

# Teoria dos Grafos

## Aula 7

### **Aula passada**

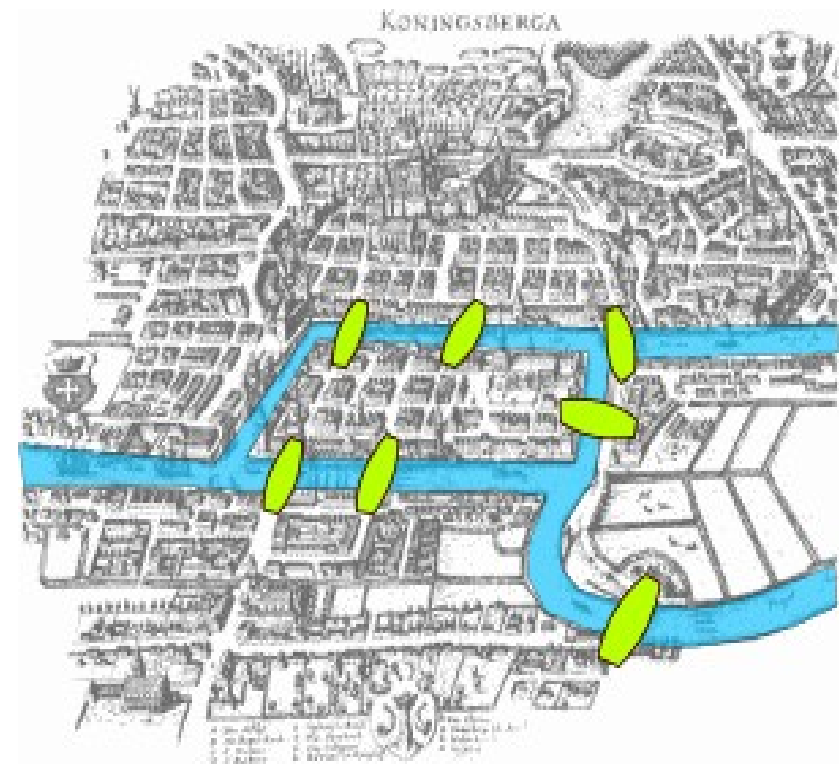
- MST

### **Aula de hoje**

- Pontes de Königsberg
- Ciclo Euleriano
- Ciclo Hamiltoniano
- Quem foi Turing?
- Coloração
- Algoritmo Guloso
- Número Cromático

# As 7 Pontes de Königsberg

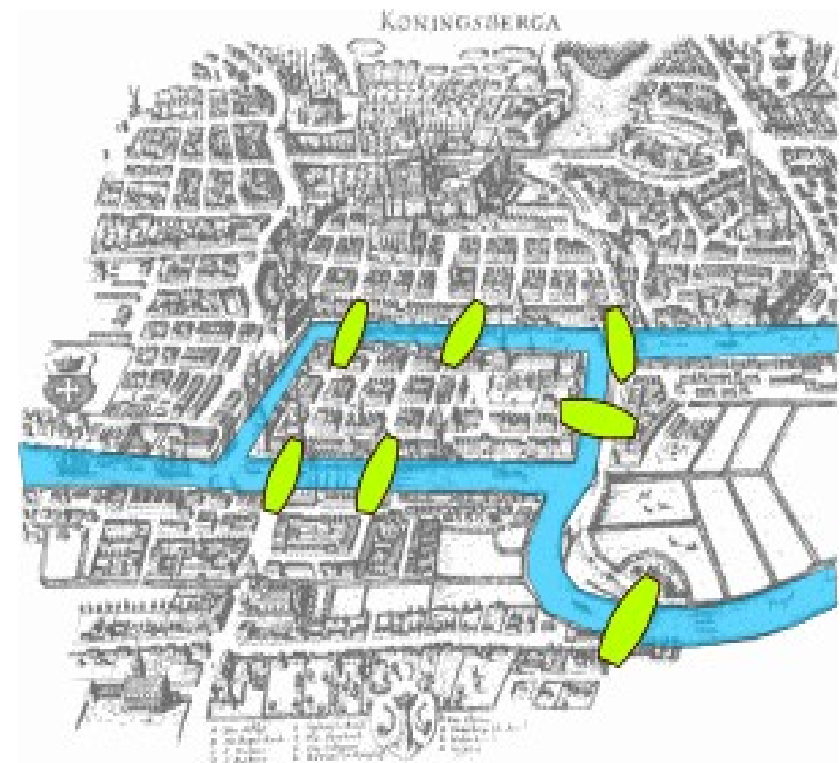
- Königsberg, cidade na Prússia (atual Rússia)
- 7 pontes na cidade
- Desafio popular na cidade
  - partir de um ponto, atravessar as 7 pontes uma única vez, retornando ao ponto de partida



