CAPM model

PADS - Financial Analytics

Paloma Vaissman Uribe

Jun, 2024

O modelo CAPM

O modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) foi introduzido por Jack Treynor (1961,1962), William F. Sharpe (1964), John Lintner (1965) and Jan Mossin (1966), seguindo um trabalho anterior de Harry Markowitz sobre diversificação e da Teoria Moderna de Portfolio.

CAPM é um modelo de precificação de ativos individuais em que o retorno esperado de um ativo varia mais ou menos em relação ao mercado. Foi a primeira tentativa de responder à pergunta:

"Quanto de retorno deve-se exigir a mais por não ter certeza do retorno futuro?"

Os investidores esperam ser recompensados pelo **risco** com um maior **retorno**, além de serem compensados também pelo **valor do dinheiro no tempo** (um investimento realizado com expectativas de retornos futuros em detrimento de ter o dinheiro agora).

Portanto, a equação do CAPM contém, além da *taxa livre de risco* (R_f), que visa a compensação do **valor do dinheiro no tempo**, o termo $\beta_i(E(R_m) - R_f)$, em que:

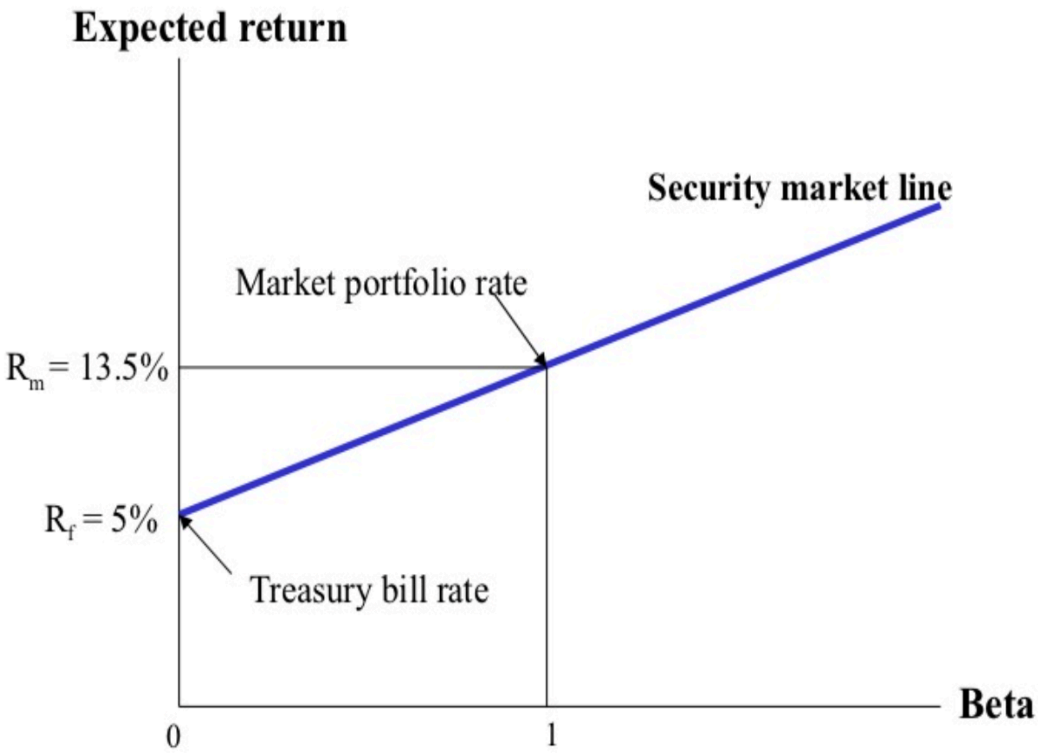
- β_i é o beta do ativo;
- $E(R_m)$ é o retorno esperado do mercado;

sendo $(E(R_m) - R_f)$ o **prêmio de risco do mercado.**

A equação do modelo é a seguinte:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f)$$

