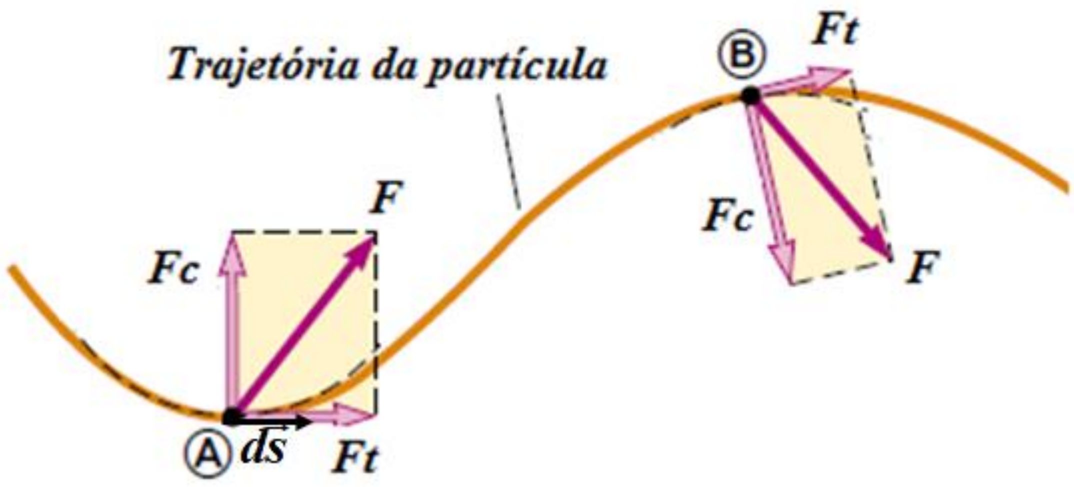
Energia potencial



O *trabalho* da força F é definido por

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{u}_t ds = \int_A^B F_t ds$$

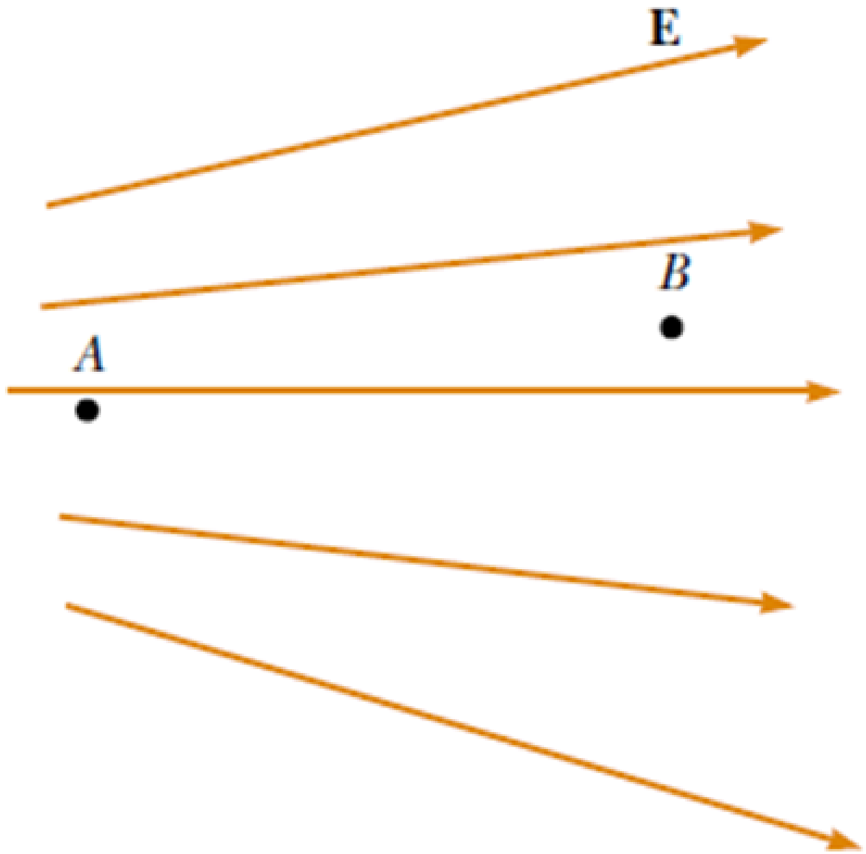
O trabalho da força elétrica não depende da trajetória (*força* conservativa) $\to$ *energia potencial U*:

$$W_{A \to B} = \int_A^B \left(k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \right) \cdot \left(\hat{r} dr \right) = -k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_B} - \frac{q_1 q_2}{r_A} \right) \equiv -\left(U_B - U_A \right) = -\Delta U.$$

Se $F_t = 0$ e $|F_c| = c^{te}$ $\to$ *movimento circular uniforme*:

$$F_c = {mv^2}/{R} = m\omega^2 R \,; T = {2\pi}/{\omega} ; f = {1}/{T}.$$

Energia potencial elétrica: $U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -\int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$.



Diferença de potencial: $V_B - V_A \equiv \dfrac{U_B - U_A}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$.

Unidade de ddp no SI ⟶ volt (V).

Potencial elétrico **em um ponto:** $V_B = -\int_\infty^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$.

