

1 (Nossa versão da) Equação de Rayleigh (23/11/2017)

Vamos escrever a equação de Rayleigh na forma:

$$A_0 R(t) R''(t) + A_1 (R'(t))^2 = -A_2$$

Dividindo através do coeficiente principal A_0 , obtemos a forma normal:

$$R(t) R''(t) + \alpha (R'(t))^2 = -\beta \quad \alpha = \frac{A_1}{A_0}, \beta = \frac{A_2}{A_0}$$

Esta equação pode ser integrada uma vez; a primeira integral é:

$$(R'(t))^2 = -\frac{\beta}{\alpha} + \kappa(R(t))^{-2\alpha} \quad (1)$$

em que κ é uma constante arbitrária de integração. Uma abordagem útil para uma solução é usar o método da transformação de **Sundman**. O truque padrão é estabelecer:

$$R = V^\epsilon, \quad R^\delta d\tau = dt$$

para que possamos obter a seguinte equação:

$$(V'(\tau))^2 = \frac{\kappa(V(\tau))^{-2\alpha\epsilon+2\delta\epsilon-2\epsilon+2}}{\epsilon^2} - \frac{\beta(V(\tau))^{2\delta\epsilon-2\epsilon+2}}{\alpha\epsilon^2}$$

Soluções formais para este tipo de problema são encontradas apenas para casos em que o lado direito é um polinômio no máximo de ordem 4. Uma possibilidade simples é fazer $\epsilon = \frac{1}{2\alpha}$ e $\delta = 2\alpha + 1$. A equação acima é facilmente reescrita como:

$$(V'(\tau))^2 = 4\alpha^2 \kappa(V(\tau))^3 - 4\alpha\beta(V(\tau))^4$$

Esta equação é conhecido por **Eq. de Briot-Bouquet** e integrando, temos a solução geral:

$$V(\tau) = \frac{\alpha\kappa}{\beta + \alpha^3\kappa^2(\tau - \tau_0)^2}$$

em que τ_0 é uma segunda constante arbitrária. Com isso, obtemos a solução geral de R em forma paramétrica:

$$R(\tau) = \left(\frac{\alpha\kappa}{\beta + \alpha^3\kappa^2(\tau - \tau_0)^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}, \quad t(\tau) = \int_0^\tau (R(z))^{2\alpha+1} dz \quad (2)$$

A integral para t pode ser obtida de forma analítica gerando uma expressão em termos de funções hipergeométricas

$$t = \alpha^b \beta^{-b} \kappa^b (\mathcal{J}_1(\tau - \tau_0) - \mathcal{J}_2 \tau_0)$$

em que $b = 1 + \frac{1}{2\alpha}$; \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 são as funções hipergeométricas, dadas por:

$$\mathcal{J}_1 = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha^3\kappa^2(\tau - \tau_0)^2}{\beta} \right), \quad \mathcal{J}_2 = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha^3\kappa^2\tau_0^2}{\beta} \right)$$

Usando esse resultado, e resolvendo a primeira equação paramétrica para τ em termos de R , temos a dependência de t em R :

$$t = \alpha^b \beta^{-b} \kappa^b \left(\mathcal{J}_1 \frac{\sqrt{R^{-2\alpha} - \frac{\beta}{\alpha\kappa}}}{\alpha\sqrt{\kappa}} - \mathcal{J}_2 \tau_0 \right)$$

em que, agora, $\mathcal{J}_1 = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, 1 - \frac{\alpha\kappa R^{-2\alpha}}{\beta} \right)$. O tempo de colapso t_c é encontrado separando as variáveis dR e dT em (1) e, posteriormente, integrando:

$$t_c = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \frac{B\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}, \frac{1}{2}\right)}{2\alpha} R(0) \quad (3)$$

em que $B(\cdot, \cdot)$ é a integral Beta e a eq. (3) só vale para quando $V'(0) = 0$;

1.1 Atividade

Encontrado a eq. (1). Tratando $R(t)$ como termo independente, podemos chamar:

$$\frac{dR(t)}{dt} = u(R) \rightarrow \frac{d^2 R(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(u(R)) = \frac{du(R)}{dR} \frac{dR}{dt} = u(R) \frac{du(R)}{dR}$$

Substituindo na eq. (1), temos:

$$Ru(R) \frac{du(R)}{dR} + \alpha(u(R))^2 = -\beta$$

podemos resolver esta equação separando os termos dependentes dos independentes:

$$\frac{du(R)}{dR} = \frac{-\beta - \alpha(u(R))^2}{u(R)R} \rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{u}{-\beta - \alpha u^2} du$$

integrando os dois lados temos:

$$\log R + c_0 = -\frac{1}{2\alpha} \log(-\beta - \alpha u^2) \rightarrow c_1 R = (-\beta - \alpha u^2)^{-\frac{1}{2\alpha}}$$

substituindo $u(R)$, temos:

$$(c_1 R(t))^{-2\alpha} = -\beta - \alpha \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2 \rightarrow (R'(t))^2 = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} (c_1 R(t))^{-2\alpha}$$
$$(R'(t))^2 = -\frac{\beta}{\alpha} + \kappa (R(t))^{-2\alpha}$$

em que $\kappa = \frac{c_1^{-2\alpha}}{\alpha}$.

