

Расчетное задание  
по курсу «**Основы вычислительной гидрогазодинамики**»

*Весенний семестр 2022/2023 учебного года*

Расчетное задание посвящено численному решению одномерных модельных уравнений (уравнение диффузии, уравнение конвекции, невязкое уравнение Бюргерса).

Необходимо разработать программу, реализующую численное решение одномерных уравнений по методу конечных разностей. По результатам составляется единый отчет по расчетному заданию.

### **Часть I. Модельное уравнение диффузии**

С помощью метода конечных разностей найти численное решение для модельного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Для аппроксимации уравнения рассмотреть два способа: явную центральную схему и схему, соответствующую индивидуальному варианту задания. Определить порядок точности схем (по пространству и по времени), привести шаблоны схем. Для рассмотренных схем найти коэффициент перехода  $g$  и провести исследование устойчивости схемы.

Решить задачу, соответствующую индивидуальному варианту, при этом могут рассматриваться различные модификации модельного уравнения диффузии. Привести описание исследуемой задачи, какое физическое явление моделируется, сопоставить полученное решение с известными аналитическими решениями.

При решении нестационарной задачи получить решение с шагом интегрирования по времени соответствующему шагу явной схемы, как наиболее близкому к моделированию физического явления на выбранном шаблоне дискретизации по пространству. В случае моделирования быстропротекающих процессов предусмотреть выбор шага интегрирования по времени в соответствии с масштабом времени. Продемонстрировать возможности схемы (влияние шага интегрирования по времени на получаемое решение). Выбрать точки мониторинга, продемонстрировать, как поведение функции в точке мониторинга зависит от дискретизации по пространству.

## Часть II. Линейное уравнение переноса

С помощью метода конечных разностей найти численное решение для одномерного линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Для аппроксимации уравнения рассмотреть два способа: явную противопоточную схему первого порядка и схему, соответствующую индивидуальному варианту. Определить порядок точности схем (по пространству и по времени) и привести шаблон схемы.

Рассмотреть задачу переноса синусоидальных сигналов с разными частотами: различные гармоники  $\sin(kx)$ , где  $k = m\pi/L$  – волновое число,  $L$  – длина расчетной области,  $m$  – номер гармоники; использовать граничные условия периодичности.

Для рассмотренных схем найти коэффициент перехода  $g$ , на основе которого определить, какими свойствами (диссипация, дисперсия) обладает схема, провести исследование устойчивости схемы. Сравнить решение с аналитическим решением исходного уравнения, и с оценкой численного решения для схемы, полученной на основе исследования диссипативных и дисперсионных свойств схемы. Построить поверхность диссипации (зависимость модуля коэффициента перехода  $g$  от числа Куранта и номера гармоники).

Рассмотреть задачу переноса сигнала, соответствующую индивидуальному варианту, сопоставить полученные результаты с аналитическим решением, проанализировать работоспособность схем.

## Часть III. Невязкое уравнение Бюргерса

Найти численное решение для нелинейного уравнения переноса, записанного в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 / 2)}{\partial x} = 0$$

Для аппроксимации уравнения использовать те же две схемы, что и для линейного уравнения переноса, рассмотреть задачу переноса синусоидальных сигналов с разными частотами, а также задачу, соответствующую индивидуальному варианту.

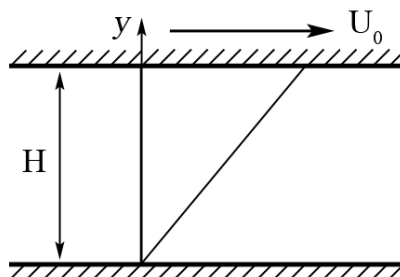
*Задание составлено: асс. ВШ ПМиВФ Колесник Е.В.*

*доц. ВШ ПМиВФ Булович С.В.*

## Задачи для модельного уравнения диффузии

### 1. Развитие течения Куэтта между плоскостями

Течение вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, одна из которых движется относительно другой. Течение происходит под действием сил вязкого трения, действующих на жидкость, и силового воздействия, параллельного стенкам.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Граничные условия:  $y = 0 \quad u = 0; \quad y = H \quad u = U_0$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

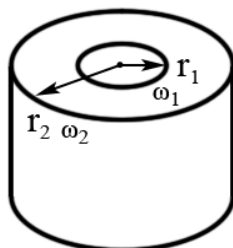
Параметры:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = A$ , [м/с<sup>2</sup>] – ускорение, вызванное силовым воздействием на жидкость,  $\nu$ , [м<sup>2</sup>/с] – коэффициент кинематической вязкости,  $H$ , [м] – высота зазора,  $U_0$ , [м/с] – скорость движения стенки канала.

Провести следующие исследования:

- Оценить время релаксации функции к стационарному состоянию
- Построить графики зависимости скорости от координаты, сравнить с аналитическим решением при разных значениях параметра  $A$

### 2. Развитие течения Куэтта между концентрическими цилиндрами

Течение вязкой жидкости между двумя концентрическими цилиндрами, вращающимися с различными, но постоянными, угловыми скоростями. Течение происходит под действием сил вязкого трения, действующих на жидкость. Сдвиговое напряжение параллельно стенкам.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial(ru)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$

Граничные условия:  $r = r_1 \quad u = r_1 \omega_1; \quad r = r_2 \quad u = r_2 \omega_2$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

Параметры:  $\nu$ , [м<sup>2</sup>/с] – коэффициент кинематической вязкости,  $r_1, r_2$  [м] – радиусы, определяющие высоту зазора,  $\omega_1, \omega_2$  [рад/с] – круговая частота движения стенки канала.

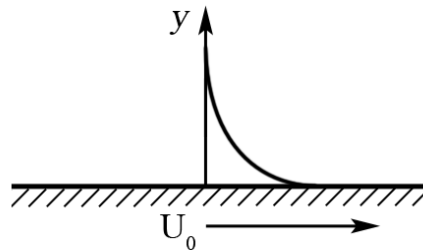
Провести следующие исследования:

- Оценить время релаксации функции к стационарному состоянию.
- Построить графики зависимости скорости от координаты, сравнить с аналитическим решением.

### 3. Первая задача Стокса

Течение вязкой жидкости в окрестности плоской стенки, внезапно приведенной в движение. Течение вызвано сдвиговыми напряжениями, ориентированными параллельно стенке. При выборе соответствующих масштабов для представления функции и выборе аргумента функции поведение решения описывается одной универсальной зависимостью, то есть решение задачи является автомодельным.

Течение относится к классу задач пограничного слоя, поэтому положение границы, где выполнено граничное условие «на бесконечности», априорно неизвестно. Для определения фактического положения границы используется условие асимптотического поведения функции по мере приближения к внешней границе пограничного слоя.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Граничные условия:  $y = 0 \quad u = U_0; \quad y = \infty \quad u = 0, \left[ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \right]$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

Параметры:  $\nu$ , [м<sup>2</sup>/с] – коэффициент кинематической вязкости,  $U_0$ , [м/с] – скорость движения стенки.

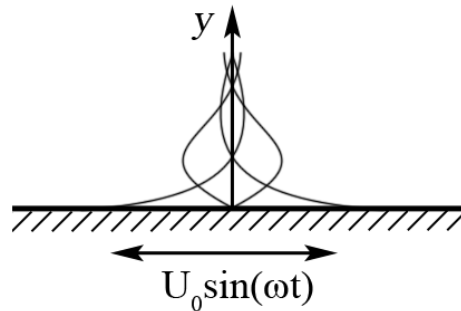
Провести следующие исследования:

- Оценить допустимый масштаб времени, которое используется при получении решения, для выбранного размера расчетной области.
- Построить график зависимости скорости от координаты в различные моменты времени в физических и автомодельных координатах

#### 4. Вторая задача Стокса

Течение вязкой жидкости в окрестности плоской стенки, совершающей колебания в своей плоскости. Течение вызвано сдвиговыми напряжениями, ориентированными параллельно движущейся стенке.

