1 Funções de Bessel de Primeira Ordem

Seja a equação de Bessel de ordem v (real ou complexo) dada por:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - v^2)y(x) = 0, \tag{1}$$

ou, equivalentemente, $x(xy'(x))' + (x^2 - v^2)y(x) = 0$. Uma solução em termos de séries de potências pode ser obtida tomando-se (método de Frobenius):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}. \tag{2}$$

Substituindo-se y por esta série na equação de Bessel, obtemos a seguinte equação indicial:

$$s^2 - v^2 = 0 \quad \text{ou} \quad s = \pm v \tag{3}$$

O coeficiente $a_1 = 0$ e todos os coeficientes de índice ímpares são nulos. Os coeficientes de índices pares são obtidos pela relação:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - v^2} \quad (n \geq 2), \tag{4}$$

e todo coeficiente de índice par pode ser obtido em termos de a_0. Lembrando que $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$, os coeficientes podem ser escrito para $s = +v$:

$$a_2 = -\frac{a_0\Gamma(1+v)}{1!2^2\Gamma(2+v)}, \quad a_4 = \frac{a_0\Gamma(1+v)}{2!2^4\Gamma(3+v)}, \quad a_6 = -\frac{a_0\Gamma(1+v)}{3!2^6\Gamma(4+v)}, \quad a_{2n} = -\frac{(-1)^n a_0\Gamma(1+v)}{n!2^{2n}\Gamma(n+1+v)},$$

e a série solução é da forma:

$$y = a_0 x^v \Gamma(1+v) \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+v)} - \frac{1}{\Gamma(2+v)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots \right\},$$

ou ainda

$$y = a_0 2^v \frac{x^v}{2^v} \Gamma(1+v) \left\{ \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+v)} - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+v)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots \right\},$$

pois $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Se tomarmos

$$a_0 = \frac{1}{2^v\Gamma(1+v),}$$

a série solução da equação de Bessel de ordem v assume a forma:

$$y = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+v)} \left(\frac{x}{2}\right)^v - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+v)} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2} + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+v)} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+4} + \ldots$$

e se denomina função de Bessel de primeira espécie de ordem v e é indicada por $J_v(x)$, isto é,

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}. \tag{5}$$

Se v é um inteiro negativo, esta série não é definida pois $\Gamma(v)$ é infinita para inteiros negativos. Quando v é não-inteiro, a segunda solução da equação de Bessel pode ser obtida pelo método de Frobenius, tomando-se $s = -v$. A série solução será então:

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}. \tag{6}$$

Quando v pe não-inteiro, J_v e J_{-v} são duas soluções linearmente independentes da equação de Besselm, e temos a solução geral:

$$y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x).$$

Se $v > 0$, então J_{-v} diverge na origem. Porém, quando v é um inteiro $v = m$, J_v e J_{-v} são linearmente dependentes; mais precisamente, $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$.

2 Funções de Bessel de Segunda Espécie

Consideremos a função Y_v definida por:

$$Y_v = \frac{J_v(x)\cos(v\pi) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}, \tag{7}$$

que é, obviamente, solução da equação de Bessel de ordem v (para v não-inteiro), pois é uma combinação linear das soluções. A expressão do lado direito de (7) é indeterminada quando $v = n$ (inteiro). Se calcularmos o $\lim_{v\to n} Y_v(x)$, obtermos

$$Y_n = \lim_{v\to n} Y_v(x) = \frac{1}{pi}\left\{\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right\}_{n=v}.$$

As funções $Y_v(x)$ e $Y_n(x)$ são denominadas funções de Bessel de segunda espécie, ou funções de Neumann. É possível mostrar que a função $Y_n(x)$ obtida como $\lim_{v\to n} Y_v(x)$ é solução da equação de Bessel de ordem n. Assim, a solução mais geral para qualquer v (inteiro ou não) pode ser escrita como:

$$y(x) = AJ_v(x) + BY_v(x).$$

As funções J_v e Y_v são linearmente independentes, inclusive para $v = n$. Para comprovar este fato, calcule o Wronskiano $W(J_n, Y_n)$ e obtenha $W(J_n, Y_n) = \frac{2}{x\pi}$. Verifique também que $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$. Assim, toda solução da equação (1) para $v = n$ é da forma:

$$AJ_n(x) + BY_n(x)$$

3 Resolução

Todos os exercícios foram resolvidos no Matemática.

Exercício 1

- **Dirichlet**.
$$y(x) = \frac{c_1 Y_n(a\alpha)J_n(x\alpha) - c_1 J_n(a\alpha)Y_n(x\alpha)}{Y_n(a\alpha)}$$

- **Neummann**.
$$y(x) = \frac{c_1 Y_{n-1}(a\alpha)J_n(x\alpha) - c_1 J_{n-1}(a\alpha)Y_n(x\alpha) + c_1 J_{n+1}(a\alpha)Y_n(x\alpha) - c_1 Y_{n+1}(a\alpha)J_n(x\alpha)}{Y_{n-1}(a\alpha) - Y_{n+1}(a\alpha)}$$

- **Robin**.
$$y(x) = \frac{N}{2hY_n(a\alpha) + \alpha Y_{n-1}(a\alpha) - \alpha Y_{n+1}(a\alpha)},$$

  com

$$\begin{aligned} N = {} & 2c_1 h Y_n(a\alpha)J_n(x\alpha) - 2c_1 h J_n(a\alpha)Y_n(x\alpha) + \alpha c_1 Y_{n-1}(a\alpha)J_n(x\alpha) \\ & - \alpha c_1 J_{n-1}(a\alpha)Y_n(x\alpha) + \alpha c_1 J_{n+1}(a\alpha)Y_n(x\alpha) - \alpha c_1 Y_{n+1}(a\alpha)J_n(x\alpha) \end{aligned}$$