1 O problema de Sturm–Liouville

Seja o intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e sejam p, q e r funções reais definidas em I, tais que:

- p é contínua, diferenciável e estritamente positiva em I, ou seja, $p(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$;
- q é contínua em I;
- r é contínua e estritamente positiva em I, ou seja, $r(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Para uma função u definida em I que seja pelo menos duas vezes diferenciável, vamos definir o operador diferencial L por $(Lu)(x) = (p(x)u')' + q(x)u$. Entende-se por problema de Sturm–Liouville regular[1], o problema de se determinar a função definida em I e os números λ tais que a seguinte equação diferencial seja satisfeita:

$$(Lu)(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, \tag{1}$$

com o seguinte tipo de condição de contorno: vamos supor que existam constantes reais α_1, α_2, β_1 e β_2 tais que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ e tais que o seguinte par de relação deve ser válido:

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \tag{2}$$

Se λ for um número tal que a equação 1 seja satisfeita para alguma função u_λ (que, em geral, dependerá de λ) então diz-se que λ é um autovalor do Problema de Sturm–Liouville e u_λ é dito ser a autofunção associada ao autovalor λ do Problema de Sturm–Liouville. Essa nomenclatura surge por analogia com os conceitos de autovalor e autovetor de matrizes na álgebra linear. Tal se justifica por, definindo-se o operador $M = -\frac{1}{r}L$, a equação $Lu_\lambda + \lambda r u_\lambda = 0$, escreve-se na forma $Mu_\lambda = \lambda u_\lambda$, que é precisamente uma equação de autovalores para o operador M.

- **Produtos escalares**: Para o espaço linear real das funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$, podemos definir os produtos escalares reais por:

  $$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx \quad \text{e} \quad (f, g)_r = \int_a^b f(x)g(x)r(x)\, dx,$$

  em que a função r é a função estritamente positiva caracterizada acima no problema de Sturm–Liouville.

- **Realidade dos autovalores**: Os autovalores de um Problema de Sturm–Liouville são números reais.

- **Realidade das autofunções**: As autofunções de um Problema de Sturm–Liouville podem ser escolhidas como funções reais.

- **Relação de ortogonalidade**: Sejam u_{λ_1} e u_{λ_2} duas autofunções reais associadas a dois autovalores distintos λ_1 e λ_2, então valo que:

  $$\int_a^b u_{\lambda_1}(x)u_{\lambda_2}(x)r(x)\, dx = 0.$$

  Esta solução é chamada função de ortogonalidade.

- **O quociente de Rayleigh**: Seja u_λ uma autofunção (real) com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, tal que $(pu_\lambda')' + qu_\lambda + \lambda r u_\lambda = 0$. Multiplicando-se essa igualdade por u_λ e integrando-se entre a e b, tem-se:

  $$\lambda \int_a^b u_\lambda^2(x)r(x)\, dx = -\int_a^b u_\lambda(x)(pu_\lambda')'(x)\, dx - \int_a^b u_\lambda^2(x)q(x)\, dx, \tag{3}$$

  vamos agora integrar por partes a primeira integral. Temos:

  $$\int_a^b u_\lambda(x)(pu_\lambda')'(x)\, dx = (pu_\lambda u_\lambda')(x)\big|_a^b - \int_a^b (u_\lambda'(x))^2 p(x)\, dx,$$

[1] Os trabalhos de Sturm e Liouville sobre o problema que é hoje conhecido como problema de Sturm–Liouville foram desenvolvidos entre 1829 e 1837.

substituindo em (3), tem-se:

$$\lambda \int_a^b u_\lambda^2(x) r(x)\, dx = \int_a^b \left[(u_\lambda'(x))^2 p(x) - u_\lambda^2(x) q(x) \right] \, dx + \left[p(a) u_\lambda(a) u_\lambda'(a) - p(b) u_\lambda(b) u_\lambda'(b) \right],$$

o que permite escrever:

$$\lambda = \frac{\int_a^b \left[(u_\lambda'(x))^2 p(x) - u_\lambda^2(x) q(x) \right] \, dx + \left[p(a) u_\lambda(a) u_\lambda'(a) - p(b) u_\lambda(b) u_\lambda'(b) \right]}{\int_a^b u_\lambda^2(x) r(x)\, dx} \tag{4}$$