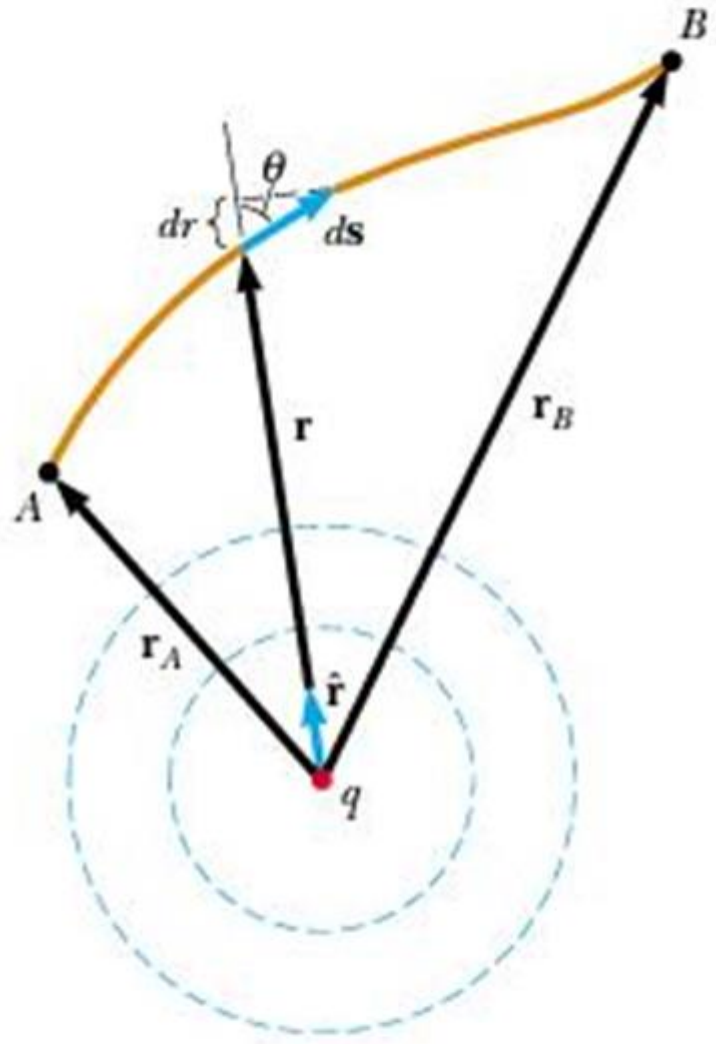
Convenção: $V_\infty \equiv 0$.

Cálculo do campo elétrico a partir do potencial elétrico:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \;\Rightarrow\; dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s};$$

$$dV = \left(\nabla V\right) \cdot d\vec{s} \;\Rightarrow\; \vec{E} = -\nabla V.$$

Diferença de potencial devida a uma carga pontual



$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}\,; \qquad \mathbf{E} = k_e q\hat{\mathbf{r}}/r^2;$$

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = k_e \frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{s}\,; \qquad \hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{s} = ds\cos\theta = dr\,;$$

$$V_B - V_A = -k_e q\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{k_e q}{r}\bigg]_{r_A}^{r_B} = k_e q\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

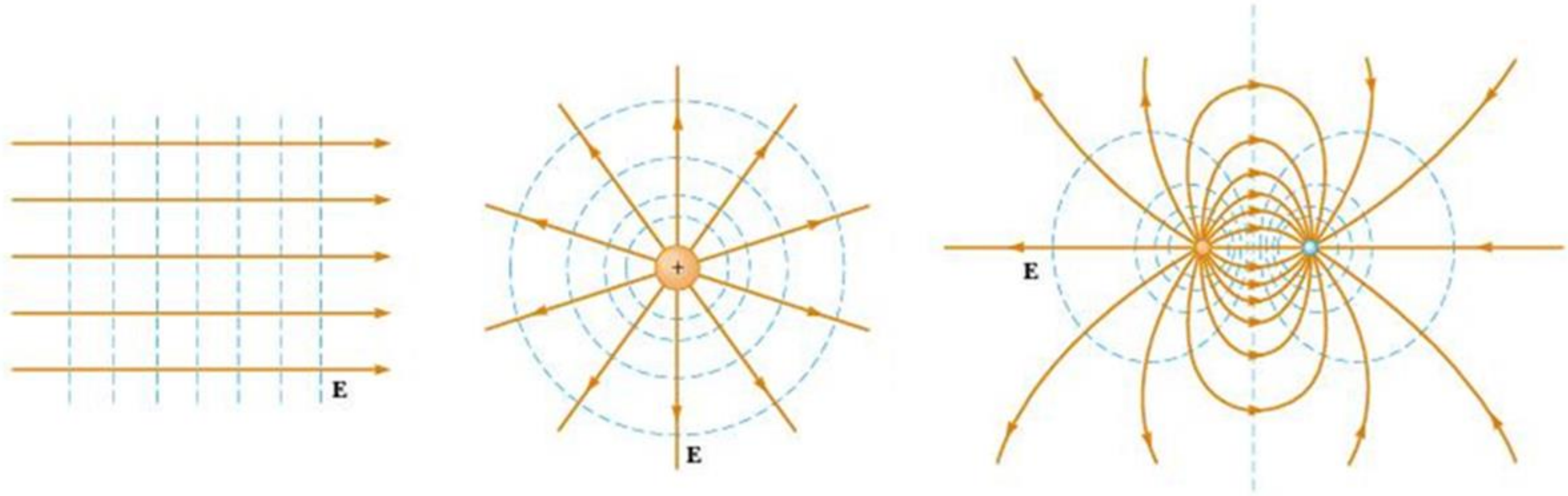
Potencial elétrico no ponto r_B :

$$r_A \to \infty \;\Rightarrow\; V_B - 0 = k_e q\left(\frac{1}{r_B} - 0\right) \;\Rightarrow\; V_B = k_e\,\frac{q}{r_B}\,.$$

Superfícies equipotenciais

São superfícies caracterizadas por $V(\vec{r}) = c^{te}$, portanto, $dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \perp d\vec{s}$:

O campo elétrico é normal a uma superfície equipotencial em cada ponto.