Graficamente, esta equação pode ser representada por



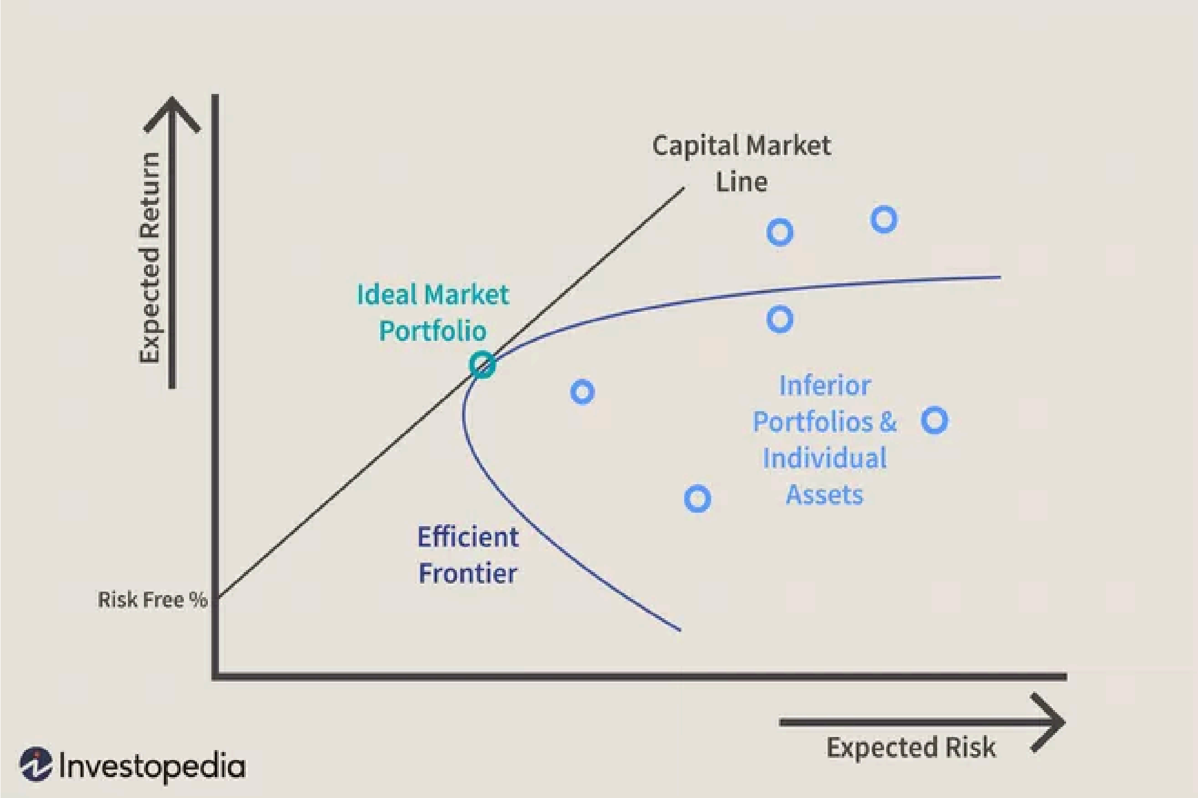
onde a linha SML (Security Market Line) é definida pela equação acima, onde o intercepto é a taxa livre de risco R_f e o coeficiente angular é dado pelo beta do ativo β_i, que significa a sensibilidade do ativo i ao **excesso de retorno** esperado $(E(R_m) - R_f)$, o que a equivale a

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}.$$

Em geral, o β_i é estimado através de uma regressão linear usando o método dos mínimos quadrados ordinários.

O CAPM implica que todos os títulos e carteiras serão plotados ao longo da linha SML. Alguns ativos tem beta acima de 1, indicando um maior risco, enquanto outros terão beta menor que 1.

