Capítulo 37

1. A equação de dilatação do tempo $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ (em que Δt_0 é o intervalo de tempo próprio, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, e $\beta = v/c$) nos dá

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}.$$

De acordo com o enunciado, $t_0 = 2{,}2000\ \mu$s. Como o mesmo intervalo, no referencial da Terra, é $\Delta t = 16{,}000\ \mu$s, temos

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{2{,}2000\ \mu\text{s}}{16{,}000\ \mu\text{s}}\right)^2} = 0{,}99050.$$

2. (a) Como, de acordo com a Eq. 37-8, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, temos

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{(1{,}0100000)^2}} = 0{,}14037076.$$

(b) Neste caso, $\beta = \sqrt{1-(10{,}000000)^{-2}} = 0{,}99498744.$

(c) Neste caso, $\beta = \sqrt{1-(100{,}00000)^{-2}} = 0{,}99995000.$

(d) Neste caso, $\beta = \sqrt{1-(1000{,}0000)^{-2}} = 0{,}99999950.$

3. (a) Desprezando o tempo necessário para inverter o sentido do movimento da nave, o tempo total gasto na viagem foi de um ano, de acordo com o relógio de bordo (que mede o intervalo de tempo próprio Δt_0), e de 1000 anos, de acordo com os relógios terrestres. Explicitando v/c na Eq. 37-7, obtemos

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1\ \text{ano}}{1000\ \text{anos}}\right)^2} = 0{,}99999950.$$

(b) Como a equação da dilatação do tempo não envolve a aceleração (ou seja, a direção do vetor velocidade), podemos presumir que não faria diferença se a viagem não fosse feita em linha reta. Entretanto, esta é uma questão delicada, que até hoje é discutida pelos especialistas em relatividade.

4. Devido à dilatação do tempo, o intervalo entre as idades inicial e final da filha é maior que os quatro anos experimentados pelo pai:

$$t_{f\,\text{d filha}} - t_{i\,\text{filha}} = \gamma(4{,}000\ \text{anos}),$$

em que γ é o fator de Lorentz (Eq. 37-8). Chamando de T a idade do pai, temos

$$T_i = t_{i\,\text{filha}} + 20{,}00\ \text{anos},\quad T_f = t_{f\,\text{filha}} - 20{,}00\ \text{anos}.$$

Como $T_f - T_i = 4{,}000$ anos, podemos combinar as três equações anteriores para obter o valor de γ e, portanto, o valor de v:

$$44 = 4\gamma \quad\Rightarrow\quad \gamma = 11 \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{11^2-1}}{11} = 0{,}9959.$$

5. No laboratório, a partícula percorre uma distância $d = 0{,}00105$ m $= vt$, em que $v = 0{,}992c$, e t é o tempo medido pelo relógio do laboratório. Podemos utilizar a Eq. 37-7 para relacionar t ao tempo de vida próprio da partícula t_0:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad\Rightarrow\quad t_0 = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{d}{0{,}992c}\sqrt{1-0{,}992^2},$$

o que nos dá

$$t_0 = 4{,}46 \times 10^{-13}\ \text{s} = 0{,}446\ \text{ps}.$$

6. O valor de Δt para $\beta = 0$ no gráfico da Fig. 37-22 permite concluir que o valor de Δt_0 na Eq. 37-9 é 8,0 s. Assim, temos

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{8{,}0\ \text{s}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Fazendo $\beta = 0{,}98$ nessa expressão, obtemos $\Delta t \approx 40$ s.

7. De acordo com a Eq. 37-7, temos

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{120\ \text{anos}}{\sqrt{1-(0{,}9990)^2}} = 2684\ \text{anos} \approx 2{,}68\times 10^3\ \text{anos}.$$

8. De acordo com a Eq. 37-13, temos

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = (3{,}00\,\text{m})\sqrt{1-(0{,}999987)^2} = 0{,}0153\,\text{m} = 1{,}53\ \text{cm}.$$

9. PENSE Do ponto de vista de um observador estacionário, o comprimento de uma espaçonave em movimento é menor que o comprimento de repouso.

FORMULE Vamos chamar de L_0 o comprimento de repouso da nave. O comprimento medido pela base é

$$L = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

ANALISE (a) O comprimento de repouso é $L_0 = 130$ m. Para $v = 0{,}740c$, obtemos

$$L = L_0\sqrt{1-(v/c)^2} = (130\,\text{m})\sqrt{1-(0{,}740)^2} = 87{,}4\,\text{m}.$$

(b) O intervalo de tempo registrado pelos ocupantes da base é

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{87{,}4\,\text{m}}{(0{,}740)(3{,}00\times 10^8\ \text{m/s})} = 3{,}94\times 10^{-7}\ \text{s}.$$

APRENDA O comprimento da espaçonave parece ter sido dividido por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}740)^2}} = 1{,}487.$$

10. Como apenas a "componente" do comprimento paralela ao eixo x sofre contração relativística, a componente y continua a ser

$$\ell'_y = \ell_y = \ell \operatorname{sen} 30° = (1{,}0\ \text{m})(0{,}50) = 0{,}50\,\text{m},$$

enquanto a componente x se torna

$$\ell'_x = \ell_x\sqrt{1-\beta^2} = (1{,}0\ \text{m})(\cos 30°)\sqrt{1-(0{,}90)^2} = 0{,}38\,\text{m}.$$

Assim, de acordo com o teorema de Pitágoras, o comprimento da régua no referencial S' é

$$\ell' = \sqrt{(\ell'_x)^2 + (\ell'_y)^2} = \sqrt{(0{,}38\ \text{m})^2 + (0{,}50\ \text{m})^2} = 0{,}63\,\text{m}.$$

11. O comprimento L da barra, medido em um referencial que está se movendo com velocidade v paralelamente à maior dimensão da barra, está relacionado ao comprimento de repouso L_0 pela equação $L = L_0/\gamma$, em que $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ e $\beta = v/c$. Como γ é sempre maior que 1, L é menor que L_0. Neste problema, $L_0 = 1{,}70$ m, $\beta = 0{,}630$ e, portanto,

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = (1{,}70\,\text{m})\sqrt{1-(0{,}630)^2} = 1{,}32\,\text{m}.$$

12. (a) De acordo com a Eq. 37-13, temos

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{L}{L_0}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0{,}866.$$

(b) De acordo com a Eq. 37-8, temos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2{,}00.$$

13. (a) A velocidade do astronauta é $v = 0{,}99c$, que também pode ser expressa na forma $v = 0{,}99$ ano-luz/ano. Seja d a distância percorrida. O tempo de viagem, no referencial terrestre, é

$$\Delta t = d/v = (26 \text{ anos-luz})/(0{,}99 \text{ ano-luz/ano}) = 26{,}26 \text{ anos}.$$

(b) O sinal, que presumivelmente é uma onda eletromagnética, se propaga com velocidade c e, portanto, leva 26,0 anos para chegar à Terra. O tempo total, no referencial terrestre, é

$$26{,}26 \text{ anos} + 26{,}0 \text{ anos} = 52{,}26 \text{ anos}.$$

(c) O intervalo de tempo medido pelos relógios de bordo é o intervalo de tempo próprio $\Delta t_0 = \Delta t/\gamma$. Como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}99)^2}} = 7{,}09,$$

temos

$$\Delta t_0 = (26{,}26 \text{ anos})/(7{,}09) = 3{,}705 \text{ anos}.$$

14. O valor de L para $\beta = 0$ no gráfico da Fig. 37-23 permite concluir que o valor de L_0 na Eq. 37-13 é 0,80 m. Assim, temos

$$L = L_0\sqrt{1-(v/c)^2} = (0{,}80\,\text{m})\sqrt{1-\beta^2}.$$

Fazendo $\beta = 0{,}95$ nessa expressão, obtemos $L \approx 0{,}25$ m.

15. (a) Sabemos que $d = 23.000$ anos-luz $= 23.000c$. O tempo gasto para percorrer essa distância, no referencial da Terra, é $\Delta t = d/v$, em que v é a velocidade da espaçonave. Como $\beta = v/c$, temos

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{23.000c}{\beta c} = \frac{23.000}{\beta} \text{ anos}.$$

Por outro lado, de acordo com a Eq. 37-7,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{30}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ anos}.$$

Igualando as duas equações e explicitando β, obtemos

$$\beta = \frac{23.000}{\sqrt{23.000^2 + 30^2}} = 0{,}99999915.$$

(b) De acordo com a Eq. 37-13, a distância percorrida no referencial da espaçonave é

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = 23.000\sqrt{1-0{,}99999915^2} \approx 30 \text{ anos-luz.}$$

16. A "coincidência" de $x = x' = 0$ no instante $t = t' = 0$ permite que as Eqs. 37-21 sejam usadas sem termos adicionais.

(a) A coordenada espacial no referencial do observador S' é

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3{,}00\times10^8\,\text{m} - (1{,}199\times10^8\,\text{m/s})(2{,}50\,\text{s})}{\sqrt{1-(0{,}400)^2}} = 2{,}7\times10^5\,\text{m} \approx 0,$$

dentro da precisão dos dados (dois algarismos significativos).

(b) A coordenada temporal no referencial do observador S' é

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2{,}50\,\text{s} - (0{,}400)(3{,}00\times10^8\ \text{m})/2{,}998\times10^8\ \text{m/s}}{\sqrt{1-(0{,}400)^2}} = 2{,}29\,\text{s}.$$

(c) Nesse caso, a velocidade v tem sinal negativo e a coordenada espacial no referencial do observador S' é

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3{,}00\times10^8\ \text{m} + (1{,}199\times10^8\ \text{m/s})(2{,}50\ \text{s})}{\sqrt{1-(0{,}400)^2}} = 6{,}54\times10^8\ \text{m}.$$

(d) Nesse caso, a coordenada temporal no referencial do observador S' é

$$t' = \gamma\left(t + \frac{vx}{c^2}\right) = \frac{2{,}50\text{s} + (0{,}400)(3{,}00\times10^8\text{m})/2{,}998\times10^8\text{m/s}}{\sqrt{1-(0{,}400)^2}} = 3{,}16\,\text{s}.$$

17. PENSE Podemos usar a transformação de Lorentz para calcular as coordenadas espacial e temporal da colisão de acordo com um observador estacionário no referencial S'.

FORMULE De acordo com as equações da transformação de Lorentz, temos

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - \beta x/c)$$

em que $\beta = v/c = 0{,}950$ e

$$\gamma = 1\sqrt{1-\beta^2} = 1/\sqrt{1-(0{,}950)^2} = 3{,}20256\,.$$

ANALISE (a) A coordenada espacial no referencial S' é

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) = (3{,}20256)\left(100\times10^3\,\text{m} - (0{,}950)(2{,}998\times10^8\ \text{m/s})(200\times10^{-6}\text{s})\right) \\ &= 1{,}38\times10^5\ \text{m} = 138\ \text{km.} \end{aligned}$$

(b) A coordenada temporal no referencial S' é

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \beta x/c) = (3{,}20256)\left[200\times10^{-6}\text{s} - \frac{(0{,}950)(100\times10^3\ \text{m})}{2{,}998\times10^8\ \text{m/s}}\right] \\ &= -3{,}74\times10^{-4}\ \text{s} = -374\,\mu\text{s.} \end{aligned}$$

APRENDA O instante e o local em que ocorreu o choque de micrometeoritos são diferentes para observadores situados nos referenciais S e S'.

18. A "coincidência" de $x = x' = 0$ no instante $t = t' = 0$ permite que as Eqs. 37-21 sejam usadas sem termos adicionais. Vamos fazer $(x_1, t_1) = (0, 0)$ e $(x_2, t_2) = (3000\ \text{m}, 4{,}0\times10^{-6}\ \text{s})$.

(a) Esperamos que $(x_1', t_1') = (0,0)$, o que pode ser confirmado usando as Eqs. 37-21.

(b) Vamos agora calcular (x_2', t_2') para $v = +0{,}60c = +1{,}799 \times 10^8$ m/s (o enunciado do problema não indica explicitamente o sinal de v, mas, na figura mencionada, a Fig. 37-9, o referencial S' está se movendo no sentido positivo do eixo x; portanto, o sinal de v é positivo).

$$x_2' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3000\ \text{m} - (1{,}799\times 10^8\ \text{m/s})(4{,}0\times 10^{-6}\ \text{s})}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}} = 2{,}85\ \text{km}$$

$$t_2' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4{,}0\times 10^{-6}\ \text{s} - (0{,}60)(3000\ \text{m})/(2{,}998\times 10^8\ \text{m/s})}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}} = -2{,}5\ \mu\text{s}.$$

(c) Como, no referencial S, o evento 1 ocorre no instante $t = 0$ e o evento 2 ocorre no instante $t = 4{,}0\ \mu$s, o evento 1 acontece antes do evento 2. No referencial S', por outro lado, como $t_2' < 0$, o evento 2 acontece antes do instante $t = t' = 0$; portanto, antes do evento 1. Assim, os dois observadores não registram os eventos na mesma ordem.

