

## 1 Método de Chebyshev

Seja  $f(x)$  uma função limitada no intervalo  $(a, b)$ . Podemos expandir  $f(x)$  da seguinte maneira:

$$f(x(t))_{(a \leq x \leq b)} = F(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1T_1(t) + a_2T_2(t) + \dots \quad (1)$$

em que

$$T_r(t) = \cos(r \cos^{-1}(t))$$
$$t = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$$

Integrando a Eq. 1, temos:

$$\frac{2}{b-a} \int_a^x f(x)dx = \int_{-1}^t F(t)dt = \frac{1}{2}b_0 + b_1T_1(t) + b_2T_2(t) + \dots \quad (2)$$

em que

$$b_r = \frac{a_{r-1} - a_{r+1}}{2r}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

O valor de  $b_0$  é determinado pelo limite inferior de integração, então:

$$b_0 = 2b_1 - 2b_2 + 2b_3 - 2b_4 + \dots$$

A integral é definida por:

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 F(t)dt = \frac{1}{2}b_0 + b_1 + b_2 + \dots = 2(b_1 + b_3 + b_5 + \dots) \quad (3)$$

Os coeficientes da expansão 1 podem ser calculados usando a observação de que qualquer polinômio de grau  $N$  pode ser escrito na forma

$$f(x(t)) = F(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1T_1(t) + a_2T_2(t) + \dots + a_{N-1}T_{N-1}(t) + \frac{1}{2}a_NT_N(t) = \sum_{r=0}^N a_r T_r(t) \quad (4)$$

Aqui,  $\sum''$  denota a soma finita cujo primeiro e último termos são multiplicados por  $\frac{1}{2}$ . Os coeficientes em 4 são dados por

$$a_r = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^N F\left(\cos \frac{\pi s}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi r s}{N}\right)$$

Isto é uma consequência da ortogonalidade da função cosseno com respeito aos pontos  $t_s = \cos \frac{\pi s}{N}$ , expressada pela equação:

$$\sum_{s=0}^N \cos\left(\frac{\pi i s}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi j s}{N}\right) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N, & i = j = 0 \text{ ou } N \\ \frac{1}{2}N, & i = j \neq 0 \text{ ou } N \end{cases}$$

## 2 Exercícios

Use o método de expansão de Chebyshev para calcular as integrais definidas abaixo com até 6 dígitos de precisão. As integrais são:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + x^2 + 0.9} dx$$
$$\int_{-1}^1 \sqrt{\left|x + \frac{1}{2}\right|} dx$$

Para cada caso, construa uma tabela de valores para os coeficientes  $a_r$  e  $b_r$ . Obtenha, também, um gráfico da função aproximada pelo método e compare com o gráfico da função no integrando.

### 3 Resolução

O método de Chebyshev para cálculo de integrais definidas foi implementado em MATLAB

#### 3.1 Exercício 1

Os valores de  $a_r$  e  $b_r$  são dados na tabela abaixo com  $N = 22$ . Temos a seguinte integral definida:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9} dx.$$

Tabela 1: Resultados numéricos do primeiro exercício.

r	$a_r$	$b_r$
0	1.336666674225290	-
1	0.000000000000000	0.858441127690537
2	-0.380215581155785	0.000000000000000
3	-0.000000000000000	-0.073545576067158
4	0.061057875247165	-0.000000000000000
5	0.000000000000000	0.006451618504673
6	-0.003458309799560	0.000000000000000
7	0.000000000000000	-0.000152793299825
8	-0.001319203602016	-0.000000000000000
9	0.000000000000000	-0.000102300550229
10	0.000522206302106	0.000000000000000
11	-0.000000000000001	0.000028448694199
12	-0.000103664970276	-0.000000000000000
13	0.000000000000000	-0.000004394783399
14	0.000010599398091	0.000000000000000
15	-0.000000000000000	0.000000325208060
16	0.000000843156299	0.000000000000000
17	-0.000000000000001	0.000000044054481
18	-0.000000654696062	-0.000000000000000
19	0.000000000000000	-0.000000021484507
20	0.000000161715189	-0.000000000000000
21	0.000000000000001	0.000000004921833
22	-0.000000045001792	-

