

# 1 (Nossa versão da) Equação de Rayleigh-Plesset

A equação mais geral do raio da bolha ao longo do tempo é

$$\begin{aligned} \partial_t \left( (I_1 + I_2) (R(t))^3 R'(t) \right) &= (2I_2 - I_1) (R(t))^2 (R'(t))^2 + \Lambda \\ &\quad - \int_0^{R(t)} r^2 T'(R(t)) \partial_{T(R(t))} \epsilon(n, T(R(t))) dr \\ &\quad - \int_{R(t)}^{\infty} r^2 T'(R(t)) \partial_{T(R(t))} \epsilon(n, T(R(t))) dr \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $T$  é uma temperatura,  $\epsilon$  uma energia e

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x^4 F(x)}{1 - x^2 (R'(t))^2} dx, \quad I_2 = \int_1^{\infty} \frac{x^2 F(x)}{x^4 - (R'(t))^2} dx \\ \Lambda &= \int_0^{R(t)} \frac{3r^2 F(r)}{R(t)} dr - (R(t))^2 \{F(r \rightarrow \infty) + \epsilon_v [n(r \rightarrow R), T(R(t))] - \epsilon_l [n(r \rightarrow R), T(R(t))]\} \end{aligned}$$

Para um campo termodinâmico espacialmente uniforme,  $F = F_0$  e as I-integrais tornam-se:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{5} F_{0,v} \cdot {}_2F_1 \left( 1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, (R'(t))^2 \right) \\ I_2 &= F_{0,l} \cdot {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, (R'(t))^2 \right) \end{aligned}$$

em que a função hipergeométrica  ${}_2F_1$  é conhecida por admitir a representação integral

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{\zeta^{b-1} (1-\zeta)^{-b+c-1}}{(1-\zeta z)^a} d\zeta$$

No caso da teoria de uma temperatura zero, a equação da bolha por ser escrita na forma

$$R''(t) = \frac{\Lambda - (R(t))^2 (4I_1(t) + I_2(t)) (R'(t))^2 - (R(t))^3 R'(t) (I_1'(t) + I_2'(t))}{(R(t))^3 (I_1(t) + I_2(t))}$$

Se os componentes do líquido e do vapor são homogêneos, temos:

$$R''(t) = \frac{35\Lambda + (R(t))^2 (-28F_{0,v}H_1 - 35F_{0,l}H_2) (R'(t))^2}{(R(t))^3 \left\{ F_{0,v} [7H_1 + 10H_3 (R'(t))^2] + 7F_{0,l} [5H_2 + 2H_4 (R'(t))^2] \right\}}$$

em que:

$$\begin{aligned} H_1 &= {}_2F_1 \left( 1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, (R(t))^2 \right) & H_2 &= {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, (R(t))^2 \right) \\ H_3 &= {}_2F_1 \left( 2, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, (R(t))^2 \right) & H_4 &= {}_2F_1 \left( 2, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, (R(t))^2 \right) \\ \Lambda &= (R(t))^2 [-F(r \rightarrow \infty) + F_{0,v} + \epsilon_l(n(r \rightarrow R), 0) - \epsilon_v(n(r \rightarrow R), 0)] \end{aligned}$$

Neste ponto, lembramos a relação termodinâmica  $n\epsilon'(n) = F(r) = P + \epsilon$ , conhecida como **relação de Gibbs**. O primeiro termo do numerador do lado direito da equação pela  $R''(t)$  se torna:

$$35 (R(t))^2 (-P_l + P_v) \quad \text{sendo que } -P_l + P_v = -\beta$$

Fazendo as substituições:

$$F_{0,l} = \epsilon_l + P_l, \quad F_{0,v} = \epsilon_v + P_v, \quad H_1 = 5I_1, \quad H_2 = I_2, \quad H_3 = \frac{7}{2}I_3, \quad H_4 = \frac{5}{2}I_4,$$

temos a equação da lista.

