

Лабораторная работа №7

Определение модуля упругости первого рода материалов методом колебаний

Цель работы: ознакомление с методикой и аппаратурой и определение модуля упругости первого рода различных материалов.

Оборудование и инструменты: вибростенд (генератор, усилитель, вибростол), микрометр, штангенциркуль.

Теоретическая часть

Упругостью называют свойство материала деформироваться под действием нагрузки и восстанавливать свою первоначальную форму после разгрузки.

Согласно закону Гука напряжение и вызванная им деформация связаны между собой прямо пропорциональной зависимостью. При одноосном напряжённом состоянии закон Гука выражается формулой

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Закон Гука соблюдается только на начальной стадии нагружения, пока напряжение не превышает предела пропорциональности материала.

В настоящей лабораторной работе определение модуля упругости первого рода E основано на анализе связи его с частотой поперечных резонансных колебаний консольно закреплённой пластинки постоянного сечения $F = bh$, длиной l (рис. 1).

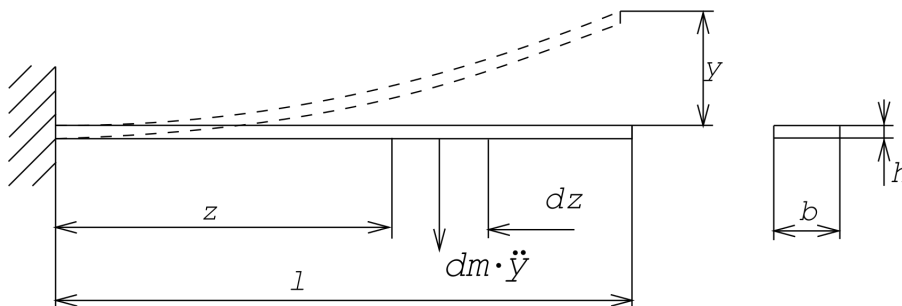


Рис. 1: Силовая расчётная схема

Участок пластинки длиной dz имеет массу $dm = \rho F dz$, где ρ — плотность материала.

Инерционная сила, приходящаяся на единицу длины пластинки при поперечном перемещении y , запишется как $q = -\rho F \ddot{y}$, где F — площадь сечения пластинки. Знак «минус» означает, что нагрузка q направлена в сторону, противоположную прогибу.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний пластинки имеет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\rho F}{EI} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0, \quad (1)$$

где I — момент инерции; t — время.

Решение уравнения (1) можно представить в виде $y = Z \sin \omega t$, где ω — угловая частота. После подстановки его в (1) получим

$$Z^{(IV)} - \alpha^4 Z = 0, \quad (2)$$

$$\alpha^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EI}. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) запишем в общем виде:

$$Z = A \sin(\alpha z) + B \cos(\alpha z) + C \operatorname{sh}(\alpha z) + D \operatorname{ch}(\alpha z), \quad (4)$$

где A, B, C, D — постоянные, которые определяются из граничных условий.

Для консольно закрепленной балки функция (2) имеет следующие граничные условия: при $z = 0$ $Z = 0$ и $\frac{dZ}{dz} = 0$, на конце балки (при $z = l$) изгибающий момент и поперечная сила равны нулю. Следовательно, при $z = l$, $\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$ и $\frac{d^3 Z}{dz^3} = 0$.

Составим определитель этой системы и приравняем его нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha l) & \cos(\alpha l) & \operatorname{sh}(\alpha l) & \operatorname{ch}(\alpha l) \\ -\cos(\alpha l) & \sin(\alpha l) & \operatorname{ch}(\alpha l) & \operatorname{sh}(\alpha l) \end{vmatrix} = 0,$$

Подставляя граничные условия в (4), имеем четыре уравнения:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ A + C = 0 \\ -A \sin(\alpha l) - B \cos(\alpha l) + C \operatorname{sh}(\alpha l) + D \operatorname{ch}(\alpha l) = 0 \\ -A \cos(\alpha l) + B \sin(\alpha l) + C \operatorname{ch}(\alpha l) + D \operatorname{sh}(\alpha l) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

откуда следует $\operatorname{ch}(\alpha l) \cdot \cos(\alpha l) = -l$. Последовательный ряд корней этого уравнения имеет вид $\alpha_1 l = 1.875$, $\alpha_2 l = 4.694$, $\alpha_3 l = 7.855$ и т.д.

Первые три формы изгиба пластинки, соответствующие трём корням уравнения, изображены на рис. 2. Эти формы можно наблюдать в моменты резонанса, увеличивая частоту колебаний вибростола с консольно закрепленной пластинкой.

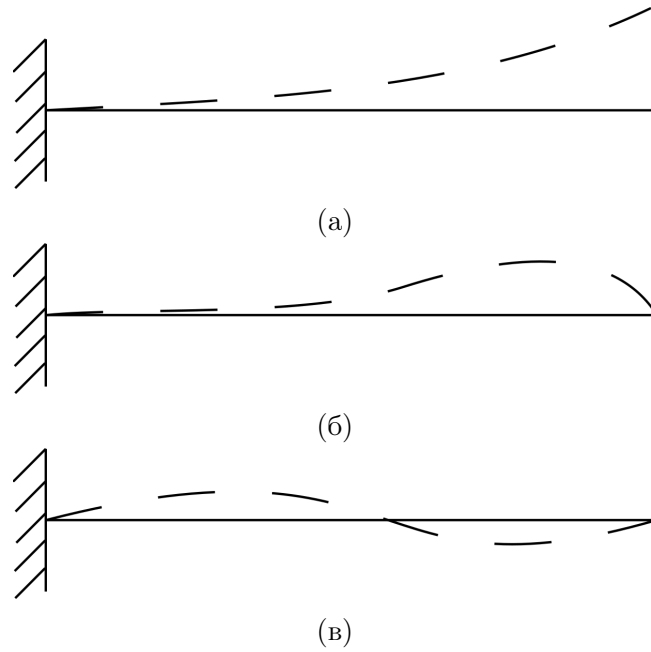


Рис. 2: Форма упругой линии балки при достижении резонанса: а) на первой собственной частоте; б) на второй; в) на третьей.

