Projeto-UNI

May 31, 2022

1 Projeto de Física Computacional

1.0.1 Aluno: Murilo Kendjy Vieira Onita

1.1 Objetivo do projeto

O ojetivo do projeto é fazer uma modelagem de um sistema de onda em uma corda e usando metódos computacionais resolver o mesmo.

O problema será abordado usando a linguagem Fortran usando o método de diferenças finitas, será usado 1D-Wave Equation como código base.

Após os cálculos feitos será usada a linguagem Python com a biblioteca matplotlib para fazer/plotar os gráficos.

1.2 Casos a serem analisados

Uma corda com extremidade esquerda fixa e extremidade direta fixa/solta sem força dissipativa: Teste (validação) da modelagem e método usado. Resultados já bem conhecidos, uma extremidade fixa fará a onda refletir com mesma forma, amplitude e fase invertida, e uma extremidade solta fará a onda refletir com mesma forma, amplitude e fase.

Duas cordas com densidade diferentes em extremidades fixas sem força dissipativa: Analisar Reflexão e transmissão, ou seja, o caso $\mu_1 > \mu_2$ e $\mu_1 < \mu_2$, sendo μ a densidade na respectiva corda. Espera-se que neste caso tenhamos ambas ondas refletidas e transmitidas de mesma forma, porém com amplitudes diferentes e no caso fase invertida para onda refletida.

Duas corda em extremidades fixas com junção de densidade variável sem força dissipativa: O sistema analisado terá três cordas (sendo a corda do meio denominada *junção*), e a densidade da junção será variável, teremos algo do tipo: $\mu_1 = \mu_2,\ \mu_3(x)$. Fisicamente esparamos um comportamento não uniforme das ondas refletidas e transmitidas.

Três cordas com densidades diferentes em extremidades fixas sem força dissipativa: O sistema analisado terá três cordas, e ambas terão densidades diferentes. Espera-se que com o passar do tempo teremos várias ondas se interferindo pois para cada mudança de corda (densidade diferentes) teremos uma onda refletida e transmitida.

1.3 Modelagem do sistema físico

O sistema física de uma corda a ser analisado será de mesmo formato da figura abaixo:

Imagem ilustrativa do sistema para o caso de duas cordas com extremidades fixas

Começamos por analisar as forças em um elemento infinitesimal da corda:

Imagem ilustrativa do diagrama de forças em um pedaço infitesimal da corda

Temos então da figura acima que s forças atuantes são:

$$dF_y = \underbrace{T(x+dx)}_{\text{Tensão na corda}} \sin(\theta + d\theta) - T(x)\sin\theta - F(u,t); \qquad F(u,t) = \sum \underbrace{f(u,t)}_{\text{Força externa}} \tag{1}$$

Considerando $x \gg y$ podemos usar a aproximação de pequenos ângulos $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{du}{dx}$:

$$\begin{aligned} dF_y &\approx \left(T(x) + \frac{dT}{dx}dx\right)(\sin\theta + \cos\theta \cdot d\theta) - T(x)\sin\theta - F(u,t) \\ &= \frac{d}{dx}(\sin\theta \cdot T(x)) \cdot dx - F(u,t) \\ &\approx \frac{d}{dx}(\tan\theta \cdot T(x)) \cdot dx - F(u,t) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}T(x)\right)dx - F(u,t) \end{aligned} \tag{2}$$

Considerando uma corda com densidade de massa linear $\mu(x)$ e uma das forças externas como a força de amortecimento proporcional a velocidade:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{dm}{dx}; \qquad dm = \mu(x)dx \\ f(u,t) &= \beta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx \end{aligned} \tag{3}$$

Pela segunda lei de Newton:

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}T(x)\right)dx - \beta(x)\frac{\partial u}{\partial t}dx + F(u,t)dx = (\mu(x)dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4}$$

Considerando a tensão $T(x)$ constante chegamos então a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu(x)}F(u,t); \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\mu(x)}},\ 2\gamma = \frac{\beta(x)}{\mu(x)} \tag{5}$$

Note que a Eq. 5 é de mesma forma que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u \tag{6}$$

1.3.1 Para mais de uma corda

Se olharmos para Eq. (6) para duas cordas, teremos:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 u_1, \quad c_1 = \frac{T_1}{\mu_1} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_2^2 \nabla^2 u_2, \quad c_1 = \frac{T_2}{\mu_2} \tag{8}$$

Analogamente a modelagem, usando a segunda lei de Newton, porém um caso mais simples chegaremos em:

$$T_1 \frac{\partial^2 u_1(x_{f_1}, t)}{\partial t^2} = T_2 \frac{\partial^2 u_2(x_{i_2}, t)}{\partial t^2} \tag{9}$$

Analisando agora as cordas antes e depois do encontro (junção das cordas). Antes do encontro teremos:

$$u_L(x,t) = u_i \left(t - \frac{x}{v_1} \right), \qquad t < 0 \tag{10}$$

u_i se refere a onda incidente

Para $t > 0$ a onda tem duas componentes:

$$u_L(x,t) = u_i \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + u_r \left(t - \frac{x}{v_1} \right), \qquad t > 0 \tag{11}$$

Agora temos mais um termo u_r, que se refere a componente $t > 0$, esta será a onda refletida.