## 2 Exercícios

Use o método de integração de Runge-Kutta para obter a aproximação da solução dos seguintes problemas de Cauchy

1.

$$R'(t) = U(t), \quad U'(t) = -\frac{R'(t)^2 [I_2 (P_l + \epsilon_l) + 4I_1 \epsilon_v] + P_l + P_v (4I_1 R'(t)^2 - 1)}{R(t) [I_4 (P_l + \epsilon_l) R'(t)^2 + I_2 (P_l + \epsilon_l) + (P_v + \epsilon_v) (I_1 + I_3 R'(t)^2)]}$$

$$R(0) = 0.1, \quad U(0) = 0.1$$

2.

$$R'(t) = U(t), \quad U'(t) = -\frac{R'(t)^2 [I_2 (P_l + \epsilon_l) + 4I_1 \epsilon_v] + P_l + P_v (4I_1 R'(t)^2 - 1)}{R(t) [I_4 (P_l + \epsilon_l) R'(t)^2 + I_2 (P_l + \epsilon_l) + (P_v + \epsilon_v) (I_1 + I_3 R'(t)^2)]}$$

$$R(0) = 0.2, \quad U(0) = \frac{1}{10000000}$$

Adote os seguintes valores para os parâmetros:  $P_v = 0.1595106949435665$ ,  $P_l = 0.17078553413498362$ ,  $\epsilon_v = 1.7699955011416335$  e  $\epsilon_l = 4.275051939160018$ . Note que  $U$  é a primeira derivada de  $R$  com relação a  $t$ .

As integrais que aparecem na equação que trata da determinação de  $R$  são expressas em termos das funções hipergeométricas:

$$I_1 = \frac{1}{5} {}_2F_1 \left( 1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, (R'(t))^2 \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\zeta^{3/2}}{1 - \zeta R'(t)} d\zeta$$

$$I_2 = {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, (R'(t))^2 \right) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\zeta^{3/4} (1 - \zeta R'(t))} d\zeta$$

$$I_3 = \frac{2}{7} {}_2F_1 \left( 2, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, (R'(t))^2 \right) = \int_0^1 \frac{\zeta^{5/2}}{(1 - \zeta R'(t))^2} d\zeta$$

$$I_4 = \frac{2}{5} {}_2F_1 \left( 2, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, (R'(t))^2 \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\zeta^{1/4}}{(1 - \zeta R'(t))^2} d\zeta$$

### 3 Resolução

Os testes foram feitos no Matlab e foram utilizadas as funções já criadas nos exercícios anteriores.

#### 3.1 Exercício 1

Na primeira equação, por haver velocidade inicial considerável, o gráfico descreve o formato de uma parábola. Para a resolução desta questão, foi utilizado um passo igual a 0.01 no Runge-Kutta de quarta ordem e o valor do tempo de colapso (aproximadamente **6.63**) foi encontrado por tentativa e erro.

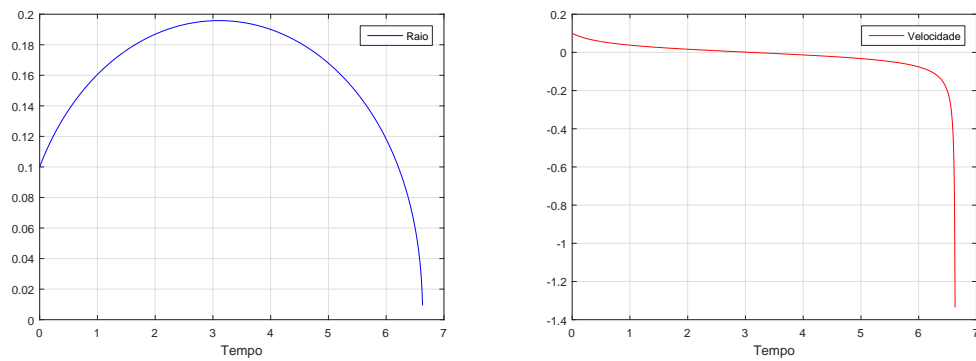


Figura 1: Raio e velocidade da bolha ao longo do tempo para o exercício 1.

#### 3.2 Exercício 2

Para a segunda equação, foi utilizado um passo também igual a 0.01 no Runge-Kutta de quarta ordem e o valor do tempo de colapso (aproximadamente **3.6**) foi encontrado por tentativa e erro.

