



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

Laís Bittencourt Visnadi

**Efeito de trinca
em engrenagens de dente reto
na resposta dinâmica do rotor**

CAMPINAS
2022

Laís Bittencourt Visnadi

**Efeito de trinca
em engrenagens de dente reto
na resposta dinâmica do rotor**

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Hélio Fiori de Castro

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSAO DEFINITIVA DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA LAÍS BITTENCOURT VISNADI, E ORIENTADA PELO PROF. DR HÉLIO FIORI DE CASTRO.

.....
ASSINATURA DO(A) ORIENTADOR(A)

**CAMPINAS
2022**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

Visnadi, Laís Bittencourt, 1992-
V826e Efeito de trinca em engrenagens de dente reto na resposta dinâmica do rotor / Laís Bittencourt Visnadi. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Hélio Fiori de Castro.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rotores. 2. Rotores - Dinâmica. 3. Engrenagem. 4. Engrenagens - Vibração. I. Castro, Hélio Fiori de, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Spur gear crack effect on the rotor dynamic response

Palavras-chave em inglês:

Rotors

Rotors - Dynamics

Gear

Gears - Vibration

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutora em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Hélio Fiori de Castro [Orientador]

Marcela Rodrigues Machado

Aldemir Aparecido Cavalini Junior

José Maria Campos dos Santos

Gregory Bregion Daniel

Data de defesa: 30-06-2022

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-1680-777>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9669985416064764>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

TESE DE DOUTORADO

**Efeito de trinca
em engrenagens de dente reto
na resposta dinâmica do rotor**

Autor: Laís Bittencourt Visnadi

Orientador: Prof. Dr. Hélio Fiori de Castro

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:

Prof. Dr. Hélio Fiori de Castro
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM

Profa. Dra. Marcela Rodrigues Machado
Universidade de Brasília - UnB/FT

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Junior
Universidade Federal de Uberlândia - UFU/FEMEC

Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Gregory Bregion Daniel
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP/FEM

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 30 de Junho de 2022.

Dedicatória

A todas as pessoas que lutam para ocupar os espaços que a sociedade diz que não são seus.

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe, Maria das Graças Bittencourt, ao meu pai, Antônio Ronaldo Visnadi, ao meu padrasto, Benedito Donisete Bueno da Silva e a minha irmã Camila Bittencourt Visnadi Saback, por todo o investimento e incentivo aos meus estudos.

A minha irmã Letícia Bueno Visnadi pelos momentos de diversão.

A Natasha, por todo o amor.

Aos meus colegas de laboratório, pela companhia, pelas ideias e pelos bons momentos de conversa e descontração.

A Juliana Rangel Cenzi, pela amizade e apoio em todo o período deste doutorado.

A Lucas Nogueira Garpelli pela amizade, pelas risadas, pelas pizzas e por ter projetado a bancada deste trabalho com tanta competência, empenho e dedicação.

A Thales de Freitas Peixoto, por todas as vezes que me ajudou a entender assuntos que eram complexos para mim.

A Douglas Jhon Ramos por compartilhar suas experiências e dar a ideia de construir uma bancada mais simples para este trabalho.

Ao Prof. Dr. Franco Giuseppe Dedini por suas ideias e ajuda no projeto da bancada.

A Jony Javorski Eckert e Danilo Álvaro pela ajuda na construção da bancada.

Aos técnicos do do departamento Eli Paulino de Souza, Maurício Oliveira de Sant'anna, Mauro Romera e Rosangelo Wilterson Aparecido Ferreira por toda a atenção e empenho na construção e montagem da bancada.

À Prof. Dr. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, ao Prof. Dr. Gregory Bregion Daniel e Prof. Dr. Tiago Henrique Machado por terem orientado meus estágios docentes no período do doutorado, sendo grandes exemplos de dedicação à docência e inspirando a minha carreira.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Hélio Fiori de Castro, por ter acreditado em mim quando nem eu mesma acreditei. Por sua dedicação na orientação deste trabalho, pela paciência, amizade e parceria.

A Petrobras, pelo financiamento da pesquisa que resultou neste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Cê vai atrás desse diploma
Com a fúria da beleza do Sol, entendeu?
Faz isso por nós"*

Emicida

Resumo

Trincas são as falhas mais comuns presentes em engrenagens e podem ser causadas por condições adversas de operação, defeitos no material ou simplesmente por fadiga. A detecção precoce deste defeito auxilia na programação de manutenções e na prevenção de falhas catastróficas. A identificação de trincas pequenas em engrenagens de dentes retos com base na vibração da máquina ainda é um desafio. Este trabalho, então, propõe uma metodologia com base em métodos de processamento de sinais para avaliar o efeito deste tipo de trinca na aceleração medida na posição de um mancal de um rotor engrenado. Para isto, um modelo analítico do engrenamento saudável e com trinca é utilizado para representar seu efeito. O rotor é modelado pelo método dos elementos finitos. Assim, um modelo misto de elementos finitos com representação do engrenamento é proposto para representar a máquina e obter a resposta dinâmica no suporte do mancal. O sinal de aceleração neste ponto, para vários níveis de trinca, foi obtido e foram avaliadas o espectro de potência, o espectro de potência das funções de modo obtidas pelos métodos de decomposição empírico e variacional e a transformada de Hilbert. A diferença entre o sinal com falha e o sinal de referência (saudável) também foi avaliada pelos mesmos métodos. Diferenças foram encontradas nos sinais em todos os métodos, sendo o espectro de potência, o espectro de potência da primeira função de modo empírico e a transformada de Hilbert os mais promissores. Os resultados considerando o sinal de referência são ainda melhores. Para confirmar estes resultados, uma bancada experimental foi proposta e os resultados obtidos mostraram-se de acordo com o esperado. Os mesmos métodos foram aplicados a um conjunto de dados de um experimento realizado em outro estudo científico e a validade dos métodos também foi confirmada neste caso. Este trabalho apresenta, então, um novo método de identificação de trincas em rotores engrenados, com base na decomposição do sinal de aceleração do sistema e avaliação do seu espectro de potência.

Palavras-chave: rotor engrenado, engrenagem de dentes retos, trinca em dente de engrenagem, identificação de trinca

Abstract

Cracks are the most common failures present in gears and can be caused by adverse operating conditions, material defects or simply by fatigue. Early detection of this defect helps in scheduling maintenance and preventing catastrophic failures. Identifying small cracks in spur gears based on machine vibration is still a challenge. This work, therefore, proposes a methodology based on signal processing methods to evaluate the effect of this type of crack on the acceleration of a geared rotor bearing. For this, an analytical model of healthy and cracked gear mesh is used to represent its effect. The rotor is modeled by the finite element method. Thus, a mixed finite element model with mesh representation is proposed to represent the machine and obtain the dynamic response in the bearing support. The acceleration signal at this point, for several crack levels was obtained and the power spectrum, the power spectrum of the mode functions obtained by the empirical and variational decomposition methods and the Hilbert transform were evaluated. The difference between the failed signal and the reference (healthy) signal was also evaluated by the same methods. Differences were found in the signals in all methods, being the power spectrum, the power spectrum of the first function empirically obtained and the Hilbert transform the most promising. Results considering the reference signal are even better. To confirm these results, an experimental bench was proposed and the results obtained were as expected. The same methods were applied to a dataset from an experiment performed in another scientific study and the validity of the methods was also confirmed in this case. This work presents, therefore, a new method for identifying cracks in geared rotors, based on the system acceleration signal decomposition and evaluation of its power spectrum.

Keywords: geared rotor, spur gears, gear tooth crack, crack identification

Lista de Ilustrações

2.1	Modelo de par de engrenagens de 1 GDL (Adaptado de Xiong <i>et al.</i> , 2019)	27
2.2	Modelo de par de engrenagens considerando graus de torção com inclusão de motor e carga (Adaptado de Li e Lee, 2005)	27
2.3	Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios na direção do engrenamento (Retirado de Kahraman e Singh, 1991b)	28
2.4	Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios na direção do engrenamento e torções do motor e da carga (Adaptado de Wu <i>et al.</i> , 2008)	29
2.5	Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios nas direções vertical e horizontal (Retirado de Yi <i>et al.</i> , 2019)	29
2.6	Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios nas direções vertical e horizontal e graus de torção do motor e da carga (Retirado de Bartelmus, 2001)	30
2.7	Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios, graus de torção do motor e da carga e flexibilidade das placas dos acelerômetros (Retirado de Omar <i>et al.</i> , 2012)	30
2.8	Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios, graus de torção do motor e da carga, totalizando 16 GDL (Adaptado de Howard <i>et al.</i> , 2001)	31
2.9	Modelo de transmissão com três eixos, totalizando 26 GDL (Adaptado de Jia e Howard, 2006)	31
2.10	Modelo de elementos finitos de sistema rotativo com transmissão de movimento por engrenagens, modelada por rigidez e amortecimento equivalente (Retirado de Ma <i>et al.</i> , 2015c)	32
3.1	Força de contato ao longo do dente	38
3.2	Parâmetros geométricos do cálculo da rigidez da base do dente	39
3.3	Variação das rigidezes de flexão, cisalhamento, compressão e base do dente de acordo com a variação do ângulo de aplicação da força	41
3.4	Parâmetros da trinca e condições de tamanho da trinca (vermelho). Adaptado de (Ma <i>et al.</i> , 2014b)	42
3.5	Rigidez do dente de módulo 2 mm, ângulo de pressão de 20° e largura de face de 20 mm saudável (azul) e trincada (vermelho): a) em flexão; b) ao cisalhamento.	43
3.6	Rigidez total do engrenamento para um par engrenado com razão de contato (ou grau de recobrimento) entre 1 e 2	45
3.7	Rigidez total do engrenamento (azul) de par com razão de contato entre 1 e 2 de uma engrenagem com trinca, composta pela rigidez de dentes saudáveis (preto) e dente com trinca (vermelho)	46
4.1	Modelo esquematizado de par engrenado.	47

4.2	Sistema de coordenadas do rotor. (Adaptado de Rao <i>et al.</i> , 1998)	50
4.3	Elemento de viga e seu sistema de coordenadas. (Adaptado de Rao <i>et al.</i> , 1998)	51
4.4	Matrizes dos elementos alocadas na matriz global	56
4.5	Fluxograma do código de programação para simulação do sistema rotativo engrenado	57
5.1	Transformada de Fourier para sinal periódico e transiente. Retirado de Arruda e Huallpa (2008)	60
5.2	Exemplo de decomposição de modo empírico de sinal periódico	63
5.3	Exemplo de decomposição de modo variacional de sinal periódico	66
6.1	Sistema considerado nas simulações pelo modelo de elementos finitos	67
6.2	Diagrama de Campbell do sistema (a) até 3000 Hz e (b) até 500 Hz. Preto: Frequências naturais (f_n); Verde: Frequência de engrenamento (f_{mesh}); Azul: Velocidade de rotação da engrenagem (Ω_g); Vermelho: Velocidade de rotação do pinhão (Ω_p)	68
6.3	Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema sem trinca	69
6.4	Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm	70
6.5	Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,6 mm	70
6.6	Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm	71
6.7	Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema sem trinca	72
6.8	Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm	72
6.9	Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,5 mm	73
6.10	Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm	73
6.11	Resposta na frequência dos deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm	74
6.12	Resposta na frequência dos deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,6 mm	75
6.13	Resposta na frequência dos deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm	75
6.14	Resposta na frequência das acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm	76
6.15	Resposta na frequência das acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,6 mm	76

6.16	Resposta na frequência das acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm	77
6.17	Padrão de picos da DFT de um par engrenado: múltiplos da frequência de engrenamento e combinações lineares com a primeira frequência natural. Destaque para pico de frequência natural de torção	78
6.18	Comparação das DFTs das respostas do sistema saudável e com as trincas de 0,5 mm, 1,6 mm e 3,0 mm.	78
6.19	Espectro de potência para diversos níveis de trinca	79
6.20	Espectro de potência das funções de modo intrínseco para diversos níveis de trinca	80
6.21	Espectro de potência das funções de modo variacional para diversos níveis de trinca	80
6.22	Sinal no tempo do sistema saudável (azul) e envelope obtido pela Transformada de Hilbert (vermelho)	81
6.23	Transformada de Hilbert para vários níveis de trinca	81
6.24	Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco do resíduo dos sinais de diversos níveis de trinca	82
6.25	Espectro de potência da primeira função de modo variacional do resíduo dos sinais de diversos níveis de trinca	82
6.26	Transformada de Hilbert do sinal no tempo do resíduo de diversos níveis de trinca	83
6.27	Espectro de potência com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal .	84
6.28	Espectro de potência com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal .	84
6.29	Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal	85
6.30	Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal	85
6.31	Espectro de potência da primeira função de modo variacional com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal	86
6.32	Espectro de potência da primeira função de modo variacional com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal	86
6.33	Transformada de Hilbert com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal	87
6.34	Transformada de Hilbert com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal	87
7.1	Desenho 3D da bancada projetada	89
7.2	Dimensões dos suportes dos mancais	90
7.3	Trinca na engrenagem de 25 dentes. (a) Desenho para fabricação; (b) Simulação da trinca gerada por eletroerosão; (c) Engrenagem com a trinca gerada	90
7.4	Dimensões dos ímas e do suporte dos ímãs do freio de Foucault projetado . . .	92
7.5	Bancada de testes (a) com freio acionado (b) sem freio acionado	92
7.6	Foto da montagem da bancada	93
7.7	Desenho da bancada em duas dimensões	93

8.1	Nós (vermelho) e comprimento dos elementos de viga utilizados no modelo de elementos finitos da simulação da bancada experimental	96
8.2	Espectro de potência dos sinais gerados por simulação da engrenagem saudável e com trinca na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz	97
8.3	Espectro de potência da diferença dos sinais gerados por simulação da engrenagem com trinca e saudável, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz	98
8.4	Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco dos sinais gerados por simulação da engrenagem saudável e com trinca, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz	98
8.5	Espectro de potência da diferença da primeira função de modo intrínseco dos sinais gerados por simulação da engrenagem com trinca e saudável, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz	99
8.6	Transformada de Hilbert dos sinais gerados por simulação da engrenagem saudável e com trinca na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz	99
8.7	Transformada de Hilbert da diferença dos sinais gerados por simulação da engrenagem com trinca e saudável, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz	100
8.8	Foto da bancada com identificação dos componentes	101
8.9	Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	102
8.10	Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz. (Azul: Trinca de 1,88 mm ; Laranja: Trinca de 0,05 mm; Amarelo: Sinal saudável)	102
8.11	Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	103
8.12	Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	104
8.13	Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	104
8.14	Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	105
8.15	Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	105
8.16	Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	106

8.17 Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	107
8.18 Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	107
8.19 Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	108
8.20 Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	108
8.21 Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	109
8.22 Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	109
8.23 Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	110
8.24 Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	110
8.25 Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	111
8.26 Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	112
8.27 Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	112
8.28 Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	113
8.29 Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	113
8.30 Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	114
8.31 Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	115
8.32 Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	115
8.33 Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	116
8.34 Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	116

8.35 Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	117
8.36 Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	117
8.37 Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	118
8.38 Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	118
8.39 Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	119
8.40 Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.	119
8.41 Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	120
8.42 Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.	120
8.43 Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	121
8.44 Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.	121
8.45 Foto e visão esquemática da bancada experimental do trabalho de Cao <i>et al.</i> (2018b). Adaptado de Cao <i>et al.</i> (2018b).	122
8.46 Foto da trinca na raiz do dente do trabalho de Cao <i>et al.</i> (2018b). Adaptado de Cao <i>et al.</i> (2018b).	123
8.47 Espectro de potência dos sinais saudável e com trinca dos dados fornecidos por Cao <i>et al.</i> (2018a).	123
8.48 Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trinca dos dados fornecidos por Cao <i>et al.</i> (2018a).	124
8.49 Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trinca dos dados fornecidos por Cao <i>et al.</i> (2018a).	125
A.1 Nomenclatura básica de engrenagem cilíndrica de dentes retos. Retirada de Flores <i>et al.</i> (2017)	143

Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes da curva de ajuste polinomial	40
6.1	Parâmetros do sistema modelado pelo método de elementos finitos	68
6.2	Frequências naturais até 3000 Hz em $\Omega_p = 0Hz$	68
8.1	Parâmetros da bancada utilizadas no modelo do método de elementos finitos . .	96

Sumário

1	Introdução	20
2	Revisão Bibliográfica	23
2.1	Modelagem de engrenamento	23
2.2	Modelagem de sistemas engrenados	26
2.3	Métodos de detecção de trinca em sistemas de engrenagens	33
3	Modelo de Rigidez do Engrenamento	36
3.1	Rigidez do dente reto externo	36
3.2	Rigidez do dente reto externo com trinca na base	40
3.3	Rigidez do par engrenado e do engrenamento	44
4	Modelagem de sistemas engrenados	47
4.1	Modelo de par engrenado	47
4.2	Modelo de rotor com engrenamento	49
4.2.1	Elemento de Disco Rígido	50
4.2.2	Elemento de viga	50
4.2.3	Engrenagens	52
4.2.4	Mancais	54
4.2.5	Equação global do sistema	55
4.3	Frequências naturais de um sistema rotativo	55
5	Métodos de Processamento de Sinais	59
5.1	Transformada discreta de Fourier	59
5.2	Energia e potência de um sinal	60
5.3	Transformada de Hilbert	61
5.4	Decomposição de modo empírico	62
5.5	Decomposição de modo variacional	63
6	Resultados de Simulações	67
7	Bancada Experimental	89
8	Resultados experimentais	95
8.1	Resultados simulados da bancada experimental proposta	95
8.2	Resultados da bancada experimental proposta	100
8.2.1	Resultados do sinal integral	101
8.2.2	Resultados da diferença dos sinais com defeito e saudável	111
8.3	Resultados de banco de dados	122

9 Conclusões	126
9.1 Sugestões para trabalhos futuros	128
Referências Bibliográficas	130
APÊNDICES	143
A – Nomenclatura básica de engrenagens cilíndricas de dentes retos	143
B – Matrizes do Método de Elementos Finitos	145
B.1 Elemento de disco	145
B.2 Elemento de viga	145
C – Método de Newmark	150

1 Introdução

Engrenagens são utilizadas pelo homem desde os tempos pré-bíblicos, integrando uma espécie de bússola que supostamente era utilizada para navegar pelo deserto de Gobi. Em geral, eram discos de madeira ou de qualquer outro material de fácil manipulação com dentes neles fixados. Somente a partir da revolução industrial que as técnicas de manufatura permitiram que estes componentes fossem fabricados em metal, com os dentes diretamente cortados (Norton, 2013). Até a atualidade, estes componentes são utilizados para transmitir potência de um eixo a outro em uma grande diversidade de máquinas, desde aquelas que são presentes no dia-a-dia do consumidor final, como batedeiras de cozinha e automóveis, até as que são importantes na indústria, como tornos, (Samuel Doughty, 1988), turbinas eólicas e escavadeiras (Liang *et al.*, 2018b).

Devido à sua ampla variedade de aplicações, estes elementos são de grande interesse de estudo no campo da engenharia. Para qualquer observador, é óbvio que a transmissão do movimento por engrenagens ocorre pelo entrelace dos dentes, mas a quantidade de conceitos geométricos envolvidos no assunto pode surpreender alguém que nunca o estudou (Colbourne, 1987). Os perfis de dente mais comuns são o cicloidal e o evolvente, sendo este último utilizado na grande maioria das aplicações (Flores e Gomes, 2014) e por isto também é o foco da maioria dos trabalhos na área. A variação do número de pares de dentes em contato, bem como erros de fabricação e montagem fazem com que estes elementos sejam fontes de excitação interna no sistema Wan *et al.* (2014) e, por isso, a compreensão dos fenômenos pode exigir uma modelagem detalhada, tanto do engrenamento, como do sistema.

Modelos de sistemas engrenados são propostos desde os anos 1950 (Nevzat Özgüven e Houser, 1988) e, ao longo do tempo, foram se tornando cada vez mais complexos. Utilizando de modelos de parâmetros concentrados de um grau de liberdade a detalhados e complexos modelos de elementos finitos com seis graus de liberdade por nó, estudos da dinâmica destas máquinas são conduzidos até a atualidade, com diferentes focos e interesses. A escolha do modelo depende do objetivo da análise. A modelagem do engrenamento também varia em complexidade, sendo ora representada apenas por uma rigidez constante ou em forma de função quadrada ou senoidal, ora sendo representada por rigidez e amortecimento variáveis no tempo, calculados a cada instante, podendo considerar a influência de folga (*backlash*) e da mudança da distância entre centros por conta da flexibilidade de apoios, como feito por Yi *et al.* (2019).

Como consequência da sua importância nas aplicações de engenharia, a identificação precoce de falhas em engrenagens também é de grande interesse, pois permite que seja programada a parada e manutenção da máquina, evitando consequências catastróficas (Liang *et al.*, 2018b). A falha faz com que o sistema de transmissão não execute sua função adequadamente, com a possibilidade de graves e custosas consequências (Mohammed e Rantatalo, 2020). Desgaste, microfissuração (*pitting*), lascamento por impacto (*spalling*), ruptura de dente e trincas são falhas que ocorrem em engrenagens devido a altas cargas, condições severas de operação ou sim-

plesmente por fadiga. Tais falhas reduzem a rigidez do engrenamento, mas cada uma de uma forma diferente e em diferentes níveis de acordo com a sua severidade. Assim, elas mudam o padrão de comportamento do sistema (Liang *et al.*, 2018b).

A trinca é uma das falhas mais comuns em engrenagens (Patel e Shakya, 2021), geralmente se inicia na raiz do dente e tem como principal causa a fadiga gerada pela flexão. De acordo com Ma *et al.* (2015c), as características dinâmicas de sistemas rotativos engrenados com trinca têm sido de crescente interesse tanto da academia como da indústria desde os anos 1990. Por se localizar na raiz e basicamente diminuir a área de fixação do dente, ela causa uma diminuição na rigidez daquele dente, fazendo com que o engrenamento seja menos rígido quando tal dente está no contato, gerando consequências como impacto e ruído em alta frequência. Como a presença de uma trinca causa consequências no comportamento dinâmico da máquina, é possível detectá-la em operação, antes que suas consequências se agravem.

Uma estratégia para reduzir as paradas de máquina inesperadas e consequências graves da falha em engrenagens é a manutenção baseada na condição. A detecção de falha baseada em vibração é uma técnica amplamente utilizada na indústria. Para avaliar e definir o estado de um sistema de transmissão por engrenagens, tanto resultados de medidas de vibração como de simulações dinâmicas podem ser utilizados, combinados a métodos de análise de sinais. Assim, definir modelos que representem o comportamento da máquina sem que sejam computacionalmente muito custosos é importante, bem como definir e aplicar métodos de análise de sinais que evidenciem as características de uma falha (Mohammed e Rantatalo, 2020).

Como trincas são falhas comuns em engrenagens, sua identificação precoce é importante para programar a manutenção da máquina e evitar falhas catastróficas. Muitos trabalhos dedicaram-se a avaliar o efeito da trinca na vibração das máquinas rotativas, mas são poucos os que se baseiam em modelos analíticos e observam resultados experimentais, identificando trincas em estágio inicial.

Neste contexto, este trabalho propõe uma metodologia para a detecção de trincas em dentes retos de engrenagem, com foco em trincas de comprimento inferior a 1 mm, a partir do sinal de vibração do mancal da máquina. Para isto, um modelo analítico de trinca adequado para representar seu efeito na rigidez do engrenamento deve ser implementado. Um modelo representativo da máquina, que reproduza o seu comportamento dinâmico na presença da trinca, principalmente no ponto de interesse para análise, também deve ser implementado. Técnicas de análise de sinais devem ser aplicadas para ressaltar o efeito da trinca, permitindo sua identificação e estimativa de severidade. Para validar os resultados simulados, deve-se compará-los com resultados experimentais.

Com base nestes objetivos, considerou-se que um modelo de trinca que se propaga em linha reta no dente reto de engrenagem, de forma uniforme ao longo da sua espessura, era adequado para representar o que ocorre na realidade, principalmente no caso de pequenas trincas. Além disto, considerou-se que um modelo de elementos finitos com cinco graus de liberdade por nó representaria a máquina de maneira fidedigna. Por fim, pretendeu-se demonstrar que

métodos de processamento de sinais podem evidenciar o efeito da trinca no comportamento dinâmico do rotor, mesmo para casos em que a trinca está em seus estágios iniciais.

A partir do descrito modelo, analisou-se o espectro de potência do sinal de aceleração no suporte dos mancais de uma máquina hipotética na presença de diversos tamanhos de trinca. Também foi obtido o espectro de potência dos modos decompostos do sinal, tanto pelo método de decomposição empírico como pelo método de decomposição variacional. Além disso, a transformada de Hilbert foi aplicada na análise destes sinais, evidenciando a diferença da resposta para os diversos tamanho de trinca. Considerando o acesso ao sinal do sistema saudável, estes métodos foram aplicados ao resíduo do sinal, que é a diferença entre o sinal com falha e o sinal saudável.

Para a validação, foram avaliados o espectro de potência do sinal, o espectro de potência da primeira função de modo intrínseco (obtida pelo método de decomposição de modo empírico) e a transformada de Hilbert ao sinal de vibração de uma bancada experimental, considerando dois níveis de trinca. Os métodos também foram aplicados aos dados de um experimento realizado em estudo científico e disponibilizado ao público geral.

Constatou-se, então, que é possível identificar a presença de uma trinca em estágio inicial ao avaliar a potência do sinal de aceleração, principalmente se for avaliada através primeira função de modo intrínseco deste sinal, obtida pelo método de decomposição de modo empírico.

No presente texto, além da contextualização e apresentação descrita neste capítulo inicial, uma revisão da literatura a respeito do tema é apresentada no Capítulo 2. O Capítulo 3 apresenta o modelo analítico da rigidez do engrenamento, tanto no caso de um par saudável como no caso de um par com dente trincado. O modelo de elementos finitos do rotor é descrito no Capítulo 4. A descrição dos métodos de análise de sinais aplicados é feita no Capítulo 5. Resultados das simulações e a avaliação dos métodos de processamento de sinais aplicados estão no Capítulo 6. A bancada experimental é detalhada no Capítulo 7. No Capítulo 8, são apresentados os resultados da bancada experimental e do banco de dados utilizado. Por fim, as conclusões deste trabalho são apresentadas no Capítulo 9.

2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo revisa os principais trabalhos da literatura que trataram do tema deste trabalho e de temas correlatos, necessários para a construção do modelo dinâmico de um sistema de engrenagens com a presença de trinca e para a análise de resultados de vibração do sistema, a fim de identificar o efeito da trinca.

Assim, a primeira seção comenta a respeito de trabalhos dedicados à modelagem do engrenamento, considerando tanto o caso saudável como o caso com trinca. Já a segunda seção apresenta trabalhos que modelaram dinamicamente sistemas de engrenagens. Por fim, a última seção expõe trabalhos que utilizaram métodos de processamento de sinais para a detecção de falha em engrenagens.

2.1 Modelagem de engrenamento

Para que ocorra a transmissão de movimento por meio de engrenagens, o dente da engrenagem motora exerce uma força no dente da engrenagem movida e o ponto de contato vai se alter ao longo dos dentes. Quando um par de dentes finaliza o contato, o próximo par já deve estar iniciando o contato, para garantir que, mesmo que ocorra algum erro, o movimento sempre seja transmitido (Norton, 2013).

Desta forma, fica claro que o engrenamento é um fenômeno variável no tempo, pois depende da posição do contato entre os dentes e da quantidade de dentes em contato em um dado instante, sendo uma das principais fontes de excitação interna na dinâmica de pares engrenados Liang *et al.* (2014).

Em geral, o engrenamento é representado por uma rigidez variável no tempo, que pode ser calculada explicita e separadamente e então inclusa no modelo a cada intervalo de tempo ou de acordo com a rotação das engrenagens; pode ser calculada implicitamente pelo método de elementos finitos; e pode ser determinada por métodos experimentais (Liang *et al.*, 2018b).

O método da onda quadrada utiliza uma onda quadrada para descrever a rigidez do engrenamento. Assim, há um valor superior e um inferior para a rigidez dentro de um mesmo período de engrenamento, simulando a condição de mais pares em contato, no nível superior de rigidez, e de menos pares em contato, no nível inferior. Neste método, então, as variações na rigidez geradas pela variação da posição do ponto de contato são desprezadas.

Esta abordagem de onda quadrada é de fácil implementação e já foi utilizada em muitos trabalhos clássicos a respeito de dinâmica de engrenagens (Kahraman e Singh, 1991a, Kahraman, 1994) até em trabalhos mais atuais, em que modelos dinâmicos detalhados do par foram implementados e que, por simplicidade, adotou-se este modelo para a rigidez do engrenamento (Kim *et al.*, 2010, Yi *et al.*, 2019).

Assim como no método da onda quadrada, o método da senoide modela a rigidez de engrenamento por uma onda harmônica, com a mesma periodicidade do engrenamento. O valor

mais alto da função simula a rigidez de mais pares em contato, enquanto o valor mais baixo simula a rigidez de menos pares em contato. Este método foi utilizado em alguns trabalhos de dinâmica de rotores (Theodossiades e Natsiavas, 2001, Shin e Palazzolo, 2020) e pode ser considerado como uma extensão do método da onda quadrada, por ser uma aproximação por série de Fourier com apenas um termo além da média.

Diferentemente dos anteriores, o método da energia potencial considera a geometria do dente e a variação do ponto de contato para o cálculo da rigidez do engrenamento. O dente é considerado como uma viga de seção variável e então a teoria de vigas é aplicada para calcular a rigidez do engrenamento (Liang *et al.*, 2018b).

Yang e Lin (1987) foram os primeiros a aplicar este método, considerando que a energia armazenada na deformação de dentes era composta por uma componente axial e por uma de flexão. Considerando o contato do par de dentes, eles também incluíram uma componente de contato superficial de Hertz. O termo de cisalhamento foi incluso mais tarde, no trabalho de Tian (2004).

Nos trabalhos anteriores, considerou-se que uma viga que representa o dente está em apoio perfeitamente rígido. O efeito da deflexão do corpo da engrenagem foi estimado no trabalho de Sainsot *et al.* (2004). Eles utilizaram a teoria de N. I. Muskhelishvili (1975) para anéis elásticos e consideraram variações de tensão constantes e lineares ao longo do círculo da raiz do dente. Então, fizeram um ajuste polinomial para a expressão analítica que obtiveram.

Calculada a rigidez do par em função do ângulo de rotação de uma das engrenagens e sabendo-se a razão de contato (ou grau de recobrimento), pode-se então compor a rigidez total do engrenamento. Assim, este método também considera a variação da rigidez do engrenamento causada pela variação da quantidade de dentes em contato. Este método é mais preciso para avaliar a rigidez do engrenamento e foi utilizado em diversos trabalhos (Pedrero *et al.*, 2010, Ma *et al.*, 2014b, Ma *et al.*, 2015c, Hu *et al.*, 2016, Xiong *et al.*, 2019, Yang *et al.*, 2021).

O método de elementos finitos consiste em dividir um domínio contínuo de um problema em vários outros subdomínios não sobrepostos. No caso do cálculo da rigidez do engrenamento, é um método interessante porque permite avaliar geometrias complexas e efeitos que são geralmente desprezados em métodos analíticos, como efeitos de borda (Marafona *et al.*, 2021).

Trabalhos que utilizam este método para o cálculo da rigidez do engrenamento geralmente utilizam softwares comerciais especializados como ANSYS® (Liang *et al.*, 2018a, Chen *et al.*, 2019) e ABAQUS® (Thirumurugan e Gnanasekar, 2020). Sua desvantagem é o alto custo computacional, que pode se tornar inviável em algumas aplicações. Este método, apesar de ser uma aproximação em relação a resultados reais, é considerado referência para validação de métodos analíticos em muitos trabalhos (Marafona *et al.*, 2021).

Também é possível determinar a rigidez do engrenamento experimentalmente, o que foi feito utilizando diversas técnicas como análise de fotografia de *speckle* dinâmico (Li *et al.*, 1998), análise modal (Amarnath *et al.*, 2012), técnica da fotoelasticidade (Pandya e Parey, 2013b, Raghuwanshi e Parey, 2015), técnicas baseadas em medidas de extensômetros

(Raghuvanshi e Parey, 2016).

Falhas em engrenagens causam uma redução na rigidez do engrenamento. Assim, todos os métodos citados para modelagem da rigidez do engrenamento podem ser utilizados para modelar uma condição de trinca em dente de engrenagem (Liang *et al.*, 2018b).

Djemal *et al.* (2021), por exemplo, utilizou o método da onda quadrada para modelar a rigidez do engrenamento, representando o dente trincado por uma redução nos valores máximo e mínimo. Neste caso, o efeito da trinca é representado, mas não de maneira tão detalhada.

Para realizar o cálculo da rigidez do engrenamento de um dente trincado, é necessário, antes, determinar a trajetória da propagação da trinca (Ma *et al.*, 2015c). Para a engrenagem de dentes retos, muitos autores (Kramberger *et al.*, 2004, Pandya e Parey, 2013a, Glodež *et al.*, 2002, Endeshaw *et al.*, 2017, Li e Kolivand, 2022, Wang *et al.*, 2020) utilizaram um modelo de duas dimensões (2D), considerando a premissa de estado plano de tensões ou de deformação, como explica Ma *et al.* (2015c). Caso haja a necessidade de calcular a trajetória da trinca também ao longo da largura de face, um modelo 3D deve ser utilizado, como fizeram também os autores Shao *et al.* (2013), Ghaffari *et al.* (2015) e Chen *et al.* (2022).

Determinada ou assumida uma certa trajetória de propagação da trinca, prossegue-se para o cálculo da rigidez do dente e do engrenamento. Para isto, muitos modelos analíticos foram desenvolvidos com base no método da energia potencial. Wu *et al.* (2008) utilizaram este método considerando que a trinca se propaga em linha reta e que o dente é uma viga de seção não uniforme engastada no círculo base. Já Chaari *et al.* (2009) consideraram o engastamento no círculo de dedendo. Wan *et al.* (2014) propuseram uma melhoria no cálculo da rigidez do dente trincado para engrenagens com menos de 42 dentes. Liang *et al.* (2014) propuseram diferentes modelos de rigidez do dente com trinca, que seriam selecionados dependendo se o círculo base era maior ou não que o círculo da raiz do dente. Ma *et al.* (2014a) desenvolveram um modelo analítico geral, em que não é necessário avaliar previamente o número de dentes ou a diferença entre diâmetros do círculo base e da raiz. Mohammed *et al.* (2013a) revisaram as linhas que limitam a espessura do dente e propuseram um novo modelo. Ma *et al.* (2014b) consideraram linhas parabólicas tanto para a propagação da trinca quanto para a linha limitante.

Outro método para o cálculo da rigidez do dente com trinca é o de elementos finitos. Considerando uma abordagem por elementos de contato, Howard *et al.* (2001) e Jia e Howard (2006) desenvolveram trabalhos com base no princípio da mecânica da fratura elástica linear. Ma *et al.* (2015a) e Ma *et al.* (2015b) desenvolveram cálculos da rigidez do dente trincado utilizando a mesma abordagem com o apoio do ANSYS®. Considerando a aplicação de uma força teórica no dente, Mohammed *et al.* (2013a) utilizaram o método de elementos finitos para calcular a rigidez. Chaari *et al.* (2009) utilizou o mesmo método, mas considerando um modelo 3D. Para aumentar eficiência computacional, o método de elementos finitos foi combinado com o método analítico nos trabalhos de Rincon *et al.* (2010) e del Rincon *et al.* (2012).

A determinação experimental da rigidez do dente com trinca foi realizada no trabalho de Pandya e Parey (2013b). Utilizando a técnica da fotoelasticidade, eles calcularam a rigidez do

pinhão para diversos comprimentos de trinca. Modelada a rigidez do engrenamento, ela deve ser inclusa no modelo do sistema.

A seção a seguir revisa os principais trabalhos que trataram do modelo dinâmico de sistemas engrenados.

2.2 Modelagem de sistemas engrenados

Segundo Nevzat Özgüven e Houser (1988), as primeiras tentativas de estudar sistematicamente a dinâmica de engrenagens ocorreram nos anos 1920, com o objetivo de determinar as cargas nos dentes por métodos tanto analíticos quanto experimentais. O primeiro modelo simplificado massa-mola para estimar tais cargas foi proposto nos anos 1950. Modelos mais complexos, que incluíam efeitos como rigidez do engrenamento em três dimensões, não linearidades dos elementos, efeitos de amortecimento e atrito entre os dentes surgiram nos anos 1970. Ao final da década de 1980, os modelos passaram a considerar vibrações laterais, de torção e axiais e as respostas transiente e permanente destes sistemas passaram a ser consideradas.

Para modelar um sistema com transmissão de movimento por engrenagens, dois métodos são geralmente utilizados: parâmetros concentrados e modelagem pelo método dos elementos finitos. Os dois métodos podem ser adequados para representar o comportamento dinâmico da máquina, dependendo dos efeitos envolvidos e da resposta necessária. Eles diferem no nível de discretização e no custo computacional envolvido, sendo necessário, então, avaliar o custo-benefício do modelo a ser implementado (Liang *et al.*, 2018b).

O método de parâmetros concentrados consiste em considerar que os componentes do sistema são sólidos, com massa concentrada em um conjunto de pontos (De Silva, 2009 *apud* Liang *et al.*, 2018b). Neste sentido, os corpos das engrenagens são representados por discos, de massa concentrada, acoplados por elementos que representam o engrenamento. O apoio destes discos pode ser considerado rígido ou flexível, o engrenamento pode ser representado apenas por uma rigidez, mas também por uma rigidez, um amortecimento e uma excitação que representa o erro de transmissão estático.

O modelo que considera os discos em apoios fixos acoplados pela rigidez do engrenamento tem um grau de liberdade. Neste caso, a deformação no engrenamento (também chamado de erro de transmissão dinâmico) depende apenas do erro de transmissão estático e da diferença entre os deslocamentos lineares no raio base de cada corpo de engrenagem. Este modelo foi utilizado tanto em trabalhos mais antigos e básicos de dinâmica de engrenagens (Gregory *et al.*, 1963, Yang e Sun, 1985) como em trabalhos com modelos de engrenamento mais complexo (Litak e Friswell, 2005, Xiong *et al.*, 2019) e é adequado para representar sistemas em que o apoio dos centros das engrenagens é suficientemente rígido (Figura 2.1).

Li e Lee (2005) consideraram, além dos dois graus de liberdade de torção de cada engrenagem, a torção causada pelo motor e pela máquina movida, de forma que propuseram um modelo de quatro graus de liberdade (ver Figura 2.2). Eles utilizaram este modelo para iden-

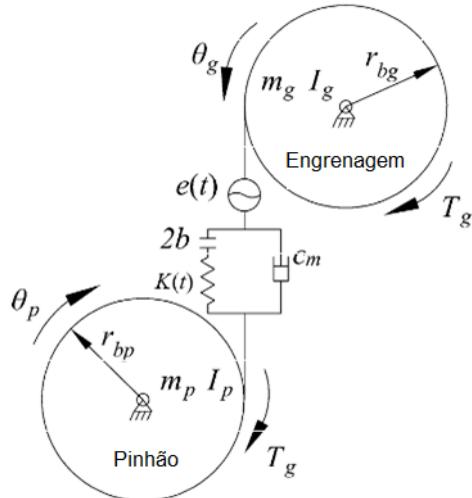


Figura 2.1: Modelo de par de engrenagens de 1 GDL (Adaptado de Xiong *et al.*, 2019)

tificar uma trinca com base na vibração de torção da engrenagem, identificar seu tamanho e predizer a vida útil remanescente com base em uma simulação de propagação da trinca.

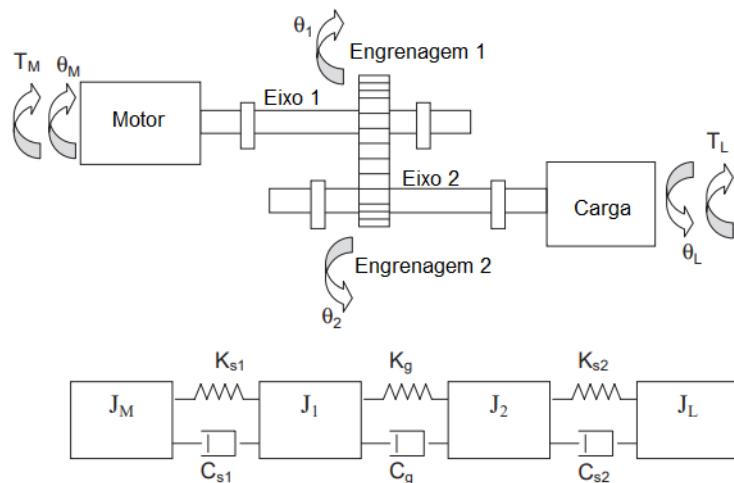


Figura 2.2: Modelo de par de engrenagens considerando graus de torção com inclusão de motor e carga (Adaptado de Li e Lee, 2005)

Em muitos casos, as engrenagens estão apoiadas em eixos e mancais flexíveis, de forma que o modelo de um grau de liberdade não é adequado. Neste sentido, Kahraman e Singh (1991b) propuseram um modelo de quatro graus de liberdade, incluindo, então, a flexibilidade e o amortecimento dos apoios das engrenagens, na direção da linha de ação do engrenamento (Figura 2.3). O erro de transmissão dinâmico, neste caso, passa também a depender dos deslocamentos dos centros das engrenagens. Este modelo foi utilizado por Ma e Chen (2012) para avaliar o comportamento dinâmico de um par engrenado com defeitos de trinca e *spalling*. Em ambos os trabalhos citados, as quatro equações de movimento foram reduzidas a três, substituindo as duas equações correspondentes aos movimentos angulares por uma correspondente ao deslocamento linear no engrenamento.

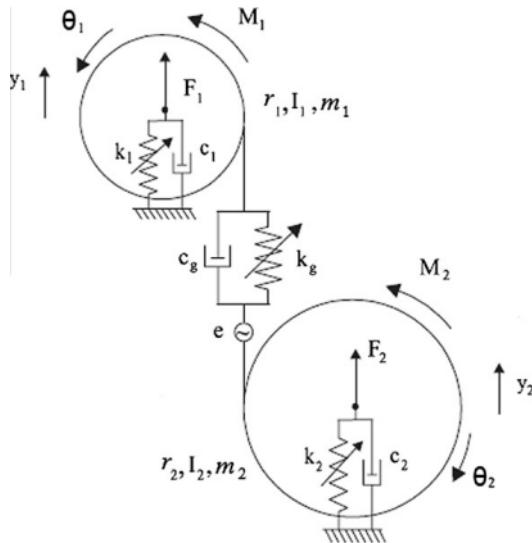


Figura 2.3: Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios na direção do engrenamento (Retirado de Kahraman e Singh, 1991b)

Associando, então, a consideração da flexibilidade de torção causadas pelo motor e pela máquina, bem como a flexibilidade dos apoios das engrenagens na direção do engrenamento, gerou-se um modelo de seis graus de liberdade (Figura 2.4). Este modelo foi utilizado para simular resultados de vibração do sistema com a presença de trinca nos trabalhos de Parey *et al.* (2006) e Wu *et al.* (2008).

A flexibilidade dos apoios considerada em duas direções perpendiculares de um sistema de referência inercial e não mais na direção do engrenamento, gera um modelo de seis graus de liberdade (Figura 2.5). Trabalhos que consideravam este modelo e avaliavam a dinâmica do par na presença de trinca foram apresentados por Chen e Shao (2011), Mohammed *et al.* (2013b), Mohammed *et al.* (2015) e Meng *et al.* (2020). Partindo da mesma premissa, Kim *et al.* (2010) e Yi *et al.* (2019) desenvolveram modelos complexos do par engrenado. Eles consideraram que a flexibilidade dos apoios causa mudanças na distância entre centros, gerando variação em parâmetros usualmente considerados constantes, como o ângulo de pressão e a folga (*backlash*).

Bartelmus (2001) propôs incluir, também, os efeitos de torção causados pelo motor e pela carga. Considerando os apoios das engrenagens flexíveis, este modelo de parâmetros concentrados tem oito graus de liberdade (Figura 2.6). Este modelo também foi utilizado no trabalho de Mohammed *et al.* (2015) para comparação, tendo sido comparado com o modelo anterior e com um modelo de doze graus de liberdade, que considerava dois graus de liberdade de translação e três de rotação para cada engrenagem, além dos graus de torção do motor e da máquina movida. Eles mostraram que o modelo de 8 graus de liberdade é adequado para simular casos em que as engrenagens estão centralizadas ao longo do comprimento do eixo. Caso contrário, o modelo de 12 graus é necessário, uma vez que os efeitos giroscópicos tornam-se mais significativos.

Omar *et al.* (2012) utilizaram um modelo de 9 graus de liberdade para representar um sistema engrenado com trincas, considerando os graus de torção do motor e máquina movida,

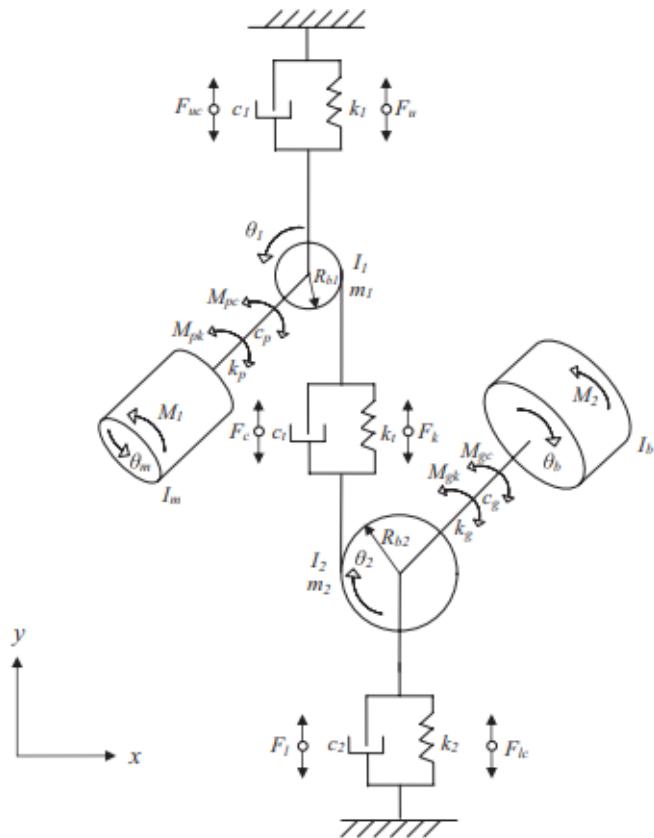


Figura 2.4: Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios na direção do engrenamento e torções do motor e da carga (Adaptado de Wu *et al.*, 2008)

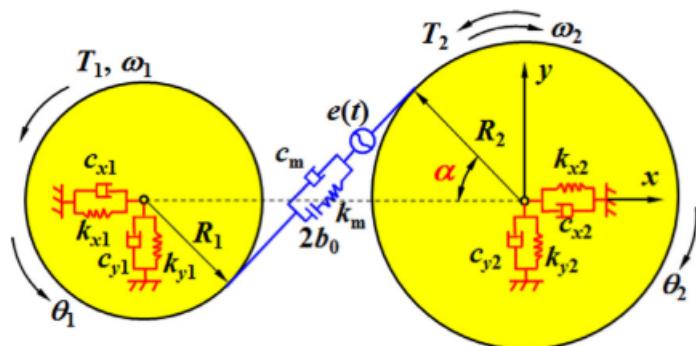


Figura 2.5: Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios nas direções vertical e horizontal (Retirado de Yi *et al.*, 2019)

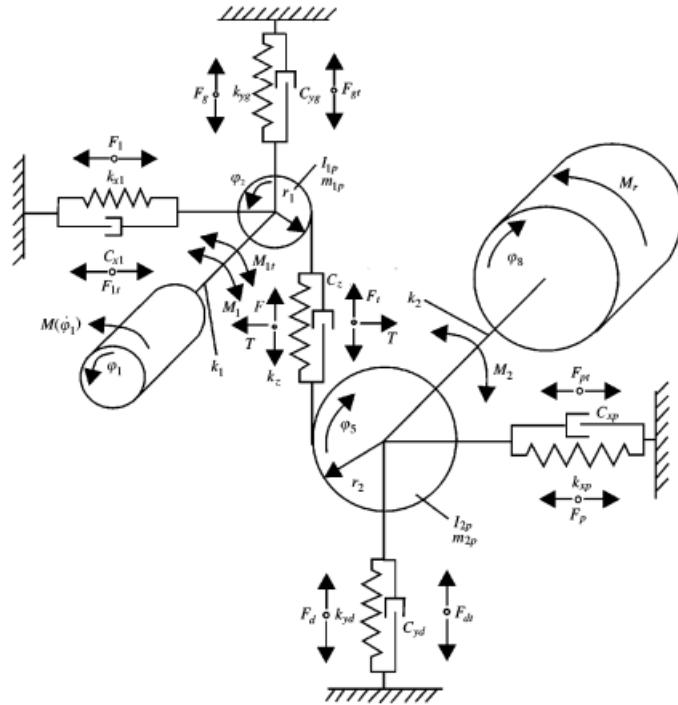


Figura 2.6: Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios nas direções vertical e horizontal e graus de torção do motor e da carga (Retirado de Bartelmus, 2001)

os graus de torção e laterais das engrenagens e os graus laterais da placa em que o acelerômetro foi montado, do mancal e da fundação do sistema (Figura 2.7. Eles compararam os resultados com os da bancada experimental e concluíram que o modelo apresentou resultados satisfatório.

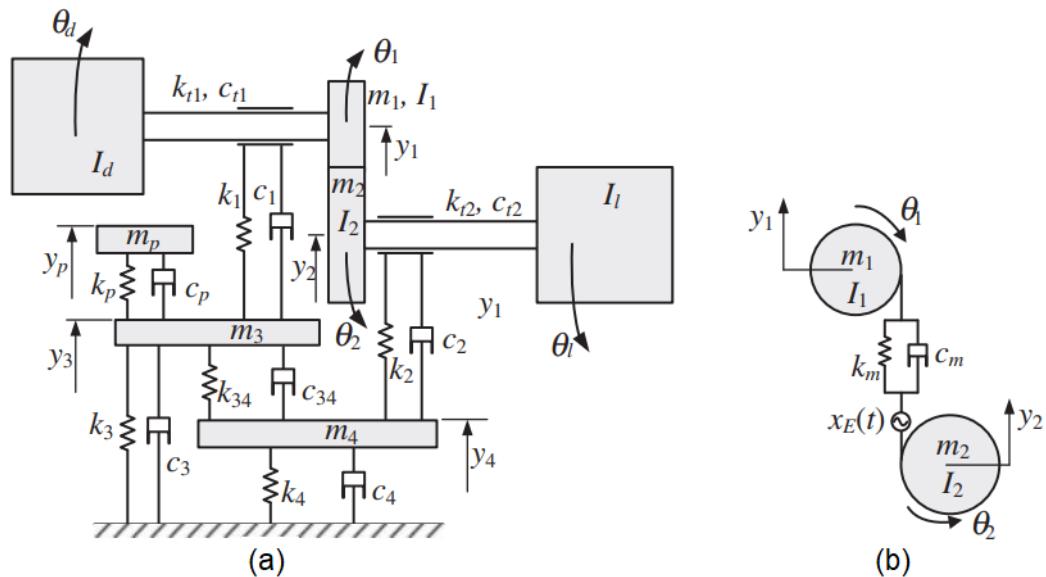


Figura 2.7: Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios, graus de torção do motor e da carga e flexibilidade das placas dos acelerômetros (Retirado de Omar et al., 2012)

Um modelo de 16 graus de liberdade foi utilizado para representar um par com trinca por

Zhou *et al.* (2012) e Howard *et al.* (2001) (Figura 2.8). Este modelo contempla dois graus de liberdade laterais para quatro mancais, dois graus de liberdade laterais e um grau de torção para motor e máquina movida.

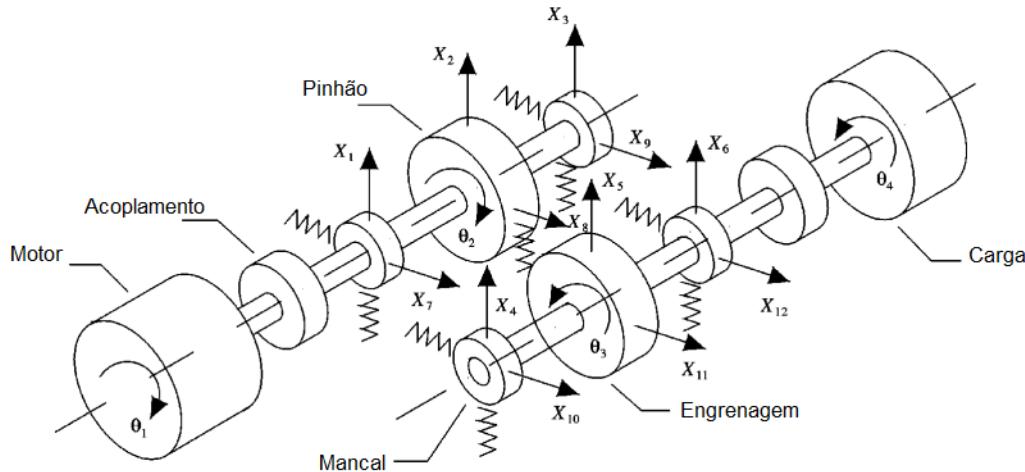


Figura 2.8: Modelo de par de engrenagens considerando graus flexibilidade nos apoios, graus de torção do motor e da carga, totalizando 16 GDL (Adaptado de Howard *et al.*, 2001)

Sistemas com mais elementos também foram representados por modelos de parâmetros concentrados. Considerando dois graus de liberdade laterais para quatro mancais, dois graus de liberdade laterais e um de torção para pinhão e engrenagem e mais um grau de torção para oito discos (totalizando 16 graus de liberdade), Endo *et al.* (2004) representou um sistema de dois eixos com transmissão por engrenagem, incluindo a presença de trinca. Jia e Howard (2006) representou um sistema com seis mancais, dois pares de engrenagens, motor e máquina movida totalizando 26 graus de liberdade (Figura 2.9).