Note que a Eq. (11) carrega a mesma informação que a Eq. (10), porém é um modo conveniente de escrever uma vez que assim podemos analisar a condição de contorno na junção.

$$u_R(x,t) = u_t \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \tag{12}$$

u_t será a onda transmitida

Se impormos a condição de contorno:

$$u_i(t) + u_r(t) = u_t(t) \tag{13}$$

Voltando na Eq. (9) e aplicando a condição de contorno da Eq. (13) teremos:

$$\left(\frac{T_1}{c_1}+\frac{T_2}{c_2}\right)u_r=\left(\frac{T_1}{c_1}-\frac{T_2}{c_2}\right)u_i \tag{14}$$

Por simplificação faremos:

$$Z_1=\frac{T_1}{c_1}=\sqrt{T_1\mu_1}, \qquad Z_2=\frac{T_2}{c_2}=\sqrt{T_2\mu_2} \tag{15}$$

O símbolo Z foi escolhido pois é interessante para se fazer uma análise relacionada a impedância.

Da Eq. (14) temos de forma direta o que definimos **coeficiente de reflexão**:

$$R=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} \tag{16}$$

$$u_r=Ru_i \tag{17}$$

E voltando na Eq. (13) temos o que definimos **coeficiente de transmissão**:

$$T=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} \tag{18}$$

$$u_t=Tu_i \tag{19}$$

Usando o mesmo raciocínio acima com a mesma condição de contorno podemos chegar a um método de como resolver tal problema numericamente.

Calculamos separadamente a Eq. (5) para ambas cordas (quantas estiverem no sistema) de modo separado. O que acontece é que da Eq. (**??**) teremos numericamente que a condição inicial de uma corda será a condição final da outra:

$$u_1(x_{f_1},t)=u_2(x_{0_2},t)$$
$$u_2(x_{f_2},t)=u_3(x_{0_3},t) \tag{20}$$
$$\vdots \tag{21}$$
$$u_n(x_{f_n},t)=u_{n+1}(x_{0_{n+1}},t) \tag{22}$$

Note que o que difere u_1 de u_2, ou onda incidente,refletida e transmitida, da Eq. (12) é em princípio a velocidade de propagação, que é definida em termos da densidade μ.

Em um caso de duas cordas por exemplo, caso $\mu_1=\mu_2$ o sistema retorna exatamente a duas cordas de mesma velocidade de propagação que será exatamente igual ao sistema de uma única corda de densidade $\mu=\mu_1=\mu_2$

1.4 Método das diferenças finitas

O método consiste em aproximar as derivadas primeira e segunda por uma série de Taylor. Para o caso mais simples vamos considerar Δx um espaçamento linear, ou seja, $\Delta x = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$:

1.4.1 Derivada primeira:

- **Esquema *para frente***, analisa o ponto x_{i+1} com base em x_i:

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=x_i} + \ ...$$

Considerando que $x_i \approx x_{i+1}$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \tag{23}$$

- **Esquema *para trás***, analisa o ponto x_{i-1} com base em x_i:

$$y_{i-1} = y_i + (x_{i-1} - x_i)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=x_i} + \ ...$$

Considerando que $x_{i-1} \approx x_i$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \tag{24}$$

- **Esquema *Central***, , analisa o ponto x_i com base em x_{i-1} e x_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + (\Delta x)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=x_i} + \ ... \tag{25}$$

$$y_{i-1} = y_i - (\Delta x)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} + \frac{(-\Delta x)^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=x_i} + \ ... \tag{26}$$

Subtraindo as Eqs. 25 e 26:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = (2\Delta x)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} + \frac{2(\Delta x)^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}\bigg|_{x=x_i} + \ ...$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \tag{27}$$

Temos então que ambos os *esquemas para frente e para trás* são aproximações de primeira ordem uma vez que os termos desprezados são $(\Delta x)^2$ e o *esquema central* é uma aproximação de segunda ordem, uma vez que os termos desprezados são $(\Delta x)^3$

1.4.2 Derivada Segunda:

Usando a própria definição de derivada podemos fazer a aproximação da derivada segunda, neste exemplo para o *Esquema Central* que é o mais comumente usado:

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \frac{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_{i-1}}}{2\Delta x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \tag{28}$$