**Existe tal trajeto?**

# As 7 Pontes de Königsberg

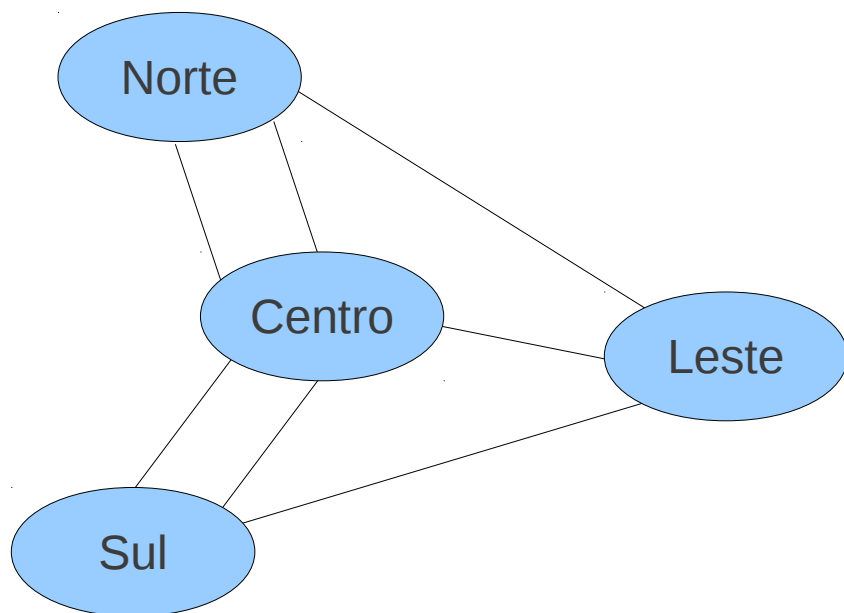
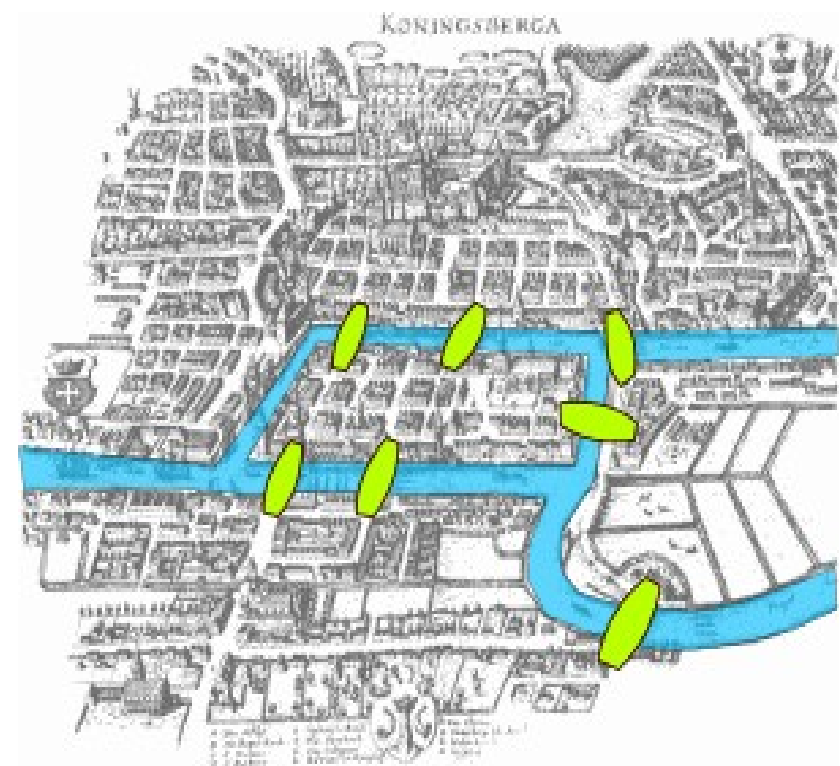
- Euler resolveu este problema em 1736!
- Estabeleceu ainda quando tal trajeto seria possível em qualquer cidade
- Abstração do problema via grafos



**Início da Teoria dos Grafos!**

# As 7 Pontes de Königsberg

- Abstração via grafos
- Objetos: áreas contíguas de terra
- Arestas: ponte entre áreas
  - podendo ter mais de uma

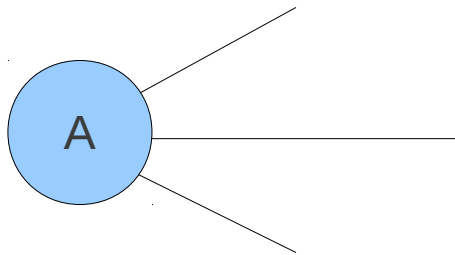


- Tal trajeto existe?
- Percorrer as 7 pontes e retornar ao ponto inicial?

**Não!**

# Ciclo Euleriano

- Ciclo que percorre todas as arestas exatamente uma vez e retorna ao vértice inicial
- Quando tal ciclo existe em um grafo?
- Se um vértice tem grau ímpar tal ciclo pode existir?