Como as distâncias $x_2 - x_1$ e $x_2' - x_1'$ são maiores que as distâncias que a luz pode percorrer nos respectivos intervalos de tempo, $c(t_2 - t_1) = 1{,}2$ km e $c\,|t_2' - t_1'| \approx 750$ m, a inversão da ordem em que os eventos ocorrem não viola o princípio da causalidade.

19. (a) Vamos supor que as lâmpadas de flash estão em repouso no referencial S, e que o observador está em repouso no referencial S'. Como o tempo próprio não é medido nem pelos relógios do referencial S nem pelos relógios do referencial S', é preciso usar a transformação de Lorentz completa (Eq. 37-21). Seja t_p a coordenada temporal e seja x_p a coordenada espacial do pequeno clarão no referencial S. Nesse caso, a coordenada temporal do pequeno clarão no referencial S' é

$$t_p' = \gamma\left(t_p - \frac{\beta x_p}{c}\right)$$

em que $\beta = v/c = 0{,}250$ e

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/\sqrt{1-(0{,}250)^2} = 1{,}0328.$$

Seja t_g a coordenada temporal e seja x_g a coordenada espacial do grande clarão no referencial S. Nesse caso, a coordenada temporal do grande clarão no referencial S' é

$$t_g' = \gamma\left(t_g - \frac{\beta x_g}{c}\right).$$

Subtraindo a primeira equação da segunda e levando em conta o fato de que $t_p = t_g$, já que os clarões são simultâneos no referencial S, obtemos

$$\Delta t' = t_g' - t_p' = \frac{\gamma\beta(x_p - x_g)}{c} = \frac{(1{,}0328)(0{,}250)(30\times 10^3\ \text{m})}{3{,}00\times 10^8\ \text{m/s}} = 2{,}58\times 10^{-5}\ \text{s} = 25{,}8\ \mu\text{s}.$$

(b) Como $\Delta t'$ é positivo, t_g' é maior que t_p', o que significa que, de acordo com o observador, o clarão pequeno ocorreu primeiro.

20. De acordo com a Eq. 2 da Tabela 37-2, temos

$$\Delta t = v\gamma\Delta x'/c^2 + \gamma\Delta t'.$$

O coeficiente de x' é a inclinação (4,0 μs/400 m) da reta da Fig, 37-24, e o segundo termo do lado direito é a distância temporal no referencial S para $x' = 0$. A partir da primeira observação, obtemos, depois de algumas manipulações algébricas, $\beta = v/c = 0{,}949$, o que nos dá $\gamma = 3{,}16$. Nesse caso, de acordo com a segunda observação,

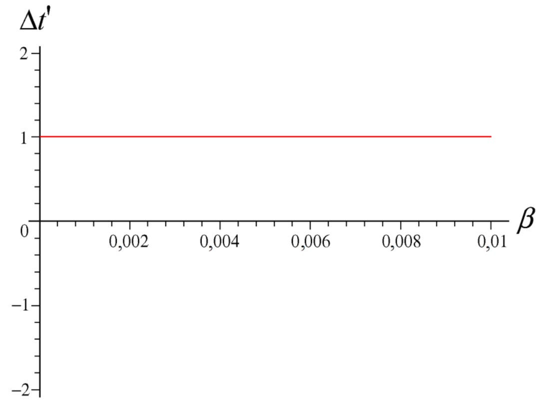
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{2{,}00\times 10^{-6}\text{s}}{3{,}16} = 6{,}3\times 10^{-7}\text{s} = 0{,}63\ \mu s.$$

21. (a) De acordo com a Eq. 2′ da Tabela 37-2, temos

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta\Delta x}{c}\right) = \gamma\left(1{,}00\times10^{-6}\,\text{s} - \frac{\beta(400\,\text{m})}{2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s}}\right),$$

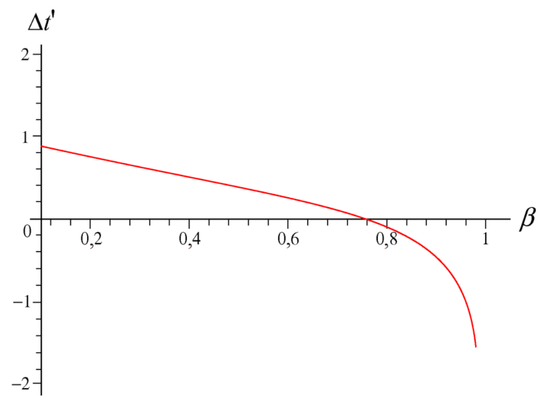
em que γ e β estão relacionados pela Eq. 37-8.

(b) A figura a seguir mostra o gráfico de $\Delta t'$ em função de β para o intervalo $0 < \beta < 0{,}01$.



Note que os limites do eixo vertical são $+2\,\mu$s e $-2\,\mu$s e que o gráfico não pode ser distinguido de uma reta horizontal. Isso acontece porque, para valores pequenos de β, a distância temporal entre os eventos medida pelo observador 2 é praticamente igual à distância medida pelo observador 1, ou seja, $+1{,}0\,\mu$s. Em outras palavras, neste caso não são observados efeitos relativísticos.

(c) A figura a seguir mostra o gráfico de $\Delta t'$ em função de β para o intervalo $0{,}1 < \beta < 1$.



(d) Fazendo

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta\Delta x}{c}\right) = \gamma\left(1{,}00\times10^{-6}\,\text{s} - \frac{\beta(400\,\text{m})}{2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s}}\right) = 0,$$

obtemos

$$\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{(2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s})(1{,}00\times10^{-6}\,\text{s})}{400\,\text{m}} = 0{,}7495 \approx 0{,}750.$$

(e) De acordo com o gráfico do item (c), a sequência dos eventos para o observador 2 é a mesma que para o observador 1 para $\beta < 0{,}750$, pois, nesse caso, $\Delta t' > 0$.

(f) De acordo com o gráfico do item (c), a sequência dos eventos para o observador 2 não é a mesma que para o observador 1 para $\beta > 0{,}750$, pois, nesse caso, $\Delta t' < 0$.

(g) Não, o evento A não pode ser a causa do evento B ou vice-versa. Note que

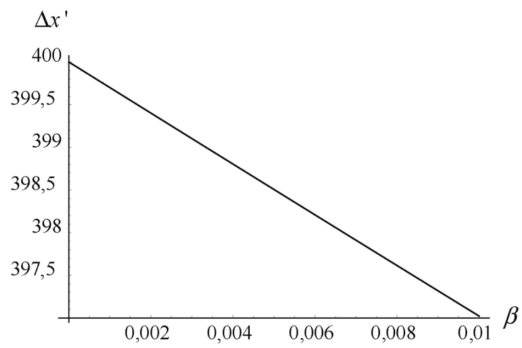
$$\Delta x/\Delta t = (400 \text{ m})/(1{,}00\ \mu\text{s}) = 4{,}00 \times 10^8 \text{ m/s} > c.$$

Como um sinal não pode se propagar do local onde ocorreu o evento A para o local onde ocorreu o evento B com uma velocidade maior que c, o evento A não pode influenciar o evento B, ou vice-versa.

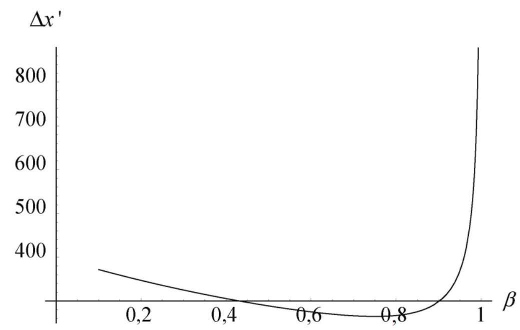
22. (a) De acordo com a Tabela 37-2,

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) = \gamma[400 \text{ m} - \beta c(1{,}00\ \mu\text{s})] = \frac{400 \text{ m} - (299{,}8 \text{ m})\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

(b) A figura a seguir mostra o gráfico de $\Delta x'$ em função de β para $0 < \beta < 0{,}01$.



(c) A figura que se segue mostra o gráfico de $\Delta x'$ em função de β para $0{,}01 < \beta < 1$.



(d) Para determinar o valor de β para o qual a distância espacial $\Delta x'$ é mínima, derivamos $\Delta x'$ em relação a β e igualamos o resultado a zero:

$$\frac{d\Delta x'}{d\beta} = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\Delta x - \beta c\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{\beta\Delta x - c\Delta t}{(1-\beta^2)^{3/2}} = 0.$$

Explicitando β, obtemos

$$\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{(2{,}998\times10^8 \text{ m/s})(1{,}00\times10^{-6} \text{s})}{400 \text{ m}} = 0{,}7495 \approx 0{,}750.$$

(e) Substituindo o valor de β calculado no item (d) na expressão do item (a), obtemos

$$x' = 264{,}8 \text{ m} \approx 265 \text{ m}.$$

23. (a) O fator de Lorentz é

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}600)^2}} = 1{,}25.$$

(b) No referencial estacionário, o tempo que o relógio leva para se deslocar da origem até o ponto x = 180 m é

$$t=\frac{x}{v}=\frac{180\,\text{m}}{(0{,}600)(3{,}00\times10^{8}\,\text{m/s})}=1{,}00\times10^{-6}\,\text{s}.$$

O intervalo de tempo próprio entre os dois eventos (o instante em que o relógio passa pela origem e o instante em que o relógio passa pelo ponto x = 180 m) é o tempo medido pelo próprio relógio. Como a leitura do relógio no início do intervalo é zero, a leitura no final do intervalo é

$$t'=\frac{t}{\gamma}=\frac{1{,}00\times10^{-6}\,\text{s}}{1{,}25}=8{,}00\times10^{-7}\,\text{s}=0{,}800\,\mu\text{s}.$$

24. Se o observador S' mede no relógio de pulso um intervalo de 15,0 s que para o observador S corresponde a um intervalo de 30,0 s, o fator de Lorentz é γ = 2,00 (veja a Eq. 37-9), o que nos dá, de acordo com a Eq. 37-8, v = 0,866c.

(a) De acordo com a Eq. 37-13, o comprimento da régua 1 para o observador S é (1,00 m)/γ = (1,00 m)/2 = 0,500 m.

(b) Como não há contração em uma direção perpendicular à direção do movimento, o comprimento da régua 2 para o observador S é 1,00 m.

(c) Pela mesma razão apresentada no item (b), o comprimento da régua 3 para o observador S é 1,00 m.

(d) De acordo com a Eq. 1′ da Tabela 37-2, temos

$$\begin{aligned}\Delta x'&=x_2'-x_1'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)=(2{,}00)\left[20{,}0\text{ m}-(0{,}866)(2{,}998\times10^{8}\text{ m/s})(40{,}0\times10^{-9}\text{ s})\right]\\&=19{,}2\text{ m}.\end{aligned}$$

(e) De acordo com a Eq. 2′ da Tabela 37-2, temos

$$\begin{aligned}\Delta t'&=t_2'-t_1'=\gamma\left(\Delta t-v\Delta x/c^2\right)=\gamma\left(\Delta t-\beta\Delta x/c\right)\\&=(2{,}00)\left[40{,}0\times10^{-9}\text{ s}-(0{,}866)(20{,}0\text{ m})/(2{,}998\times10^{8}\text{ m/s})\right]\\&=-35{,}5\text{ ns}.\end{aligned}$$

Em valor absoluto, a distância temporal entre os dois eventos é 35,5 ns.

(f) O sinal negativo obtido no item (e) significa que o evento 2 ocorreu antes do evento 1.

25. (a) No referencial S, as coordenadas são tais que x_1 = +1200 m para o grande clarão e x_2 = 1200 − 720 = 480 m para o pequeno clarão (que aconteceu depois). Assim,

$$\Delta x=x_2-x_1=-720\text{ m}.$$

Fazendo $\Delta x'$ = 0 na Eq. 37-25, obtemos

$$0=\gamma(\Delta x-v\Delta t)=\gamma\left[-720\,\text{m}-v(5{,}00\times10^{-6}\text{s})\right],$$

o que nos dá v = −1,44 × 10^{8} m/s e, portanto, $\beta=v/c=0{,}480$.

(b) O sinal negativo obtido no item (a) mostra que o referencial S' está se movendo no sentido negativo do eixo x.

(c) De acordo com a Eq. 37-28,

$$\Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\frac{v\Delta x}{c^2}\right)=\gamma\left(5{,}00\times10^{-6}\text{s}-\frac{(-1{,}44\times10^{8}\,\text{m/s})(-720\,\text{m})}{(2{,}998\times10^{8}\text{ m/s})^2}\right),$$

o que nos dá um valor positivo, qualquer que seja o valor de γ. Assim, a ordem dos clarões no referencial S' é a mesma que no referencial S, ou seja, o grande clarão acontece primeiro.

