L}^p$ 是 Banach 空间，所以存在 $f_n\to f, f_n'\to g$，其中 $f,g\in\mathcal{L}^p(I)\cap C(I)$，定义 $\hat f(x)=f(0)+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，则

$$\|\hat f(x)-f_n(x)\|_{L^p}\le\|f(0)-f_n(0)\|_{L^p}+\left\|\int_0^x|g-f_n'|\mathrm{d}t\right\|_{L^p}\le\|f(0)-f_n(0)\|_{L^p}+\|\|\chi_{[0,x]}\|_{L^q}\|g-f_n'\|_{L^p}\|_{L^p}\to 0$$

  所以 $\hat f=f$ 在零测意义下，前者是绝对连续函数，且满足 Lebesgue 导数可积，即 $\hat f\in W^{1,p}(I)$。

(2) 线性是显然的，只需证明有界。设 $|f|$ 的最大值点为 x_0，由 f 的连续性，下面进行讨论。如果 $|f|>\|f\|_\infty/2$ 恒成立，则显然可以控制。如果不恒成立，总存在距离 x_0 最近的 $a\in\mathbb{R}^+$，使得（不妨）$[x_0,x_0+a]\subseteq I$ 上 $|f|>\|f\|_\infty/2$ 且 $|f(x_0+a)|=\|f\|_\infty/2$，下面进行估计。其中用到 Holder 不等式（策略类比于上式中 $\chi_{[0,x]}$，这里取 $\chi_{[x_0,x_0+a]}$ 作截断）

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{W^{1,p}}^p &= \int_0^1|f(t)|^p+|f'(t)|^p\mathrm{d}t \\
&\ge \left[\frac{\int_{x_0}^{a+x_0}|f|\mathrm{d}t}{\left(\int_0^1\chi_{[x_0,x_0+a]}^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^p+\left[\frac{\int_{x_0}^{a+x_0}|f'|\mathrm{d}t}{\left(\int_0^1\chi_{[x_0,x_0+a]}^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^p \\
&\ge (a^{-\frac{p}{q}}a^p+a^{-\frac{p}{q}}a^{-p})\left|\frac{\|f\|_{L^\infty}}{2}\right|^p=(a+a^{1-2p})\left|\frac{\|f\|_{L^\infty}}{2}\right|^p\ge\frac{2}{a^{p-1}}\frac{\|f\|_{L^\infty}^p}{2^p}\ge 2^{1-p}\|f\|_{L^\infty}^p
\end{aligned}
$$

其中 $a\in(0,1)$，所以得证。

(3) 只需说明 $W^{1,p}(I)$ 上的单位球在 $C(I)$ 上是否是预紧的。应用 Arzela-Ascoli 定理，证明 $\mathbb{B}_{W^{1,p}(I)}$ 点态预紧且等度连续。

- $p>1$ 时，由 (2) 知道 $\|f\|_{W^{1,p}(I)}\ge C\|f\|_{L^\infty}$，所以 $\sup_{f\in\mathbb{B}_{W^{1,p}(I)}}\|f\|_{L^\infty}<\infty$，显然等度连续，而且 $|f(x_0)|\le\|f\|_{L^\infty}\|x_0\|$ 落在紧集，所以是点态预紧的，此时是紧算子；

- $p=1$ 时，$\mathbb{B}_{W^{1,p}(I)}$ 不是等度连续的，考虑 $f_n(t)=t^n/2\in\mathbb{B}_{W^{1,p}(I)}$，但

$$|f_n(1-1/m)-f_n(1)|=\frac{1}{2}-\left(\frac{m-1}{m}\right)^n\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$

  所以 $p=1$ 不是紧算子。 □