**Não!**

- Ciclo Euleriano precisa entrar e sair do vértice (uma ou mais vezes)
- Cada visita requer **duas** arestas

# Ciclo Euleriano

## ■ Teorema

Um grafo  $G$  conexo possui ciclo euleriano se e somente se todo vértice de  $G$  possuir grau par.

## **Prova** (duas partes)

### ■ Ciclo euleriano implica grau par

- já provamos (slide anterior)

### ■ Grau par implica ciclo euleriano

- mais complicado

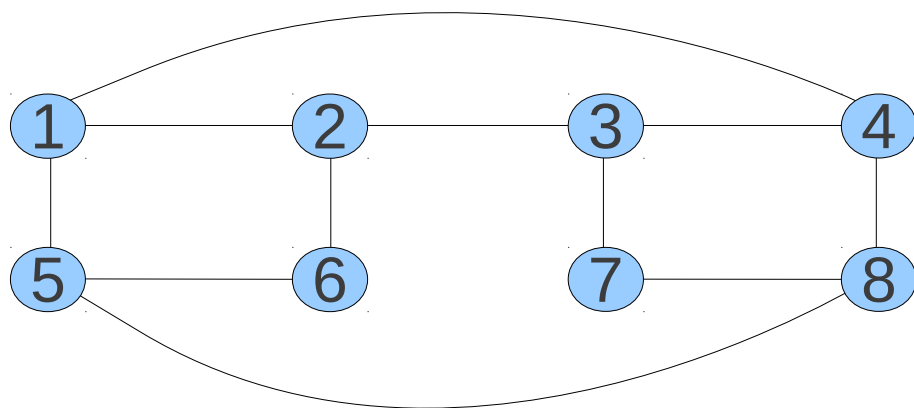
## ■ Grafo euleriano

- grafo que admite ciclo euleriano

- todos os vértices possuem grau par

# Ciclo Hamiltoniano

- Ciclo que percorre todos os **vértices** exatamente uma vez e retorna ao vértice inicial
- Possui ciclo hamiltoniano?



- Nome em referência a William Hamilton, que investigou este problema em dodecaedros em 1850
  - *Hamilton's puzzle*
- Hamilton prova que sólidos platônicos possuem ciclo hamiltoniano

# Ciclo Hamiltoniano



- Quando um grafo possui ciclo hamiltoniano?
- Algoritmo para determinar se ciclo existe?

- Não temos algoritmo eficiente para este problema
  - problema é NP-Completo (vale US\$ 1 milhão)
- Pesquisa: determinar classe de grafos que possuem ciclo hamiltonianos
  - ex. resultado de hamilton
- O que estes grafos tem em comum?



# Dualidade e Mistério

**Problema:** Determinar se um grafo possui ciclo euleriano

**Fácil**

**Problema:** Determinar se um grafo possui ciclo hamiltoniano

**Difícil**



- Problemas aparentemente similares (arestas x vértices)
- Por que um problema é fácil e outro difícil?

**Aspecto fundamental da computação**

# Quem foi Alan Turing?



- Solucionou um dos problemas de Hilbert?
- Decodificou e quebrou a Enigma ?
- Inventou o teste de Turing ?

# *Entscheidungsproblem*

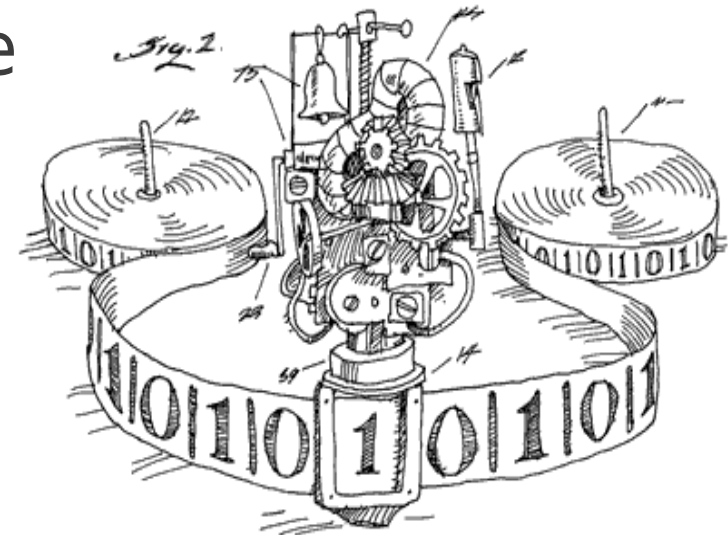
- Problema fundamental proposto por Hilbert em 1928
- Existe um *algoritmo* que dado um sistema de regras formal e uma afirmação neste sistema
  - decida se a afirmação é verdadeira ou falsa
- Mecanizar a decisão do que é verdadeiro e falso em qualquer linguagem formal

