1 (Nossa versão da) Equação de Rayleigh-Plesset

A equação mais geral do raio da bolha ao longo do tempo é

$$\begin{aligned}\partial_t\left((I_1+I_2)(R(t))^3 R'(t)\right) &= (2I_2-I_1)(R(t))^2(R'(t))^2+\Lambda\\ &-\int_0^{R(t)} r^2 T'(R(t))\,\partial_{T(R(t))}\epsilon(n,T(R(t)))\,dr\\ &-\int_{R(t)}^{\infty} r^2 T'(R(t))\,\partial_{T(R(t))}\epsilon(n,T(R(t)))\,dr\end{aligned} \tag{1}$$

em que T é uma temperatura, ϵ uma energia e

$$I_1=\int_0^1 \frac{x^4F(x)}{1-x^2(R'(t))^2}dx, \qquad I_2=\int_1^\infty \frac{x^2F(x)}{x^4-(R'(t))^2}dx$$

$$\Lambda=\int_0^{R(t)}\frac{3r^2F(r)}{R(t)}dr-(R(t))^2\left\{F(r\to\infty)+\epsilon_v\left[n(r\to R),T(R(t))\right]-\epsilon_l\left[n(r\to R),T(R(t))\right]\right\}$$

Para um campo termodinâmico espacialmente uniforma, $F=F_0$ e as I-integrais tornam-se:

$$I_1=\frac{1}{5}F_{0,v}\cdot {}_2F_1\left(1,\frac{5}{2},\frac{7}{2},(R'(t))^2\right)$$

$$I_2=F_{0,l}\cdot {}_2F_1\left(1,\frac{1}{4},\frac{5}{4},(R'(t))^2\right)$$

em que a função hipergeométrica ${}_2F_1$ é conhecida por admitir a representação integral

$${}_2F_1(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{\zeta^{b-1}(1-\zeta)^{-b+c-1}}{(1-\zeta z)^a}d\zeta$$

No caso da teoria de uma temperatura zero, a equação da bolha por ser escrita na forma

$$R''(t)=\frac{\Lambda-(R(t))^2(4I_1(t)+I_2(t))(R'(t))^2-(R(t))^3R'(t)(I_1'(t)+I_2'(t))}{(R(t))^3(I_1(t)+I_2(t))}$$

Se os componentes do líquido e do vapor são homogêneos, temos:

$$R''(t)=\frac{35\Lambda+(R(t))^2(-28F_{0,v}H_1-35F_{0,l}H_2)(R'(t))^2}{(R(t))^3\left\{F_{0,v}\left[7H_1+10H_3(R'(t))^2\right]+7F_{0,l}\left[5H_2+2H_4(R'(t))^2\right]\right\}}$$

em que:

$$H_1={}_2F_1\left(1,\frac{5}{2},\frac{7}{2},(R(t))^2\right)\qquad H_2={}_2F_1\left(1,\frac{1}{4},\frac{5}{4},(R(t))^2\right)$$

$$H_3={}_2F_1\left(2,\frac{7}{2},\frac{9}{2},(R(t))^2\right)\qquad H_4={}_2F_1\left(2,\frac{5}{4},\frac{9}{4},(R(t))^2\right)$$

$$\Lambda=(R(t))^2\left[-F(r\to\infty)+F_{0,v}+\epsilon_l(n(r\to R),0)-\epsilon_v(n(r\to R),0)\right]$$

Neste ponto, lembramos a relação termodinâmica $n\epsilon'(n)=F(r)=P+\epsilon$, conhecida como **relação de Gibbs**. O primeiro termo do numerador do lado direito da equação pela $R''(t)$ se torna:

$$35(R(t))^2(-P_l+P_v) \qquad \text{sendo que } -P_l+P_v=-\beta$$

Fazendo as substituições:

$$F_{0,l}=\epsilon_l+P_l,\quad F_{0,v}=\epsilon_v+P_v,\quad H_1=5I_1,\quad H_2=I_2,\quad H_3=\frac{7}{2}I_3,\quad H_4=\frac{5}{2}I_4,$$

temos a equação da lista.