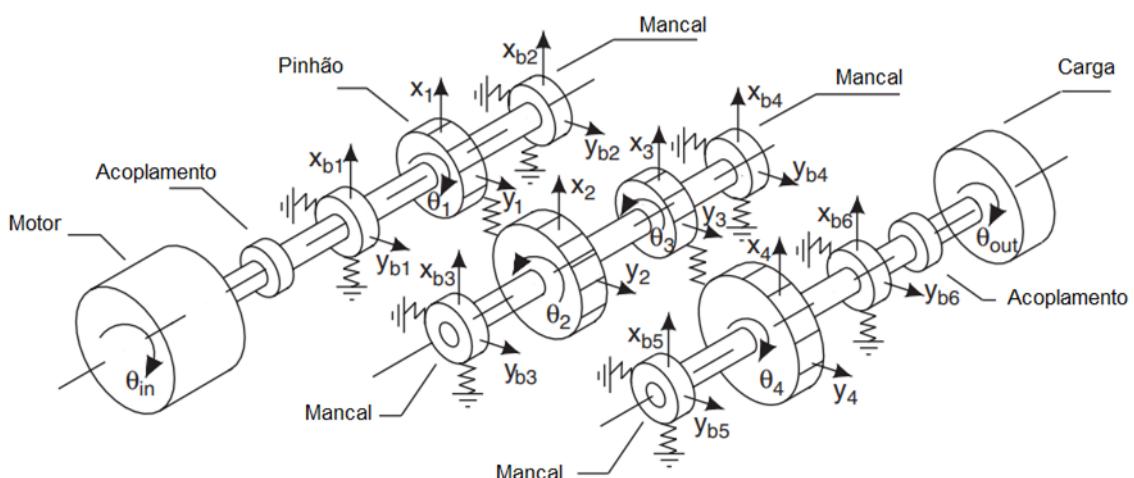


Figura 2.9: Modelo de transmissão com três eixos, totalizando 26 GDL (Adaptado de Jia e Howard, 2006)

No caso de sistemas mais complexos e quando são necessários mais detalhes a respeito da resposta da máquina (como por exemplo o deslocamento de um ponto específico do eixo),

o método de elementos finitos pode ser utilizado para discretizar os elementos de eixo. Ele discretiza o sistema em componentes de geometria mais simples e a resposta do sistema é obtida considerando a conexão destes elementos (De Silva, 2009 apud Liang *et al.*, 2018b). No caso em que há transmissão de movimento entre eixos por engrenagens, geralmente o engrenamento é representado na forma de rigidez e amortecimento equivalentes no nó de conexão entre os elementos, como mostrado na Figura 2.10.

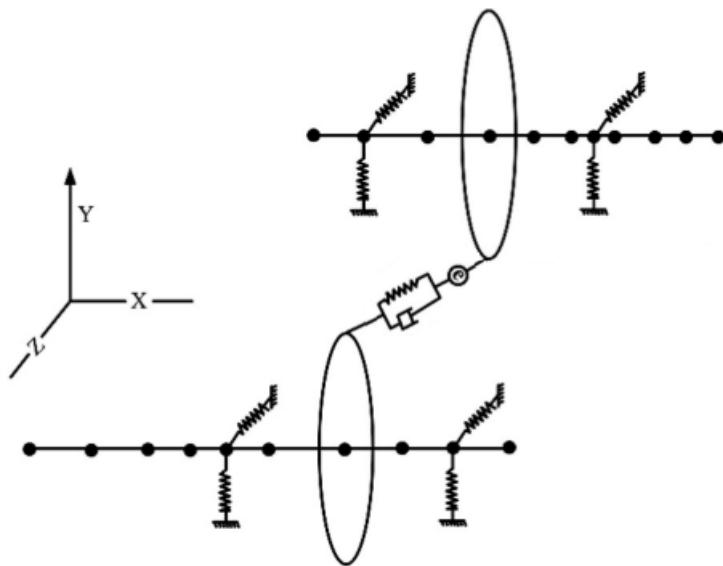


Figura 2.10: Modelo de elementos finitos de sistema rotativo com transmissão de movimento por engrenagens, modelada por rigidez e amortecimento equivalente (Retirado de Ma *et al.*, 2015c)

O modelo de elementos finitos foi utilizado para analisar a resposta de um rotor engrenado com defeito de trinca nos trabalhos de Ma *et al.* (2014a), Ma *et al.* (2015a). Em ambos, cada nó possuía cinco graus de liberdade: dois de translação e três de rotação. Nos trabalhos de Wan *et al.* (2014) e Hu *et al.* (2016), que também avaliaram a resposta de um sistema rotativo engrenado com a presença de trinca, cada nó possuía três graus de liberdade de translação e três de rotação. Saxena *et al.* (2017) também utilizaram o método de elementos finitos com seis graus de liberdade por nó para comparar as funções resposta em frequência (FRF) de um rotor engrenado saudável e com trinca. Com o mesmo modelo, Saxena *et al.* (2018) compararam os resultados da FRF simulada do sistema saudável com resultados experimentais. Como os resultados foram bastante próximos, o modelo mostrou-se adequado para representar o sistema.

O modelo de engrenamento do dente saudável e com falha é sempre integrado ao modelo do par, seja ele de parâmetros concentrados ou de elementos finitos. Esses modelos permitem a simulação da resposta de sistemas engrenados, com e sem a falha, que podem ser comparados. Estes resultados auxiliam a entender o comportamento da máquina real (Mohammed e Rantatalo, 2020). A seção a seguir revisa os principais trabalhos a respeito do tratamento das respostas destes sistemas, simulados e reais, a fim de detectar a presença de falha.

2.3 Métodos de detecção de trinca em sistemas de engrenagens

Obtida a resposta do sistema, é necessário, então, processá-la a fim de identificar características que possam auxiliar na identificação da presença e da severidade da falha.

De acordo com Mohammed e Rantatalo (2020), os métodos de processamento de sinais que têm sido utilizados nas últimas décadas para analisar vibrações podem ser classificados em: análise no domínio do tempo, análise no domínio da frequência e análise no domínio tempo-frequência.

A análise no domínio do tempo consiste em analisar diretamente o sinal ao longo do tempo e verificar a existência de algum impacto causado pela presença da trinca Mohammed e Rantatalo (2020). Isto foi feito no trabalho de Wu *et al.* (2008), por exemplo, em que a resposta do deslocamento da engrenagem mostrava aumento no padrão de amplitude nos instantes em que o engrenamento ocorria no dente trincado, o que era mais evidente quanto maior era a trinca.

Algumas medidas estatísticas e indicadores são geralmente utilizados para facilitar a indicação desta mudança de padrão, como a média, o valor eficaz (*root mean square*, RMS), fator de crista, pico, pico-a-pico, simetria estatística (*skewness*), curtose e média síncrona de tempo (Mohammed e Rantatalo, 2020).

No trabalho de Wu *et al.* (2008), RMS, curtose e outros dois momentos estatísticos foram utilizados para análise, sendo a curtose que apresentou melhor resultado para identificar a presença de trincas a partir de 40% da largura do dente.

Barszcz e Randall (2009) mostraram que tais métodos não foram suficientes para detectar a presença de uma trinca no sistema de transmissão planetário de uma turbina eólica, tanto pelo baixo número de revoluções registradas nos dados disponíveis como pela curta duração e rara presença dos picos causados pela trinca.

Meng *et al.* (2020) comparou as tendências das medidas de curtose, fator de forma, fator de crista e fator de impulso com relação ao tamanho da trinca. Eles concluíram que o fator de impulso e a curtose são os mais eficazes na identificação do nível de trinca do par engrenado.

A resposta do sistema pode também ser representada, então, no domínio da frequência. Em geral a transformada de Fourier (*Fourier transform*, FT) é utilizada para fazer tal conversão (Mohammed e Rantatalo, 2020). Análises no domínio da frequência permitem avaliar a resposta em frequências específicas, relacionadas a falhas (Jardine *et al.*, 2006). O sinal de vibração de um sistema de engrenagens é dominado pela frequência de engrenamento, que é acompanhada por uma modulação de baixa ordem causada por variações na carga e erros geométricos e de montagem (Mohammed e Rantatalo, 2020). Na presença de uma falha, modulações de amplitude e fase correspondentes são geradas e, no domínio da frequência, bandas laterais aparecem em uma ampla faixa de frequências (Wang e Wong, 2002, Ma *et al.*, 2014a, Hu *et al.*, 2015, Hu *et al.*, 2016, Meng *et al.*, 2020).

De acordo com Mohammed e Rantatalo (2020), como a falha causa efeitos de modulação

adicionais de amplitude e fase, o método de demodulação pode ser aplicado para extrair o impacto da falha, de forma que o sinal demodulado carrega informação a respeito da modulação de amplitude e fase. Para a detecção de trincas em engrenagens, McFadden (1986) recomendou aplicar a demodulação na fase ao invés da amplitude.

Outro meio de avaliar os efeitos adicionados pela falha ao sinal é utilizando método do sinal residual. Neste caso, a ideia é remover os componentes de sinal regular do sinal original, de forma que o impacto da falha possa ser analisado separadamente.

O sinal também pode ser filtrado num modelo auto regressivo (AR), conforme proposto por Wang e Wong (2002). A técnica consiste em remover o sinal filtrado (do sistema saudável) do sinal não filtrado para produzir o modelo AR. Este método de mostrou mais efetivo que o método tradicional para detectar a falha mais cedo.

Ma *et al.* (2014a) avaliaram os valores de RMS e curtose tanto do sinal original como do sinal residual, mas eles também concluíram que era difícil identificar a presença de pequenas trincas por essas medidas, uma vez que as mudanças eram mínimas.

No trabalho de Wu *et al.* (2008), o método do sinal residual foi usado para remover os componentes do sinal regular, de forma que todo o sinal no tempo do sistema saudável foi subtraído do sinal com falha. Este método também foi utilizado nos trabalhos de Tian *et al.* (2012), Mohammed *et al.* (2013a), Mohammed *et al.* (2015) e Mahgoun, Hafida *et al.* (2012).

Mahgoun, Hafida *et al.* (2012) também desenvolveu uma técnica de sinal residual baseada no método de decomposição de modo empírico (*empirical mode decomposition*, EDM). Nesta técnica, o sinal residual é gerado pela remoção de algumas funções de modo intrínseco, que representam as componentes regulares do sinal. Este método também foi utilizado por Park *et al.* (2018) e Parey *et al.* (2006).

Patel e Shakya (2021) utilizou o modo de decomposição variacional (*variational mode decomposition*, VMD) para avaliar a resposta de um par engrenado com trinca, sujeito a condições variáveis de velocidade de operação. Este método decompõe o sinal em funções de modo variacional e é utilizado para identificar os transientes da falha, bem como filtrar comportamento não-estacionário.

A função resposta em frequência (FRF) pode ser definida como a função de transferência que descreve a resposta estrutural a uma força aplicada em função da frequência (Mohammed e Rantatalo, 2020). FRFs foram utilizadas por Mohammed e Rantatalo, 2013 para avaliar o efeito de trincas de vários tamanhos na resposta dinâmica do sistema. Saxena *et al.* (2017) também utilizou FRFs para avaliar a influência de trincas nas características modais de um rotor engrenado.

Análises no domínio tempo-frequência proporcionam a análise da vibração tanto no domínio do tempo como no da frequência e é útil para avaliar sinais não estacionários, uma vez que o domínio da frequência é limitado neste sentido (Mohammed e Rantatalo, 2020). Alguns métodos neste domínio são a transformada de Fourier de tempo curto (*Short-time Fourier transform*, STFT), o espectograma (que é o quadrado da STFT), a distribuição Wigner-Ville e a

transformada Wavelet (*Wavelet transform, WT*).

Mohammed e Rantatalo (2016) utilizaram uma técnica que envolvia a STFT para avaliar a rigidez do engrenamento e então estabelecer uma relação entre as frequências próprias e diferentes tamanhos de trinca, com o objetivo de detectar a presença de trinca e estimar seu tamanho.

Hu *et al.* (2015) utilizaram a WT para avaliar a resposta dinâmica de um par engrenado e então verificar as mudanças causadas pela trinca, bem como identificar sua localização.

Após avaliar as referências da literatura a respeito do tema deste trabalho, os modelos que seriam utilizados para o seu desenvolvimento foram escolhidos. O modelo adotado de rigidez do engrenamento, tanto saudável quanto com trinca são descritos no Capítulo 3. Já os modelos dinâmicos do sistema de engrenagens é mostrado no Capítulo 4.

Este trabalho propõe a aplicação de uma série de métodos de análise e tratamento de sinais para a identificação de trincas em engrenagem de dente reto, com foco em trincas em estágio inicial, que causam sutis alterações no sinal de vibração da máquina e que foram contempladas em poucos trabalhos anteriores. A vibração analisada é medida no mancal da máquina, que é, em geral, um local acessível para a medição em equipamentos reais. O estudo da viabilidade do método foi realizado através da aplicação em resultados simulações de um modelo de elementos finitos do rotor com modelo analítico do engrenamento saudável e com trinca, que é adequado para a representação de um sistema deste tipo. A validação foi feita considerando medidas de aceleração no suporte do mancal de uma bancada experimental, proposta para este fim, bem como num conjunto de dados de um experimento no tema disponibilizado ao público geral.

3 Modelo de Rigidez do Engrenamento

A fim de representar adequadamente o efeito do engrenamento em um sistema de transmissão, pode-se utilizar a representação através de uma rigidez, variável no tempo. O presente capítulo explicita o modelo analítico do cálculo da rigidez do dente reto externo, utilizado no modelo computacional aplicado neste trabalho. A nomenclatura básica a respeito de engrenagens cilíndricas de dentes retos com perfil evolvente é fornecida no Apêndice A, com o objetivo de facilitar o entendimento do leitor com respeito a alguns termos aqui utilizados.

Considerou-se perfil evolvente do dente em todas as situações. Na primeira seção, o modelo geral para o dente saudável é apresentado. Na seção seguinte, apresenta-se o cálculo da rigidez do dente com o defeito de uma trinca em sua base. Por fim, o cálculo da rigidez do par de dentes em contato e do engrenamento é detalhada.

3.1 Rigidez do dente reto externo

Durante o engrenamento, o dente da engrenagem motora entra em contato com o dente da engrenagem movida. Este contato percorre o comprimento longitudinal desses dentes conforme ocorre o movimento de rotação. Para modelar a dinâmica desse contato, pode-se considerar o dente como estacionário, com uma força sendo aplicada ao longo de seu comprimento, ao longo do tempo. A Figura 3.1 mostra esquematicamente esta interpretação: o dente é uma viga de seção variável com uma força F_i sendo aplicada em um ponto genérico i do dente. O ângulo de aplicação dessa força em relação a referência vertical, β_i , é igual ao ângulo de pressão da curva evolvente naquele ponto, α_i . Na figura também são indicados outros dois pontos de aplicação de força, referenciados pelos sub-índices 1 e 2.

Considera-se que o contato ocorre somente ao longo da parte do perfil evolvente, que corresponde ao trecho CB indicado na figura 3.1. O trecho DC é considerado de transição entre o corpo da engrenagem e o dente, necessário para evitar interferência entre os dentes.

Considerando uma engrenagem de N dentes, com módulo m e com ângulo de pressão α no raio primitivo r_p , a curva de transição (DC) é dada por (Ma *et al.*, 2014b):

$$\begin{cases} x = r_p \operatorname{sen}(\Phi) - \left(\frac{a_1}{\operatorname{sen}(\gamma)} + r_\rho \right) \cos(\gamma - \Phi) \\ y = r_p \cos(\Phi) - \left(\frac{a_1}{\operatorname{sen}(\gamma)} + r_\rho \right) \operatorname{sen}(\gamma - \Phi) \end{cases}, \quad (3.1)$$

$$\alpha \leq \gamma \leq \pi/2, \quad (3.2)$$

$$\Phi = (a_1 / \operatorname{tg}\gamma + b_1) / r_p, \quad \text{não é } r_\rho \quad (3.3)$$

$$r_\rho = c^*m / (1 - \operatorname{sen}(\alpha)), \quad (3.4)$$

$$a_1 = (h_a^* + c^*)m - r_\rho, \quad (3.5)$$

$$b_1 = \pi m/4 + h_a^* m \operatorname{tg} \alpha + r_\rho \cos \alpha. \quad (3.6)$$

Nestas relações, h_a^* é o coeficiente de adendo e c^* é o coeficiente de folga de topo (estes coeficientes são dados pela medida em questão dividida pelo módulo). Para dentes padrão (como considerados neste trabalho), seus valores são 1 e 0,25, respectivamente.

A curva evolvente (trecho CB da Figura 3.1) é dada por:

$$\begin{cases} x = r_i \operatorname{sen} \phi \\ y = r_i \cos \phi \end{cases}, \quad (3.7)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2N} - (\operatorname{inv}(\alpha_i) - \operatorname{inv}(\alpha)), \quad (3.8)$$

$$r_i = r_b / \cos \alpha_i, \quad (3.9)$$

em que r_b é o raio base, α_i é o ângulo de pressão em um ponto i arbitrário da curva, com valor entre o ângulo de pressão do ponto C e o ângulo de pressão do ponto B. O raio base, o raio no ponto C e o raio na raiz do dente (ponto D) são dados por:

$$r_b = \frac{1}{2} m N \cos \alpha, \quad (3.10)$$

$$r_C = \sqrt{(r_b \operatorname{tg} \alpha - h_a^* m \operatorname{sen} \alpha)^2 + r_b^2}, \quad (3.11)$$

$$r_f = \frac{1}{2} m N - (h_a^* + c^*)m. \quad (3.12)$$

A função evolvente, denotada por inv , é dada, para um ângulo θ qualquer, por:

$$\operatorname{inv}(\theta) = \operatorname{tg} \theta - \theta. \quad (3.13)$$

Assim, estão explicitadas as equações necessárias para a descrição do perfil do dente. Com base na teoria da elasticidade, pode-se descrever a energia potencial da deformação do dente submetida a uma força F . Yang e Lin (1987) propuseram a consideração das componentes de flexão, U_b , e de compressão axial U_a e, mais tarde, a componente de cisalhamento, U_s , foi inclusa por Tian (2004):

$$U_b = \frac{F^2}{2k_b} = \int_0^d \frac{M^2}{2EI_y} dy, \quad (3.14)$$

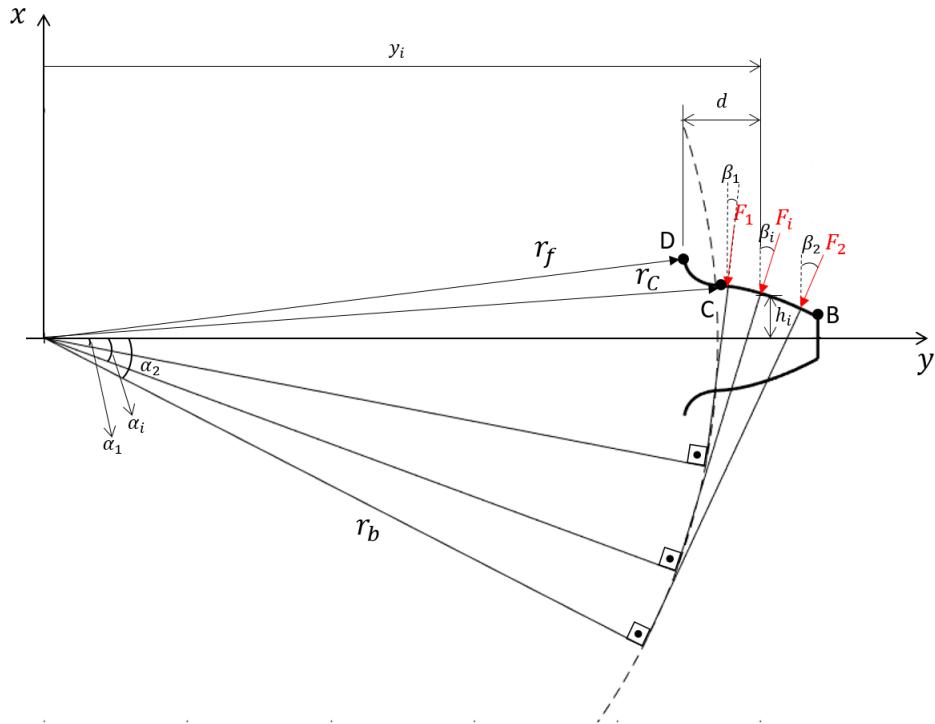


Figura 3.1: Força de contato ao longo do dente

$$U_a = \frac{F^2}{2k_a} = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_y} dy, \quad (3.15)$$

$$U_s = \frac{F_b^2}{2k_s} = \int_0^d \frac{1,2F_b^2}{2GA_y} dy, \quad (3.16)$$

$$F_b = F \cos \beta_i, \quad (3.17)$$

$$F_a = F \sin \beta_i, \quad (3.18)$$

$$M = F_b(y_i - y) - F_a x_i, \quad (3.19)$$

$$I_y = 1/12(2x)^3 Ly, \quad (3.20)$$

$$A_y = 2xLy, \quad (3.21)$$

em que L é a espessura do dente, E é o módulo de elasticidade e G é o módulo de cisalhamento. Desta forma, são obtidas as expressões para as rigidezes de flexão (k_b), compressão (k_a) e cisalhamento (k_s) (Meng *et al.*, 2020):

$$\frac{1}{k_b} = \int_0^d \frac{(d-y) \cos(\alpha_i) - x_i \sin(\alpha_i)}{EI_y} dy, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{k_a} = \int_0^d \frac{\sin^2(\alpha_i)}{EA_y} dy, \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{k_s} = \int_0^d \frac{1,2 \cos^2(\alpha_i)}{GA_y} dy. \quad (3.24)$$

Sainsot *et al.* (2004) incluíram a componente da deformação da base do dente (corpo da engrenagem), até então considerada perfeitamente rígida. Para isto, eles utilizaram a teoria de N. I. Muskhelishvili (1975) para anéis elásticos e obtiveram uma expressão analítica para tal rigidez, que depende de coeficientes L^* , M^* , P^* e Q^* e dos parâmetros indicados na Figura 3.2. :

$$\frac{1}{k_f} = \frac{\cos^2 \alpha_i}{EL} \left[L^* \left(\frac{u_f}{Sf} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{Sf} \right) + P^* (1 + Q^* \operatorname{tg} \alpha_i) \right]. \quad (3.25)$$

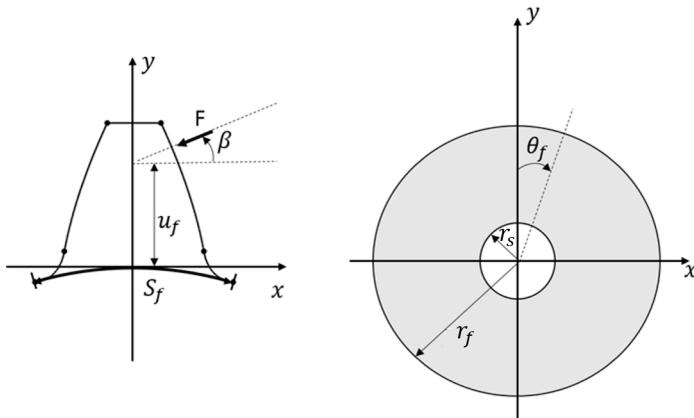


Figura 3.2: Parâmetros geométricos do cálculo da rigidez da base do dente

Sainsot *et al.* (2004) determinaram que os coeficientes L^* , M^* , P^* e Q^* , são funções do ângulo θ_f , indicado na figura 3.2, e da razão h entre o raio da raiz do dente, r_f e o raio do furo da engrenagem para montagem no eixo, r_s (ver Figura 3.2). Considerando estado plano de tensões, eles calcularam numericamente os valores destes coeficientes para um vasto intervalo de valores de h (de 1,7 a 7) e de θ_f (de 0,01 a 0,12). Então, fizeram ajuste de curva por função polinomial para os parâmetros (genericamente denominados X_i), dada por:

$$X_i(h, \theta_f) = A_i/\theta_f^2 + B_i h^2 + C_i h/\theta_f + D_i/\theta_f + E_i h + F_i, \quad (3.26)$$

em que os coeficientes A_i , B_i , C_i , D_i , E_i e F_i são apresentados na Tabela 3.1. Tal ajuste é adequado para valores limitados dos coeficientes, conforme apresentado na Equação 3.27. Neste trabalho, caso algum coeficiente calculado ficasse fora da faixa de valores adequadas, o corpo

da engrenagem foi considerado perfeitamente rígido, ou seja, $k_f \rightarrow \infty$ de forma que $1/k_f = 0$.

Tabela 3.1: Coeficientes da curva de ajuste polinomial

	A_i	B_i	C_i	D_i	E_i	F_i
$L^*(h, \theta_f)$	-5.574E-5	-1.9986E-3	-2.3015E-4	4.7702E-3	0.0271	6.8045
$M^*(h, \theta_f)$	60.111E-5	28.100E-3	-83.431E-4	-9.9256E-3	0.1624	0.9086
$P^*(h, \theta_f)$	-50.952E-5	185.50E-3	0.0538E-4	53.300E-3	0.2895	0.9236
$Q^*(h, \theta_f)$	-6.2042E-5	9.0889E-3	-4.0964E-4	7.8297E-3	-0.1472	0.6904

$$\begin{aligned} 6,82 &\leq L^*(h, \theta_f) \leq 6,94 \\ 1,08 &\leq M^*(h, \theta_f) \leq 3,29 \\ 2,56 &\leq P^*(h, \theta_f) \leq 13,47 \\ 0,141 &\leq Q^*(h, \theta_f) \leq 0,62 \end{aligned} \quad (3.27)$$

As variações das rigidezes de flexão (k_b), cisalhamento (k_s), compressão axial (k_a) e do corpo da engrenagem (ou base do dente, k_f) de acordo com a variação do ângulo de aplicação da força (β) são apresentadas na Figura 3.3. Para referência, nesta Figura estão destacados (β_1) e (β_2), indicados na Figura 3.1.

Assim, a Figura 3.3 mostra que tanto a rigidez de flexão (k_b) como a de compressão axial (k_a) apresentam uma queda mais acentuada com o início do aumento do ângulo de aplicação da força (β) e depois uma queda menos acentuada. Apesar de também diminuir com o aumento deste ângulo, a rigidez de cisalhamento apresenta menos variações de inclinação durante o intervalo. Por fim, a rigidez do corpo da engrenagem (k_f) tem um leve aumento no início do intervalo de aumento do ângulo (β), seguido por uma queda acentuada.

A energia potencial total de deformação do dente (U), então, é dada pela soma das energias potenciais de cada modo:

$$U = U_b + U_a + U_s + U_f. \quad (3.28)$$

Como consequência desta formulação, a rigidez total do dente é calculada como uma associação em série das rigidezes de flexão, compressão, cisalhamento e base:

$$k_{dente} = \left(\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_f} \right)^{-1} \quad (3.29)$$

3.2 Rigidez do dente reto externo com trinca na base

A trinca na raiz do dente é uma das principais falhas presentes em engrenagens e podem ser originadas apenas pela fadiga causada pela tensão de flexão no dente (Liang *et al.*, 2018b).

Quando há uma trinca na base do dente, há uma mudança na deformação do dente cau-

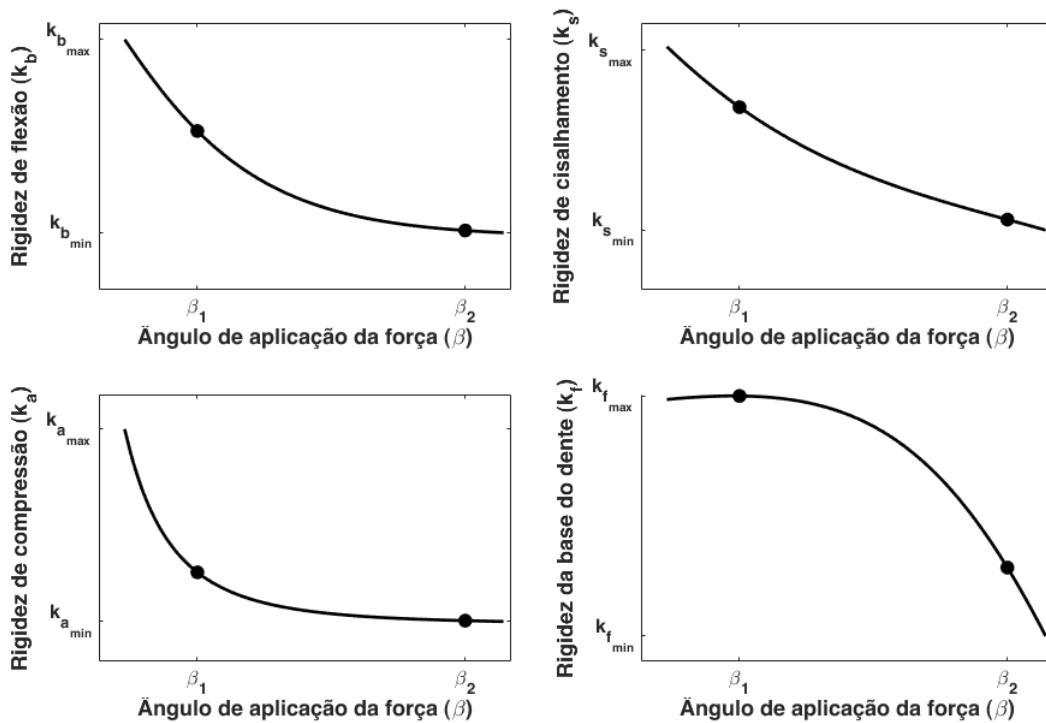


Figura 3.3: Variação das rigidezes de flexão, cisalhamento, compressão e base do dente de acordo com a variação do ângulo de aplicação da força

sada pela aplicação de uma força. Assim, a rigidez do dente é alterada. No caso da força de compressão axial, F_a , não existe essa alteração, pois a direção de aplicação da força é em tal sentido que a trinca não altera a deformação do dente. A deformação do corpo da engrenagem também não é afetada pela trinca, uma vez que ela é considerada no dente.

Assim, a trinca afeta as rigidezes de flexão, k_b , e de cisalhamento, k_s , reduzindo-as por meio da alteração da área da seção transversal do dente, A , e do momento de inércia de área, I . Neste caso, as rigidezes de flexão e cisalhamento precisam ser recalculadas e inclusas no cálculo da rigidez do dente. Para o dente trincado, então, elas serão nomeadas $k_{b_{trinca}}$ e $k_{s_{trinca}}$.

Neste trabalho, assumiu-se o modelo de trinca que se propaga em linha reta e que é uniformemente distribuída ao longo da face do dente. A linha que limita a espessura da trinca também é reta, uma vez que Ma *et al.* (2014b) mostraram que esta consideração produz resultados para trincas pequenas.

A Figura 3.4 mostra o modelo da trinca, considerada uma linha reta que se inicia em algum ponto da curva de transição (ou seja, entre os pontos D e C). Desta forma, o ponto inicial da propagação da trinca é um parâmetro importante para o modelo em questão. Além disto, é necessário considerar o ângulo de propagação da trinca, v_t , e a profundidade da trinca com relação à superfície do dente, q_t .

Define-se um valor de referência, q_{tmax} , tal que a profundidade da trinca atinge a linha horizontal de referência. Assim, caso a profundidade da trinca atinja $2q_{tmax}$, o dente estaria

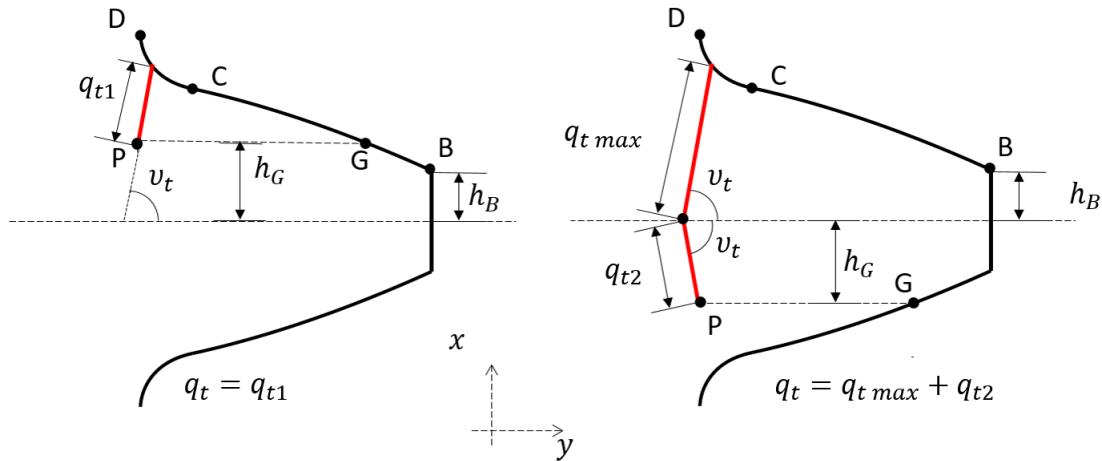


Figura 3.4: Parâmetros da trinca e condições de tamanho da trinca (vermelho). Adaptado de (Ma *et al.*, 2014b)

completamente separado do corpo da engrenagem. Na Figura 3.4, há a apresentação de duas condições. Na primeira, a profundidade da trinca em relação à superfície é tal que a trinca não ultrapassa a linha horizontal de referência, de forma que $q_t < q_{tmax}$. Na segunda, a trinca ultrapassa tal limite, ou seja, $q_t > q_{tmax}$. Identificar esta condição é importante, porque afeta o cálculo da área da seção transversal e do momento de inércia de área do dente (Ma *et al.*, 2014b):

Se $q_t \leq q_{tmax}$:

$$I = \begin{cases} \frac{1}{12}(2x)^3 L, & \text{se } y < y_P \text{ ou } y > y_G \\ \frac{1}{12}(h_G + x)^3 L, & \text{se } y_P \leq y \leq y_G \end{cases} \quad (3.30)$$

$$A = \begin{cases} 2xL, & \text{se } y < y_P \text{ ou } y > y_G \\ (h_G + x)L, & \text{se } y_P \leq y \leq y_G \end{cases} \quad (3.31)$$

sendo

$$h_G = x_G - q_{t1} \operatorname{sen} v. \quad (3.32)$$

Se $q_t > q_{tmax}$:

$$I = \begin{cases} \frac{1}{12}(2x)^3 L, & \text{se } y < y_{max} \\ \frac{1}{12} \left[x - \frac{(y - y_{max})h_G}{y_P - y_{max}} \right]^3 L, & \text{se } y_{max} \leq y < y_P \\ \frac{1}{12}(x - h_G)^3 L, & \text{se } y_P \leq y \leq y_G \\ 0, & \text{se } y > y_G \end{cases} \quad (3.33)$$

$$A = \begin{cases} 2xL, & \text{se } y < y_{max} \\ \left[x - \frac{(y - y_{max})h_G}{y_P - y_{max}}\right]L, & \text{se } y_{max} \leq y < y_P \\ (x - h_G)L, & \text{se } y_P \leq y \leq y_G \\ 0, & \text{se } y > y_G \end{cases} \quad (3.34)$$

sendo y_{max} a distância entre o centro da engrenagem até o ponto da trinca que cruza a o eixo x e

$$h_G = (q_{t2}) \operatorname{sen} v. \quad (3.35)$$

Nesta figura, define-se o eixo horizontal como y e a origem é definida no centro da engrenagem. Desta forma, y_G , por exemplo, refere-se ao comprimento horizontal do centro da engrenagem até a coordenada do ponto G. y_{max} refere-se ao comprimento horizontal, desde o centro da engrenagem, até o ponto em que a trinca atinge o comprimento q_{tmax} .

Um exemplo da redução das rigidezes de flexão e cisalhamento do dente causada pela trinca é mostrada na Figura 3.5. Neste caso, uma engrenagem de módulo 2 mm, com ângulo de pressão 20°, largura de face de 20 mm e 56 dentes é verificada. A linha azul apresenta a rigidez do dente saudável, enquanto a linha vermelha indica a rigidez com a presença de uma trinca de 0.1 mm. Em ambos os casos, o ângulo de propagação da trinca é de 60° e sua posição inicial é o de início da curva evolvente (ponto C da Figura 3.4).

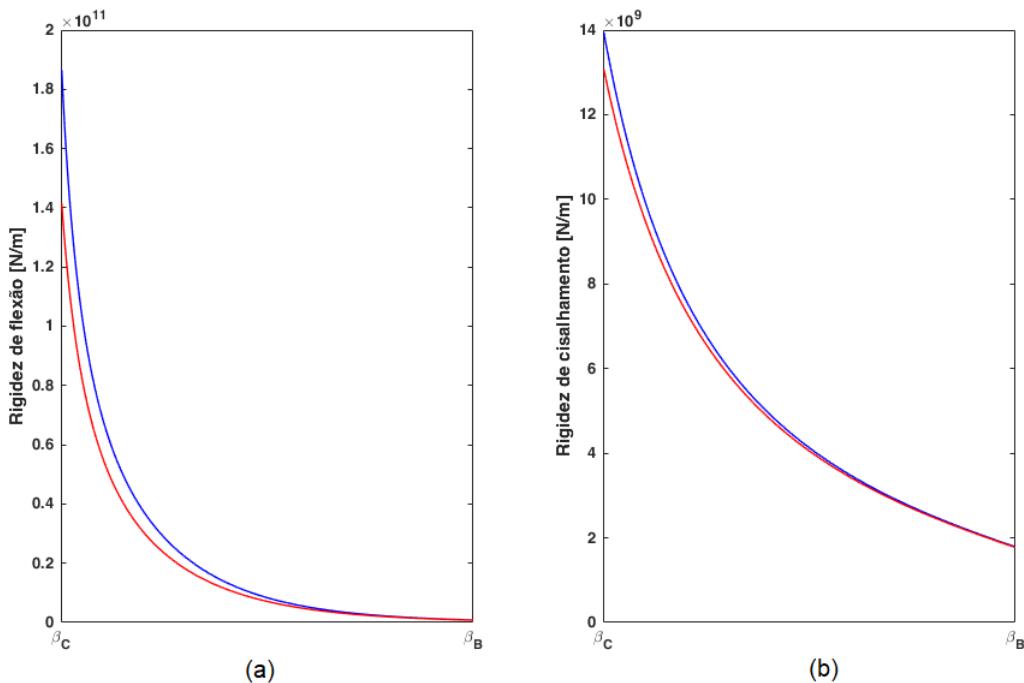


Figura 3.5: Rigidez do dente de módulo 2 mm, ângulo de pressão de 20° e largura de face de 20 mm saudável (azul) e trincado (vermelho): a) em flexão; b) ao cisalhamento.

A rigidez total do dente trincado também é calculada como uma associação em série:

$$k_{trincado} = \left(\frac{1}{k_{b_{trinca}}} + \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_{s_{trinca}}} + \frac{1}{k_f} \right)^{-1} \quad (3.36)$$

3.3 Rigidez do par engrenado e do engrenamento

Nas seções anteriores, explicou-se como se calcula a rigidez de um dente, saudável ou trincado. Entretanto, no engrenamento, o que ocorre é o contato de um par de dentes: o dente da engrenagem motora aplica uma força no dente da movida, transmitindo o movimento. Pela lei da ação e reação, o dente da engrenagem movida também aplica uma força, de igual intensidade, no dente da engrenagem motora. Ambos os dentes se deformam, de forma que é necessário considerar, então, a rigidez dos dois dentes.

Além disto, considerando que o contato entre os dois dentes é sem atrito e que os materiais são isotrópicos e perfeitamente elásticos, Yang e Lin (1987) incluíram, no cálculo da rigidez do par, a rigidez de contato de Hertz. Eles aproximaram a compressão elástica nas proximidades do contato por dois paraboloides e consideraram que esta rigidez superficial é praticamente constante ao longo de todo o contato, independente da posição ou da profundidade de interpenetração. Com isto, definiram a rigidez de Hertz (k_h) para o par engrenado:

$$k_h = \frac{\pi E L}{4(1 - v^2)} \quad (3.37)$$

A rigidez total de um par de dentes (k_p), então, é calculada como uma associação em série das rigidezes de cada dente (k_{dente_1} e k_{dente_2} , sendo que esta rigidez pode ser de um dente saudável, k_{dente} , ou trincado, $k_{trincado}$) e da rigidez de Hertz (k_h):

$$k_p = \left(\frac{1}{k_{dente_1}} + \frac{1}{k_{dente_2}} + \frac{1}{k_h} \right)^{-1}. \quad (3.38)$$

Caso haja sempre exatamente apenas um par de dentes em contato durante o engrenamento, há o risco de que qualquer erro cause uma perda instantânea de contato, gerando falha na transmissão do movimento. Para um engrenamento suave, isto é, sem muita vibração e sem alterações de velocidade, é recomendável que se tenha pelo menos mais de um par de dentes em contato em certos períodos do engrenamento (Norton, 2013).

Para quantificar isto, pode-se calcular a razão de contato (ou grau de recobrimento), cr , definida como a razão entre o número de dentes N e o passo circular de base p_b de uma mesma engrenagem:

$$cr = N/p_b, \quad (3.39)$$

$$p_b = \frac{2\pi r_p}{N} \cos \alpha. \quad (3.40)$$

A razão de contato (ou grau de recobrimento), então, deve ser maior que 1, o que significa que, em alguns instantes do engrenamento, há mais de um par de dentes em contato. Neste caso, a rigidez do engrenamento será diferente da rigidez do par. A Figura 3.6 mostra o período de contato completo de um par de dentes, i , com a rigidez k_{p_i} representada pela linha vermelha. No começo do contato deste par, o par anterior, $i - 1$, ainda está terminando o contato, com sua rigidez $k_{p_{i-1}}$ representada pela linha azul. No fim do contato do par i , o próximo par, $i + 1$, já começou seu contato e sua rigidez $k_{p_{i+1}}$ é representada pela linha amarela. Trata-se, então, de um par engrenado com razão de contato (ou grau de recobrimento) entre 1 e 2 ($1 \leq cr \leq 2$). A rigidez total do engrenamento, $k_m(t)$ é a soma das rigidezes dos pares em cada instante de tempo, representada na figura pela linha roxa. Nesta mesma figura, é indicado o período de engrenamento, T_m , intervalo de tempo em que se repete o padrão da rigidez do engrenamento.

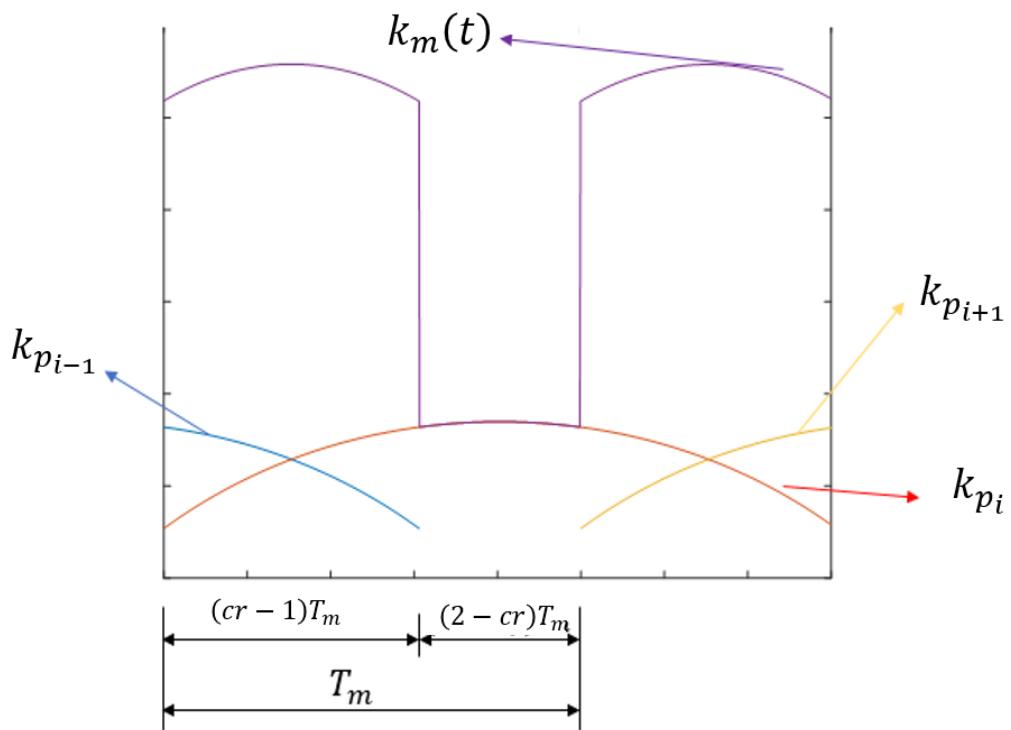


Figura 3.6: Rigidez total do engrenamento para um par engrenado com razão de contato (ou grau de recobrimento) entre 1 e 2

A Figura 3.7 mostra como exemplo a rigidez total do engrenamento (azul) em função do ângulo de rotação da engrenagem, que tem um dente trincado, para uma volta completa. A rigidez de cada par também é representada na figura: em preto, caso o par seja saudável, e em vermelho, caso o par tenha o dente trincado. Neste caso, a razão de contato (grau de recobrimento) é entre 1 e 2.

O capítulo seguinte mostra duas formas de modelar um par engrenado: por parâmetros concentrados e por elementos finitos. Nas duas abordagens, a rigidez do engrenamento, que foi explicitada neste capítulo, é essencial para representar os efeitos dinâmicos das engrenagens.

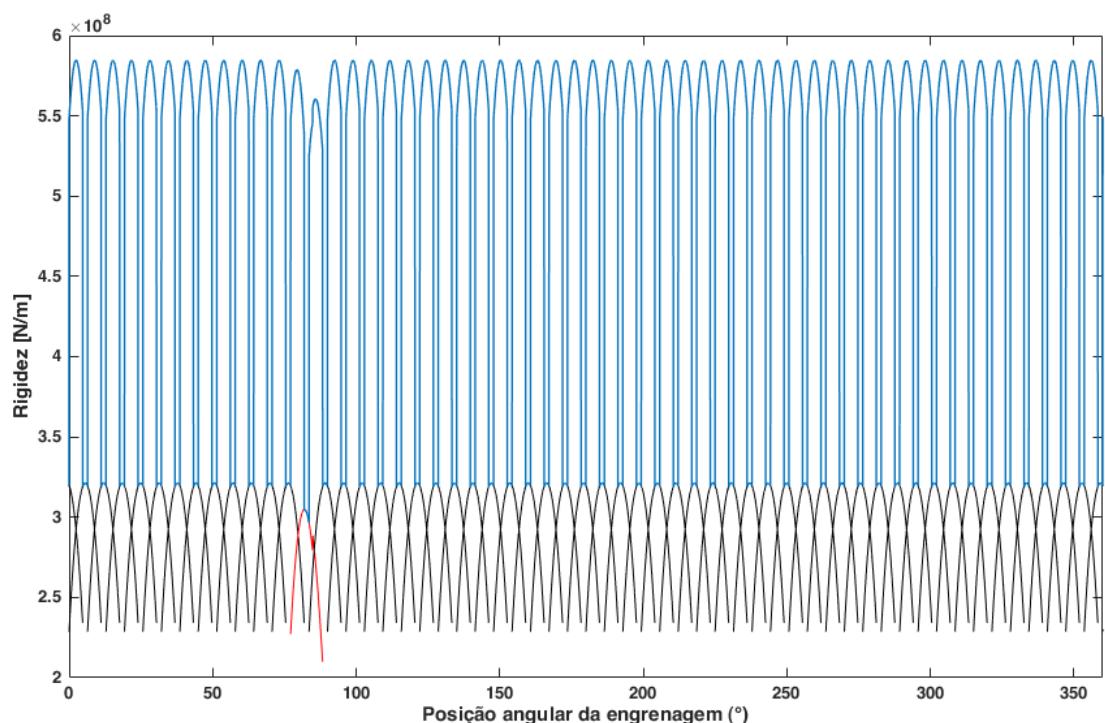


Figura 3.7: Rigidez total do engrenamento (azul) de par com razão de contato entre 1 e 2 de uma engrenagem com trinca, composta pela rigidez de dentes saudáveis (preto) e dente com trinca (vermelho)

4 Modelagem de sistemas engrenados

Este capítulo é dedicado a explicar como são modelados os pares engrenados. A abordagem por parâmetros concentrados, mostrada na primeira seção, é útil para entender como o engrenamento é incluso na abordagem de elementos finitos, bastante utilizada no estudo de dinâmica de rotores e importante para o estudo mais completo do sistema, considerando, por exemplo, a deformação do eixo e os deslocamentos nos mancais, fatores que são importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

4.1 Modelo de par engrenado

A Figura 4.1 (a) mostra um par engrenado com flexibilidade nos mancais. O engrenamento é representado por uma rigidez, $k_m(t)$ e por um amortecimento $c_m(t)$. Como neste trabalho só se consideram engrenagens cilíndricas de dentes retos, a representação no plano é suficiente para descrever o sistema dinamicamente.

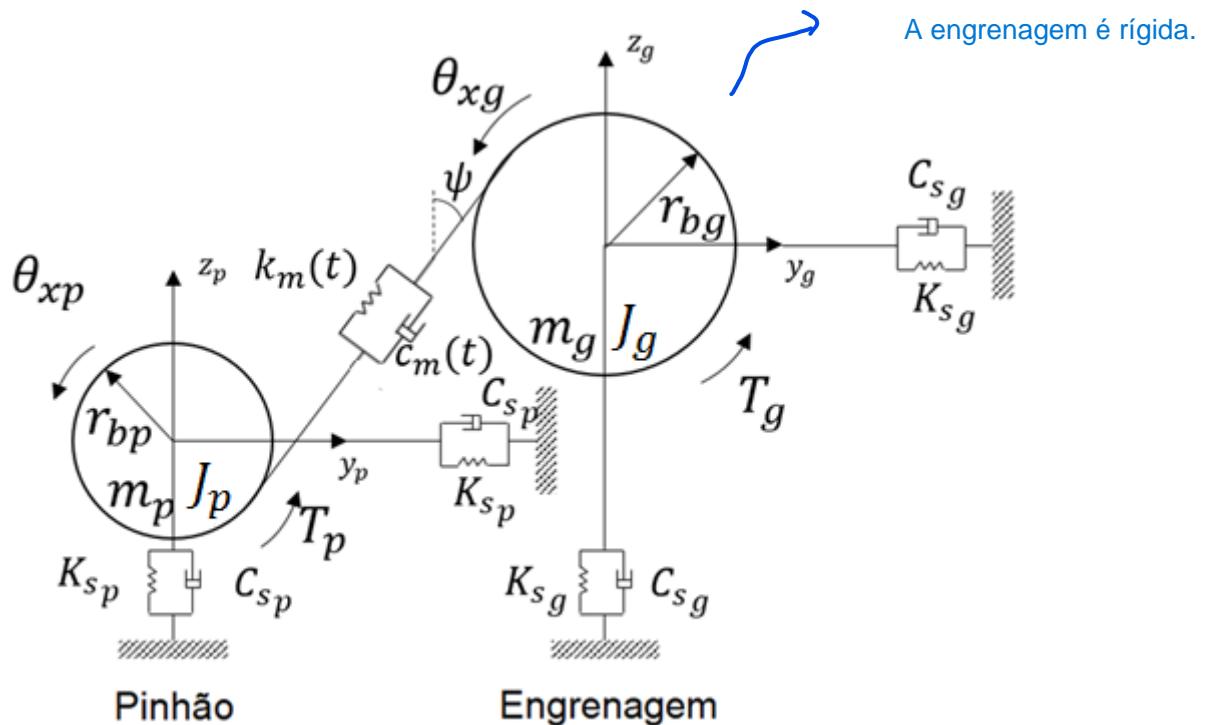


Figura 4.1: Modelo esquematizado de par engrenado.