(d) Terminando o cálculo iniciado no item (c), obtemos

$$\Delta t' = \frac{5,00\times10^{-6}\,\mathrm{s}-(-1,44\times10^{8}\,\mathrm{m/s})(-720\,\mathrm{m})/(2,998\times10^{8}\,\mathrm{m/s})^2}{\sqrt{1-0,480^2}} = 4,39\times10^{-6}\,\mathrm{s}$$
$$= 4,39\ \mu\mathrm{s}.$$

26. Estamos interessados em calcular o valor de Δt para que

$$0 = \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma(-720\,\mathrm{m} - v\Delta t)$$

no caso limite em que $|v| \to c$. Assim,

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\Delta x}{c} = \frac{720\,\mathrm{m}}{2,998\times10^{8}\,\mathrm{m/s}} = 2,40\times10^{-6}\,\mathrm{s} = 2,40\ \mu\mathrm{s}.$$

27. PENSE Podemos usar a transformação relativística de velocidades para calcular a velocidade da partícula em relação ao referencial S.

FORMULE Vamos supor que S' está se movendo no sentido do semieixo x positivo. Se u' é a velocidade da partícula medida no referencial S' e v é a velocidade de S' em relação a S, a velocidade da partícula medida no referencial S é dada pela Eq. 37-29:

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2}.$$

ANALISE Para $u' = +0{,}40c$ e $v = +0{,}60c$, obtemos

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2} = \frac{0{,}40c + 0.60c}{1+(0{,}40c)(+0{,}60c)/c^2} = 0{,}81c.$$

APRENDA De acordo com a transformação clássica de Galileu, o resultado seria

$$u = u' + v = 0{,}40c + 0{,}60c = 1{,}0c.$$

28. (a) De acordo com a Eq. 37-29,

$$v = \frac{v'+u}{1+uv'/c^2} = \frac{0,47c+0,62c}{1+(0,47)(0,62)} = 0,84c.$$

Na notação dos vetores unitários, $\vec{v} = (0{,}84c)\hat{\mathrm{i}}$.

(b) De acordo com a transformação clássica, $v = 0{,}47c + 0{,}62c = 1{,}1c$, o que nos dá $\vec{v} = (1{,}1c)\hat{\mathrm{i}}$.

(c) Para $v' = -0{,}47c\hat{\mathrm{i}}$, temos

$$v = \frac{v'+u}{1+uv'/c^2} = \frac{-0,47c+0,62c}{1+(-0,47)(0,62)} = 0,21c.$$

Na notação dos vetores unitários, $\vec{v} = (0{,}21c)\hat{\mathrm{i}}$.

(d) De acordo com a transformação clássica, $v = 0{,}62c - 0{,}47c = 0{,}15c$, o que nos dá

$$\vec{v} = (0{,}15c)\hat{\mathrm{i}}.$$

29. (a) Uma coisa que a relatividade de Einstein possui em comum com a relatividade clássica é a reciprocidade das velocidades relativas. Se João vê Maria se afastar com uma velocidade de 20 m/s, Maria vê João se afastar com uma velocidade de 20 m/s. Assim, se para um observador terrestre a galáxia A está se afastando a uma velocidade de 0,35c, para um observador da galáxia A nossa galáxia está se afastando a uma velocidade escalar (em múltiplos de c) $|v/c| = 0{,}35$.

(b) Vamos tomar como positivo o sentido do movimento da galáxia A no nosso referencial. Usando a notação da Eq. 37-29, sabemos que $v = +0{,}35c$ (a velocidade da galáxia A em relação à Terra) e $u = -0{,}35c$ (a velocidade da galáxia B em relação à Terra). Nesse caso, a velocidade da galáxia B em relação à galáxia A é

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{(-0{,}35c) - 0{,}35c}{1 - (-0{,}35)(0{,}35)} = -0{,}62c,$$

o que nos dá

$$|u'/c| = 0{,}62.$$

30. Usando a notação da Eq. 37-29 e tomando como positivo o sentido "para longe da Terra", sabemos que $v = +0{,}4c$ e $u = +0{,}8c$. Assim, a velocidade de Q_2 em relação a Q_1 é

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{0{,}8c - 0{,}4c}{1 - (0{,}8)(0{,}4)} = 0{,}588c,$$

o que nos dá

$$|u'/c| = 0{,}588.$$

31. PENSE Como tanto a espaçonave como o micrometeorito estão se movendo com velocidades próximas da velocidade da luz, devemos utilizar a transformação relativística de velocidades para calcular a velocidade do micrometeorito em relação à espaçonave.

FORMULE Seja S o referencial do micrometeorito e seja S' o referencial da espaçonave. Vamos supor que o referencial S está se movendo no sentido do semieixo x positivo. Se u é a velocidade do micrometeorito no referencial S e v é a velocidade do referencial S' em relação ao referencial S, a velocidade u' do micrometeorito no referencial S' pode ser calculada usando a Eq. 37-29:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \Rightarrow \; u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}.$$

ANALISE Para $v = -0{,}82c$ e $u = +0{,}82c$, temos

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{0{,}82c - (-0{,}82c)}{1 - (0{,}82)(-0.82)} = 0{,}98c$$

ou $2{,}94 \times 10^8$ m/s. Usando a Eq. 37-10, concluímos que um observador a bordo mede um tempo de trânsito igual a

$$\Delta t = \frac{d}{u'} = \frac{350\,\text{m}}{2{,}94 \times 10^8\ \text{m/s}} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ \text{s}.$$

APRENDA De acordo com a transformação clássica de Galileu, o resultado seria

$$u' = u - v = 0{,}82c - (-\,0{,}82c) = 1{,}64c,$$

uma velocidade maior que c e, portanto, fisicamente impossível.

32. De acordo com o gráfico da Fig. 37-36*b*, $u' = 0{,}80c$ para $v = 0$. Assim, de acordo com a Eq. 37-29, $u = 0{,}80c$. Explicitando u' na Eq. 37-29 e substituindo u por seu valor, temos

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{0{,}80c - v}{1 - (0{,}80)v/c}.$$

(a) Fazendo $v = 0{,}90c$ na expressão anterior, obtemos $u' = -0{,}357c \approx -0{,}36c$.

(b) Fazendo $v = c$ na expressão anterior, obtemos $u' = -c$, independentemente do valor de u.

33. (a) No referencial da nave mensageira (que vamos chamar de S_m), a velocidade da esquadrilha é

$$v' = \frac{v - v_m}{1 - vv_m/c^2} = \frac{0,80c - 0,95c}{1 - (0,80c)(0,95c)/c^2} = -0,625c.$$

O comprimento da esquadrilha no referencial S_m é

$$L_1 = \frac{L_0}{\gamma_{v'}} = (1,0\,\text{ano-luz})\sqrt{1-(-0,625)^2} = 0,781\ \text{ano-luz}.$$

Assim, a duração da viagem é

$$t' = \frac{L'}{|v'|} = \frac{0,781\,\text{ano-luz}}{0,625\text{c}} = 1,25\ \text{ano}.$$

(b) No referencial da esquadrilha (que vamos chamar de S_e), a velocidade da nave mensageira é

$$v' = \frac{v - v_e}{1 - vv_e/c^2} = \frac{0,95c - 0,80c}{1 - (0,95c)(0,80c)/c^2} = 0,625c.$$

e a duração da viagem é

$$t' = \frac{L_0}{v'} = \frac{1,0\ \text{ano-luz}}{0,625c} = 1,60\ \text{ano}.$$

(c) No referencial da base espacial, o comprimento da esquadrilha é

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = (1,0\ \text{ano-luz})\sqrt{1-(0,80)^2} = 0,60\ \text{ano-luz}$$

e, portanto, a duração da viagem é

$$t = \frac{L}{v_m - v_e} = \frac{0,60\,\text{ano-luz}}{0,95c - 0,80c} = 4,00\ \text{anos}.$$

34. De acordo com a equação do efeito Doppler transversal, Eq. 37-37, $f = f_0\sqrt{1-\beta^2}$, o que nos dá

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{1-\beta^2}.$$

Explicitando $\lambda - \lambda_0$, obtemos

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = (589,00\,\text{mm})\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0,100)^2}} - 1\right] = 2,97\,\text{nm}.$$

35. PENSE Este problema envolve o efeito Doppler para a luz. A velocidade da fonte é a velocidade da espaçonave, e a velocidade do detector é a velocidade da Terra.

FORMULE Como a fonte e o detector estão se afastando, a frequência recebida é dada pela Eq. 37-31:

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

em que f_0 é a frequência no referencial da espaçonave, $\beta = v/c$ e v é a velocidade da espaçonave em relação à Terra.

ANALISE Para β = 0,90 e f_0 = 100 MHz, temos

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = (100\,\text{MHz})\sqrt{\frac{1-0{,}9000}{1+0{,}9000}} = 22{,}9\,\text{MHz}.$$

APRENDA Como a fonte está se afastando do detector, $f < f_0$. Note que, para baixas velocidades, ou seja, para $\beta << 1$, podemos usar a seguinte aproximação para a Eq. 37-31:

$$f \approx f_0\left(1-\beta+\frac{1}{2}\beta^2\right).$$

36. (a) De acordo com a Eq. 37-36.

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c = (0{,}004)(3{,}0\times10^8\ \text{m/s}) = 1{,}2\times10^6\ \text{m/s} \approx 1\times10^6\ \text{m/s}.$$

(b) A galáxia está se afastando da Terra.

37. De acordo com a Eq. 37-36,

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c = \left(\frac{620\ \text{nm} - 540\ \text{nm}}{620\ \text{nm}}\right)c = 0{,}13c.$$

38. (a) De acordo com a Eq. 37-36,

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c = \frac{12{,}00\ \text{nm}}{513{,}0\ \text{nm}}(2{,}998\times10^8\ \text{m/s}) = 7{,}000\times10^6\ \text{m/s} = 7000\ \text{km/s}.$$

(b) O fato de que o comprimento de onda aumentou significa que a galáxia NGC 7319 está se afastando da Terra.

39. PENSE Este problema envolve o efeito Doppler para a luz. A velocidade da fonte é a velocidade da espaçonave, e a velocidade do detector é a velocidade da Terra.

FORMULE Como a fonte e o detector estão se afastando, a frequência recebida é dada pela Eq. 37-31:

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

em que f_0 é a frequência no referencial da espaçonave, $\beta = v/c$ e v é a velocidade da espaçonave em relação à Terra. A frequência e o comprimento de onda estão relacionados pela equação $f\lambda = c$. Assim, se λ_0 é o comprimento de onda da luz no referencial da espaçonave, o comprimento de onda no referencial da Terra é

$$\lambda = \lambda_0\left(\frac{f_0}{f}\right) = \lambda_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

ANALISE (a) Para λ_0 = 450 nm e β = 0,20, temos

$$\lambda = (450\,\text{nm})\sqrt{\frac{1+0{,}20}{1-0{,}20}} = 550\ \text{nm}.$$

(b) O comprimento de onda de 550 nm corresponde à cor verde.

APRENDA Uma vez que λ_0 = 450 nm, a luz é azul no referencial da espaçonave. Como $\lambda > \lambda_0$, este desvio Doppler é um desvio para o vermelho.

40. (a) O teorema do trabalho e energia cinética pode ser aplicado tanto na física clássica como na física relativística; a única diferença está na equação usada para calcular a energia cinética. Usando a Eq. 37-52, $W = \Delta K = m_e c^2(\gamma - 1)$, e a relação $m_e c^2$ = 511 keV = 0,511 MeV (Tabela 37-3), obtemos

$$W = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = (511\,\text{keV}) \left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}500)^2}} - 1 \right] = 79{,}1\ \text{keV}.$$

(b) $W = (0{,}511\,\text{MeV}) \left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}} - 1 \right] = 3{,}11\ \text{MeV}.$

(c) $W = (0{,}511\,\text{MeV}) \left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}} - 1 \right] = 10{,}9\,\text{MeV}.$

41. PENSE Como o elétron possui uma energia cinética muito elevada, devemos usar equações relativísticas para calcular os parâmetros pedidos.

FORMULE A energia cinética do elétron é dada pela Eq. 37-52:

$$K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)\,.$$

Assim,

$$\gamma = (K/mc^2) + 1.$$

Explicitando β no fator de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, obtemos

$$\beta = \sqrt{1-(1/\gamma)^2}\,.$$

ANALISE (a) De acordo com a Tabela 37-3, a energia de repouso do elétron é mc^2 = 511 keV = 0,511 MeV e, portanto, o fator de Lorentz é

$$\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1 = \frac{100\,\text{MeV}}{0{,}511\,\text{MeV}} + 1 = 196{,}695.$$

(b) O parâmetro de velocidade é

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{(196{,}695)^2}} = 0{,}999987.$$

Assim, a velocidade do elétron é 0,999987c, ou seja, 99,9987% da velocidade da luz.