## **Implicações para a matemática!**

- Ex. toda e qualquer hipótese (conjuntura) pode ser decidida como verdadeira ou falsa

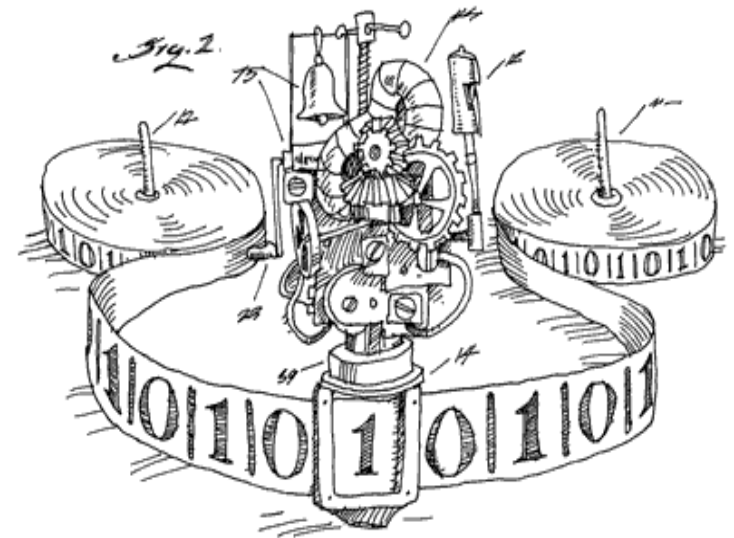
# Solução para o *Entscheidungsproblem*

- Não existe algoritmo que possa decidir se afirmações em sobre os números naturais
- Turing, 1937 (antes do doutorado)
- Precisou antes formalizar o conceito de algoritmo!
- Introduziu máquinas de Turing
  - modelo para computabilidade que usamos
- Introduziu famoso *Halting problem*
  - Problema *undecidable*



# Halting Problem (Problema da Parada)

- Dado um programa e uma entrada, decidir se o programa pára ou continua para sempre
- **Idéia:** emular o programa, mas como saber que ele não irá parar?
- Problema insolúvel!  
Independente da complexidade



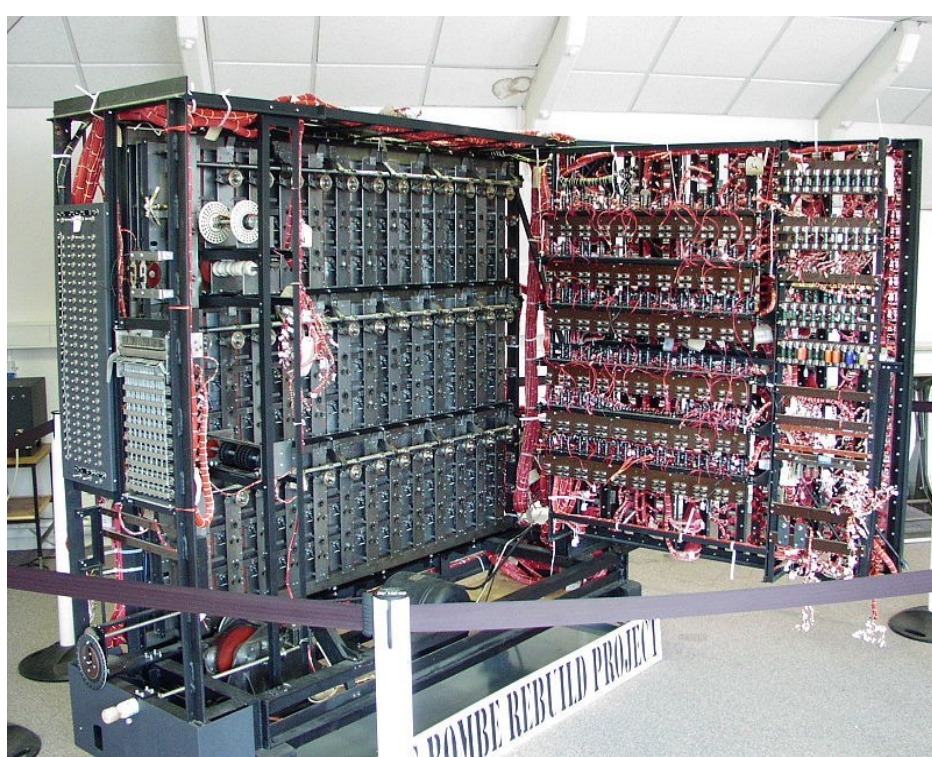


# A Enigma

- Máquina mecânica para cifrar e decifrar mensagens
- Utilizada pela marinha alemã durante segunda guerra
- Turing: cryptoanálise para inteligência Britânica, 1940 (depois do doutorado)