As equações de movimento para este sistema foram desenvolvidas a partir da Equação de Lagrange (Equação 4.1), com base no trabalho de Kim *et al.*, 2010, com extensão para o caso de engrenagens helicoidais com base no trabalho de Kubur *et al.*, 2004. Nesta seção, o subscrito p refere-se ao pinhão, enquanto o subscrito g refere-se à engrenagem.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4.1)$$

$$q_i = \{y_p, z_p, \theta_{xp}, y_g, z_g, \theta_{xg}\}^T.$$

em que o ponto sobreescrito, \cdot , indica derivada com relação ao tempo. A energia cinética, T , do par pode ser descrita como:

$$T = \left(m_p \dot{y}_p^2 + m_p \dot{z}_p^2 + m_g \dot{y}_g^2 + m_g \dot{z}_g^2 + J_p \dot{\theta}_{xp}^2 + J_g \dot{\theta}_{xg}^2 \right) / 2, \quad (4.2)$$

em que m é a massa e J é o momento de inércia polar. Os momentos de inércia, de forma geral para discos e cilindros, são calculados para um cilindro de massa m , diâmetros externo d_e , diâmetro interno, d_i e comprimento L (Eq. 4.3). No caso do corpo da engrenagem, o diâmetro externo considerado é o diâmetro primitivo, o diâmetro interno é o diâmetro do eixo em que a engrenagem é montada e o comprimento é a largura de face (considerando que o corpo da engrenagem tem a mesma espessura).

$$J = \frac{m}{8} (d_e^2 + d_i^2). \quad (4.3)$$

Considerando a deformação dos suportes das engrenagens (eixos e/ou mancais) e do engrenamento, a energia potencial, U , é dada por:

$$U = [K_{sp} y_p^2 + K_{sp} z_p^2 + K_{sg} y_g^2 + K_{sg} z_g^2 + k_m(t) p(t)^2] / 2 \quad (4.4)$$

em que K_s indica a rigidez de translação do apoio, $k_m(t)$ indica a rigidez do engrenamento (cujo cálculo foi apresentado no 3). A deformação do engrenamento, $p(t)$, é:

$$p(t) = (y_p \operatorname{sen} \psi - y_g \operatorname{sen} \psi + z_p \cos \psi - z_g \cos \psi + r_{bp} \theta_{xp} + r_{bg} \theta_{xg}), \quad (4.5)$$

em que r_b é o raio base e ψ é o ângulo da linha de ação com a vertical.

As forças dissipativas, F , devido ao amortecimento são dadas por:

$$F = \left[C_{sp} (y_p + \dot{z}_p) + C_{sg} (y_g + \dot{z}_g) + c_m(t) \dot{p}(t) \right], \quad (4.6)$$

em que C_s indica o amortecimento dos apoios e $c_m(t)$ indica o amortecimento do engrenamento. O amortecimento do engrenamento, neste trabalho, foi considerado uma função da rigidez ($k_m(t)$), de um fator de amortecimento (ξ_m), dos momentos de inércia polar (J_p e J_g) e dos raios base (r_{bp} e r_{bg}), conforme trabalho de Yi et al., 2019:

$$c_m(t) = 2\xi_m \sqrt{k_m(t) J_p J_g / (J_g r_{bp}^2 + J_p r_{bg}^2)}, \quad (4.7)$$

As forças generalizadas, Q_i , correspondem às forças externas ao sistema. Neste caso, os

pesos ($-m_i g$, $i = p, g$) e os torques de acionamento (T_p) e resistivo (T_g):

$$Q_{zp} = -m_p g, Q_{zg} = -m_g g, Q_{\theta_{xp}} = T_p, Q_{\theta_{xg}} = T_g. \quad (4.8)$$

Assim, as equações de movimento do par podem ser deduzidas para este sistema:

$$m_p \ddot{y}_p + [k_m(t) p(t) + c_m(t) \dot{p}(t)] \operatorname{sen}(\psi) + C_{s_p} \dot{y}_p + K_{s_p} y_p = 0, \quad (4.9)$$

$$m_p \ddot{z}_p + [k_m(t) p(t) + c_m(t) \dot{p}(t)] \cos(\psi) + C_{s_p} \dot{z}_p + K_{s_p} z_p = -m_p g, \quad (4.10)$$

$$J_p \ddot{\theta}_{xp} + r_{bp} [k_m(t) p(t) + c_m(t) \dot{p}(t)] = T_p, \quad (4.11)$$

$$m_g \ddot{y}_g - [k_m(t) p(t) + c_m(t) \dot{p}(t)] \operatorname{sen}(\psi) + C_{s_g} \dot{y}_g + K_{s_g} y_g = 0, \quad (4.12)$$

$$m_g \ddot{z}_g - [k_m(t) p(t) + c_m(t) \dot{p}(t)] \cos(\psi) + C_{s_g} \dot{z}_g + K_{s_g} z_g = -m_g g, \quad (4.13)$$

$$J_g \ddot{\theta}_{xg} + r_{bg} [k_m(t) p(t) + c_m(t) \dot{p}(t)] = T_g. \quad (4.14)$$

Para obter a resposta do par, é necessário integrar, em conjunto, estas equações de movimento. Com isto, é possível obter, ao longo do tempo, informações sobre os deslocamentos, velocidades e acelerações. Neste caso, entretanto, tais respostas são obtidas apenas para os parâmetros dos corpos das engrenagens, uma vez que simplificam eixos e mancais a uma rigidez e um amortecimento. A seção a seguir mostra a dedução de um modelo de par engrenado obtido pelo método de elementos finitos, em que mais detalhes a respeito destes outros componentes de uma máquina podem ser obtidos.

4.2 Modelo de rotor com engrenamento

A fim de se obter um modelo mais detalhado, de forma a considerar todos os componentes do rotor (como eixo, discos, mancais e acoplamentos, por exemplo), o método de elementos finitos (FEM) é amplamente utilizado. Basicamente, o método consiste em discretizar o sistema, ou seja, considerar o sistema como um conjunto de elementos que são acoplados entre si.

Rao *et al.*, 1998 apresentaram um modelo de elementos finitos geral para um rotor engrenado, que será apresentado nesta seção e que foi utilizado neste trabalho. Assim como no modelo de parâmetros concentrados, o movimento de translação axial dos discos é considerado perfeitamente restrito, de modo que este grau de liberdade não foi considerado. Esta formulação é mais adequada para engrenagens de dentes retos e engrenagens helicoidais duplas.

Neste trabalho, será explicitada a formulação das matrizes dos elementos de viga e disco, bem como as matrizes de amortecimento e rigidez do engrenamento. Depois, mostra-se como esses elementos se integram na formulação das equações do sistema completo, incluindo os efeitos dos mancais.

4.2.1 Elemento de Disco Rígido

A Figura 4.2 mostra um modelo simples de rotor, com o sistema de referências que será utilizado para esta dedução. O disco encontra-se no plano $Z - Y$, com deslocamentos lineares V e W e deslocamentos angulares B e Γ . A velocidade de rotação é Ω com velocidade de torção $\dot{\phi}$.

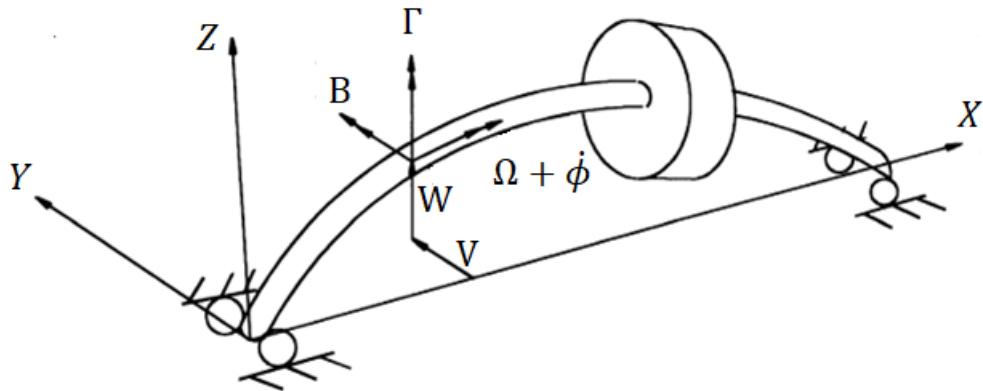


Figura 4.2: Sistema de coordenadas do rotor. (Adaptado de Rao *et al.*, 1998)

Sejam m a massa, I o momento de inércia radial, J o momento de inércia polar e indicando-se que se trata de uma propriedade do disco como subscrito d , pode-se escrever a energia cinética do disco (Rao *et al.*, 1998):

$$T_d = \frac{1}{2}m_d (\dot{V}_d^2 + \dot{W}_d^2) + \frac{1}{2}I_d (\dot{B}_d^2 + \dot{\Gamma}_d^2) - \frac{1}{2}J_d (\Omega + \dot{\phi}_d) (\dot{B}_d \dot{\Gamma}_d - \dot{B}_d \dot{\Gamma}) + \frac{1}{2}J_d (\Omega + \dot{\phi}_d)^2. \quad (4.15)$$

Considerando a Equação de Lagrange (Eq. 4.1), pode-se obter a forma matricial das equações de movimento do elemento de disco:

$$[M_d] \{\ddot{q}_d\} + \Omega [G_d] \{\dot{q}_d\} = \{F_d\} \quad (4.16)$$

em que $[M_d]$ é a matriz de massa do disco, $[G_d]$ é a matriz giroscópica, descritas no Apêndice B.1. $\{F_d\}$ é o vetor de forças externas e $\{q_d\}$ é o vetor de deslocamentos:

$$\{q_d\} = \{V_d \ W_d \ B_d \ \Gamma_d \ \phi_d\}^T \quad (4.17)$$

4.2.2 Elemento de viga

Elementos de eixo são modelados como elementos de viga de Timoshenko, com dois nós cada, como indicado na Figura 4.3, que também mostra o sistema de referências.

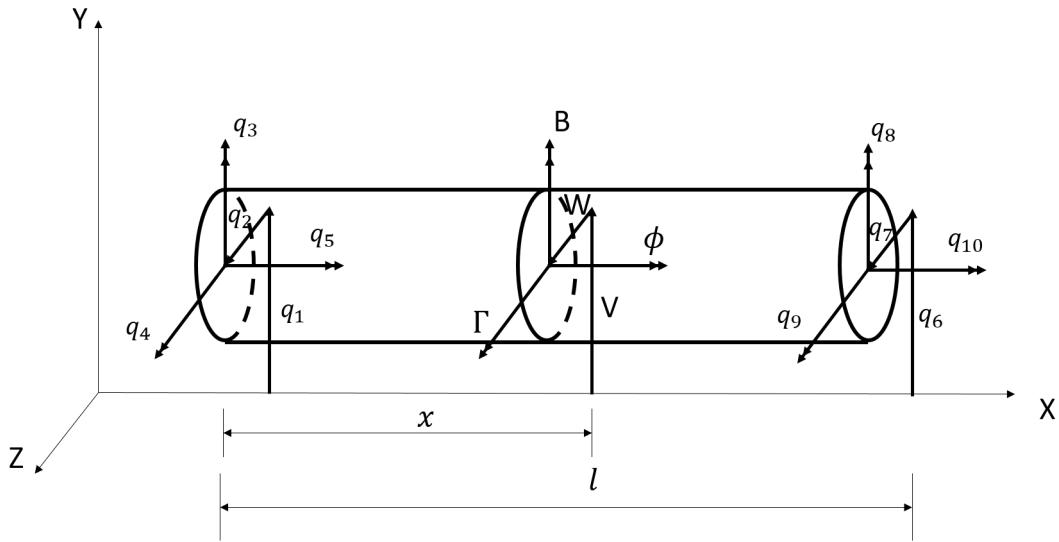


Figura 4.3: Elemento de viga e seu sistema de coordenadas. (Adaptado de Rao *et al.*, 1998)

A energia cinética deste elemento, incluindo o movimento de torção, é dada por (Rao *et al.*, 1998):

$$T_s = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho_s A_s \left(\dot{V}_s^2 + \dot{W}_s^2 \right) + I_s \left(\dot{B}_s^2 + \dot{\Gamma}_s^2 \right) \right] ds - \frac{1}{2} \int_0^l \left[J_s (\Omega + \dot{\phi}_s) \left(B_s \dot{\Gamma}_s - \Gamma_s \dot{B}_s \right) - J_s (\Omega + \dot{\phi}_s)^2 \right] ds, \quad (4.18)$$

em que ρ é a densidade do material, A é a área da seção transversal, I o momento de inércia radial, J o momento de inércia polar e o subscrito s denota que o parâmetro se refere ao elemento de eixo.

A energia potencial deste elemento, incluindo deflexão de torção (Rao *et al.*, 1998) e de cisalhamento (Nelson, 1980), é dada por:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^l E_s I a_s \left[\left(\frac{dB_s}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_s}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l K' G_s A_s \left\{ \left[\left(\frac{dV_s}{dx} \right) - \Gamma \right]^2 + \left[\left(\frac{dW_s}{dx} \right) + B_s \right]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^l G_s J a_s \left(\dot{\phi}_s \right)^2 dx, \quad (4.19)$$

em que E é o módulo de elasticidade, Ia é o segundo momento de inércia de área, Ja é o segundo momento de área polar, G é o módulo de cisalhamento e K' é o fator de forma do cisalhamento, que depende do coeficiente de Poisson do material (v) e da razão entre os diâmetros interno e externo do elemento (d_{si}/d_{se}) (Cowper, 1966):

$$K' = \frac{6(1+v)[1+(d_{si}/d_{se})^2]^2}{(7+6v)[1+(d_{si}/d_{se})^2]^2 + (20+12v)(d_{si}/d_{se})^2} \quad (4.20)$$

Assim como feito para o elemento de disco, a equação de movimento matricial do elemento de viga pode ser obtida a partir da formulação de Lagrange (Eq. 4.1):

$$[M_s] \{\ddot{q}_s\} \{[C_s] + \Omega [G_s]\} \{\dot{q}_s\} + [K_s] \{\dot{q}_s\} = \{F_s\} \quad (4.21)$$

em que $[M_s]$, $[C_s]$, $[G_s]$ e $[K_s]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, de amortecimento estrutural proporcional, giroscópica e de rigidez do elemento de viga. Detalhes a respeito de tais matrizes podem ser encontrados no Apêndice B.2. $\{F_s\}$ vetor de forças externas e $\{q_s\}$ é o vetor de deslocamento:

$$\{q_s\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10}\}^T \quad (4.22)$$

4.2.3 Engrenagens

As engrenagens são incluídas neste modelo como discos rígidos, conectados um ao outro por uma força, que representa o engrenamento (Rao *et al.*, 1998). Assim como mostrado na seção anterior, a força do engrenamento (F_{mesh}) é descrita em termos de um amortecimento e uma rigidez, variáveis no tempo ($c_m(t)$ e $k_m(t)$, respectivamente):

$$F_{mesh} = c_m(t)\dot{p}(t) + k_m(t)p(t). \quad (4.23)$$

O cálculo da rigidez, $k_m(t)$, foi detalhado no Capítulo 3. O cálculo da deformação do engrenamento, $p(t)$ e o cálculo do amortecimento, $c_m(t)$, são apresentados nas Eq. 4.5 e 4.7, respectivamente. Esta força, entretanto, está definida na direção da linha de ação. A decomposição desta força nos graus de liberdade de referência do rotor é feita com base no sistema de referência da Figura 4.1.

Define-se, então, um vetor das coordenadas do pinhão e da engrenagem, com equivalência dos graus de liberdade ao vetor de deslocamentos do disco, com base no sistema indicado na Figura 4.1:

$$\{q_{pg}\} = \{y_p \ z_p \ \theta_{yp} \ \theta_{zp} \ \theta_{xp} \ y_g \ z_g \ \theta_{yg} \ \theta_{zg} \ \theta_{xg}\}^T. \quad (4.24)$$

De forma análoga ao que foi descrito nas equações 4.9, o vetor de forças do engrenamento é dado por:

$$\{F_m\} = F_{mesh} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\psi) \\ \cos(\psi) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\text{sen}(\psi) \\ -\cos(\psi) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Entretanto, F_{mesh} é uma função de $p(t)$, que também depende dos deslocamentos descritos no vetor q_{pg} (Eq. 4.24). Assim, o vetor $\{F_m\}$ pode ser reescrito como:

$$\{F_m\} = c_m(t)[S]\{\dot{q}_{pg}\} + k_m(t)[S]\{q_{pg}\}, \quad (4.26)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{pp}] & [S_{pg}] \\ [S_{gp}] & [S_{gg}] \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

As submatrizes $[S_{pp}]$, $[S_{pg}]$, $[S_{gp}]$ e $[S_{gg}]$ são constantes e descrevem o acoplamento dos movimentos entre pinhão e engrenagem:

$$[S_{pp}] = \begin{bmatrix} \text{sen}^2\psi & \text{sen} \cos \psi & 0 & 0 & r_{b_p} \text{sen} \psi \\ & \cos^2 \psi & 0 & 0 & r_{b_p} \cos \psi \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & r_{b_p}^2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$[S_{pg}] = \begin{bmatrix} -\text{sen}^2\psi & -\text{sen} \cos \psi & 0 & 0 & r_{b_g} \text{sen} \psi \\ -\text{sen} \cos \psi & -\cos^2 \psi & 0 & 0 & r_{b_g} \cos \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{b_p} \text{sen} \psi & -r_{b_p} \cos \psi & 0 & 0 & r_{b_p} r_{b_g} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$[S_{gp}] = [S_{pg}]^T \quad (4.30)$$

$$[S_{gg}] = \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \psi & \text{sen} \cos \psi & 0 & 0 & -r_{bg} \text{sen} \psi \\ & \cos^2 \psi & 0 & 0 & -r_{bg} \cos \psi \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & r_{bg}^2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

A equação de movimento do par engrenado, na forma matricial, é dada por:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M_p] & [0] \\ [0] & [M_g] \end{bmatrix} \{\ddot{q}_{pg}\} + \\ & \left[\dot{\theta}_{xp} \begin{bmatrix} [G_p] & [0] \\ [0] & \frac{\dot{\theta}_{xg}}{\dot{\theta}_{xp}} [G_g] \end{bmatrix} + c_m(t) [S] \right] \{\dot{q}_{pg}\} + k_m(t) [S] \{q_{pg}\} = \{F_{pg}\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

em que os subscritos p e g indicam matrizes referentes ao pinhão e a engrenagem, respectivamente. A matriz de massa $[M]$ e giroscópica $[G]$ são calculadas como as do elemento de disco (Eq. B.1 e Eq. B.2). $\{F_{pg}\}$ é o vetor de forças externas deste sistema.

4.2.4 Mancais

O efeito dos mancais também é incluso no modelo, em um único nó. Tal efeito é representado por amortecimento e rigidez equivalente, com coeficientes diretos e cruzados, nas direções laterais. Efeitos nas direções de torção são considerados nulos. A equação matricial que descreve as forças nos mancais é dada por:

$$[c_b] \dot{q}_b + [k_b] q_b = F_b; \quad (4.33)$$

$$[c_b] = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ c_{zy} & c_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$[k_b] = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ k_{zy} & k_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$q_b = \left\{ V_b \ W_b \ B_b \ \Gamma_b \ \phi_b \right\}^T, \quad (4.36)$$

em que c corresponde a amortecimento, k a rigidez, F_b a força e o subscrito b indica que se trata de uma propriedade do mancal.

4.2.5 Equação global do sistema

Descritas, então, como são as matrizes que caracterizam cada elemento do rotor, pode-se associá-las de forma que integrem a equação global do sistema, apresentada na Eq. 4.37. Nesta equação as matrizes $[M]$, $[G]$, $[C(t)]$, $[K(t)]$ são, respectivamente, a matrizes globais de massa, giroscópica, de amortecimento e de rigidez; $\{F\}$ é o vetor global de forças externas, $\dot{\theta}_{xp}$ é a velocidade de rotação do eixo em que está o pinhão e $\{q\}$ é o vetor de coordenadas generalizadas de todo o sistema.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [\dot{\theta}_{xp}[G] + [C(t)]]\{\dot{q}\} + [K(t)]\{q\} = \{F\} \quad (4.37)$$

A forma como são associadas tais matrizes elementares em uma matriz global é mostrada, de forma genérica, na Figura 4.4. Cada nó tem 5 graus de liberdade (V , W , B , Γ e ϕ). Nesta figura, considera-se um sistema com dois rotores (isto é, dois eixos com seus variados elementos) acoplados por um engrenamento. O rotor 1 foi discretizado com n nós e o rotor 2 com m nós, de forma que o total de graus de liberdade do sistema é $5(n + m)$.

Convencionou-se que o pinhão está no nó genérico p , no rotor 1, e que a engrenagem no nó genérico g , no rotor 2. Em verde estão indicadas as matrizes do engrenamento mostradas nas Equações 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31, mostrando-se como elas se organizam em uma matriz global e como elas acoplam o movimento dos dois rotores através das matrizes cruzadas (que associam os nós p e g , isto é, as matrizes $[S_{pg}]$ e $[S_{gp}]$).

Além disto, a Figura 4.4 mostra um exemplo de elemento de viga na matriz global, que está entre os nós genéricos e e f , um exemplo de elemento de disco, alocado no nó genérico d , e um exemplo de elemento de mancal, alocado no nó genérico b .

Para que a resposta do sistema ao longo do tempo seja obtida, é necessário resolver a sua equação diferencial global (4.37). Para isto, utilizou-se o Método de Newmark (Newmark, 1959), que é um método de integração numérica com passo de tempo fixo (detalhes a respeito deste método, na forma que foi aplicado neste trabalho, podem ser verificados no Apêndice C). A Figura 4.5 mostra como o código de programação foi estruturado a fim de calcular esta resposta do sistema.

4.3 Frequências naturais de um sistema rotativo

Para sistemas elásticos, uma das características dinâmicas a ser avaliada é a frequência natural. No caso de um sistema com n graus de liberdade, há n frequências naturais relacionadas a n modos de vibrar. No caso de um sistema rotativo, estes modos aparecem em duplas, que

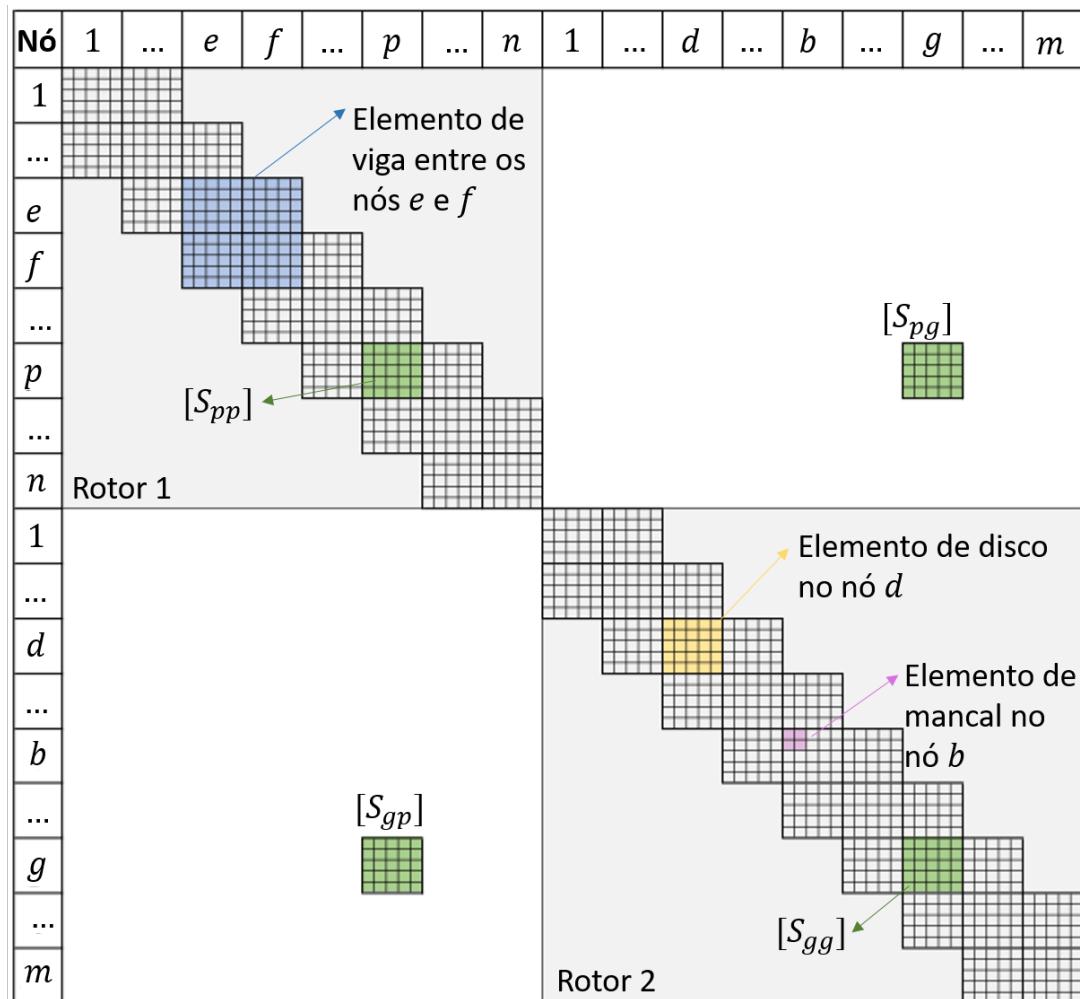


Figura 4.4: Matrizes dos elementos alocadas na matriz global

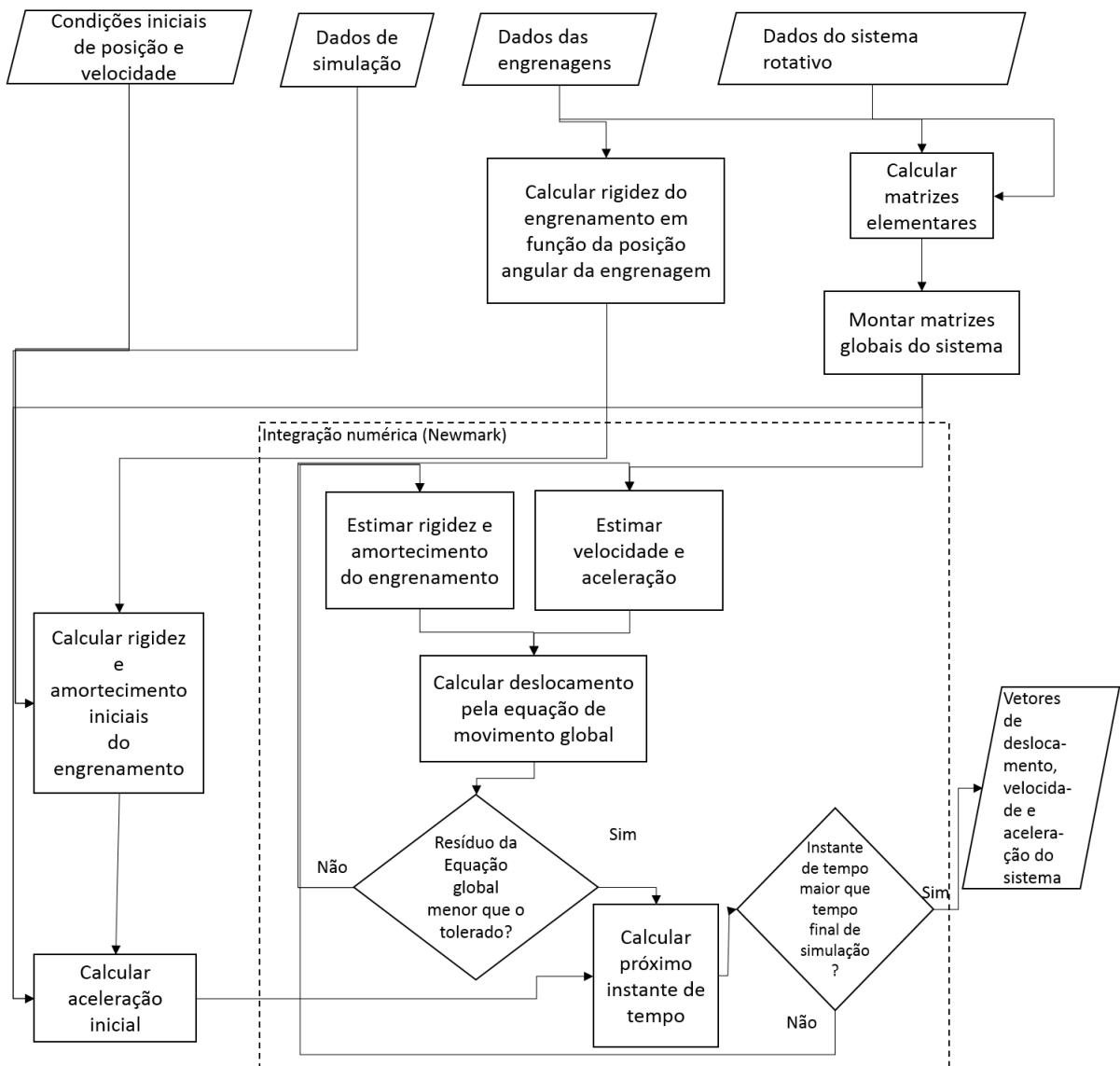


Figura 4.5: Fluxograma do código de programação para simulação do sistema rotativo engrenado

caracterizam movimentos direto e de precessão do eixo. A proximidade das frequências naturais de uma mesma dupla de modos depende da isotropia do sistema e da influência do efeito giroscópico (Friswell *et al.*, 2015).

O cálculo das frequências naturais é feito a partir dos autovalores da equação característica do sistema. Para isto, pode-se utilizar a equação de estados do sistema:

$$\{\dot{q}_E\} = [A]\{q_E\} + [B]\{u\}, \quad (4.38)$$

$$\{q_E\} = \{q \ \dot{q}\}^T. \quad (4.39)$$

A Equação 4.38, então, é dada por:

$$\begin{cases} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{cases} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K_{med}] & -[M]^{-1}([C_{med}] + \dot{\theta}_P[G]) \end{bmatrix} \begin{cases} q \\ \dot{q} \end{cases} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M]^{-1} \end{bmatrix} \begin{cases} \{0\} \\ \{F\} \end{cases}, \quad (4.40)$$

em que $[K_{med}]$ e $[C_{med}]$ são os valores médios dos termos das matrizes variantes no tempo.

Sendo ξ o fator de amortecimento e ω_n a frequência natural, cada autovalor (λ) da matriz $[A]$ é dado por:

$$\lambda = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (4.41)$$

As frequências naturais de um sistema rotativo engrenado são, então, dependentes da velocidade de rotação do eixo do pinhão. Para representá-las, utiliza-se o Diagrama de Campbell, que mostra as frequências naturais em função da rotação do eixo.

Analizando-se as matrizes giroscópicas dos elementos de disco e viga (Eq. B.2, B.16, B.17 e B.18), pode-se verificar que elas não possuem termos nos graus correspondentes à torção (grau 5 de cada nó). Assim, frequências naturais de modos de vibrar de torção permanecem constantes, independentes da velocidade de rotação do eixo. No Diagrama de Campbell, tais frequências apresentam-se, então, como linhas retas horizontais. O modo de vibrar também pode ser identificado pelos autovetores da matriz $[A]$.

Este capítulo descreveu como é feita a modelagem matemática de rotores engrenados, tanto por parâmetros concentrados como pelo método de elementos finitos. Essa modelagem é importante para obter tanto características do sistema, como frequências naturais, como sua resposta no tempo quando submetido a certas condições. O capítulo seguinte mostra resultados de simulações numéricas deste tipo de sistema, nos dois métodos de modelagem considerados.

5 Métodos de Processamento de Sinais

Este capítulo descreve as técnicas de processamento de sinais utilizadas neste trabalho, com a finalidade de identificar a presença da trinca na engrenagem a partir de medições no mancal. A Transformada discreta de Fourier, um dos métodos mais utilizados para esta finalidade, foi o primeiro utilizado para analisar os sinais. As observações feitas a partir dela motivaram a utilização dos demais métodos.

5.1 Transformada discreta de Fourier

Um sinal periódico $x(t)$ com período T pode ser descrito por uma somatória infinita de senos e cossenos, na chamada série de Fourier. Para isto, o sinal deve obedecer às condições de Diritchlet, que são (Arruda e Huallpa, 2008):

- $x(t) = x(t \pm nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|dt < \infty$
- ter número finito de descontinuidades num período
- ter número finito de máximos e mínimos locais num período

A série de Fourier pode ser descrita na forma exponencial, que é uma maneira mais conveniente para o propósito deste capítulo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}, \quad (5.1)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in2\pi f_n t} dt, \quad (5.2)$$

em que f_n é frequência do sinal, que corresponde ao múltiplo n do inverso do período T . Assim, a série de Fourier pode ser representada graficamente por um espectro de frequências de raias, conforme denominação de Arruda e Huallpa (2008). Neste espectro, cada coeficiente completo a_n é associado à frequência correspondente f_n .

Para, então, representar o sinal periódico $x(t)$ no domínio da frequência, tem-se:

$$X(f_k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi kt/T} dt, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.3)$$

O inverso, ou seja, a representação do sinal no domínio do tempo a partir da sua representação na frequência é dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f_k) e^{i2\pi kt/T}, \quad f_k = k/T. \quad (5.4)$$

Já para um sinal transitório $x(t)$, cuja integral no domínio do tempo exista, pode-se definir a Transformada de Fourier, (*Fourier Transform*, FT), como:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (5.5)$$

Esta equação pode ser interpretada como o limite da série com período T tendendo ao infinito (Arruda e Huallpa, 2008). Fazendo $\Delta f = 1/T$, de forma que esta é a distância entre duas raias do espectro discreto, tem-se:

$$X(k\Delta f) = \Delta f \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi k\Delta f t} dt. \quad (5.6)$$

Assim, ao invés de raias ao longo de frequências discretas, obtém-se uma curva ao longo da frequência, como mostra a Figura 5.1.

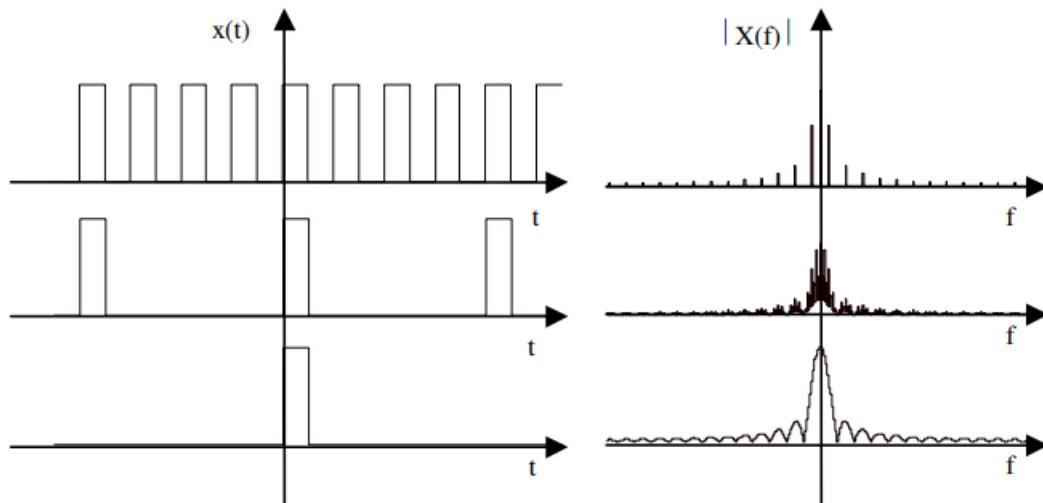


Figura 5.1: Transformada de Fourier para sinal periódico e transiente. Retirado de Arruda e Huallpa (2008)

5.2 Energia e potência de um sinal

A energia de um sinal, E , dada pela Eq. 5.7. Para sinais transitórios, a energia por frequência descreve, então, a amplitude do espectro deste sinal. No caso de um sinal periódico, a energia é infinita. Define-se, então, a potência do sinal, P , que corresponde à variação desta energia no tempo e é apresentada na Eq. (Arruda e Huallpa, 2008).

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (5.7)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (5.8)$$

Utilizando a relação entre os sinais no domínio do tempo e da frequência, dada pela Eq. 5.4, pode-se obter a relação de que a potência média do sinal periódico é igual à soma das

potências médias da suas componentes de Fourier (Eq. 5.9). Esta relação é chamada de Teorema de Parseval.

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(f_k)|^2 \quad (5.9)$$

Assim, o espectro de um sinal periódico é o Espectro de Potência (*Power Spectrum*, PS), que pode ser obtido através dos coeficientes da FT. Este uso implica em tratar o sinal adquirido como um único período de um sinal periódico (Arruda e Huallpa, 2008).

Para o caso de sinais aleatórios estacionários, ou seja, sinais que não podem ser descritos satisfatoriamente por funções matemáticas, mas que cujas propriedades estatísticas não variam no tempo, a sua distribuição de potência ao longo da frequência é chamada de Densidade Espectral de Potência (*Power Spectral Density*, PSD). Sua amplitude pode ser calculada fazendo a média dos valores absolutos dos coeficientes da TF ao quadrado e dividindo pela resolução em frequência do sinal, conforme explicam Arruda e Huallpa (2008).

5.3 Transformada de Hilbert

Neste caso, a transformação ocorre no mesmo domínio, ou seja, a transformada de Hilbert (TH) de um sinal no tempo é outra função também definida no tempo. Esta transformada, conforme explica Arruda e Huallpa (2008), relaciona as componentes real e imaginária da TF de um sinal real causal (sinal que é nulo para todo e qualquer $t < 0$). O seu valor absoluto, por sua vez, determina o envelope do sinal original.

Seja $x(t)$ um sinal causal genérico. Ele pode ser descrito como uma soma de um sinal par, $x_p(t)$, com um sinal ímpar, $x_i(t)$. A TF de um sinal par é igual ao seu complexo conjugado, de forma que a sua parte imaginária é nula. De forma análoga, a TF de um sinal ímpar é igual ao negativo do seu complexo conjugado, o que leva, então, a uma parte real nula. Por consequência, a TF pode ser descrita em termos das componentes par e ímpar do sinal causal (Arruda e Huallpa, 2008):

$$\begin{aligned} X(f) &= X_{Re}(f) + iX_{Im}(f), \\ X_{Re}(f) &= \tilde{f}\{x_p(t)\} = \tilde{f}\{x_i(t)sgn(t)\}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que \tilde{f} denota a integral de Fourier e $sgn(t)$ denota a função sinal.

Pelo teorema da convolução, tem-se:

$$X_{Re}(f) = \tilde{f}\{x_p(t)\} = \tilde{f}\{x_i(t)\} \otimes \tilde{f}\{sgn(t)\} = iX_{Im}(f) \otimes \frac{1}{i\pi f} = X_{Im}(f) \otimes \frac{1}{\pi f}. \quad (5.11)$$

em que \otimes indica convolução.

A TH é definida, então, como a convolução do sinal original no tempo $x(t)$ e $1/\pi t$:

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{t - \tau} d\tau = x(t) \otimes \left(\frac{1}{\pi t} \right). \quad (5.12)$$

Aplicando-se a TF à Eq. 5.12, pode-se obter a TH a partir da TF inversa:

$$H\{x(t)\} = \tilde{f}^{-1} \left\{ e^{-i\pi/2} \tilde{f}\{x_p(t)\} sgn(f) \right\}. \quad (5.13)$$

5.4 Decomposição de modo empírico

Este método foi proposto por Huang *et al.* (1998) e tem as vantagens de ser simples e de não assumir nada a respeito do sinal, podendo ser utilizado para vários tipos deles, incluindo não estacionários e não lineares (Rato *et al.*, 2008). Consiste em decompor o sinal temporal genérico $x(t)$ em um número finito i de funções, chamadas de "funções de modo intrínseco" (*Intrinsic mode functions*, IMFs) e um resíduo r :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N IMF_i(t) + r_N(t) \quad (5.14)$$

Tais funções são definidas de acordo com duas premissas:

- O número total de mínimos e máximos locais e o número de cruzamentos em zero são iguais ou diferem em no máximo um.
- O valor médio dos envelopes superior e inferior, determinados a partir dos máximos e mínimos, é zero.

A obtenção das IMFs é dada por um processo iterativo de "peneiramento", que consiste em (Rato *et al.*, 2008):

- Encontrar os máximos M_j , $j = 1, 2, \dots$ e mínimos m_k , $k = 1, 2, \dots$ locais no sinal temporal $x(t)$;
- A partir de interpolação cúbica destes pontos, obter os envelopes superior $M(t) = f_M(M_j, t)$ e inferior $m(t) = f_m(m_k, t)$ de $x(t)$;
- Calcular a média dos envelopes $med(t) = [M(t) + m(t)]/2$;
- Subtrair esta média do sinal e obter um sinal modificado $h(t) = x(t) - med(t)$;
- Retornar ao primeiro passo. Parar se h_l apresentar pouca alteração em relação ao h_{l-1} anterior;
- Obtida a IMF, subtraí-la do sinal original. Retornar ao primeiro passo caso o sinal resultante deste passo tenha mais de um extremo.

Mais especificamente, o critério de parada do processo de peneiramento é do tipo Cauchy. Desta forma, o processo para se o erro quadrático normalizado (SD), dado pela Eq. 5.15, for menor que o valor presente. Neste caso, conforme explica Chaudhari *et al.* (2016), o cri-

tério está definido para todo o domínio do sinal original, de forma que o valor de SD pode ser muito influenciado por valores pequenos de h_l em determinados locais. Assim, para que o critério seja mais estável e suave, pode-se separar a aplicá-lo ao numerador e ao denominador separadamente, de forma que o critério fica mais local e menos global.

$$SD = \sum_{t=0}^T \frac{[h_{l=1}(t) - h_l(t)]^2}{h_{l=1}^2(t)} \quad (5.15)$$

Conforme análise desenvolvida por Rato *et al.* (2008), este método é uma decomposição em um conjunto de sinais modulados por amplitude e frequência (AM/FM). Além disso, como os envelopes não podem variar tão rapidamente quanto o sinal original, pode-se dizer que o processo de peneiramento remove os componentes de baixa frequência. Desta forma, as IMFs aparecem com uma ordenação das mais altas para as mais baixas frequências.

Para exemplificar este tipo de decomposição, apresenta-se a Figura 5.2. Na primeira parte da figura, é apresentado o sinal original e, em sequência, suas funções de modo intrínseco (IMFs). Nota-se que a primeira função é a de mais alta frequência, bastante próxima ao sinal original. As funções seguintes apresentam frequências mais baixas. A soma das funções de modo gera o sinal original.

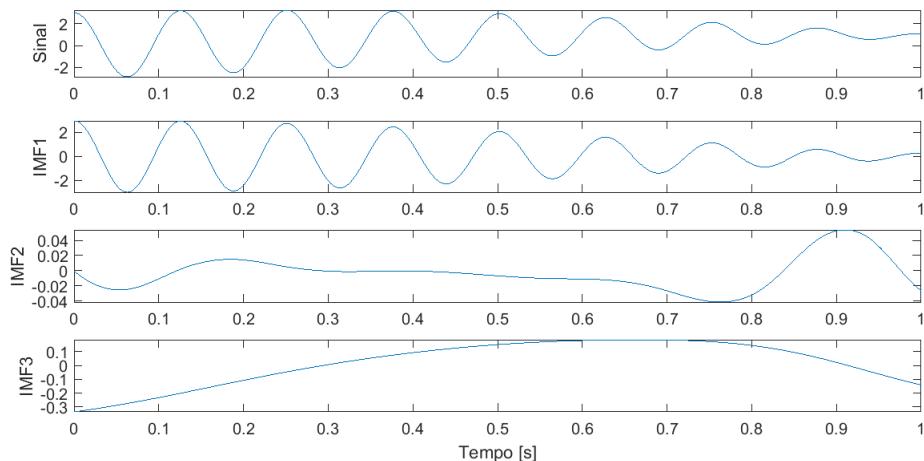


Figura 5.2: Exemplo de decomposição de modo empírico de sinal periódico

5.5 Decomposição de modo variacional

Com o objetivo de obter as funções de modo de uma forma mais robusta em relação a ruído e amostragem, Dragomiretskiy e Zosso (2014) propuseram o método de decomposição de modo variacional (*Variational Mode Decomposition*, VMD), totalmente não recursivo. O modelo busca, então, por um conjunto de modos e suas respectivas frequências centrais, de forma que tais modos são extraídos simultaneamente.

Este modelo lida com a presença de ruído no sinal de entrada de maneira otimizada,

visto que está relacionado ao filtro de Wiener (Dragomiretskiy e Zosso, 2014). Para entender a respeito dele, considera-se um sinal $x_0(t)$ que é composto por um sinal original $x(t)$ e um ruído Gaussiano com média zero η :

$$x_0 = x + \eta \quad (5.16)$$

Para recuperar o sinal x , utiliza-se a seguinte regularização (Tikhonov, 1963 apud Dragomiretskiy e Zosso, 2014):

$$\min_f \{ \|f - f_0\|_2^2 + \alpha_{wf} \|\partial_t f\|_2^2\}, \quad (5.17)$$

As equações de Euler-Lagrange podem ser obtidas e resolvidas no domínio de Fourier:

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{x}_0}{1 + \alpha_{wf}\omega^2} \quad (5.18)$$

em que \tilde{x} indica TF do sinal no tempo $x(t)$. Desta forma, o sinal recuperado x é uma seleção passa-baixa de banda estreita do sinal x_0 em torno de $\omega = 0$. Conforme explicado por Dragomiretskiy e Zosso (2014), a solução corresponde à convolução com um filtro de Wiener, em que α_{wf} é a variância do ruído branco.

A TH pode ser utilizada para construir um sinal analítico (complexo) a partir de um sinal puramente real, conforme Eq. 5.19 (Gabor, 1946). Este sinal analítico tem um fasor que descreve a rotação do sinal complexo, com fase $\phi(t)$ e amplitude $A(t)$, que é o envelope real (Dragomiretskiy e Zosso, 2014). Além disto, o sinal analítico possui apenas frequências não negativas.

$$x_a(t) = x(t) + iH\{x(t)\} = A(t)e^{i\phi(t)} \quad (5.19)$$

A combinação não-linear de dois sinais, de forma a introduzir termos de frequência cruzada na saída, também é importante para o entendimento do VMD, conforme explicado em Dragomiretskiy e Zosso (2014). Neste caso, dois sinais analíticos sofrem o seguinte processo:

$$e^{i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} = e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}, \quad (5.20)$$

de forma que o sinal fica com uma única frequência. No domínio da frequência, esse processo é dado por:

$$\tilde{f}_A(\omega) \otimes \delta(\omega + \omega_0) = \tilde{f}_A(\omega + \omega_0), \quad (5.21)$$

em que δ é a distribuição de Dirac.

Assim, o VMD baseia-se na decomposição do sinal de entrada, $x(t)$, em um número de modos u_k , compactos em torno de uma frequência central, ω_k , a partir destes conceitos previamente explicados. Para obter a largura de banda de cada modo, Dragomiretskiy e Zosso (2014)

propuseram os seguintes passos:

- para cada modo u_k , obter o sinal analítico associado através da TH, de forma a obter o espectro de frequência unilateral;
- mudar o espectro de frequência de cada modo para uma banda de base, combinando com uma exponencial ajustada à respectiva frequência central estimada;
- a largura de banda é então estimada pela norma quadrática do gradiente.

O problema resultante, é, então:

$$\min_{\{u_k\}, \{\omega_k\}} \left\{ \sum_k \left\| \partial_t \left[(\delta(t) + \frac{i}{\pi t}) \otimes u_k(t) \right] e^{-i\omega_k t} \right\|_2^2 \right\}, \quad (5.22)$$

sujeito a que a soma dos modos u_k seja igual ao sinal original $x(t)$. Dragomiretskiy e Zosso (2014) sugerem que o problema da restrição seja resolvido através de multiplicadores de Lagrange (Bertsekas, 1976), λ , conforme Eq. 5.23, de forma que o problema de minimização é resolvido como um ponto de sela do Lagrangeano L numa sequência de sub-otimizações iterativas.

$$L(\{u_k\}, \{\omega_k\}, \lambda) := \alpha \sum_k \left\| \partial_t \left[(\delta(t) + \frac{i}{\pi t}) \otimes u_k(t) \right] e^{-i\omega_k t} \right\|_2^2 + \\ \left\| x(t) - \sum_k u_k(t) \right\|_2^2 + \left\langle \lambda(t), x(t) - \sum_k u_k(t) \right\rangle \quad (5.23)$$

Este tipo de decomposição, aplicada ao mesmo sinal do exemplo da Figura 5.2, é apresentado na Figura 5.3. Cada função é obtida com uma frequência central. O número de funções da decomposição bem como as frequências centrais são diferentes das obtidas pelo método EMD.

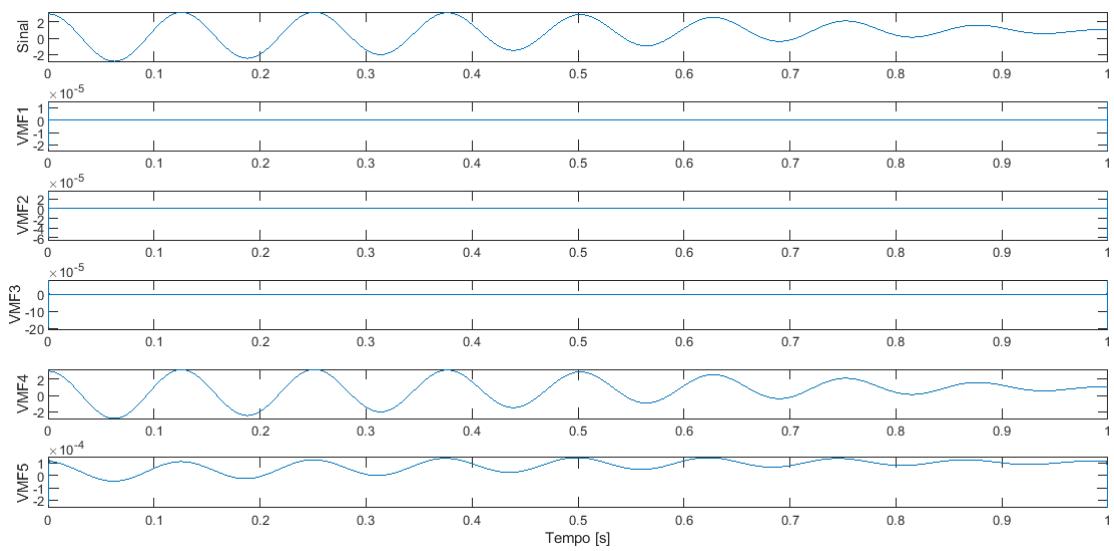


Figura 5.3: Exemplo de decomposição de modo variacional de sinal periódico

6 Resultados de Simulações

Este capítulo apresenta resultados de simulações do modelo de elementos finitos de par engrenado, escolhido por representar mais detalhes de um sistema real. O objetivo deste capítulo é apresentar as alterações que a presença de uma trinca em um dente da engrenagem causa na resposta dinâmica do sistema. O modelo foi validado com a referência Hu *et al.* (2016).

O sistema considerado nesta modelagem consiste em dois eixos, cada um apoiado por dois mancais e com um sistema de transmissão de movimento por engrenagens. Como mostra a Figura 6.1, o pinhão, de 36 dentes, está montado no eixo 1, que é um eixo longo, no qual também está montado um disco. Este eixo é apoiado pelos denominados mancais 1 e 2. No eixo 2, está montada a engrenagem, de 56 dentes. Este eixo é curto e está apoiado sobre os mancais 3 e 4. O sistema de referências adotado para este sistema é o mesmo indicado na Figura 4.2.

A Figura 6.1 também apresenta a discretização do sistema utilizada na modelagem pelo método de elementos finitos: os pontos pretos indicam os nós escolhidos. Demais propriedades do sistema, necessárias para a simulação, são apresentadas na Tabela 6.1.

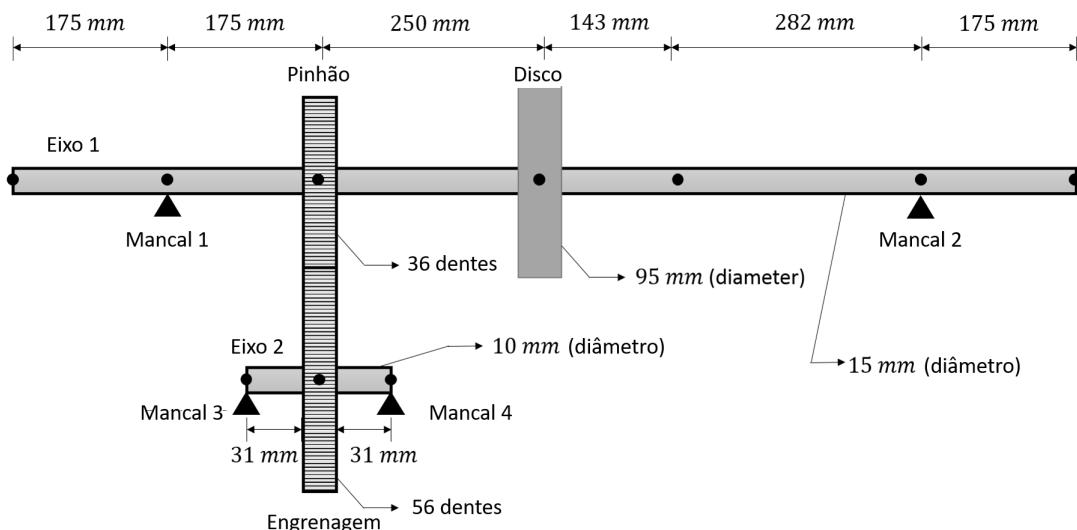


Figura 6.1: Sistema considerado nas simulações pelo modelo de elementos finitos

A Figura 6.2 mostra o Diagrama de Campbell do sistema considerado na modelagem de elementos finitos, para frequências naturais até 3000 Hz, na parte (a) e até 500 Hz na parte (b), em função da velocidade de rotação do pinhão. As linhas pretas indicam as frequências naturais do sistema, a linha vermelha indica a velocidade de rotação do pinhão, a linha azul indica a velocidade de rotação da engrenagem e a linha verde indica a frequência de engrenamento. Ressalta-se que para gerar o Diagrama de Campbell deste sistema foi utilizado o valor médio da rigidez do engrenamento.