Течение относится к классу задач пограничного слоя, поэтому положение границы, где выполнено граничное условие, априорно неизвестно. Для определения фактического положения границы используется условие асимптотического поведения функции по мере приближения к внешней границе пограничного слоя.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Граничные условия:  $y = 0 \quad u = U_0 \sin(\omega t); \quad y = \infty \quad u = 0, \left[ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \right]$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

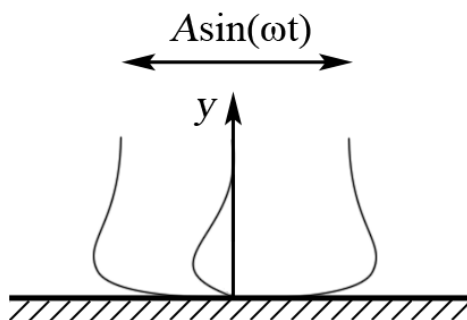
Параметры:  $\nu$ ,  $[m^2/s]$  – коэффициент кинематической вязкости,  $U_0$ ,  $[m/s]$  – амплитуда колебания скорости движения стенки,  $\omega$   $[rad/s]$  – круговая частота движения стенки.

Провести следующие исследования:

- Подобрать размеры расчетной области, обеспечивающие разрешение колебаний.
- Получить режим установившихся колебаний скорости, оценить, сколько нужно периодов колебаний до момента установления.
- Построить графики зависимости скорости в разные моменты фазы колебаний в физических и автомодельных координатах.

## 5. Обратная вторая задача Стокса

Колебания жидкости под действием градиента давления около неподвижной стенки.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Граничные условия:  $y = 0 \quad u = 0; \quad y = \infty \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

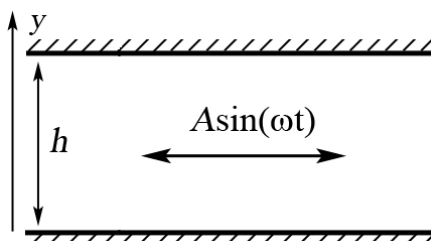
Параметры:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -A \cos(\omega t)$ ,  $[м/с^2]$  – ускорение, вызванное силовым воздействием на жидкость,  $A$ ,  $[м/с^2]$  – амплитуда колебания,  $\omega$   $[рад/с]$  – круговая частота,  $\nu$ ,  $[м^2/с]$  – коэффициент кинематической вязкости.

Провести следующие исследования:

- Подобрать размеры расчетной области, обеспечивающие разрешение колебаний.
- Рассчитать установившееся течение, оценить, сколько нужно периодов колебаний до момента установления.
- Построить графики (в разные моменты времени) в автомобильных координатах.

## 6. Обратная вторая задача Стокса в плоском канале

Колебательное течение жидкости в плоском канале под действием переменного градиента давления.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Граничные условия:  $y = 0 \quad u = 0; \quad y = h \quad u = 0$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

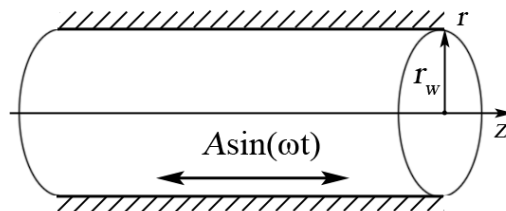
Параметры:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -A \cos(\omega t)$ ,  $[м/с^2]$  – ускорение, вызванное силовым воздействием на жидкость,  $A$ ,  $[м/с^2]$  – амплитуда колебания,  $\omega$   $[рад/с]$  – круговая частота,  $\nu$ ,  $[м^2/с]$  – коэффициент кинематической вязкости,  $h$ ,  $[м]$  – высота зазора.

Провести следующие исследования:

- Рассчитать установившееся течение, оценить, сколько нужно периодов колебаний до момента установления.
- Рассмотреть две асимптотики: 1) «низкие частоты» ( $\delta_\omega \geq h/2$ ): квазистационарное течение Пуазейля; 2) «высокие частоты» ( $\delta_\omega \ll h/2$ ): обратная вторая задача Стокса ( $\delta_\omega = \sqrt{2\nu/\omega}$  – толщина пограничного слоя).

## 7. Обратная вторая задача Стокса в цилиндрической трубе

Колебательное течение жидкости в цилиндрической трубе под действием переменного градиента давления.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial(ru)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

Граничные условия:  $r=0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ ;  $r=r_w \quad u=0$

Начальные условия:  $t=0 \quad u=0$

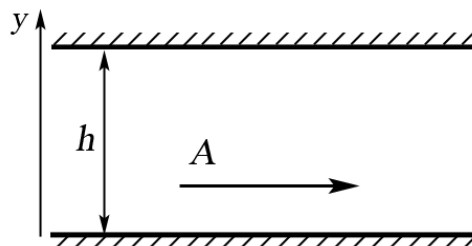
Параметры:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -A \cos(\omega t)$ ,  $[м/с^2]$  – ускорение, вызванное силовым воздействием на жидкость,  $A$ ,  $[м/с^2]$  – амплитуда колебания,  $\omega$   $[рад/с]$  – круговая частота,  $\nu$ ,  $[м^2/с]$  – коэффициент кинематической вязкости,  $r_w$ ,  $[м]$  – радиус трубы.

Провести следующие исследования:

- Рассчитать установившееся течение, оценить, сколько нужно периодов колебаний до момента установления.
- Рассмотреть две асимптотики: 1) «низкие частоты» ( $\delta_\omega \geq r_w$ ): квазистационарное течение Пуазейля; 2) «высокие частоты» ( $\delta_\omega \ll r_w$ ): обратная Вторая задача Стокса ( $\delta_\omega = \sqrt{2\nu/\omega}$  – толщина пограничного слоя)

## 8. Разгон жидкости в плоском канале

Течение жидкости в плоском канале под действием градиента давления.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Граничные условия:  $y = 0 \quad u = 0; \quad y = h \quad u = 0$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

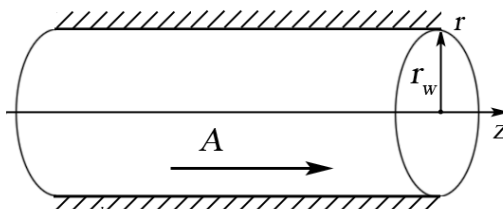
Параметры:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = A$ ,  $[м/с^2]$  – ускорение, вызванное силовым воздействием на жидкость,  $A$ ,  $[м/с^2]$  – амплитуда,  $\nu$ ,  $[м^2/с]$  – коэффициент кинематической вязкости,  $h$ ,  $[м]$  – высота зазора.

Провести следующие исследования:

- Рассчитать установившееся течение, оценить, за какой интервал времени течение будет установившимся.
- Рассчитать течение при разных значениях параметра  $A$ , построить зависимость максимальной скорости (при установившемся течении) от  $A$ .

## 9. Разгон жидкости в цилиндрической трубе

Течение жидкости в цилиндрической трубе под действием градиента давления.



Течение описывается уравнением:  $\frac{\partial(ru)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

Граничные условия:  $r = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0; \quad r = r_w \quad u = 0$

Начальные условия:  $t = 0 \quad u = 0$

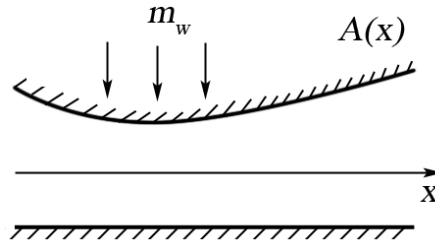
Параметры:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = A$   $[м/с^2]$  – ускорение, вызванное силовым воздействием на жидкость,  $A$ ,  $[м/с^2]$  – амплитуда,  $\nu$ ,  $[м^2/с]$  – коэффициент кинематической вязкости,  $r_w$ ,  $[м]$  – радиус трубы.

