Die schwingende Saite

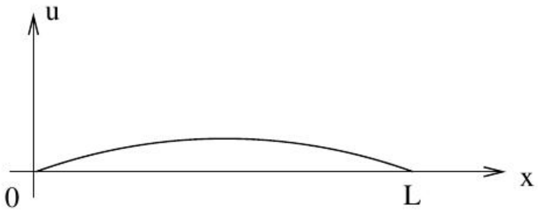
Farhan Fayyaz   Pascal Murbach

June 14, 2011

Inhalt

Aufgabenstellung

- Auslenkung $u(x, t)$ einer eingespannten Saite
- Berechnung und animierte Darstellung
- Umsetzung in einer objektorientierten Programmiersprache
- Eingabe von Parametern über die GUI



Vorgehen

1. Erarbeiten der math. Grundlagen
2. Entwerfen eines Software-Designs
3. Umsetzung in Java
4. erweitern und verbessern des Codes

Differentialgleichung

Definition

Die Auslenkung $u(x, t)$ einer eingespannten Saite wir durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

Lösung der DGL

Lösung

Die DGL besitz folgende Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \, cos \frac{cn\pi}{L} t + B_n^* \, sin \frac{cn\pi}{L} t) \, sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (2)$$

Dimensionen der Lsg

Die Lösung der DGL kann zum besseren Verständnis in zwei Dimensionen aufgeteilt werden:

Dimension der Ebene

Die Fourierreihe beschreibt die Saite in Abhängigkeit von t

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\, cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n^*\, sin\frac{cn\pi}{L}t) \tag{3}$$

Dimension der Zeit

$$sin\frac{n\pi}{L}x \tag{4}$$

Darstellung der Dimensionen

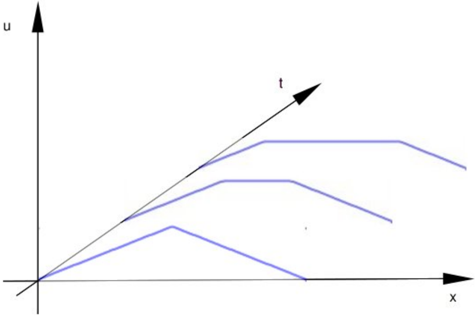


Figure: Die Saite zu den Zeitpunkten t = 1,2,3

Oberschwingungen

Die Laufvariable n der Fourierreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B_n \, cos \frac{cn\pi}{L} t + B_n^* \, sin \frac{cn\pi}{L} t) \tag{5}$$

beschreibt die Anzahl Oberschwingungen der Saitenschwingung.

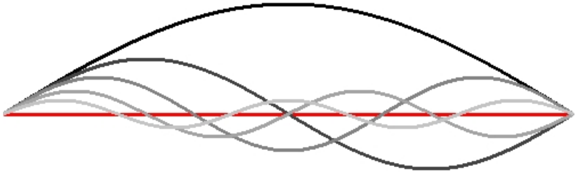


Figure: Die ersten vier Oberschwingungen

Fourierkoeffizienten

Nocheinmal die Fourierreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\, cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n^*\, sin\frac{cn\pi}{L}t) \tag{6}$$

Mit den Fourierkoeffizienten:

Fourierkoeffizienten

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

und

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

Adaptiver Simpson-Algorithmus

Zum Integrieren der Fourierkoeffizienten muss ein numerisches Verfahren verwendet werden.

Definition

Simpson-Rule

$$Sf : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \tag{9}$$

Definition

Adaptive Simpson

$$|Sf(a,c) + Sf(c,b) - Sf(a,b)|/15 \quad < \varepsilon \tag{10}$$

Design

- Modellierung der Saite in VibraString.java
- Abbilden der Saitenschwingung in eine Matrix
- rechnen und darstellen in separaten Threads
- synchronisieren der Threads mit synchronized

die Saiten-Matrix

Die Saitenschwingung wird in einer $\mathbb{R}^{row \times col}$ Matrix abgebildet.