A Tabela 6.2 apresenta os valores destas frequências naturais até 3000 Hz sem considerar o efeito giroscópico (em $\Omega_p = 0$).

A equação de movimento do sistema (Eq. 4.37) foi resolvida pelo método de Newmark

Tabela 6.1: Parâmetros do sistema modelado pelo método de elementos finitos

Parâmetro	Valor
Coeficiente de amortecimento proporcional do eixo (κ)	3.10^{-5}
Coeficiente de amortecimento do engrenamento (ξ_m)	3.10^{-2}
Módulo de Young dos eixos, engrenagens e disco	200 GPa
Módulo de cisalhamento dos eixos, engrenagens e disco	$0,8 \text{ GPa}$
Densidade dos eixos, engrenagens e disco	7800 kg/m^3
Coeficientes de rigidez (vertical e horizontal) dos mancais 1 e 2	1.10^8 N/m
Coeficientes de amortecimento (vertical e horizontal) dos mancais 1, 2, 3 e 4	150 Ns/m
Coeficientes de rigidez (vertical e horizontal) dos mancais 3 e 4	1.10^7 N/m
Ângulo de pressão das engrenagens	20°
Módulo das engrenagens	2 mm
Largura de face do dente	20 mm
Potência no pinhão	745.7 W

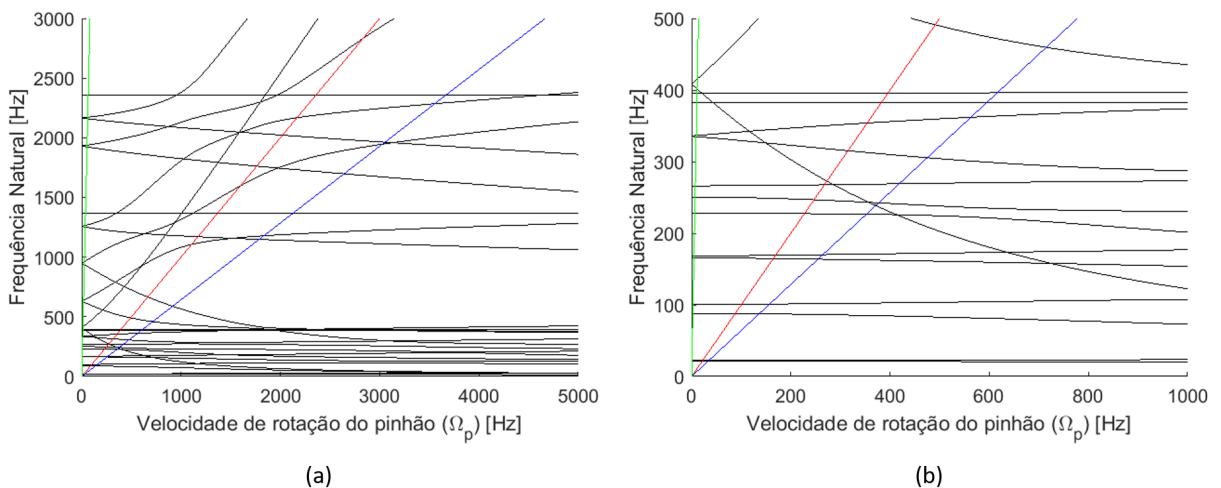


Figura 6.2: Diagrama de Campbell do sistema (a) até 3000 Hz e (b) até 500 Hz. Preto: Frequências naturais (f_n); Verde: Frequência de engrenamento (f_{mesh}); Azul: Velocidade de rotação da engrenagem (Ω_g); Vermelho: Velocidade de rotação do pinhão (Ω_p)

Tabela 6.2: Frequências naturais até 3000 Hz em $\Omega_p = 0\text{Hz}$

Frequência natural número	Valor [Hz]	Frequência natural número	Valor [Hz]	Frequência natural número	Valor [Hz]
f_{n1}	21,26	f_{n10}	335,22	f_{n19}	949,83
f_{n2}	22,33	f_{n11}	336,16	f_{n20}	1258,54
f_{n3}	88,00	f_{n12}	382,80	f_{n21}	1258,69
f_{n4}	100,73	f_{n13}	396,09	f_{n22}	1363,91
f_{n5}	165,54	f_{n14}	408,17	f_{n23}	1927,06
f_{n6}	168,37	f_{n15}	408,17	f_{n24}	1932,99
f_{n7}	227,77	f_{n16}	630,90	f_{n25}	2164,80
f_{n8}	250,45	f_{n17}	633,24	f_{n26}	2164,94
f_{n9}	266,20	f_{n18}	949,82	f_{n27}	2359,05

(ver detalhes no Apêndice C). Os parâmetros foram $\gamma_N = 0,5$ e $\beta_N = 0,25$ (regra do ponto médio), com intervalo de tempo (Δt) de 10^{-5} s.

Muitas vezes, na indústria, o ponto de instalação do sensor acessível na máquina é o mancal. Por isto, os resultados deste modelo serão apresentados nestes pontos. Considerou-se, então, tanto a resposta de deslocamento quanto de aceleração para três comprimentos de trinca: pequena, de $0,5\text{mm}$, média, de $1,6\text{mm}$ e grande, de 3mm . Todas foram simuladas com um ângulo de propagação v de 45° e posição inicial na raiz do dente (ponto D da Figura 3.4).

Para que as respostas do sistema com trinca possam ser entendidas e avaliadas, é também apresentada a resposta do sistema sem a presença de trinca, na Figura 6.3.

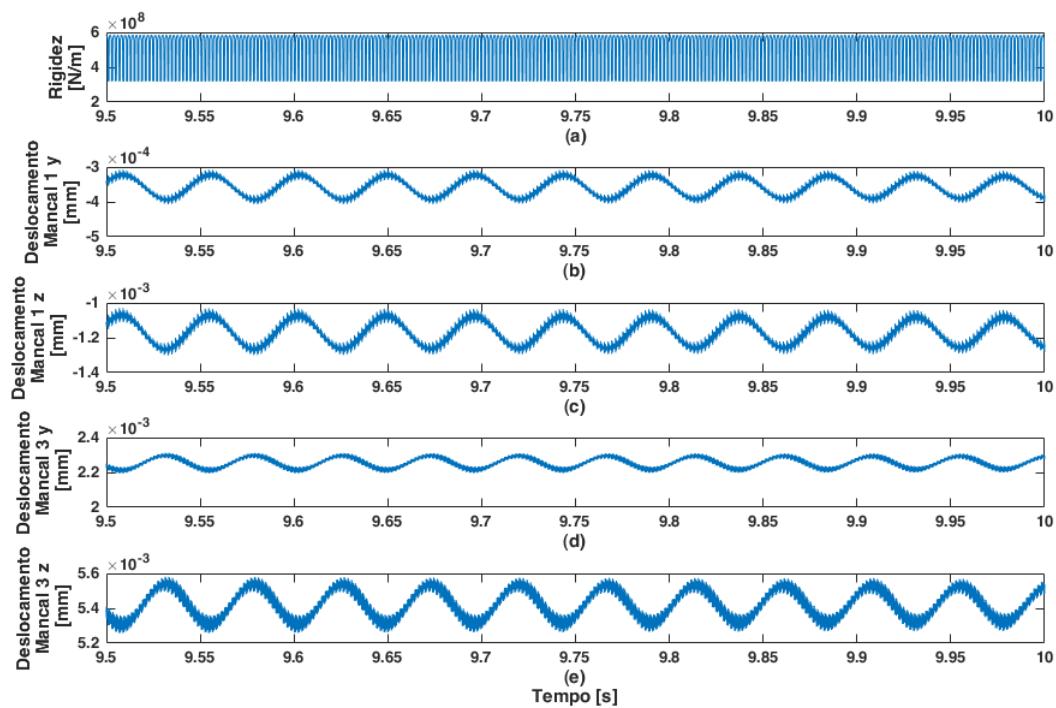


Figura 6.3: Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema sem trinca

A Figura 6.4 mostra a rigidez do engrenamento ao longo do tempo (a) e os deslocamentos do eixo 1 no nó do mancal 1 na horizontal (b) e na vertical (c) e do eixo 2 no nó do mancal 3, também na horizontal (d) e na vertical (e). Nesta figura, é possível visualizar uma discreta queda nos valores mínimo e máximo da rigidez quando o engrenamento ocorre no dente trincado. Ao comparar os resultados de deslocamento, o efeito provocado pela trinca é de difícil visualização.

Os mesmos resultados são apresentados nas Figuras 6.5 e 6.6 para uma trinca de $1,6\text{ mm}$ e $3,0\text{ mm}$ de comprimento. No caso da trinca média ($1,6\text{ mm}$), a queda na rigidez do engrenamento (Figura 6.5 (a)) também é sutil, mas para a trinca grande ($3,0\text{ mm}$), a queda na rigidez do engrenamento ao passar pela trinca (Figura 6.6 (a)) já é mais acentuada. Novamente, a percepção das alterações nos deslocamentos causadas pela trinca (Figuras 6.5 e 6.6, (b) (c) (d) e (e)) dificilmente são percebidas.

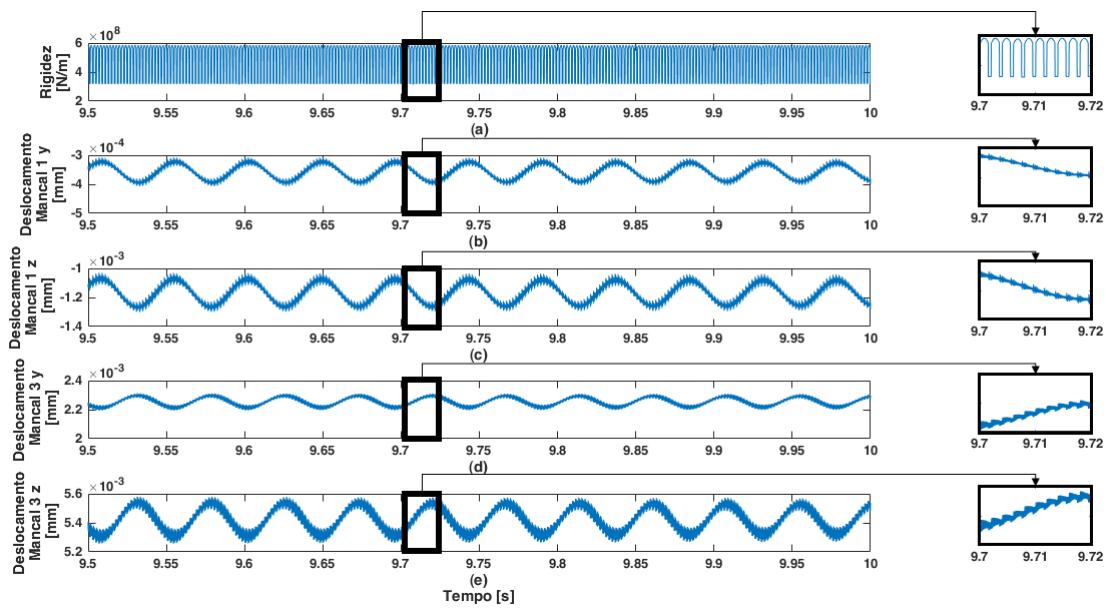


Figura 6.4: Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm

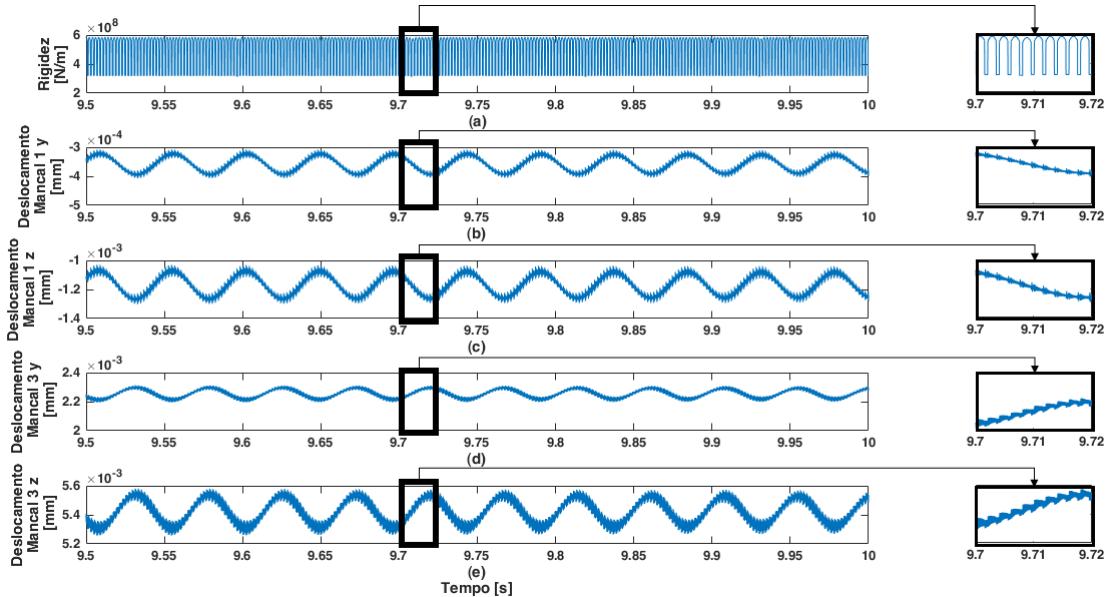


Figura 6.5: Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,6 mm

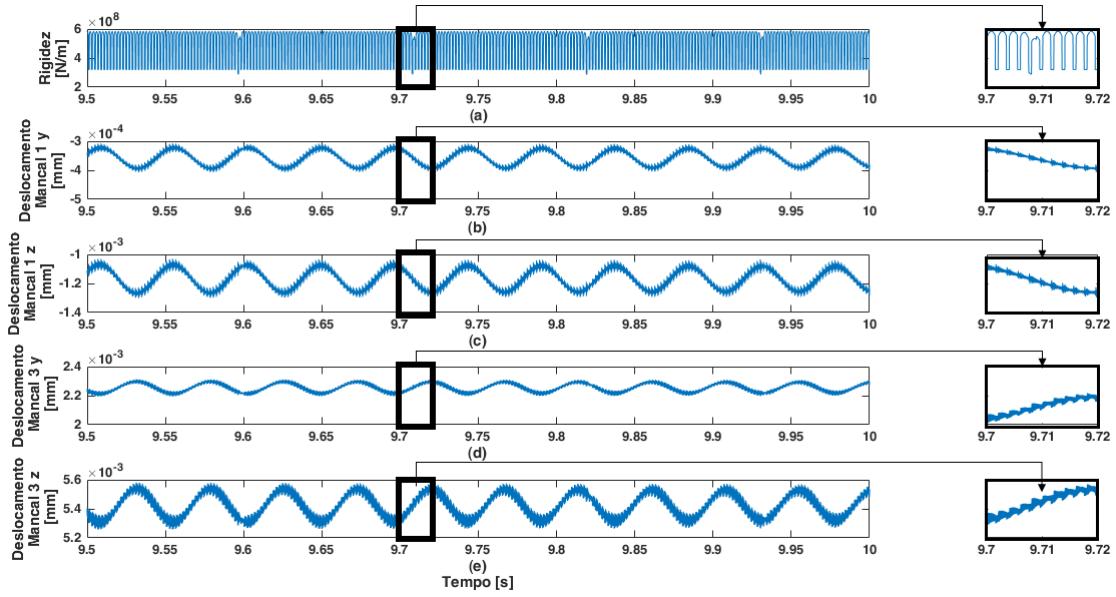


Figura 6.6: Rigidez do engrenamento e deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm

Resultados análogos mostrando as respostas de aceleração são apresentados nas Figuras 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10. Os efeitos da trinca pequena (0,5 mm) e média (1,6 mm) no padrão da resposta são bastante sutis, mas podem ser percebidos com uma análise cuidadosa, como mostrado nos destaques nas figuras. Na primeira passagem pela trinca após os 9,7 segundos, é possível notar um aumento da amplitude diferente do resto do padrão observado (ver Figuras 6.8 e 6.9), por exemplo. No caso da trinca grande (3,0 mm), os efeitos são bem mais evidentes. Além deste aumento no padrão da resposta verificado na passagem pela trinca no instante próximo a 9,7 segundos, também são claras quedas na amplitude nos outros instantes em que há passagem pela trinca (ver destaque da Figura 6.10).

A Figura 6.10 evidencia, então, o que foi verificado em diversos trabalhos a respeito do efeito de trincas em engrenagens (Wan *et al.*, 2014 e Hu *et al.*, 2016, por exemplo): a queda brusca na rigidez gera no sistema uma resposta ao impulso, gerando um regime transitório.

Como visto a partir destes resultados e constatado no Capítulo 2, a análise do sinal no tempo para identificar a trinca não é muito eficaz, sendo viável apenas para trincas grandes. Optou-se, então, por analisar as respostas também no domínio da frequência, aplicando uma transformada discreta de Fourier (*discrete Fourier transform*, DFT), ao sinal no tempo. O tempo total simulado foi de 10 segundos e, para as análises apresentadas neste capítulo, considerou-se apenas a resposta a partir de 5 segundos, em que o sistema já apresentava-se em regime permanente. Com isto, a resposta tem um total de 500.000 pontos e uma taxa de amostragem de 100.000Hz.

A Figura 6.11 mostra as DFTs dos sinais de deslocamento para os mancais 1 e 3 nas direções vertical e horizontal, para a trinca de 0,5 mm. Nesta figura, pode-se verificar que os sinais mostram picos em múltiplos de aproximadamente 500 Hz, que é a frequência do engrenamento

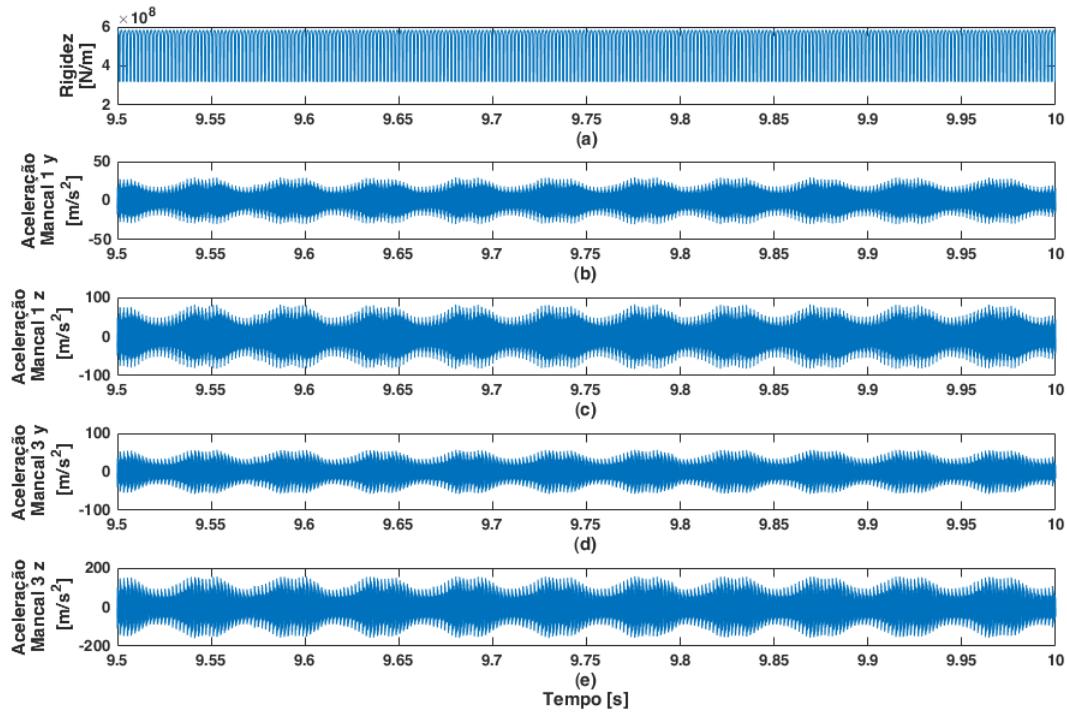


Figura 6.7: Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema sem trinca

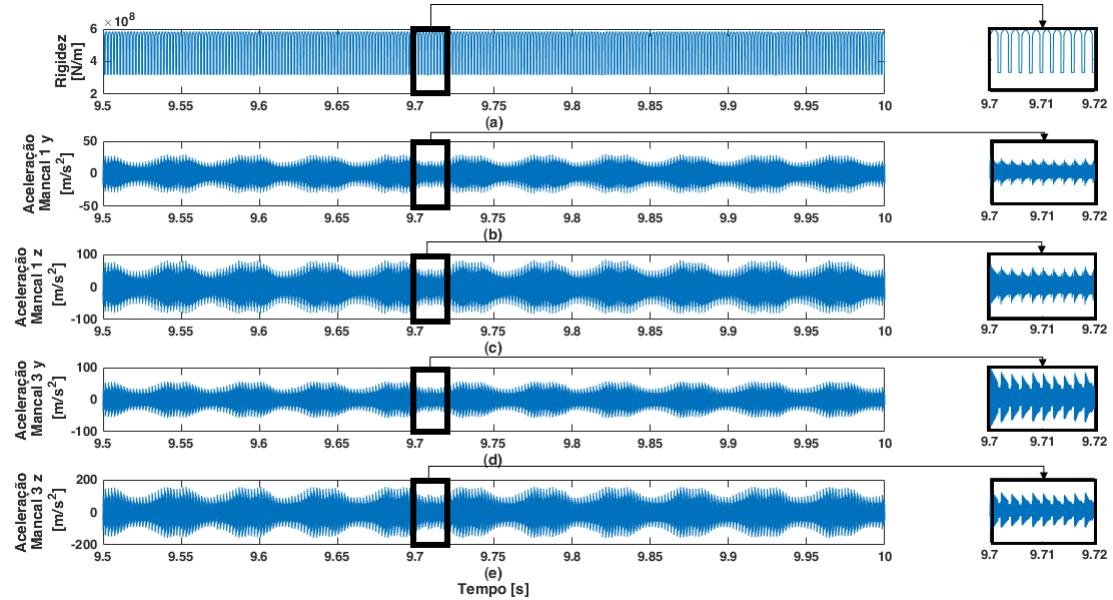


Figura 6.8: Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm

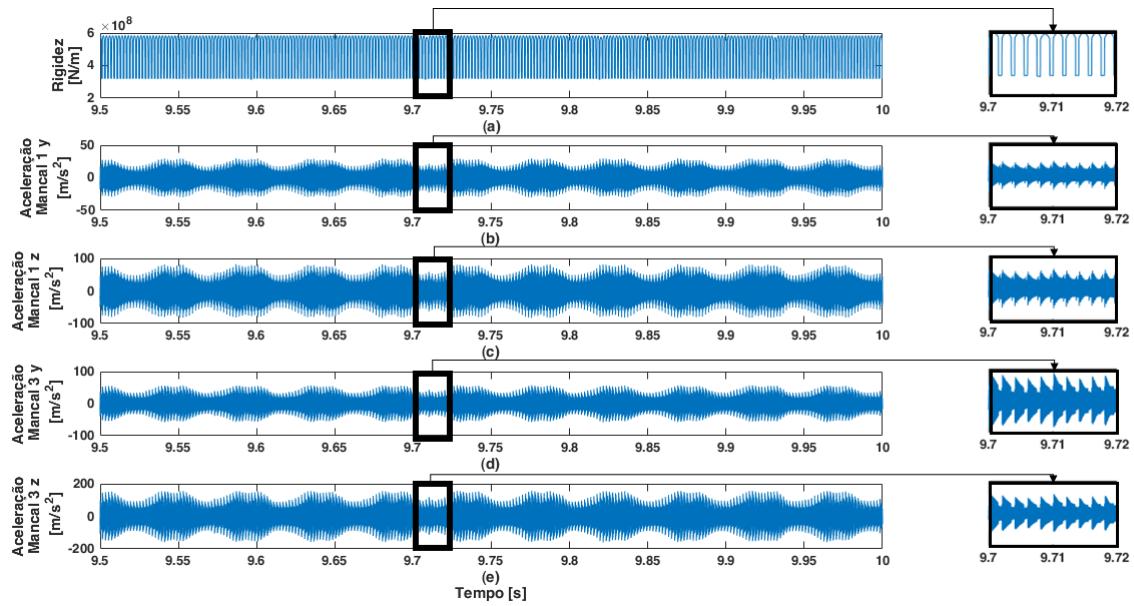


Figura 6.9: Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,5 mm

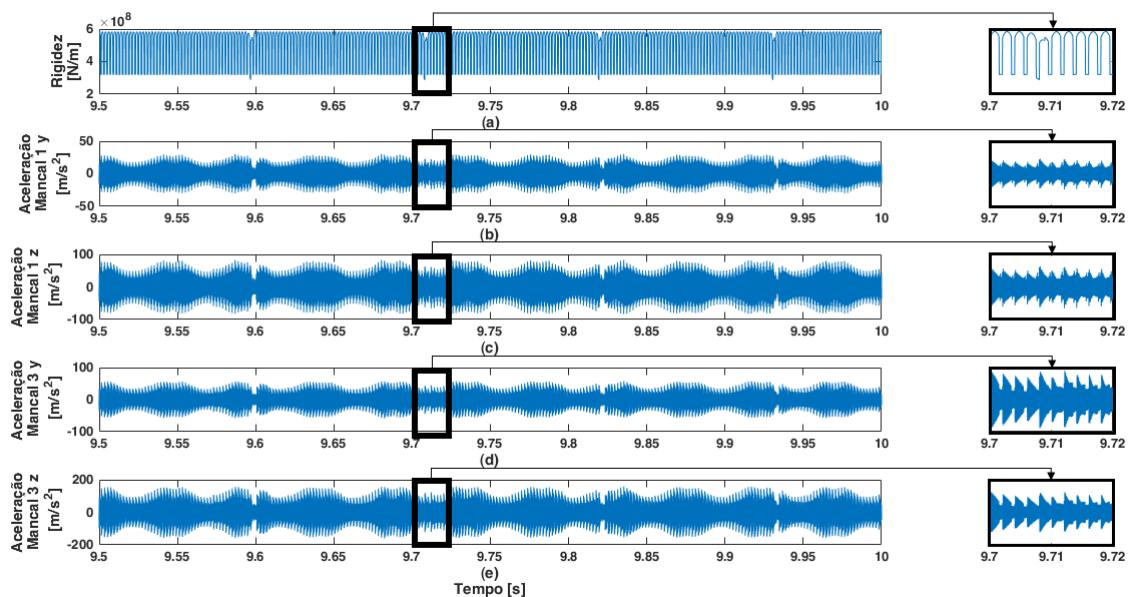


Figura 6.10: Rigidez do engrenamento e acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm

em regime permanente. Os sinais nas direções verticais (z) são os que apresentam maiores amplitudes na maioria das frequências. Entretanto, a ordem de grandeza destes sinais ainda é muito pequena, da ordem de 10^{-7} mm, o que faz com que a medição deste sinal seja inviável. Resultados análogos para as trincas de tamanho 1,6 mm e 3,0 mm são mostrados nas Figuras 6.12 e 6.13.

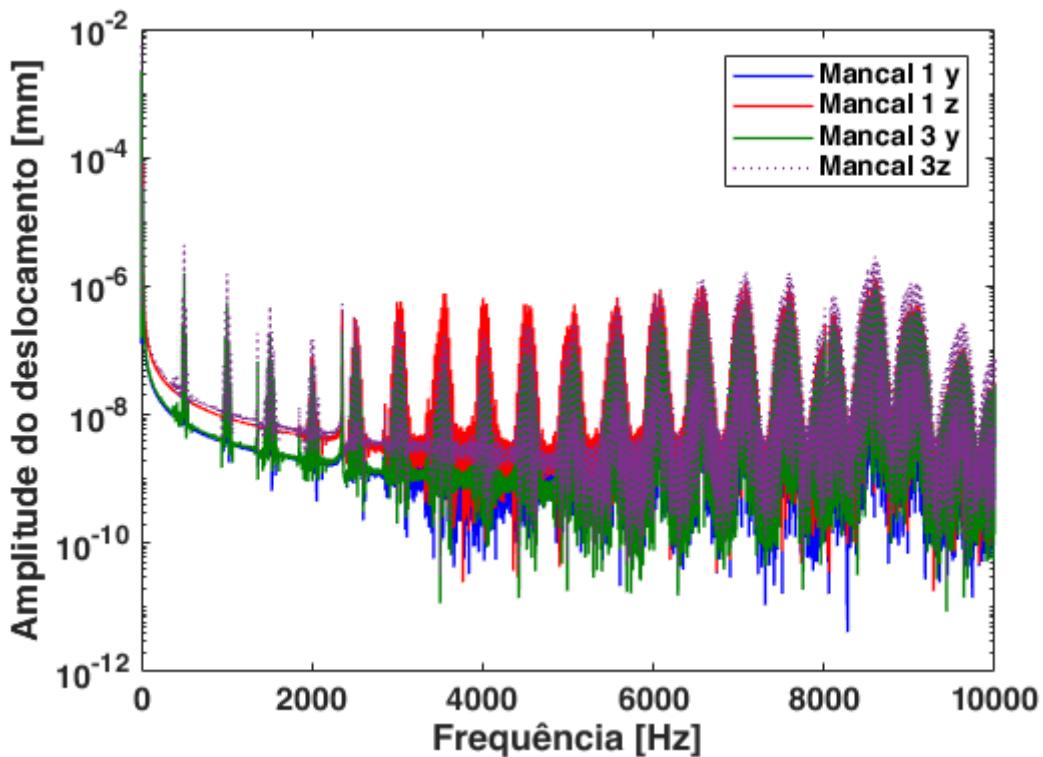


Figura 6.11: Resposta na frequência dos deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm

Outra opção, então, é analisar a resposta de aceleração dos mancais. As Figuras 6.14, 6.15 e 6.16 mostram as DFTs das acelerações dos mancais 1 e 3 nas direções horizontal (y) e vertical (z) para as trincas de 0,5 mm, 1,6 mm e 3,0 mm. Elas apresentam características em comum, que são informações úteis para a escolha do sinal que será analisado. As respostas na direção vertical dos mancais apresentam amplitudes mais altas, quando comparadas às respostas nas direções horizontais. Na direção vertical, o mancal 3 apresenta respostas mais altas em altas frequências, enquanto o mancal 1 apresenta as respostas mais altas em frequências mais baixas. A ordem de grandeza dos picos é alta, de forma que a detecção por um acelerômetro é possível. Por estes motivos, os resultados escolhidos para análise são da aceleração do mancal 3 na direção z .

Como já mencionado, é possível ver nas figuras das respostas no domínio da frequência (Figuras de 6.11 a 6.16) que há um padrão de repetição de picos em múltiplos da frequência de engrenamento. Como já explicado em outros trabalhos a respeito do tema (Wan *et al.*, 2014 e Hu *et al.*, 2015, por exemplo), há de fato este padrão de repetição, causado pelo impacto da variação brusca da rigidez do engrenamento. A Figura 6.17 mostra, além de alguns exemplos de picos

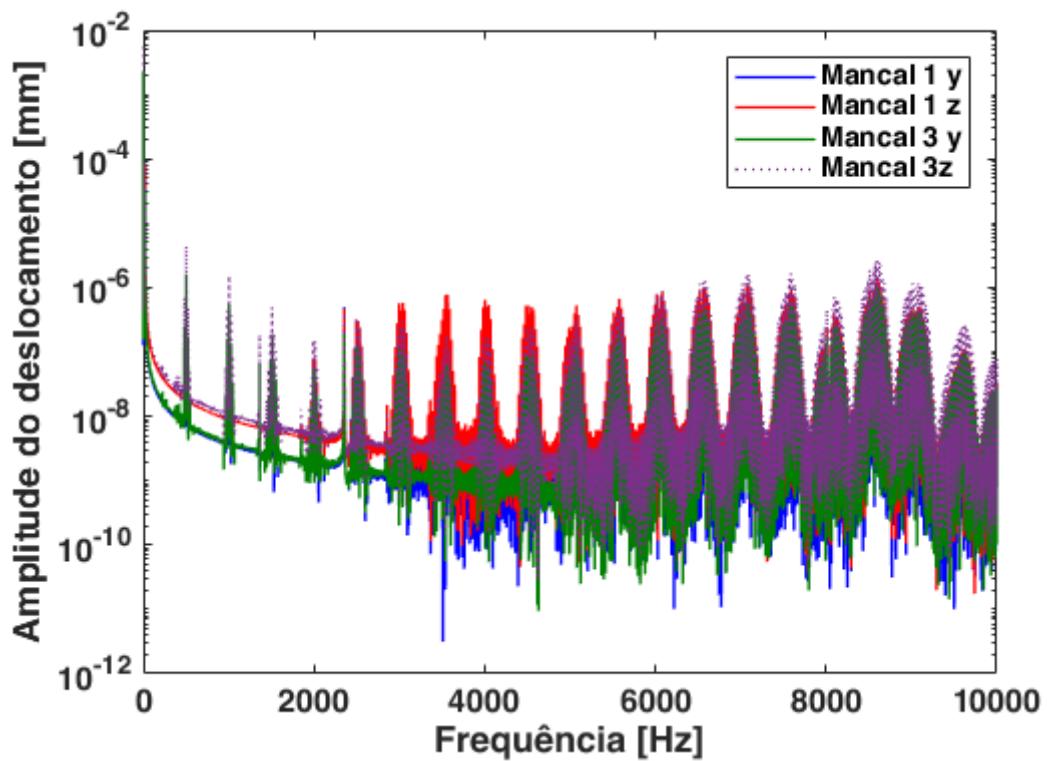


Figura 6.12: Resposta na frequência dos deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,6 mm

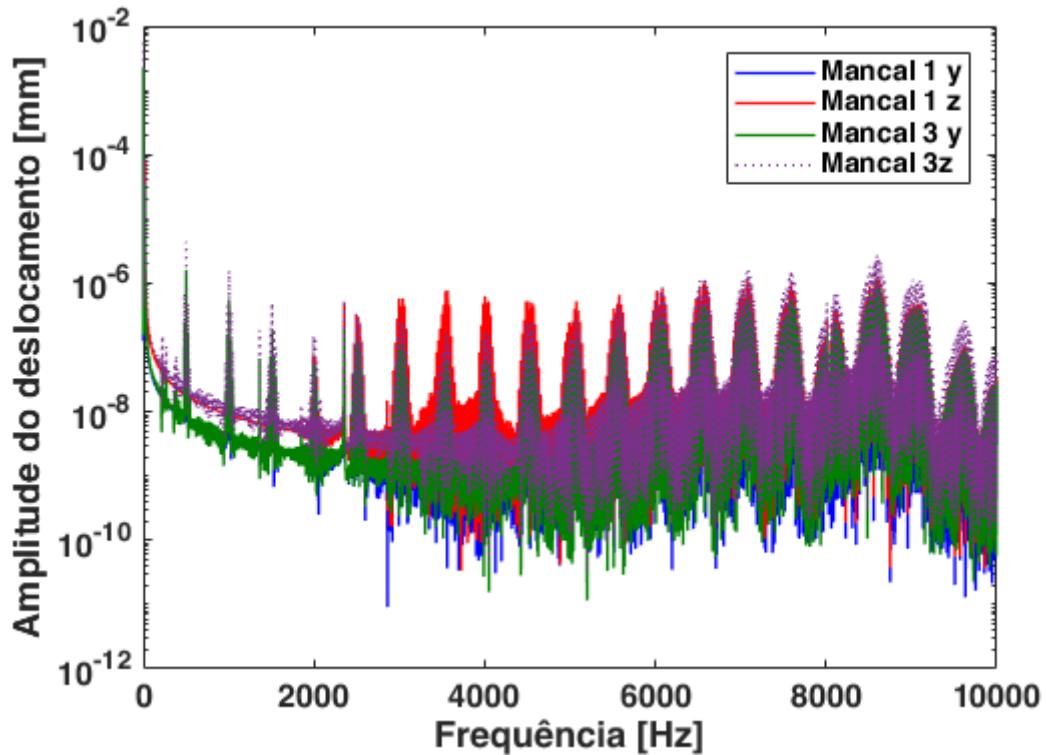


Figura 6.13: Resposta na frequência dos deslocamentos dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm

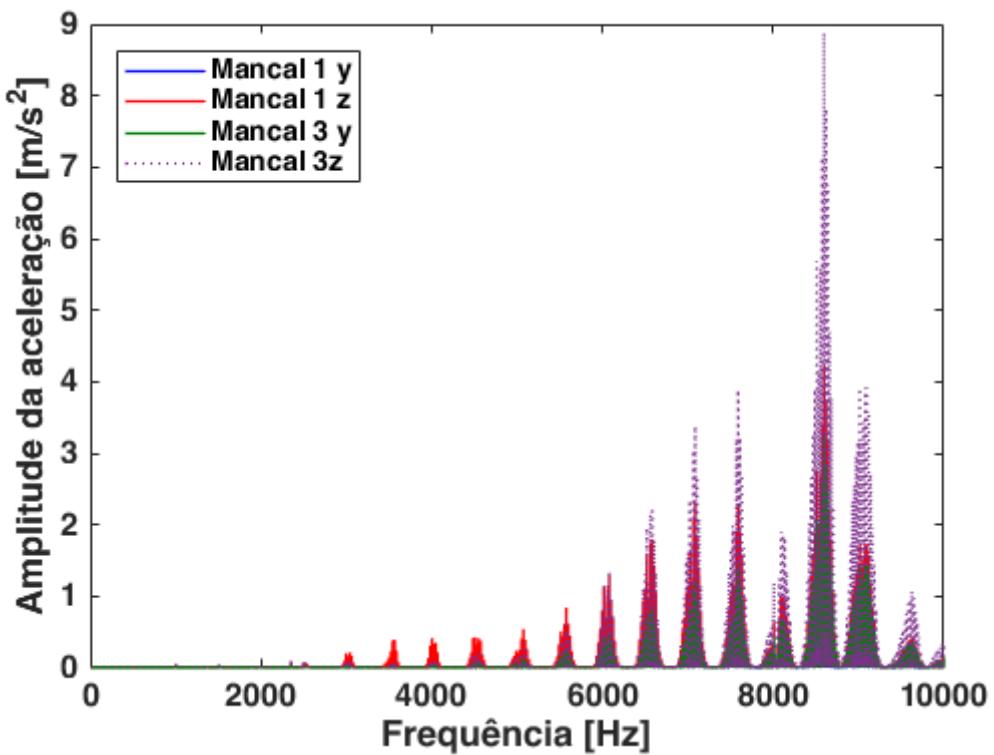


Figura 6.14: Resposta na frequência das acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 0,5 mm

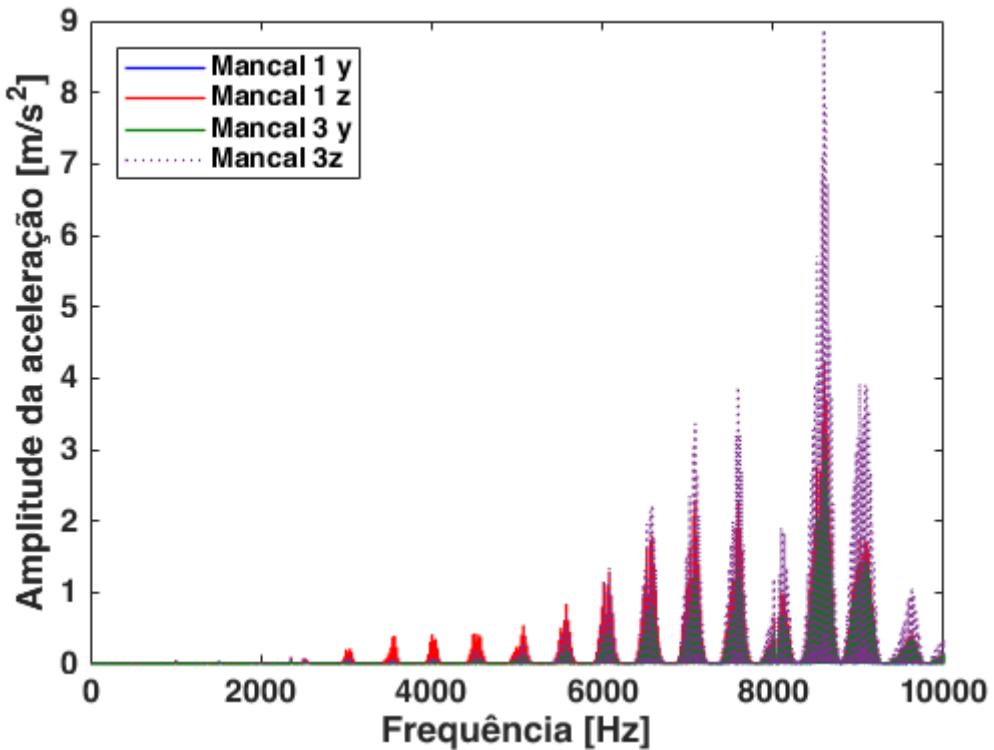


Figura 6.15: Resposta na frequência das acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 1,6 mm

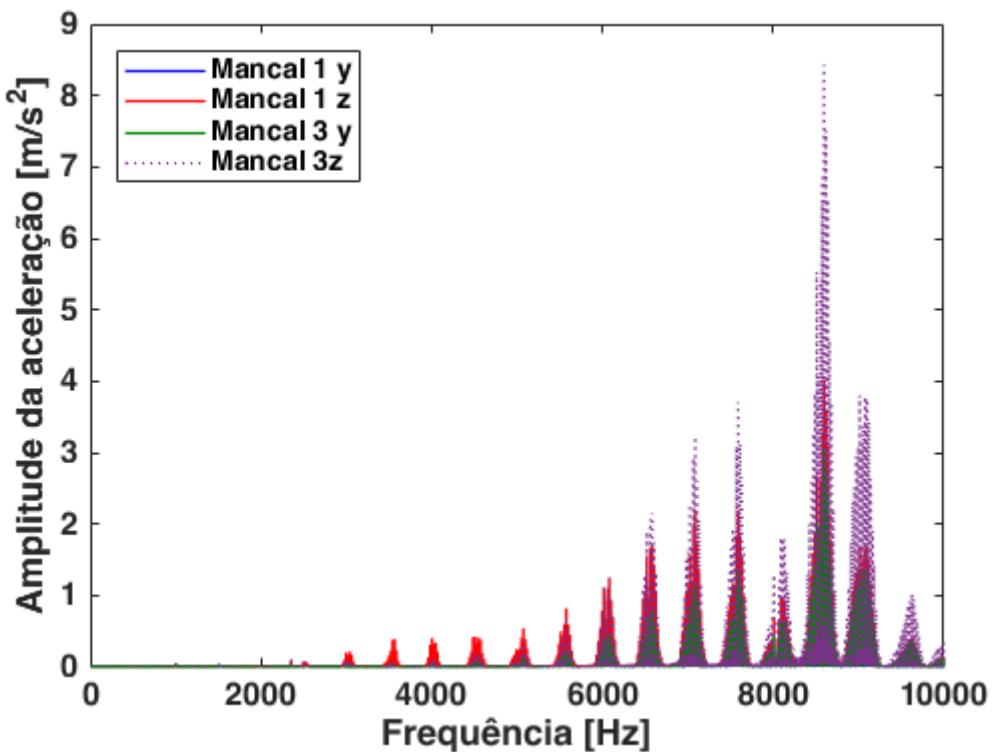


Figura 6.16: Resposta na frequência das acelerações dos mancais 1 e 3 no sistema com trinca de 3,0 mm

em múltiplos da frequência de engrenamento (uma vez, duas vezes e dez vezes) os picos que se formam em frequências que são as combinações lineares com múltiplos da primeira frequência natural ($10f_m - f_{n1}$, $10f_m + f_{n1}$ e $10f_m - 2f_{n1}$). A figura também destaca um pico aparente que foge deste padrão. Trata-se da frequência natural de número 27, apresentada na Tabela 6.2 e que corresponde a um modo de vibrar de torção.

Para melhor compreender, então, os efeitos causados pelos diferentes tamanhos de trinca, apresenta-se na Figura 6.18 a comparação entre as respostas no domínio da frequência para os sistemas sem trinca, com trinca de 0,5mm, de 1,6mm e 3,0mm. Nos detalhes contidos nesta figura, há padrões interessantes que podem ser observados.

O primeiro deles é, que no pico correspondente à frequência natural de número 27, apresentada na Tabela 6.2, a amplitude da aceleração aumenta com o aumento da trinca. Já no pico de maior amplitude, em torno dos 8500Hz, este padrão é inverso, ou seja, a amplitude diminui com o aumento da trinca. O terceiro detalhe mostra que a presença da trinca grande, de 3,0mm, faz com que picos correspondentes a combinações lineares de frequência tenham as suas amplitudes consideravelmente aumentadas. Todas estas características também foram verificadas no trabalho de Hu *et al.*, 2016 para a resposta de deslocamento no engrenamento.

Apesar da DFT ter apresentado diferenças mais relevantes na presença dos diferentes tamanhos de trinca, a diferença causada pela trinca pequena em relação ao sistema saudável é pequena. Conforme visto no Capítulo 2, outros tratamentos de sinais podem ser úteis para

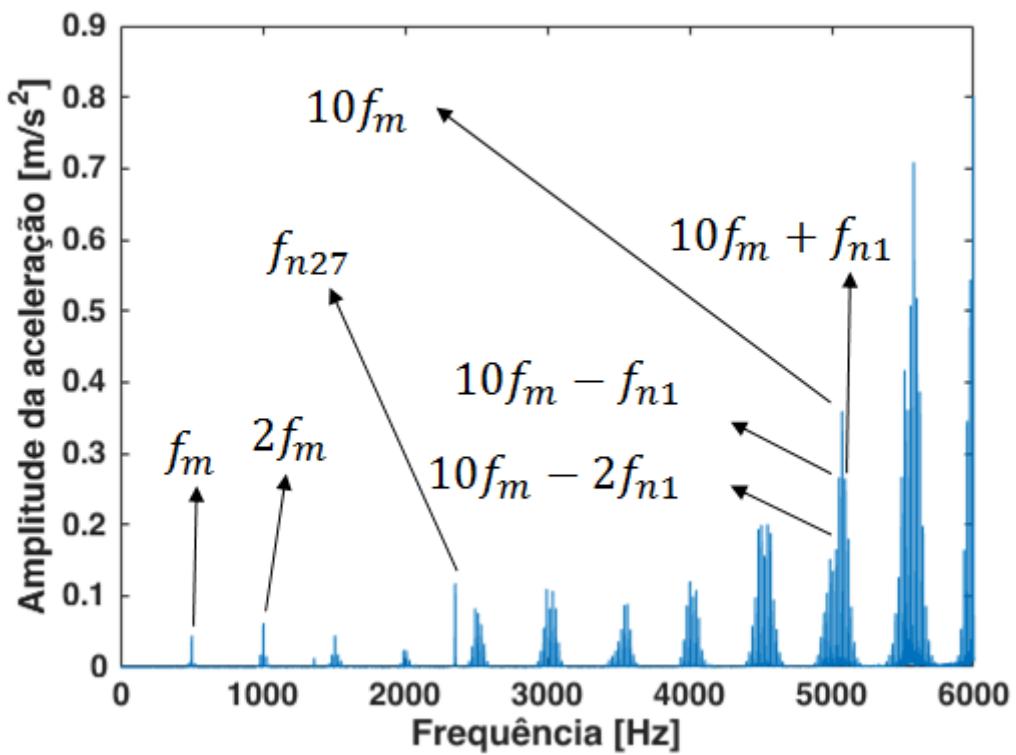


Figura 6.17: Padrão de picos da DFT de um par engrenado: múltiplos da frequência de engrenamento e combinações lineares com a primeira frequência natural. Destaque para pico de frequência natural de torção

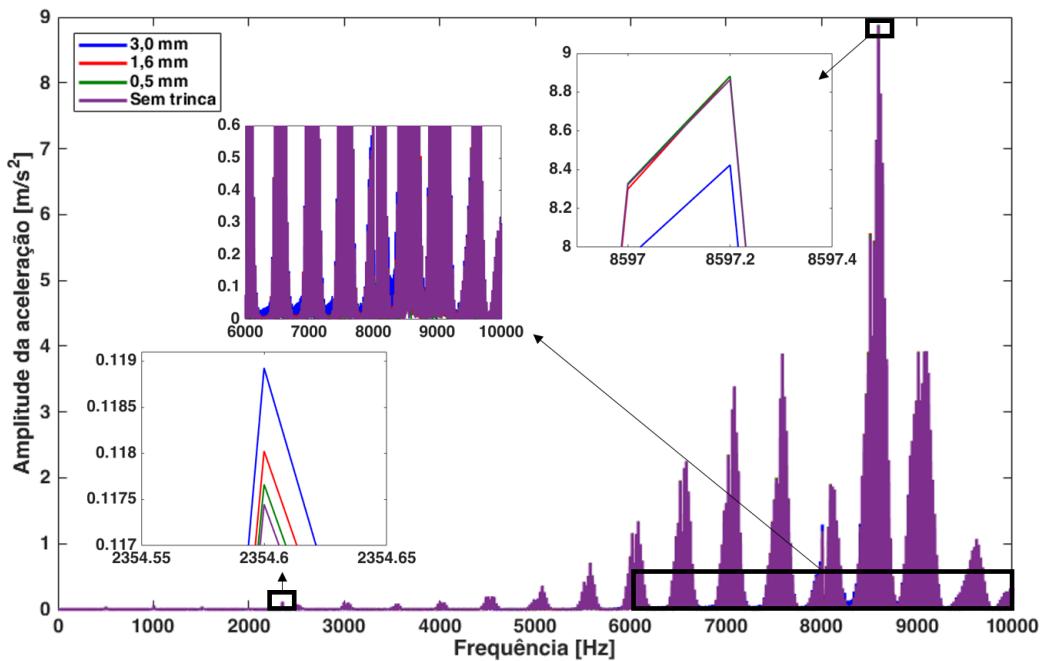


Figura 6.18: Comparação das DFTs das respostas do sistema saudável e com as trincas de 0,5 mm, 1,6 mm e 3,0 mm.

avaliar a presença de trinca e estimar a sua severidade. Para isto, mais comprimentos de trinca foram testados. Os resultados a seguir avaliam a influência no sinal de trincas de $250\mu m$, $500\mu m$, $750\mu m$, $1mm$, $1,5mm$, $2,5mm$ e $3mm$.

O primeiro método escolhido para avaliar o sinal foi o espectro de potência, uma vez que identificou-se que a presença de trinca aumenta a amplitude dos picos laterais aos picos de múltiplos da frequência de engrenamento. Trata-se, então, de um meio mais fácil de interpretar visualmente estes componentes do sinal em frequência (Dempster, 1989).

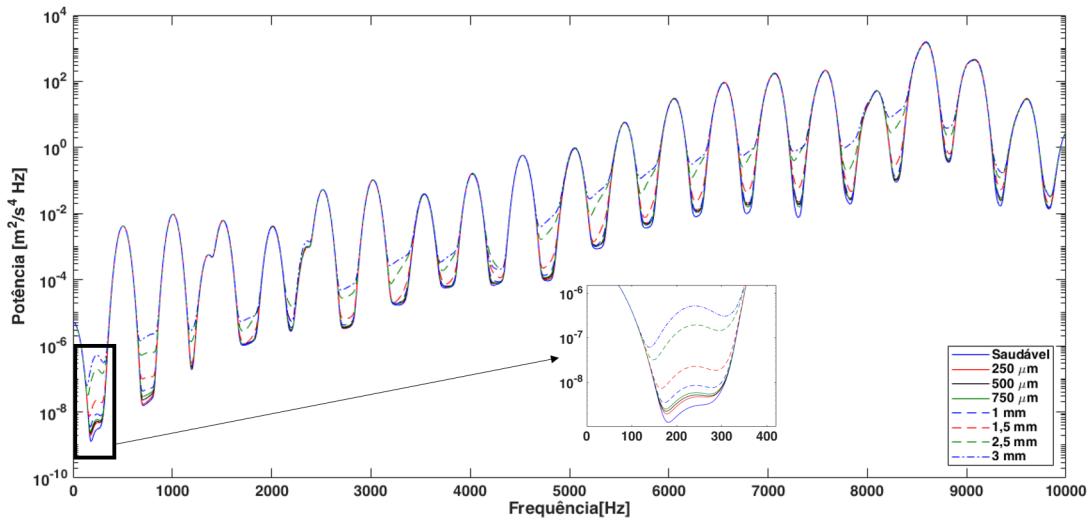


Figura 6.19: Espectro de potência para diversos níveis de trinca

Este método é aplicado, então, e os resultados para os diversos níveis de trinca são apresentados na Figura 6.19. É possível observar diferenças claras entre os níveis de trinca de $1mm$, $1,5mm$, $2,5mm$ e $3mm$ nas faixas de menor amplitude do sinal (vales) em todo o espectro de frequência. A diferença do resultado para as trincas menores e o sistema saudável é mais sutil, como mostrado no detalhe da figura. Assim, este método é interessante para avaliar a presença de trinca, mas pode não apresentar diferenças suficientes para avaliar o tamanho de trincas pequenas.