Uma outra forma de interpretar o CAPM é em termos do conceito de **fronteira eficiente**. De acordo com a Teoria Moderna de Portfolio, se cada investidor usasse o CAPM para otimizar o retorno do portfolio relativamente ao risco, existiria uma curva, chamada de fronteira eficiente tal que o encontro desta com a linha téorica Capital Market Line (CML) se daria exatamente em um ponto do portfolio ideal ou ótimo. Note que enquanto a CML relaciona retorno e risco esperados, a SML relaciona o retorno esperado ao beta. Ambas são equivalentes, assumindo as mesmas hipóteses (mercado de capital perfeito, os investidores tem portfolios diversificados, horizonte de tempo do retorno é o mesmo para todos os ativos, os investidores tomam emprestado e emprestam à taxa livre de risco)



Na prática, não é possível construir um portfolio que esteja sobre a reta CML, assim como a curva de fronteira eficiente também é uma construção teórica, que assume as mesmas hipóteses do modelo CAPM. Se um portfolio estivesse sobre a curva de fronteira eficiente, este teria o maior retorno, dado o nível de risco.

Implementação prática do CAPM

Na prática, para estimar o beta usamos uma regressão linear usando os dados históricos, com a seguinte especificação:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i,$$

onde:

- r_i é o retorno do ativo i,
- r_M é o retorno do mercado (ex. IBOVESPA),
- r_f é o retorno do ativo livre de risco (ex. Título do Tesouro),
- ε_i é um erro idiossincrático em que se assume $E(\varepsilon_i) = 0$ e $Cov(r_M, \varepsilon_i) = 0$.

Pode-se demonstrar que a variância dos retornos do ativo é igual a $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + Var(\varepsilon_i)$. Ou seja, a variância pode ser quebrada em 2 componentes ortogonais: $\beta_i^2 \sigma_M^2$ e $Var(\varepsilon_i)$. Enquanto o primeiro chama-se de **risco sistemático**, o segundo é o **risco não sistemático ou idiossincrático** e que pode ser eliminado via diversificação.

```
library(tidyquant)
library(tidyverse)
library(timetk)
library(tibbletime)
library(yfR)

# getting data from API
symbols <- c("SPY","EFA", "IJS", "EEM","AGG")

asset_returns <-
  yf_get(symbols,
             first_date = "2013-01-01",
             last_date = "2017-12-31",
             type_return = "log") %>%
  select(ref_date,ticker,ret_closing_prices) %>%
  na.omit()

# portfolio weights and returns
w <- c(0.25, 0.25, 0.20, 0.20, 0.10)


portfolio_returns <-
  asset_returns %>%
  tq_portfolio(assets_col  = ticker,
               returns_col = ret_closing_prices,
               weights     = w,
               col_rename  = "returns")

# market returns
market_returns <-
  yf_get('SPY',
             first_date = "2013-01-01",
             last_date = "2017-12-31",
             type_return = "log") %>%
  select(ref_date,ret_closing_prices) %>%
  na.omit()


# covariance: portfolios' beta
cov(portfolio_returns$returns,market_returns$ret_closing_prices)/var(market_returns$r
        et_closing_prices)
```

```
## [1] 0.7893061
```

Agora podemos calcular os beta individuais. Pode-se demonstrar que o beta do portfolio é igual à

$$\beta_p = \sum_i w_i \beta_i.$$

```
betas <-
  asset_returns %>%
  group_by(ticker) %>%
do(model = lm(ret_closing_prices ~ market_returns$ret_closing_prices,
              data = .))

betas$ticker
```

```
## [1] "AGG" "EEM" "EFA" "IJS" "SPY"
```

```
symbols
```

```
## [1] "SPY" "EFA" "IJS" "EEM" "AGG"
```

```
beta_portfolio_byhand <- betas$model[[1]]$coefficients[2]*w[5]+
  betas$model[[2]]$coefficients[2]*w[4]+
  betas$model[[3]]$coefficients[2]*w[2]+
  betas$model[[4]]$coefficients[2]*w[3]+
  betas$model[[5]]$coefficients[2]*w[1]

beta_portfolio_byhand
```

```
## market_returns$ret_closing_prices
##                         0.9327145
```

Sharpe Ratio

O *Sharpe Ratio* é uma medida de risco ajustado ao retorno que serve para comparar portfolios em termos de risco e retorno. O cálculo é feito da seguinte forma:

$$SR_p = \frac{E[R_p - R_f]}{\sigma_p},$$

em que R_p é o retorno do portfolio, R_f é o retorno do ativo livre de risco (CDI, títulos do tesouro americano, etc.) e σ_p é o desvio padrão do excesso de retornos. Na prática, calcula-se o *Sharpe Ratio* realizado (ex-post), ou seja, utilizam-se os retornos e desvio-padrão realizados.

