1 (Nossa versão da) Equação de Rayleigh

Vamos escrever a equação de Rayleigh na forma:

$$A_0 R(t) R''(t) + A_1 (R'(t))^2 = -A_2$$

Dividindo através do coeficiente principal A_0, obtemos a forma normal:

$$R(t)R''(t) + \alpha(R'(t))^2 = -\beta \qquad \alpha = \frac{A_1}{A_0}, \beta = \frac{A_2}{A_0}$$

Esta equação pode ser integrada uma vez; a primeira integral é:

$$(R'(t))^2 = -\frac{\beta}{\alpha} + \kappa(R(t))^{-2\alpha} \tag{1}$$

em que k é uma constante arbitrária de integração. Uma abordagem útil para uma solução é usar o método da transformação de **Sundman**. O truque padrão é estabelecer:

$$R = V^{\epsilon}, \;\; R^{\delta} d\tau = dt$$

para que possamos obter a seguinte equação:

$$(V'(\tau))^2 = \frac{\kappa(V(\tau))^{-2\alpha\epsilon+2\delta\epsilon-2\epsilon+2}}{\epsilon^2} - \frac{\beta(V(\tau))^{2\delta\epsilon-2\epsilon+2}}{\alpha\epsilon^2}$$

Soluções formais para este tipo de problema são encontradas apenas para casos em que o lado direito é um polinômio no máximo de ordem 4. Uma possibilidade simples é fazer $\epsilon = \frac{1}{2\alpha}$ e $\delta = 2\alpha + 1$. A equação acima é facilmente reescrita como:

$$(V'(\tau))^2 = 4\alpha^2\kappa(V(\tau))^3 - 4\alpha\beta(V(\tau))^4$$

Esta equação é conhecido por **Eq. de Briot-Bouquet** e integrando, temos a solução geral:

$$V(\tau) = \frac{\alpha\kappa}{\beta + \alpha^3\kappa^2(\tau - \tau_0)^2}$$

em que τ_0 é uma segunda constante arbitrária. Com isso, obtemos a solução geral de R em forma paramétrica:

$$R(\tau) = \left(\frac{\alpha\kappa}{\beta + \alpha^3\kappa^2(\tau-\tau_0)^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}, \qquad t(\tau) = \int_0^{\tau} (R(z))^{2\alpha+1} dz \tag{2}$$

A integral para t pode ser obtida de forma analítica gerando uma expressão em termos de funções hipergeométricas

$$t = \alpha^b \beta^{-b} \kappa^b \left(\mathcal{J}_1(\tau - \tau_0) - \mathcal{J}_2 \tau_0\right)$$

em que $b = 1 + \frac{1}{2\alpha}$; $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$ são as funções hipergeométricas, dadas por:

$$\mathcal{J}_1 = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha^3\kappa^2(\tau-\tau_0)^2}{\beta}\right), \qquad \mathcal{J}_2 = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha^3\kappa^2\tau_0^2}{\beta}\right)$$

Usando esse resultado, e resolvendo a primeira equação paramétrica para τ em termos de R, temos a dependência de t em R:

$$t = \alpha^b \beta^{-b} \kappa^b \left(\mathcal{J}_1 \frac{\sqrt{R^{-2\alpha} - \frac{\beta}{\alpha\kappa}}}{\alpha\sqrt{\kappa}} - \mathcal{J}_2\tau_0\right)$$

em que, agora, $\mathcal{J}_1 = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, 1 - \frac{\alpha\kappa R^{-2\alpha}}{\beta}\right)$. O tempo de colapso t_c é encontrado separando as variáveis dR e dT em (1) e, posteriormente, integrando:

$$t_c = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \frac{B\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}, \frac{1}{2}\right)}{2\alpha} R(0) \tag{3}$$

em que $B(\cdot,\cdot)$ é a integral Beta e a eq. (3) só vale para quando $V'(0) = 0$;

1.1 Atividade

Encontrado a eq. (1). Tratando $R(t)$ como termo independente, podemos chamar:

$$\frac{dR(t)}{dt} = u(R) \to \frac{d^2R(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(u(R)\right) = \frac{du(R)}{dR}\frac{dR}{dt} = u(R)\frac{du(R)}{dR}$$

Substituindo na eq. (1), temos:

$$Ru(R)\frac{du(R)}{dR} + \alpha(u(R))^2 = -\beta$$

podemos resolver esta equação separando os termos dependentes dos independentes:

$$\frac{du(R)}{dR} = \frac{-\beta - \alpha(u(R))^2}{u(R)R} \to \frac{dR}{R} = \frac{u}{-\beta - \alpha u^2}du$$

integrando os dois lados temos:

$$\log R + c_0 = -\frac{1}{2\alpha}\log\left(-\beta - \alpha u^2\right) \to c_1 R = \left(-\beta - \alpha u^2\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}$$

substituindo $u(R)$, temos:

$$(c_1 R(t))^{-2\alpha} = -\beta - \alpha\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 \to (R'(t))^2 = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(c_1 R(t))^{-2\alpha}$$

$$(R'(t))^2 = -\frac{\beta}{\alpha} + \kappa(R(t))^{-2\alpha}$$

em que $\kappa = \frac{c_1^{-2\alpha}}{\alpha}$.