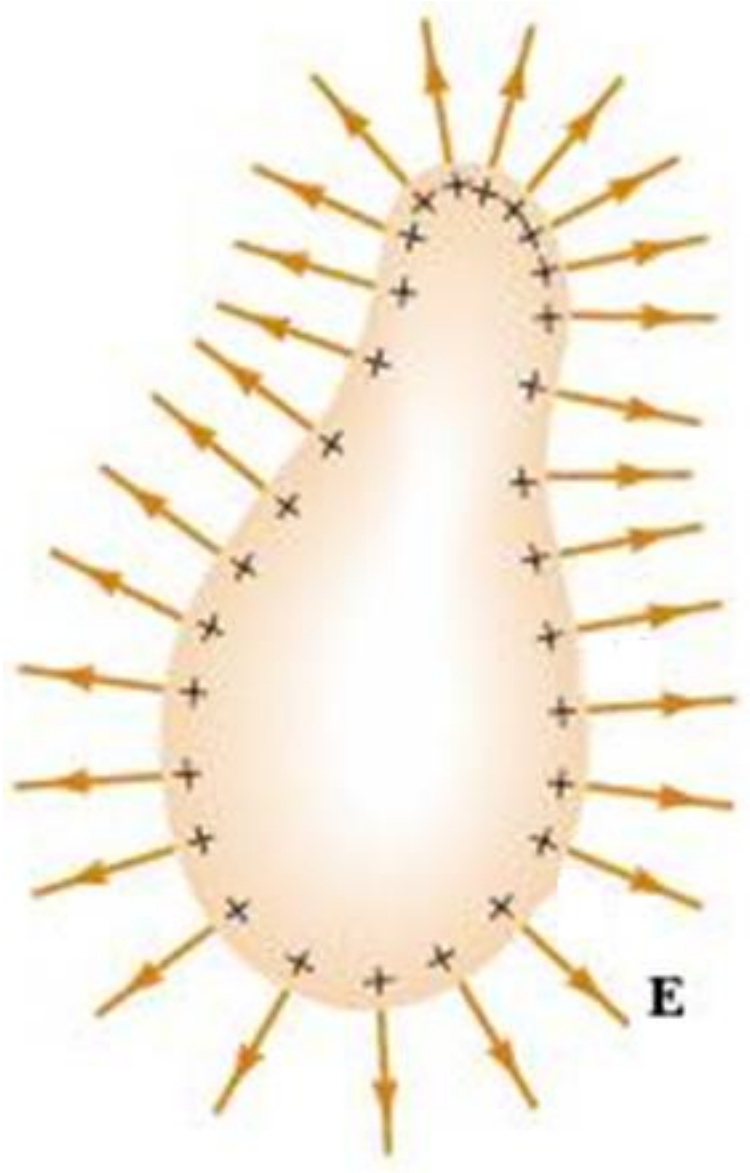
Condutor carregado em equilíbrio eletrostático

As cargas elétricas permanecem na superfície do condutor devido à repulsão elétrica

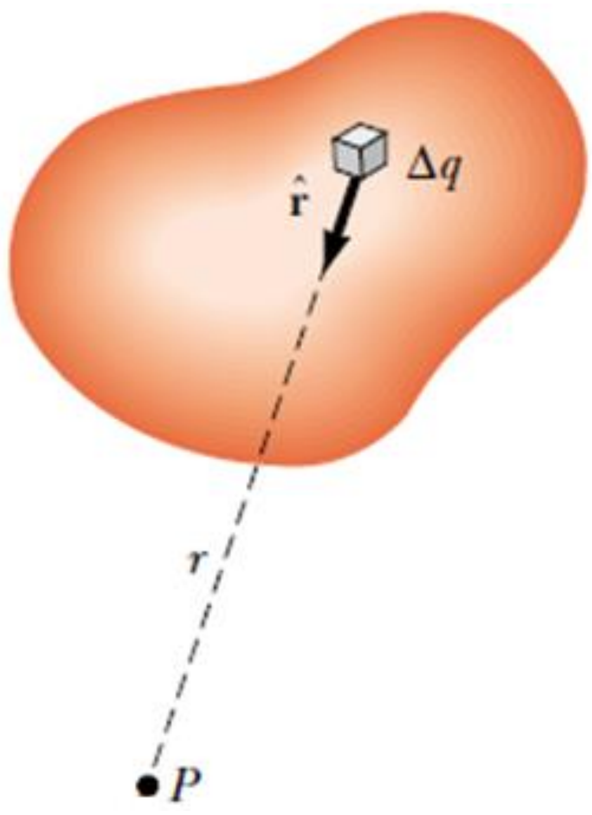
$\Longrightarrow$ a componente tangente à superfície da força resultante sobre cada partícula é nula

$\Longrightarrow$ a força elétrica resultante é normal à superfície do condutor $\Longrightarrow \vec{E} \perp d\vec{s}$.

Conclusão: ***a superfície de um condutor carregado em equilíbrio eletrostático é uma superfície equipotencial.***



Potencial elétrico devido a uma distribuição contínua de carga



$$\Delta V = k_e \frac{\Delta q}{r} \;\rightarrow\; dV_P = k_e \frac{dq}{r} \;\rightarrow\; V_P = k_e \int \frac{dq}{r}.$$