Columns

Die Spalten werden aus der Länge L der Saite und der Auflösung in x-Richtung berechnet:

$$cols = \frac{L}{h} \tag{11}$$

Die Saiten-Matrix

Die Reihen werden aus der Frequenz f der Grundschwingung und der Auflösung in der zeitlichen Dimension berechnet:

Rows

$$f = \frac{c}{2L} \tag{12}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2L}{c} \tag{13}$$

$$rows = \frac{T}{precision} = \frac{2L}{c * precision} \tag{14}$$

Dämpfung der Schwingung

Multiplikation der Matrix mit einem Skalar

Dämpfung

$$s = e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad t \geq 0 \tag{15}$$

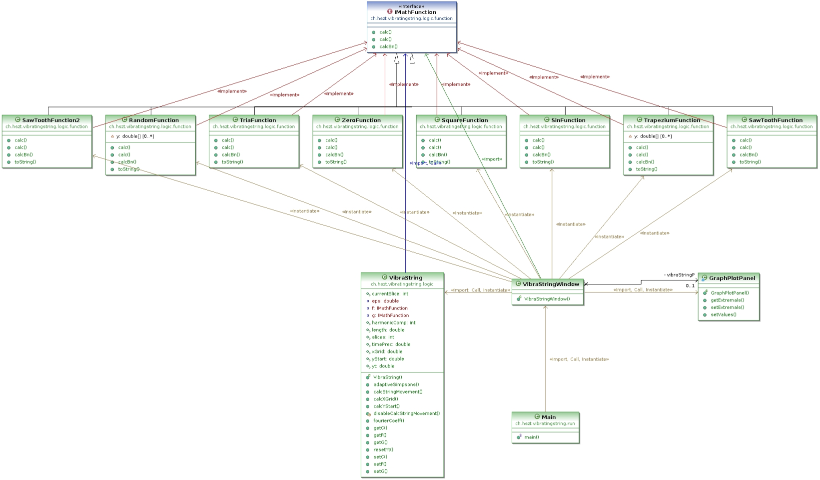
$$\tau = \frac{2m}{d} \tag{16}$$

Parameter

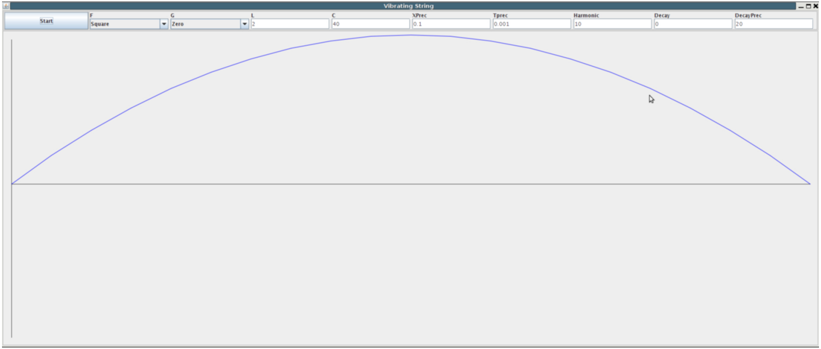
Über die grafische Oberfläche können folgende Parameter verändert werden:

1. Startfunktion f
2. Startfunktion g
3. Länge der Saite L
4. Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle c
5. Schrittweite $XPrec$ für $x \leq 0 \leq L$
6. Zeitliche Auflösung $Tprec$
7. Anzahl Oberschwingungen $Harmonic$
8. Dämpfung $Decay$
9. Dämpfungskonstante $DecayPrec$
10. Fehlerabschätzungstoleranz ε (Eps) (Adaptiver Simpson-Algorithmus)

UML-Diagramm



Screenshot


Vibrating String
Start
F
Square
G
Zero
L
2
C
40
XPrec
0.1
Tprec
0.001
Harmonic
10
Decay
0
DecayPrec
20