1.4.3 Verificando o método para uma equação simples:

Fazendo uma verificação do método para uma função de derivada e resultados conhecidos:

$$f(x) = \sin x \tag{29}$$

$$f''(x) = -\sin x \tag{30}$$

[1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def dev2_DF(x):
    f= func_num(x)
    h= x[1]-x[0]
    return (f[2:] -2*f[1:-1] + f[0:-2])/(h**2)

def func_num(x):
    return np.sin(x)
def func_ext(x):
    return -np.sin(x)

start=-5
end=5
p=15
n= [x+1 for x in range(p)]
dx= [np.linspace(start, end, i*10) for i in n]

fig, axis = plt.subplots(ncols=2, nrows=2, constrained_layout=True,figsize␣
↪=(12,8),dpi=100)
windows = [ [0,0], [0,1], [1,0], [1,1] ]

for i, jan in enumerate(windows) :
    e1, e2 = jan[0], jan[1]
    axis[e1, e2].plot(dx[2*i][1:-1],dev2_DF(dx[2*i]), '-', lw=2, label =␣
↪f'{len(dx[2*i])} pontos')
    axis[e1, e2].plot(dx[p-1],func_ext(dx[p-1]), '-r', lw=1, label = "Exata")
    axis[e1, e2].set_title('Aproximação das Diferenças Finitas usando esquema␣
↪central para derivada segunda', \
```

```python
                                    fontsize=8, fontweight='bold')
    axis[e1, e2].set(xlabel=u'x', ylabel=u'y' )
    axis[e1, e2].legend(loc='best')

