UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: Otimização Combinatória
Professor: Marcos Roboredo

2015 – 1
Lista de exercícios nº 2 (GABARITO)

1) 1ª forma: multiplicando ambos os lados da desigualdade por -1 e então convertendo a desigualdade resultante em igualdade

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5 \Longrightarrow -10x_1 + 3x_2 \leq 5 \Rightarrow -10x_1 + 3x_2 + s_1 = 5$$

2ª forma: convertendo a desigualdade em igualdade e então multiplicando ambos os lados da desigualdade por -1

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5 \Longrightarrow 10x_1 - 3x_2 - s_1 = -5 \Rightarrow -10x_1 + 3x_2 + s_1 = 5$$

Claramente percebemos que as duas formas são equivalentes.

2) Para “tratarmos” o máx da f.o podemos criar uma variável y e fazer da seguinte forma:

$$\begin{gathered} Minimizar\ z = y \\ s.a.\ y \geq |x_1 - x_2 + 3x_3| \\ y \geq |-x_1 + 3x_2 - x_3| \\ y, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

Agora para “tratarmos” os módulos, devemos lembrar que dados a, b tais que $b \geq 0$, tem-se

$$|a| \leq b \Leftrightarrow a \leq b\ e\ a \geq -b$$

Logo, aplicando isto ao problema, temos

$$\begin{gathered} Minimizar\ z = y \\ s.a.\ y \leq x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y \geq -x_1 + x_2 - 3x_3 \\ y \leq -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y \geq x_1 - 3x_2 + x_3 \\ y, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

3) a) $Maximizar\ z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} s.a.\quad & x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) <u>1ª solução básica:</u> (x_1, x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right) \Rightarrow z = \frac{48}{7}$$

Classificação: Viável

<u>2ª solução básica:</u> (x_1, s_1)

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 6 \\ 3x_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_1, s_1) = (2{,}4) \Rightarrow z = 4$$

Classificação: Viável

<u>3ª solução básica:</u> (x_1, s_2)

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ 3x_1 + s_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_1, s_2) = (6, -12)$$

Classificação: Inviável pois $s_2 \leq 0$

<u>4ª solução básica:</u> (x_2, s_1)

$$\begin{cases} 3x_2 + s_1 = 6 \\ 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_2, s_1) = (3, -3)$$

Classificação: Inviável pois $s_1 \leq 0$

<u>5ª solução básica:</u> (x_2, s_2)

$$\begin{cases} 3x_2 = 6 \\ 2x_2 + s_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_2, s_2) = (2{,}2) \Rightarrow z = 6$$

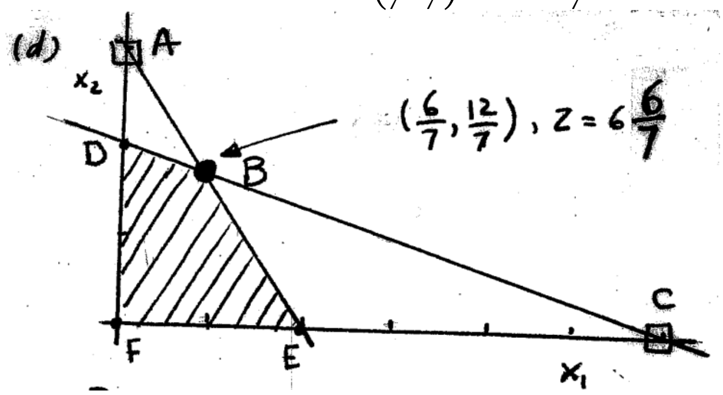
Classificação: viável

<u>6ª solução básica:</u> (s_1, s_2)

$$\begin{cases} s_1 = 6 \\ s_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (s_1, s_2) = (6{,}6) \Rightarrow z = 0$$

Classificação: viável

c) Solução ótima: $(x_1, x_2) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right) \Rightarrow z = \frac{48}{7}$



e) As soluções inviáveis são os pontos A e C do gráfico.