APRENDA A expressão clássica da energia cinética, $K = mv^2/2$, só é válida se a velocidade do objeto for muito menor que a velocidade da luz.

42. De acordo com a Eq. 37-50,

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta Mc^2 = -\left[3(4{,}00151\,\text{u}) - 11{,}99671\,\text{u}\right]c^2 = -(0{,}00782\,\text{u})(931{,}5\,\text{MeV/u}) \\ &= -7{,}28\,\text{MeV}. \end{aligned}$$

Assim, a energia mínima necessária para que a reação aconteça é 7,28 MeV. Note que as massas que aparecem no enunciado são as massas dos núcleos envolvidos na reação, e não as massas dos átomos, como em outros problemas deste capítulo.

43. (a) O teorema do trabalho e energia cinética pode ser aplicado tanto na física clássica como na física relativística; a única diferença está na equação usada para calcular a energia cinética. Usando a Eq. 37-52, $W = \Delta K = m_e c^2(\gamma - 1)$, e a relação $m_e c^2$ = 511 keV = 0,511 MeV (Tabela 37-3), obtemos

$$\begin{aligned} W = \Delta K &= m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_f^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}} \right) = (511\,\text{keV}) \left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}19)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}18)^2}} \right] \\ &= 0{,}996\ \text{keV} \approx 1{,}0\ \text{keV}. \end{aligned}$$

(b) Da mesma forma,

$$W = (511\,\text{keV})\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}99)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}98)^2}}\right] = 1055\,\text{keV} \approx 1{,}1\text{ MeV}.$$

Comparando os resultados dos itens (a) e (b), vemos que a dificuldade para acelerar uma partícula aumenta consideravelmente quando a velocidade da partícula se aproxima da velocidade da luz.

44. A variação de massa é

$$\Delta M = \left(4{,}002603\,\text{u} + 15{,}994915\,\text{u}\right) - \left(1{,}007825\,\text{u} + 18{,}998405\,\text{u}\right) = -0{,}008712\,\text{u}.$$

De acordo com as Eqs. 37-50 e 37-46, temos

$$Q = -\Delta M\, c^2 = -(-0{,}008712\,\text{u})(931{,}5\,\text{MeV/u}) = 8{,}12\,\text{MeV}.$$

45. De acordo com a Eq. 37-12, a distância percorrida pelo píon no referencial da Terra é $d = v\Delta t$. O tempo de vida próprio Δt_0 está relacionado a Δt por meio da Eq. 37-9, $\Delta t = \gamma\Delta t_0$. Para determinar o valor de γ, usamos a Eq. 37-48. Como a energia total do píon é dada por $E = 1{,}35 \times 10^5$ MeV e o valor de mc^2 para o píon é 139,6 MeV, temos

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{1{,}35\times 10^5\text{ MeV}}{139{,}6\,\text{MeV}} = 967{,}05.$$

Assim, o tempo de vida do píon medido pelos cientistas é

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0 = (967{,}1)(35{,}0\times 10^{-9}\text{ s}) = 3{,}385\times 10^{-5}\text{ s},$$

a velocidade do píon, de acordo com a Eq. 37-8, é

$$v = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}c = 0{,}9999995c \approx c$$

e a distância percorrida é

$$d \approx c\Delta t = (2{,}998\times 10^8\text{ m/s})(3{,}385\times 10^{-5}\text{ s}) = 1{,}015\times 10^4\text{ m} = 10{,}15\,\text{km} \approx 10\text{ km}.$$

Assim, a altitude na qual o píon decai é 120 km – 10 km = 110 km.

46. (a) Elevando ao quadrado a Eq. 37-47, obtemos

$$E^2 = (mc^2)^2 + 2mc^2K + K^2.$$

Igualando este resultado à Eq. 37-55, obtemos

$$(mc^2)^2 + 2mc^2K + K^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \;\;\Rightarrow\;\; m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}.$$

(b) Em baixas velocidades, podemos usar as expressões clássicas $p = mv$ e $K = mv^2/2$. Como, em baixas velocidades, $pc >> K$, já que $c >> v$, temos

$$m \to \frac{(mvc)^2}{2(mv^2/2)c^2} = m.$$

(c) De acordo com a expressão obtida no item (a), temos

$$m = \frac{121^2 - 55^2}{2(55)c^2} = 105{,}6\,\mathrm{MeV/c^2}.$$

Como, de acordo com a Tabela 37-3, a massa do elétron é m_e = 0,511 MeV/c^2, a massa calculada é aproximadamente 207 vezes maior que a massa do elétron, ou seja, $m/m_e \approx 207$. A partícula é um múon.

47. PENSE De acordo com a teoria da relatividade, a massa deve ser considerada uma forma de energia.

FORMULE A equivalência entre massa e energia é dada pela equação

$$E_0 = mc^2.$$

ANALISE A energia contida em um comprimido de aspirina é

$$E_0 = mc^2 = (320 \times 10^{-6}\ \mathrm{kg})\ (3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2 = 2{,}88 \times 10^{13}\ \mathrm{J},$$

o que equivale a

$$(2{,}88 \times 10^{13}\ \mathrm{J})/(3{,}65 \times 10^7\ \mathrm{J/L}) = 7{,}89 \times 10^5\ \mathrm{L}$$

de gasolina. A distância que um carro pode percorrer com essa energia é

$$d = (7{,}89 \times 10^5\ \mathrm{L})\ (12{,}75\ \mathrm{km/L}) = 1{,}01 \times 10^7\ \mathrm{km}.$$

APRENDA A distância calculada corresponde a aproximadamente 250 vezes a circunferência da Terra (veja o Apêndice C).

48. (a) Podemos usar a Eq. 37-7 para calcular o parâmetro de velocidade:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2{,}20\ \mu\mathrm{s}}{6{,}90\ \mu\mathrm{s}}\right)^2} = 0{,}9478 \approx 0{,}948.$$

(b) De acordo com o resultado do item (a), temos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}9478)^2}} = 3{,}136.$$

Além disso, temos (veja a Tabela 37-3)

$$m_\mu c^2 = 207 m_e c^2 = 105{,}8\ \mathrm{MeV}.$$

Assim, de acordo com a Eq. 37-52,

$$K = m_\mu c^2(\gamma - 1) = (105{,}8\,\mathrm{MeV})(3{,}136 - 1) = 226\,\mathrm{MeV}.$$

(c) De acordo com a Eq. 37-41,

$$p = \gamma m_\mu v = \gamma m_\mu c\beta = (3{,}136)(105{,}8\,\mathrm{MeV}/c)(0{,}9478) = 314\ \mathrm{MeV}/c,$$

que também pode ser expresso em unidades do SI: $p = 1{,}7 \times 10^{-19}$ kg · m/s.

49. (a) De acordo com a Eq. 37-48, temos

$$\gamma = \frac{E}{m_p c^2} = \frac{14{,}24 \times 10^{-9}\ \mathrm{J}}{1{,}5033 \times 10^{-10}\ \mathrm{J}} = 94{,}73.$$

Nesse caso, a Eq. 37-13 nos dá

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{21\text{ cm}}{94,73} = 0,222\text{ cm}.$$

(b) A velocidade do próton é dada por

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = 0,99994c.$$

Assim, no seu referencial, o tempo de percurso é

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{0,21\text{ m}}{(0,99994)(2,998\times 10^8\text{ m/s})} = 7,01\times 10^{-10}\text{ s} = 701\text{ ps}.$$

(c) De acordo com a Eq. 37-9,

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 7,01\times 10^{-10}\text{ s}.$$

Assim, no referencial do próton, o tempo de percurso é

$$\Delta t_0 = 2,22 \times 10^{-3}/0,99994c = 7,40 \times 10^{-12}\text{ s} = 7,40\text{ ps}.$$

50. (a) Para $E_0 = 0,5110$ MeV, o fator de Lorentz é

$$\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1 = \frac{10,00\text{ MeV}}{0,5110\text{ MeV}} + 1 = 20,57.$$

(b) O parâmetro de velocidade é

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{(20,57)^2}} = 0,9988.$$

(c) Para $E_0 = 938,0$ MeV, o fator de Lorentz é

$$\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1 = \frac{10,00\text{ MeV}}{938,0\text{ MeV}} + 1 = 1,01066 \approx 1,011.$$

(d) O parâmetro de velocidade é

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{(1,01066)^2}} = 0,1448.$$

(e) Para $E_0 = 3727$ MeV, o fator de Lorentz é

$$\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1 = \frac{10,00\text{ MeV}}{3727\text{ MeV}} + 1 = 1,00268 \approx 1,003.$$

(f) O parâmetro de velocidade é

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{(1,00268)^2}} = 0,07306 \approx 7,310\times 10^{-2}.$$

51. De acordo com a Eq. 37-55, temos

$$(pc)^2 + (mc^2)^2 = 9{,}00(mc^2)^2,$$

o que nos dá

$$p = mc\sqrt{8} \approx 2{,}83mc.$$

52. (a) De acordo com o teorema binomial, para pequenos valores de x,

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2}.$$

Para aplicar o teorema binomial à equação que define o fator de Lorentz em função do parâmetro de velocidade, Eq. 37-8, fazemos $x = -\beta^2$ e $n = -1/2$, o que nos dá

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3\beta^4}{8}$$

Substituindo γ por este valor na Eq. 37-52, obtemos

$$K \approx \frac{mc^2\beta^2}{2} + \frac{3mc^2\beta^4}{8} = \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2}.$$

(b) Usando a expressão clássica para a energia cinética com o valor de mc^2 para o elétron dado na Tabela 37-3 e $\beta = 1/20$, obtemos

$$K_{\text{clássica}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mc^2\beta^2}{2} = \frac{(8{,}19\times10^{-14}\text{ J})(1/20)^2}{2} = 1{,}0\times10^{-16}\text{ J}.$$

(c) A correção de primeira ordem é

$$K_{\text{primeira ordem}} = \frac{3mv^4}{8c^2} = \frac{3mc^2\beta^4}{8} = \frac{3(8{,}19\times10^{-14}\text{ J})(1/20)^4}{8} = 1{,}9\times10^{-19}\text{ J},$$

muito menor que o resultado clássico.

(d) Neste caso, $\beta = 0{,}80 = 4/5$ e a expressão clássica nos dá

$$K_{\text{clássica}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mc^2\beta^2}{2} = \frac{(8{,}19\times10^{-14}\text{ J})(4/5)^2}{2} = 2{,}6\times10^{-14}\text{ J}.$$

(e) A correção de primeira ordem é

$$K_{\text{primeira ordem}} = \frac{3mv^4}{8c^2} = \frac{3mc^2\beta^4}{8} = \frac{3(8{,}19\times10^{-14}\text{ J})(4/5)^4}{8} = 1{,}3\times10^{-14}\text{ J},$$

da mesma ordem que o resultado clássico. Isso indica que o teorema binomial não pode ser usado no caso de velocidades próximas da velocidade da luz.

(f) Fazendo a correção de primeira ordem igual a 1/10 da aproximação clássica, obtemos

$$\frac{3mc^2\beta^4}{8} = \frac{mc^2\beta^2}{20},$$

o que nos dá

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{15}} \approx 0{,}37.$$

53. Usando a fórmula clássica para o raio da órbita, $r_0 = mv/|q|B$, obtemos

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

(a) No caso de velocidades relativísticas, temos

$$r = \frac{p}{|q|B} = \frac{\gamma mv}{|q|B} = \gamma r_0,$$

o que nos dá

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \gamma\frac{2\pi m}{|q|B} = \gamma T_0.$$

(b) Como γ varia com a velocidade, o período T não é independente de v.