Выражение (3), разрешённое относительно модуля упругости, запишется в виде

$$E = \frac{\rho F}{I_x} \omega^2 \frac{I^4}{(\alpha l)^4}.$$

С учетом $F = bh$, $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $\omega = 2\pi f$ получаем:

$$E = \frac{12\rho}{h^2} 4\pi^2 f^2 \frac{l^4}{(\alpha l)^4},$$

где f — частота резонансных колебаний в Герцах.

Таким образом, по полученной форме колебаний можно вычислить модуль упругости первого рода E , фиксируя резонансную частоту и подставляя соответствующее значение αl .

Для первой формы ($\alpha l = 1.875$):

$$E = \frac{48\rho}{h^2} \pi^2 f_1^2 \frac{l^4}{1.875^4}; \quad (6)$$

Для второй формы ($\alpha l = 4.694$):

$$E = \frac{48\rho}{h^2} \pi^2 f_1^2 \frac{l^4}{1.875^4}; \quad (7)$$

Для третьей формы ($al = 7.855$):

$$E = \frac{48\rho}{h^2} \pi^2 f_1^2 \frac{l^4}{1.875^4}; \quad (8)$$

Лабораторный стенд

Для экспериментального определения собственной частоты пластинки в настоящей работе использован вибростенд, схема которого приведена на рис. 3.

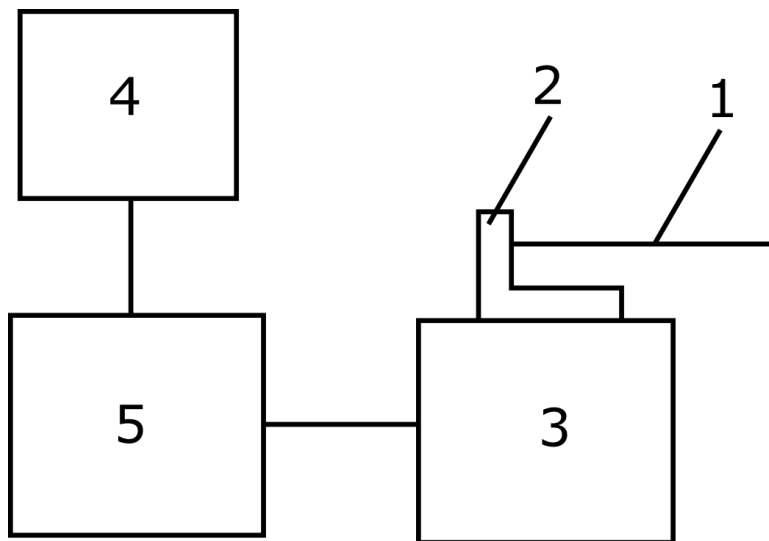


Рис. 3: Схема вибростенда: 1 — испытываемая пластинка, 2 — зажимное приспособление, 3 — вибростол, 4 — генератор стандартных сигналов, 5 — усилитель

Испытываемая пластинка 1 консольно закреплена в приспособлении 2 на поверхности вибростола 3. Колебания изменяемой частоты задаются генератором стандартных сигналов 4, амплитуда которых увеличивается усилителем 5.

Частоту колебаний стола можно изменять генератором от нуля до 12 кГц, а уровень амплитуды сигнала регулировать как генератором, так и усилителем.

Практическая часть

1. Измерим размеры испытываемых пластинок b , h микрометром и после закрепления на вибростоле измерим длину l штангенциркулем. Результаты занесём в таблицу (табл. 1).

Параметры пластины	Материал пластинки			
	29НК	Медь М-1	Кремний	Керамика
Толщина h , мм	0.21	0.31	0.35	0.82
Плотность ρ , $10^{-9} \frac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{мм}^4}$	8.35	8.96	2.33	3.60
Длина l , мм	73.1	74.5	63.0	75.7
Резонансная частота f_1 , Гц	27.5	30.0	116.0	172
Резонансная частота f_2 , Гц	171	184	-	-
Модуль E' , МПа	1.57	0.99	1.55	1.99
Модуль E'' , МПа	1.54	0.95	-	-

Таблица 1: Результаты измерений и вычислений

2. Плавню изменяя частоту задающего генератора, зафиксируем резонансную частоту f_1 . Увеличивая частоту, зафиксируем резонансную частоту f_2 .

3. Изменим длину консоли пластинки l и повторим измерения резонансных частот f_1 , f_2 при новой длине l_i .

4. Вычислим модуль упругости E для каждой резонансной частоты и каждой длины консоли закрепления по формулам (6)–(8).

Вывод: в результате проведённого эксперимента определили упругую характеристику материалов электронной техники. Метод наглядный, универсальный, не требует разрушения образца.

Недостаток стенда состоит в том, что резонансная частота определяется визуально.

Полученные значения модуля упругости E близки к табличным.