4) Solução:

OBS: Infeasible = Inviável

maximize $z = x_1 + x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 6 \\
2x_1 + x_2 \quad - x_4 &= 16 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Combination	Solution	Status
x_1, x_2	$26/3, -4/3$	Infeasible
x_1, x_3	$8, -2$	Infeasible
x_1, x_4	$6, -4$	Infeasible
x_2, x_3	$16, -26$	Infeasible
x_2, x_4	$3, -13$	Infeasible
x_3, x_4	$6, -16$	Infeasible

5) Forma canônica:

$$
\begin{gathered}
Maximizar\ z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
-6x_1 + 7x_2^- - 7x_2^+ - 9x_3 - s_1 = 4 \\
x_1 + x_2^- - x_2^+ + 4x_3 - s_2 = 16 \\
x_1, x_2^-, x_2^+, x_3, s_1, s_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

Vamos tentar considerar a solução básica (x_2^-, x_2^+), ou seja, as demais variáveis são nulas:

$$
\begin{cases} 7x_2^- - 7x_2^+ = 4 \\ x_2^- - x_2^+ = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^- - x_2^+ = \frac{4}{7} \\ x_2^- - x_2^+ = 16 \end{cases}
$$

O sistema é indeterminado. Logo, uma solução básica não pode incluir ambas, $x_2^-\ e\ x_2^+$ simultaneamente.

6) Solução:

5

maximize $z = x_1 + 3x_2$

subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

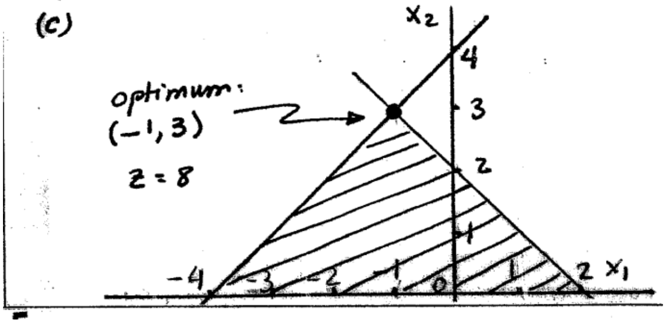
x_1 unrestricted

$x_2, x_3 \geq 0$

Combination	Solution	Status	z
x_1, x_2	$-1, 3$	Feasible	$\boxed{8}$
x_1, x_3	$-4, 6$	Feasible	-4
x_1, x_4	$2, 6$	Feasible	2
x_2, x_3	$4, -2$	Infeasible	—
x_2, x_4	$2, 2$	Feasible	6
x_3, x_4	$2, 4$	Feasible	0

Optimum: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $z = 8$

(c)



7) Só serão colocadas as soluções ótimas de cada item

a) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (0,6,0,7,0,0,29) \Rightarrow z = 41$
b) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (10,15,0,0,0,3,0) \Rightarrow z = 170$
c) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (0,6,14,0,0,0,8) \Rightarrow z = 36$
d) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (0,6,0,7,0,0,29) \Rightarrow z = -80$

8) a) Variáveis básicas: $x_8 = 12, x_3 = 6, x_1 = 0$. As demais variáveis são não básicas e possuem valor nulo.
b) Variáveis não básicas que melhoram a f.o: x_2, x_5, x_6

Se entra x_2 então sai x_8 pois está associado ao $min\left\{\frac{12}{3}, \frac{6}{1}, -\right\} = 4$

Se entra x_5 então sai x_1 pois está associado ao $min\left\{-, \frac{6}{1}, \frac{0}{6}\right\} = 0$

Se entra x_6 então nenhuma variável sai pois todas as razões são negativas ou infinito

c) Variáveis não básicas que melhoram a f.o: x_4

Se entra x_4 então sai x_3 pois está associado ao $min\left\{-, \frac{6}{3}, -\right\} = 2$

d) Como mostrado no item b, x_5 não pode melhorar a f.o. pois o mínimo do critério de saída da base foi nulo. Outra variável não básica que também não produz alteração é x_7 pois possui coeficiente nulo na linha z.

9) a) e b) Não serão feitas as tabelas do algoritmo simplex mas a sol ótima é $x_1 = \frac{93}{71}$ e $x_2 = \frac{164}{71}$

c) Item a precisou de 4 iterações enquanto b precisou de 3.

d) Não necessariamente o critério do coeficiente mais negativo na escolha da variável que entra na base é o que acarreta em menos iterações.