2 Exercícios

Use o método de integração de Runge-Kutta para obter a aproximação da solução dos seguintes problemas de Cauchy

1.

$$R'(t) = U(t), \quad U'(t) = -\frac{R'(t)^2\left[I_2\left(P_l+\epsilon_l\right)+4I_1\epsilon_v\right]+P_l+P_v\left(4I_1R'(t)^2-1\right)}{R(t)\left[I_4\left(P_l+\epsilon_l\right)R'(t)^2+I_2\left(P_l+epislon_l\right)+\left(P_v+\epsilon_v\right)\left(I_1+I_3R'(t)^2\right)\right]}$$

$$R(0) = 0.1, \quad U(0) = 0.1$$

2.

$$R'(t) = U(t), \quad U'(t) = -\frac{R'(t)^2\left[I_2\left(P_l+\epsilon_l\right)+4I_1\epsilon_v\right]+P_l+P_v\left(4I_1R'(t)^2-1\right)}{R(t)\left[I_4\left(P_l+\epsilon_l\right)R'(t)^2+I_2\left(P_l+epislon_l\right)+\left(P_v+\epsilon_v\right)\left(I_1+I_3R'(t)^2\right)\right]}$$

$$R(0) = 0.2, \quad U(0) = \frac{1}{10000000}$$

Adote os seguintes valores para os parâmetros: $P_v = 0.1595106949435665$, $P_l = 0.17078553413498362$, $\epsilon_v = 1.7699955011416335$ e $\epsilon_l = 4.275051939160018$. Note que U é a primeira derivada de R com relação a t.

As integrais que aparecem na equação que trata da determinação de R são expressas em termos das funções hipergeométricas:

$$I_1 = \frac{1}{5}\,{}_2F_1\left(1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, (R(t))^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\zeta^{3/2}}{1-\zeta R'(t)}d\zeta$$

$$I_2 = {}_2F_1\left(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, (R(t))^2\right) = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\zeta^{3/4}\left(1-\zeta R'(t)\right)}d\zeta$$

$$I_3 = \frac{2}{7}\,{}_2F_1\left(2, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, (R(t))^2\right) = \int_0^1 \frac{\zeta^{5/2}}{\left(1-\zeta R'(t)\right)^2}d\zeta$$

$$I_4 = \frac{2}{5}\,{}_2F_1\left(2, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, (R(t))^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\zeta^{1/4}}{\left(1-\zeta R'(t)\right)^2}d\zeta$$

3 Resolução

Os testes foram feitos no Matlab e foram utilizadas as funções já criadas nos exercícios anteriores.

3.1 Exercício 1

Na primeira equação, por haver velocidade inicial considerável, o gráfico descreve o formato de uma parábola. Para a resolução desta questão, foi utilizado um passo igual a 0.01 no Runge-Kutta de quarta ordem e o valor do tempo de colapso (aproximadamente **6.01**) foi encontrado por tentativa e erro.

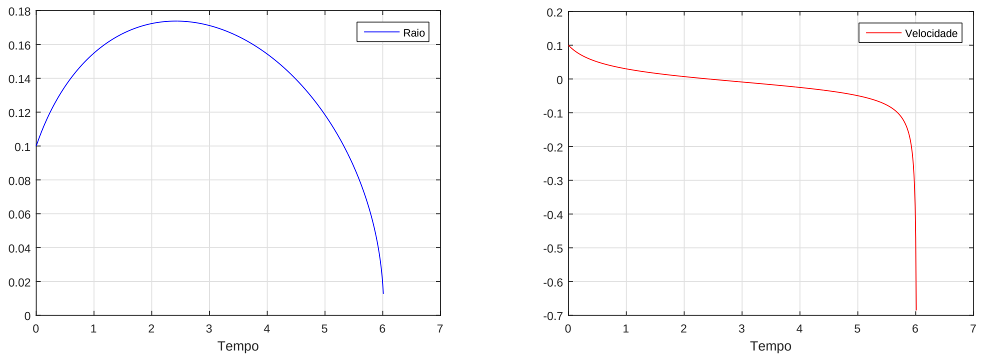

Figura 1: Raio e velocidade da bolha ao longo do tempo para o exercício 1.