(c) Usando a expressão clássica para a energia cinética do elétron, temos

$$K_{\text{clássica}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(mc^2\right)\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}\left(mc^2\right)\beta^2.$$

Para $K_{\text{clássica}} = 10{,}0$ MeV, a equação anterior nos dá

$$\beta = \sqrt{\frac{2K_{\text{clássica}}}{mc^2}} = \sqrt{\frac{2(10{,}0\,\text{MeV})}{0{,}511\,\text{MeV}}} = 6{,}256,$$

um valor fisicamente impossível, já que o elétron estaria se movendo a uma velocidade muito maior que a velocidade da luz. Se, mesmo assim, usarmos este valor, o raio clássico da órbita será

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{m\beta c}{eB} = \frac{(9{,}11\times10^{-31}\text{ kg})(6{,}256)(2{,}998\times10^{8}\text{ m/s})}{(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})(2{,}20\text{ T})} = 4{,}85\times10^{-3}\text{ m} = 4{,}85\text{ mm}.$$

(d) Antes de usar a expressão relativística para o raio da órbita, precisamos calcular o valor correto de β a partir da expressão relativística da energia cinética:

$$K = mc^2(\gamma - 1) \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{10{,}0\text{ MeV}}{0{,}511\text{ MeV}} + 1 = 20{,}57$$

que nos dá

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(20{,}57)^2}} = 0{,}99882.$$

Assim,

$$\begin{aligned} r &= \frac{\gamma mv}{|q|B} = \frac{\gamma m\beta c}{eB} = \frac{(20{,}57)(9{,}11\times10^{-31}\text{ kg})(0{,}99882)(2{,}998\times10^{8}\text{ m/s})}{(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})(2{,}20\text{ T})} \\ &= 1{,}59\times10^{-2}\text{m} = 15{,}9\text{ mm}. \end{aligned}$$

(e) O período clássico é

$$T = \frac{2\pi r}{\beta c} = \frac{2\pi(4{,}85\times10^{-3}\text{ m})}{(6{,}256)(2{,}998\times10^{8}\text{ m/s})} = 1{,}63\times10^{-11}\text{ s} = 16{,}3\text{ ps}.$$

(f) O período calculado usando expressões relativísticas é

$$T = \frac{2\pi r}{\beta c} = \frac{2\pi(0{,}0159\text{ m})}{(0{,}99882)(2{,}998\times10^{8}\text{ m/s})} = 3{,}34\times10^{-10}\text{ s} = 0{,}334\text{ ns}.$$

54. (a) De acordo com as Eqs. 37-52 e 37-8, temos

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) = 2mc^2,$$

o que nos dá

$$\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}943.$$

(b) De acordo com as Eqs. 37-48 e 37-8, temos

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2mc^2,$$

o que nos dá

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866.$$

55. (a) De acordo com as Eqs. 37-41 e 37-8, temos

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc,$$

o que nos dá

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707.$$

(b) De acordo com a Eq. 37-8, temos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1/2)}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$$

(c) De acordo com a Eq. 37-52, temos

$$K = (\gamma-1)mc^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)mc^2 = 0{,}414mc^2 = 0{,}414E_0,$$

o que nos dá

$$K/E_0 = 0{,}414.$$

56. (a) De acordo com os dados do problema, um quilograma de TNT libera uma energia de $(3{,}40 \times 10^6$ J/mol$)/(0{,}227$ kg/mol$) = 1{,}50 \times 10^7$ J. Assim, seriam necessários

$$(1{,}80 \times 10^{14}\text{ J})/(1{,}50 \times 10^7\text{ J/kg}) = 1{,}20 \times 10^7\text{ kg}$$

de TNT, o que corresponde a um peso de aproximadamente $1{,}2 \times 10^8$ N.

(b) O peso calculado no item (a) é muito maior que o que pode ser carregado em uma mochila. Seria necessário usar um caminhão para transportar uma quantidade tão grande de material.

(c) Como $0{,}00080mc^2 = 1{,}80 \times 10^{14}$ J, seriam necessários $m = 2{,}50$ kg de material físsil, o que corresponde a um peso de aproximadamente 25 N.

(d) O peso calculado no item (c) pode ser carregado facilmente em uma mochila.

57. Como a energia de repouso E_0 e a massa m do quasar estão relacionadas pela equação $E_0 = mc^2$, a potência P irradiada pelo quasar e o consumo de massa obedecem à relação

$$P = \frac{dE_0}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}.$$

Assim,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P}{c^2} = \frac{1\times 10^{41}\text{ W}}{(2{,}998\times 10^8\text{ m/s})^2} = 1{,}11\times 10^{24}\text{ kg/s}.$$

Como uma unidade de massa solar corresponde a $2{,}0 \times 10^{30}$ kg e um ano tem $3{,}156 \times 10^7$ s,

$$\frac{dm}{dt} = \left(1{,}11\times 10^{24}\text{ kg/s}\right)\left(\frac{3{,}156\times 10^7\text{ s/ano}}{2{,}0\times 10^{30}\text{ kg/ums}}\right) \approx 18\text{ ums/ano}.$$

58. (a) De acordo com a Eq. 37-52, temos

$$\gamma = \frac{K}{m_e c^2} + 1 = \frac{1{,}0000000\text{ keV}}{510{,}9989\text{ keV}} + 1 = 1{,}00195695 \approx 1{,}0019570.$$

(b) O parâmetro de velocidade correspondente é

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}0019570)^2}} = 0{,}062469542.$$

(c) De acordo com a Eq. 37-52, temos

$$\gamma = \frac{K}{m_e c^2} + 1 = \frac{1{,}0000000\text{ MeV}}{0{,}5109989\text{ MeV}} + 1 = 2{,}956951375 \approx 2{,}9569514.$$

(d) O parâmetro de velocidade correspondente é

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(2{,}9569514)^2}} = 0{,}94107924.$$

(e) De acordo com a Eq. 37-52, temos

$$\gamma = \frac{K}{m_e c^2} + 1 = \frac{1000{,}0000\text{ MeV}}{0{,}5109989\text{ MeV}} + 1 = 1957{,}951375 \approx 1957{,}9514.$$

(f) O parâmetro de velocidade correspondente é

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1957{,}9514)^2}} = 0{,}99999987.$$

59. (a) Este item pode ser resolvido usando a lei de conservação do momento. Neste caso, a aplicação da lei de conservação do momento leva a duas equações, uma para a componente do momento na direção do movimento da partícula alfa, que vamos chamar de eixo x, e outra para a componente na direção do movimento do próton, que vamos chamar de eixo y. Como a velocidade das partículas é muito menor que a velocidade da luz, podemos usar as expressões clássicas para a energia cinética e o momento, $K = mv^2/2$ e $\vec{p} = m\vec{v}$, respectivamente. Aplicando a lei de conservação do momento às componentes x e y de $\vec{p}$, obtemos

$$m_\alpha v_\alpha = m_{\text{oxi}} v_{\text{oxi},x} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{oxi},x} = \frac{m_\alpha}{m_{\text{oxi}}} v_\alpha \approx \frac{4}{17} v_\alpha$$

$$0 = m_{\text{oxi}} v_{\text{oxi},y} + m_p v_p \quad \Rightarrow \quad v_{\text{oxi},y} = -\frac{m_p}{m_{\text{oxi}}} v_p \approx -\frac{1}{17} v_p.$$

Para completar o cálculo, precisamos calcular a velocidade da partícula alfa e a velocidade do próton a partir das energias cinéticas das duas partículas. Uma forma de fazer isso é escrever a expressão da energia cinética na forma $K = mc^2\beta^2/2$ e calcular o valor de β. No caso do próton, usando para m_pc^2 o valor que aparece na Tabela 37-3, obtemos

$$\beta_p = \sqrt{\frac{2K_p}{m_pc^2}} = \sqrt{\frac{2(4,44\text{ MeV})}{938\text{ MeV}}} = 0,0973.$$

Como este valor corresponde a quase 10% da velocidade da luz, convém verificar se existe necessidade de usar a expressão relativística da energia cinética (Eq. 37-52). Fazendo os cálculos com a expressão relativística, obtemos $\beta_p = 0{,}969$, um valor razoavelmente próximo do obtido usando a expressão clássica. No caso da partícula alfa, usando para m_α o valor que aparece no Apêndice B e para c^2 o valor dado na Eq. 37-46, obtemos

$$m_\alpha c^2 = (4{,}0026\text{ u})(931{,}5\text{ MeV/u}) = 3728\text{ MeV}$$

(um valor ligeiramente maior que o valor correto, pois a massa que aparece no Apêndice B é a massa do átomo de hélio e não a massa do núcleo de hélio; mas a diferença é tão pequena que pode ser desprezada), o que nos dá

$$\beta_\alpha = \sqrt{\frac{2K_\alpha}{m_\alpha c^2}} = \sqrt{\frac{2(7,70\text{ MeV})}{3728\text{ MeV}}} = 0,064.$$

Voltando às componentes da velocidade do núcleo de oxigênio, agora podemos concluir os cálculos:

$$v_{\text{oxi},x} \approx \frac{4}{17} v_\alpha \Rightarrow \beta_{\text{oxi},x} \approx \frac{4}{17}\beta_\alpha = \frac{4}{17}(0,064) = 0,015$$

$$|v_{\text{oxi},y}| \approx \frac{1}{17} v_p \Rightarrow \beta_{\text{oxi},y} \approx \frac{1}{17}\beta_p = \frac{1}{17}(0,097) = 0,0057$$

Assim, com

$$m_{\text{oxi}}c^2 \approx (17\text{ u})(931{,}5\text{ MeV/u}) = 1{,}58 \times 10^4\text{ MeV},$$

temos

$$K_{\text{oxi}} = \frac{1}{2}(m_{\text{oxi}}c^2)(\beta^2_{\text{oxi},x} + \beta^2_{\text{oxi},y}) = \frac{1}{2}(1,58\times 10^4\text{ MeV})(0,015^2 + 0,0057^2)$$
$$\approx 2,08\text{ MeV}.$$

(b) De acordo com as Eqs. 37-50 e 37-46,

$$Q = -(1,007825\text{u} + 16,99914\text{u} - 4,00260\text{u} - 14,00307\text{u})c^2$$
$$= -(0,001295\text{u})(931,5\text{ MeV/u}) \approx -1,21\text{ MeV}.$$

Na verdade, resolvendo primeiro o item (b), seria possível resolver o item (a) de uma forma bem mais simples (e até mais precisa!). De acordo com a Eq. 37-49, temos

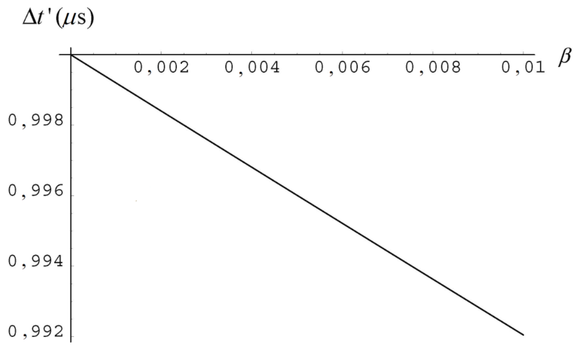
$$K_{\text{oxi}} = K_\alpha + Q - K_p = 7,70\text{MeV} - 1206\text{MeV} - 4,44\text{MeV} = 2,05\text{MeV}.$$

60. (a) De acordo com a Eq. 2′ da Tabela 37-2, temos

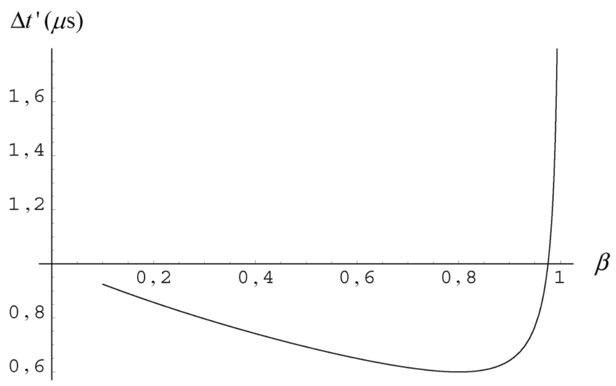
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta\Delta x}{c}\right) = \gamma\left[1{,}00\ \mu\text{s} - \frac{\beta(240\ \text{m})}{2{,}998\times10^8\ \text{m/s}}\right]$$
$$= \gamma(1{,}00 - 0{,}800\beta)\ \mu\text{s},$$

em que γ varia com β (veja a Eq. 37-8).

(b) A figura a seguir mostra o gráfico de $\Delta t'$ em função de β para $0 < \beta < 0{,}01$.



(c) A figura a seguir mostra o gráfico de $\Delta t'$ em função de β para $0{,}1 < \beta < 1$.



(d) Para determinar o valor de β para o qual o valor de $\Delta t'$ é mínimo, derivamos a Eq. 2′ em relação a β e igualamos o resultado a zero. O resultado é

$$\frac{d\Delta t'}{d\beta} = \gamma^3\left(\beta\Delta t - \frac{\Delta x}{c}\right) = 0,$$

o que nos dá

$$\beta = \Delta\ x/c\Delta t = 240/299{,}8 = 0{,}801.$$

(e) Substituindo o valor encontrado no item (d) da expressão do item (a), obtemos o valor mínimo

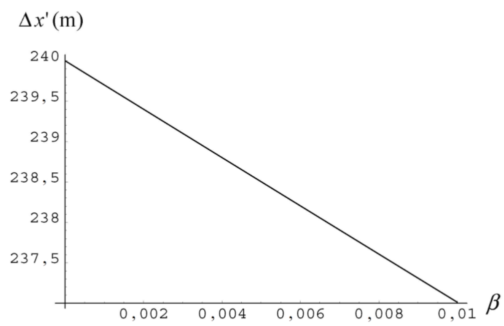
$$\beta t' = 0{,}599\ \mu\text{s}.$$

(f) Sim. Note que, como $\Delta x/\Delta t = 2{,}4\times10^8$ m/s $< c$, um sinal pode se propagar do evento *A* para o evento *B* sem exceder a velocidade da luz; portanto, o evento *A* pode afetar o evento *B*. Em casos como este, dizemos que existe uma "distância temporal" entre os eventos, e é sempre possível encontrar um referencial (no caso presente, um referencial com $\beta \approx 0{,}801$) em que os dois eventos ocorrem na mesma posição, embora em instantes diferentes.