No resultado da EMD (Figura 6.20), a primeira função de modo intrínseco apresenta as maiores diferenças para os diversos tamanhos de trinca, em diversas faixas de frequência acima de $5000Hz$. Como mostrado nos detalhes, as diferenças causadas pelas trincas menores ficaram mais evidentes, principalmente na faixa de amplitude de $8200Hz$ a $8300Hz$. Isto ocorre porque, como explicado no Capítulo 5, este método decompõe o sinal de forma que as funções vão da maior para a menor frequência, de forma que as alterações de alta frequência são evidenciadas na primeira função.

Já para o resultado do VMD (Figura 6.21), são vistas diferenças em todos as funções de modo variacional apresentadas, em várias faixas de frequência. Esta diferença em relação ao EMD ocorre porque, como explicado no Capítulo 5, as funções de modo são obtidas de maneira simultânea, em torno de frequências centrais, mas que não necessariamente seguem a ordem da

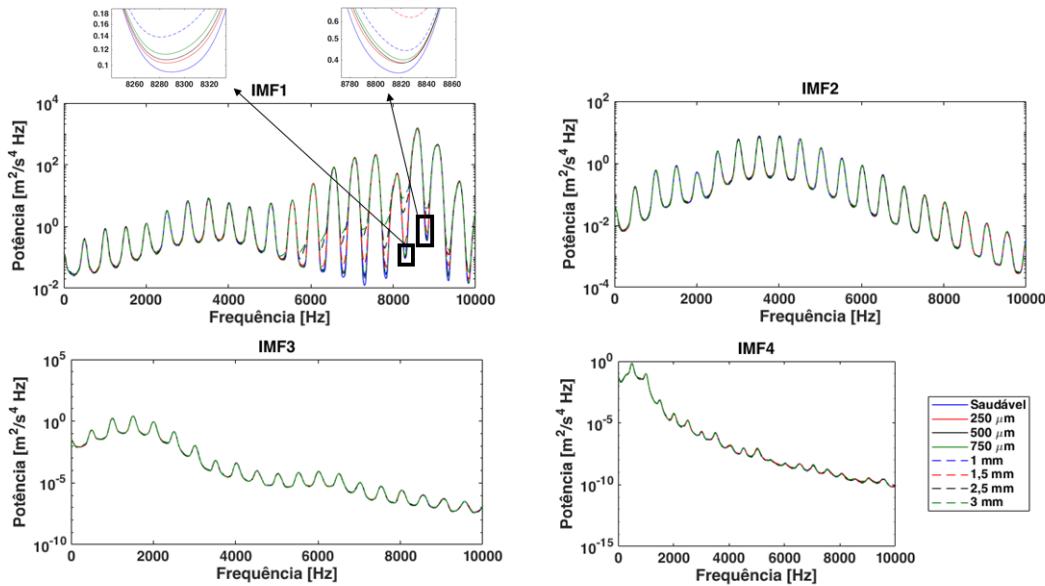


Figura 6.20: Espectro de potência das funções de modo intrínseco para diversos níveis de trinca

maior para a menor. Além disto, as ordens de grandeza do espectro de potência nas funções de modo variacional são bem menores do que nas funções de modo intrínseco, obtidas pelo método EMD.

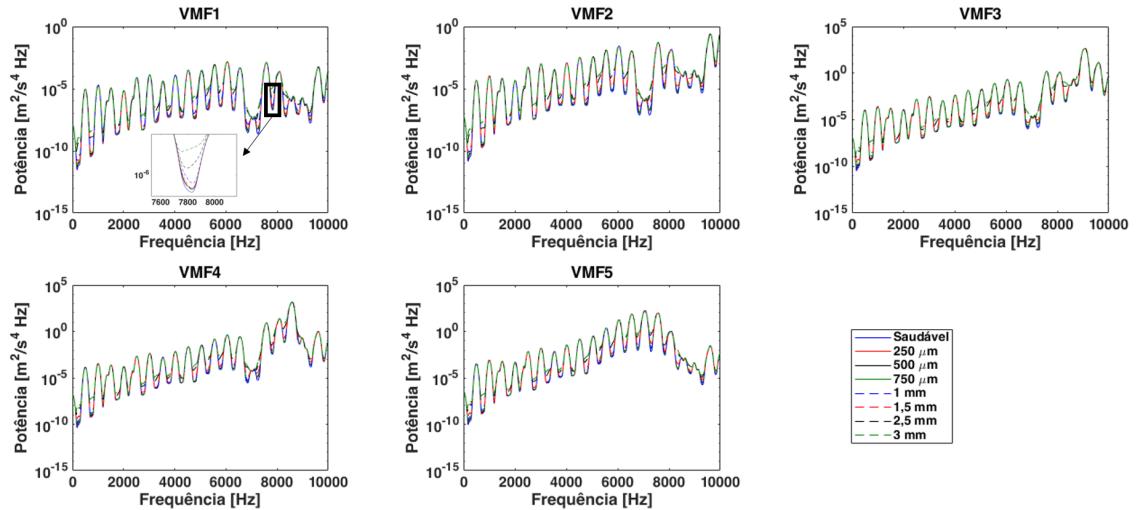


Figura 6.21: Espectro de potência das funções de modo variacional para diversos níveis de trinca

Por fim, foi aplicada a TH ao trecho do sinal. A Figura 6.22 mostra o sinal no tempo (azul) com o envelope (vermelho) gerado pelos valores positivos (envelope superior) e negativos (envelope inferior) da magnitude da TH do sinal no tempo. Nos detalhes destacados, é possível ver que o envelope gerado no sinal transiente não é tão bem ajustado, mas que no sinal permanente o ajuste é adequado.

Assim, considerando os últimos 5 segundos de simulação, apresenta-se a TH para o sistema saudável e com os diversos níveis de trinca considerados na Figura 6.23. Em destaque,

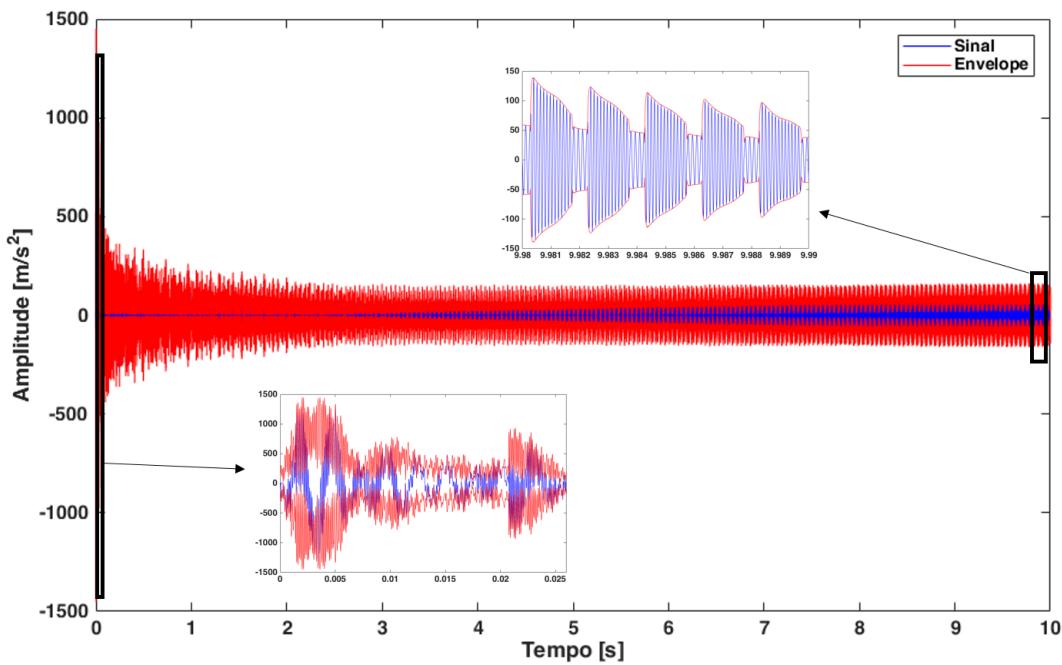


Figura 6.22: Sinal no tempo do sistema saudável (azul) e envelope obtido pela Transformada de Hilbert (vermelho)

é possível verificar as diferenças de cada nível de trinca ao longo do tempo, inclusive para as pequenas trincas.

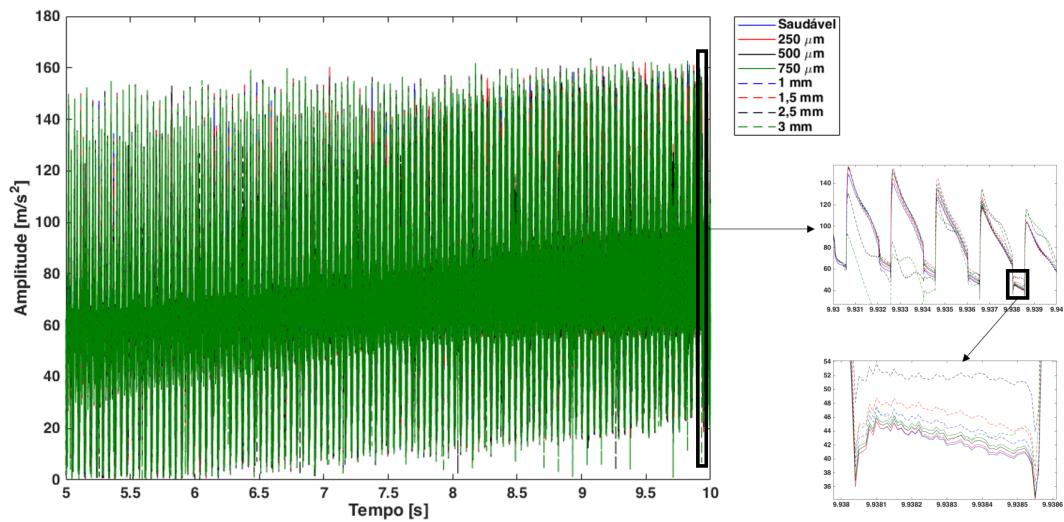


Figura 6.23: Transformada de Hilbert para vários níveis de trinca

Considerando o acesso ao sinal de vibração do mancal do sistema saudável, é possível aplicar tratamentos à diferença entre o sinal com falha e saudável. No caso do espectro de potência dos modos decompostos, analisou-se apenas a primeira função de modo, tanto intrínseco, na Figura 6.24, como variacional, na Figura 6.25. Para a TH, avaliou-se o sinal considerado em

regime permanente (de 5 a 10 segundos de simulação)

O resultado da IMF1 do resíduo (Figura 6.24) mostra claras diferenças entre os vários níveis de trinca, sendo essas diferenças destacadas em faixas de frequência mais altas (a partir de 5500Hz), inclusive no caso das trincas menores de 1mm . No resultado da VMF1, (Figura 6.25) as diferenças possuem menores ordens de grandeza, mas também é clara para todos os níveis de trinca em várias faixas de frequência. A Figura 6.26 mostra a TH do resíduo do sinal para vários níveis de trinca. Em detalhe, é possível verificar as diferenças de cada nível de trinca que se repete nos picos apresentados nesta figura.

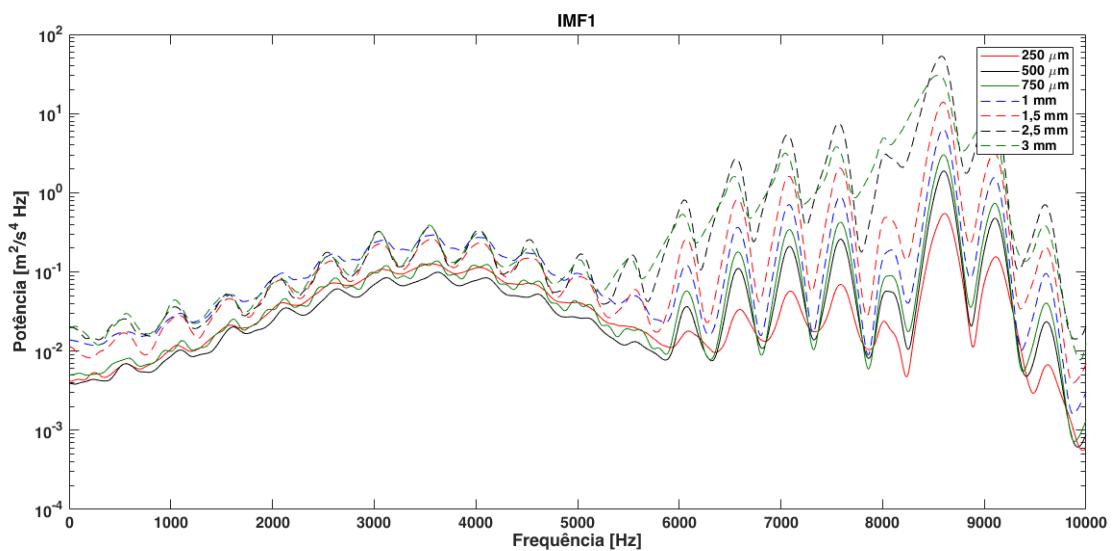


Figura 6.24: Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco do resíduo dos sinais de diversos níveis de trinca

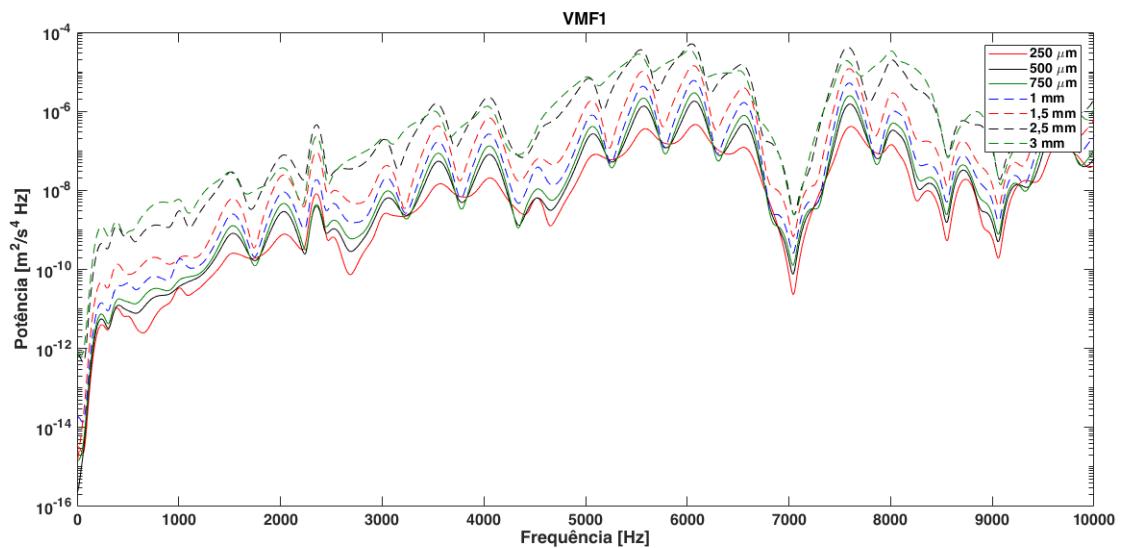


Figura 6.25: Espectro de potência da primeira função de modo variacional do resíduo dos sinais de diversos níveis de trinca

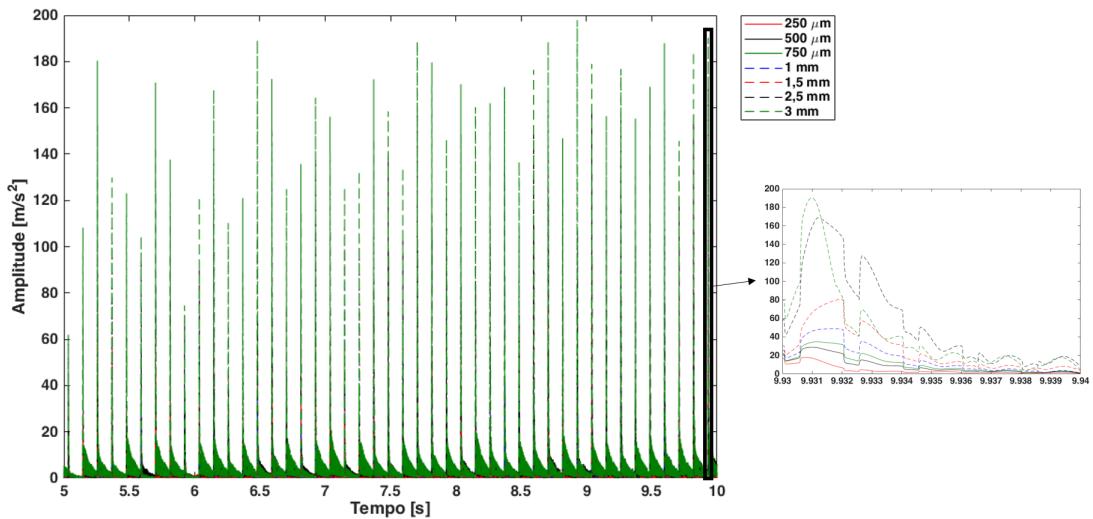


Figura 6.26: Transformada de Hilbert do sinal no tempo do resíduo de diversos níveis de trinca

Considerando que sinais podem apresentar ruídos de fontes que não podem ser controladas, simulou-se a condição de um ruído aleatório distribuído uniformemente em termos de frequência (ruído branco) e com amplitudes de 10% e 20% da amplitude máxima do sinal simulado. Os mesmos métodos de análise foram então aplicados ao sinal com ruído, a fim de verificar sua eficácia nestas condições.

Os resultados do espectro de potência para os sinais com ruído branco de 10% e 20% da amplitude máxima do sinal são apresentados nas Figuras 6.27 e 6.28, respectivamente. Comparando estes resultados com o resultado sem ruído (Figura 6.19), nota-se grande diferença nas frequências inferiores a $5000\ \text{Hz}$. Isto porque a amplitude da potência do sinal sem ruído era muito baixa nessa faixa, de forma que a presença do ruído sobrepõe-se muito ao sinal. Entretanto, a partir desta faixa, a amplitude do ruído já não é tão superior à do sinal e a potência não é alterada de forma tão evidente. Em detalhe, em ambas as figuras, fica evidente que a identificação da presença de uma trinca grande (maior que $1\ \text{mm}$) é clara, enquanto a identificação de trincas pequenas (com comprimento menor que $1\ \text{mm}$) fica mais difícil.

De forma análoga, os espectros de potência das primeiras funções de modo intrínseco e de modo variacional dos sinais com os dois níveis de ruído (Figuras 6.29, 6.30, 6.31 e 6.32) apresentam mais diferenças em frequências abaixo de $7000\ \text{Hz}$, em comparação com os mesmos resultados sem o ruído (Figuras 6.20 e 6.21). Para os dois métodos, a identificação de trincas menores de $1\ \text{mm}$ é prejudicada com a presença do ruído e níveis maiores de ruído causam mais dificuldade, mas a identificação não é inviabilizada.

Os resultados da TH para os sinais com a presença de ruído são apresentados nas Figuras 6.33 e 6.34. Neste caso, a identificação da trinca fica muito difícil, uma vez que o padrão identificado sem a presença de ruído (Figura 6.26) foi perdido.

Este capítulo avaliou métodos de análise de sinais aplicados ao sinal de aceleração vertical da simulação de um sistema rotativo com acoplamento por engrenagens na presença de trinca.

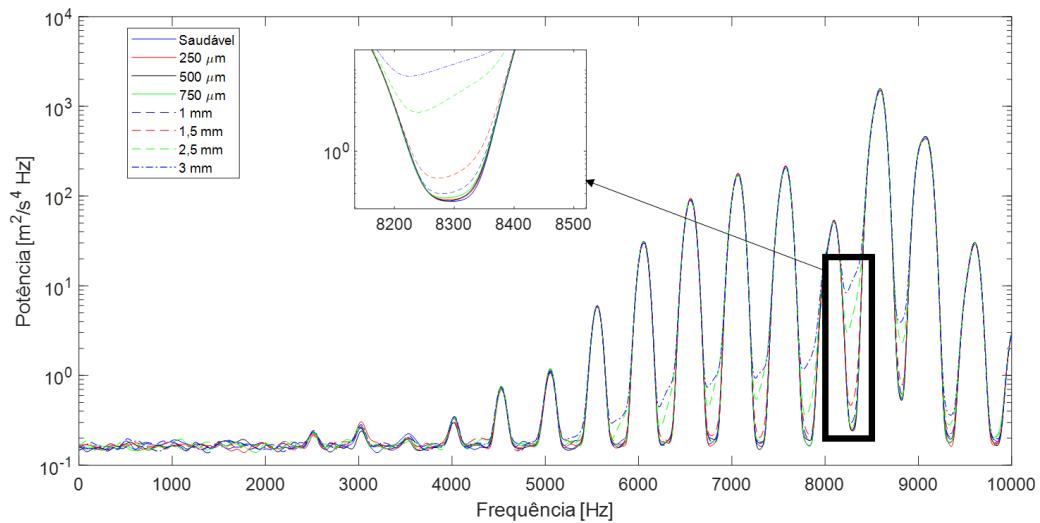


Figura 6.27: Espectro de potência com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal

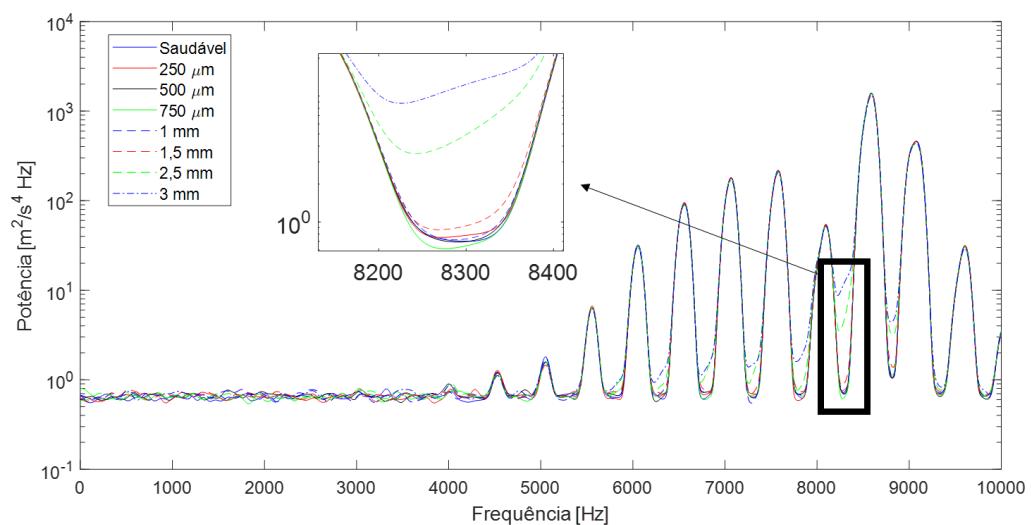


Figura 6.28: Espectro de potência com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal

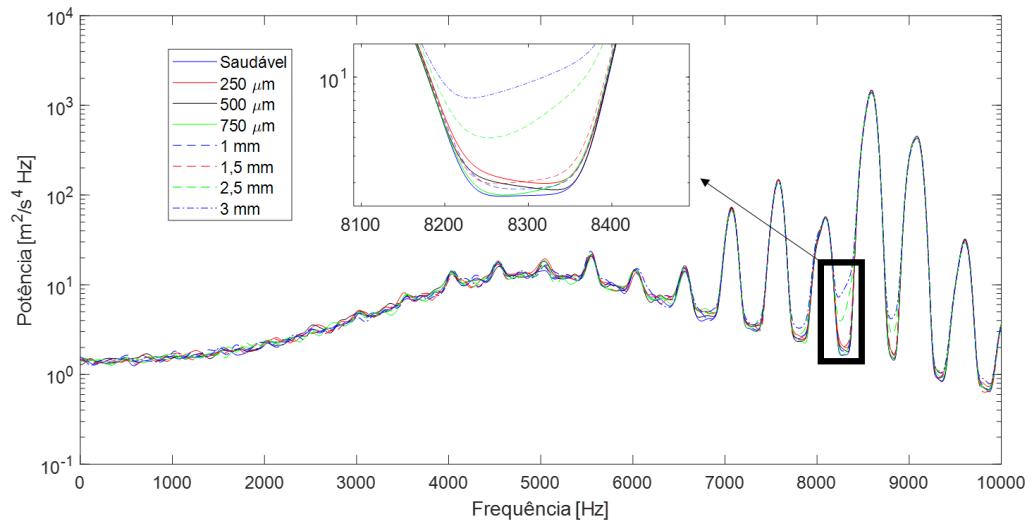


Figure 6.29: Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal

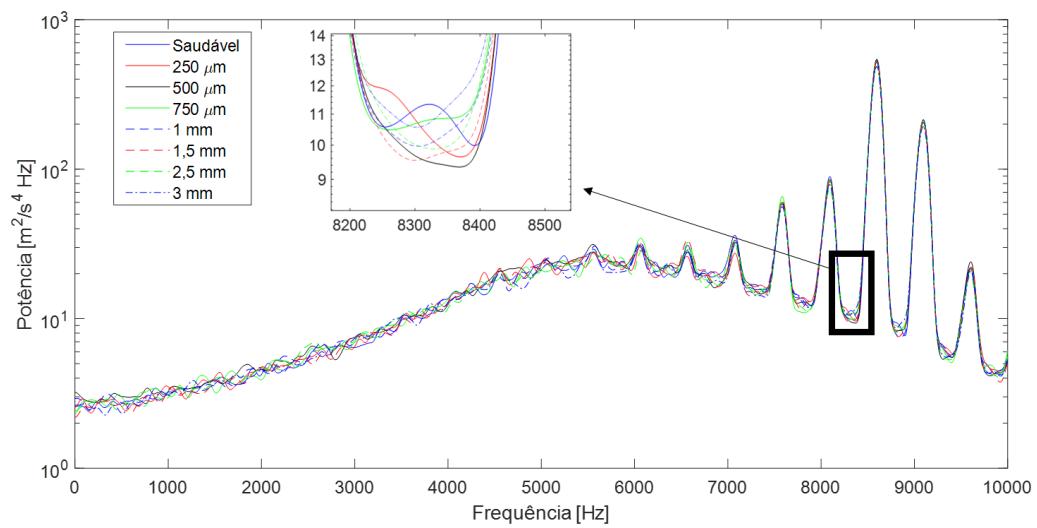


Figure 6.30: Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal

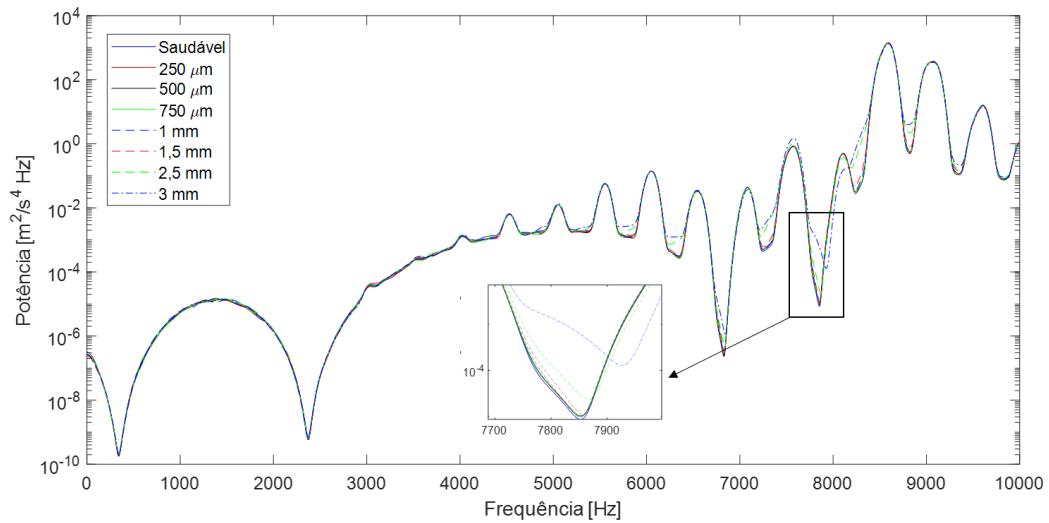


Figura 6.31: Espectro de potência da primeira função de modo variacional com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal

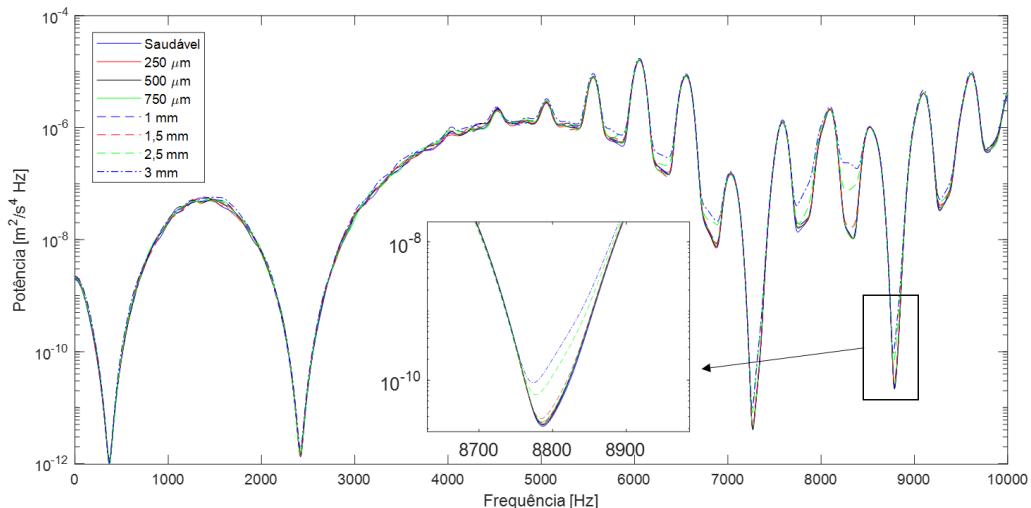


Figura 6.32: Espectro de potência da primeira função de modo variacional com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal

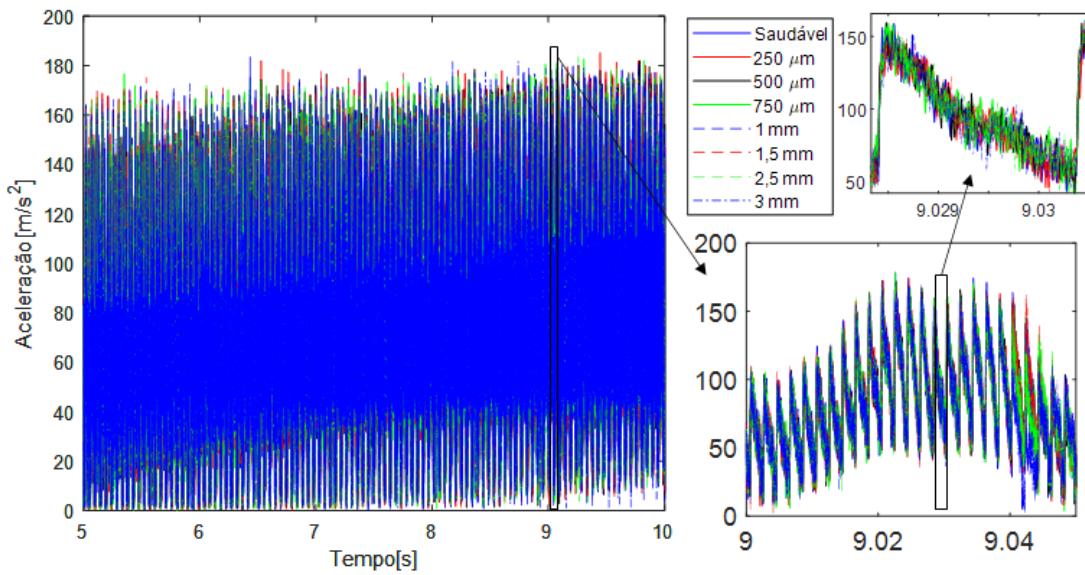


Figura 6.33: Transformada de Hilbert com ruído branco de 10% da máxima amplitude do sinal

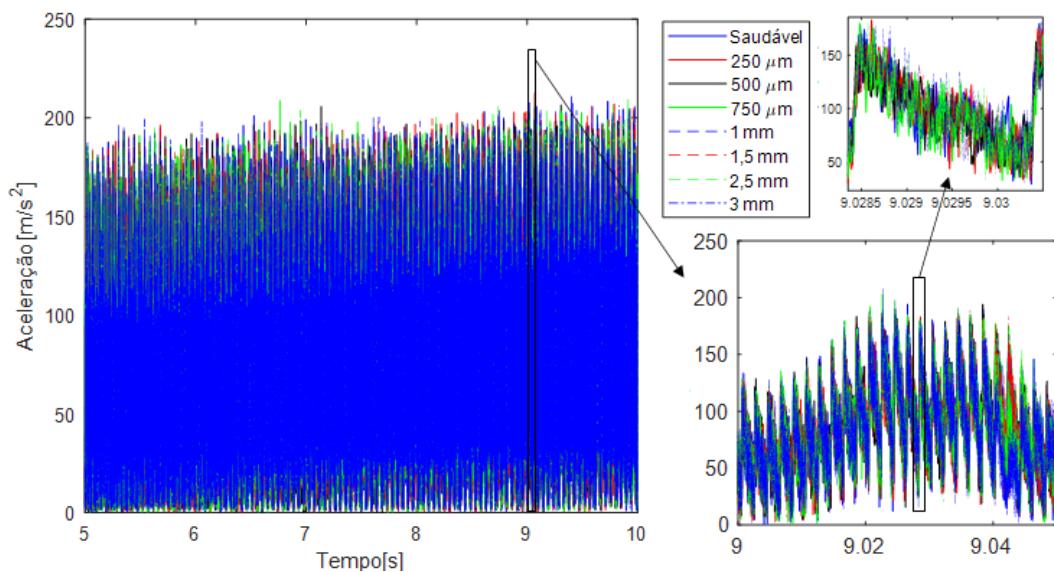


Figura 6.34: Transformada de Hilbert com ruído branco de 20% da máxima amplitude do sinal

O objetivo foi avaliar quais métodos poderiam evidenciar a presença de uma trinca e auxiliar na estimação do seu comprimento.

Os resultados mostraram que avaliar o espectro de potência do sinal e da primeira função de modo intrínseco, obtida pelo método EMD, são métodos promissores, uma vez que evidenciaram as diferenças da potência do sinal inclusive para trincas com comprimento inferior a 1 mm. O espectro de potência da primeira função de modo obtida pelo método VMD apresenta maior dificuldade pois a ordem de grandeza das amplitudes é bem menor. Além disso, a diferença pode estar presente em outras funções de modo. Outra opção que apresentou-se viável foi avaliar a TH, uma vez que o envelope do sinal no tempo é modificado com a presença de trinca. Considerando o acesso ao sinal do sistema saudável, utilizar estas ferramentas ao resíduo do sinal apresentou resultados ainda melhores. Entretanto, a presença de ruído no sinal pode dificultar significativamente a identificação de trincas com comprimento inferior a 1 mm, de forma que é importante garantir a minimização dos ruídos no sinal a ser analisado.

O capítulo a seguir descreve o projeto da bancada idealizada e construída para a validação do modelo e da metodologia apresentados neste capítulo.

7 Bancada Experimental

Em decorrência da pandemia de COVID-19, não houveram recursos financeiros suficientes nem tempo hábil para a construção de bancada conforme o sistema simulado e estudado no Capítulo 6. Com isto, a fim de validar os resultados obtidos a partir das simulações numéricas, foi proposta um bancada de testes para um par engrenado de dentes retos, menor e mais simples, com a maioria dos seus elementos já existentes na Faculdade. O desenho é mostrado na Figura 7.1: consistindo de um par engrenado, com um eixo acionado por um motor e o outro eixo com uma carga. Os eixos são apoiados em mancais que são montados em uma base, assim como os suportes dos demais elementos. Nos dois eixos também são montados *encoders* para medir suas respectivas velocidades de rotação.

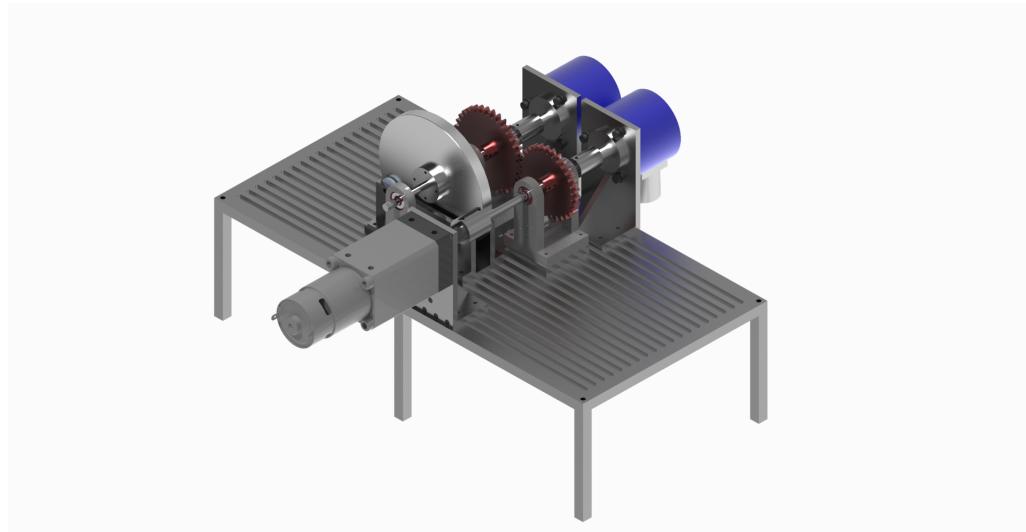


Figura 7.1: Desenho 3D da bancada projetada

A placa de base, os eixos, os suportes dos mancais e os mancais de rolamento utilizados foram fornecidos pelo fabricante *PIC Corporation Design* de componentes de precisão. Assim, os dados destes componentes aqui apresentados foram todos retirados do seu catálogo (PIC Design Corporation, 1970). A base é de alumínio fundido, com espessura de 9,53 mm, altura de 203,2 mm e comprimento de 406,4 mm. Suas ranhuras de 4,3 mm de altura são igualmente espaçadas em 5 mm, de forma a permitir a fixação de componentes. Os eixos são de aço inoxidável 303, com diâmetro de 6,34 mm. Os comprimentos dos eixo motor e movido são de 149 mm e 165,96 mm, respectivamente. Os acoplamentos são todos rígidos. Rolamentos são de aço inoxidável 440, com diâmetro externo de 15,88 mm e largura de 4,98 mm. Os suportes dos mancais também são de alumínio fundido e suas dimensões são mostradas na Figura 7.2.

O acionamento é feito por um motor elétrico com tensão de operação até 18 Volts. Este motor já é acoplado a uma caixa de redução, sendo a sua máxima rotação de saída de 778 rotações por minuto. Em máxima eficiência, a corrente é de 20,9 Ampères, o torque é de 4,13 Nm e a potência é de 296 W (Mabuchi Motor, 2022). Para a medição da velocidade dos eixos, serão utilizados dois *encoders* (SICK Sensor Intelligence, 2018).

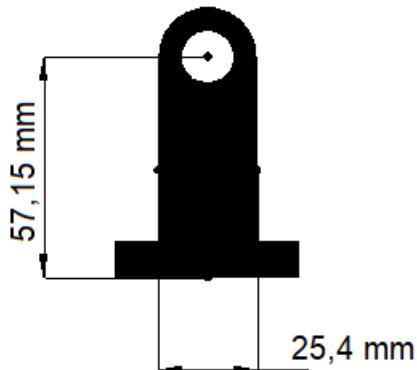


Figura 7.2: Dimensões dos suportes dos mancais

O par testado tem módulo 2mm, largura de face de 6mm e ângulo de pressão de 20°. O pinhão, alocado no eixo motor, tem 25 dentes e a engrenagem, 40. A razão de contato (ou grau de recobrimento), então, é de 1,66. Para o teste foi fabricado um pinhão saudável, um com trinca de 0,05mm e um com trinca de 1,88mm. Tais trincas foram geradas na raiz do dente com um ângulo de propagação de 85° e foram produzidas a partir de eletroerosão, com um fio de 0,3 mm de diâmetro. Na Figura 7.3 é possível verificar o desenho, a simulação e a engrenagem fabricada com a trinca de 1,88mm.

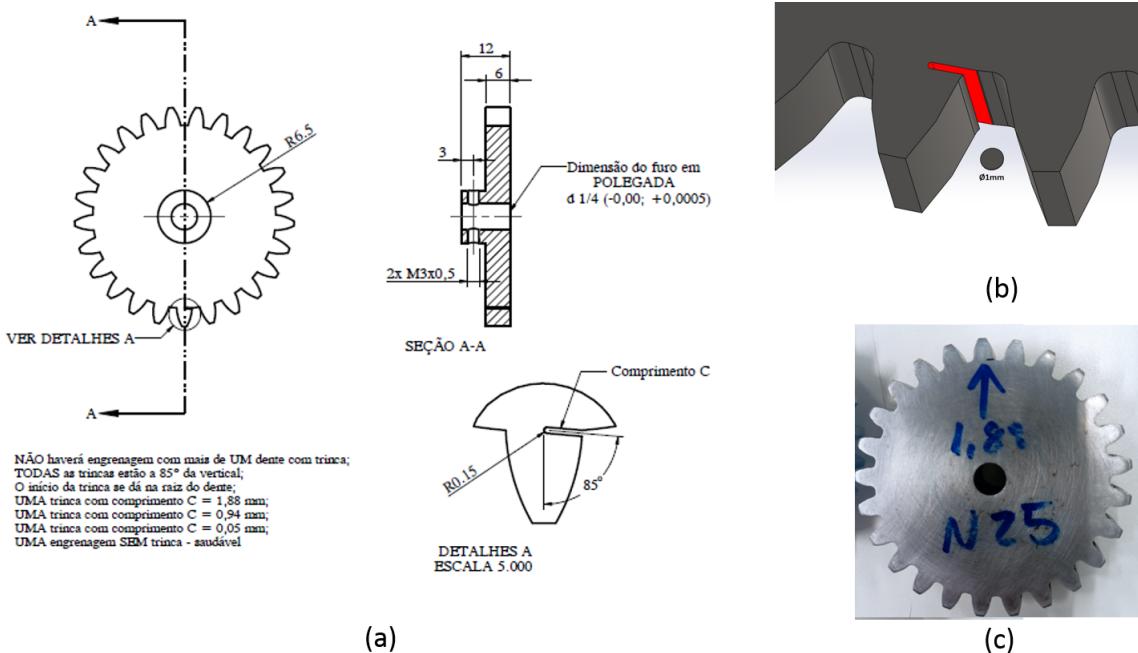


Figura 7.3: Trinca na engrenagem de 25 dentes. (a) Desenho para fabricação; (b) Simulação da trinca gerada por eletroerosão; (c) Engrenagem com a trinca gerada

Para aplicar carga no sistema, foi utilizado um freio eletromagnético conhecido como freio de Foucault. Neste dispositivo, um campo magnético, que pode ser gerado por um imã ou eletroímã, é gerado de forma a passar através de um disco de material condutor elétrico. No

ponto em que ocorre esta interceptação, o campo magnético sofre variações, induzindo correntes parasitas, que dissipam energia. Tal dissipação gera uma força magnética de arrasto, que então desacelera o sistema (Heald, 1988).

A força de resistência ao giro, F_{res} , para baixas velocidades e considerando um campo gerado por eletroímã, é dada por (Barnes *et al.*, 1993, Wouterse, 1991):

$$F_{res} = \frac{A_N e B_0^2 v c}{\rho_e}, \quad (7.1)$$

em que ρ_e é a resistência específica do material do disco, em ôhms-metro, A_N é a área do núcleo de ferro que conduz o campo, em metros quadrados, e é a espessura do disco, em metros, B_0 é a densidade de fluxo magnético, em Tesla, v é a velocidade tangencial do disco no ponto em que ele é interceptado pelo campo magnético, em metros por segundo e c é uma constante que depende da distância entre o centro do disco e centro do núcleo do ferro condutor, bem como das dimensões do disco.

No caso deste trabalho, ao invés de um eletroímã, foram utilizados ímãs para gerar o campo magnético. Neste caso, conforme explica Casara (2020), tal constante é unitária. Neste caso, pode-se reescrever a força de resistência:

$$F_{res} = \sigma A_{ima} ev B^2, \quad (7.2)$$

em que σ é a condutividade elétrica do material, em ôhms por metro, A_{ima} é a área do ímã e B é o campo magnético aplicado. O torque resistivo, então, é proporcional a esta força e ao raio do disco em que está sendo aplicado o campo magnético, r_{campo} :

$$T_{res} = \sigma A_{ima} ev B^2 r_{campo}, \quad (7.3)$$

Para a faixa de torques e de rotações do motor desta bancada, projetou-se então um freio magnético com 5 ímãs de neodímio para gerar o campo magnético necessário. O campo gerado por cada um é de 0,22 Tesla. O disco do freio, por sua vez, é de alumínio 7075, com condutividade elétrica de $1,82 \cdot 10^7$ Siemens por metro, conforme Tsai e Chuang (1996). O raio do disco em que o campo é aplicado é de 57,5 mm e sua espessura é de 10 mm. As dimensões do suporte e dos ímãs são mostradas na Figura 7.4. O suporte dos ímãs pode ser removido da base do disco, de forma que podem ser feitos ensaios com e sem o torque resistivo, conforme Figura 7.5.

A bancada foi montada e fixada sobre uma bancada inercial, com elementos de borracha entre elas. A Figura 7.6 mostra uma foto da bancada, com esta condição de montagem. Detalhes a respeito de outras dimensões (como o espaçamento entre componentes) podem ser verificados no desenho em duas dimensões apresentado na Figura 7.7.

O torque fornecido pelo conjunto motor-redutor foi estimado através da medição, feita por multímetros, da corrente (i_e) e da tensão de alimentação (U_e) do motor em conjunto com a

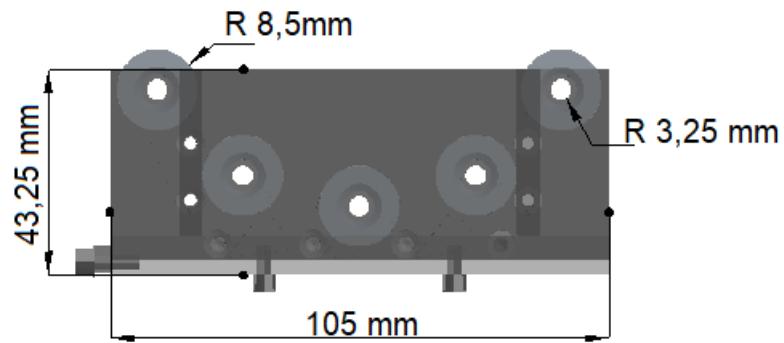


Figura 7.4: Dimensões dos ímas e do suporte dos ímãs do freio de Foucault projetado

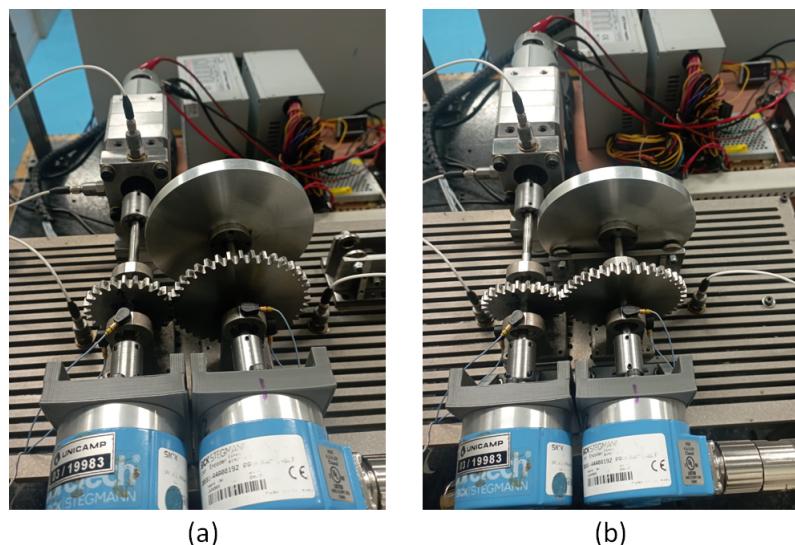


Figura 7.5: Bancada de testes (a) com freio acionado (b) sem freio acionado

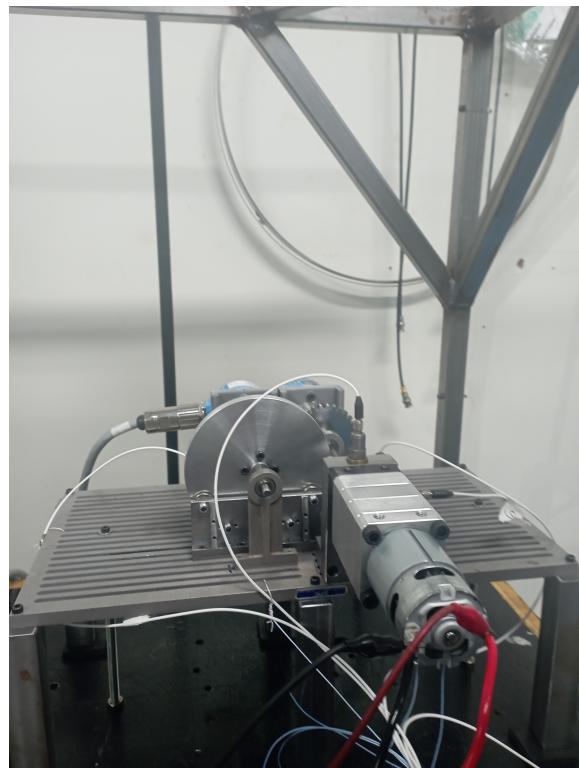


Figura 7.6: Foto da montagem da bancada

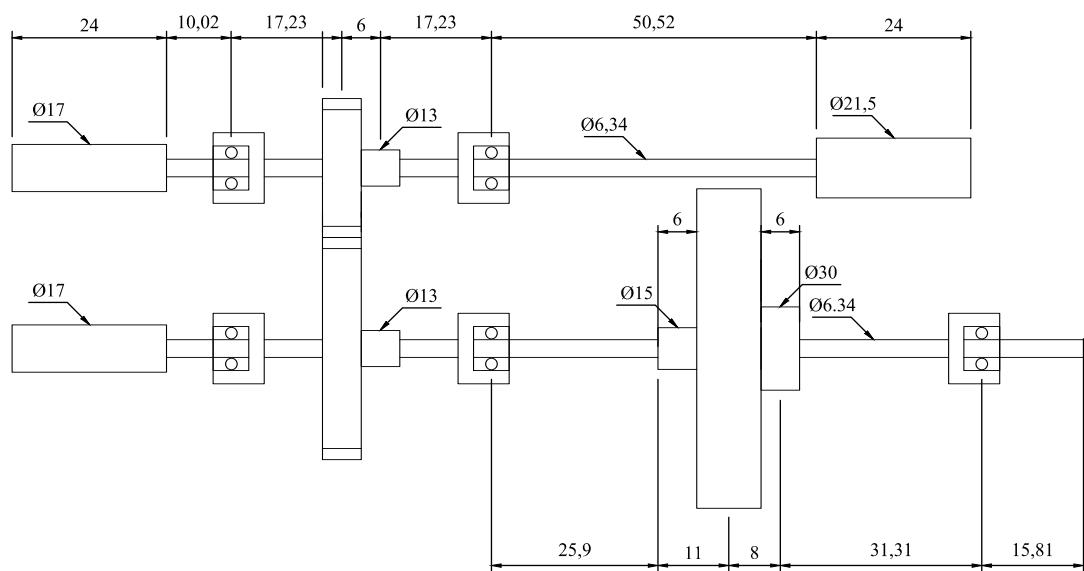


Figura 7.7: Desenho da bancada em duas dimensões

velocidade do eixo ($\dot{\theta}_{xp}$) medida pelo *encoder*. Como trata-se de um motor de corrente contínua, a potência (P) por ele fornecida é dada por:

$$P = U_e i_e. \quad (7.4)$$

Considerando que o redutor acoplado ao motor não perde potência ao transmitir o movimento, o torque no eixo (T_p) é dado por:

$$T_p = P / \dot{\theta}_{xp}. \quad (7.5)$$

8 Resultados experimentais

Com base nos resultados de simulações apresentados no Capítulo 6, apresenta-se aqui os resultados simulados para a bancada experimental (proposta no Capítulo 7), os resultados obtidos a partir da bancada experimental e, por fim, os resultados de um conjunto de dados de acesso público, a fim de confirmar a aplicabilidade dos métodos propostos.

Dos métodos de análise de sinais investigados no Capítulo 6, optou-se por utilizar os que apresentaram melhores resultados, que foram: o espectro de potência, o espectro de potência da primeira função de modo intrínseco (obtida pelo método EMD) e o valor absoluto da TH (ao longo deste capítulo chamada apenas de TH), tanto para o sinal integral como para a diferença entre o sinal com falha e o integral. Conforme descrito nas respectivas seções correspondentes a dados experimentais, utilizou-se várias amostras do sinal para compor médias para as análises (50, no caso da bancada experimental proposta e 104, no caso dos dados disponibilizados de outro estudo no tema), de forma que os ruídos foram minimizados.