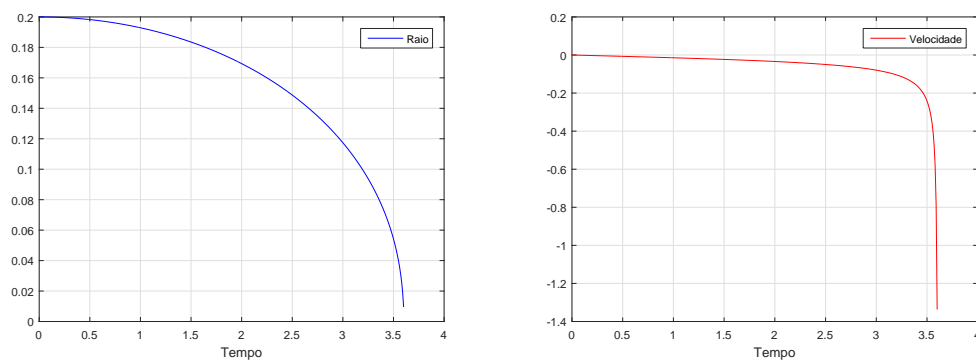


Figura 2: Raio e velocidade da bolha ao longo do tempo para o exercício 2.

### 3.3 Código em MATLAB

```
1 clear
2 clc
3 format long
4
5 addpath(' ../tools ');
6
7 %% Parâmetros iniciais da equação da bolha
8 Pl = 0.17078553413498362; % Pressão no líquido
9 Pv = 0.1595106949435665; % Pressão no vapor
10 el = 4.275051939160018; % Energia do líquido
11 ev = 1.7699955011416335; % Energia do vapor
12
13 h = 0.01; % Passo para o método de Runge–Kutta
14 x0 = [0.2 1/10000000]; % Valores das condições iniciais
15 tmin = 0; % Início do intervalo
16 tmax = 3.6; % Final do intervalo
17
18 %% Integrais em termos das funções hipergeométricas
19 I1 = @(x) (1/5) * hg2F1(1, 5/2, 7/2, x.^2);
20 I2 = @(x) (1/1) * hg2F1(1, 1/4, 5/4, x.^2);
21 I3 = @(x) (2/7) * hg2F1(1, 7/2, 9/2, x.^2);
22 I4 = @(x) (2/5) * hg2F1(1, 5/4, 9/4, x.^2);
23
24 %% Sistema de equações diferenciais a serem resolvidas
25 % Lembrando que  $R'(t) = U(t) = X(2)$ 
26 f = @(t,X) [X(2) -(X(2)^2*(I2(X(2))*(Pl+el) + 4*I1(X(2))*ev) + Pl + Pv*(4*
    I1(X(2))*X(2)^2-1))/(X(1)*(I4(X(2))*(Pl+el)*X(2)^2 + I2(X(2))*(Pl+el) +
    (Pv+ev)*(I1(X(2))+I3(X(2))*X(2)^2)))]];
27 %% Resolve o sistema acima pelo método numérico
28 x = rk4(f, h, x0, [tmin tmax]);
29
30 %% Plota resultados numérico e analítico
31 subplot(1,2,1);
32 plot(tmin:h:tmax, x(:, 1), 'b');
33 legend('Raio');
34 xlabel('Tempo');
35 grid on;
36 subplot(1,2,2);
37 plot(tmin:h:tmax, x(:, 2), 'r');
38 legend('Velocidade');
39 xlabel('Tempo');
40 grid on;
```

### 3.4 Código da função hipergeométrica 2F1

```
1 function [ F ] = hg2F1( a, b, c, z, N )
2 %HG2F1 Função hipergeométrica 2F1
3 % o parâmetro N é opcional e é utilizado na integral de Chebyshev
4 if ~exist('N', 'var')
5     N = 22;
6 end
7 F = gamma(c)/(gamma(b)*gamma(c-b)) * chebyshev(@(x) (x.^(b-1) .* (1-x).^(-b
    +c-1)) ./ ((1-z*x).^a), eps, 1-eps, N);
8 end
```