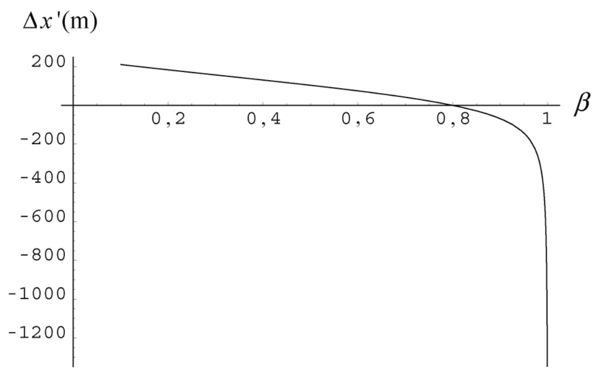
61. (a) De acordo com a Eq. 1′ da Tabela 37-2,

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) = \gamma[240\text{ m} - \beta(299{,}8)\text{ m}].$$

(b) A figura que se segue mostra o gráfico de $\Delta x'$ em função de β para $0 < \beta < 0{,}01$.



(c) A figura a seguir mostra o gráfico de $\Delta x'$ em função de β para $0{,}1 < \beta < 1$.



Vemos que o valor de $\Delta x'$ diminui continuamente a partir do valor que possui para $\beta = 0$ (240 m), atingindo o valor zero para $\beta \approx 0{,}8$ e se tornando negativo para valores maiores de β; isso significa que, para esses valores de β, o valor de $\Delta x'$ para o evento *B* é *menor* que o valor de $\Delta x'$ para o evento *A*!.

(d) Para obter o valor de β para o qual $\Delta x'$ se anula, basta igualar a zero a expressão encontrada no item (a), o que nos dá

$$\beta = \Delta x/c\Delta t = 240/299{,}8 = 0{,}801.$$

62. Observando qual é o valor de u' para $v = 0$ no gráfico da Fig. 37-28*b*, concluímos que $u = -0{,}20c$. Explicitando u' na Eq. 37-29 e substituindo u por esse valor, obtemos

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{-0{,}20c - v}{1 + 0{,}20v/c},$$

que é a equação da curva mostrada na figura.

(a) Para $v = 0{,}80c$, a expressão anterior nos dá $u' = -0{,}86c$.

(b) Como era de se esperar, para $v = c$, a expressão anterior nos dá $u' = -c$.

63. (a) A distância espacial entre os dois clarões é vt. Projetando esta distância na direção perpendicular aos raios luminosos que se dirigem para a Terra, obtemos

$$D_{ap} = vt\ \text{sen}\ \theta.$$

(b) O clarão 1 é emitido t segundos antes do clarão 2. Além disso, o clarão 1 tem que percorrer uma distância adicional L em relação ao clarão 2 para chegar à Terra, em que $L = vt \cos\theta$ (veja a Fig. 37-29); isso requer um tempo adicional $t' = L/c$. Assim, o tempo aparente é dado por

$$T_{\text{ap}} = t - t' = t - \frac{vt\cos\theta}{c} = t\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)\cos\theta\right].$$

(c) Para $v = 0{,}980c$ e $\theta = 30{,}0°$, temos

$$V_{\text{ap}} = \frac{D_{\text{ap}}}{T_{\text{ap}}} = \left[\frac{(v/c)\,\text{sen}\,\theta}{1-(v/c)\cos\theta}\right]c = \left[\frac{(0{,}980)\,\text{sen}\,30{,}0°}{1-(0{,}980)\cos 30{,}0°}\right]c = 3{,}24c.$$

64. A reta do gráfico da Fig. 37-30 é descrita pela Eq. 1 da Tabela 37-2:

$$\Delta x = v\gamma\Delta t' + \gamma\Delta x' = (\text{"inclinação"})\Delta t' + \text{"interseção com o eixo } y\text{"},$$

em que a "inclinação" é (7,0 m)/(10^{-8} s) = $7{,}0 \times 10^8$ m/s. Igualando este valor a $v\gamma$, obtemos

$$v\gamma = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 7{,}0\times 10^8 \text{ m/s},$$

o que nos dá, depois de algumas manipulações algébricas, $v = 2{,}757 \times 10^8$ m/s $\approx 2{,}8 \times 10^8$ m/s e $\gamma = (7{,}0 \times 10^8 \text{ m/s})/v = (7{,}0 \times 10^8 \text{ m/s})/(2{,}757 \times 10^8 \text{ m/s}) \approx 2{,}54$.

$v = 2{,}8 \times 10^8$ m/s e $\gamma = 2{,}54$. Como a "interseção com o eixo y" é 2,0 m, temos

$$\Delta x' = (2{,}0 \text{ m})/\gamma = (2{,}0 \text{ m})/2{,}54 = 0{,}79 \text{ m}.$$

65. Interpretando v_{AB} como a componente x da velocidade de A em relação a B e definindo o parâmetro de velocidade correspondente como $\beta_{AB} = v_{AB}/c$, o resultado pedido no item (a) pode ser obtido facilmente a partir da Eq. 37-29, depois de dividir ambos os membros por c. Para tornar mais clara a correspondência com a Fig. 37-11, podemos chamar de B a partícula de A, o referencial S' (ou um observador em repouso neste referencial), e de C o referencial S (ou um observador em repouso neste referencial). Como a solução do item (b) é menos óbvia, vamos mostrar as transformações algébricas necessárias para chegar ao resultado final.

$$M_{AC} = M_{AB}\cdot M_{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\beta_{AC}}{1+\beta_{AC}} = \frac{1-\beta_{AB}}{1+\beta_{AB}}\cdot\frac{1-\beta_{BC}}{1+\beta_{BC}},$$

o que nos dá

$$(1-\beta_{AC})(1+\beta_{AB})(1+\beta_{BC}) = (1-\beta_{AB})(1-\beta_{BC})(1+\beta_{AC})$$

e, portanto,

$$1-\beta_{AC}+\beta_{AB}+\beta_{BC}-\beta_{AC}\beta_{AB}-\beta_{AC}\beta_{BC}+\beta_{AB}\beta_{BC}-\beta_{AB}\beta_{BC}\beta_{AC} =$$

$$1+\beta_{AC}-\beta_{AB}-\beta_{BC}-\beta_{AC}\beta_{AB}-\beta_{AC}\beta_{BC}+\beta_{AB}\beta_{BC}+\beta_{AB}\beta_{BC}\beta_{AC}$$

Cancelando os termos que aparecem nos dois lados da equação, obtemos

$$-\beta_{AC}+\beta_{AB}+\beta_{BC}-\beta_{AB}\beta_{BC}\beta_{AC} = \beta_{AC}-\beta_{AB}-\beta_{BC}+\beta_{AB}\beta_{BC}\beta_{AC},$$

o que nos dá

$$2\beta_{AB}+2\beta_{BC} = 2\beta_{AC}+2\beta_{AB}\beta_{BC}\beta_{AC}.$$

O lado esquerdo pode ser escrito na forma $2\beta_{AC}(1+\beta_{AB}\beta_{BC})$, o que torna claro como obter o resultado do item (a): basta dividir ambos os membros por $2(1+\beta_{AB}\beta_{BC})$.

66. Notamos, já que se trata de uma simetria óbvia e torna mais fácil a solução do item (b), que

$$M = \frac{1-\beta}{1+\beta} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{1-M}{1+M}.$$

Como $\beta_{AB} = \beta_{BC} = 1/2$, $M_{AB} = M_{BC} = (1 - 1/2)/(1 + 1/2) = 1/3$. Assim,

(a) $M_{AC} = M_{AB} \cdot M_{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$

(b) $\beta_{AC} = \frac{1-M_{AC}}{1+M_{AC}} = \frac{1-1/9}{1+1/9} = \frac{8}{10} = +0{,}80.$

(c) $v_{AC} = 0{,}80c$.

67. Notamos, já que se trata de uma simetria óbvia e torna mais fácil a solução do problema, que

$$M = \frac{1-\beta}{1+\beta} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{1-M}{1+M}$$

Como $\beta_{AB} = 1/5$, $M_{AB} = (1 - 1/5)/(1 + 1/5) = 2/3$; como $\beta_{BC} = -2/5$, $M_{BC} = (1 + 2/5)/(1 - 2/5) = 7/3$; como $\beta_{CD} = 3/5$, $M_{CD} = (1 - 3/5)/(1 + 3/5) = 1/4$. Assim,

$$M_{AD} = M_{AB} M_{BC} M_{CD} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{18}$$

e

$$\beta_{AD} = \frac{1-M_{AD}}{1+M_{AD}} = \frac{1-7/18}{1+7/18} = \frac{11}{25} = 0{,}44,$$

o que nos dá

$$v_{AD} = +0{,}44c.$$

68. (a) De acordo com um passageiro da nave, o tempo de percurso do próton é

$$\Delta t' = (760 \text{ m})/0{,}980c = 2{,}59\ \mu\text{s}.$$

(b) Para calcular o tempo de percurso do ponto de vista de um observador estacionário, usamos a Eq. 2 da Tabela 37-2 com $\Delta x' = -760$ m, o que nos dá

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + 0{,}950c\Delta x'/c^2) = 0{,}572\mu\text{s}.$$

(c) Para um passageiro da nave, o sentido do movimento do próton não faz diferença; o tempo de percurso do próton é o mesmo do item (a), $\Delta t' = 2{,}59\ \mu$s.

(d) No caso de um observador estacionário, usamos a Eq. 2 da Tabela 37-2 com $\Delta x' = +760$ m, o que nos dá

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + 0{,}950c\Delta x'/c^2) = 16{,}0\mu\text{s}.$$

69. (a) De acordo com a Eq. 37-26, o comprimento L_c' da limusine do ponto de vista de Alfredo é

$$L_c' = \frac{L_c}{\gamma} = L_c\sqrt{1-\beta^2} = (30{,}5 \text{ m})\sqrt{1-(0{,}9980)^2} = 1{,}93 \text{ m}.$$

(b) Como o eixo x_g está estacionário em relação à garagem, $x_{g2} = L_g = 6{,}00$ m.

(c) Quanto a t_{g2}, note na Fig. 37-32*b* que, no instante $t_g = t_{g1} = 0$, a coordenada do para-choque dianteiro da limusine está no referencial x_g é L'_c, o que significa que a frente ainda está a uma distância $L_g - L'_c$ da porta traseira da garagem. Como a limusine está se movendo com velocidade v, o tempo que a frente leva para chegar à porta traseira da garagem é dado por

$$\Delta t_g = t_{g2} - t_{g1} = \frac{L_g - L'_c}{v} = \frac{6{,}00 \text{ m} - 1{,}93 \text{ m}}{0{,}9980(2{,}998\times10^8 \text{ m/s})} = 1{,}36\times10^{-8} \text{ s}.$$

Assim,

$$t_{g2} = t_{g1} + \Delta t_g = 0 + 1{,}36 \times 10^{-8} \text{ s} = 1{,}36 \times 10^{-8} \text{ s} = 13{,}6 \text{ ns}.$$

(d) Como a limusine está no interior da garagem entre os instantes t_{g1} e t_{g2}, o tempo de permanência é $t_{g2} - t_{g1} = 13{,}6$ ns.

(e) De acordo com a Eq. 37-13, o comprimento L'_g da garagem, do ponto de vista de Mário, é

$$L'_g = \frac{L_g}{\gamma} = L_g\sqrt{1-\beta^2} = (6{,}00 \text{ m})\sqrt{1-(0{,}9980)^2} = 0{,}379 \text{ m}.$$

(f) Como o eixo x_c está estacionário em relação à limusine, $x_{c2} = L_c = 30{,}5$ m.

(g) Sabemos que no instante $t_c = t_{c2}$ (instante em que acontece o evento 2) a distância entre o para-choque traseiro da limusine e a porta traseira da garagem é dada por $L_c - L'_g$. Como a garagem se move com velocidade v, a porta dianteira da garagem passa pelo para-choque traseiro da limusine após um intervalo de tempo Δt_c dado por

$$\Delta t_c = t_{c1} - t_{c2} = \frac{L_c - L'_g}{v} = \frac{30{,}5 \text{ m} - 0{,}379 \text{ m}}{0{,}9980(2{,}998\times10^8 \text{ m/s})} = 1{,}01\times10^{-7} \text{ s}.$$

Assim,

$$t_{c2} = t_{c1} - \Delta t_c = 0 - 1{,}01 \times 10^{-7} \text{ s} = -1{,}01 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

(h) Do ponto de vista de Mário, a resposta é não.

(i) Do ponto de vista de Mário, o evento 2 acontece primeiro, já que $t_{c2} < t_{c1}$.