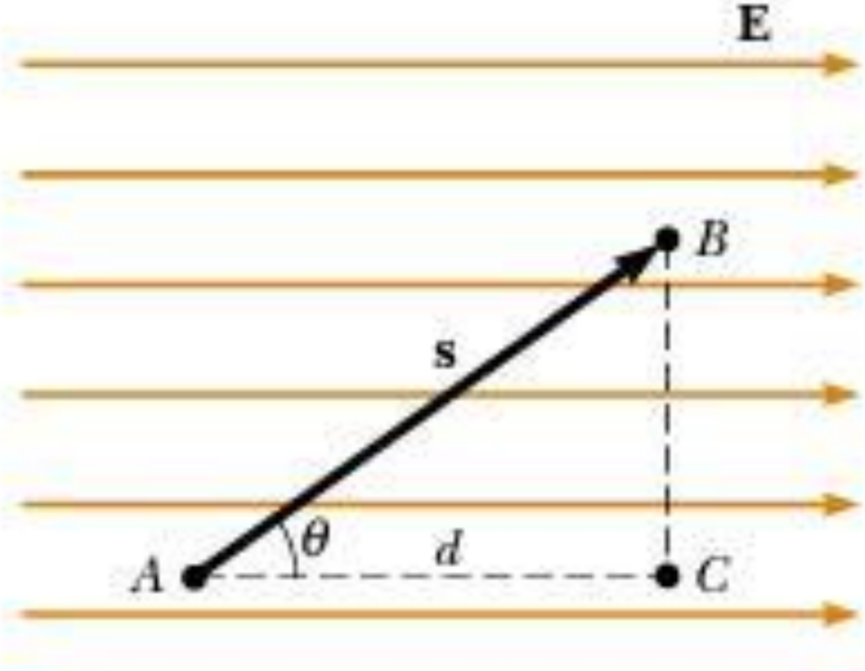
$$\vec{E}_P = -\nabla V_P.$$

linha $\rightarrow$ $dq = \lambda d\ell$;

superfície $\rightarrow$ $dq = \sigma dA$;

volume $\rightarrow$ $dq = \rho dvol$.

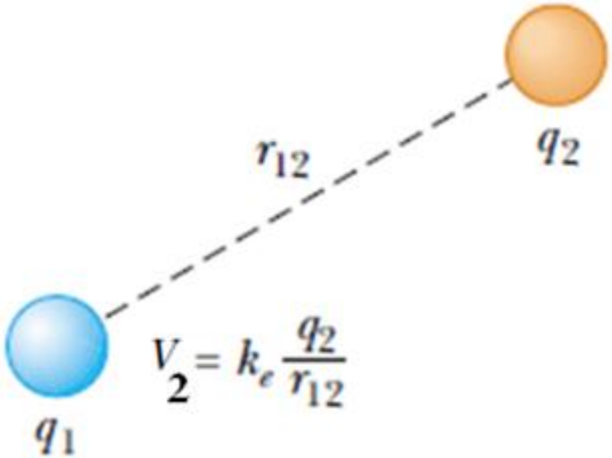
Exemplo 13. ddp devida a um campo elétrico uniforme.



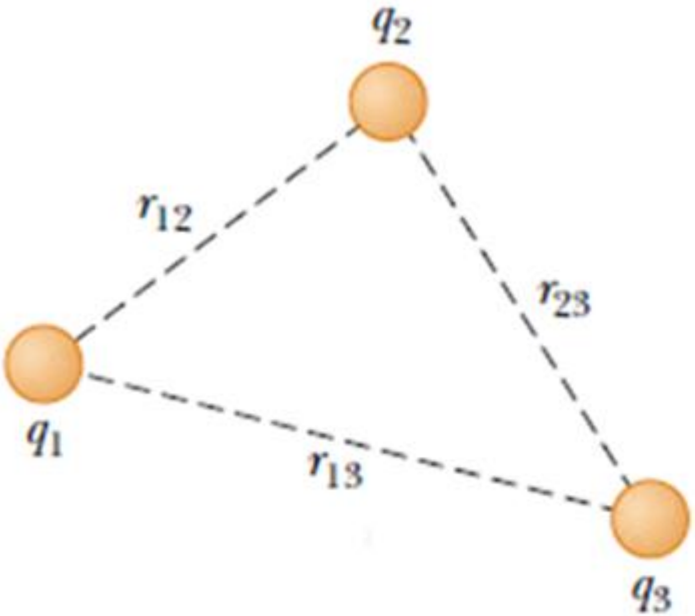
$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{s} = Es\cos\theta = -Ed\,.$$

$$V_C - V_A = -Ed \;\Rightarrow\; V_B = V_C.$$

Exemplo 14. Energia potencial elétrica de sistemas de cargas pontuais.

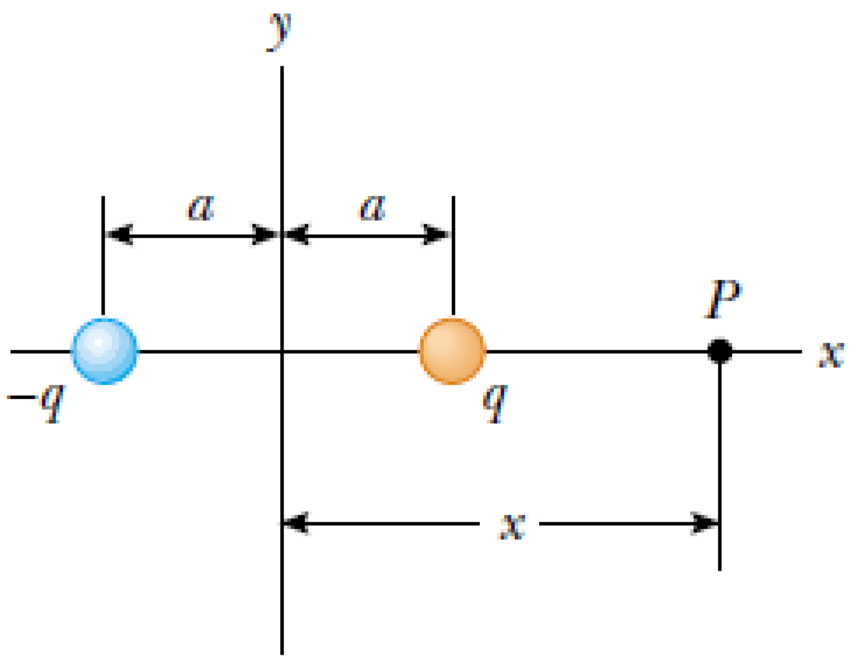


$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Exemplo 15. Potencial elétrico em um ponto localizado sobre o eixo de um dipolo.