2 Exercícios

Considere o problema de Cauchy para a equação $R'(t)^2 = -\frac{\beta}{\alpha} + \kappa R(t)^{-2\alpha}$ com os dados iniciais $R(0) = 1$, $R'(0) = 0$. Fazendo uso desses valores na análise feita na aula, encontramos $\kappa = \frac{\beta}{\alpha}$ e $\tau_0 = 0$. Uma vez que κ e τ_0 são determinados, a solução em forma fechada torna-se

$$t = \frac{\sqrt{R^{-2\alpha} - 1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b, \frac{3}{2}, 1 - R^{-2\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, \quad b = 1 + \frac{1}{2\alpha}$$

em que

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \zeta^{b-1} (1-\zeta z)^{-a} (1-\zeta)^{-b+c-1} d\zeta$$

Fala o gráfico de R versus t para $\alpha = 1.2386$ e $\beta = 0.0058149$. Calcule o tempo de colapso através da fórmula dada, considerando que:

$$\frac{B\left(\frac{\mu}{\lambda}, \nu\right)}{\lambda} = \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x^\mu)^{\nu-1} dx$$

Em seguida, compare os resultados com a solução numérica do problema da bolha, feito na lista 2.

3 Resolução

Utilizando a fórmula dada e as constantes do problema, o tempo de colapso é dado por:

$$t_c = 12.545156305897644$$

O gráfico abaixo mostra o raio da bolha ao longo do tempo, calculado tanto pela abordagem numérica, utilizando Runge-Kutta de quarta ordem, quanto pela abordagem da aula atual, utilizando as equações paramétricas dadas por (2). Este gráfico foi feito com o auxílio do Matlab e as duas funções criadas nas últimas aulas foram utilizadas como ferramenta, a **rk4** e a **chebyshev**.

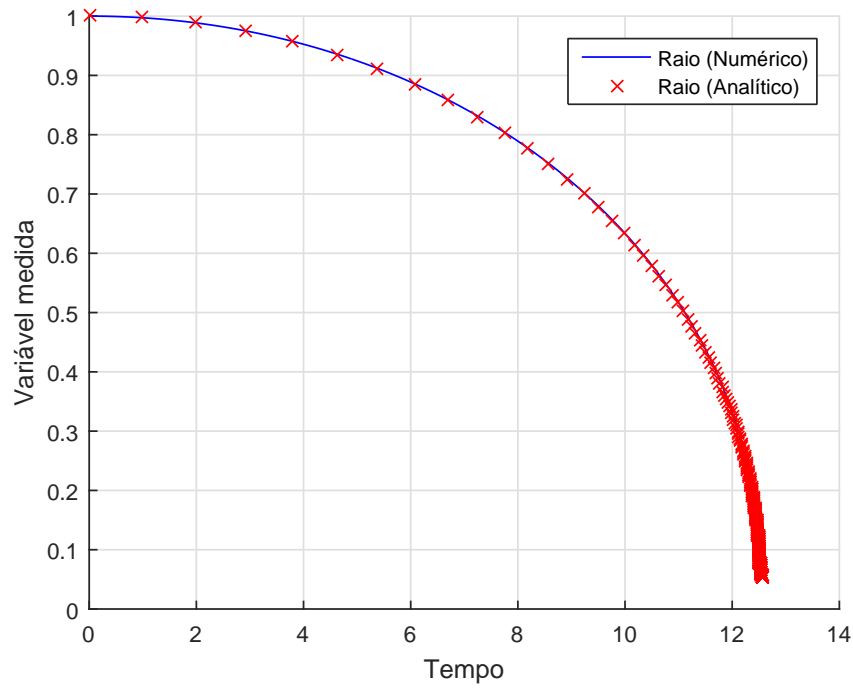


Figura 1: Raio da bolha ao longo do tempo.

3.1 Código em MATLAB

```
1 clear
2 clc
3 format long
4
5 addpath(' ../tools ');
6
7 %% Parâmetros iniciais da equação da bolha
8 Pl = 0.195091;      % Pressão no líquido
9 Pv = 0.166391;      % Pressão no vapor
10 el = 4.34802;       % Energia do líquido
11 ev = 1.79634;       % Energia do vapor
12
13 h = 0.1;            % Passo para o método de Runge-Kutta
14 x0 = [1 0.0001];    % Valores das condições iniciais
15 tmin = 0;           % Início do intervalo
16
17 %% Calcula tempo de colapso
18 % Parâmetros da equação posta na forma  $R'(t)^2 = -b/a + kR(t)^{(-2a)}$ 
19 a = 1.2386;         % alpha
20 b = 0.0058149;      % beta
21 k = b/a;            % constante de integração
22 t0 = 0;             % tau_0
23 tc = sqrt(a)/sqrt(b) * beta((a+1)/(2*a), 0.5)/(2*a) * x0(1);
24
25 %% Sistema de equações diferenciais a serem resolvidas
26 f = @(t,X) [X(2) (35*(Pv-Pl) - 7*X(2)^2*(5*Pl + 5*el + 4*Pv + 4*ev))/(7*X
    (1)*(5*Pl+5*el+Pv+ev))]; % [R;U]
27
28 %% Resolve pelo método numérico (aula-2)
29 x = rk4(f, h, x0, [tmin tc]);
30
31 %% Resolve o mesmo problema de forma teórica com equações paramétricas
32 R = @(x) (a*k./(b + a^3*k^2*(x - t0).^2)).^(1/(2*a));
33 t = @(tau) chebyshev(@(x) (R(x)).^(2*a+1), 0, tau, 22);
34 taumax = 450;
35 tabela = zeros(taumax+1, 2);
36 tabela(:,2) = R(0:taumax);
37 for tau = 0:taumax
38     tabela(tau+1,1) = t(tau);
39 end
40
41 %% Plota resultados numérico e analítico
42 hold on
43 plot(tmin:h:tc, x(:, 1), 'b');
44 plot(tabela(:, 1), tabela(:, 2), 'rx');
45 legend('Raio (Numérico)', 'Raio (Analítico)');
46 xlabel('Tempo');
47 ylabel('Variável medida');
48 grid on;
49 hold off;
```