O valor da integral é dado por:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9} dx = 2(b_1 + b_3 + b_5 + \dots) = 1.582232965777331$$

Na aproximação da função do integrando, a raiz quadrada do erro quadrático médio foi de:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}{n}} = 1.902886989865449 \cdot 10^{-7}$$

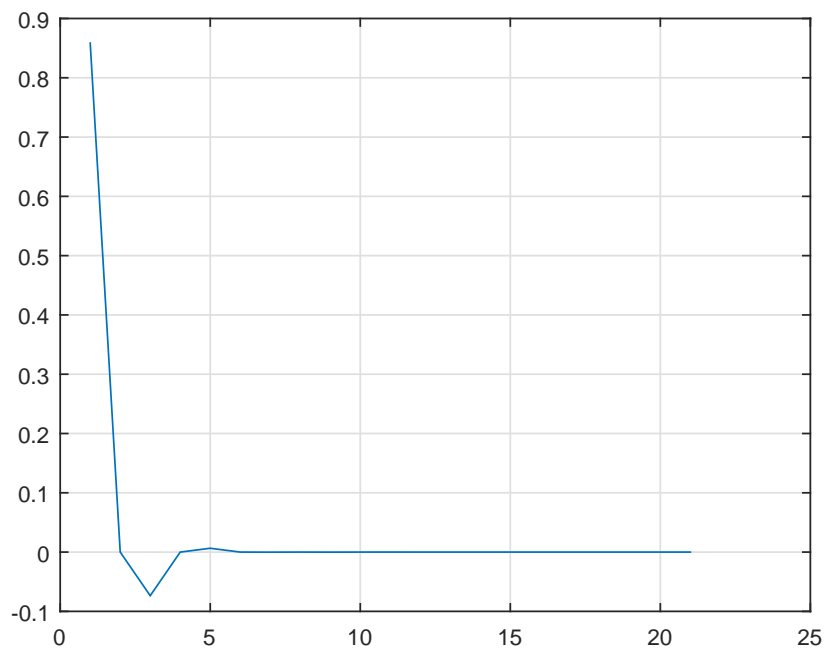


Figura 1: Convergência dos valores de  $b_r$  no exercício 1.

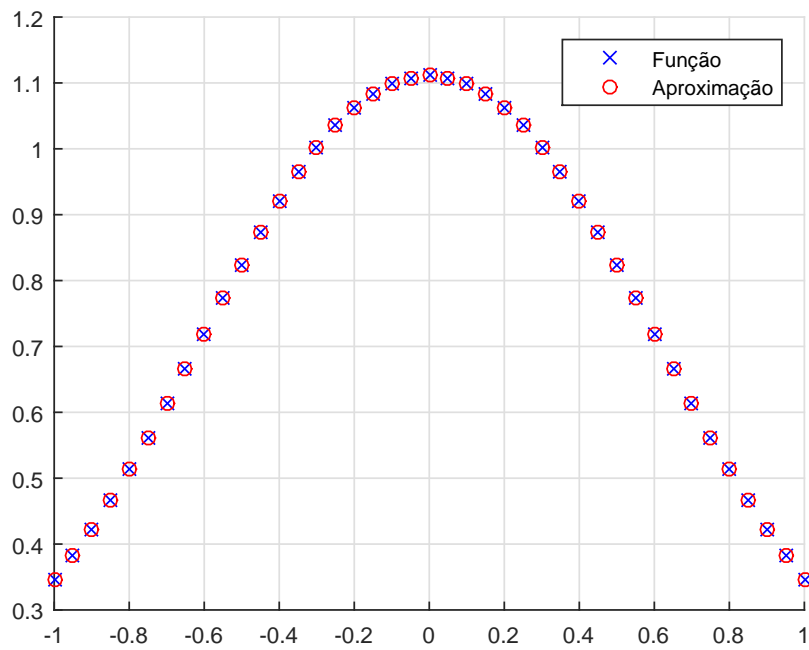


Figura 2: Função do exercício 1 aproximada.