Провести следующие исследования:



- Рассчитать установившееся течение, оценить, за какой интервал времени течение будет установившимся.
- Рассчитать течение при разных значениях параметра  $A$ , построить зависимость максимальной скорости (при установившемся течении) от  $A$ .

10. Течение жидкости в канале переменного сечения при массообмене со стенкой  
Рассматривается течение жидкости в канале переменного сечения при массообмене со стенкой в одномерном приближении.



Течение описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\rho u) = -\Pi m_w,$$

где  $A$ , [м<sup>2</sup>] – площадь,  $\Pi$ , [м] – периметр,  $\rho$ , [кг/м<sup>3</sup>] – плотность,  $u$ , [м/с] – средняя в сечении скорость,  $\rho u$ , [кг/(с\*м<sup>2</sup>)] – удельных расход в направлении образующей канала,  $m_w = \rho v_w$ , [кг/(с\*м<sup>2</sup>)] – удельный расход через стенку канала,  $v_w$ , [м/с] – значение скорости на стенке канала (величина вдува/отсоса).

Если ввести в рассмотрение для определения скорости по формуле  $u = \partial\varphi / \partial x$  потенциал  $\varphi$ , то относительно функции  $\varphi$  получится квазиодномерное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = -\Pi m_w$$

При отсутствии массопереноса через стенку канала решение имеет вид  $G = A\rho u = \text{const}$  (постоянное значение расхода). При значении  $\rho = \text{const}$  решение описывает течение несжимаемой жидкости.

Решение стационарного уравнения эллиптического типа может быть найдено методом установления. Для этого в уравнение добавляется нестационарное слагаемое. В результате этого уравнение становится эволюционным, и тип уравнения меняется на параболический.

В итоге уравнение принимает вид:  $A\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \Pi v_w$

Граничные условия:  $x=0 \quad \varphi = \varphi_0; \quad x=L \quad \varphi = \varphi_L$

Начальные условия:  $t=0 \quad \varphi = \varphi_0 + (\varphi_L - \varphi_0)\frac{x}{L}$

Параметры:  $\Pi(x)$ ,  $A(x)$ ,  $v_w(x)$ ,  $L$ .

Провести следующие исследования:

- Рассмотреть канал конфузторной формы:

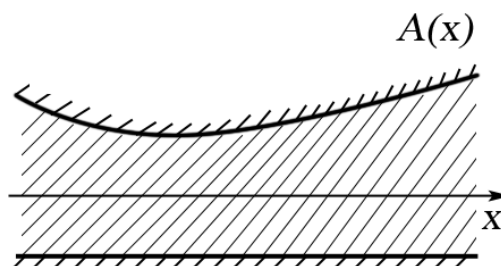
$$A = A_0 + (A_L - A_0)x/L, \quad (A_L < A_0). \quad \Pi = \Pi_0 + (\Pi_L - \Pi_0)x/L.$$

Рассчитать значения скорости при нулевом и различных по зависимости от координаты и знаку значениях параметра  $v_w(x)$ .

- Повторить исследование для канала диффузорной формы ( $A_L > A_0$ ).

## 11. Фильтрация жидкости в канале переменного сечения

Рассматривается задача о фильтрации жидкости в канале переменного сечения.



Течение описывается уравнением неразрывности и линейным законом Дарси:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\rho u) = 0$$

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Подстановка значения скорости в уравнение неразрывности приводит к уравнению относительно давления:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A\rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

При фильтрации несжимаемой жидкости получается линейное уравнение для определения давления:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A\rho_0 \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0.$$

Решение уравнения может быть получено методом установления, т.е. в результате решения следующего уравнения:

$$A \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( A\rho_0 \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{или} \quad A \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{k}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

Граничные условия:  $x=0 \quad p = p_0; \quad x=L \quad p = p_L$

Начальные условия:  $t=0 \quad p = p_0 + (p_L - p_0) \frac{x}{L}$

$A, [m^2]$  – площадь,  $\rho, [кг/м^3]$  – плотность,  $u, [м/с]$  – средняя в сечении скорость,  $k, [м^2]$  – коэффициент проницаемости,  $\mu = \rho\nu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\nu, [м^2/с]$  – коэффициент кинематической вязкости.

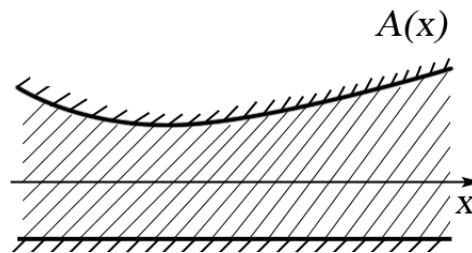
Параметры:  $A(x), k, \nu, L$ .

Провести следующие исследования:

- Рассмотреть варианты изменения площади канала  
а)  $A(x) = \text{const}$ , б)  $A = A_0 + (A_L - A_0)x/L$ , в)  $A = A_0 + (A_L - A_0)x^2/L$ ;  $A_L > A_0$ .
- Привести зависимости давления и скорости от продольной координаты. Сравнить с аналитическим решением задачи.

## 12. Фильтрация газа в канале переменного сечения

Рассматривается задача об изотермической фильтрации газа в канале переменного сечения.



Течение описывается нестационарным уравнением баланса массы и линейным законом Дарси:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho u) = 0$$

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

В случае изотермической фильтрации газа справедливо также уравнение состояния

$$\rho = \frac{pm}{RT} = zp$$

После подстановки значения плотности и скорости, искомое уравнение относительно давления будет иметь вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{k}{\mu} p \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

Граничные условия:  $x=0$   $p = p_0$ ;  $x=L$   $p = p_L$

Начальные условия:  $t=0$   $p = p_0$

$A$ , [м<sup>2</sup>] – площадь,  $\rho$ , [кг/м<sup>3</sup>] – плотность,  $u$ , [м/с] – средняя в сечении скорость,  $k$ , [м<sup>2</sup>] – коэффициент проницаемости,  $\mu = \rho\nu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\nu$ , [м<sup>2</sup>/с] – коэффициент кинематической вязкости.

Параметры:  $A(x)$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $L$ .

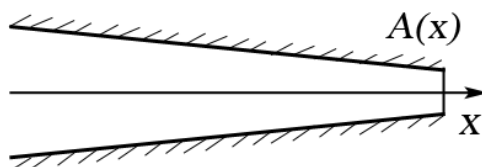
Провести следующие исследования:

- Рассмотреть варианты изменения площади канала  
а)  $A(x) = \text{const}$ , б)  $A = A_0 + (A_L - A_0)x/L$ , в)  $A = A_0 + (A_L - A_0)x^2/L$ ;  $A_L > A_0$ .

- В точках мониторинга построить зависимости значений давления и скорости во времени. Привести распределения термодинамических функций при установившемся режиме течения.

### 13. Осаждение примеси в тупиковом канале

Рассматривается задача диффузионного осаждения примеси в тупиковом канале. Для создания разветвленной поверхности осаждения часть гладкой стенки заменяется группой тупиковых каналов, увеличивающих интенсивность осаждения примеси на рассматриваемом участке в сотни раз.



Уравнение для описания процесса диффузионного переноса примеси с учетом осаждения на стенках трубы имеет вид:

$$A \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( DA \frac{\partial c}{\partial x} \right) = -\Pi \alpha c$$

где  $A$ ,  $[m^2]$  – площадь канала,  $\Pi$ ,  $[m]$  – периметр,  $\alpha$ ,  $[m/s]$  – скорость поверхностного осаждения,  $D$ ,  $[m^2/s]$  – коэффициент диффузионного переноса.