$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \boxed{\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}}$$

$$x \gg a \quad \longrightarrow \quad \boxed{V \approx \frac{2k_e qa}{x^2}}$$

$$\Downarrow$$

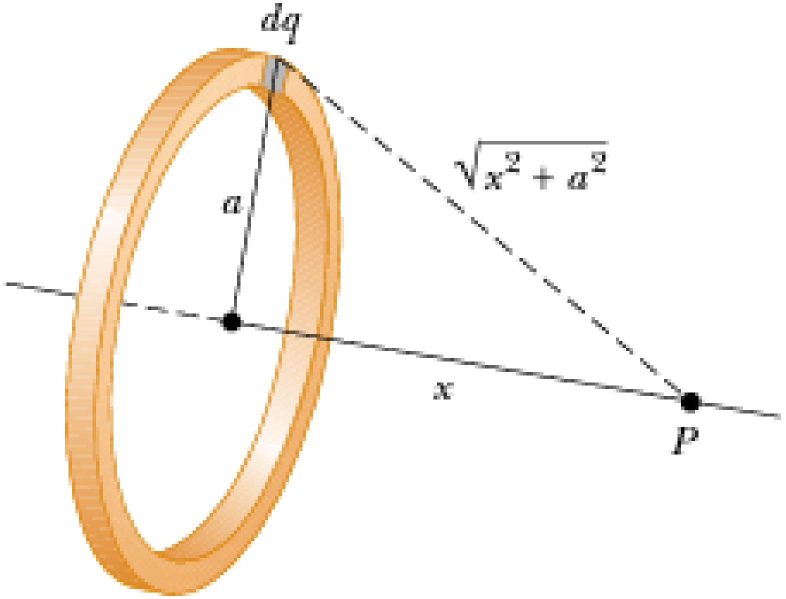
$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \boxed{\frac{4k_e qa}{x^3}}$$

Exemplo 16. O potencial elétrico em uma região do espaço é dado pela função $V(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Determine onde o campo elétrico é nulo.

$$\vec{E} = -\nabla V = 2(y-x)\vec{a}_x + 2(x-y)\vec{a}_y;\ \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow y = x.$$

O campo elétrico é nulo em qualquer posição sobre a reta $y = x$.

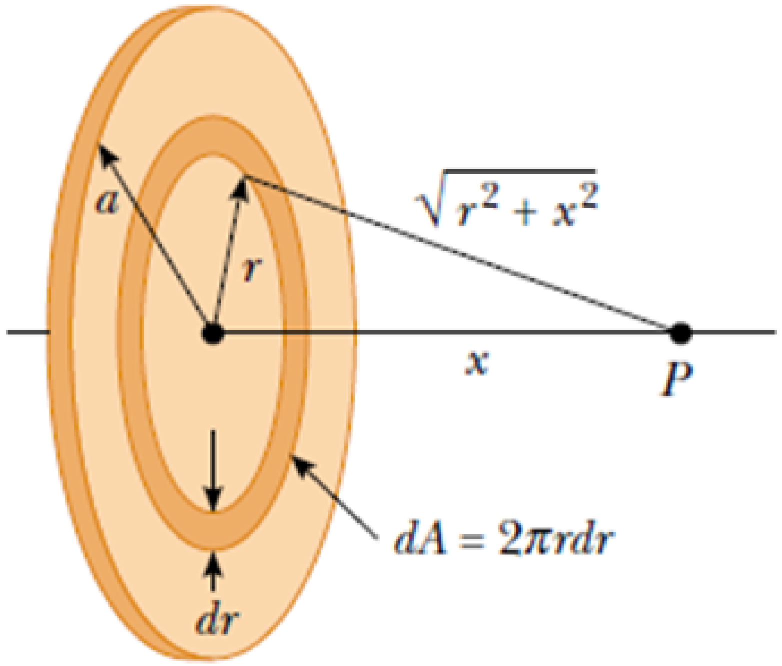
Exemplo 17. Potencial elétrico no eixo de simetria de um anel de carga uniforme Q, à distância x do centro do anel.



$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq = \boxed{\frac{k_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}}}$$

Exemplo 18. Potencial elétrico no eixo de simetria de um disco com uma densidade superficial uniforme de carga σ à distância x do centro do disco.



$$dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi r\, dr$$

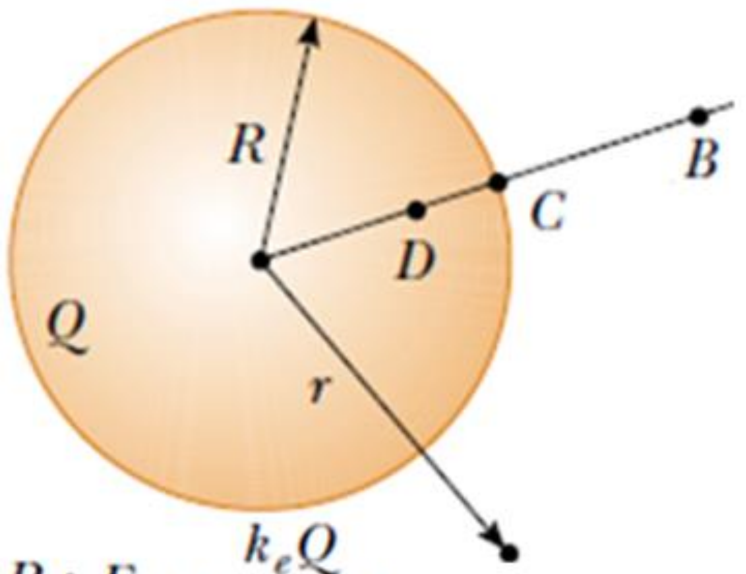
$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e \sigma 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$V = \pi k_e \sigma \int_0^a \frac{2r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k_e \sigma \int_0^a (r^2 + x^2)^{-1/2}\, 2r\, dr = \int u^n\, du$$

$$V = \boxed{2\pi k_e \sigma \left[(x^2 + a^2)^{1/2} - x\right]}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \boxed{2\pi k_e \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)}$$

Exemplo 19. Potencial elétrico de uma esfera de raio R carregada uniformemente.