8.1 Resultados simulados da bancada experimental proposta

Esta seção mostra os resultados dos métodos selecionados para a resposta obtida pela simulação da bancada experimental descrita no Capítulo 7. O modelo foi feito conforme descrição dos Capítulos 3 e 4. Por considerar a montagem das engrenagens entre os mancais suficientemente rígida, modelou-se apenas o trecho entre os mancais em que estavam montadas as engrenagens. O trecho foi discretizado em 8 nós, indicados em vermelho na Figura 8.1. Os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais, o coeficiente de amortecimento do engrenamento e coeficiente de amortecimento proporcional do eixo eram desconhecidos, de forma que foram apenas estimados com base em referências da literatura. Com a simplificação do sistema no modelo e com esta aproximação dos coeficientes, espera-se que os resultados simulados não sejam estritamente iguais aos resultados obtidos experimentalmente, mas que o efeito da trinca seja observado de forma análoga.

Como foi constatado no Capítulo 6, o sinal de vibração do mancal em que está apoiado o eixo onde há a engrenagem com a trinca é o sinal com maior amplitude de vibração. Uma diferença, porém, é que, no caso da bancada, as amplitudes de vibração eram maiores na horizontal. Isso ocorre porque, pela geometria do suporte, a rigidez é menor nesta direção. No caso da simulação do Capítulo 6, os mancais foram considerados isotrópicos e, por conta da força gravitacional, a vibração era maior na vertical. Por este motivo, considerou-se o mancal mais flexível na direção horizontal, conforme mostra a Tabela 8.1, em que são apresentados também outros parâmetros considerados. Os resultados apresentados nesta seção consideram a velocidade nominal de 5 Hz no eixo de entrada. O tempo total de simulação foi de 1 s, sendo desconsiderados os primeiros 0,2 segundos (de regime transiente) nas análises aqui mostradas. O passo de tempo foi de 1.10^{-5} s.

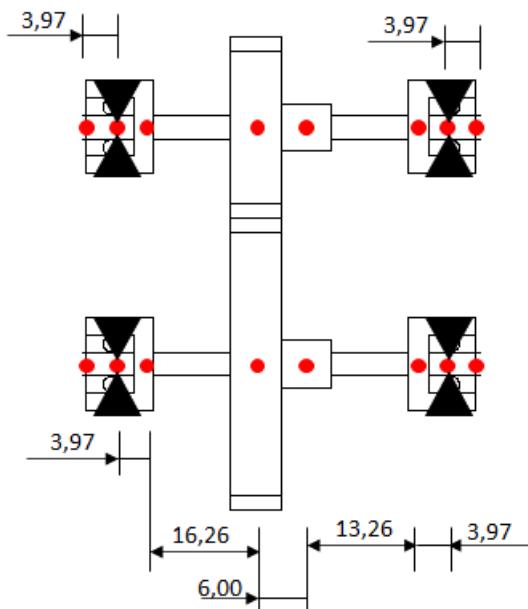


Figura 8.1: Nós (vermelho) e comprimento dos elementos de viga utilizados no modelo de elementos finitos da simulação da bancada experimental

Tabela 8.1: Parâmetros da bancada utilizadas no modelo do método de elementos finitos

Parâmetro	Valor
Coeficiente de amortecimento proporcional do eixo (κ)	0.10^{-5}
Coeficiente de amortecimento do engrenamento (ξ_m)	5.10^{-2}
Módulo de Young dos eixos, engrenagens e disco	193 GPa
Módulo de cisalhamento dos eixos e disco	0,772 GPa
Densidade dos eixos, engrenagens e disco	8000 kg/m ³
Coeficientes de rigidez vertical dos mancais	$8,8.10^7$ N/m
Coeficientes de rigidez horizontal dos mancais	$2,6.10^7$ N/m
Coeficientes de amortecimento vertical dos mancais	330 Ns/m
Coeficientes de amortecimento horizontal dos mancais	330 Ns/m
Ângulo de pressão das engrenagens	20°
Módulo das engrenagens	2 mm
Largura de face do dente	6 mm
Torque no eixo pinhão	3,54 Nm

O espectro de potência do sinal simulado para as condições saudável, com trinca de 0,05 mm (1,4%) e com trinca de 1,88 mm (50%) é apresentado na Figura 8.2. Picos de potência podem ser verificados em múltiplos da frequência de engrenamento. Nos picos, a diferença entre a potência dos sinais não é tão clara. Entretanto, entre os picos, nos chamados "vales", é claro o aumento de potência no caso da trinca maior. Também há um sutil aumento da potência na presença da trinca menor em relação ao sinal saudável, como mostrado em detalhe na figura.

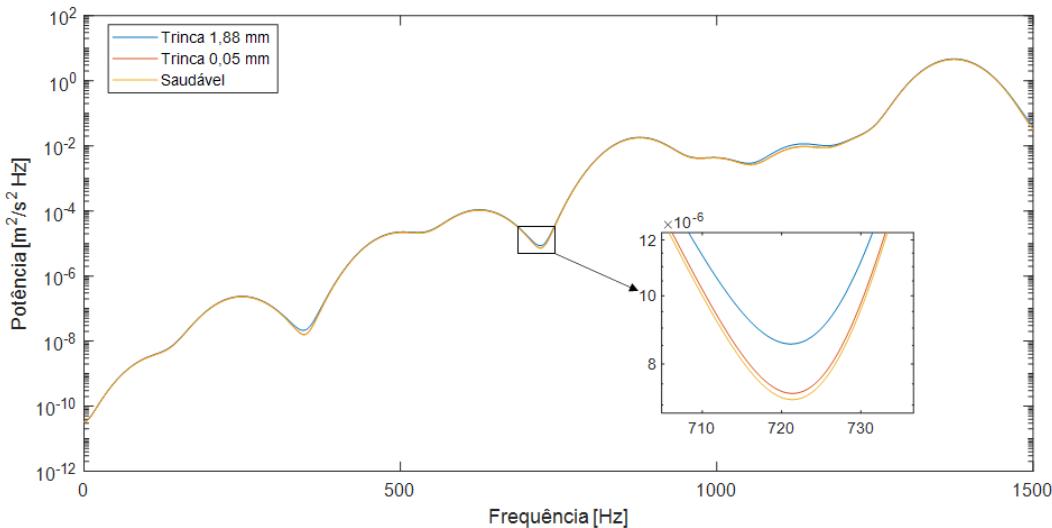


Figura 8.2: Espectro de potência dos sinais gerados por simulação da engrenagem saudável e com trinca na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz

Considerando o sinal saudável como um sinal de referência e avaliando a diferença entre os sinais com falha e saudável, é possível verificar o aumento da potência do sinal em todo o espectro analisado, conforme visto na Figura 8.3. O aumento da potência continua sendo mais evidente nos vales, mas também é possível verificar aumento nos picos.

Avaliando o espectro de potência da primeira função de modo intrínseco do sinal, obtida pelo método EMD, o aumento da potência do sinal no caso da maior trinca em relação ao sinal saudável fica evidente, tanto nos picos como nos vales, como mostra a Figura 8.4. Em detalhe, é possível ver aumento da potência do sinal no vale na presença da trinca de 0,05 mm.

Ao considerar a diferença dos sinais com falha e do sinal saudável, o aumento da potência da primeira IMF evidencia o crescimento da trinca a partir de 500 Hz.

Por fim, o valor absoluto da Transformada de Hilbert, que equivale ao envelope do sinal e é apresentado na Figura 8.6, indica picos de aceleração ao longo de todo o tempo analisado no caso da trinca de 1,88 mm,. Em detalhes, é possível ver um discreto aumento na amplitude gerado pela trinca de 0,05 mm em relação ao sinal saudável, ao longo do tempo.

A diferença entre a TH dos sinais com falha e saudável é mostrado na Figura 8.7. Neste caso, é possível verificar a presença de picos de amplitude ao longo do tempo, indicando o crescimento da trinca. Além disto, como mostra o detalhe da figura, a trinca maior apresenta maiores amplitudes e mais quantidade de picos em torno dos picos de maior amplitude do sinal.

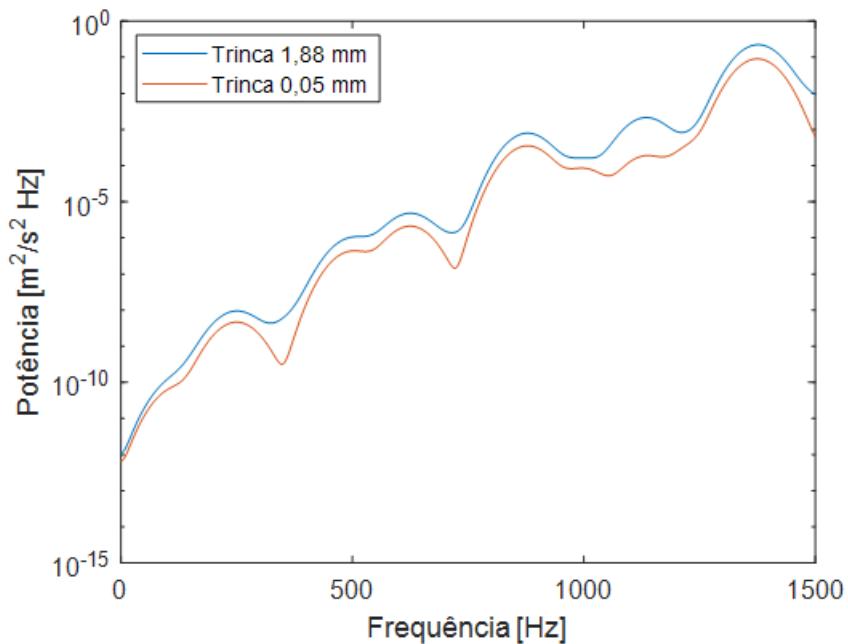


Figura 8.3: Espectro de potência da diferença dos sinais gerados por simulação da engrenagem com trinca e saudável, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz

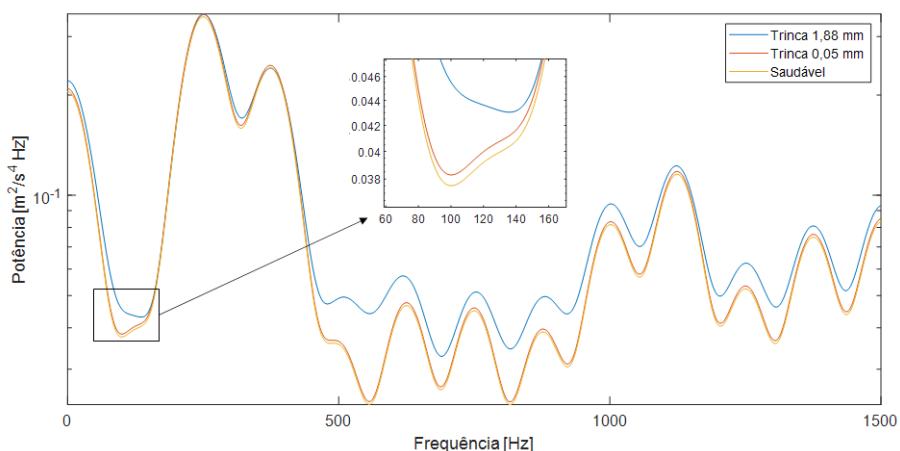


Figura 8.4: Espectro de potência da primeira função de modo intrínseco dos sinais gerados por simulação da engrenagem saudável e com trinca, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz

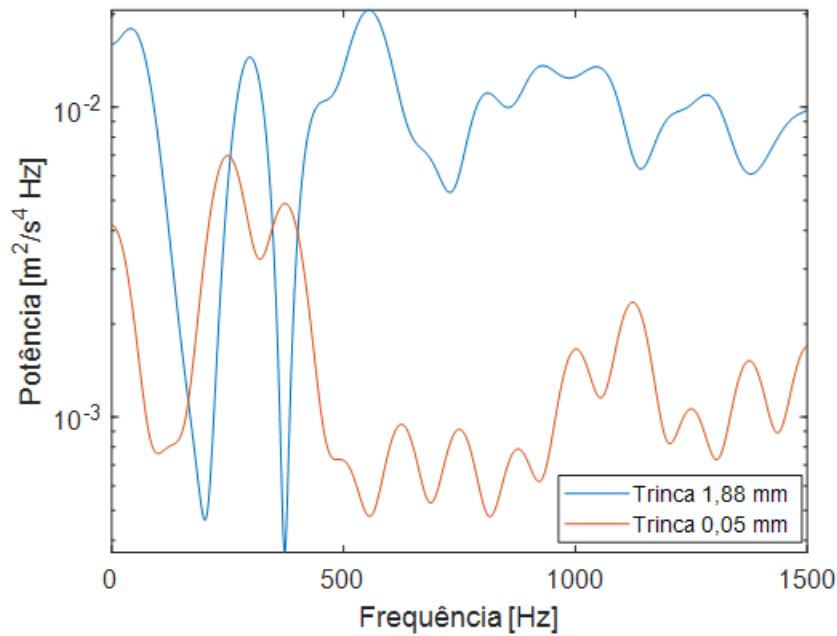


Figura 8.5: Espectro de potência da diferença da primeira função de modo intrínseco dos sinais gerados por simulação da engrenagem com trinca e saudável, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz

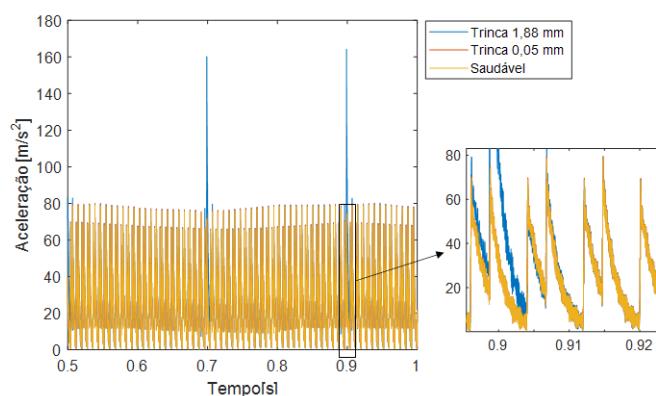


Figura 8.6: Transformada de Hilbert dos sinais gerados por simulação da engrenagem saudável e com trinca na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz

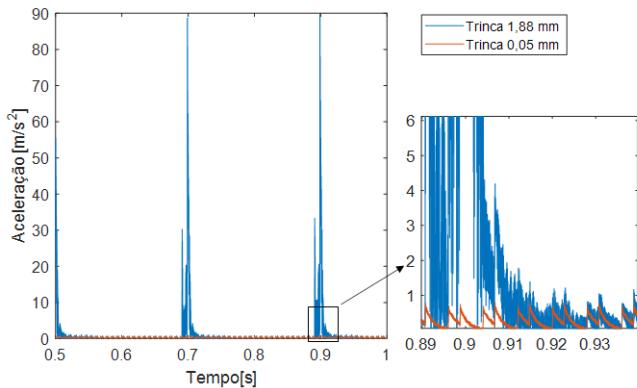


Figura 8.7: Transformada de Hilbert da diferença dos sinais gerados por simulação da engrenagem com trinca e saudável, na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz

Esta seção apresentou os resultados simulados da bancada experimental, que indicam as tendências dos resultados obtidos a partir das medidas realizadas, que serão apresentados na seção a seguir.

8.2 Resultados da bancada experimental proposta

A Figura 8.8 mostra a bancada experimental, cujo projeto foi descrito no Capítulo 7, com a identificação dos componentes e a montagem dos acelerômetros. Acelerômetros montados no motor e na placa base foram utilizados para averiguar se esses componentes poderiam gerar vibrações que influenciassem a medida dos mancais, o que foi constatado que não acontecia na faixa de frequências analisada. Os acelerômetros afixados nos suportes dos mancais são do modelo 352A24 da fabricante comercial PCB Piezotronics® e os demais são do modelo 352C04 da mesma empresa. A taxa de aquisição destes acelerômetros foi de 8192 Hz e as medições foram feitas por um tempo total de 2s. A fim de minimizar ruídos, tais medidas foram feitas 50 vezes.

Como explicado na seção anterior, as amplitudes de vibração na direção horizontal do mancal eram maiores, por conta da geometria do suporte. A Figura 8.8 mostra o posicionamento do acelerômetro de interesse, cujos resultados serão apresentados nesta seção.

Nos resultados apresentados no domínio da frequência (isto é: potência do sinal e potência da primeira função de modo intrínseco), calculou-se o resultado em questão para as 50 amostras e depois foi feita a média.

No resultado apresentado no domínio do tempo, isto é, da Transformada de Hilbert, a média do sinal não poderia ser realizada diretamente, uma vez que podem haver variações de sincronicidade. Neste caso, os 50 sinais foram transformados para o domínio da frequência, através de uma DFT. Depois, determinou-se que a fase de todos os sinais seria a mesma do primeiro sinal. Então, todos eles foram transformados novamente para o domínio do tempo,

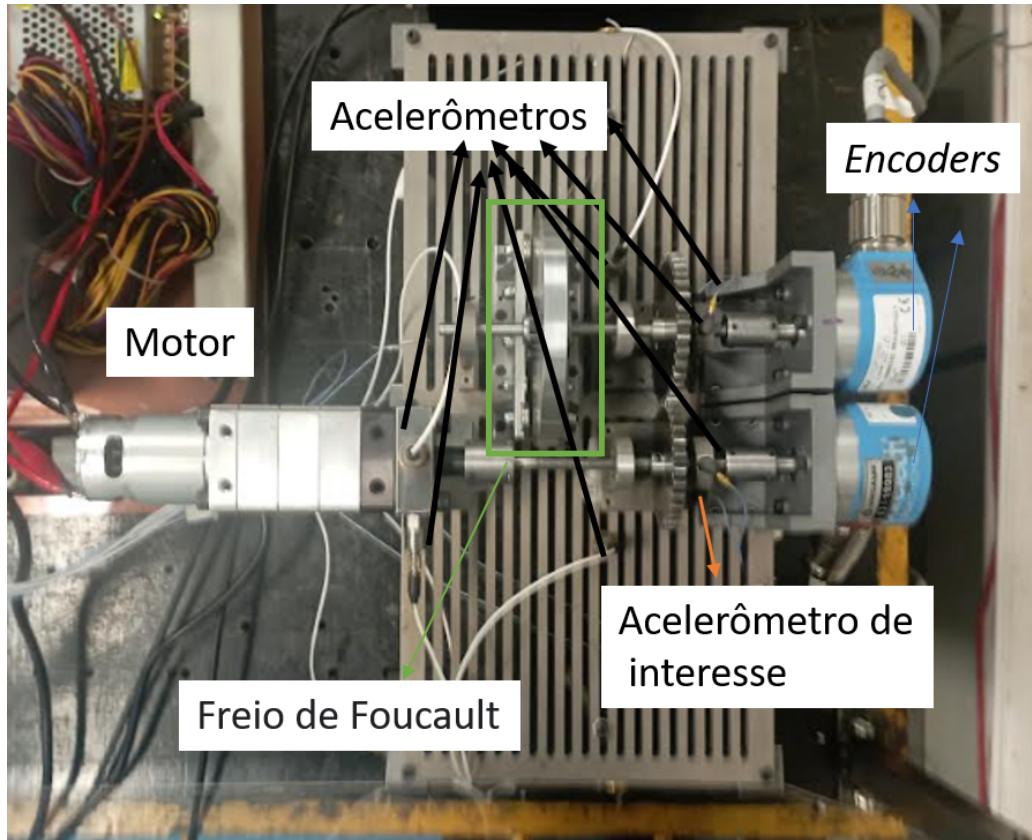


Figura 8.8: Foto da bancada com identificação dos componentes

através de uma DFT inversa. Por fim, foi obtida a sua média.

As medidas foram realizadas para três níveis de velocidade do eixo de entrada: $2,5\text{Hz}$, 5Hz e 10Hz , tanto sem a presença de carga (sem acionamento do freio), como com a presença de carga. A seguir, são apresentados os resultados tanto para o sinal integral quanto para a diferença do sinal com trinca e saudável.

8.2.1 Resultados do sinal integral

A Figura 8.9 mostra o espectro de potência dos sinais saudável, com trinca de $0,05\text{ mm}$ e de $1,88\text{ mm}$ na condição sem carga e no menor nível de velocidade testado ($2,5\text{ Hz}$). É possível, como indicado na figura, identificar picos de potência em frequências correspondentes a múltiplos da frequência de engrenamento. A potência do sinal na condição mais severa da trinca é superior às potências dos sinais saudável e com a condição de trinca menor, principalmente a partir de 500 Hz . As potências dos sinais saudável da trinca de $0,05\text{ mm}$ são próximas ao longo de todo o espectro. Os resultados para a mesma velocidade, mas na configuração com carga, são apresentados na Figura 8.10. A presença de carga destacou mais os picos múltiplos da frequência de engrenamento, mas não causou alteração significativa no resultado para identificação da trinca. Assim, para esta velocidade, é possível identificar a presença de uma trinca severa pela potência do sinal, mas a presença de uma trinca incipiente não seria possível.

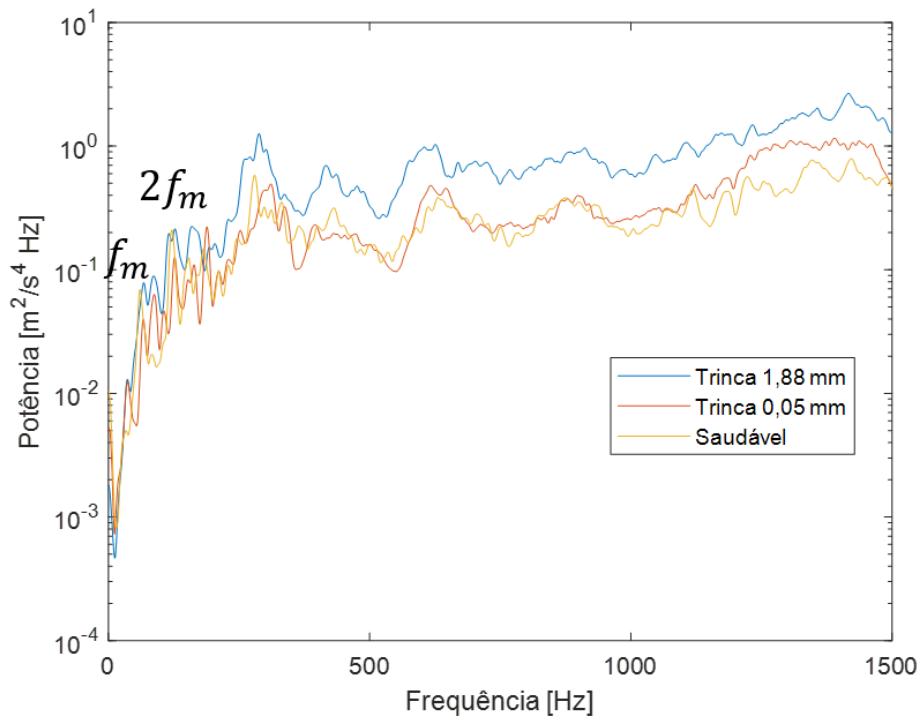


Figura 8.9: Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

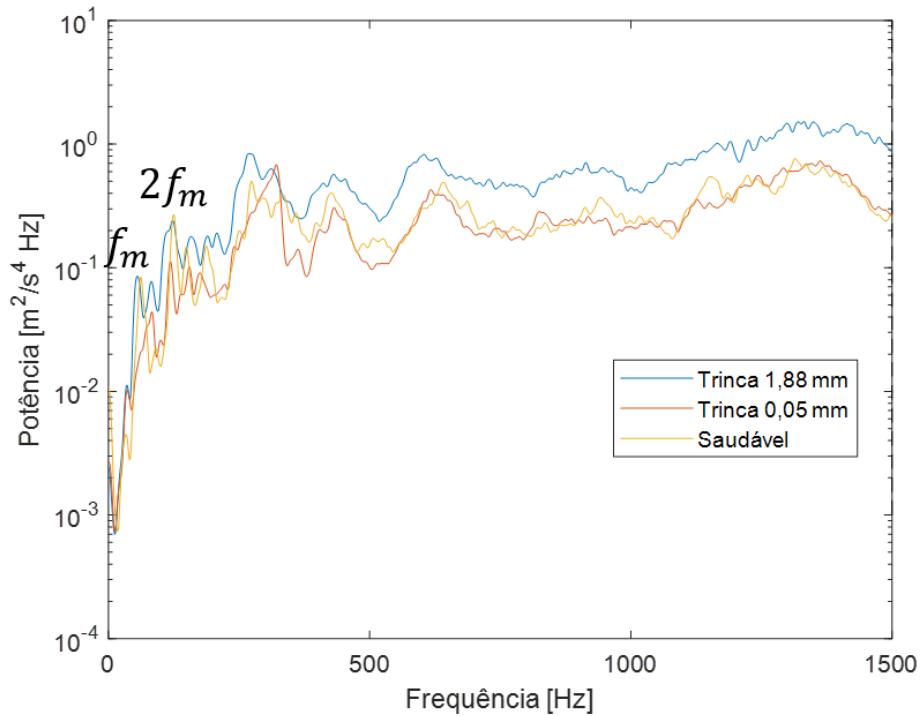


Figura 8.10: Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz. (Azul: Trinca de 1,88 mm ; Laranja: Trinca de 0,05 mm; Amarelo: Sinal saudável)

Os espectros de potência dos sinais na velocidade de 5 Hz para as condições sem carga e com carga são apresentados nas Figuras 8.11 e 8.12, respectivamente. Comparando-se estas figuras com as figuras correspondentes a velocidade de 2,5 Hz, nota-se um aumento na potência dos sinais. O comportamento dos sinais saudável, com trinca de 0,05 mm e com trinca de 1,88 mm mantém-se: a potência do sinal com a maior trinca é maior que a dos outros dois sinais, principalmente acima de 500 Hz, mas a diferenciação entre o sinal saudável e com trinca de 0,05 mm não é clara. Novamente, a presença de carga adicional no sistema não parece ter causado algum efeito claro neste aspecto do sinal, mas fez com que a potência aumentasse nos picos múltiplos da frequência de engrenamento destacados.

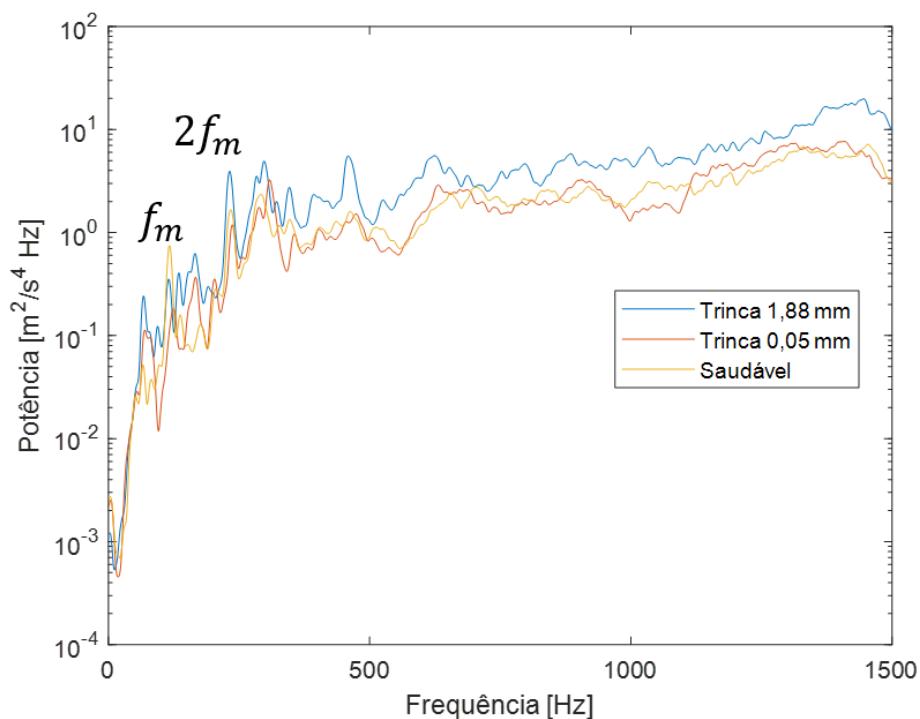


Figura 8.11: Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

Na velocidade nominal de 10 Hz, a potência dos sinais aumentam de forma geral, tanto na condição sem carga, mostrada na Figura 8.13, como na condição com carga, Figura 8.14, quando comparados aos resultados em velocidades mais baixas. A presença de carga faz com que a potência nos picos múltiplos da frequência de engrenamento aumentem. A diferença de potência entre os sinais saudável, com trinca de 0,05 mm e 1,88 mm fica mais clara a partir 1100 Hz.

Como constatado no Capítulo 6, o espectro de potência da primeira função de modo intrínseco (obtida pelo método EMD) evidenciava mais o efeito da presença de trincas no sinal. Na Figura 8.15, que apresenta este resultado para o experimento em velocidade de 2,5 Hz sem carga, fica evidente o aumento da potência do sinal na presença de trinca, tanto para o caso da trinca incipiente, quanto para o caso da trinca menor. Na condição com carga, cujo resultado é

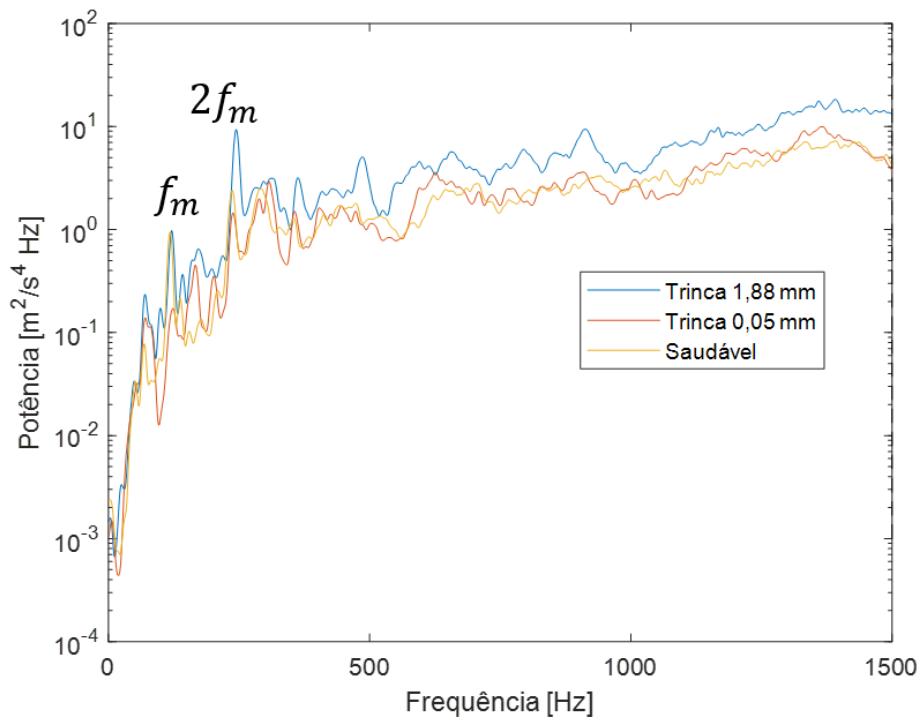


Figura 8.12: Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

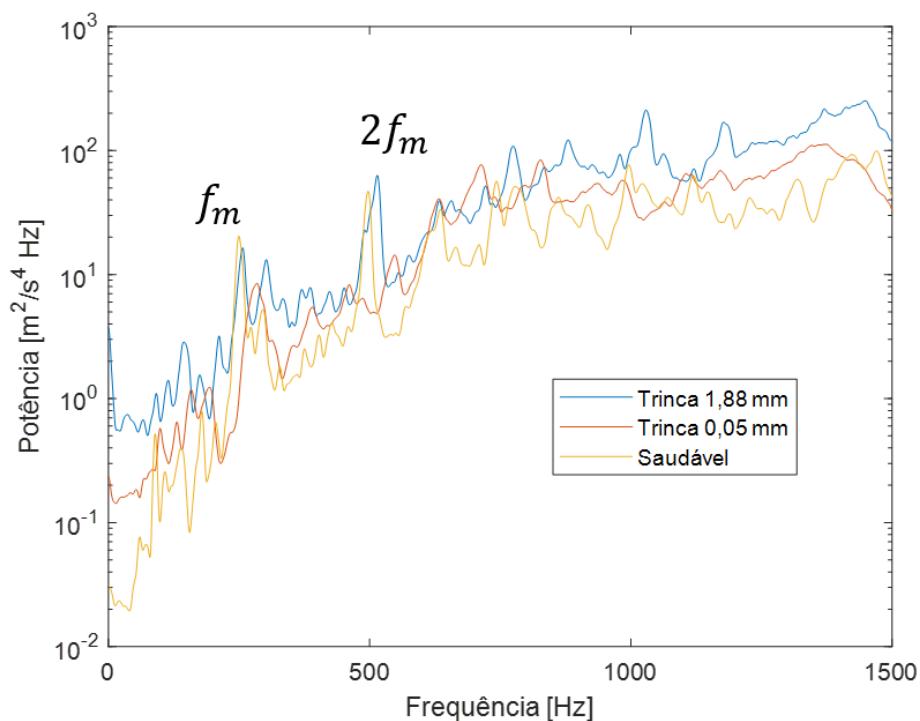


Figura 8.13: Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

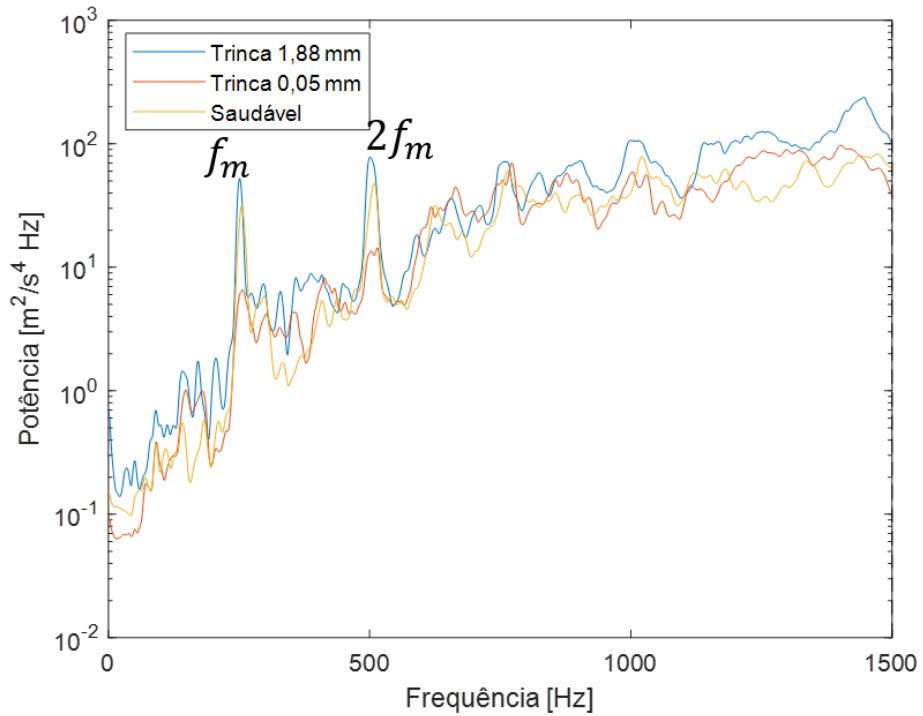


Figura 8.14: Espectro de potência dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

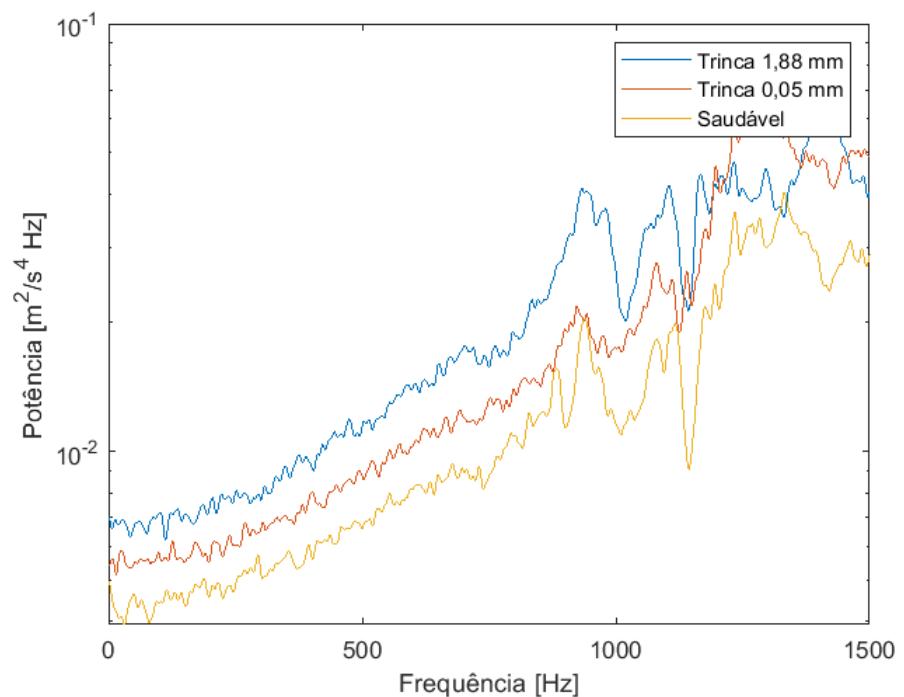


Figura 8.15: Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

mostrado na Figura 8.16, a diferença não é tão evidente no caso da trinca de 0,05 mm quando comparada ao sinal saudável. Entretanto, quando analisam-se os "vales" do sinal correspondentes, fica evidente o aumento da potência na presença da trinca incipiente.

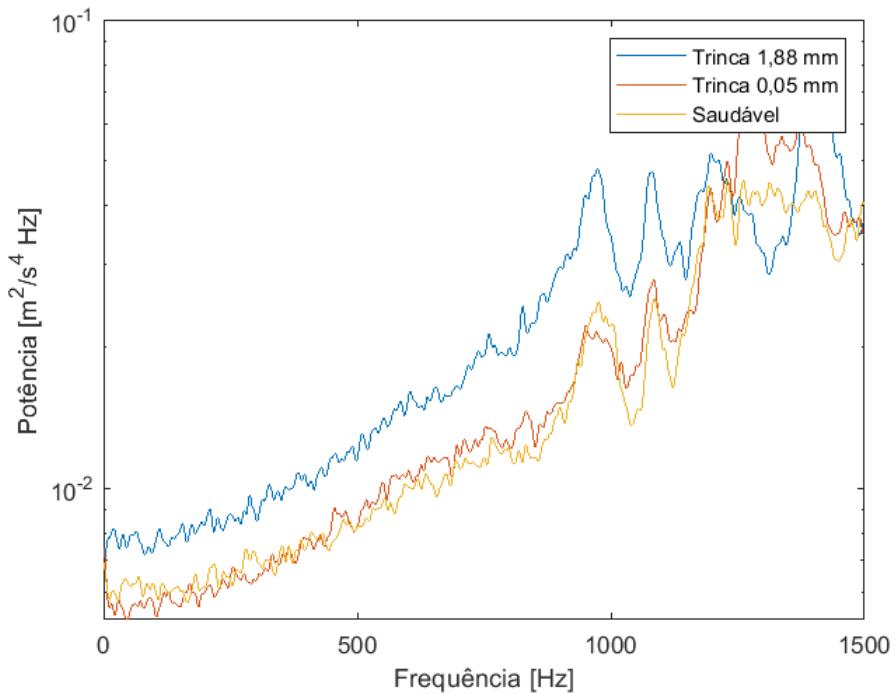


Figura 8.16: Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

Nos casos sem e com carga, na velocidade de 5 Hz (Figuras 8.17 e 8.18, o aumento da potência do sinal causado pela trinca de 0,05 mm é menos evidente. O aumento de potência causado pela trinca de 1,88 mm é evidente ao longo de quase toda a faixa de frequências apresentada.

A potência da primeira IMF na condição sem carga e na velocidade de 10 Hz aumenta conforme o aumento da trinca ao longo de quase toda a faixa de frequências mostrada na Figura 8.19. Já no caso com carga, apresentado na Figura 8.20, esse aumento é mais evidente até 1000 Hz.

O valor absoluto da Transformada de Hilbert do sinal na velocidade de 2,5 Hz nas condições com e sem carga são mostradas nas Figuras 8.21 e 8.22. Na condição sem carga, o aumento das amplitudes na presença da trinca 0,05 mm em relação ao sinal saudável é mais evidente do que na condição com carga. No caso da trinca de 1,88 mm, o aumento das amplitudes é evidente nos dois casos.

Na velocidade de 5 Hz, mais períodos do sinal podem ser verificados no mesmo intervalo de tempo (Figuras 8.21 e 8.22. É possível notar o aumento de algumas amplitudes na presença da trinca de 0,05 mm, enquanto este aumento é bem pronunciado no caso da trinca de 1,88 mm, tanto na condição com carga como na condição sem carga.

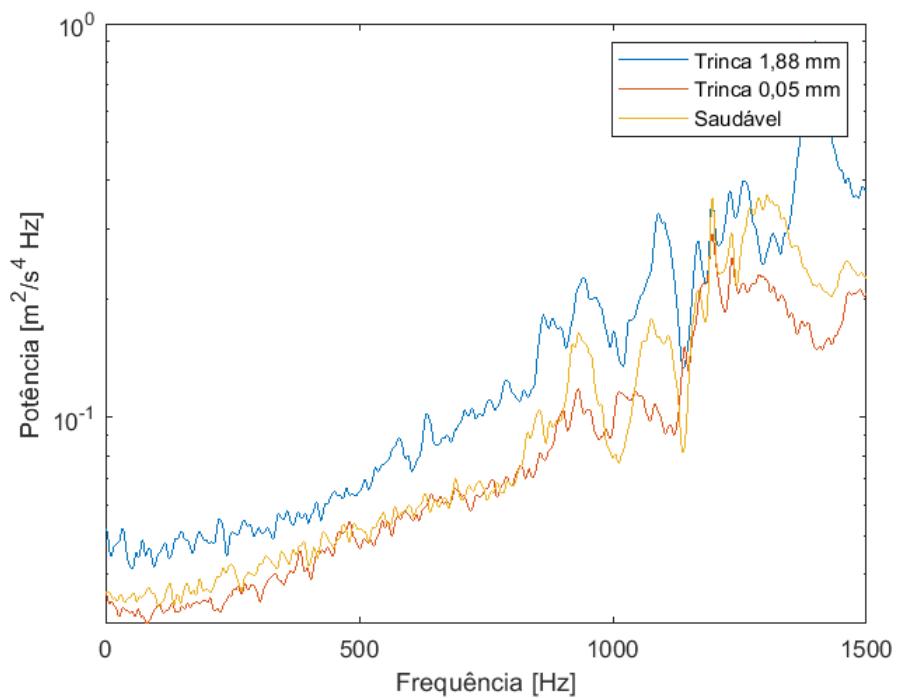


Figura 8.17: Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

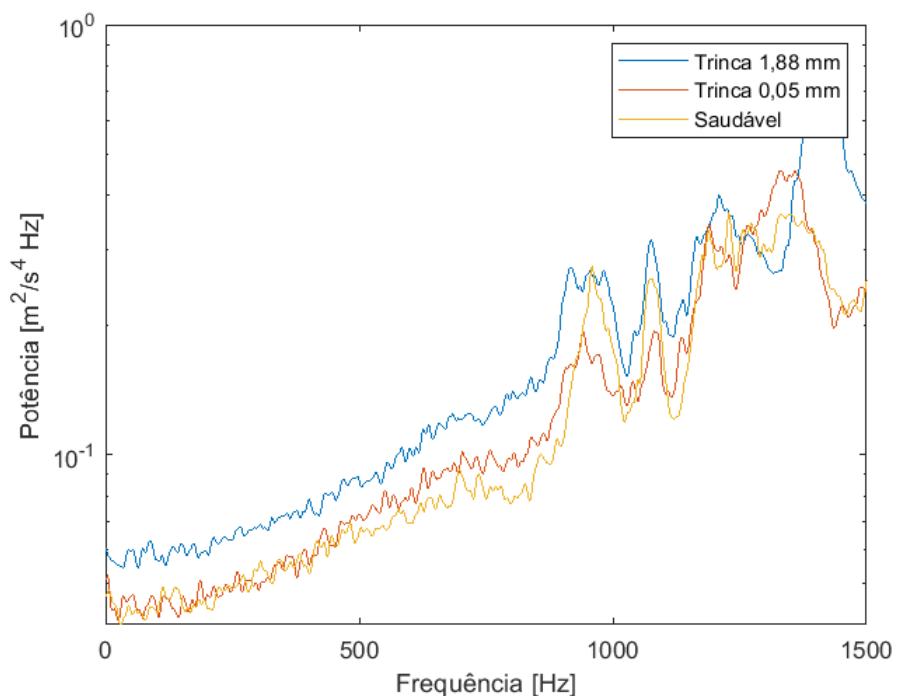


Figura 8.18: Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

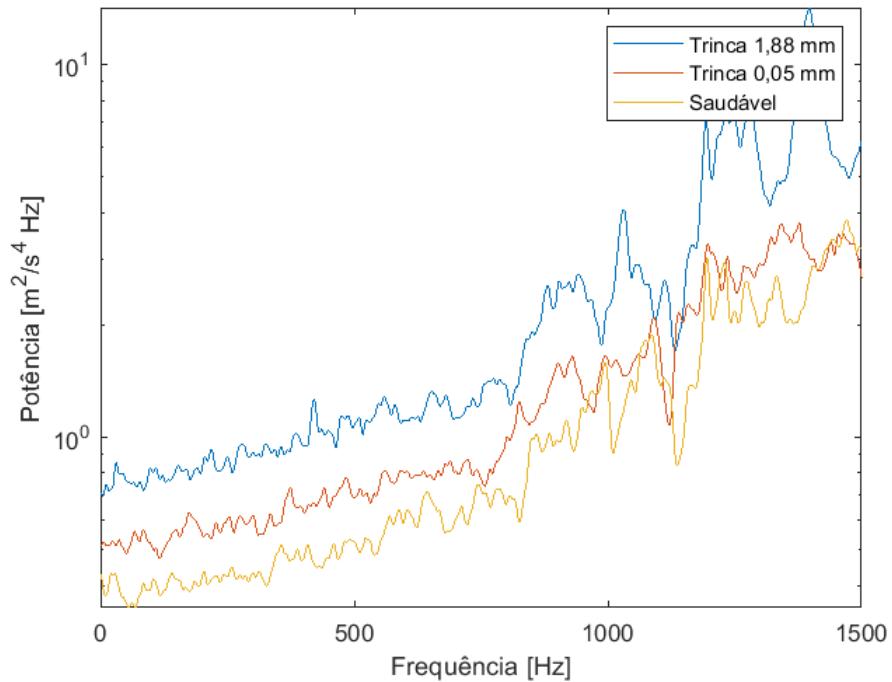


Figura 8.19: Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

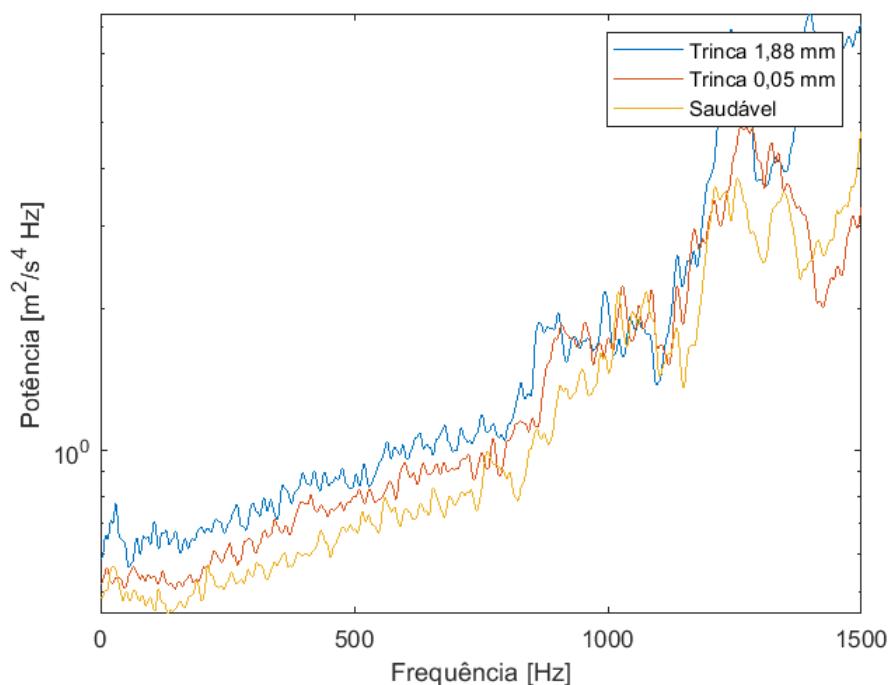


Figura 8.20: Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

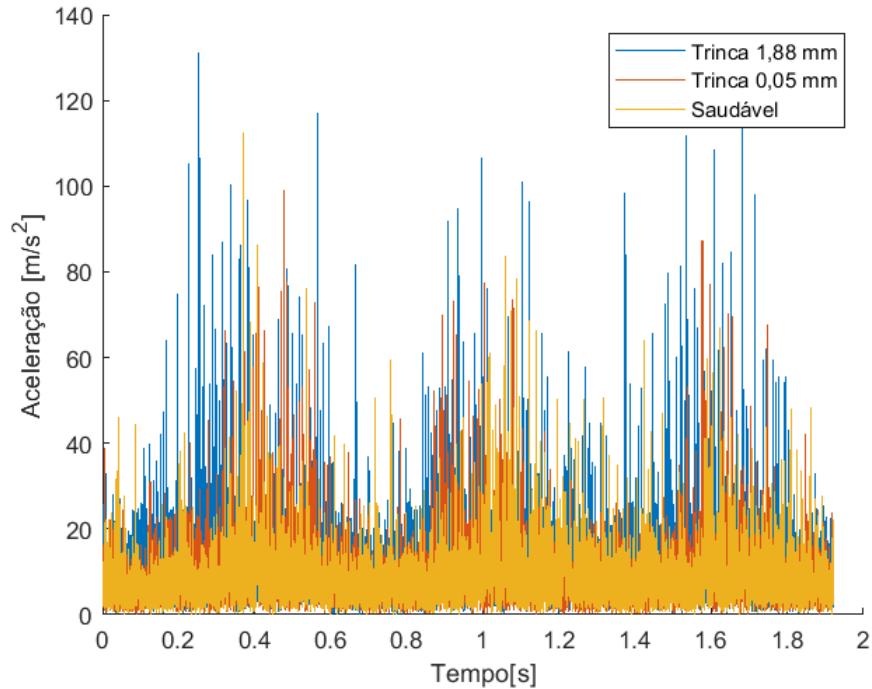


Figura 8.21: Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

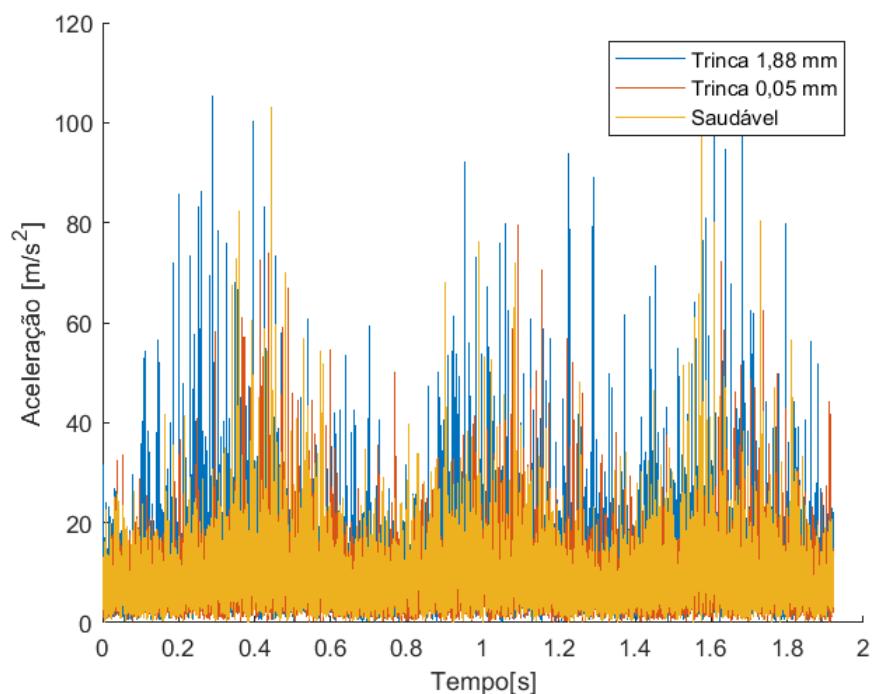


Figura 8.22: Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

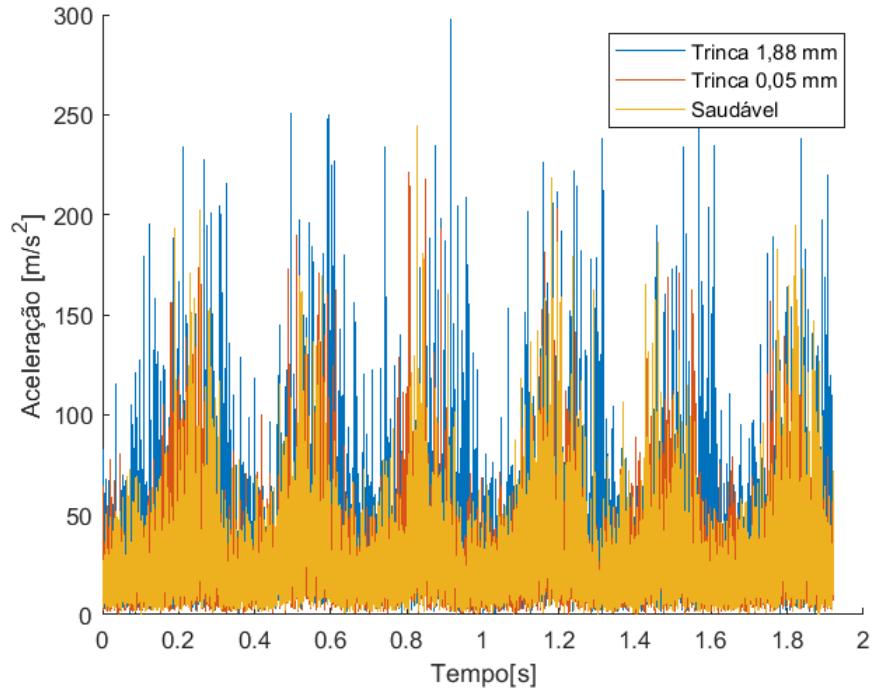


Figura 8.23: Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

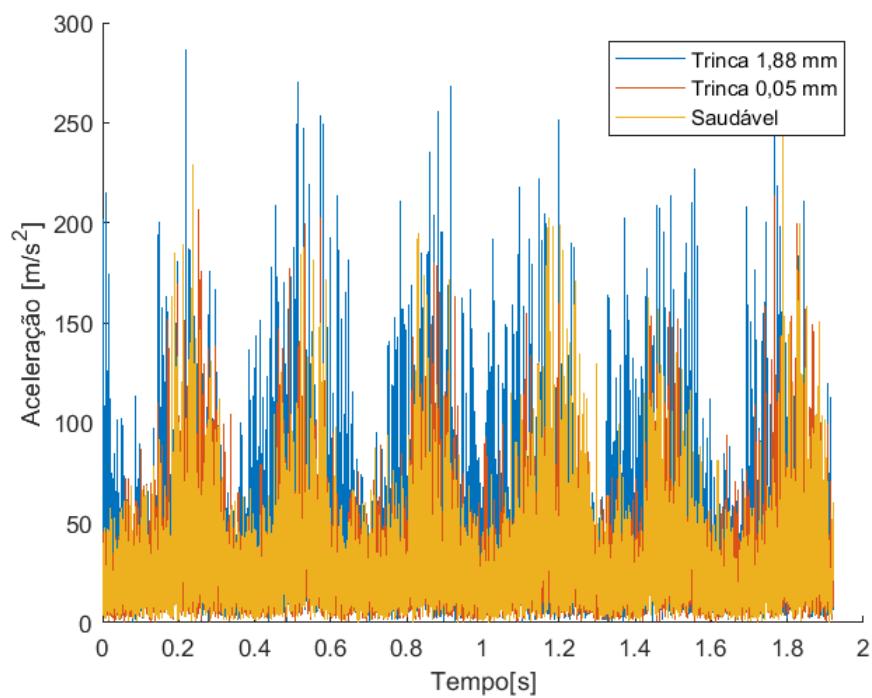


Figura 8.24: Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

Na velocidade de 10 Hz (Figuras 8.25 e 8.26), em que ainda mais períodos podem ser vistos no mesmo intervalo de tempo, fica mais claro o aumento da amplitude causado pela trinca incipiente nas laterais dos picos do sinal. No caso da trinca maior, este aumento é mais evidente. Assim, pode-se notar que, no domínio do tempo, a presença de trinca causa um aumento nas amplitudes de aceleração em torno dos seus picos.