Граничные условия:  $x=0 \quad c=1; \quad x=L \quad \frac{\partial c}{\partial x}=0$

Начальные условия:  $t=0 \quad c=0$

Для установившегося режима, исходя из соотношений для канала цилиндрической формы ( $A = \pi d^2/4$  и  $\Pi = \pi d = \sqrt{4\pi A}$ ,  $d$ ,  $[m]$  – диаметр канала), определить, сколько необходимо калибров для изменения концентрации в  $e$  раз.

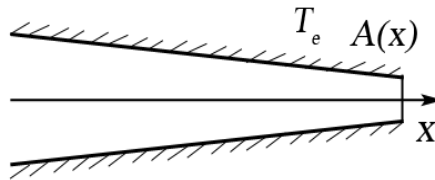
Параметры:  $d$ ,  $D$ ,  $\alpha$ ,  $L$ .

Провести следующие исследования:

- Рассмотреть влияние диаметра канала  $d$  на протяженность участка осаждения примеси.
- В точках мониторинга построить зависимость концентрации от времени.

### 14. Задача теплопроводности для ребра радиатора, рассеивающего тепло

Для съема, отвода и рассеивания тепла применяют различные геометрические формы, характеризующиеся разветвленной поверхностью теплообмена (радиаторные решетки). Рассматривается элемент в виде цилиндра переменной в сечении площади.



Уравнение для описания процесса теплопроводности с учетом распределенного источника тепла имеет вид

$$A \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( aA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \Pi \alpha (T_e - T)$$

где  $A(x)$ ,  $[m^2]$  – площадь канала,  $\Pi$ ,  $[m]$  – периметр,  $a = \lambda / \rho c$ ,  $[m^2/s]$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$ ,  $[Вт/(м*К)]$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$ ,  $[кг/м^3]$  – плотность,  $c$ ,  $[Дж/(моль*К)]$  – теплоемкость,  $\alpha$  – коэффициент поверхностной теплоотдачи,  $[м/с]$ .

Граничные условия:  $x=0$   $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q_L}{\lambda}$ ;  $x=L$   $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_e - T)$

Начальные условия:  $t=0$   $T=0$

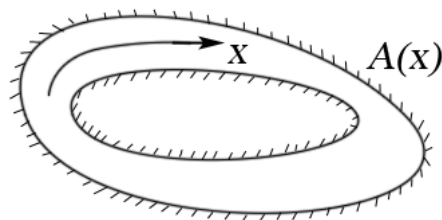
Параметры:  $d$ ,  $a$ ,  $\alpha$ .

Провести следующие исследования:

- Считая, что для рассеяния тепла используется тело цилиндрической формы ( $A = \pi d^2/4$  и  $\Pi = \pi d = \sqrt{4\pi A}$ ) для выбранной плотности теплового потока исследовать влияние площади и удлинения на распределение температуры в осевом направлении.

### 15. Задача теплопроводности для тела кольцеобразной формы

Получить численное решение уравнения теплопроводности для области кольцеобразной формы по схеме повышенного порядка точности.



Нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$A \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( aA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Начальные условия:  $t=0$   $T=T(x)$

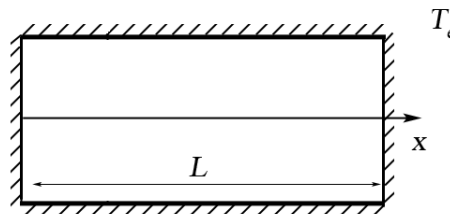
Параметры:  $A(x)$ ,  $[m^2]$  – площадь канала,  $a = \lambda / \rho c$ ,  $[m^2/s]$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$ ,  $[Вт/(м*К)]$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$ ,  $[кг/м^3]$  – плотность,  $c$ ,  $[Дж/(моль*К)]$  – теплоемкость,  $L$ ,  $[м]$  – длина образующей канала.

Провести следующие исследования:

- Для различных начальных значений распределения температуры в кольце рассчитать время релаксации поля температуры до однородного значения.

#### 16. Задача нестационарной теплопроводности при периодическом изменении температуры окружающей среды

Моделируется задача о передаче тепла через стенку гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания. Тепловое взаимодействие описывается в рамках граничного условия 3-го рода.



Нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Граничные условия:  $x=0$   $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_L^e - T) \quad T_L^e = const$

$x=L$   $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_0 - T) \quad T_0 = T_R^e + \Delta T \sin(\omega t)$

Начальные условия:  $t=0$   $T = T_L^e + (T_R^e - T_L^e) \frac{x}{L}$

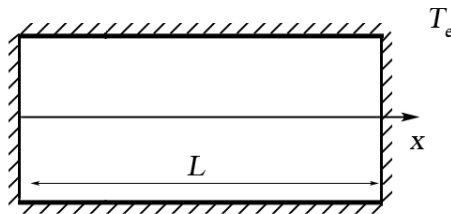
Параметры:  $a = \lambda / \rho c$ ,  $[m^2/s]$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$ ,  $[Вт/(м*К)]$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$ ,  $[кг/м^3]$  – плотность,  $c$ ,  $[Дж/(моль*К)]$  – теплоемкость,  $L$ ,  $[м]$  – толщина стенки.  $\alpha$  – коэффициент поверхностной теплоотдачи,  $[Вт/(м^2*К)]$ ,  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота периодического сигнала частоты  $f$   $[1/c]$ ,  $\Delta T$ ,  $[К]$  – амплитуда.

Провести следующие исследования:

- Для различных значений частоты и температуропроводности установить закономерность «проникновения» колебания температуры в рассматриваемое тело.

#### 17. Задача нестационарной теплопроводности при периодическом тепловом воздействии

Рассматривается задача о тепловом периодическом импульсном воздействии. Отвод тепла моделируется граничным условием 3-го рода.



Нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Граничные условия:

$$x=0 \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_e - T) \quad T_e = \text{const}$$

$$x=L \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_L \quad q_L = A \cdot \text{sign}(\sin(\omega t))$$

Начальные условия:  $t=0 \quad T = T_e$

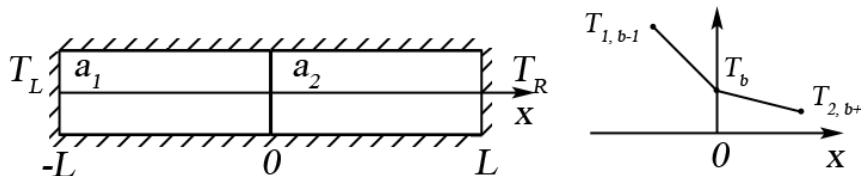
Параметры:  $a = \lambda / \rho c$ ,  $[\text{м}^2/\text{с}]$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$ ,  $[\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})]$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$ ,  $[\text{кг}/\text{м}^3]$  – плотность,  $c$ ,  $[\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})]$  – теплоемкость,  $L$ ,  $[\text{м}]$  – толщина стенки.  $\alpha$  – коэффициент поверхностной теплоотдачи,  $[\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})]$ ,  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота периодического сигнала частоты  $f$   $[\text{1}/\text{с}]$ ,  $A$  – амплитуда сигнала.

Провести следующие исследования:

- Для различных значений частоты и температуропроводности установить закономерность «проникновения» колебания температуры в рассматриваемое тело.

#### 18. «Классическая» задача сопряженного теплообмена двух тел

Рассматривается задача теплового взаимодействия двух тел с реализацией граничного условия 4-го рода (непрерывность функции температуры и теплового потока в зоне контакта).