#plt.show()
plt.close()
```

1.5 Modelagem do sistema computacional - Método Explícito

Uma vez obtida a equação do modelo físico Eq. (5) podemos, utilizando o método das diferenças finitas resolve-lo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma(x)\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu(x)}F(u,t); \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\mu(x)}},\ 2\gamma(x) = \frac{\beta(x)}{\mu(x)} \tag{31}$$

Usando o *esquema explícito* com as respectivas derivadas para o *Esquema Central*:

$$u_{tt} \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i.j-1}}{\Delta t^2} \tag{32}$$

$$u_{xx} \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{33}$$

$$u_{t} \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} \tag{34}$$

Substituindo na Eq. (5):

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i.j-1}}{\Delta t^2} + 2\gamma(x)\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} - c^2\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\mu(x)}F(u,t) \tag{35}$$

Reorganizando e isolando o termo de avanço temporal $j+1$:

$$u_{i,j+1} = \frac{\Delta t^2}{1+\gamma(x)\Delta t}\left[\left(\frac{2}{\Delta t^2} - 2\frac{c^2}{\Delta x^2}\right)u_{i,j} + \frac{c^2}{\Delta x^2}u_{i+1,j} + \frac{c^2}{\Delta x^2}u_{i-1,j} - \left(\frac{1-\gamma(x)\Delta t}{\Delta t^2}\right)u_{i,j-1} + \frac{1}{\mu(x)}F(u,t)\right] \tag{36}$$

Nota: Estamos considerando um esquema matricial de modo que os índices iniciais são i=j=1

Para simplificação tomamos as constantes como:

$$\frac{1}{1+\gamma(x)\Delta t} \equiv C_1, \qquad 1-\gamma(x)\Delta t \equiv C_2, \qquad c\frac{\Delta t}{\Delta x} \equiv \alpha \tag{37}$$

$$\boxed{u_{i,j+1} = C_1\left(2(1-\alpha^2)u_{i,j} + \alpha^2 u_{i+1,j} + \alpha^2 u_{i-1,j} - C_2 u_{i,j-1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)}F(u,t)\right)}, \qquad j > 1 \tag{38}$$

Note no entanto que não temos o variável $u_{i,j-1}$, porém, temos então pelo *esquema central* para o **primeiro passo**:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_1} = u_{t_1} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t}$$
$$\therefore u_{i,j-1} \approx u_{i,j+1} - 2\Delta t \cdot u_{t_1} \tag{39}$$

Substituindo então a Eq. (39) na Eq. (38):

$$u_{i,j+1} = C_1\left(2(1-\alpha^2)u_{i,j} + \alpha^2 u_{i+1,j} + \alpha^2 u_{i-1,j} - C_2(u_{i,j+1} - 2\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)}F(u,t)\right) \tag{40}$$
$$\tag{41}$$

$$\boxed{u_{i,j+1} = \frac{C_1}{1+C_1C_2}\left(2(1-\alpha^2)u_{i,j} + \alpha^2 u_{i+1,j} + \alpha^2 u_{i-1,j} + C_2 2\Delta t \cdot u_{t_1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)}F(u,t)\right)}, j = 1 \tag{42}$$

Nota: Estamos considerando F(u,t) forças externas constantes, tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

1.5.1 Resumo das equações

Por conveniência vamos ocultar a depência das váriaveis (x),(t) etc:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad \alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \gamma = \frac{\beta}{2\mu}C_1 = \frac{1}{1+\gamma\Delta t}, \quad C_2 = 1 - \gamma\Delta t$$

Os índices ‘p’, ‘u’ e ‘d’ são respectivamente Principal, Upper(superior) e Down(inferior), aqui não necessário, porém muito útil quando tratamos de matrizes (caso implícito). Note que eles são diferentes para j=1 e j>1:

$$c_p = \frac{C_1}{1+C_1C_2}\cdot 2(1-\alpha^2) \quad , c_u = c_d = \frac{C_1}{1+C_1C_2}\cdot\alpha^2 \quad , \lambda = \frac{C_1}{1+C_1C_2}\cdot\left(C_2 2\Delta t \cdot u_{t_1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)}F(u,t)\right)$$

$$\boxed{u_{i,2} = c_p u_{i,1} + c_u u_{i+1,1} + c_d u_{i-1,1} + \lambda}\ , \qquad \mathbf{j = 1} \tag{43}$$

$$c_p = C_1 \cdot 2(1-\alpha^2) \quad , c_u = c_d = C_1 \cdot \alpha^2 \quad , c_e = C_1 C_2 \quad , \lambda = \frac{C_1}{1 + C_1 C_2} \cdot \left(\frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u,t) \right)$$

$$\boxed{u_{i,j+1} = c_p u_{i,j} + c_u u_{i+1,j} + c_d u_{i-1,j} - c_e u_{i,j-1} + \lambda}\ , \qquad \mathbf{j > 1} \tag{44}$$

1.6 Estabilidade do esquema explícito:

Uma vez que estamos usando o *esquema explicíto*, ou seja, calculamos $j+1$ tendo j temos um problema de a convergência do método, da Eq (38) e (42) podemos ver que:

$$(1-\alpha^2) \geqslant 0 \quad \rightarrow \quad \alpha \leqslant 1 \therefore \quad c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$$

Se tal condição não for obtida teremos uma “concorrência” entre os coefientes u de modo que o resultado pode não convergir e por consequência não ser confiável.

Nota: Criamos um rotina para tal verificação que avisa o usuário caso a condição não seja satisfeita

1.7 Modelagem do sistema computacional - Método Implícito

Uma vez obtida a equação do modelo físico Eq. (5) podemos, utilizando o método das diferenças finitas resolve-lo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu(x)} F(u,t); \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\mu(x)}},\ 2\gamma = \frac{\beta}{\mu(x)} \tag{45}$$