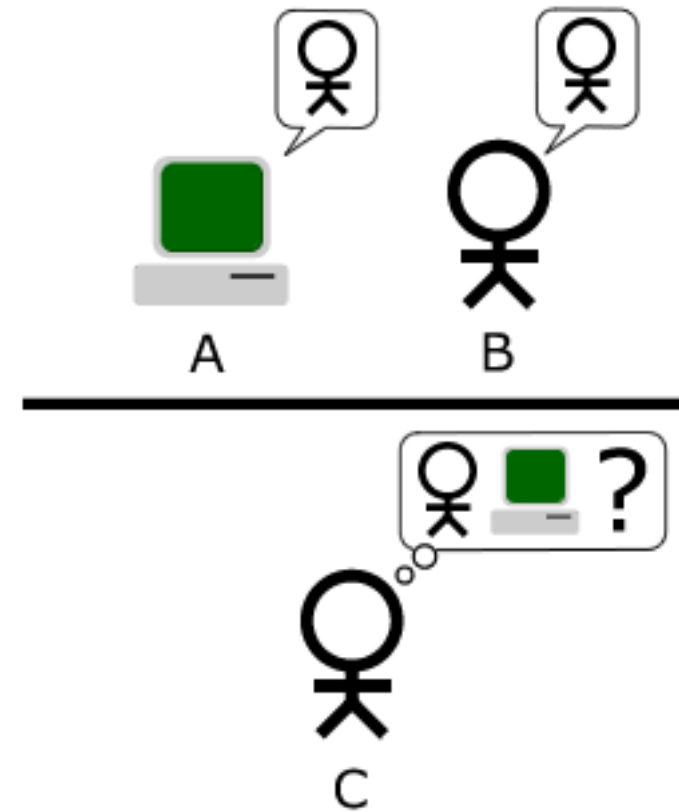


- Ajudou a decifrar a Enigma
- Ajudou a construir máquina eletromecânica para decifrar mensagens da Enigma rapidamente – *the bombe*
  - precursor do primeiro computador



# Teste de Turing

- Teste para determinar definir “inteligência”
- Conversa em linguagem natural entre interrogador e uma máquina e outra pessoa
- Máquina dita inteligente se engana o interrogador em pensar que ela é a pessoa
- Artigo de 1950 provocador. Poderiam máquinas vir a enganar humanos?
- Início de Inteligência Artificial (AI)



# Uma Mente Brilhante

- Contribuições significativa em diferentes áreas do conhecimento humano
- Lógica, matemática, computação, IA e biologia
- Formalizou o conceito de computabilidade e algoritmo
- *Turing Award*, dado anualmente pela ACM; Nobel da Computação



Alan Turing, 1912 – 1954



- 2012 – The Alan Turing Year (ATY)
  - Diversos eventos e atividades para celebrar 100 anos do seu nascimento



# Colorindo um Mapa

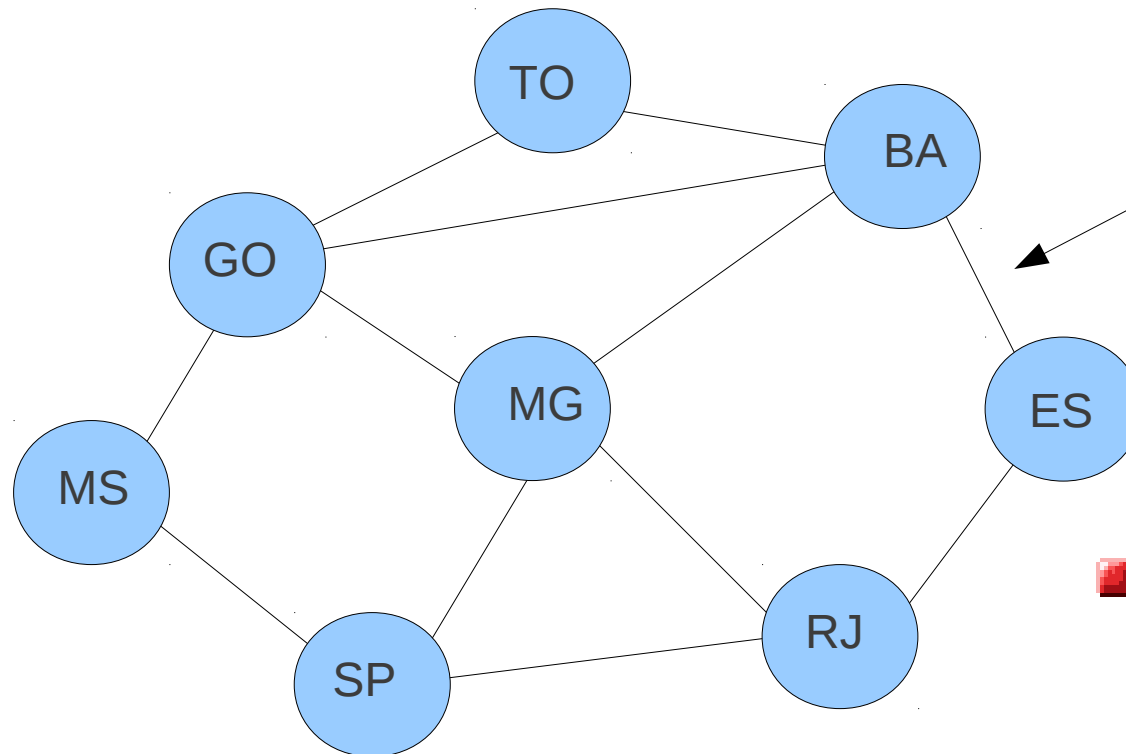


- Mapa de regiões (estados)
- Colorir o mapa
  - regiões vizinhas (com fronteira) **não** podem ter mesma cor