$$r < R : E_r = \frac{k_e Q}{R^3}\, r \qquad r > R : E_r = k_e \frac{Q}{r^2}$$

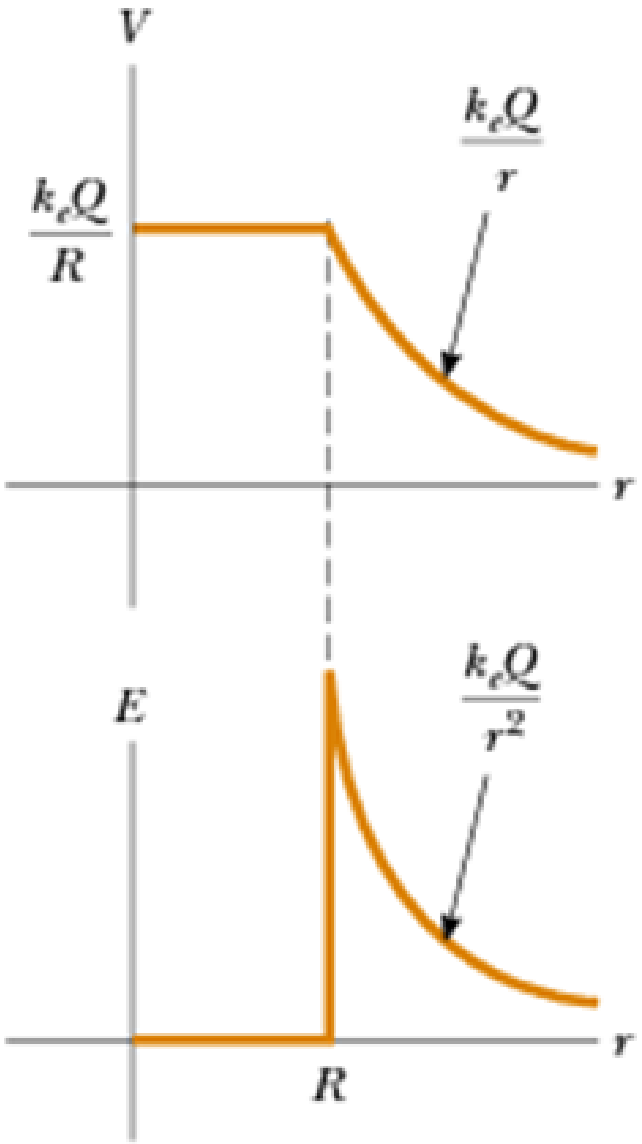
$$B:\ V = -\int_{\infty}^{B} E_r\, dr = k_e \frac{Q}{r}$$

$$C:\ r = R \longrightarrow V = k_e \frac{Q}{R}$$

$$D:\ V = -\int_{\infty}^{C} E_r\, dr - \int_{C}^{D} E_r\, dr = k_e \frac{Q}{R} - \frac{k_e Q}{R^3} \int_{R}^{D} r\, dr$$

$$V = k_e \frac{Q}{R} + \frac{k_e Q}{2R^3}\left(R^2 - r_D^2\right) = \boxed{\frac{k_e Q}{2R}\left(3 - \frac{r_D^2}{R^2}\right)}$$

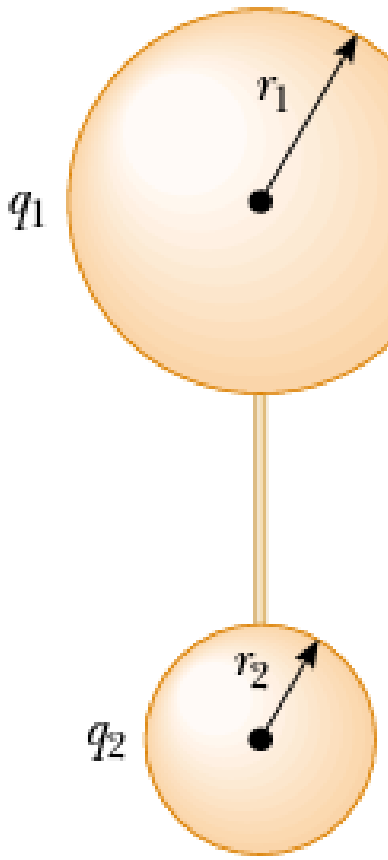
Exemplo 20. Potencial elétrico de uma esfera condutora de raio R carregada.



$$r < R \Longrightarrow E = 0 \Longrightarrow V(r) = c^{te} = V_{\text{sup}} = k_e \frac{Q}{R}.$$

$$r \geq R \Longrightarrow E = k_e \frac{Q}{r^2}; V_{\text{sup}} = k_e \frac{Q}{r}.$$

Exemplo 21. Relação entre as cargas e os módulos dos campos elétricos na superfície de dois condutores esféricos de raios diferentes, ligados por um fio condutor.



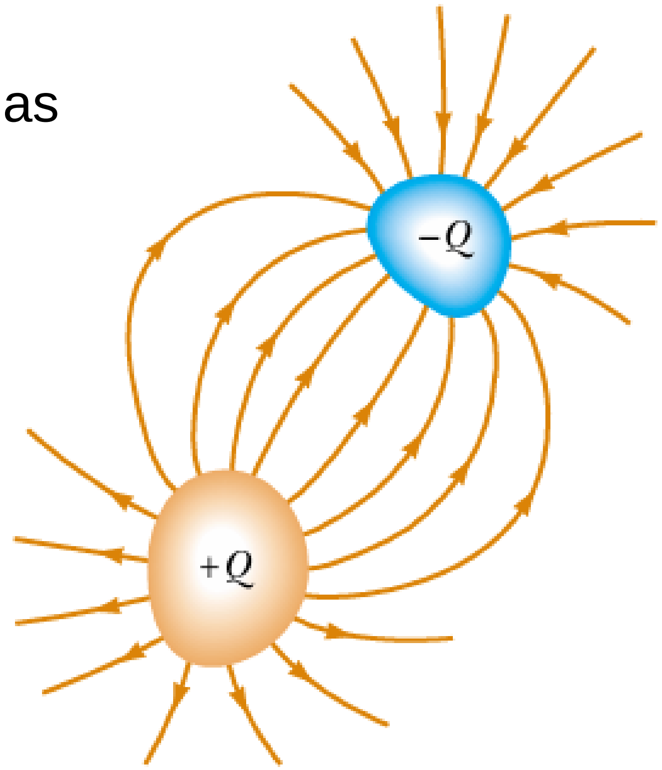
$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2} \longrightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2}$$

$$E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^2} \longrightarrow \boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}}$$

Capacitância

Capacitor: sistema formado por dois condutores com cargas simétricas.