Уравнения для описания процесса теплопроводности в двух телах с разными характеристиками температуропроводности имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = 0 \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = 0$$

Граничные условия имеют вид:

$$x = -L \quad T_1 = T_L$$

$$x = 0 \quad T_b = T_1 = T_2 \quad q_b = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}$$

$$x = L \quad T_2 = T_R$$

Начальные условия:  $t = 0 \quad T_1 = T_L \quad T_2 = T_R$

Один из возможных алгоритмов поиска решения в области контакта двух тел может быть реализован на базе граничного условия 1-го рода, когда задается значение температуры в зоне контакта. Коррекция этого значения происходит из условия равенства тепловых потоков. В частности, для явной схемы и сетки с постоянным шагом коррекция значения температуры контакта двух тел производится по формуле  $T_b = (\lambda_1 T_{1,b-1} + \lambda_2 T_{2,b+1}) / (\lambda_1 + \lambda_2)$ , следующей непосредственно из конечно-разностного представления равенства тепловых потоков в зоне контакта. Здесь  $T_{1,b-1}$  – температура в точке левее точки контакта,  $T_{2,b+1}$  – температура в точке правее точки контакта. Для неявной схемы необходимы итерации, т.к. величины  $T_{1,b-1}$  и  $T_{2,b+1}$  зависят от назначаемого значения  $T_b$ .

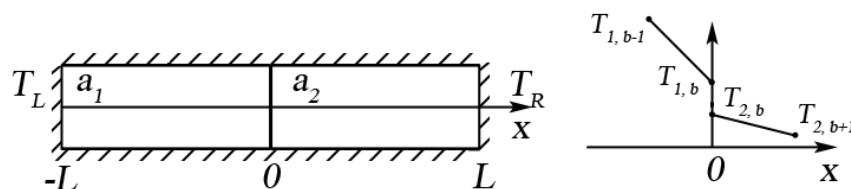
Параметры:  $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2$ .

Провести следующие исследования:

- Варьируя параметры задачи установить соотношения, когда решение сопряженной задачи может быть рассмотрено в рамках граничного условия первого или второго рода.

#### 19. Задача сопряженного теплообмена двух тел при неплотном контакте

Рассматривается задача теплового взаимодействия двух тел с реализацией граничного условия 4-го рода, модифицированного на учет конечного значения скачка температуры в зоне контакта. Непрерывность теплового потока в зоне контакта сохраняется.



Уравнения для описания процесса теплопроводности в двух телах с разными характеристиками теплопроводности имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = 0 \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = 0$$



Граничные условия имеют вид:

$$x = -L \quad q_1 = 0$$

$$x = 0 \quad \alpha(T_{2,b} - T_{1,b}) = q_b \quad q_b = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}$$

$$x = L \quad q_2 = 0$$

$$\text{Начальные условия: } t = 0 \quad T_1 = T_1^0 \quad T_2 = T_2^0$$

Один из возможных алгоритмов поиска решения в области контакта двух тел может быть реализован на базе граничного условия 1-го рода, когда задаются значения температур в зоне контакта. Коррекция этих значения происходит из условия равенства тепловых потоков. В частности, для явной схемы и сетки с постоянным шагом значения температур в зоне контакта двух тел  $T_{1,b}$  и  $T_{2,b}$  находятся из решения системы уравнений, следующей из равенств конечно-разностного представления тепловых потоков в зоне контакта.

$$\lambda_1 \frac{T_{1,b} - T_{1,b-1}}{\Delta x} = \alpha(T_{2,b} - T_{1,b}),$$

$$\lambda_2 \frac{T_{2,b+1} - T_{2,b}}{\Delta x} = \alpha(T_{2,b} - T_{1,b}).$$

Величины  $T_{1,b-1}$  и  $T_{2,b+1}$  — значения температур в соседних с границей контакта точках в теле 1 и 2 соответственно. Для неявной схемы необходимы итерации, т.к. величины  $T_{1,b-1}$  и  $T_{2,b+1}$  зависят от значений  $T_{1,b}$  и  $T_{2,b}$ .

Параметры:  $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2, \alpha$ .

Провести следующие исследования:

- Серией расчетов убедиться, что при увеличении коэффициента поверхностной теплоотдачи  $\alpha$  значения функций  $T_{1,b}$  и  $T_{2,b}$  стремятся к значению  $T_b = (\lambda_1 T_{1,b-1} + \lambda_2 T_{2,b+1}) / (\lambda_1 + \lambda_2)$ .

## Схемы для модельного уравнения диффузии

### 1. Явная центральная схема

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a} \quad (\text{отдельно рассмотреть случай } \Delta t = \Delta x^2/6a)$$

повышающий порядок аппроксимации схемы до значения  $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$

### 2. Схема Дюфорта-Франкела

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^n - (T_i^{n+1} + T_i^{n-1}) + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

### 3. Двухшаговая схема Алена-Чена

$$\frac{\tilde{T}_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^n - 2\tilde{T}_i^{n+1} + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{\tilde{T}_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + \tilde{T}_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

### 4. Схема типа «классика»

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad i+n=2k$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad i+n=2k+1 \quad \Delta t \sim \forall$$

### 5. Явный метод переменных направлений Саульева

$$\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - T_i^{n+1/2} - T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n+1/2}}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - T_i^{n+1/2} - T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

### 6. Явный метод переменных направлений Саульева (улучшенный)

$$\frac{\tilde{T}_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{\tilde{T}_{i-1}^{n+1} - \tilde{T}_i^{n+1} - T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{\bar{T}_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^n - T_i^n - \bar{T}_i^{n+1} + \bar{T}_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

$$T_i^{n+1} = 0.5(\tilde{T}_i^{n+1} + \bar{T}_i^{n+1}) \quad \Delta t \sim \forall$$

### 7. Двухшаговая явная схема

$$\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - 2T_i^{n+1/2} + T_{i+1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$$

8. Двухслойная неявная схема

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

9. Трехслойная неявная схема

$$\frac{3T_i^{n+1} - 4T_i^n + T_i^{n-1}}{2\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

10. Двухслойная схема с весами

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \theta \left[ a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] - (1-\theta) \left[ a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] = 0, \quad \theta = 1/3 \quad \Delta t \leq 1.5 \frac{\Delta x^2}{a}$$

11. Двухслойная схема с весами

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \theta \left[ a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] - (1-\theta) \left[ a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] = 0, \quad \theta = 2/3 \quad \Delta t \sim \forall$$

12. Схема Кранка-Николсон как схема с весами ( $\theta = 1/2$ )

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left[ a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] - \frac{1}{2} \left[ a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

13. Схема Кранка-Николсон как схема предиктор-корректор с первым шагом по явной схеме

$$\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n+1/2}}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

14. Схема Кранка-Николсон как схема предиктор-корректор с первым шагом по неявной схеме

$$\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - 2T_i^{n+1/2} + T_{i+1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n+1/2}}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - 2T_i^{n+1/2} + T_{i+1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

15. Схема предиктор-корректор с неявным шагом предиктора

$$\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - 2T_i^{n+1/2} + T_{i+1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n+1/2}}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - 2T_i^{n+1/2} + T_{i+1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

16. Простая явная схема повышенного порядка аппроксимации по пространству

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{-T_{i+2}^n + 16T_{i+1}^n - 30T_i^n + 16T_{i-1}^n - T_{i-2}^n}{12\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$$

17. Явная центральная схема с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \left[ -\frac{a^2 \Delta t}{2} + \frac{a \Delta x^2}{12} \right] \frac{T_{i+2}^n - 4T_{i+1}^n + 6T_i^n - 4T_{i-1}^n + T_{i-2}^n}{\Delta x^4} = 0 \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$$

18. Двухшаговая явная схема повышенного порядка аппроксимации по пространству

$$\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{-T_{i+2}^{n+1/2} + 16T_{i+1}^{n+1/2} - 30T_i^{n+1/2} + 16T_{i-1}^{n+1/2} - T_{i-2}^{n+1/2}}{12\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$$