- **Problema 1:** Como colorir um mapa de forma atendendo a restrição
- **Problema 2:** Qual é o **menor** número de cores necessário?

# Colorindo um Mapa

- Abstração via grafos
- Vértices: regiões (estados)
- Arestas: duas regiões são vizinhas

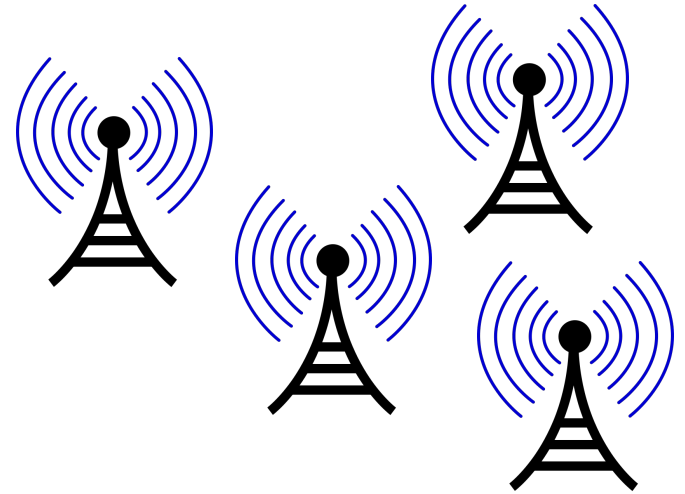


BA e ES são vizinhos

- Número mínimo de cores?

# Alocação de Frequências

- Rede telefonia celular
  - Estações base (torre)
- Células vizinhas não podem usar mesma frequência
  - interferência!