Se ΔV é a ddp entre os condutores, define-se

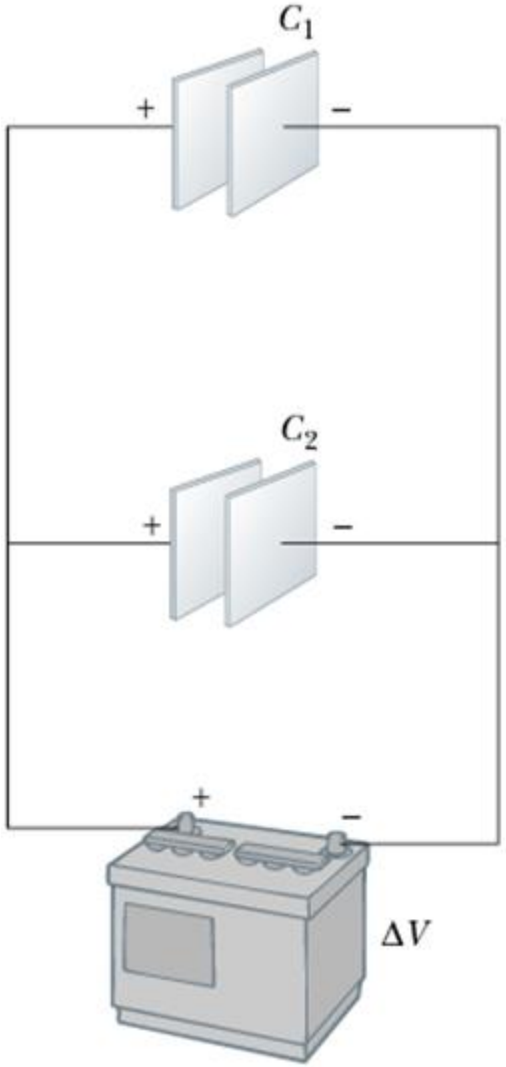
$$C = \frac{Q}{\Delta V},$$

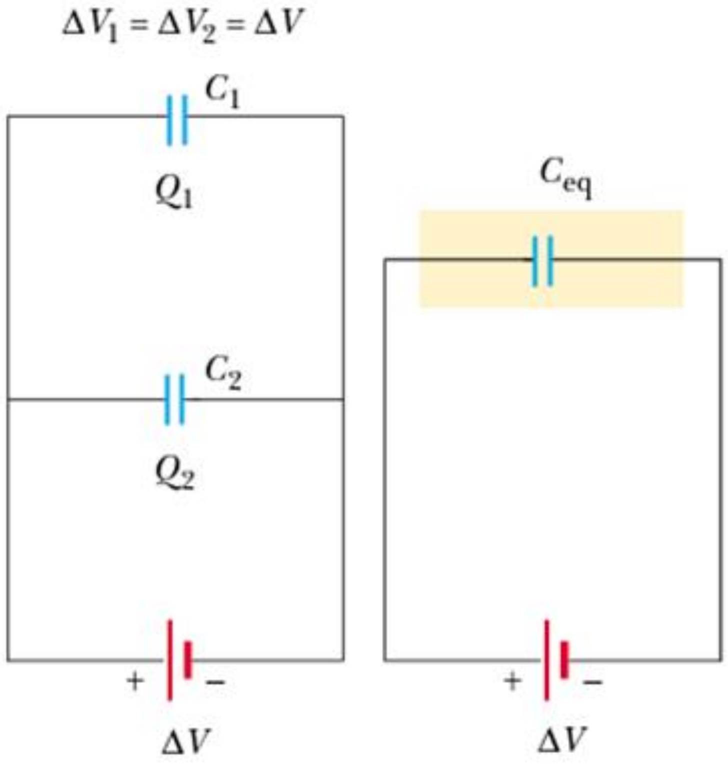
Unidade no SI ⟶ farad (F).

Alguns tipos de capacitores:

Associação de capacitores em paralelo e em série

Em paralelo

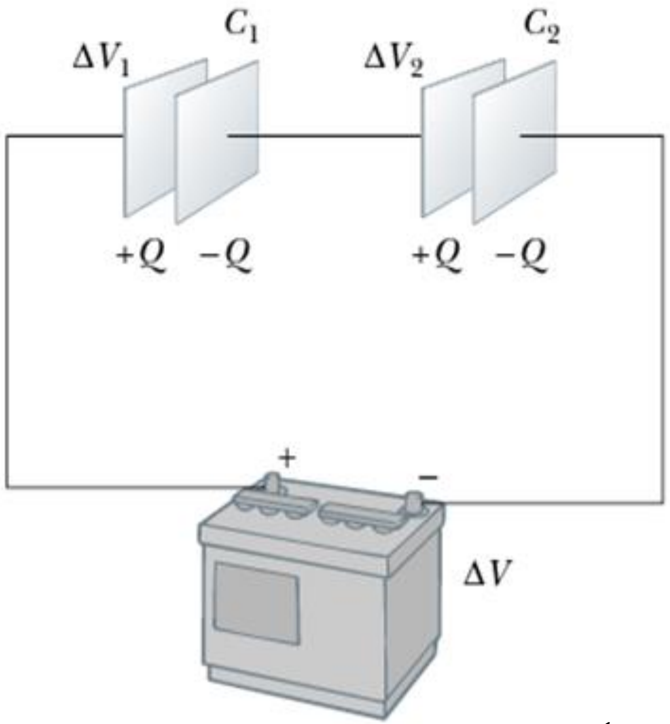


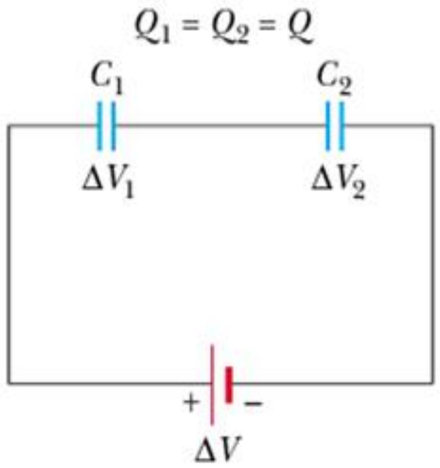


$$Q_1 = C_1 \Delta V; \quad Q_2 = C_2 \Delta V;$$

$$Q_{total} = \left(C_1 + C_2\right)\Delta V \;\Rightarrow\; C_{eq} = C_1 + C_2 \,.$$

Em série





$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2};$$

$$\Delta V_{total} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right). \;\Rightarrow\; C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}.$$

Energia potencial elétrica armazenada em um capacitor com carga Q e ddp ΔV.

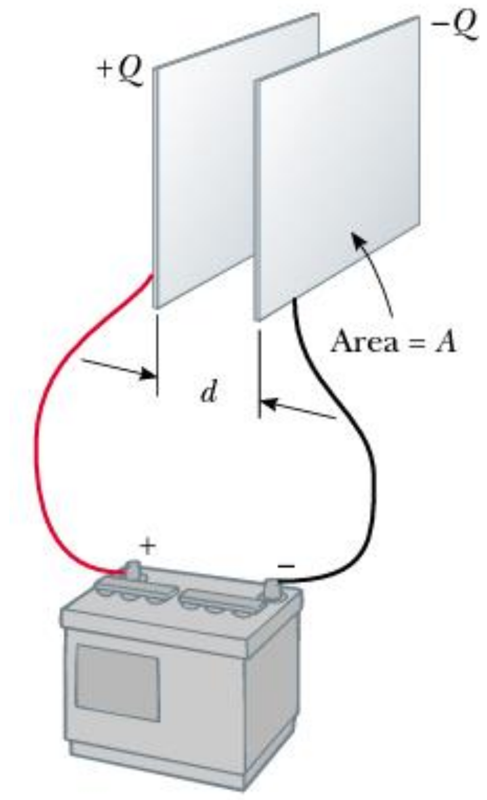
$$dU = \Delta V \, dq = \frac{q}{C} \, dq \quad \longrightarrow \quad U = \int_0^Q \frac{q}{C} \, dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \, dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2} Q \, \Delta V = \tfrac{1}{2} C (\Delta V)^2}$$

Exemplo 22. Capacitância de um condutor esférico.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k_e Q/R} = \frac{R}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Exemplo 23. Capacitância de um capacitor de placas planas e paralelas.

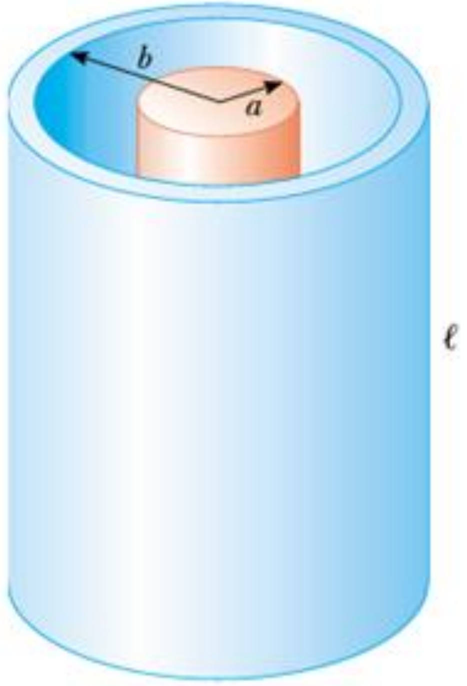


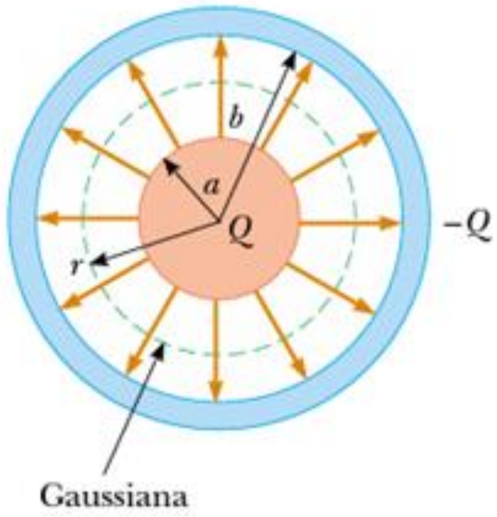
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \longrightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

Exemplo 24. Capacitância de um capacitor cilíndrico.





Exemplo 9. $E = \dfrac{2k_e\lambda}{r}$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}; \quad Q = \lambda\ell; \quad \Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\Delta V = -2k_e\lambda\int_b^a \frac{dr}{r} = 2k_e\lambda\, ln\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\ell}{2k_e\, ln\dfrac{b}{a}}$$

Exemplo 25. Energia potencial elétrica armazenada em um capacitor de placas planas e paralelas.

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 A d E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 (vol) E^2.$$

Densidade de energia (energia por unidade de volume):

$$\boxed{u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}\ (\textbf{resultado geral}).$$