### 3.2 Exercício 2

Os valores de  $a_r$  e  $b_r$  são dados na tabela abaixo com  $N = 19$ . Temos a seguinte integral definida:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\left|x + \frac{1}{2}\right|} dx.$$

Tabela 2: Resultados numéricos do segundo exercício.

r	$a_r$	$b_r$
0	1.579218322193437	-
1	0.366965847474833	0.706798543267637
2	0.165621235658162	0.127971400146460
3	-0.144919753111006	0.020615630793443
4	0.041927450897503	-0.022306267769967
5	0.033530389048728	0.008925014411228
6	-0.047322693214777	0.001260725493651
7	0.018401683124920	-0.004380237292847
8	0.01400062885079	0.002631724712030
9	-0.023705912267560	0.000161211385072
10	0.011098823953786	-0.001510158617662
11	0.006497260085674	0.001124821018122
12	-0.013647238444891	-0.000062835382376
13	0.008005309262690	-0.000610000383275
14	0.002212771520264	0.000572724555622
15	-0.008030978294732	-0.000147278518457
16	0.006631127073971	-0.000218432570725
17	-0.001041136031548	0.000318722594433
18	-0.004205441136746	-0.000202050212572
19	0.006232671621041	-

O valor da integral é dado por:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\left|x + \frac{1}{2}\right|} dx = 2(b_1 + b_3 + b_5 + \dots) = 1.465612854550713$$

Na aproximação da função do integrando, a raiz quadrada do erro quadrático médio foi de:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}{n}} = 0.033624284161012$$

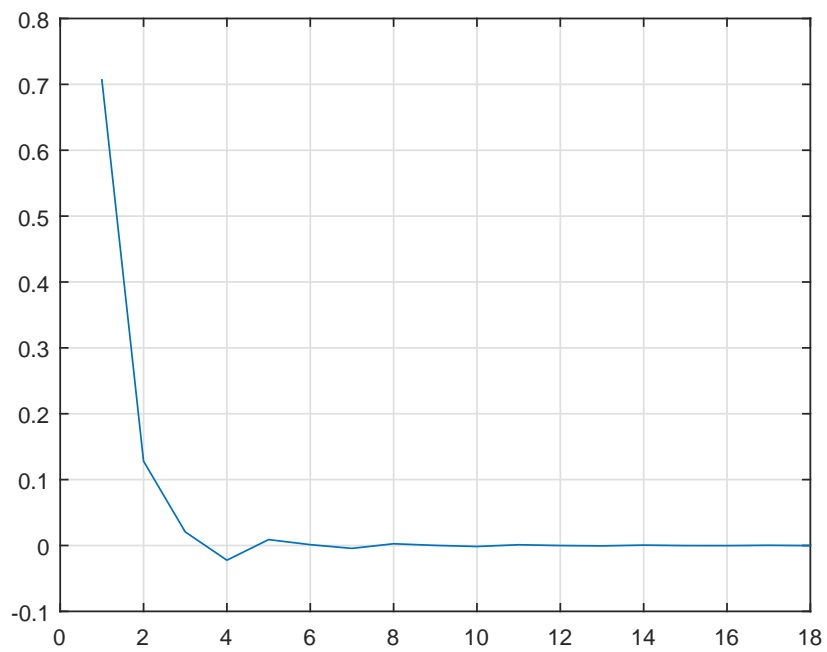


Figura 3: Convergência dos valores de  $b_r$  no exercício 2.