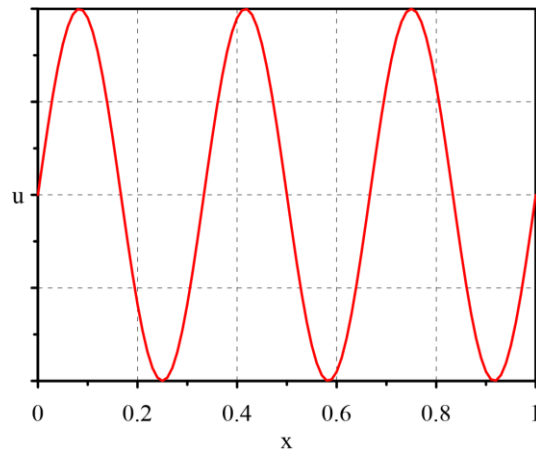
19. Схема предиктор-корректор с неявным шагом предиктора и повышенным порядком аппроксимации по пространству

$$\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t / 2} - a \frac{T_{i-1}^{n+1/2} - 2T_i^{n+1/2} + T_{i+1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} = 0$$

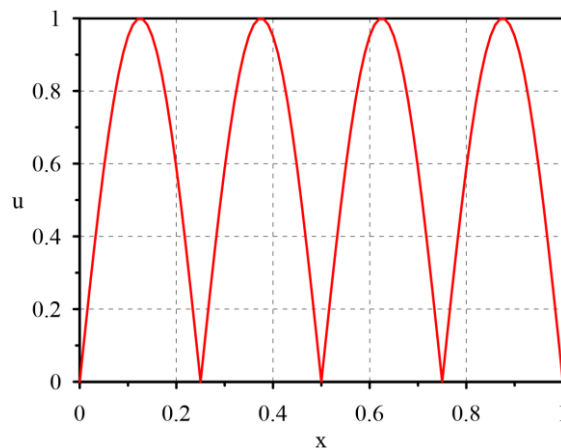
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - a \frac{-T_{i+2}^{n+1/2} + 16T_{i+1}^{n+1/2} - 30T_i^{n+1/2} + 16T_{i-1}^{n+1/2} - T_{i-2}^{n+1/2}}{12\Delta x^2} = 0 \quad \Delta t \sim \forall$$

## Задачи для модельного уравнения конвекции

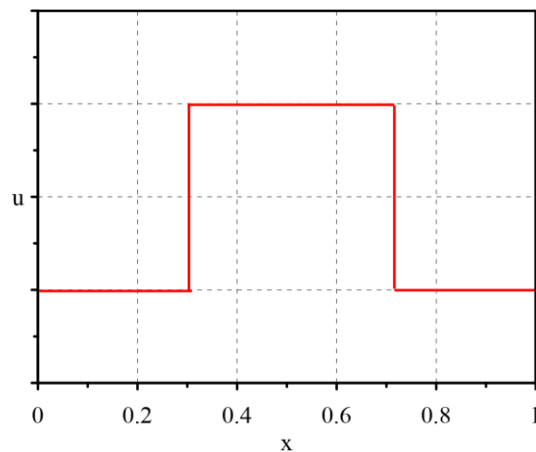
1. Перенос синусоидального сигнала  $\sin(kx)$ , где  $k = m\pi/L$  – волновое число,  $L$  – длина расчетной области,  $m$  – номер гармоники. Использовать граничные условия периодичности.



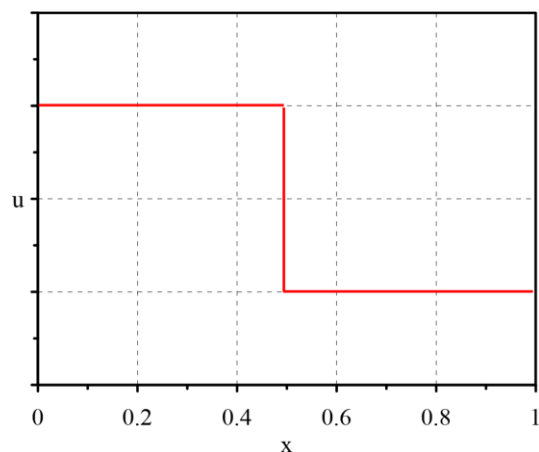
2. Перенос сигнала вида  $|\sin(kx)|$ , где  $k = m\pi/L$  – волновое число,  $L$  – длина расчетной области,  $m$  – номер гармоники. Использовать граничные условия периодичности. Рассмотреть случай  $m = 6$ .



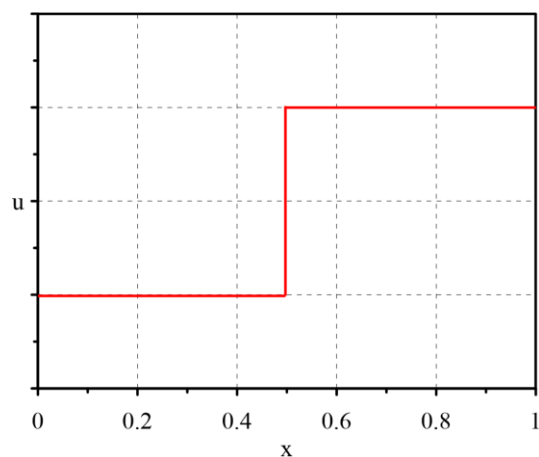
3. Перенос сигнала в виде «ступеньки» (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



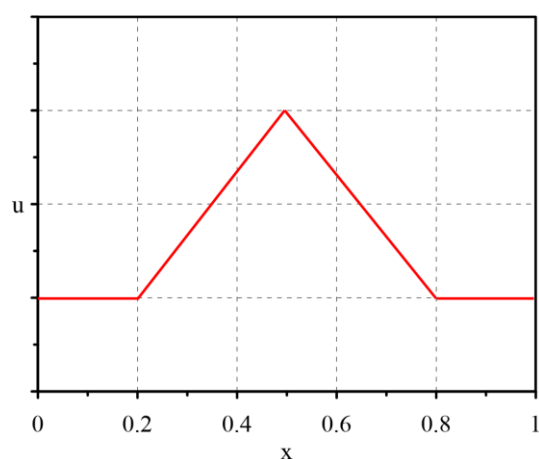
4. Перенос одиночного разрыва (см. схему). Провести расчеты до момента взаимодействия возмущений с границами.



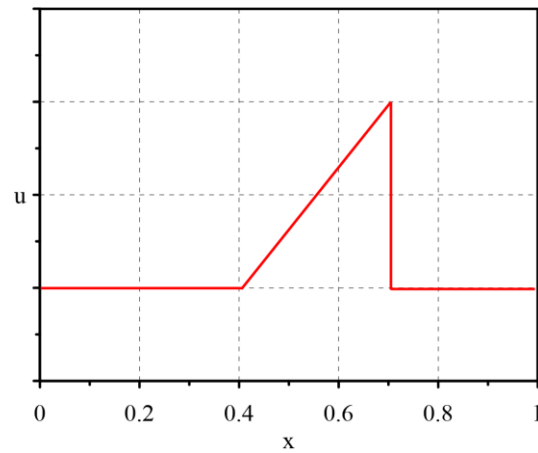
5. Перенос одиночного разрыва (см. схему). Провести расчеты до момента взаимодействия возмущений с границами.