(j) Vamos descrever os aspectos importantes dos dois eventos. No instante do evento 2, a frente da limusine coincide com a porta traseira da garagem, e a garagem parece muito curta (talvez não chegue até a janela do banco da frente da limusine). No instante do evento 1, a traseira da limusine coincide com a porta da frente da garagem, e a frente da limusine já ultrapassou em muito a porta traseira da garagem. Em suma, do ponto de vista de Mário, a garagem parece muito curta em comparação com a limusine.

(k) Não, já que a limusine não pode permanecer na garagem com as duas portas fechadas.

(l) Tanto Mário como Alfredo estão corretos em seus respectivos referenciais. Entretanto, se alguém merece perder a aposta, esse alguém é Mário, que parou de estudar física na escola antes de chegar à teoria da relatividade!

70. (a) A contração relativa é

$$\frac{|\Delta L|}{L_0} = \frac{L_0(1-\gamma^{-1})}{L_0} = 1-\sqrt{1-\beta^2} \approx 1-\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right) = \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{630 \text{ m/s}}{3{,}00\times10^8 \text{ m/s}}\right)^2$$
$$= 2{,}21\times10^{-12}.$$

(b) Fazendo $|\Delta t - \Delta t_0| = \Delta t_0(\gamma - 1) = \tau = 1{,}00\,\mu\text{s}$, temos

$$\Delta t_0 = \frac{\tau}{\gamma-1} = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{-1/2}-1} \approx \frac{\tau}{1+\frac{1}{2}\beta^2-1} = \frac{2\tau}{\beta^2} = \frac{2(1{,}00\times10^{-6}\text{ s})(1\text{d}/86.400\text{s})}{[(630\text{m/s})/(2{,}998\times10^8\text{ m/s})]^2}$$
$$= 5{,}25 \text{ d}.$$

71. PENSE Podemos calcular a velocidade relativa dos satélites usando a transformação de Galileu ou a transformação relativística.

FORMULE Seja v a velocidade dos satélites em relação à Terra. Quando os satélites passam um pelo outro movendo-se em sentidos opostos, a velocidade relativa, de acordo com a transformação clássica de Galileu, é $v_{\text{rel},\,c} = 2v$. Por outro lado, usando a transformação relativística de velocidades, obtemos,

$$v_{\text{rel}} = \frac{2v}{1+v^2/c^2}\,.$$

ANALISE (a) Para v = 27.000 km/h, temos

$$v_{\text{rel},\,c} = 2v = 2(27.000\ \text{km/h}) = 5{,}4 \times 10^4\ \text{km/h}.$$

(b) Podemos expressar c em km/h multiplicando o valor em m/s por 3,6, o que nos dá $c = 1{,}08 \times 10^9$ km/h. O erro relativo é

$$\frac{v_{\text{rel},c} - v_{\text{rel}}}{v_{\text{rel},c}} = 1 - \frac{1}{1+v^2/c^2} = 1 - \frac{1}{1+[(27.000\ \text{km/h})/(1{,}08\times10^9\,\text{km/h})]^2} = 6{,}3\times10^{-10}.$$

APRENDA Como a velocidade dos satélites é muito menor que a velocidade da luz, o erro cometido usando a transformação clássica de Galileu é desprezível.

72. Usando $\beta = \dfrac{v}{c} = \dfrac{d/c}{t} = \dfrac{6{,}0\ \text{anos}}{2{,}0\ \text{anos} + 6{,}0\ \text{anos}} = 0{,}75.$

73. PENSE O trabalho realizado para acelerar o próton é igual à variação de energia cinética.

FORMULE A energia cinética do próton é dada pela Eq. 37-52:

$$K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

em que $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ é o fator de Lorentz.

Seja v_1 a velocidade inicial e seja v_2 a velocidade final do próton. O trabalho realizado é

$$W = \Delta K = mc^2(\gamma_2 - 1) - mc^2(\gamma_1 - 1) = mc^2(\gamma_2 - \gamma_1) = mc^2\Delta\gamma.$$

ANALISE Para $\beta_2 = 0{,}9860$, $\gamma_2 = 5{,}9972$, e para $\beta_1 = 0{,}9850$, $\gamma_1 = 5{,}7953$. Assim, $\Delta\gamma = 0{,}202$ e a variação de energia cinética (que é igual ao trabalho) é dada por

$$W = \Delta K = (mc^2)\Delta\gamma = (938\ \text{MeV})(5{,}9972 - 5{,}7953) = 189\ \text{MeV}$$

em que foi usado o valor mc^2 = 938 MeV para a energia de repouso do próton (veja a Tabela 37-3).

APRENDA Se usássemos a expressão clássica $K_c = mv^2/2$ para a energia cinética, teríamos obtido

$$\begin{aligned} W_c = \Delta K_c &= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mc^2(\beta_2^2 - \beta_1^2) = \frac{1}{2}(938\ \text{MeV})\left[(0{,}9860)^2 - (0{,}9850)^2\right] \\ &= 0{,}924\ \text{MeV} \end{aligned}$$

um valor muito menor que o valor correto.

74. Como a vida média do píon no referencial da Terra é $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, a distância percorrida é

$$d = v\Delta t = \gamma v\Delta t_0 = \frac{(0{,}99)(2{,}998\times10^8\ \text{m/s})(26\times10^{-9}\text{s})}{\sqrt{1-(0{,}99)^2}} = 55\,\text{m}.$$

75. PENSE O fato de que o elétron está se aproximando da Terra com uma energia muito maior que a energia de repouso significa que ele está se movendo a uma velocidade próxima da velocidade da luz.

FORMULE A energia do elétron é dada por

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Para E = 1533 MeV e mc^2 = 0,511 MeV (veja a Tabela 37-3), obtemos

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{0{,}511\ \text{MeV}}{1533\ \text{MeV}}\right)^2} = 0{,}99999994c \approx c.$$

Assim, no referencial da Terra, o elétron levou 26 anos para chegar até nós. Para calcular o tempo decorrido no referencial do elétron, precisamos conhecer o fator de Lorentz, que pode ser calculado usando a Eq. 37-48:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{1533\ \text{MeV}}{0{,}511\ \text{MeV}} = 3000$$

embora também seja possível determinar o fator de Lorentz usando a equação

$$\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

ANALISE De acordo com a Eq. 37-7, temos

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{26\ \text{anos}}{3000} = 0{,}0087\ \text{ano}$$

Isso mostra que, do ponto de vista do elétron, a viagem levou apenas 0,0087 ano-luz.

APRENDA No referencial do elétron, a Terra parece estar se aproximando do elétron a uma velocidade de 0,99999994c. Isso faz com que a distância percorrida seja avaliada em apenas 0,0087 ano-luz.

76. A Eq. 37-48 pode ser escrita na forma

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Explicitando β, obtemos

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} = \sqrt{1-\left[\frac{(1{,}672621237\times10^{-27}\ \text{kg})(2{,}99792458\times10^8\ \text{m/s})}{10{,}611\times10^{-9}\ \text{J}}\right]^2} = 0{,}99990.$$

77. A velocidade da espaçonave após o primeiro incremento é v_1 = 0,5c. Após o segundo incremento, passa a ser

$$v_2 = \frac{v' + v_1}{1+v'v_1/c^2} = \frac{0{,}50c+0{,}50c}{1+(0{,}50c)^2/c^2} = 0{,}80c.$$

Após o terceiro incremento, passa a ser

$$v_3 = \frac{v' + v_2}{1+v'v_2/c^2} = \frac{0{,}50c+0{,}50c}{1+(0{,}50c)(0{,}80c)/c^2} = 0{,}929c.$$

Continuando o processo, obtemos

$$v_4 = 0{,}976c,\ v_5 = 0{,}992c,\ v_6 = 0{,}997c \text{ e } v_7 = 0{,}999c.$$

Assim, são necessários sete incrementos.

78. (a) De acordo com a Eq. 37-37,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{1-(\lambda_0/\lambda)^2}{1+(\lambda_0/\lambda)^2}.$$

Para λ_0/λ = 434/462, obtemos β = 0,062439, o que nos dá $v = 1{,}87 \times 10^4$ km/s.

(b) Como o comprimento de onda sofre um desvio "para o vermelho" (para maiores comprimentos de onda), a galáxia está se afastando da Terra.

79. PENSE O fato de que a energia E do elétron é muito maior que a energia de repouso mc^2 significa que ele está se movendo a uma velocidade próxima da velocidade da luz.

FORMULE Para calcular o momento do elétron, usamos a Eq. 37-54:

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2\,.$$

ANALISE Para K = 2,00 MeV e mc^2 = 0,511 MeV (veja a Tabela 37-3), temos

$$pc=\sqrt{K^2+2Kmc^2}=\sqrt{(2{,}00\text{ MeV})^2+2(2{,}00\text{ MeV})(0{,}511\text{ MeV})},$$

o que nos dá p = 2,46 MeV/c.

APRENDA Classicamente, o momento do elétron é

$$p_c=\sqrt{2Km}=\frac{\sqrt{2Kmc^2}}{c}\,\frac{\sqrt{2(2{,}00\text{ MeV})(0{,}511\text{ MeV})}}{c}=1{,}43\text{ MeV}/c.$$

um valor bem menor que o valor correto.

80. De acordo com a Eq. 37-26,

$$\begin{aligned}|\Delta L| &= L_0 - L = L_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)=L_0\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\\ &= 2(6{,}370\times10^6\text{ m})\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{3{,}0\times10^4\text{ m/s}}{2{,}998\times10^8\text{ m/s}}\right)^2}\,\right]\\ &= 0{,}064\text{ m} = 6{,}4\text{ cm}.\end{aligned}$$

81. Vamos chamar de partícula 2 a primeira partícula mencionada no enunciado. Como o momento total das duas partículas é zero no referencial S', as velocidades das duas partículas devem ter o mesmo módulo e sentidos opostos em S'. Chamando de v a velocidade de S' em relação a S, a velocidade no referencial S' da partícula que está em repouso no referencial S é $u_1' = -v$ e a expressão da velocidade da outra partícula pode ser obtida explicitando u' na Eq. 37-29:

$$u_2'=\frac{u_2-v}{1-u_2v/c^2}=\frac{(c/2)-v}{1-(c/2)(v/c^2)}.$$

Fazendo $u_2' = -u_1' = v$, obtemos

$$\frac{(c/2)-v}{1-(c/2)(v/c^2)}=v \quad\Rightarrow\quad v=c(2\pm\sqrt{3})\approx 0{,}27c$$

em que, das duas raízes da equação do segundo grau, foi escolhida a raiz para a qual $v \le c$.

82. (a) Como o tempo de vida da partícula no referencial do laboratório é

$$\Delta t=\frac{L}{v}=\frac{2{,}30\times10^{-4}}{0{,}960\times3{,}00\times10^8}=7{,}99\times10^{-13}\text{ s},$$

o tempo de vida próprio da partícula, de acordo com a Eq. 37-7, é

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-(v/c)^2} = (7{,}99\times10^{-13}\ \text{s})\sqrt{1-(0{,}960)^2} = 2{,}237\times10^{-13}\ \text{s} \approx 2{,}24\times10^{-13}\ \text{s}.$$

(b) A distância percorrida pela partícula no seu referencial de repouso é

$$L_0 = v\Delta t_0 = 0{,}96(3{,}00\times10^8\ \text{m/s})(2{,}237\times10^{-13}\ \text{s}) = 6{,}44\times10^{-5}\ \text{m}.$$

83. (a) De acordo com a Eq. (37-52),

$$K = m_p c^2(\gamma-1) = (938\ \text{MeV})\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}}-1\right] = 5{,}71\ \text{GeV}.$$

(b) De acordo com a Eq. (37-48),

$$E = \gamma m_p c^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}}\right](938\ \text{MeV}) = 6{,}65\ \text{GeV}.$$

(c) De acordo com as Eqs. (37-8) e (37-41),

$$p = \gamma m_p v = \gamma(m_p c^2)\beta/c = \frac{(938\ \text{MeV})(0{,}990)/c}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}} = 6{,}58\ \text{GeV}/c.$$

(d) De acordo com a Eq. (37-52),

$$K = m_e c^2(\gamma-1) = (0{,}511\ \text{MeV})\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}}-1\right] = 3{,}11\ \text{MeV}.$$

(e) De acordo com a Eq. (37-48),

$$E = \gamma m_e c^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}}\right](0{,}511\ \text{MeV}) = 3{,}62\ \text{MeV}.$$

(f) De acordo com as Eqs. (37-8) e (37-41),

$$p = \gamma m_e v = \gamma(m_e c^2)\beta/c = \frac{(0{,}511\text{MeV})(0{,}990)/c}{\sqrt{1-(0{,}990)^2}} = 3{,}59\ \text{MeV}/c\ .$$

84. (a) De acordo com a Eq. 37-7,

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\ .$$

(b) De acordo com a Eq. 37-31,

$$\tau_R = \frac{1}{f_R} = \left(f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)^{-1} = \tau_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \tau_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\ .$$

(c) O efeito Doppler envolve dois diferentes fenômenos: a dilatação do tempo da fonte em movimento *e* a variação do intervalo entre os picos que acontece quando os sinais periódicos emitidos por uma fonte em movimento são captados por um receptor estacionário. Para medir apenas o efeito de dilatação do tempo, é preciso usar medidas "locais", ou seja, comparar as leituras de um relógio em movimento com as de dois relógios do observador estacionário, situados a uma certa distância um do outro, nos instantes em que o relógio móvel passa pelos relógios estacionários.