Usando o *método implícito* teremos:

esquema central para derivada segunda temporal:

$$u_{tt} \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} \tag{46}$$

esquema para trás para derivada primeira temporal:

$$u_t \approx \frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t} \tag{47}$$

esquema central para derivada segunda espacial analisada em j+1:

$$u_{xx} \approx \frac{u(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2u(x, t+\Delta t) + u(x-\Delta x, t+\Delta t)}{\Delta x^2} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} \tag{48}$$

Substituindo na Eq. (5):

Nota: Usaremos uma notação para o passo espacial i subscrito e passo temporal j sobrescrito

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} + 2\gamma \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} - c^2 \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\mu(x)} F(u,t) \tag{49}$$

Reorganizando e isolando o termo de avanço temporal $j+1$:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{2c^2}{\Delta x^2}\right) u_i^{j+1} - \left(\frac{c^2}{\Delta x^2}\right) u_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{c^2}{\Delta x^2}\right) u_{i-1}^{j+1} = \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{2\gamma}{\Delta t}\right) u_i^j + \left(-\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{2\gamma}{\Delta t}\right) u_i^{j-1} + \frac{1}{\mu(x)} F(u,t) \tag{50}$$

Nota: Estamos considerando um esquema matricial de modo que os índices iniciais são i=j=1

Multiplicando ambos os lados por Δt^2 e por simplificação tomamos uma constante (adimensional) α e c_1 como:

$$\alpha \equiv c\frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad c_1 = 2\gamma\Delta t$$

$$\boxed{(1+2\alpha^2)u_i^{j+1} - \alpha^2 u_{i+1}^{j+1} - \alpha^2 u_{i-1}^{j+1} = (2-c_1)u_i^j + (-1+c_1)u_i^{j-1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u,t)} \tag{51}$$

Para j=1 usamos o esquema central:

$$\begin{gathered} \left.\frac{du}{dt}\right|_{i,j} = u_t \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} \\ \therefore u_{i,j-1} \approx u_{i,j+1} - 2\Delta t \cdot u_{t_1} \end{gathered} \tag{52}$$

Temos então no primeiro passo:

$$(1+2\alpha^2)u_i^2 - \alpha^2 u_{i+1}^2 - \alpha^2 u_{i-1}^2 = (2-c_1)u_i^1 + (-1+c_1)(u_{i,2} - 2\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u,t) \tag{53}$$

$$\boxed{\left(1+\alpha^2 - \frac{c_1}{2}\right) u_i^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_{i+1}^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_{i-1}^2 = \frac{(2-c_1)}{2} u_i^1 + (1-c_1)(\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u,t)} \tag{54}$$

Não temos os pontos extremos $i = 1$ e $i = N_x$, porém temos que:

$$\frac{u_1^j - u_0^j}{\Delta x} = 0 \quad \rightarrow \quad u_1^j = u_0^j \tag{55}$$

$$\frac{u_{N_x+1}^j - u_{N_x}^j}{\Delta x} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{N_x+1}^j = u_{N_x}^j \tag{56}$$

$$\left(1 + \alpha^2 - \frac{c_1}{2}\right) u_1^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_2^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_0^2 = \frac{(2 - c_1)}{2} u_1^1 + (1 - c_1)(\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u, t) \tag{57}$$

$$\boxed{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{c_1}{2}\right) u_1^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_2^2 = \frac{(2 - c_1)}{2} u_1^1 + (1 - c_1)(\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u, t)}, i = j = 1 \tag{58}$$

E para $i = N_x$

$$\left(1 + \alpha^2 - \frac{c_1}{2}\right) u_{N_x}^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_{N_{x+1}}^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_{N_{x-1}}^2 = \frac{(2 - c_1)}{2} u_{N_x}^1 + (1 - c_1)(\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u, t) \tag{59}$$

$$\boxed{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{c_1}{2}\right) u_{N_x}^2 - \frac{\alpha^2}{2} u_{N_{x-1}}^2 = \frac{(2 - c_1)}{2} u_{N_x}^1 + (1 - c_1)(\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u, t)}, i = N_x,\ j = 1 \tag{60}$$

Fazemos a mesma análise para o caso de $j > 1$:

$$(1 + 2\alpha^2) u_1^{j+1} - \alpha^2 u_2^{j+1} - \alpha^2 u_0^{j+1} = (2 - c_1) u_1^j + (-1 + c_1) u_1^{j-1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u, t) \tag{61}$$

$$\boxed{(1 + \alpha^2) u_1^{j+1} - \alpha^2 u_2^{j+1} = (2 - c_1) u_1^j + (-1 + c_1) u_1^{j-1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u, t)}, i = 1,\ j > 1 \tag{62}$$

$$(1 + 2\alpha^2) u_{N_x}^{j+1} - \alpha^2 u_{N_{x+1}}^{j+1} - \alpha^2 u_{N_{x-1}}^{j+1} = (2 - c_1) u_{N_x}^j + (-1 + c_1) u_{N_x}^{j-1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u, t) \tag{63}$$

$$\boxed{(1 + \alpha^2) u_{N_x}^{j+1} - \alpha^2 u_{N_{x+1}}^{j+1} = (2 - c_1) u_{N_x}^j + (-1 + c_1) u_{N_x}^{j-1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u, t)}, i = N_x,\ j > 1 \tag{64}$$