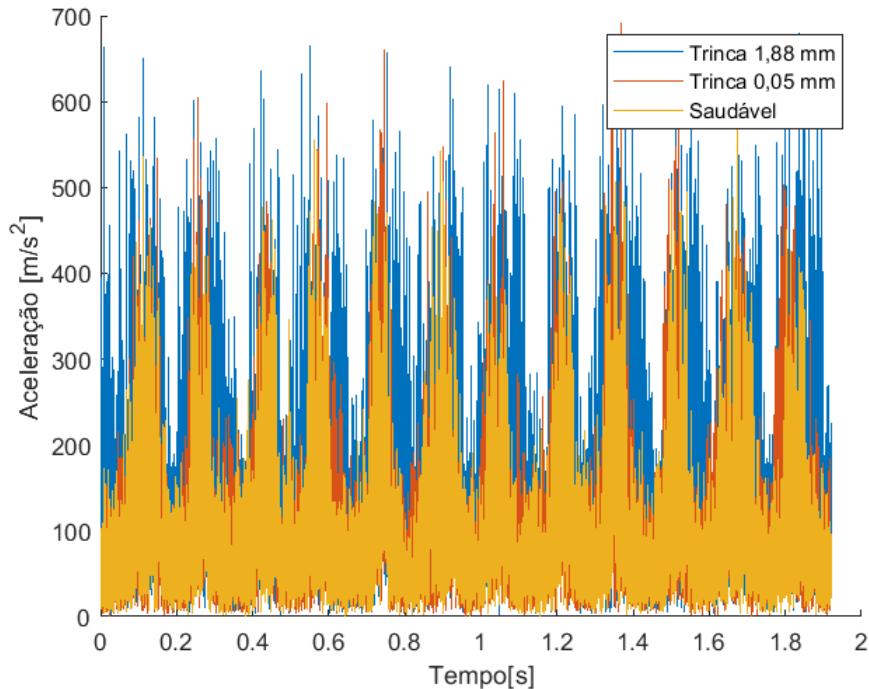


Figura 8.25: Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

8.2.2 Resultados da diferença dos sinais com defeito e saudável

Considerando a posse de um sinal de referência, ou seja, considerando que se conheça o sinal saudável, como é o caso deste experimento, pode-se aplicar os mesmos métodos para a diferença entre o sinal com trinca e o sinal saudável.

Para este sinal, o espectro de potência na velocidade de 2,5 Hz e na condição sem carga é mostrado na Figura 8.27. O mesmo resultado para a mesma velocidade, mas na condição com carga, é apresentado na Figura 8.28. Em ambas, nota-se que os picos múltiplos da frequência de engrenamento, que são evidentes nos sinais integrais (Figuras 8.9 e 8.10), são atenuados. Isto porque estes picos estão presentes, basicamente com a mesma amplitude, nas condições saudável e com trinca. Entretanto, ao longo de toda a faixa de frequência acima de 500 Hz é evidente o aumento da potência do sinal com o aumento da profundidade da trinca.

Resultados semelhantes são vistos na velocidade de 5 Hz, nas condições sem e com carga (Figuras 8.29 e 8.30). A diferença entre os níveis de potência de cada sinal, entretanto, é menor,

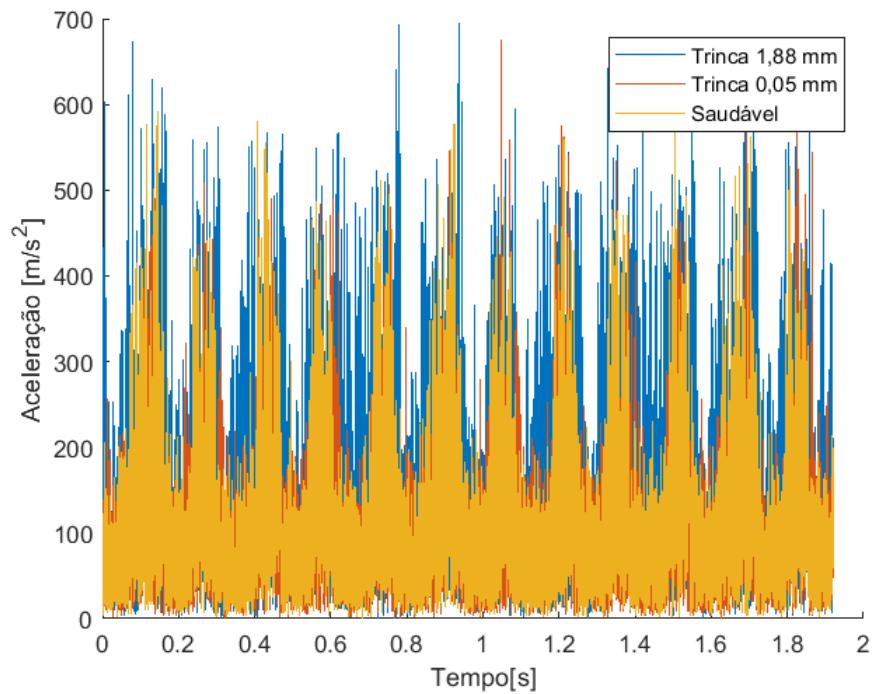


Figura 8.26: Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trincas na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

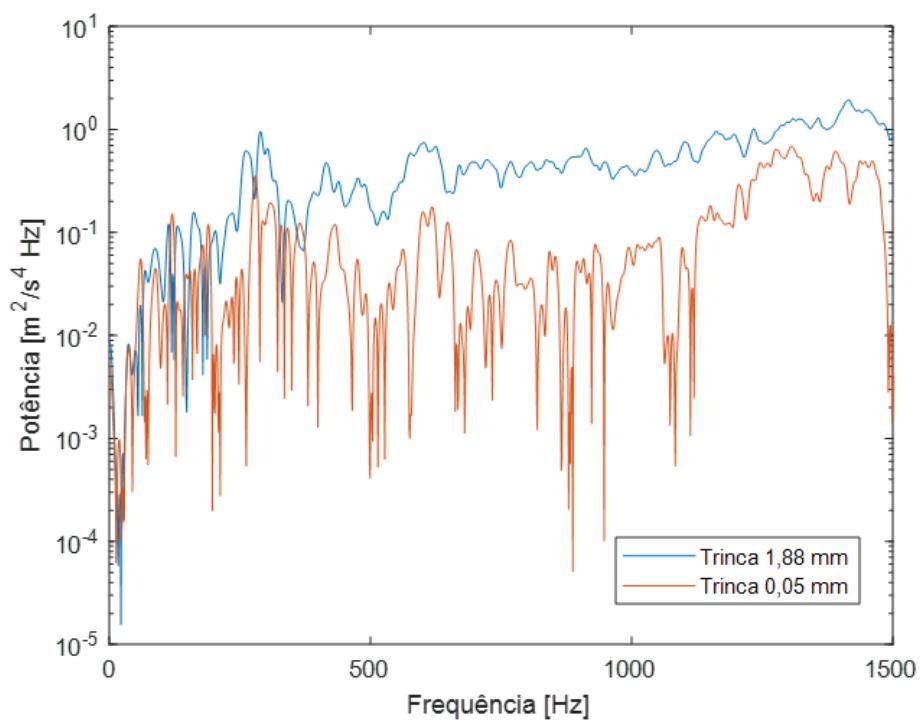


Figura 8.27: Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

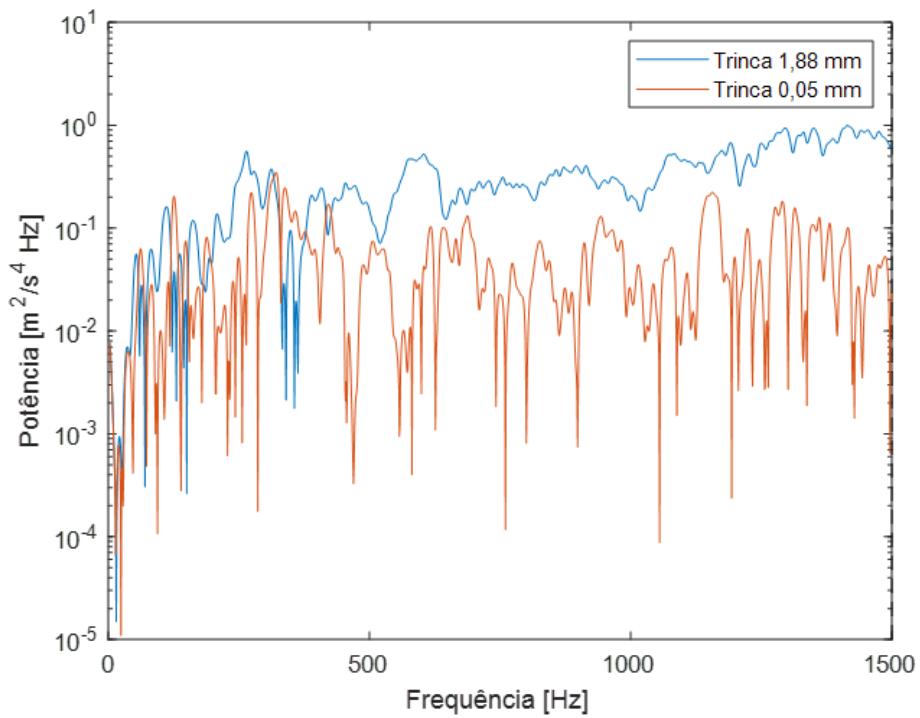


Figura 8.28: Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

mas ainda é evidente o aumento da potência para o caso da maior trinca.

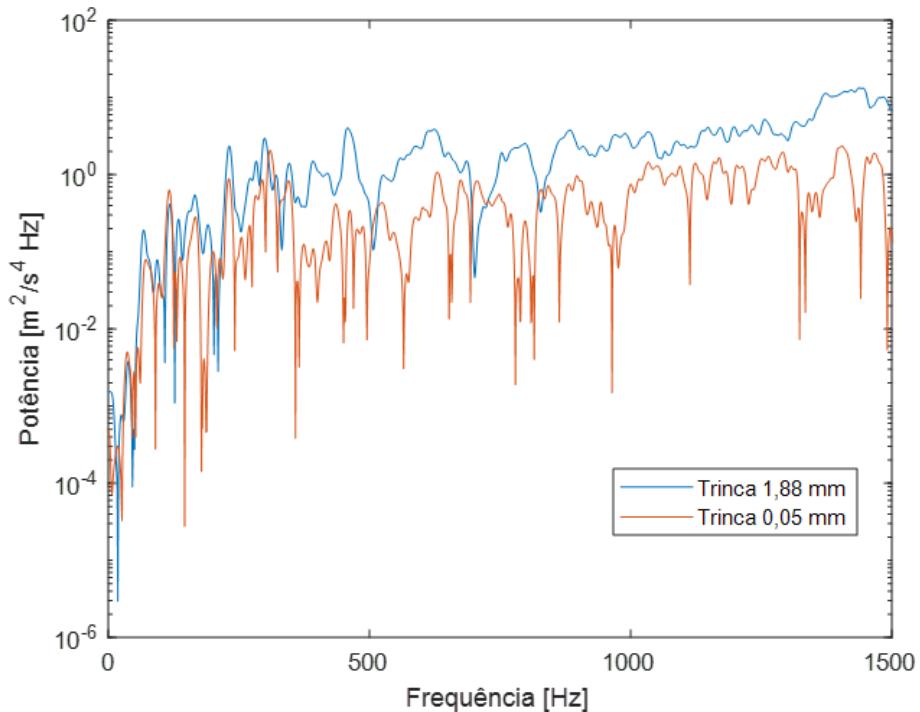


Figura 8.29: Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

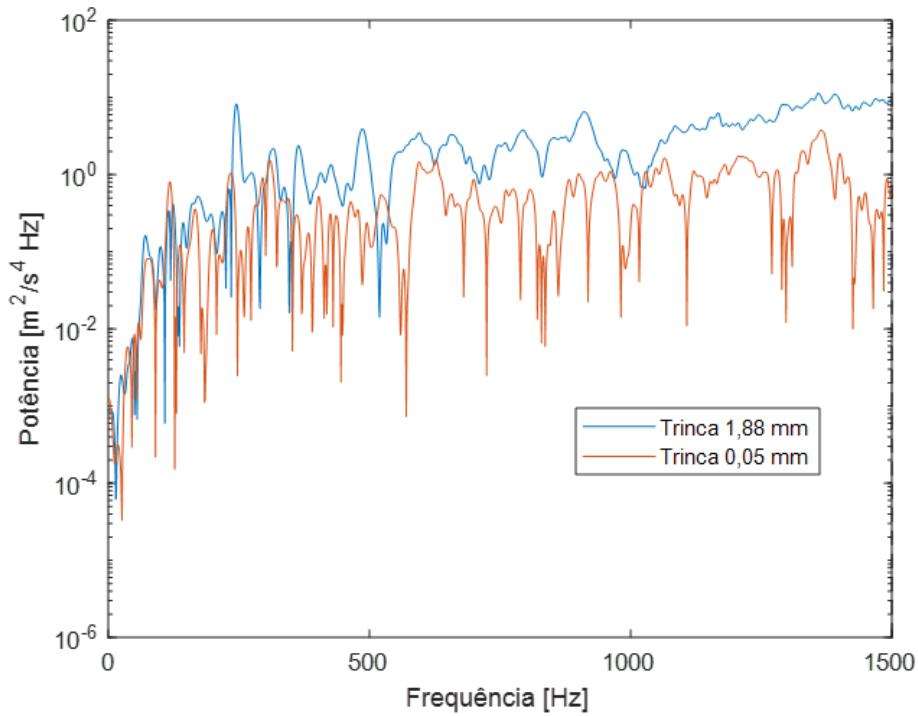


Figura 8.30: Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

Nos casos da velocidade de entrada de 10 Hz (Figuras 8.31 e 8.32), os picos múltiplos da frequência natural ainda são evidentes quando analisa-se a potência da diferença do sinal com trinca e saudável. A diferença entre os níveis de potência é ainda menor, sendo mais difícil identificar a presença de uma trinca maior que a outra nesta velocidade.

Os espectros de potência da primeira IMF das diferenças entre sinais com trinca e saudáveis na velocidade de 2,5 Hz nas condições sem e com carga são mostrados nas Figuras 8.33 e 8.34. Nos dois casos, é evidente o aumento de potência com o aumento do comprimento da trinca. Apesar da diferença entre os valores de potência de cada nível de trinca diminuir na condição de velocidade de 5 Hz (Figuras 8.35 e 8.36), ainda é claro o aumento da potência para a maior trinca. Esta mesma observação de mantém para os casos da velocidade de 10 Hz : a potência deste sinal analisado aumenta com o aumento da trinca em toda a faixa de frequências analisada.

As Figuras 8.39 e 8.40 mostram os valores absolutos das Transformadas de Hilbert para a diferença dos sinais com trinca e saudável na velocidade de 2,5 Hz , nas condições com e sem carga. Em ambas, é evidente que a trinca maior gera maiores amplitudes, principalmente em torno dos maiores picos. Isso é verificado mais facilmente com o aumento da velocidade para 5 Hz (Figuras 8.41 e 8.42). Na velocidade de 10 Hz (Figuras 8.43 e 8.44), este aumento das amplitudes entre picos com o aumento da trinca é bastante claro.

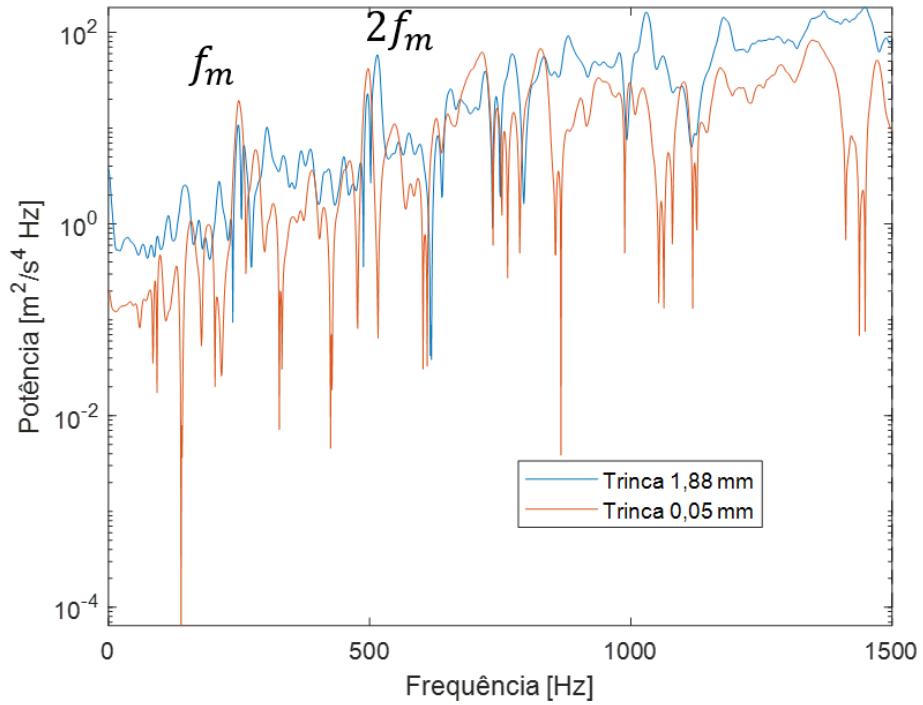


Figura 8.31: Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

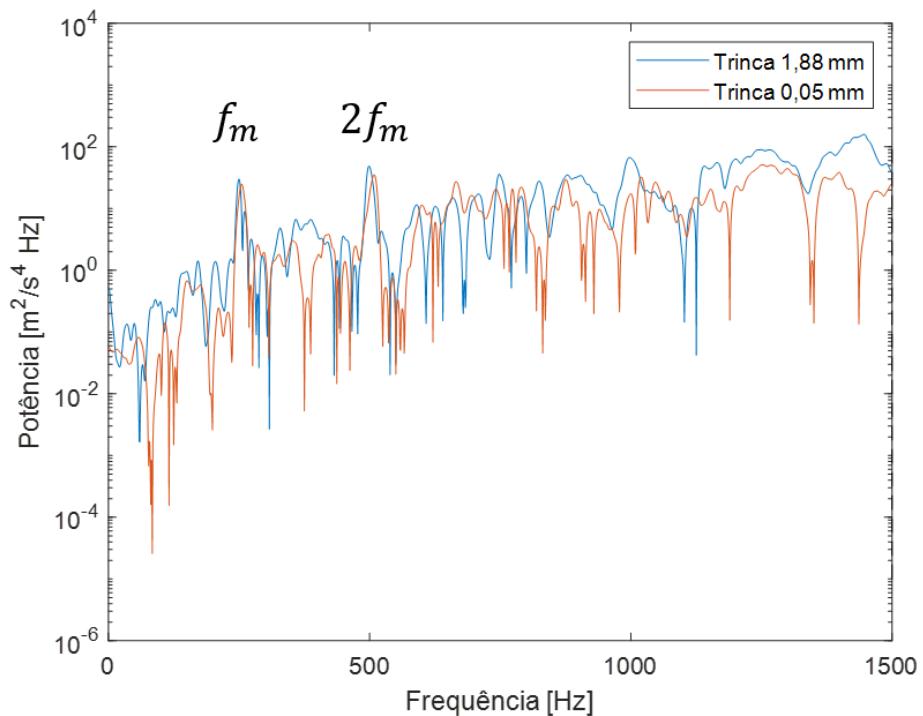


Figura 8.32: Espectro de potência das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

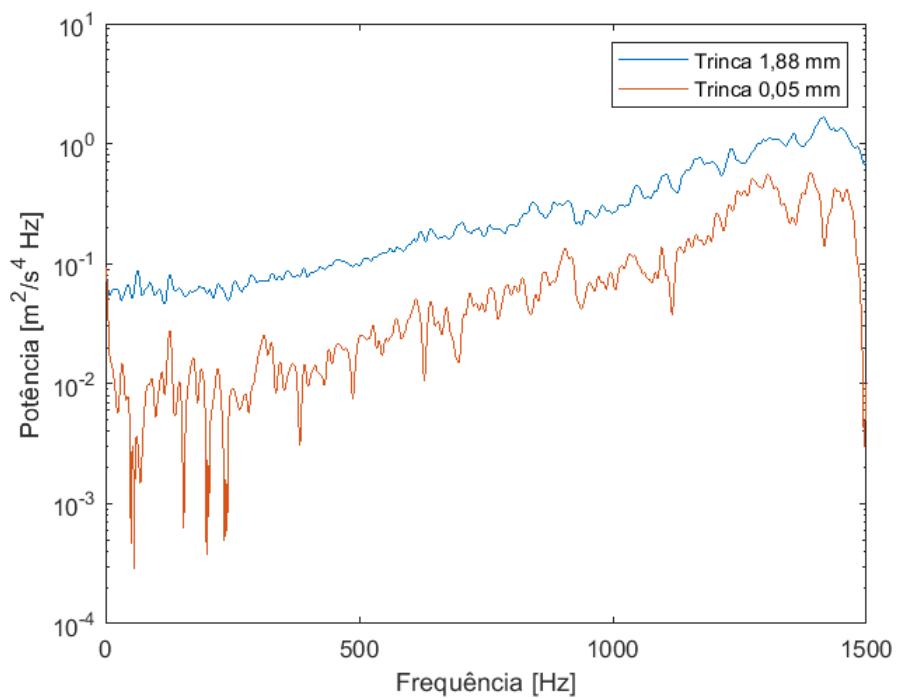


Figura 8.33: Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

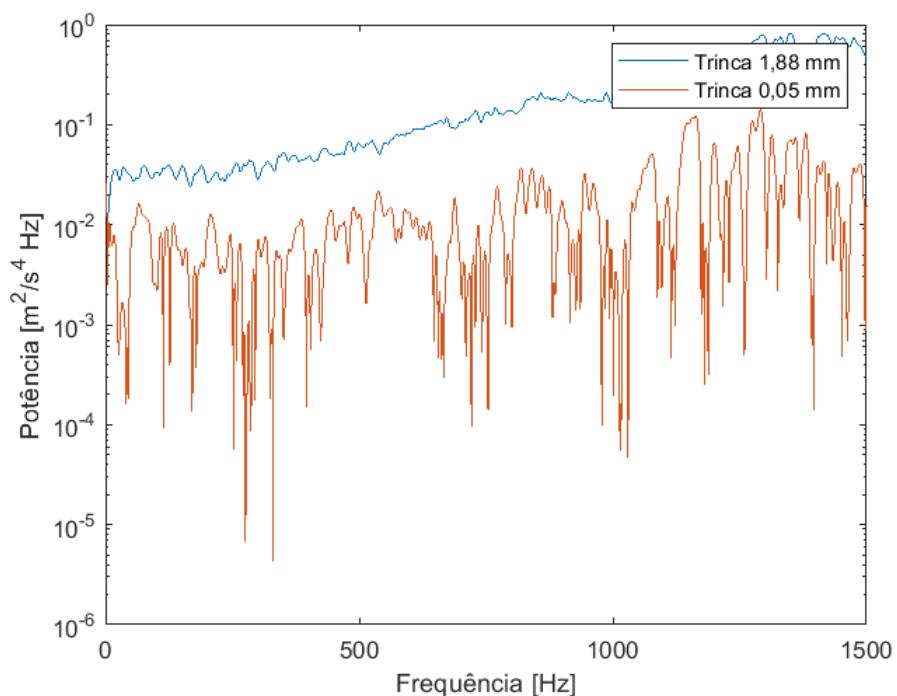


Figura 8.34: Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

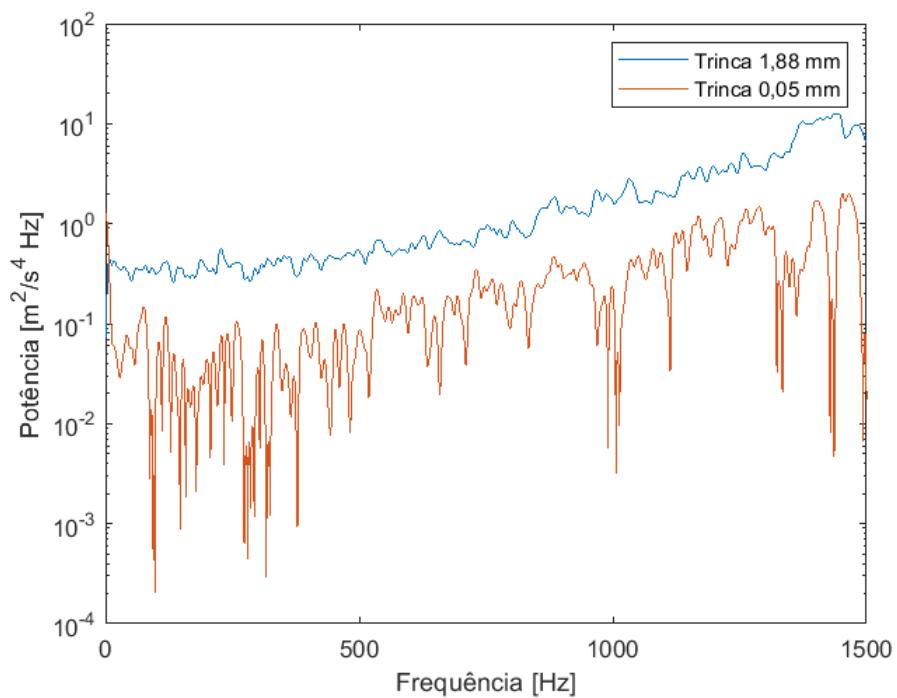


Figura 8.35: Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

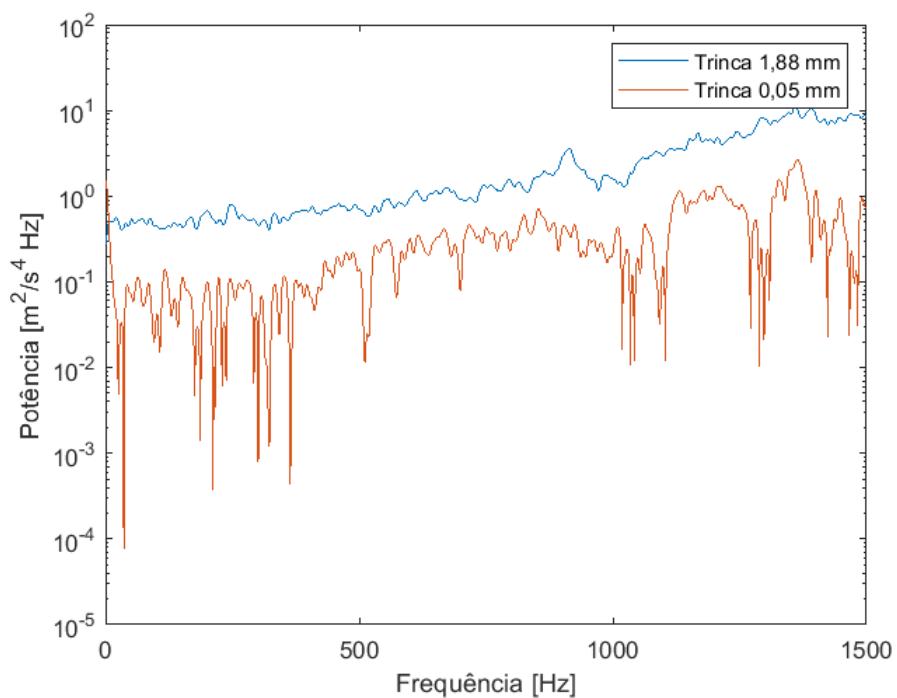


Figura 8.36: Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

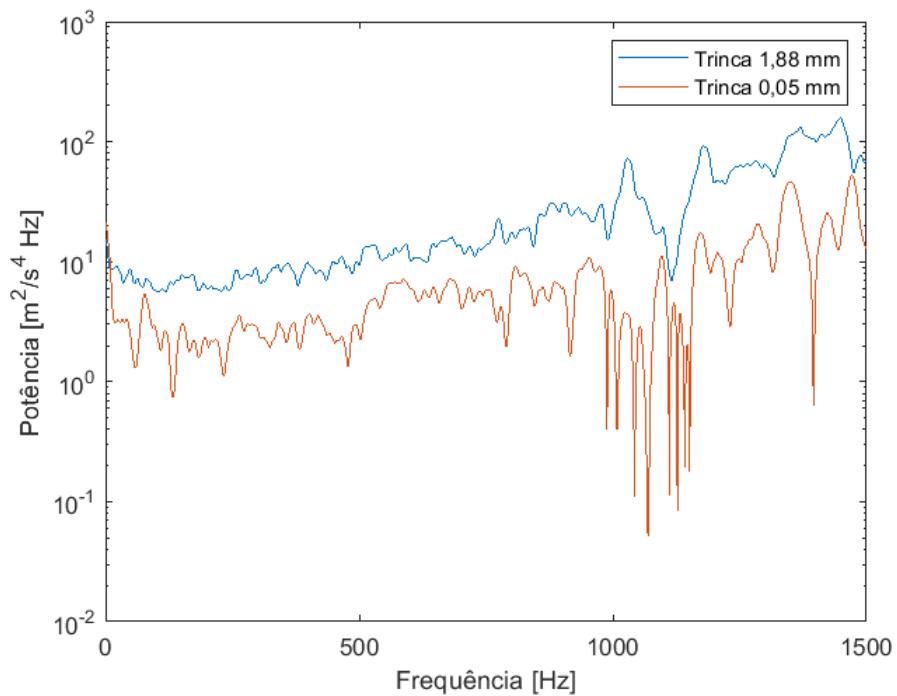


Figura 8.37: Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

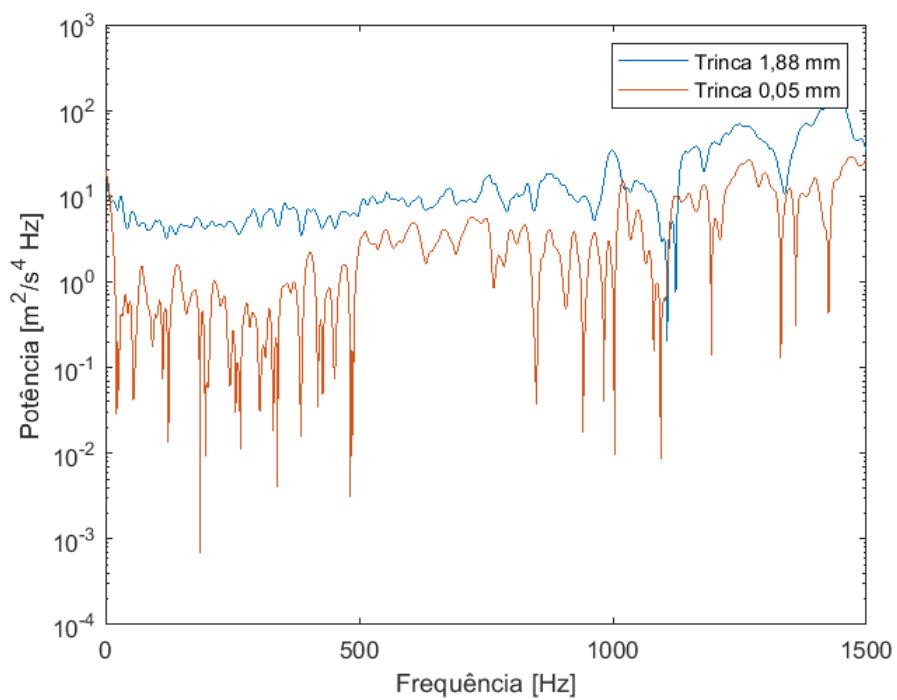


Figura 8.38: Espectro de potência da primeira IMF das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

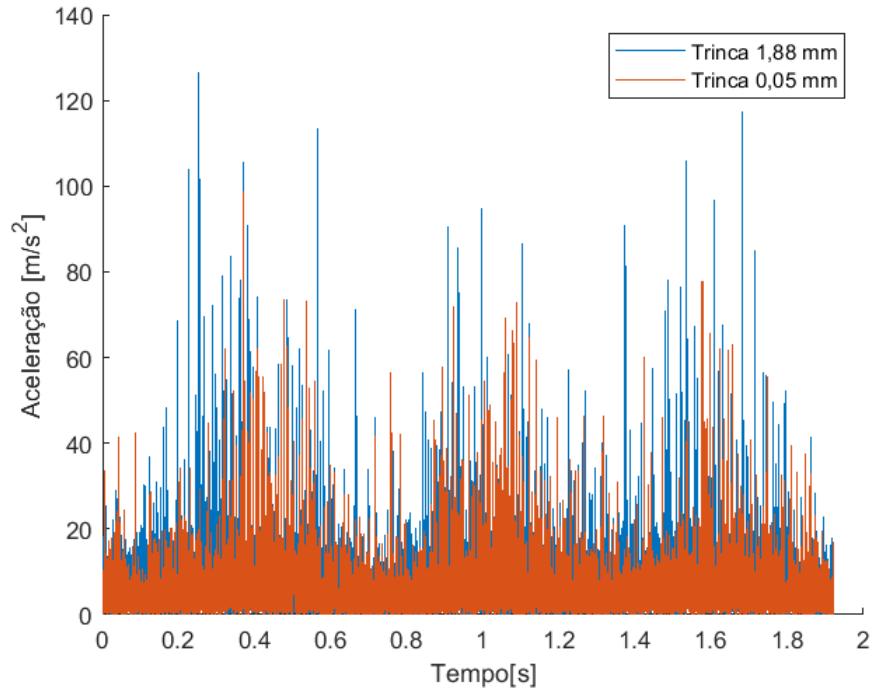


Figura 8.39: Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

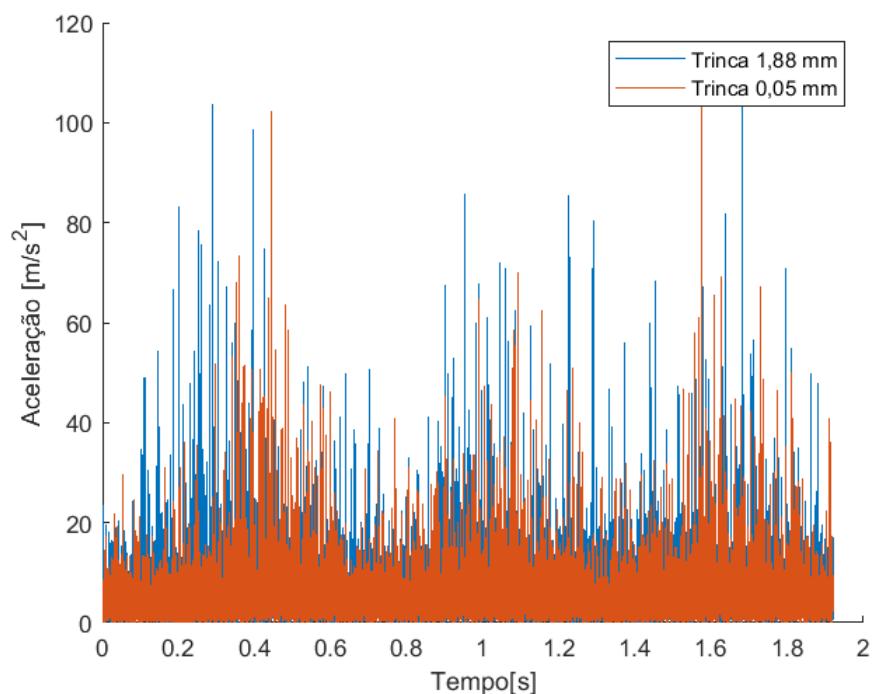


Figura 8.40: Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 2,5 Hz.

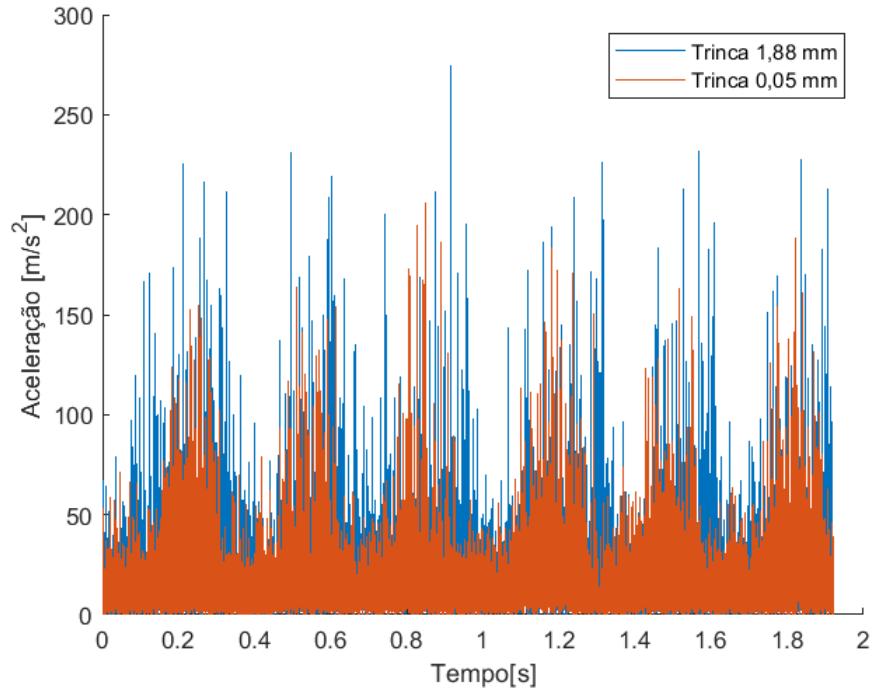


Figura 8.41: Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

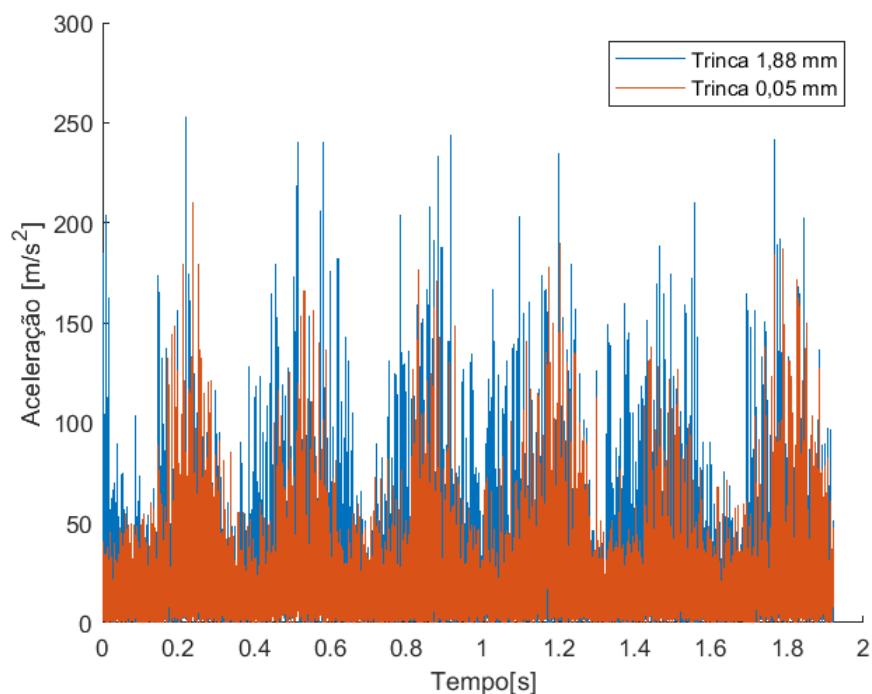


Figura 8.42: Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 5 Hz.

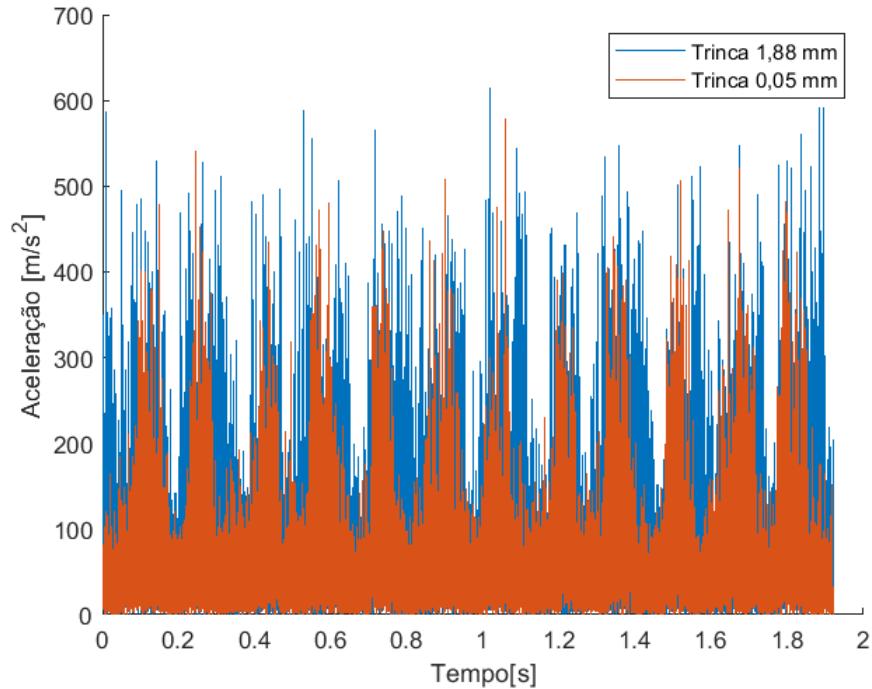


Figura 8.43: Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição sem carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

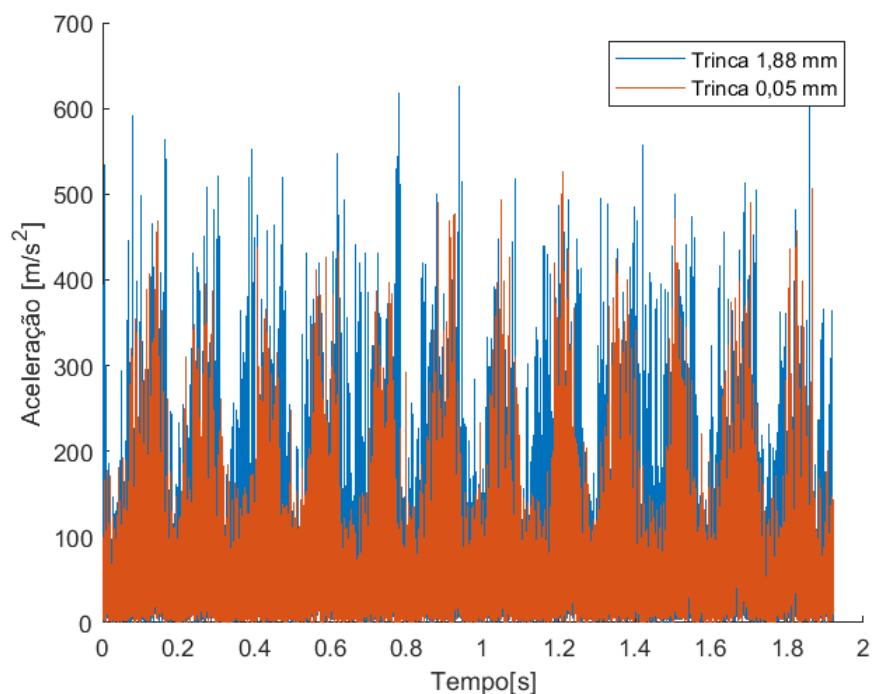


Figura 8.44: Transformada de Hilbert das diferenças entre sinal com trinca e saudável na condição com carga e velocidade nominal do eixo de entrada de 10 Hz.

8.3 Resultados de banco de dados

Cao *et al.* (2018b) conduziram um conjunto de experimentos a respeito de diversas falhas em caixas de transmissão e os resultados de tais experimentos foram disponibilizados ao público em Cao *et al.* (2018a). Uma das falhas testadas foi a trinca, de forma que pode-se, então, aplicar a metologia aqui proposta neste conjunto de dados por eles fornecido. Entretanto, só foi avaliado um comprimento de trinca, de forma que, neste caso, só é possível comparar os dados do sinal saudável e do sinal com a falha.

A Figura 8.45 mostra a foto e o desenho esquemático da bancada por eles utilizada. Trata-se de uma caixa de transmissão de dois estágios. O motor aciona o eixo em que está o pinhão de 32 dentes. A partir do seu contato com uma engrenagem de 80 dentes, o movimento é transmitido para o segundo eixo, no qual está montada outra engrenagem de 48 dentes. Por sua vez, esta transmite movimento para o eixo de saída a partir do contato com uma engrenagem de 64 dentes. Para aumentar o torque no sistema, há um freio magnético neste terceiro eixo. A trinca é inserida na raiz do dente do pinhão, como pode ser visto na Figura 8.46.

A medição de velocidade é realizada no eixo de entrada a partir de um tacômetro e a medição da vibração é feita por um acelerômetro alocado na caixa que envolve o sistema, entre os eixos de entrada e intermediário. A taxa de amostragem é de 20kHz e 104 medidas de cada condição são fornecidas no conjunto de dados (Cao *et al.*, 2018b), de forma que os resultados aqui apresentados são resultado de uma média das medidas fornecidas (calculadas de acordo com cada método de análise, como explicado na seção anterior).

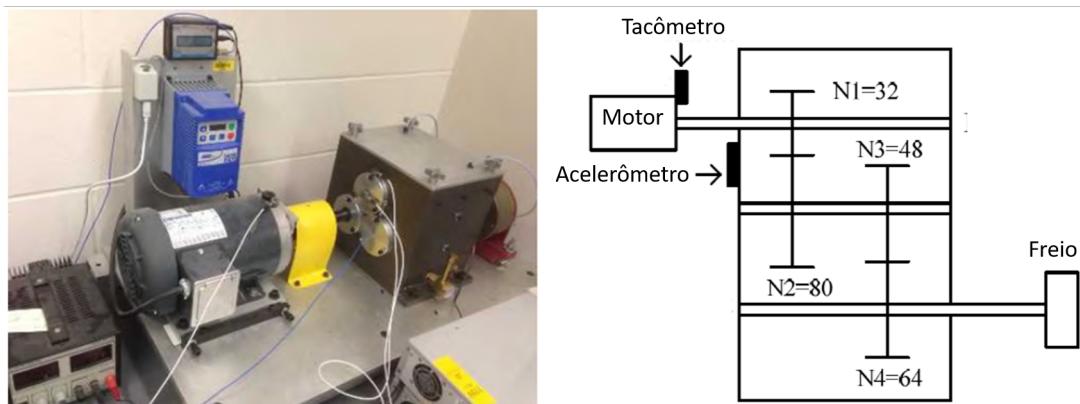


Figura 8.45: Foto e visão esquemática da bancada experimental do trabalho de Cao *et al.* (2018b). Adaptado de Cao *et al.* (2018b).

O espectro de potência dos sinais saudável e com falha deste experimento são mostrados na Figura 8.47. É possível verificar que, nos picos, a diferença de amplitude não é muito evidente, mas nos vales, isto é, entre os picos, a potência do sinal aumenta com a presença da trinca, assim como foi constatado no Capítulo 6.

Considerando a potência da primeira IMF, apresentada na Figura 8.48, também é possível constatar o aumento da potência na presença de trinca. Há um pico evidente em que as potências

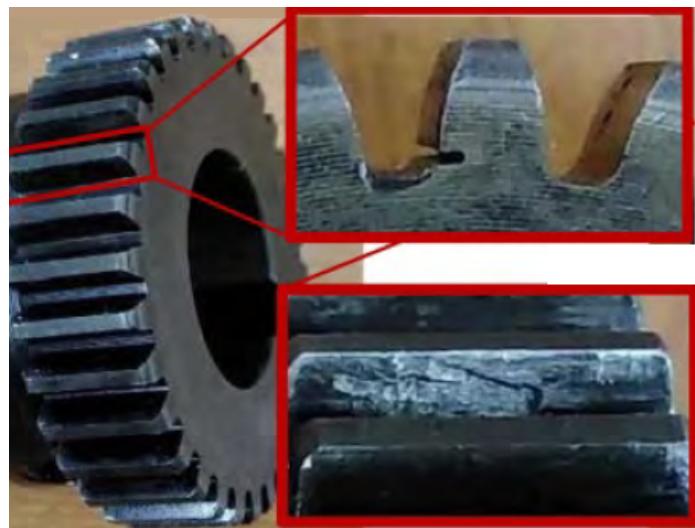


Figura 8.46: Foto da trinca na raiz do dente do trabalho de Cao *et al.* (2018b). Adaptado de Cao *et al.* (2018b).

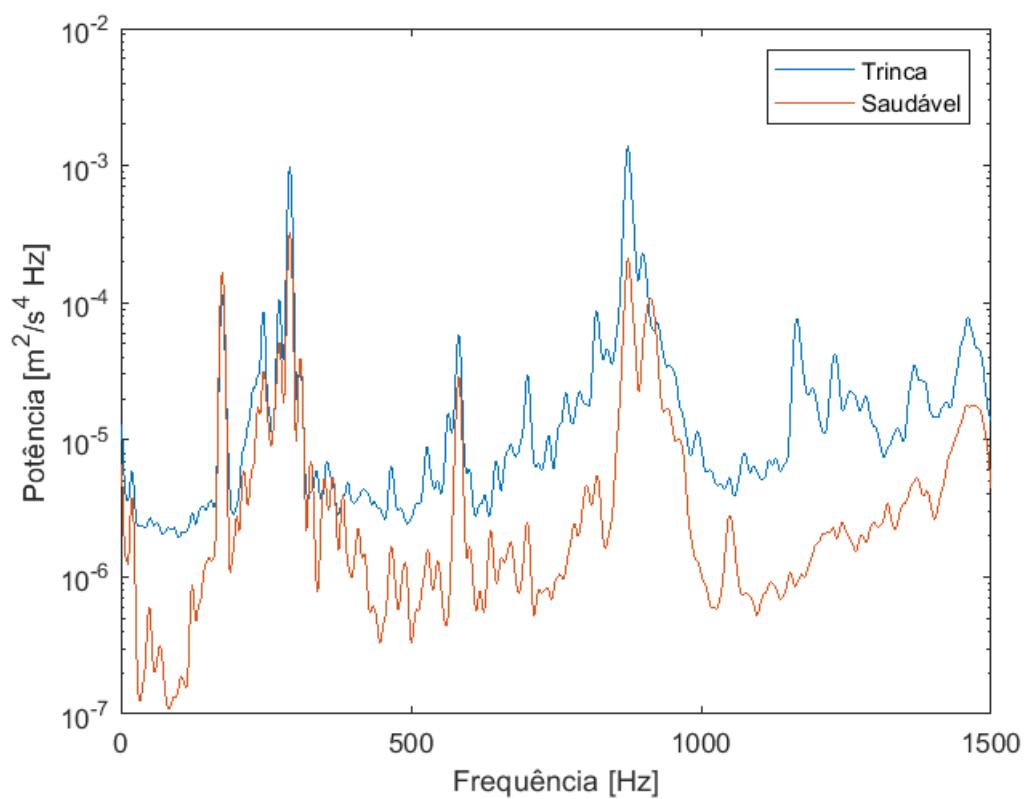


Figura 8.47: Espectro de potência dos sinais saudável e com trinca dos dados fornecidos por Cao *et al.* (2018a).

são próximas (em torno de 900 Hz), mas ao longo de todo o resto da faixa de frequências, a diferença entre a potência do sinal saudável e com trinca é muito clara.