O lado direito de (4) é denominado quociente de Rayleigh e desempenha um papel importante na análise de propriedades dos autovalores de problemas de Sturm–Liouville regulares. O quociente de Rayleigh (4) é também usado para a determinação aproximada de autovalores a partir de aproximantes para as autofunções, de particular utilidade quando as soluções de problema de Sturm–Liouville não puderem ser obtidas de forma explícita. No exercício 1, da lista para amanhã, ilustramos em uma solução simples como esse cálculo aproximado de autovalores pode ser feito.

2 Exercícios

Para cada caso da Tabela 2, encontre os autovalores e autofunções associadas do Problema de Sturm–Liouville regular:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad \beta_1 u'(0) + \alpha_1 u(0) = 0, \quad \beta_2 u'(L) + \alpha_2 u(L) = 0$$

	em $x = 0$	em $x = L$
1	Dirichlet	Dirichlet
	$\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 = 0$
2	Dirichlet	Neumann
	$\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$	$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$
3	Dirichlet	Robin
	$\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$
4	Neumann	Dirichlet
	$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 = 0$
5	Neumann	Neumann
	$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$	$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$
6	Neumann	Robin
	$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$
7	Robin	Dirichlet
	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 = 0$
8	Robin	Neumann
	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$	$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$
9	Robin	Robin
	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$	$\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$

Tabela 1: Condições de contorno

Determine também, em cada caso, a norma quadrada:

$$\|u_\lambda\|^2 = \int_0^L u_\lambda^2(x)\, dx$$

3 Resolução

Primeiramente, vamos resolver o Problema de Sturm–Liouville regular. Podemos assumir que a solução do problema é exponencialmente proporcional a uma constante γ, de tal forma que $u = e^{\gamma x}$. Utilizando esta suposição no problema de segunda ordem, temos:

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda u(x) &= (e^{\gamma x})'' + \lambda e^{\gamma x} \\ &= \gamma^2 e^{\gamma x} + \lambda e^{\gamma x} \\ &= \left(\gamma^2 + \lambda\right) e^{\gamma x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

resolvendo isto para γ, temos que $\gamma = \pm i\sqrt{\lambda}$. A solução geral do problema pode ser escrita como uma combinação linear das soluções, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_\lambda(x) &= c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= c_1 \left(\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + i\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right) + c_2\left(\cos\left(-\sqrt{\lambda}x\right) + i\sin\left(-\sqrt{\lambda}x\right)\right) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + i(c_2 - c_1)\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\ &= k_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + k_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \end{aligned}$$

Podemos calcular as autofunções para cada caso da tabela inserindo as condições de contorno. Temos:

- **Dirichlet, Dirichlet**. temos que $\alpha_1 u(0) = 0 \to u(0) = k_1 = 0$, assim, podemos reescrever $u_\lambda(x) = k_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, para k_2 dado e um autovalor λ que satisfaça as duas condições de contorno ao mesmo tempo. Como sabemos que $k_1 = 0$ para atender à primeira, podemos calcular a segunda da seguinte maneira:

  $$k_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0,$$

  vamos considerar o caso em que $k_2 \neq 0$ para que estejamos olhando para uma solução não trivial. Assim, temos que $\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0$ e, portanto,

  $$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Dirichlet, Neumman**. temos que $\alpha_1 u(0) = 0 \to u(0) = k_1 = 0$, assim, podemos reescrever $u_\lambda(x) = k_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, para k_2 dado e um autovalor λ que satisfaça as duas condições de contorno ao mesmo tempo. Como sabemos que $k_1 = 0$ para atender à primeira, podemos calcular a segunda da seguinte maneira:

  $$\sqrt{\lambda}k_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0,$$

  vamos considerar o caso em que $k_2, \lambda \neq 0$ para que estejamos olhando para uma solução não trivial. Assim, temos que $\cos\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0$ e, portanto,

  $$\lambda = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$