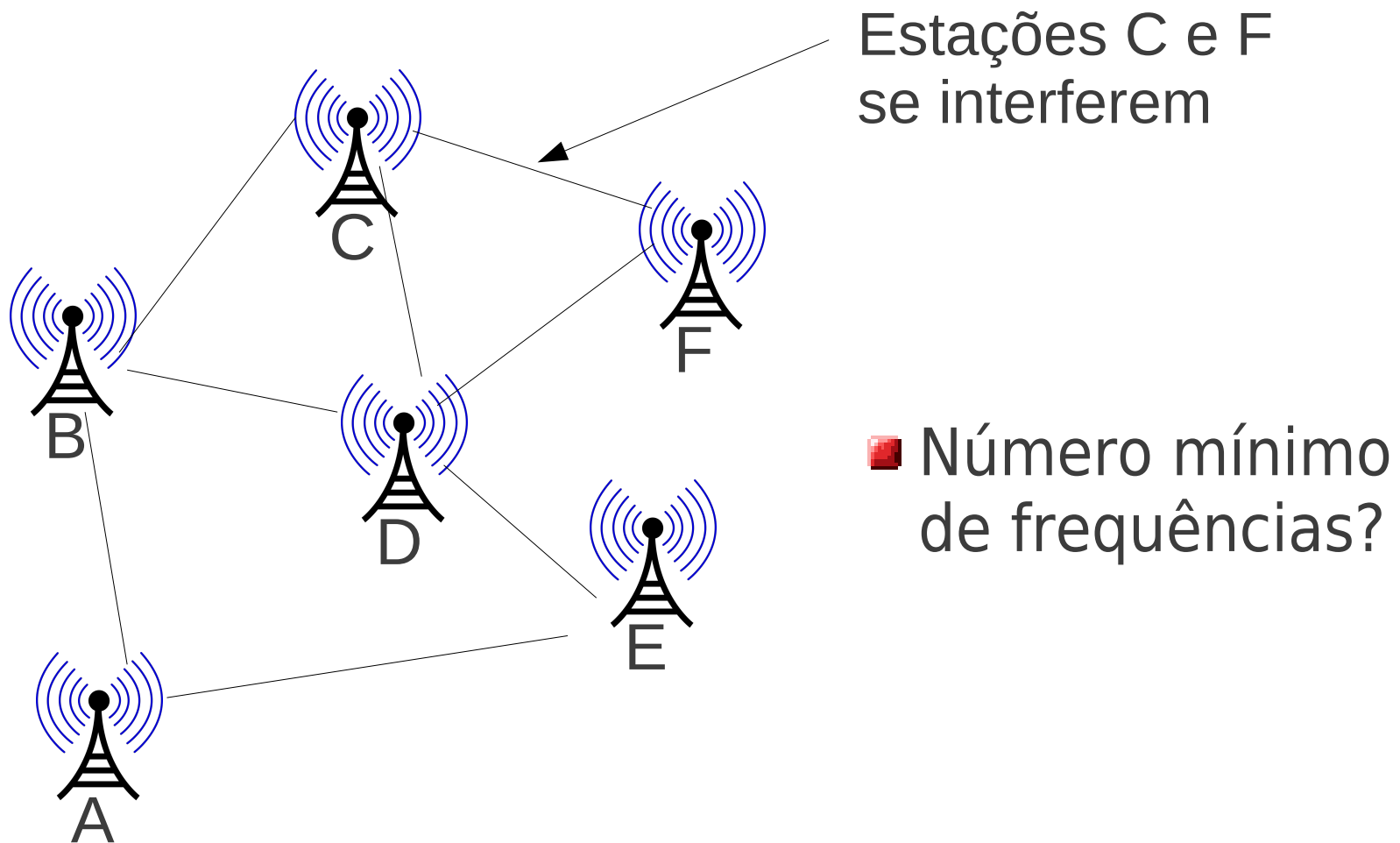


- **Problema 1:** Como alocar frequências às células?
- **Problema 2:** Qual é o menor número de frequências necessário?

**Mesma abstração!**

# Alocação de Frequências

- Vértices: estações base
- Arestas: duas estações são vizinhas (interferem)

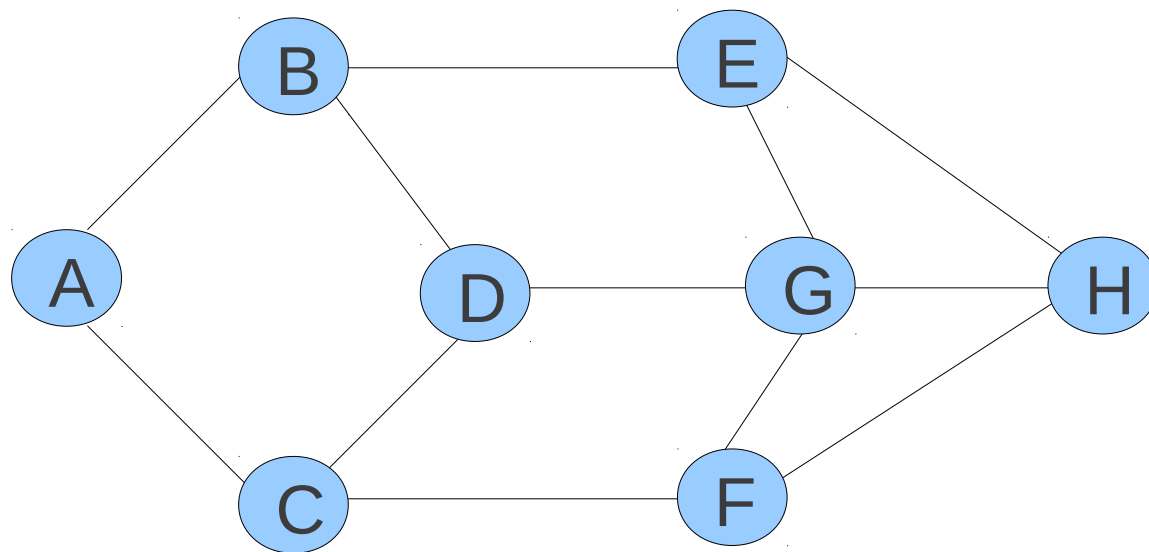


# Coloração em Grafos

- Coloração de vértices
- Dado grafo  $G = (V, E)$
- Restrição: vértices vizinhos não possuem mesma cor
- *k-coloração*: coloração que utiliza exatamente  $k$  cores
  - grafo é *k-colorível*
- **Número cromático**: menor número de cores necessário colorir o grafo

# Exemplo

- Uma coloração qualquer?
- Número cromático?



- Coloração qualquer é fácil, número cromático é difícil

# Algoritmo para Coloração

- Algoritmo para colorir um grafo com o menor número de cores possível
- **Idéias???**
- Método guloso
  - Mas como? Guloso em que?

# Algoritmo Guloso

## ■ Guloso no grau dos vértices

■ maior o grau, mais restrito, colorir primeiro

```
1. Colorir(G)
2. Ordenar vertices em ordem decrescente de graus
3. Define conjunto  $C[i] = \emptyset$  para  $i=1, \dots, n$ 
4. Incluir  $v[1]$  em  $C[1]$  // colorir  $v[1]$ 
5. Para  $j=2, \dots, n$  faça
6.     Selecione  $r$ , a menor cor para colorir  $v[j]$ 
        // menor  $r$  tal que nenhum vertice em  $C[r]$ 
        // seja vizinho de  $v[j]$ 
7.     Incluir  $v[j]$  em  $C[r]$ 
```



# Algoritmo Guloso

- Algoritmo funciona?
  - gera uma coloração de  $G$ ?
- Sim! Prova pelo funcionamento
- Algoritmo obtém número cromático?
  - utiliza menor número de cores?
- Não! Contra-exemplo?
- Complexidade?