1.7.1 Resumo das equações para o método implícito

Simplificações:

$$\alpha \equiv c\frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad c_1 \equiv 2\gamma\Delta t$$

$$\mathbf{1 < i < N_x \ , j = 1}$$

$$c_p \equiv \left(1 + \alpha^2 - \frac{c_1}{2}\right), \quad c_d = c_u \equiv -\frac{\alpha^2}{2} c_{p_2} \equiv \frac{(2 - c_1)}{2}, \quad \lambda \equiv (1 - c_1)(\Delta t \cdot u_{t_1}) + \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u,t)$$

$$\boxed{c_p u_i^2 + c_u u_{i+1}^2 + c_d u_{i-1}^2 = c_{p_2} 2u_i^1 + \lambda} \tag{65}$$

$$\mathbf{i = 1, i = N_x \ , j = 1}$$

$$c_p \equiv \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{c_1}{2}\right), \quad c_d = c_u \equiv -\frac{\alpha^2}{2} c_{p2} \equiv \frac{(2 - c_1)}{2}, \quad \lambda \equiv \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u,t)$$

$$\boxed{c_p u_1^2 + c_u u_2^2 = c_{p_2} u_1^1 + \lambda}, i = j = 1 \tag{66}$$

$$\boxed{c_p u_{N_x}^2 + c_d u_{N_{x-1}}^2 = c_{p_2} u_{N_x}^1 + \lambda}, i = N_x \ , j = 1 \tag{67}$$

$$\mathbf{1 < i < N_x \ , j > 1}$$

$$c_p \equiv (1 + 2\alpha^2), \quad c_d = c_u \equiv -\alpha^2 c_{p_2} \equiv (2 - c_1), \quad c_{u_2} \equiv (-1 + c_1), \quad \lambda \equiv \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u,t)$$

$$\boxed{c_p u_i^{j+1} + c_u u_{i+1}^{j+1} + c_d u_{i-1}^{j+1} = c_{p_2} u_i^j + c_{u_2} u_i^{j-1} + \frac{\Delta t^2}{\mu(x)} F(u,t)} \tag{68}$$

$$\mathbf{i = 1, i = N_x \ , j > 1}$$

$$c_p \equiv (1+2\alpha^2)\,, \quad c_d = c_u \equiv \alpha^2 c_{p_2} \equiv (2-c_1), \quad c_{u_2} \equiv (-1+c_1), \quad \lambda \equiv \frac{\Delta t^2}{2\mu(x)} F(u,t)$$

$$\boxed{c_p u_1^{j+1} + c_u u_2^{j+1} = c_{p_2} u_1^j + c_{u_2} u_1^{j-1} + \lambda}, i=1\ , j>1 \tag{69}$$

$$\boxed{c_p u_{N_x}^{j+1} + c_d u_{N_{x+1}}^{j+1} = c_{p_2} u_{N_x}^j + c_{u_2} u_{N_x}^{j-1} + \lambda}, i=N_x\ , j>1 \tag{70}$$

O sistema pode ainda ser escrito de forma matricial e veremos que se trata de uma matriz tridiagonal:

Note que teremos dois sistemas, para $\mathbf{j=1}$:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{c_1}{2} & -\frac{\alpha^2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha^2}{2} & 1+\alpha^2-\frac{c_1}{2} & -\frac{\alpha^2}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha^2}{2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1+\alpha^2-\frac{c_1}{2} & -\frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha^2}{2} & 1+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{c_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^2 \\ u_{N_x}^2 \end{bmatrix} = c_{p_2} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^1 \\ u_{N_x}^1 \end{bmatrix} + \lambda$$

Para $\mathbf{j>1}$:

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & -\alpha^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha^2 & 1+2\alpha^2 & -\alpha^2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1+2\alpha^2 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 & 1+\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^{j+1} \\ u_{N_x}^{j+1} \end{bmatrix} = c_{p_2} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{j} \\ u_2^{j} \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^{j} \\ u_{N_x}^{j} \end{bmatrix} + c_{u_2} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{j-1} \\ u_2^{j-1} \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^{j-1} \\ u_{N_x}^{j-1} \end{bmatrix} + \lambda$$

1.8 Resolução do sistema por método de matrizes tridiagonais:

Um sistema tridiagonal é uma matriz tal que somente sua diagonal principal e suas vizinhas são não nulas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{bmatrix}, \qquad V_j = \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \dots \\ u_{n,j} \end{bmatrix}, \qquad V_{j-1} = \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \dots \\ u_{n,j-1} \end{bmatrix}$$

Trataremos de um modelo mais simples:

$$\mathbf{A}x = d$$

O método da matriz tridiagonal ou algoritmo de Thomas (TDMA) é um caso particular da eliminação gaussiana aplicada a matrizes tridiagonais.

Vamos tomar o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & ... \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & b_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & c_n & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_n \end{bmatrix}$$

De modo resumido , começamos com uma eliminação para frente, dividimos a primeira linha por a_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & b'_1 & 0 & 0 & ... \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & b_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & c_n & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'1 \\ d_2 \\ ... \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$b'_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad d'_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Para o segundo passo faremos $l_2 = l_2 - a_2 l_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b'_1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & a_2 - c_2 b'_1 & b_2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & b_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & c_n & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'1 \\ d_2 - c_2 d'_1 \\ ... \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$b'_2 = \frac{b_2}{a_2 - c_2 b'_1}, \quad d'_2 = \frac{d_2 - c_2 d'_1}{a_2 - c_2 b'_1}$$