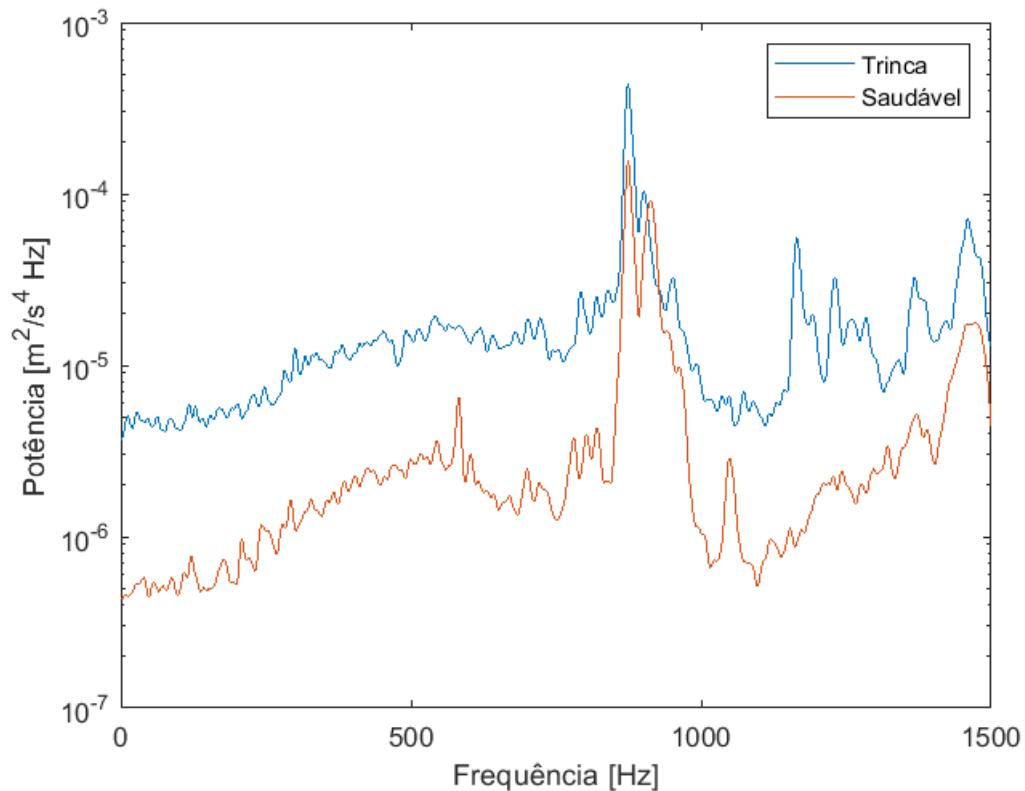


Figura 8.48: Espectro de potência da primeira IMF dos sinais saudável e com trinca dos dados fornecidos por Cao *et al.* (2018a).

Por fim, analisando a TH do sinal saudável e com trinca (Figura 8.49) é possível verificar um aumento das amplitudes ao longo de todo o tempo de simulação fornecido.

Este Capítulo apresentou os resultados dos métodos estudados no Capítulo 6 aplicados a simulação da bancada apresentada no Capítulo 7, aos resultados experimentais desta bancada e aos resultados experimentais de um *dataset* produzidos no trabalho de Cao *et al.* (2018b) e disponibilizados em Cao *et al.* (2018a). No próximo Capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho, com base nos resultados aqui apresentados.

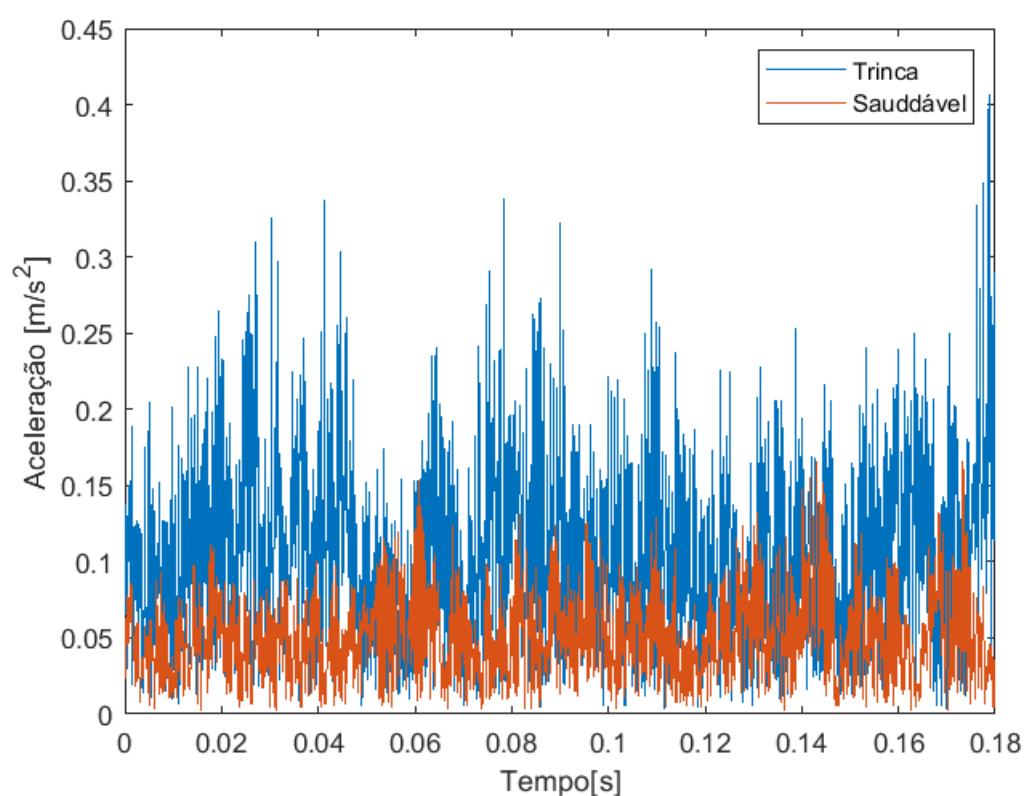


Figura 8.49: Transformada de Hilbert dos sinais saudável e com trinca dos dados fornecidos por Cao *et al.* (2018a).

9 Conclusões

Este trabalho estudou o efeito da presença de trinca em engrenagem cilíndrica de dentes retos na resposta dinâmica de um rotor. Para este estudo, utilizou-se um modelo misto de rotor, em que os eixos são discretizados pelo método de elementos finitos e o engrenamento é descrito por uma rigidez e um amortecimento equivalentes variáveis no tempo, acoplando o movimento dos rotores engrenados. O objetivo era observar alterações na resposta de um dos mancais do rotor na presença de uma trinca na raiz do dente da engrenagem. Isto foi considerado porque, em geral, o mancal é um ponto de acesso para a instalação de sensores para monitoramento e, acompanhando a resposta dinâmica neste ponto, seria possível identificar precocemente a presença de uma trinca e, então, programar a manutenção antes da falha catastrófica.

A rigidez do engrenamento é calculada considerando que o dente da engrenagem é uma viga de seção variável, com uma força sendo aplicada a ela. O ponto de aplicação e o ângulo de aplicação são variáveis, uma vez que o ponto de contato dos dentes varia conforme as engrenagens rotacionam. Esta rigidez equivalente é composta por uma rigidez de flexão, de compressão axial, de cisalhamento e do corpo da engrenagem, onde o dente está fixado. Na presença de uma trinca na raiz do dente, a rigidez de flexão e a rigidez de cisalhamento ficam reduzidas, causando assim uma alteração no padrão da rigidez quando o dente trincado entra em contato. A rigidez total do engrenamento também depende da quantidade de dentes em contato ao mesmo tempo. Por estes motivos, a rigidez do engrenamento é variável no tempo. O amortecimento do engrenamento, neste trabalho, foi considerado como uma função desta rigidez.

No método de elementos finitos, o eixo é dividido em elementos menores, considerados como de vigas de Timoshenko, sempre alocados entre dois nós. Elementos de disco são considerados como rígidos e são alocados em um único nó. Mancais também são alocados em um único nó e são descritos por uma rigidez e um amortecimento equivalentes, que são constantes no caso de mancais de rolamento, considerados neste trabalho.

Com este tipo de modelo, então, foi possível simular um sistema rotativo idealizado com transmissão de movimento por engrenagens, considerando diferentes condições de trinca no dente da engrenagem e avaliar a resposta em um dos mancais desta máquina. Verificou-se que a resposta de aceleração do mancal era a mais promissora para identificar a presença da falha, pois a resposta em deslocamento apresentava alterações em uma ordem de grandeza muito baixa, o que poderia ser difícil de identificar com instrumentos disponíveis.

Além disto, verificou-se que identificar as alterações causadas pela trinca apenas analisando a resposta de aceleração ao longo do tempo seria de difícil entendimento, de forma o sinal foi analisado no domínio da frequência, através de uma Transformada Discreta de Fourier. Neste resultado, notou-se que picos de amplitude na aceleração eram gerados em múltiplos da frequência de engrenamento. Alguns picos em torno deles, gerados pela combinação linear com a frequência natural, tendiam a aumentar na presença de uma trinca. Isto ficava mais evidente no caso de trincas de grande comprimento (maiores que a metade da espessura do dente) e por

isto outras técnicas de análise de sinais foram propostas.

Com o aumento da amplitude destas frequências laterais, entendeu-se que a potência do sinal aumentava na presença de trinca. A primeira técnica de análise, então, foi avaliar o Espectro de Potência do sinal. Neste caso, ficou evidente o aumento da potência entre os picos de amplitude do sinal conforme o comprimento da trinca aumentava. Apesar disto, esta diferença era de mais difícil percepção para trincas menores que 1 mm.

Com o objetivo de evidenciar tais diferenças, estudou-se o espectro de potência do sinal decomposto. Para decompor o sinal, utilizaram-se dois métodos: decomposição de modo empírico e decomposição de modo variacional. O primeiro mostrou resultados interessantes na primeira função. O segundo apresentou diferenças em todas as funções de modo, mas a escala era muito baixa. Assim, este segundo método não foi considerado nas análises com dados de bancada.

Por fim, também avaliou-se o valor absoluto Transformada de Hilbert para evidenciar a presença de trinca. Esta técnica não muda o domínio do sinal, de forma que a sua resposta é temporal. Ela corresponde a obter o envelope do sinal. As alterações provocadas pela trinca também foram evidenciadas neste caso.

Avaliou-se a eficácia dos métodos na presença de ruído branco no sinal, com níveis de 10% e 20% da máxima amplitude da resposta. Neste caso, a identificação da presença de trinca foi dificultada, mas não impossibilitada. De toda a forma, é importante minimizar a presença de ruído no sinal.

Considerando a condição de monitoramento de uma máquina, é possível que se tenha acesso ao sinal saudável, ou seja, que se tenha um sinal de referência. Aplicaram-se todos os métodos à diferença do sinal com a trinca ao saudável. Todos os métodos se mostraram mais eficazes em evidenciar a presença de trinca.

Propôs-se, então, uma bancada experimental para avaliar tais métodos. A bancada consiste em um sistema de dois eixos com a transmissão de movimento por um par engrenado. Foram obtidos os sinais saudável, com uma trinca de 0,05 mm, comprimento considerado incipiente, e com uma trinca de 1,88 mm, considerado um estágio avançado. As trincas foram geradas por eletroerosão, método comumente utilizado em estudos neste tema. Três velocidades de rotação do eixo do pinhão foram consideradas: 2,5 Hz, 5 Hz e 10 Hz. Também foram consideradas as condições sem carga e com carga, que era obtida através do acionamento de um freio de Foucault.

Todos os métodos de análise considerados eficazes foram aplicados ao sinal de aceleração do mancal. Os ruídos foram minimizados através da avaliação da média de 50 resultados em cada método. Conforme os resultados para o sistema hipotético, o espectro de potência da primeira função de modo intrínseco mostrou-se o mais eficaz para evidenciar a presença de uma trinca incipiente. A maior trinca é evidente em todos os métodos. Considerando a diferença entre o sinal com falha e o saudável, todos os métodos se mostraram eficazes para evidenciar o aumento da trinca.

Os métodos de análise também foram aplicados a um banco de dados gerado a partir de um estudo científico disponibilizado ao público geral. Neste experimento, foi medida a vibração de uma caixa de transmissão de dois estágios (três eixos). A trinca estava na engrenagem do eixo motor e o acelerômetro foi alocado na caixa que envolve o sistema, entre os dois eixos em que há a transmissão com a engrenagem trincada. Há 104 medidas de aceleração da condição saudável e com trinca, de forma que os resultados apresentados também são uma média do resultado de cada medida.

A presença da trinca ficou evidente nos três métodos considerados. Ao analisar a potência do sinal, o aumento ocorre significativamente entre os picos de amplitude, assim como foi constatado nas simulações do sistema hipotético. No caso do espectro de potência da primeira função de modo, também há claro aumento da potência na presença de trinca, principalmente em faixas de frequência sem um pico pronunciado. A transformada de Hilbert do sinal também evidenciou um aumento generalizado nas amplitudes de aceleração na presença de trinca.

Assim, com base nestes resultados, conclui-se que avaliar a potência de um sinal de aceleração pode evidenciar a presença de trinca na raiz do dente em engrenagens cilíndricas de dentes retos. Decompondo o sinal e avaliando a potência da primeira função de modo intrínseco, obtida pelo método de decomposição empírico, é possível constatar a presença de trincas incipientes (menores que 1 mm), conforme objetivo deste trabalho. Para isto, é importante que os ruídos presentes no sinal sejam minimizados, o que pode ser feito considerando a média de várias amostras. Com o acesso ao sinal saudável, pode-se monitorar a condição de crescimento da trinca, subtraindo do sinal com falha o sinal de referência (saudável), pois, neste caso, fica evidente o aumento da potência com o aumento da trinca.

9.1 Sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho apresentou, através do uso de alguns métodos de processamento de sinais, a influência de uma trinca em engrenagens de dentes retos no comportamento dinâmico de um sistema rotativo. Para isto, algumas premissas foram adotadas, de forma que mais condições podem ser exploradas. Além disto, o efeito evidenciado aqui pode ser aplicado em técnicas de identificação de falhas em máquinas rotativas. Este capítulo descreve, então, algumas destas possibilidades.

A presença da trinca foi evidenciada pela potência do sinal, principalmente quando este sinal era decomposto pelo método de decomposição de modo empírico e era avaliada a primeira função de modo intrínseco. Outros métodos de decomposição podem ser aplicados, no sentido de isolar o efeito da trinca no sinal. Outros métodos de processamento e análise de sinais também podem ser testados para a identificação do comprimento da trinca.

Nos resultados aqui obtidos, considerou-se que a única mudança que ocorreria no sistema seria a trinca. Assim, em trabalhos futuros, pode-se avaliar a influência de outras falhas na engrenagem (como desgaste, *pitting* e *spalling*) ou no rotor (como em rolamentos e eixo) na

potência do sinal ou de seu primeiro modo. O efeito da presença de trinca em mais de um dente também é uma possibilidade a ser explorada.

Identificada a influência da trinca e sendo os resultados simulados coerentes com a máquina real, podem-se utilizar dados simulados da falha para o treinamento de inteligência artificial. No contexto da indústria 4.0, a identificação e estimação da severidade da trinca podem ser realizados através do seu monitoramento, garantindo a programação de manutenção em momento adequado.

Referências Bibliográficas

ALVES, Diogo Stuani. **Sistemas rotativos sujeitos às não linearidades de mancais lubrificados.** 2018. p. 179. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas.

AMARNATH, M.; CHANDRAMOHAN, S. e SEETHARAMAN, S. Experimental investigations of surface wear assessment of spur gear teeth. **Journal of Vibration and Control**, v. 18, n. 7, 1009–1024, 2012.

URL: <https://doi.org/10.1177/1077546311399947>

ARRUDA, J.R.D.F. e HUALLPA, B.N. **Análise Espectral de Sinais e Sistemas Mecânicos Lineares.** Campinas, 2008.

BARNES, L.; HARDIN, J.; GROSS, C. e WASSON, D. An eddy current braking system. In **1993 (25th) Southeastern Symposium on System Theory**, pp. 58–62. 1993.

BARSZCZ, T. e RANDALL, R.B. Application of spectral kurtosis for detection of a tooth crack in the planetary gear of a wind turbine. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, n. 4, 1352–1365, 2009.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327008002239>

BARTELMUS, W. Mathematical modelling and computer as an aid to gearbox diagnostics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 15, n. 5, 855–871, 2001.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327001914116>

BATHE, K. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis.** Prentice-Hall civil engineering and engineering mechanics series. Prentice-Hall, 1982. ISBN 9780133173055.

URL: <https://books.google.com.br/books?id=WYxwQgAACAAJ>

BERTSEKAS, D.P. Multiplier methods: A survey. **Automatica**, v. 12, n. 2, 133–145, 1976.

CAO, P.; ZHANG, S. e TANG, J. Gear fault data. 4 2018a.

URL: <https://figshare.com/articles/dataset/GearFaultData/6127874>

CAO, P.; ZHANG, S. e TANG, J. Preprocessing-free gear fault diagnosis using small datasets

with deep convolutional neural network-based transfer learning. **IEEE Access**, v. 6, 26241–26253, 2018b.

CASARA, G.C. Desenvolvimento de um dispositivo eletromagnético para controle de força através de correntes induzidas. 2020.

CHAARI, F.; FAKHFAKH, T. e HADDAR, M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on garmesh stiffness. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 28, n. 3, 461–468, 2009.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753808000867>

CHAUDHARI, H.; NALBALWAR, S.L. e SHETH, R. A review on intrensic mode function of emd. In **2016 International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT)**, pp. 2349–2352. 2016.

CHEN, K.; HUANGFU, Y.; ZHAO, Z.; MA, H. e DONG, X. Dynamic modeling of the gear-rotor systems with spatial propagation crack and complicated foundation structure. **Mechanism and Machine Theory**, v. 172, 104827, 2022.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X22000969>

CHEN, K.; MA, H.; CHE, L.; LI, Z. e WEN, B. Comparison of meshing characteristics of helical gears with spalling fault using analytical and finite-element methods. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 121, 279–298, 2019.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832701830743X>

CHEN, Z. e SHAO, Y. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth. **Engineering Failure Analysis**, v. 18, n. 8, 2149–2164, 2011.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630711001816>

COLBOURNE, J.R. **The Geometry of Involute Gears**. Springer-Verlag, Nova iorque, 1 ed., 1987. ISBN 9781461291466.

COWPER, G.R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 33, n. 2, 335–340, 06 1966.

URL: <https://doi.org/10.1115/1.3625046>

DE SILVA, C.W. **Modeling and control of engineering systems.** Crc Press, 2009.

DEL RINCON, A.F.; VIADERO, F.; IGLESIAS, M.; DE JUAN, A.; GARCIA, P. e SANCI-BRIAN, R. Effect of cracks and pitting defects on gear meshing. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 226, n. 11, 2805–2815, 2012.

URL: <https://doi.org/10.1177/0954406212437104>

DEMPSTER, J. Signal Analysis and Measurement. In **The Laboratory Computer - A Practical Guide for Physiologists and Neuroscientists**, capítulo 6, pp. 136–171. 1989.

DJEMAL, F.; GHORBEL, A.; GRAJA, O.; ABDENNADHER, M.; WALHA, L. e HADDAR, M. Vibration analysis of nonlinear powertrain model with randomly cracked teeth under acyclism operation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 43, n. 9, 1–12, 2021.

URL: <https://doi.org/10.1007/s40430-021-03151-w>

DRAGOMIRETSKIY, K. e ZOSKO, D. Variational mode decomposition. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 62, n. 3, 531–544, 2014.

ENDESHAW, H.B.; EKWARO-OSIRE, S.; ALEMAYEHU, F.M. e DIAS, J.P. Evaluation of fatigue crack propagation of gears considering uncertainties in loading and material properties. **Sustainability (Switzerland)**, v. 9, n. 12, 2017.

ENDO, H.; RANDALL, R.B. e GOSSELIN, C. Differential diagnosis of spall versus cracks in the gear tooth fillet region. **Journal of Failure Analysis and Prevention**, v. 4, n. 5, 63–71, 2004.

FERNANDES, O.C. Terminologia das Engrenagens. 2004.

FLORES, P. e GOMES, J. Cinemática e Dinâmica de Engrenagens Engrenagens. In **Cinemática e Dinâmica de Engrenagens**, capítulo 1, p. 41. Universidade do Minho, 1 ed., 2014.

FLORES, P.; GOMES, J.; DOURADO, N. e MARQUES, F. Aspectos gerais sobre engrenagens. 2017.

FRISWELL, M.I.; PENNY, J.E.; GARVEY, S.D. e LEES, A.W. **Dynamics of rotating machines**. Cambridge University Press, New York, 2015. ISBN 9780511780509.

GABOR, D. Theory of Communication. **Journal of I.E.E.E.**, v. 93, 429–441, 1946.

GHAFFARI, M.A.; PAHL, E. e XIAO, S. Three dimensional fatigue crack initiation and propagation analysis of a gear tooth under various load conditions and fatigue life extension with boron/epoxy patches. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 135, 126–146, 2015.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794414004184>

GLODEŽ, S.; RAML, M. e KRAMBERGER, J. A computational model for determination of service life of gears. **International Journal of Fatigue**, v. 24, n. 10, 1013–1020, 2002.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112302000245>

GREGORY, R.W.; HARRIS, S.L. e MUNRO, R.G. Dynamic behaviour of spur gears. **ARCHIVE: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1847-1982 (vols 1-196)**, v. 178, n. 1963, 207–226, 1963.

HEALD, M.A. Magnetic braking: Improved theory. **American Journal of Physics**, v. 56, n. 6, 521–522, 1988.

URL: <https://doi.org/10.1119/1.15570>

HOWARD, I.; JIA, S. e WANG, J. The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 15, n. 5, 831–853, 2001.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327001914141>

HU, X.; WU, X.; WANG, J. e MEAGHER, J. Fault Detection of Gears With Different Root Crack Size Using Wavelet. In **Proceedings of the ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences Computers and Information in Engineering Conference**, pp. 1–9. Boston, USA, 2015.

HU, Z.; TANG, J.; ZHONG, J. e CHEN, S. Frequency spectrum and vibration analysis of high speed gear-rotor system with tooth root crack considering transmission error excitation. **Engineering Failure Analysis**, v. 60, 405–441, 2016.

URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.11.021>

HUANG, N.E.; SHEN, Z.; LONG, S.R.; WU, M.C.; SNIN, H.H.; ZHENG, Q.; YEN, N.C.; TUNG, C.C. e LIU, H.H. The empirical mode decomposition and the Hubert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 454, n. 1971, 903–995, 1998.

JARDINE, A.K.; LIN, D. e BANJEVIC, D. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, n. 7, 1483–1510, 2006.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327005001512>

JIA, S. e HOWARD, I. Comparison of localised spalling and crack damage from dynamic modelling of spur gear vibrations. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, n. 2, 332–349, 2006.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327005000300>

KAHRAMAN, A. Load sharing characteristics of planetary transmissions. **Mechanism and Machine Theory**, v. 29, n. 8, 1151–1165, 1994.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0094114X9490006X>

KAHRAMAN, A. e SINGH, R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 146, n. 1, 135–156, 1991a.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X9190527Q>

KAHRAMAN, A. e SINGH, R. Non-Linear Dynamics of a Geared Rotor-Bearing System with Multiple Clearances. **Journal of Sound and Vibration**, v. 114, n. 3, 469–506, 1991b.

KIM, W.; YOO, H.H. e CHUNG, J. Dynamic analysis for a pair of spur gears with translational motion due to bearing deformation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 21, 4409–4421, 2010.

KRAMBERGER, J.; RAML, M.; GLODEŽ, S.; FLAŁKER, J. e POTRČ, I. Computational model for the analysis of bending fatigue in gears. **Computers Structures**, v. 82, n. 23, 2261–2269, 2004. Computational Structures Technology.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794904002299>

KUBUR, M.; KAHRAMAN, A.; ZINI, D.M. e KIENZLE, K. Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: Model and experiment. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, v. 126, n. 3, 398–406, 2004.

LI, C.J. e LEE, H. Gear fatigue crack prognosis using embedded model, gear dynamic model and fracture mechanics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 19, n. 4, 836–846, 2005.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327004000901>

LI, J.; AI, X. e TIAN, Z. Measurement of gear tooth dynamic deformation using dynamic speckle photography. **Chinese Science Bulletin**, v. 43, n. 6, 514 – 518, 1998.

LI, S. e KOLIVAND, A. Crack nucleation and propagation modeling for lubricated spur gear contacts of rough surfaces. **Mechanism and Machine Theory**, v. 170, 104726, 2022.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X22000052>

LIANG, X.; ZHANG, H.; ZUO, M. e QIN, Y. Three new models for evaluation of standard involute spur gear mesh stiffness. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 101, 424–434, 02 2018a.

LIANG, X.; ZUO, M.J. e FENG, Z. Dynamic modeling of gearbox faults: A review. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 98, n. September 2017, 852–876, 2018b.

LIANG, X.; ZUO, M.J. e PANDEY, M. Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set. **Mechanism and Machine Theory**, v. 76, 20–38, 2014.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X14000287>

LITAK, G. e FRISWELL, M.I. Dynamics of a Gear System with Faults in Meshing Stiffness. v. 2, 415–421, 2005.

MA, H.; PANG, X.; FENG, R.; SONG, R. e WEN, B. Fault features analysis of cracked gear considering the effects of the extended tooth contact. **Engineering Failure Analysis**, v. 48, 105–120, 2015a.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630714003549>

MA, H.; PANG, X.; ZENG, J.; WANG, Q. e WEN, B. Effects of gear crack propagation paths

on vibration responses of the perforated gear system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 62-63, 113–128, 2015b.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327015001041>

MA, H.; SONG, R.; PANG, X. e WEN, B. Fault feature analysis of a cracked gear coupled rotor system. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2014, 2014a.

MA, H.; SONG, R.; PANG, X. e WEN, B. Time-varying mesh stiffness calculation of cracked spur gears. **Engineering Failure Analysis**, v. 44, 179–194, 2014b.

URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.05.018>

MA, H.; ZENG, J.; FENG, R.; PANG, X.; WANG, Q. e WEN, B. Review on dynamics of cracked gear systems. **Engineering Failure Analysis**, v. 55, 224–245, 2015c.

URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.06.004>

MA, R. e CHEN, Y. Research on the dynamic mechanism of the gear system with local crack and spalling failure. **Engineering Failure Analysis**, v. 26, 12–20, 2012.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630712001069>

MABUCHI MOTOR. RS-775VC/WC - Data Sheet. 2022.

URL: <https://s3-sa-east-1.amazonaws.com/robocore-lojavirtual/1223/Mabuchi-motor-RS-775-WC-9013.jpg>

MAHGOUN, HAFIDA; BEKKA, RAIS ELHADI e FELKAOUI, AHMED. Gearbox fault diagnosis using ensemble empirical mode decomposition (eemd) and residual signal. **Mechanics & Industry**, v. 13, n. 1, 33–44, 2012.

URL: <https://doi.org/10.1051/meca/2011150>

MARAFONA, J.D.M.; MARQUES, P.M.T.; MARTINS, R.C. e SEABRA, J.H.O. Mesh stiffness models for cylindrical gears : A detailed review. **Mechanism and Machine Theory**, v. 166, n. March, 104472, 2021.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104472>

MCFADDEN, P.D. Detecting Fatigue Cracks in Gears by Amplitude and Phase Demodulation of the Meshing Vibration. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**, v. 108, n. 2, 165–170, 04 1986.

URL: <https://doi.org/10.1115/1.3269317>

MENG, Z.; SHI, G. e WANG, F. Vibration response and fault characteristics analysis of gear based on time-varying mesh stiffness. **Mechanism and Machine Theory**, v. 148, 2020.

MOHAMMED, O. e RANTATALO, M. Gear tooth crack detection using dynamic response analysis. **Insight - Non-Destructive Testing and Condition Monitoring**, v. 55, 08 2013.

MOHAMMED, O.D. e RANTATALO, M. Dynamic response and time-frequency analysis for gear tooth crack detection. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 66-67, 612–624, 2016.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327015002368>

MOHAMMED, O.D. e RANTATALO, M. Gear fault models and dynamics-based modelling for gear fault detection – A review. **Engineering Failure Analysis**, v. 117, n. May, 104798, 2020.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104798>

MOHAMMED, O.D.; RANTATALO, M. e AIDANPÄÄ, J.O. Improving mesh stiffness calculation of cracked gears for the purpose of vibration-based fault analysis. **Engineering Failure Analysis**, v. 34, 235–251, 2013a.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630713002847>

MOHAMMED, O.D.; RANTATALO, M. e AIDANPÄÄ, J.O. Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 54-55, 293–305, 2015.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327014003434>

MOHAMMED, O.D.; RANTATALO, M.; AIDANPÄÄ, J.O. e KUMAR, U. Vibration signal analysis for gear fault diagnosis with various crack progression scenarios. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 41, n. 1, 176–195, 2013b.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327013003671>

N. I. MUSKHELISHVILI. **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**. The Netherlands, 2nd englis ed., 1975. ISBN 978-94-017-3034-1.

NELSON, H.D. A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory. **Journal of Mechanical Design**, v. 102, n. 4, 793–803, 10 1980.

URL: <https://doi.org/10.1115/1.3254824>

NEVZAT ÖZGÜVEN, H. e HOUSER, D.R. Mathematical models used in gear dynamics—A review. **Journal of Sound and Vibration**, v. 121, n. 3, 383–411, 1988.

NEWMARK, N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 2, 67–95, 1959.

NORTON, R.L. **Projeto de Máquinas: uma abordagem integrada**. Bookman, Porto Alegre, 4a ed., 2013. ISBN 9788582600238.

OMAR, F.K.; MOUSTAFA, K.A. e EMAM, S. Mathematical modeling of gearbox including defects with experimental verification. **JVC/Journal of Vibration and Control**, v. 18, n. 9, 1310–1321, 2012.

PANDYA, Y. e PAREY, A. Crack behavior in a high contact ratio spur gear tooth and its effect on mesh stiffness. **Engineering Failure Analysis**, v. 34, 69–78, 2013a.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630713002367>

PANDYA, Y. e PAREY, A. Experimental investigation of spur gear tooth mesh stiffness in the presence of crack using photoelasticity technique. **Engineering Failure Analysis**, v. 34, 488–500, 2013b.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630713002331>

PAREY, A.; EL BADAOUI, M.; GUILLET, F. e TANDON, N. Dynamic modelling of spur gear pair and application of empirical mode decomposition-based statistical analysis for early detection of localized tooth defect. **Journal of Sound and Vibration**, v. 294, n. 3, 547–561, 2006.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X05007352>

PARK, S.; KIM, S. e CHOI, J.H. Gear fault diagnosis using transmission error and ensemble empirical mode decomposition. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 108, 58–72, 2018.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.02.028>

PATEL, A. e SHAKYA, P. Spur gear crack modelling and analysis under variable speed conditions using variational mode decomposition. **Mechanism and Machine Theory**, v. 164, 104357, 2021.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104357>

PEDRERO, J.I.; PLEGUEZUELOS, M.; ARTÉS, M. e ANTONA, J.A. Load distribution model along the line of contact for involute external gears. **Mechanism and Machine Theory**, v. 45, n. 5, 780–794, 2010.

URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.12.009>

PIC DESIGN COMPORATION. Catálogo PIC 35. 1970.

POWELL, M.J.D. A fortran subroutine for solvin systems of non-linear algebraic equations. Relatório técnico, Theoretical Physis Division, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Berkshire, 1968.

RAGHUWANSI, N.K. e PAREY, A. Mesh stiffness measurement of cracked spur gear by photoelasticity technique. **Measurement**, v. 73, 439–452, 2015.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224115003000>

RAGHUWANSI, N.K. e PAREY, A. Experimental measurement of gear mesh stiffness of cracked spur gear by strain gauge technique. **Measurement**, v. 86, 266–275, 2016.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224116001561>

RAO, J.S.; SHIAU, T.N. e CHANG, J.R. Theoretical analysis of lateral response due to torsional excitation of geared rotors. **Mechanism and Machine Theory**, v. 33, n. 6, 761–783, 1998.

RATO, R.; ORTIGUEIRA, M. e BATISTA, A. On the hht, its problems, and some solutions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 22, n. 6, 1374–1394, 2008. Special Issue: Mechatronics.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327007002701>

RINCON, A.; IGLESIAS, M.; DE-JUAN, A. e VIADERO, F. Defect simulation in a spur gear transmission model. In **New Trends in Mechanism Science**, pp. 191–198. Springer, 2010.

SAINSOT, P.; VELEX, P. e DUVERGER, O. Contribution of gear body to tooth deflections -

A new bidimensional analytical formula. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**, v. 126, n. 4, 748–752, 2004.

SAMUEL DOUGHTY. **Mechanics of Machines**. John Wiley Sons, Inc. All, 1988.

SAXENA, A.; CHOUKSEY, M. e PAREY, A. Effect of mesh stiffness of healthy and cracked gear tooth on modal and frequency response characteristics of geared rotor system. **Mechanism and Machine Theory**, v. 107, n. September 2016, 261–273, 2017.

URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.10.006>

SAXENA, A.; CHOUKSEY, M. e PAREY, A. Measurement of FRFs of coupled geared rotor system and the development of an accurate finite element model. **Mechanism and Machine Theory**, v. 123, 66–75, 2018.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.01.010>

SHAO, R.; JIA, P. e DONG, F. Dynamic characteristics of cracked gear and three-dimensional crack propagation analysis. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 227, n. 6, 1341–1361, 2013.

URL: <https://doi.org/10.1177/0954406212461326>

SHIN, D. e PALAZZOLO, A. Nonlinear analysis of a geared rotor system supported by fluid film journal bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 475, 115269, 2020.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115269>

SICK SENSOR INTELLIGENCE. DRS61-A4A08192 Data Sheet. 2018.

URL: https://cdn.sick.com/media/pdf/3/83/083/dataSheet_DRS61 - A4A08192_034985_en.pdf

THEODOSSIADES, S. e NATSIAVAS, S. On geared rotordynamic systems with oil journal bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 243, n. 4, 721–745, 2001.

THIRUMURUGAN, R. e GNANASEKAR, N. Influence of finite element model, load-sharing and load distribution on crack propagation path in spur gear drive. **Engineering Failure Analysis**, v. 110, 104383, 03 2020.

TIAN, X. **Dynamic Simulation for System Response of Gearbox Including Localized Gear Faults**. University of Alberta, 2004.

URL: <https://books.google.com.br/books?id=X7PzSgAACAAJ>

TIAN, Z.; ZUO, M.J. e WU, S. Crack propagation assessment for spur gears using model-based analysis and simulation. v. 1, 239–253, 2012.

TIKHONOV, A.N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. **Soviet Math.**, v. 4, 1035–1038, 1963.

TSAI, T.C. e CHUANG, T.H. Technical Note: Relationship between Electrical Conductivity and Stress Corrosion Cracking Susceptibility of Al 7075 and Al 7475 Alloys. **Corrosion (Houston)**, v. 52, n. 6, 414–416, 1996.

WAN, Z.; CAO, H.; ZI, Y.; HE, W. e HE, Z. An improved time-varying mesh stiffness algorithm and dynamic modeling of gear-rotor system with tooth root crack. **Engineering Failure Analysis**, v. 42, 157–177, 2014.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630714001125>

WANG, W. e WONG, A.K. Autoregressive model-based gear fault diagnosis. **J. Vib. Acoust.**, v. 124, n. 2, 172–179, 2002.

WANG, X.; YANG, Y.; WANG, W. e CHI, W. Simulating coupling behavior of spur gear meshing and fatigue crack propagation in tooth root. **International Journal of Fatigue**, v. 134, 105381, 2020.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112319304852>

WOUTERSE, J.H. Critical torque and speed of eddy current brake with widely separated soft iron poles. **IEE Proceedings B (Electric Power Applications)**, v. 138, n. 4, 153–158, 1991.

WU, S.; ZUO, M.J. e PAREY, A. Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth. **Journal of Sound and Vibration**, v. 317, n. 3, 608–624, 2008.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08002757>

XIONG, Y.; HUANG, K.; XU, F.; YI, Y.; SANG, M. e ZHAI, H. Research on the influence of backlash on mesh stiffness and the nonlinear dynamics of spur gears. **Applied Sciences (Switzerland)**, v. 9, n. 5, 1–13, 2019.

YANG, D.C. e LIN, J.Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**, v. 109, n. 2, 189–196, 1987.

YANG, D.C.H. e SUN, Z.S. A Rotary Model for Spur Gear Dynamics. **Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design**, v. 107, n. 4, 529–535, 12 1985.

URL: <https://doi.org/10.1115/1.3260759>

YANG, L.; WANG, L.; YU, W. e SHAO, Y. Investigation of tooth crack opening state on time varying meshing stiffness and dynamic response of spur gear pair. **Engineering Failure Analysis**, v. 121, n. December 2020, 105181, 2021.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.105181>

YI, Y.; HUANG, K.; XIONG, Y. e SANG, M. Nonlinear dynamic modelling and analysis for a spur gear system with time-varying pressure angle and gear backlash. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 132, 18–34, 2019.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.06.013>

ZHOU, X.; SHAO, Y.; LEI, Y. e ZUO, M. Time-varying meshing stiffness calculation and vibration analysis for a 16dof dynamic model with linear crack growth in a pinion. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 134, n. 1, 2012.

APÊNDICE A – Nomenclatura básica de engrenagens cilíndricas de dentes retos

Este apêndice apresenta a nomenclatura básica a respeito de engrenagens cilíndricas de dentes retos, que pode ser útil para o entendimento do desenvolvimento de equações no Capítulo 3.

A Figura A.1 mostra a nomenclatura utilizada para fazer referência a parâmetros geométricos da engrenagem cilíndrica de dentes retos. Em alguns materiais disponibilizados em língua portuguesa no Brasil, há diferenças a respeito destes nomes: saliência pode ser chamado de adendo; reentrância pode ser chamado de dedendo; concordância pode ser chamado de raio de filete; e folga na raiz pode ser chamado de folga de topo (Flores *et al.*, 2017).

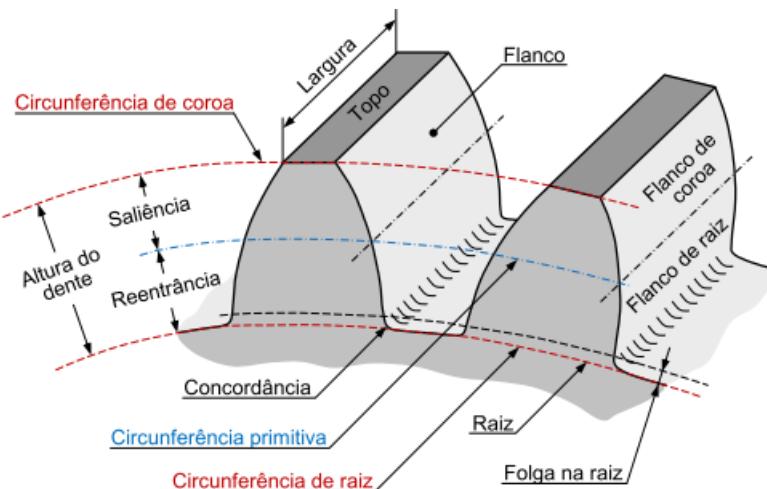


Figura A.1: Nomenclatura básica de engrenagem cilíndrica de dentes retos. Retirada de Flores *et al.* (2017)

O flanco pode ser dividido considerando o contato, divide-o em três partes: flanco ativo, onde ocorre de fato o contato; flanco útil, que determina o comprimento em que pode ocorrer o contato; e flanco não utilizado, em que não pode haver contato e corresponde ao raio de concordância (Flores *et al.*, 2017).

Além disto, de acordo com Fernandes (2004), define-se:

Superfície Primitiva: superfícies de cilindro que deslizam sem escorregamento

Cilindro Primitivo: cilindro imaginário que rola sem escorregar

Cilindro Externo: cilindro imaginário cuja superfície que coincide com os topos dos dentes de uma engrenagem

Cilindro de Raiz:cilindro imaginário cuja superfície que coincide com a base dos dentes da engrenagem

Evolvente (ou involuta): curva obtida a partir dos pontos de um cordão tenso imaginário que se desenrola de um círculo

Círculo Primitivo: círculo teórico que define os cálculos das engrenagens. Engrenagens conjugadas têm círculos primitivos tangentes

Ponto Primitivo: ponto em que os dois círculos primitivos se tangenciam

Linha de Centros: linha que une os centros de duas engrenagens conjugadas

Ponto de Contato: qualquer ponto em que os perfis das engrenagens conjugadas se tocam

Linha de Ação: trajetória, em linha reta, do contato entre perfis. É tangente aos círculos base e passa pelo ponto primitivo

Linha de Contato: linha dos pontos em contato ao longo das superfícies dos dentes

Distância entre Centros: distância entre os centros das engrenagens

Passo Circular: distância entre pontos correspondentes entre dois dentes adjacentes, medida no círculo primitivo

Passo Base: distância entre pontos correspondentes entre dois dentes adjacentes, medida no círculo base

Folga Radial ou de topo: distância entre o topo do dente de uma engrenagem até a raiz da engrenagem conjugada

Altura de Trabalho: soma dos adendos das engrenagens conjugadas

Altura Total: soma do adendo com o dedendo de um mesmo dente

Diâmetro Externo: diâmetro do círculo definido pelo topo do dente

Diâmetro de Raiz: diâmetro do círculo definido pela raiz do dente

Diâmetro de Base: diâmetro do círculo de base

Folga (*Blacklash*): espaço entre os dentes conjugados, medido no círculo primitivo

Largura do Dente: comprimento do dente no plano axial

Ângulo de Pressão: ângulo entre o perfil do dente e linha normal círculo primitivo no ponto primitivo. Quando utilizado no sentido de definir a geometria da engrenagem, o ponto de referência do perfil é o primitivo

Módulo: razão entre o diâmetro primitivo e o número de dentes da engrenagem. Engrenagens de mesmo módulo podem ser conjugadas.

APÊNDICE B – Matrizes do Método de Elementos Finitos

Este apêndice explicita as matrizes utilizadas no modelo do rotor formulado a partir do método de elementos finitos. A formulação que gera tais matrizes bem como a descrição das variáveis aqui indicadas estão no Capítulo 4.

B.1 Elemento de disco

$$[M_d] = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_d \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$[G_d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d & 0 \\ 0 & 0 & -J_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

B.2 Elemento de viga

$$[M_s] = [M_{sT}] + [M_{sR}] + [M_{s\theta}] \quad (\text{B.3})$$

$$[M_{sT}] = [M_{sT}]_0 + \Phi [M_{sT}]_1 + \Phi^2 [M_{sT}]_2 \quad (\text{B.4})$$

$$[M_{sR}] = [M_{sR}]_0 + \Phi [M_{sR}]_1 + \Phi^2 [M_{sR}]_2 \quad (\text{B.5})$$

$$\Phi = \frac{12E_s I a_s}{K' G_s A_s l^2} \quad (\text{B.6})$$

$$m_t = \frac{\pi \rho_{sl} l [(d_{se}/2)^2 - (d_{si}/2)^2]}{840 (1 + \Phi)^2} \quad (\text{B.9})$$

$$[M_{sR}]_0 = m_R \begin{bmatrix} 36 & & & & & & & & \\ 0 & 36 & & & & & & & \\ 0 & -3l & 4l^2 & & & & & & \\ 3l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 36 & & & \\ 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 0 & 36 & & \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & 4l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad sim. \quad (B.10)$$

$$[M_{sR}]_1 = m_R \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 15l & 5l^2 & & & & & \text{sim.} \\ -15l & 0 & 0 & 5l^2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 15l & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -15l & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 15l & -5l^2 & 0 & 0 & 0 & 15l & 5l^2 \\ -15l & 0 & 0 & -5l^2 & 0 & 15l & 0 & 0 & 5l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$[M_{sR}]_2 = m_R \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 10l^2 & & & & & \text{sim.} \\ 0 & 0 & 0 & 10l^2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 5l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 5l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$m_R = \frac{\pi \rho_s [(d_{se}/2)^4 - (d_{si})^4]}{120l (1 + \Phi)^2} \quad (\text{B.13})$$

$$[M_{s\theta}]_2 = \frac{J_s}{6l} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \text{sim.} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$[G_s] = [G_s]_0 + \Phi[G_s]_1 + \Phi^2[G_s]_2 \quad (\text{B.15})$$

$$[G_s]_0 = \frac{2m_R}{l} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ -36 & 0 & & & & & & & \\ 3l & 0 & 0 & & & & anti & & \\ 0 & 3l & -4l^2 & 0 & & & & -sim. & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 0 & & & \\ 36 & 0 & 0 & 3l & 0 & -36 & 0 & & \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & \\ 0 & 3l & l^2 & 0 & 0 & 0 & -3l & -4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.16)$$

$$[G_s]_1 = \frac{2m_R}{l} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ -15l & 0 & 0 & & & & anti & & \\ 0 & -15l & -5l^2 & 0 & & & & -sim. & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -15l & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -15l & 0 & 0 & 0 & & \\ -15l & 0 & 0 & -5l^2 & 0 & 15l & 0 & 0 & \\ 0 & -15l & 5l^2 & 0 & 0 & 0 & 15L_s & -5l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.17)$$

$$[G_s]_2 = \frac{2m_R}{l} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & anti & & \\ 0 & 0 & -10l^2 & 0 & & & & -sim. & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 5l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -5l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.18)$$

$$[K_s] = [K_s]_0 + \Phi [K_s]_1 + [K_{s_\theta}] \quad (B.19)$$

$$[K_s]_0 = \frac{E_s I a_s}{l^3(1 + \Phi)} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & \\ 0 & -6l & 4l^2 & & & & sim. & \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 12 & & \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 12 & \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.20)$$

$$[K_s]_1 = \frac{E_s I a_s}{l^3(1 + \Phi)} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & l^2 & & & & sim. & \\ 0 & 0 & 0 & l^2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.21)$$

$$[K_{s\theta}] = \frac{G_s J a_s}{l} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & sim. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.22)$$

O amortecimento do elemento de viga, neste trabalho, foi considerado como proporcional sua rigidez lateral, por um coeficiente κ :

$$[C_s] = \kappa ([K_s]_0 + \Phi [K_s]_1) \quad (B.23)$$

APÊNDICE C – Método de Newmark

O Método de Newmark é um método numérico de solução de equações diferenciais no domínio do tempo. É um método de passo de tempo fixo, bastante utilizado em problemas de dinâmica dos sólidos (Alves, 2018).

Considerando que o vetor de deslocamento $\{q\}$ em um dado instante t_2 pode ser calculado por uma série de Taylor, então ele do estado do sistema no instante anterior t_1 . Desprezando os termos de ordem superior a três e considerando a variação de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, tem-se:

$$\{q(t_2)\} \approx \{q(t_1)\} + \{\dot{q}(t_1)\}(\Delta t) + \{\ddot{q}(t_1)\} \frac{(\Delta t)^2}{2} + \{\dddot{q}(t_1)\} \frac{(\Delta t)^3}{6} \quad (\text{C.1})$$

Derivando-se a expressão do vetor de deslocamento em relação à variação do tempo, tem-se o vetor de velocidade:

$$\{\dot{q}(t_2)\} \approx \{\dot{q}(t_1)\} + \{\ddot{q}(t_1)\}(\Delta t) + \{\dddot{q}(t_1)\} \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (\text{C.2})$$

O Método de Newmark propõe a introdução, nessas equações de deslocamento e velocidade, coeficientes para os termos de terceira ordem de cada uma (β_N e γ_N , respectivamente):

$$\{q(t_2)\} = \{q(t_1)\} + \{\dot{q}(t_1)\}(\Delta t) + \{\ddot{q}(t_1)\} \frac{(\Delta t)^2}{2} + \beta_N \{\dddot{q}(t_1)\}(\Delta t)^3 \quad (\text{C.3})$$

$$\{\dot{q}(t_2)\} = \{\dot{q}(t_1)\} + \{\ddot{q}(t_1)\}(\Delta t) + \gamma_N \{\dddot{q}(t_1)\}(\Delta t)^2 \quad (\text{C.4})$$

Desta forma, estes coeficientes descrevem a precisão e a estabilidade da estimativa, uma vez que multiplicam o termo de variação da aceleração. A regra do ponto médio considera os coeficientes $\beta_N = 1/4$ e $\gamma_N = 1/2$ gerando uma solução numérica incondicionalmente estável, com precisão de segunda ordem.

A variação da aceleração pode ser estimada pelo método das diferenças finitas conforme Equação C.5 e, então, deslocamento e velocidade são estimados conforme Equações C.6 e C.7 (Bathe, 1982).

$$\{\ddot{q}(t_1)\} = \frac{\{\ddot{q}(t_2)\} - \{\ddot{q}(t_1)\}}{\Delta t} \quad (\text{C.5})$$

$$\{q(t_2)\} = \{q(t_1)\} + \{\dot{q}(t_1)\}\Delta t + (1/2 - \beta_N)\Delta t^2 \{\ddot{q}(t_1)\} + \beta_N \Delta t^2 \{\ddot{q}(t_2)\} \quad (\text{C.6})$$

$$\{\dot{q}(t_2)\} = \{\dot{q}(t_1)\} + (1 - \gamma_N)\Delta t \{\ddot{q}(t_1)\} + \gamma_N \Delta t \{\ddot{q}(t_2)\} \quad (\text{C.7})$$

As Eq. C.6 e C.7 são dependentes da aceleração no mesmo instante de tempo em que seriam avaliadas. Desta forma, o método é implícito. Elas podem ser avaliadas em termos de

equações de previsão (Eq. C.8 e C.9) e correção (Eq. C.11 e C.12).

$$\{q\}_{t_2}^* = \{q\}_{t_1} + \{dq\}_{t_1} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta_N \right) \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_{t_1} \quad (\text{C.8})$$

$$\{\dot{q}\}_{t_2}^* = \{\dot{q}\}_{t_1} + (1 - \gamma_N) \Delta t \{\ddot{q}\}_{t_1} \quad (\text{C.9})$$

$$\{\ddot{q}\}_{t_2}^* = \{0\} \quad (\text{C.10})$$

$$\{q\}_{t_2} = \{q\}_{t_2}^* + \beta_N \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_{t_2} \quad (\text{C.11})$$

$$\{\dot{q}\}_{t_2} = \{\dot{q}\}_{t_2}^* + \gamma_N \Delta t \{\ddot{q}\}_{t_2} \quad (\text{C.12})$$

Com isto, é possível estimar a velocidade e a aceleração em função do deslocamento estimado:

$$\{\dot{q}\}_{t_2} = \{\dot{q}\}_{t_2}^* + \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} (\{q\}_{t_2} - \{q\}_{t_2}^*) \quad (\text{C.13})$$

$$\{\ddot{q}\}_{t_2} = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} (\{q\}_{t_2} - \{q\}_{t_2}^*) \quad (\text{C.14})$$

Para integrar a equação, avalia-se então o resíduo, R , da equação de movimento do sistema, 4.37, ou seja, a partir dos vetores estimados de deslocamento e velocidade, calculam-se os vetores corrigidos de velocidade e aceleração e busca-se os vetor de deslocamento $\{q\}$ tal que:

$$\{R\}_{t_2} = [M]\{\ddot{q}\}_{t_2} + [\Omega_p[G] + [C(t)]]\{\dot{q}\}_{t_2} + [K(t)]\{q\}_{t_2} - \{F\} = 0. \quad (\text{C.15})$$

O processo de estimação, correção e cálculo do resíduo é realizado iterativamente até que o resíduo aproxime-se do valor nulo de forma satisfatória, ou seja, que o valor do resíduo seja inferior a uma certa tolerância definida. Neste trabalho, o método de busca do zero desta função foi o de Levenberg-Marquardt, com algorítimo definido por Powell (1968) para a região de confiança. Este método é o utilizado como padrão na função *fsolve* do *software MATLAB®*. A tolerância definida para o resíduo foi de 10^{-6} .