# Número Cromático

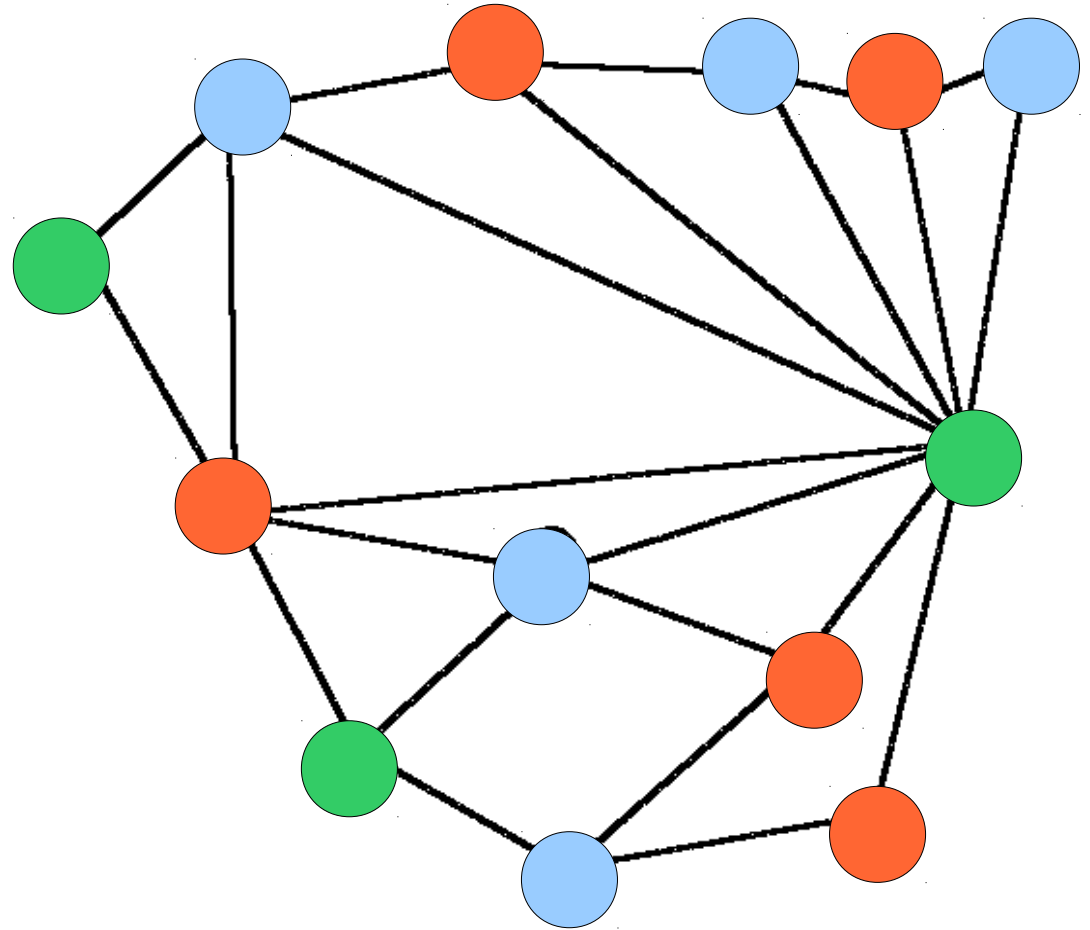
- **Problema difícil!**
- Não se conhece algoritmo eficiente para determinar o número cromático
- Determinar se um grafo é *k-colorível* é igualmente difícil, para  $k > 2$ 
  - para  $k = 2$  é fácil, já fizemos aqui

# Coloração de Mapas

- Caso especial de coloração de grafos
- Grafo induzido pelo mapa é *planar*
  - restrição geométrica das fronteiras.
- Grafo planar: é possível desenhar o grafo sem cruzar as arestas
- **Problema:** Qual é o menor número de cores necessário para colorir qualquer mapa?

# Exemplo

## ■ América do Sul



■ Número cromático?

■ Exemplo com 4 cores?

# Teorema das 4 Cores

- Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa
- Conjectura de De Morgan em 1852
- Várias provas erradas da conjectura!
- Provado somente em 1972 por Appel, Haken e um computador
  - prova por “força bruta” mostra que não há mapa para qual 5 cores seja necessário
  - Análise de 2000 casos, via computador!
- Primeira grande prova com ajuda do computador
- Matemáticos não gostam: e se tiver bug no programa?