O processo é feito até o final, de modo que chegaremos a:

$$\begin{bmatrix} 1 & b'_1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & b'_2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ ... \\ d'_n \end{bmatrix}$$

Temos então:

$$x_n = d'_n$$

E com isso fazendo ums substituição para trás, de tal modo que teremos:

$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1}$$

1.9 Verificação

Para testar a modelagem, método e código serão usados dois casos simples e bem conhecidos:

1.9.1 Sistema teste 1 input code

Analisaremos o caso com uma corda única de comprimento L e com as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \beta = 0, &\qquad \text{A força dissipativa proporcional a velocidade é nula} \\ F(u,t) = 0, &\qquad \text{Demais forças externas são nulas} \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, &\qquad \text{Corda única} \end{aligned}$$

Condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(L,t) = 0, &\qquad \text{Extremidades fixas} \\ u_{t_1} = \begin{cases} sin(x), & 0 \leq x \leq \frac{L}{8} \\ 0, & \frac{L}{8} < x \leq L \end{cases}, &\qquad \text{Senoidal 1/8 da corda} \\ u(x,t_1) = 0, &\qquad \text{Começa em repouso} \end{aligned}$$

1.9.2 Sistema teste 2 input code

$$\begin{aligned} \beta = 0, &\qquad \text{A força dissipativa proporcional a velocidade é nula} \\ F(u,t) = 0, &\qquad \text{Demais forças externas são nulas} \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, &\qquad \text{Corda única} \end{aligned} \tag{71}$$

Condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0, &\qquad \text{Extremidade esquerda fixa} \\ u(x_n,t) = u(x_{n-1},t), &\qquad \text{Extremidade direita livre} \\ u_{t_1} = \begin{cases} sin(x), & 0 \leq x \leq \frac{L}{8} \\ 0, & \frac{L}{8} < x \leq L \end{cases}, &\qquad \text{Senoidal 1/8 da corda} \\ u(x,t_1) = 0, &\qquad \text{Começa em repouso} \end{aligned}$$

1.10 Considerações:

O sistema 1 se comporta como esperado, note que pela teoria (vide Eq. (16)) se fizermos $\mu_2 \gg \mu_1$ e nesse caso especial $\mu_2 \to \infty$ será exatamente a condição na qual a corda se encontra com uma "parede", e teremos então:

$$\mu_2 \gg \mu_1 \rightarrow T = 0, \quad R = -1 \rightarrow u_r = -u_i \tag{72}$$

Ou seja, teremos uma onda de mesmo formato, amplitude, porém com fase invertida.

Analogamente para o sistema 2 cujo lado direito (solto), se fizermos $\mu_2 = 0$ será exatamente a condição na qual a corda se encontra com uma corda "sem massa", e teremos então:

$$\mu_2 = 0 \rightarrow T = 2, \quad R = 1 \rightarrow u_r = -u_i \tag{73}$$

Aqui teremos que olhar com maior cuidado, pois o que acontece é que no exato ponto da condição de contorno teremos uma onda exatamente de mesma forma e fase, porém com amplitude dobrada e logo após teremos uma onda refletida que será de mesma forma, fase e amplitute.

Temos então que a modelagem e o código estão a princípio se comportando como deveria (seguindo a teoria aplicada)

Para o método explícito temos um detalhe que pode ser melhorado é o pulso senoidal inicial, que em ambos os casos usados foram em 1/8 da corda, porém nota-se ruídos nas extremidades devido a "interpolação" feita não ser perfeita. Podemos eliminar o ruído a princípio de dois modos:

- Aumentar o número de pontos de x (Nx), porém sempre prestando atenção a condição de estabilidade
- Aumentar a largura do pulso (comprimento de onda), porém neste caso os casos seguintes se tornam díficeis de ser analisados, pois as ondas refletidas e transmitidas também terão um comprimento de onda alto e as vezes ficando díficil distigui-las

Para o método implícito ele tem um comportamento parecido, porém ele é aparenta fazer a onda ser suavizada, provavelmente pela quantidade de pontos serem bem maiores.

1.11 Caso 1: Duas cordas com densidades constante diferentes sendo $\mu_1 < \mu_3$ input code

Considerações do sistema:

$$\begin{aligned}
\beta_1 = \beta_2 = 0, &\quad \text{Força dissipativa proporcional a velocidade nula} \\
F(u,t) = 0, &\quad \text{Demais forças externas nulas} \\
\mu_1 = \mu_2 = 1, &\quad \text{Densidade da corda 1 e 2 (serão a mesma corda)} \\
\mu_3 = 5, &\quad \text{Densidade da corda 2}
\end{aligned} \tag{74}$$

Condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u_1(x_{f_1},t) = u_2(x_{i_2},t), &\quad \text{Duas cordas ligadas (continuas)}\\
u_1(0,t) = u_2(x_{f_2},t) = 0, &\quad \text{Extremidades fixas}\\