Importante ressaltar que se substituirmos R_p pelo R_m (retorno de mercado, por exemplo, um índice como IBOV e S&P 500), isso equivale à inclinação da curva CML.

Outro exemplo

```
weg <- yf_get('WEGE3.SA',
              first_date = "2022-01-01",
              last_date = "2023-12-31",
              type_return = "arit",
              bench_ticker = "^BVSP") %>%
  select(ref_date,ticker,ret_closing_prices) %>%
  na.omit()

ibov <- yf_get('^BVSP',
              first_date = "2022-01-01",
              last_date = "2023-12-31",
              type_return = "arit") %>%
  select(ref_date,ticker,ret_closing_prices) %>%
  na.omit()

beta_weg <- cov(weg$ret_closing_prices,ibov$ret_closing_prices)/var(ibov$ret_closing_
        prices)
beta_weg # beta under 1
```

```
## [1] 0.7766617
```

```
anual_return_weg = mean(weg$ret_closing_prices)*252
anual_return_ibov = mean(ibov$ret_closing_prices)*252
anual_return_weg #annualized return for WEG
```

```
## [1] 0.1224272
```

```
anual_return_ibov #annualized return for IBOV
```

```
## [1] 0.1481639
```

Supondo que a taxa livre de risco seja a SELIC, que estava em 11.75% a.a. em janeiro de 2024. Usando a fórmula anualizada do retorno da WEG, temos que esse estava em 12.24% (considerando o período desde de 2022), sendo o retorno do IBOVESPA 14.8% no mesmo período. O retorno esperado da WEG seria então de 11.75% + (14.8%-11.75%)*0.7766 = 14.13%. Ou seja, vemos que o retorno da WEG estava abaixo do esperado, segundo o CAPM.

Outros modelos de avaliação de empresas

O CAPM é um modelo que explica a diferença no risco e rentabilidade entre as várias empresas através de um único factor: a correlação com o mercado.

Porém, existem outras metodologias, como por exemplo, a APT (Arbitrage Pricing Theory) - esta teoria defende que a rentabilidade é explicada por vários fatores, tais como fatores macroeconômicos como a volatilidade dos preços do petróleo, taxas de juro, taxas de câmbio, etc.

Por último, tem também o modelo Fama-French (Three Factor Model) - este modelo é um caso particular do anterior, dado que utiliza três fatores: um fator de mercado, um fator relacionado com o tamanho da empresa e outro de valores de mercado.

Referências online

- https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp (https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp)
- https://www.investopedia.com/articles/07/sharpe_ratio.asp (https://www.investopedia.com/articles/07/sharpe_ratio.asp)
- https://medium.datadriveninvestor.com/the-capital-asset-pricing-model-capm-by-william-sharpe-9c5c0452c238 (https://medium.datadriveninvestor.com/the-capital-asset-pricing-model-capm-by-william-sharpe-9c5c0452c238)

Papers

- Treynor, Jack L. (1961). Market Value, Time, and Risk. Unpublished manuscript.
- Treynor, Jack L. (1962). Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. Unpublished manuscript. A final version was published in 1999, in Asset Pricing and Portfolio Performance: Models, Strategy and Performance Metrics. Robert A. Korajczyk (editor) London: Risk Books, pp. 15–22.
- Sharpe, William F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, Journal of Finance, 19 (3), 425-442
- Lintner, John (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, Review of Economics and Statistics, 47 (1), 13-37.
- Mossin, Jan. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica, Vol. 34, No. 4, pp. 768–783.
- Markowitz, Harry M. (1999). The early history of portfolio theory: 1600-1960, Financial Analysts Journal, Vol. 55, No. 4
- Fama, Eugene F. and Kenneth French (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. Journal of Finance, June 1992, 427-466.