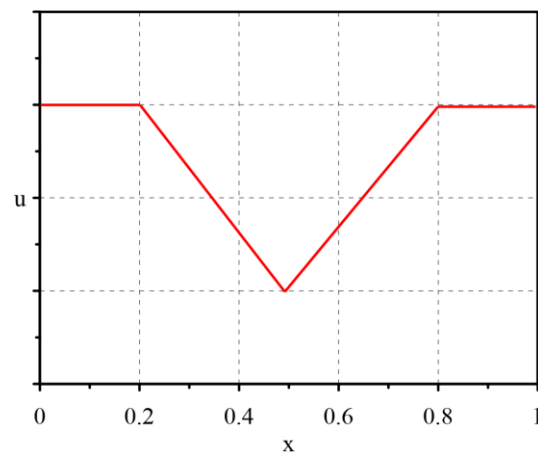
6. Перенос сигнала вида «гора» (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



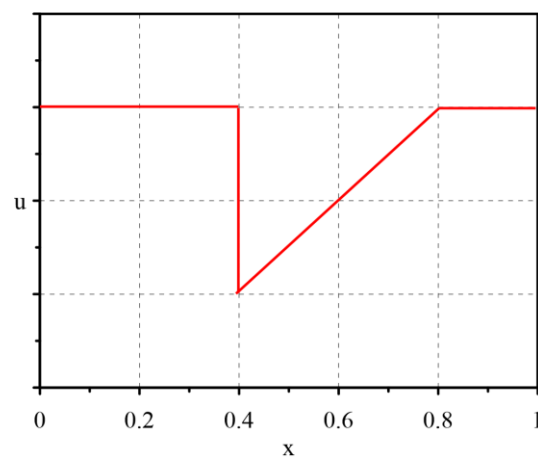
7. Перенос сигнала вида «гора» (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



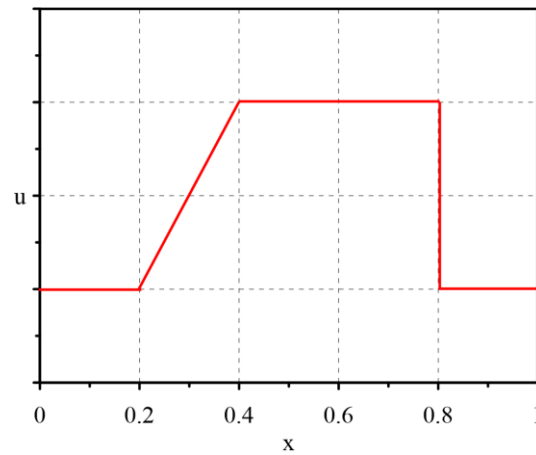
8. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



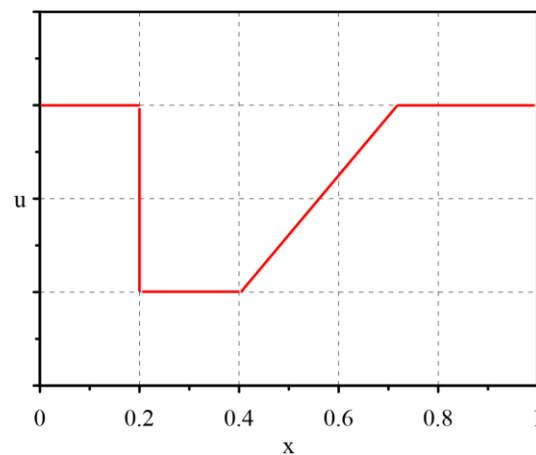
9. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



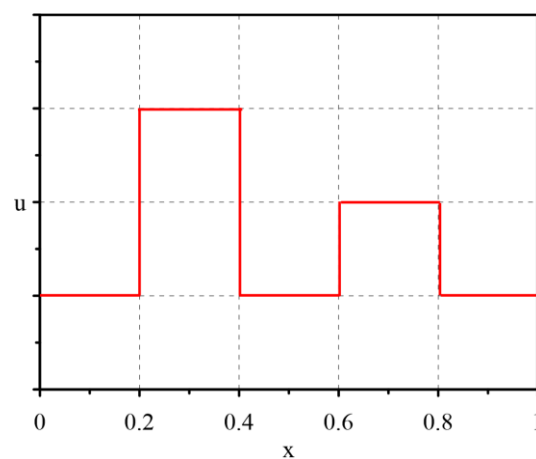
10. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



11. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.

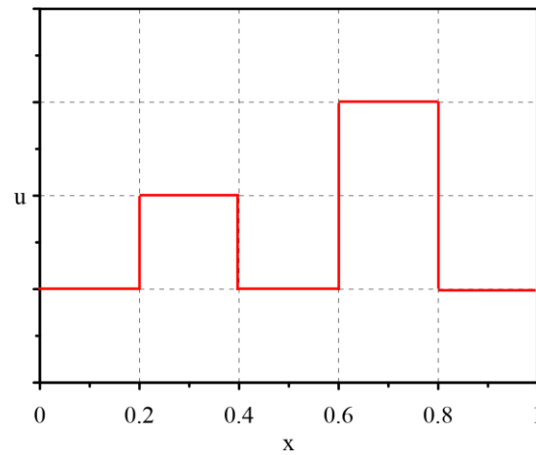


12. Перенос сигнал в виде двух «ступенек» (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.

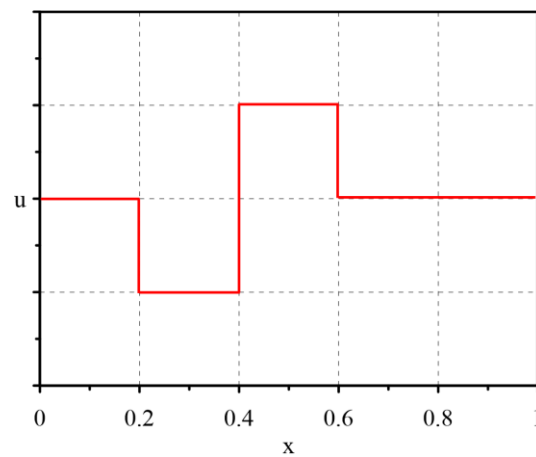




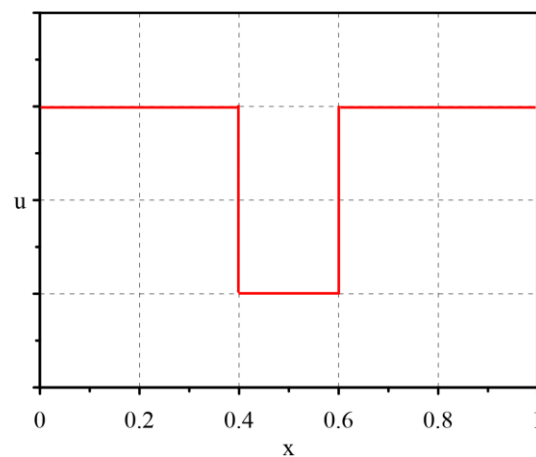
13. Перенос сигнал в виде двух «ступенек» (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



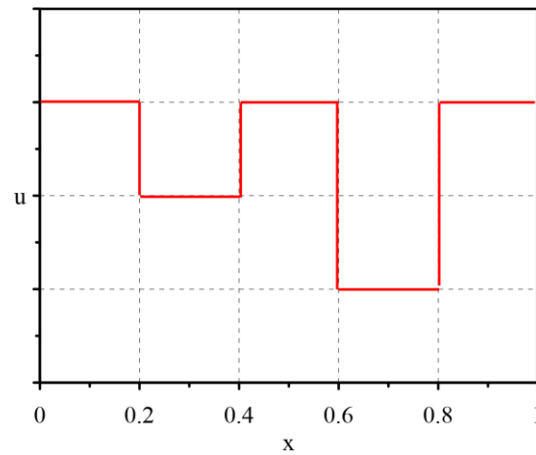
14. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