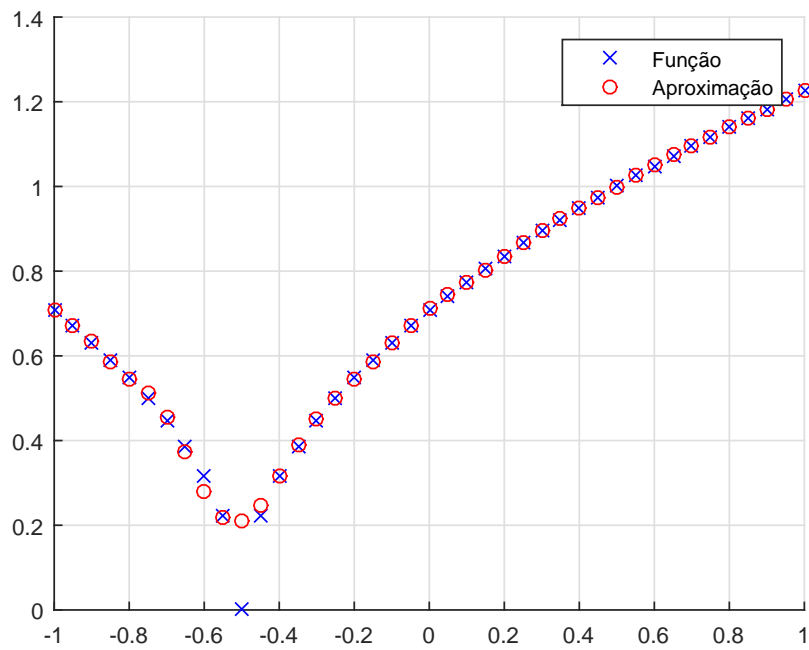


Figura 4: Função do exercício 2 aproximada.

### 3.3 Código em MATLAB

```
1 clear
2 clc
3 format long
4
5 addpath(' ../tools ');
6
7 %% Definições iniciais
8 F = @(x) 1./(x.^4+x.^2+0.9);
9 %F = @(x) sqrt(abs(x+0.5));
10 N = 22;
11
12 [I, ar] = chebyshev(F, -1, 1, N);
13
14 %% Plota a função real e a aproximada
15 w = [.5 ones(1, N-1) .5]; % Vetor de pesos
16 x = -1:0.05:1; % Intervalo
17 yr = F(x); % Função verdadeira
18 yt = cos((0:N)'*acos(x))' * (w' .* ar); % Aproximação
19 hold on;
20 plot(x, yr, 'bx');
21 plot(x, yt, 'ro');
22 grid on;
23 hold off;
24 legend('Função', 'Aproximação');
25
26 %% Calcula o erro quadrático médio da aproximação
27 I
28 rmse = sqrt(mean((yr-yt').^2))
```

### 3.4 Função de Chebyshev

```
1 function [I, ar, br] = chebyshev(F, a, b, N)
2 %CHEBYSHEV Calcula a integral numérica de uma função F no intervalo [a,b]
3 % utilizando o método de Chebyshev.
4 %
5 % A função F precisa conter apenas operações bitwise.
6
7 %% Matriz de pesos da soma finita com primeiro e último pesos iguais a 0.5
8 w = [.5 ones(1, N-1) .5];
9
10 %% Cria iteradores de 0 a N
11 [s, r] = meshgrid(0:N, 0:N);
12
13 %% Calcula os valores dos coeficientes a_r
14 t = cos(s * pi / N) * (b - a)/2 + (b + a)/2;
15 ar = F(t) .* cos(pi * s .* r / N);
16 ar = (2/N) * ar*w';
17
18 %% Calcula os valores dos coeficientes b_r
19 r = 2:N;
20 br = (ar(r-1) - ar(r+1))./(2*(r-1));
21
22 %% Calcula o valor da integral
23 I = 2*sum(br(1:2:end)) * ((b-a)/2);
24
25 end
```