3.2 Exercício 2

Para a segunda equação, foi utilizado um passo também igual a 0.01 no Runge-Kutta de quarta ordem e o valor do tempo de colapso (aproximadamente **4.14**) foi encontrado por tentativa e erro.

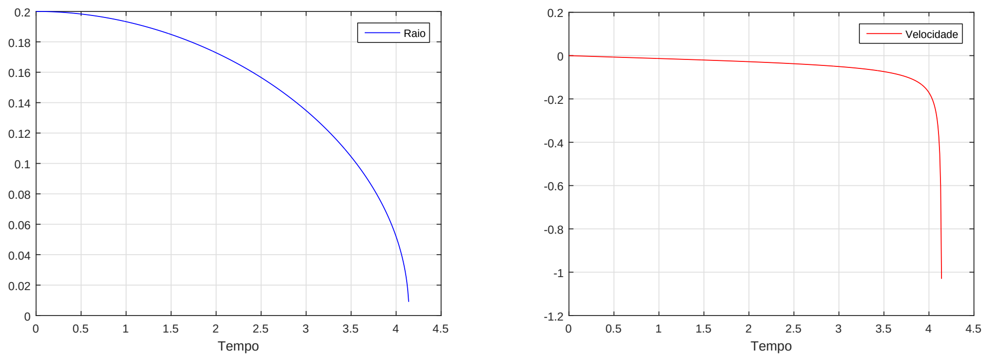

Figura 2: Raio e velocidade da bolha ao longo do tempo para o exercício 2.

3.3 Código em MATLAB

```matlab
clear
clc
format long

addpath('../../tools');

%% Parâmetros iniciais da equação da bolha
Pl = 0.17078553413498362;      % Pressão no líquido
Pv = 0.1595106949435665;       % Pressão no vapor
el = 4.275051939160018;        % Energia do líquido
ev = 1.7699955011416335;       % Energia do vapor

h = 0.01;                 % Passo para o método de Runge-Kutta
x0 = [0.2 1e-7];          % Valores das condições iniciais
tmin = 0;                 % Início do intervalo
tmax = 4.14;              % Final do intervalo

%% Integrais em termos das funções hipergeométricas
I1 = @(x) (1/5) * hg2F1(1, 5/2, 7/2, x.^2);
I2 = @(x) (1/1) * hg2F1(1, 1/4, 5/4, x.^2);
I3 = @(x) (2/7) * hg2F1(1, 7/2, 9/2, x.^2);
I4 = @(x) (2/5) * hg2F1(1, 5/4, 9/4, x.^2);

%% Sistema de equações diferenciais a serem resolvidas
% Lembrando que R'(t) = U(t) = X(2)
f = @(t,X) [X(2) -(X(2).^2 * (I2(X(2))*(Pl+el)+4*I1(X(2))*ev) + Pl + Pv*(4*I1(X(2))*X(2)-1)) / (X(1)*(I4(X(2))*(Pl+el)*X(2)^2 + I2(X(2))*(Pl+el)+(Pv+ev)*(I1(X(2))+I3(X(2))*X(2)^2)))]; % [R;U]

%% Resolve o sistema acima pelo método numérico e faz estimativa do tc
x = rk4(f, h, x0, [tmin tmax]);

%% Plota resultados numérico e analítico
subplot(1,2,1);
plot(tmin:h:tmax, x(:, 1), 'b');
legend('Raio');
xlabel('Tempo');
grid on;
subplot(1,2,2);
plot(tmin:h:tmax, x(:, 2), 'r');
legend('Velocidade');
xlabel('Tempo');
grid on;
```

3.4 Código da função hipergeométrica 2F1

```matlab
function [ F ] = hg2F1( a, b, c, z, N )
%HG2F1 Função hipergeométrica 2F1
% o parâmetro N é opcional e é utilizado na integral de Chebyshev
if ~exist('N', 'var')
    N = 22;
end
F = gamma(c)/(gamma(b)*gamma(c-b)) * chebyshev(@(x) (x.^(b-1) .* (1-x).^(-b+c-1)) ./ ((1-z*x).^a), eps, 1-eps, N);
end
```