u_{t_1} = \begin{cases} sin(x), & 0 \le x \le \frac{L}{8} \\ 0, & \frac{L}{8} < x \le L \end{cases}, &\quad \text{Senoidal 1/8 da corda}\\
u(x,t_1) = 0, &\quad \text{Começa em repouso}
\end{aligned}
$$

1.12 Caso 2: Duas cordas com densidades constante diferentes sendo $\mu_1 > \mu_3$ input code

Considerações do sistema:

$$
\begin{aligned}
\beta = 0, &\quad \text{Força dissipativa proporcional a velocidade nula}\\
F(u,t) = 0, &\quad \text{Demais forças externas nulas}\\
\mu_1 = \mu_2 = 5, &\quad \text{Densidade da corda 1 e 2 (serão a mesma corda)}\\
\mu_3 = 1, &\quad \text{Densidade da corda 3}
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u_1(x_{f_1},t) = u_2(x_{i_2},t), &\quad \text{Duas cordas ligadas (continuas)}\\
u_1(0,t) = u_2(x_{f_2},t) = 0, &\quad \text{Extremidades fixas}\\
u_{t_1} = \begin{cases} sin(x), & 0 \le x \le \frac{L}{8} \\ 0, & \frac{L}{8} < x \le L \end{cases}, &\quad \text{Senoidal 1/8 da corda}\\
u(x,t_1) = 0, &\quad \text{Começa em repouso}
\end{aligned}
$$

1.13 Caso 3: Uma corda com densidades variável input code

Considerações do sistema:

$$
\begin{aligned}
\beta = 0, &\quad \text{Força dissipativa proporcional a velocidade nula}\\
F(u,t) = 0, &\quad \text{Demais forças externas nulas}\\
\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = (-4x + 2.5)(4x + 2.5), &\quad \text{Densidade da corda (única)}
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u(0,t) = u(L,t) = 0, &\qquad \text{Extremidades fixas}\\
u_{t_1} = \begin{cases} sin(x), & 0 \leq x \leq \frac{L}{8} \\ 0, & \frac{L}{8} < x \leq L \end{cases}, &\qquad \text{Senoidal 1/8 da corda}\\
u(x,t_1) = 0, &\qquad \text{Começa em repouso}
\end{aligned}
$$

1.14 Caso 4: Duas cordas com densidade iguais unidas por uma junção com densidade variável input code

Considerações do sistema:

$$
\begin{aligned}
\beta = 0.5, &\qquad \text{Força dissipativa proporcional a velocidade nula}\\
F(u,t) = 0, &\qquad \text{Força externa nula}\\
\mu_1 = \mu_3 = 1, &\qquad \text{Densidade da corda 1 e 3}\\
\mu_2 = 1 + 5x^2, &\qquad \text{Densidade da corda 2 (junção)}
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u_1(x_{f_1},t) = u_2(x_{i_2},t) \quad u_2(x_{f_2},t) = u_3(x_{i_3},t), &\qquad \text{Cordas ligadas (continuas)}\\
u_1(0,t) = u_3(x_{i_3},t) = 0, &\qquad \text{Extremidades fixas}\\
u_{t_1} = \begin{cases} sin(x), & 0 \leq x \leq \frac{L}{8} \\ 0, & \frac{L}{8} < x \leq L \end{cases}, &\qquad \text{Senoidal 1/8 da corda}\\
u(x,t_1) = 0, &\qquad \text{Começa em repouso}
\end{aligned}
$$

1.15 Caso 5: Senoidal fixa input code

$$
\begin{aligned}
\beta = 0, &\qquad \text{A força dissipativa proporcional a velocidade é nula}\\
F(u,t) = 0, &\qquad \text{Demais forças externas são nulas}\\
\mu_1 = \mu_2 = \mu_3, &\qquad \text{Corda única}
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u(0,t) = u(L,t) = 0, &\qquad \text{Extremidade esquerda fixa}\\
u_{t_1} = 0, &\qquad \text{Sem velocidade inicial}\\
u(x,t_1) = sin(x), &\qquad \text{Configuração senoidal}
\end{aligned}
$$

1.16 Caso 6: Triangular central input code

$$
\begin{aligned}
\beta = 0, &\qquad \text{A força dissipativa proporcional a velocidade é nula}\\
F(u,t) = 0, &\qquad \text{Demais forças externas são nulas}\\
\mu_1 = \mu_2 = \mu_3, &\qquad \text{Corda única}
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u(0,t) = u(L,t) = 0, &\qquad \text{Extremidade esquerda fixa}\\
u_{t_1} = 0, &\qquad \text{Sem velocidade inicial}\\
u(x,t_1) = \begin{cases} 2h\frac{x}{L}, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 2h(1-\frac{x}{L}), & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}, &\qquad \text{Configuração triangular}
\end{aligned}
$$

1.17 Caso 7: Triangular central com força proporcional a gravidade input code

$$
\begin{aligned}
\beta = 0, &\qquad \text{A força dissipativa proporcional a velocidade é nula}\\
F(u,t) = \frac{9.8}{A}, &\qquad \text{Força externa proporcional a gravidade, A= valor proporcional a altura da onda triangular}\\
\mu_1 = \mu_2 = \mu_3, &\qquad \text{Corda única}
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
u(0,t) = u(L,t) = 0, &\qquad \text{Extremidade esquerda fixa}\\
u_{t_1} = 0, &\qquad \text{Sem velocidade inicial}\\
u(x,t_1) = \begin{cases} 2h\frac{x}{L}, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 2h(1-\frac{x}{L}), & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}, &\qquad \text{Configuração triangular}
\end{aligned}
$$

1.18 Conclusões

Ambos o métodos testados se comportam como esperado. Se usados com uma quantidade significativa de pontos não percebe-se muita diferença.

O método implícito se mostra mais suave e mais estável comparado ao método explícito, uma vez que podemos usar uma discretização maior em x sem perder a estabilidade.

Algumas limitações são observadas, por ex: μ não pode ter um valor relativamente muito pequeno, caso contrário ele faz a solução divergir.