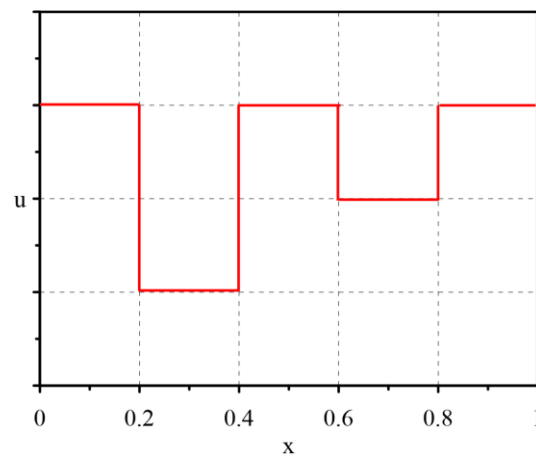
15. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



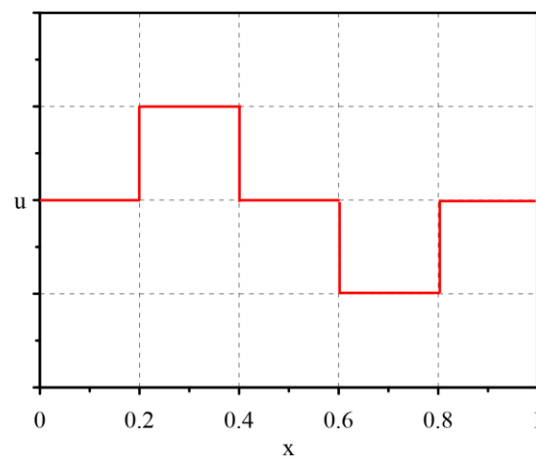
16. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



17. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



18. Перенос сигнал следующего вида (см. схему). Использовать граничные условия периодичности.



## Схемы для модельного уравнения переноса

### 1. Явная противопоточная схема первого порядка

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{c - |c|}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

### 2. Схема Лакса-Фридрихса

$$\frac{u_i^{n+1} - 0.5(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

### 3. Явная противопоточная схема второго порядка

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2} \left( \frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{c - |c|}{2} \left( -\frac{3u_i^n - 4u_{i+1}^n + u_{i+2}^n}{2\Delta x} \right) = 0$$

### 4. Схема Леонарда

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i+1}^n - 3u_i^n + 3u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{6\Delta x} \right) + \frac{c - |c|}{2} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i+2}^n - 3u_{i+1}^n + 3u_i^n - u_{i-1}^n}{6\Delta x} \right) = 0$$

### 5. Неявная противопоточная схема первого порядка

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2} \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{c - |c|}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

### 6. Схема Кранка-Николсон

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \left[ \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] = 0$$

### 7. Схема «Чехарда»

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

### 8. Схема «Кабарэ»

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} \right) + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

### 9. Схема Лакса-Вендроффа как разложение в ряд Тейлора

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \Delta t^2 c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

### 10. Схема Лакса-Вендроффа как двухшаговая схема

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - 0.5(u_{i+1}^n + u_i^n)}{\Delta t / 2} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$

### 11. Схема Мак-Кормака

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{c+|c|}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + \frac{c-|c|}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right)$$
$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_i^n + \tilde{u}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{c+|c|}{2} (\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_{i-1}^{n+1}) + \frac{c-|c|}{2} (\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}) \right) \right)$$

### 12. Схема Мак-Кормака (модификация)

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$
$$\frac{u_i^{n+1} - (u_i^n + \tilde{u}_i^{n+1})/2}{\Delta t/2} + c \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

### 13. Схема ячейка

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right] + c \frac{1}{2} \left[ \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right] = 0$$

### 14. Неявная трехслойная схема

$$\frac{3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

### 15. Двухшаговая схема предиктор-корректор

$$\frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\Delta t/2} + c \frac{u_i^{n+1/2} - u_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i-1}^{n+1/2}}{2\Delta x} = 0$$

## **Индивидуальные варианты расчетного задания**

Вариант 1.

Задача для уравнения диффузии: **4**; схемы: **1, 9**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 2$ ), **2**; схемы: **1, 11**

Вариант 2.

Задача для уравнения диффузии: **2**; схемы: **1, 8**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 4$ ), **3**; схемы: **1, 9**

Вариант 3.

Задача для уравнения диффузии: **1**, схемы: **1, 12**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 6$ ), **4**; схемы: **1, 12**

Вариант 4.

Задача для уравнения диффузии: **3**; схемы: **1, 15**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 8$ ), **5**; схемы: **1, 14**

Вариант 5.

Задача для уравнения диффузии: **11**; схемы: **1, 11**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 10$ ), **6**; схемы: **1, 6**

Вариант 6.

Задача для уравнения диффузии: **16**, схемы: **1, 14**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 12$ ), **7**; схемы: **1, 15**

Вариант 7.

Задача для уравнения диффузии: **5**, схемы: **1, 4**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 8$ ), **12**; схемы: **1, 5**

Вариант 8.

Задача для уравнения диффузии: **12**, схемы: **1, 8**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 10$ ), **14**; схемы: **1, 5**

Вариант 9.

Задача для уравнения диффузии: **14**, схемы: **1, 10**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 14$ ), **15**; схемы: **1, 8**

Вариант 10.

Задача для уравнения диффузии: **6**, схемы: **1, 18**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 12$ ), **17**; схемы: **1, 3**

Вариант 11.

Задача для уравнения диффузии: **17**, схемы: **1, 19**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 6$ ), **18**; схемы: **1, 2**

Вариант 12.

Задача для уравнения диффузии: **18**, схемы: **1, 3**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 8$ ), **16**; схемы: **1, 6**

Вариант 13.

Задача для уравнения диффузии: **4**, схемы: **1, 9**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 12$ ), **14**; схемы: **1, 8**

Вариант 14.

Задача для уравнения диффузии: **5**, схемы: **1, 14**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 16$ ), **15**; схемы: **1, 5**

Вариант 15.

Задача для уравнения диффузии: **13**, схемы: **1, 5**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 4$ ), **13**; схемы: **1, 2**

Вариант 16.

Задача для уравнения диффузии: **6**, схемы: **1, 10**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 6$ ), **10**; схемы: **1, 7**

Вариант 17.

Задача для уравнения диффузии: **10**, схемы: **1, 16**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 8$ ), **11**; схемы: **1, 3**

Вариант 18\*.

Задача для уравнения диффузии: **7**, схемы: **1, 6**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 14$ ), **8**; схемы: **1, 10**

Вариант 19\*.

Задача для уравнения диффузии: **8**, схемы: **1, 17**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 2$ ), **9**; схемы: **1, 8**

Вариант 20\*.

Задача для уравнения диффузии: **9**, схемы: **1, 5**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 4$ ), **10**; схемы: **1, 7**

Вариант 21\*.

Задача для уравнения диффузии: **10**, схемы: **1, 7**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 6$ ), **11**; схемы: **1, 4**

Вариант 22\*.

Задача для уравнения диффузии: **13**, схемы: **1, 13**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 12$ ), **13**; схемы: **1, 13**

Вариант 23\*.

Задача для уравнения диффузии: **15**, схемы: **1, 17**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 2$ ), **16**; схемы: **1, 6**

Вариант 24\*.

Задача для уравнения диффузии: **15**, схемы: **1, 19**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 10$ ), **9**; схемы: **1, 14**

Вариант 25\*.

Задача для уравнения диффузии: **17**, схемы: **1, 7**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 10$ ), **9**; схемы: **1, 12**

Вариант 26\*.

Задача для уравнения диффузии: **18**, схемы: **1, 8**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 4$ ), **12**; схемы: **1, 15**

Вариант 27\*.

Задача для уравнения диффузии: **19**, схемы: **1, 2**

Задача для уравнения конвекции: **1** ( $m = 10$ ), **17**; схемы: **1, 4**