2 Exercícios

Considere o problema de Cauchy para a equação $R'(t)^2 = \frac{-\beta}{\alpha} + \kappa R(t)^{-2\alpha}$ com os dados iniciais $R(0) = 1$, $R'(0) = 0$. Fazendo uso desses valores na análise feita na aula, encontramos $\kappa = \frac{\beta}{\alpha}$ e $\tau_0 = 0$. Uma vez que κ e τ_0 são determinados, a solução em forma fechada torna-se

$$t = \frac{\sqrt{R^{-2\alpha} - 1}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, 1 - R^{-2\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, \qquad b = 1 + \frac{1}{2\alpha}$$

em que

$${}_2F_1\left(a, b, c, z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \zeta^{b-1}(1-\zeta z)^{-a}(1-\zeta)^{-b+c-1}d\zeta$$

Fala o gráfico de R versus t para $\alpha = 1.2386$ e $\beta = 0.0058149$. Calcule o tempo de colapso através da fórmula dada, considerando que:

$$\frac{B\left(\frac{\mu}{\lambda}, \nu\right)}{\lambda} = \int_0^1 x^{\mu-1}\left(1 - x^{\mu}\right)^{\nu-1}dx$$

Em seguida, compare os resultados com a solução numérica do problema da bolha, feito na lista 2.

3 Resolução

Utilizando a fórmula dada e as constantes do problema, o tempo de colapso é dado por:

$$t_c = \mathbf{12.545156305897644}$$

O gráfico abaixo mostra o raio da bolha ao longo do tempo, calculado tanto pela abordagem numérica, utilizando Runge-Kutta de quarta ordem, quanto pela abordagem da aula atual, utilizando as equações paramétricas dadas por (2). Este gráfico foi feito com o auxílio do Matlab e as duas funções criadas nas últimas aulas foram utilizadas como ferramenta, a **rk4** e a **chebyshev**.

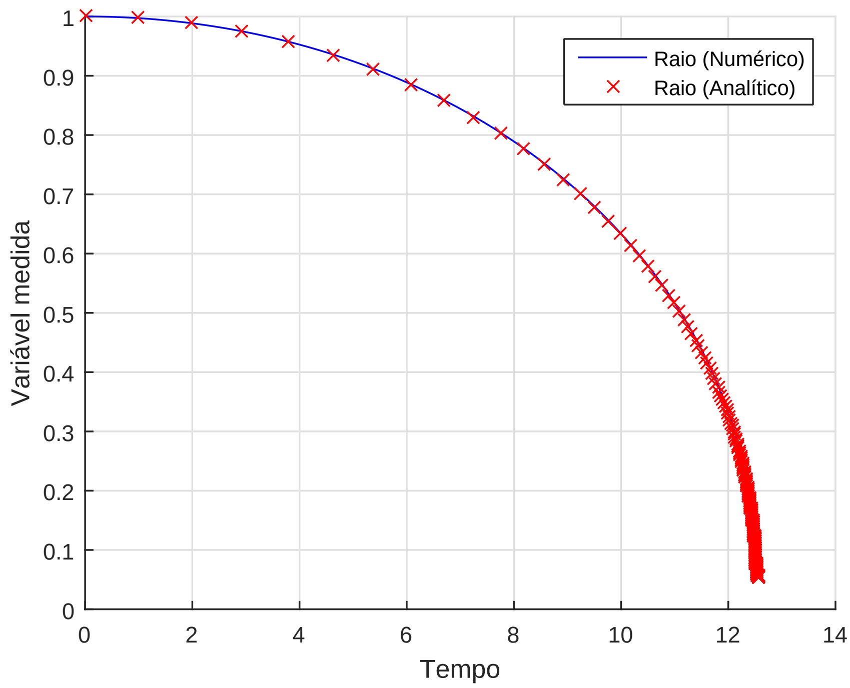

Figura 1: Raio da bolha ao longo do tempo.

3.1 Código em MATLAB

```
clear
clc
format long

addpath('../../tools');

%% Parâmetros iniciais da equação da bolha
Pl = 0.195091;      % Pressão no líquido
Pv = 0.166391;      % Pressão no vapor
el = 4.34802;       % Energia do líquido
ev = 1.79634;       % Energia do vapor

h = 0.1;            % Passo para o método de Runge-Kutta
x0 = [1 0.0001];    % Valores das condições iniciais
tmin = 0;           % Início do intervalo

%% Calcula tempo de colapso
% Parâmetros da equação posta na forma R'(t)^2 = -b/a + kR(t)^(-2a)
a = 1.2386;         % alpha
b = 0.0058149;      % beta
k = b/a;            % constante de integração
t0 = 0;             % tau_0
tc = sqrt(a)/sqrt(b) * beta((a+1)/(2*a), 0.5)/(2*a) * x0(1);

%% Sistema de equações diferenciais a serem resolvidas
f = @(t,X) [X(2) (35*(Pv-Pl) - 7*X(2)^2*(5*Pl + 5*el + 4*Pv + 4*ev))/(7*X(1)*(5*Pl+5*el+Pv+ev))]; % [R;U]

%% Resolve pelo método numérico (aula-2)
x = rk4(f, h, x0, [tmin tc]);

%% Resolve o mesmo problema de forma teórica com equações paramétricas
R = @(x) (a*k./(b + a^3*k^2*(x - t0).^2)) .^ (1/(2*a));
t = @(tau) chebyshev(@(x) (R(x)).^(2*a+1), 0, tau, 22);
taumax = 450;
tabela = zeros(taumax+1, 2);
tabela(:,2) = R(0:taumax);
for tau = 0:taumax
    tabela(tau+1,1) = t(tau);
end

%% Plota resultados numérico e analítico
hold on
plot(tmin:h:tc, x(:, 1), 'b');
plot(tabela(:, 1), tabela(:, 2), 'rx');
legend('Raio (Numérico)', 'Raio (Analítico)');
xlabel('Tempo');
ylabel('Variável medida');
grid on;
hold off;
```