85. Seja S o referencial no qual a partícula que se aproxima do Polo Sul está em repouso, e seja S' o referencial da Terra. Nesse caso, $v = 0{,}60c$, $u' = 0{,}80c$ (considerando positivo o sentido norte-sul), e a velocidade relativa é a velocidade da partícula que se aproxima do Polo Norte no referencial S:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{0{,}80c + 0{,}60c}{1 + (0{,}80c)(0{,}60c)/c^2} = 0{,}95c.$$

86. (a) $\Delta E = \Delta mc^2 = (3{,}0 \text{ kg})(0{,}0010)(2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 2{,}7 \times 10^{14}$ J.

(b) A massa de TNT é

$$m_{\text{TNT}} = \frac{(2{,}7 \times 10^{14} \text{ J})(0{,}227 \text{ kg/mol})}{3{,}4 \times 10^6 \text{ J}} = 1{,}8 \times 10^7 \text{ kg}.$$

(c) Supondo que a mesma massa do item (a), (3,0 kg)(0,0010), é convertida em energia, a fração da massa convertida em energia no caso do TNT é

$$\frac{\Delta m_{\text{TNT}}}{m_{\text{TNT}}} = \frac{(3{,}0 \text{ kg})(0{,}0010)}{1{,}8 \times 10^7 \text{ kg}} = 1{,}6 \times 10^{-9},$$

o que significa que a fração é $0{,}0010/1{,}6 \times 10^{-9} = 6{,}0 \times 10^6$.

87. (a) Como a expressão clássica da energia cinética é a Eq. 37-51, $E = mv^2/2$, a energia de um elétron que estivesse se movendo à velocidade da luz seria

$$E = m_e c^2/2 = (511 \text{ keV})/2 = 255{,}5 \text{ keV}.$$

Assim, de acordo com a Eq. 24-5, a diferença de potencial necessária para acelerar o elétron até a velocidade da luz seria

$$V = \frac{E}{|q|} = \frac{255{,}5 \text{ keV}}{e} = 255{,}5 \text{ kV} \approx 256 \text{ kV}.$$

(b) Igualando a diferença de potencial calculada no item (a) à expressão relativística da energia cinética, dada pela Eq. 37-52, obtemos

$$V = m_e c^2(\gamma - 1) = m_e c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) \Rightarrow v = c\sqrt{1 + \left(\frac{1}{1 - V/m_e c^2}\right)^2} = 0{,}745c.$$

88. Vamos chamar de u' a velocidade do míssil em relação ao caça e de u e v as velocidades do míssil e do caça em relação ao cruzador, respectivamente. Nesse caso, $u' = 0{,}980$ e $v = -0{,}900c$, já que a velocidade do caça em relação ao cruzador é o negativo da velocidade do cruzador em relação ao caça. De acordo com a fórmula da velocidade relativa (Eq. 37-29), temos

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{0{,}980c - 0{,}900c}{1 - (0{,}980)(0{,}900)} = 0{,}678c.$$

89. (a) Como as espaçonaves A e C estão se aproximando de B com a mesma velocidade (em relação a B), com $v_A > v_B > v_C$, a fórmula relativística da adição de velocidades nos dá $v'_A = -v'_C$, ou seja,

$$\frac{v_A - v_B}{1 - v_A v_B/c^2} = \frac{v_B - v_C}{1 - v_B v_C/c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_A - \beta_B}{1 - \beta_A\beta_B} = \frac{\beta_B - \beta_C}{1 - \beta_B\beta_C},$$

o que equivale a

$$(\beta_A - \beta_B)(1 - \beta_B\beta_C) = (\beta_B - \beta_C)(1 - \beta_A\beta_B).$$

Expandindo e simplificando, obtemos

$$(\beta_A+\beta_C)\beta_B^2-2(1+\beta_A\beta_C)\beta_B+(\beta_A+\beta_C)=0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau para $\beta_A = 0{,}90$ e $\beta_C = 0{,}8$, obtemos $\beta_B = 0{,}858$, ou $v_B = 0{,}858c$.

(b) A velocidade relativa (de A em relação a B, por exemplo) é

$$v_A'=\frac{v_A-v_B}{1-v_Av_B/c^2}=\frac{0{,}90c-0{,}858c}{1-(0{,}90)(0{,}858)}=0{,}185c.$$

90. No referencial da nave A, a nave B está se movendo a uma velocidade de $0{,}900c$ e tem um comprimento igual ao comprimento próprio da nave A, 200 m. O comprimento próprio da nave B é

$$L_{B0}=\gamma L_B=\frac{200\text{ m}}{\sqrt{1-(0{,}900)^2}}=458{,}8\text{ m},$$

e o comprimento da nave A no referencial da nave B é

$$L_A=\frac{L_{A0}}{\gamma}=(200\text{ m})\sqrt{1-(0{,}900)^2}=87{,}2\text{ m}.$$

Assim, de acordo com o piloto da nave B, o tempo que as popas levam para se alinhar depois que as proas se alinham é

$$\Delta t=\frac{L_{B0}-L_A}{v_A}=\frac{458{,}8\text{ m}-87{,}2\text{ m}}{(0{,}90)(3{,}0\times10^8\text{m/s})}=1{,}38\times10^{-6}\text{s}.$$

91. Vamos chamar de v_B a velocidade da nave B em relação à estação espacial. Para que a velocidade da nave A em relação à nave B seja igual a v_B, devemos ter

$$v_A'=\frac{v_A-v_B}{1-v_Av_B/c^2}=v_B.$$

Essa expressão pode ser escrita na forma $v_B^2-(2c^2/v_A)v_B+c^2=0$. Resolvendo a equação do segundo grau para $v_A = 0{,}80c$, obtemos $v_B = 0{,}50c$.

92. (a) Do ponto de vista do trem, o comprimento do túnel é

$$L_{\text{túnel}}=\frac{L_{\text{túnel},0}}{\gamma}=(200\text{ m})\sqrt{1-(0{,}900)^2}=87{,}2\text{ m}.$$

(b) Do ponto de vista do trem, como o túnel parece ser mais curto que o trem, o evento FS ocorre primeiro.

(c) De acordo com um observador a bordo do trem, o intervalo de tempo entre os dois eventos é

$$\Delta t=\frac{L_{\text{trem},0}-L_{\text{túnel}}}{v}=\frac{200\text{ m}-87{,}2\text{ m}}{(0{,}900)(3{,}0\times10^8\text{ m/s})}=0{,}418\ \mu\text{s}.$$

(d) Como o evento FS ocorre primeiro, a bomba de tinta vai explodir.

(e) Do ponto de vista do túnel, o comprimento do trem é

$$L_{\text{trem}}=\frac{L_{\text{trem},0}}{\gamma}=(200\text{ m})\sqrt{1-(0{,}900)^2}=87{,}2\text{ m}.$$

(f) Do ponto de vista do túnel, como o trem parece ser mais curto que o túnel, o evento TE ocorre primeiro.

(g) De acordo com um observador no referencial do túnel, o intervalo de tempo entre os dois eventos é

$$\Delta t = \frac{L_{\text{túnel},0} - L_{\text{trem}}}{v} = \frac{200\text{ m} - 87,2\text{ m}}{(0,900)(3,0\times10^8\text{ m/s})} = 0,418\ \mu\text{s}.$$

(h) A bomba vai explodir. A razão para isso é que devemos levar em consideração o tempo que o sinal para desativar a bomba leva para percorrer toda a extensão do trem, que é

$$\Delta t_{\text{sinal}} = \frac{L_{\text{trem},0}}{v} = \frac{200\text{ m}}{(0,900)(3,0\times10^8\text{ m/s})} = 0,741\ \mu\text{s}.$$

Como esse tempo é maior que o intervalo de tempo entre os dois eventos, a bomba vai explodir.

93. De acordo com a lei de conservação da energia, $E_A = E_B + E_C$. De acordo com a lei de conservação do momento, $p_B = p_C$. De acordo com a Eq. 37-48, $E = \gamma mc^2$, o que nos dá $m_A c^2 = \gamma_B m_B c^2 + \gamma_C m_C c^2$ e, portanto,

$$200 = 100\gamma_B + 50\gamma_C \ \Rightarrow\ 4 = 2\gamma_B + \gamma_C.$$

De acordo com a Eq. 37-41, $p = \gamma mv$ e, portanto,

$$\gamma_B m_B v_B = \gamma_C m_C v_C \ \Rightarrow\ \gamma_B m_B \beta_B = \gamma_C m_C \beta_C.$$

Como $\gamma B = \gamma\sqrt{1-1/\gamma^2} = \sqrt{\gamma^2 - 1}$, a expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{\sqrt{\gamma_B^2 - 1}}{\sqrt{\gamma_C^2 - 1}} = \frac{m_C}{m_B} = \frac{50\text{ MeV}/c^2}{100\text{ MeV}/c^2} = \frac{1}{2},$$

o que nos dá

$$4\gamma_B^2 = \gamma_C^2 + 3.$$

Ficamos, portanto, com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 4 &= 2\gamma_B + \gamma_C \\ 4\gamma_B^2 &= \gamma_C^2 + 3 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos $\gamma_B = 19/16$ e $\gamma_C = 13/8$.

(a) A energia total da partícula B é

$$E_B = \gamma_B m_B c^2 = \left(\frac{19}{16}\right)(100\text{ MeV}) = 119\text{ MeV}.$$

(b) O módulo do momento da partícula B é

$$p_B = \sqrt{\gamma_B^2 - 1}\,\frac{m_B c^2}{c} = \sqrt{(19/16)^2 - 1}\,(100\text{ MeV}/c) = 64,0\text{ MeV}/c.$$

(c) A energia total da partícula C é

$$E_C = \gamma_C m_C c^2 = \left(\frac{13}{8}\right)(50\text{ MeV}) = 81,3\text{ MeV}.$$

(d) O módulo do momento da partícula C é igual ao da partícula B: $p_C = 64,0$ MeV/c.

94. (a) O tempo de percurso na situação 1, do ponto de vista de um observador terrestre, é $\Delta t_1 = 2D/c$.

(b) Na situação 2, $\Delta t_2 = 4D/c$.

(c) Na situação 3, $\Delta t_3 = 6D/c$.

(d) O tempo de percurso na situação 1, no referencial da espaçonave, é

$$\Delta t_1' = \frac{2D'}{c} = \frac{2D}{c\gamma_1} = \frac{2D}{c(10)} = \frac{D}{5c}.$$

(e) Na situação 2,

$$\Delta t_2' = \frac{4D'}{c} = \frac{4D}{c\gamma_2} = \frac{4D}{c(24)} = \frac{D}{6c}.$$

(f) Na situação 3,

$$\Delta t_3' = \frac{6D'}{c} = \frac{6D}{c\gamma_3} = \frac{6D}{c(30)} = \frac{D}{5c}.$$

95. Como o raio r da trajetória é dado por $r = \gamma mvqB$,

$$m = \frac{qBr\sqrt{1-\beta^2}}{v} = \frac{2(1{,}60\times10^{-19}\ \text{C})(1{,}00\ \text{T})(6{,}28\ \text{m})\sqrt{1-(0{,}710)^2}}{(0{,}710)(3{,}00\times10^8\ \text{m/s})} = 6{,}64\times10^{-27}\ \text{kg}.$$

Como 1,00 u = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg, a massa é m = 4,00 u. Isso significa que a partícula contém quatro núcleons. Como são necessários dois prótons para que a partícula tenha uma carga $2e$, a partícula é um núcleo de hélio (também chamado de partícula alfa), com dois prótons e dois nêutrons.

96. Se a energia cinética do elétron é 2,50 MeV = 2500 keV, temos

$$\gamma = \frac{K}{m_e c^2} + 1 = \frac{2500\ \text{keV}}{511\ \text{keV}} + 1 = 5{,}892$$

e

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}9855.$$

Assim, a equação $r = \gamma mvqB$ (com "q" interpretado como $|q|$) nos dá

$$B = \frac{\gamma m_e v}{|q|r} = \frac{\gamma m_e \beta c}{er} = \frac{(5{,}892)(9{,}11\times10^{-31}\ \text{kg})(0{,}9855)(2{,}998\times10^8\ \text{m/s})}{(1{,}6\times10^{-19}\ \text{C})(0{,}030\ \text{m})}$$
$$= 0{,}33\ \text{T}.$$

97. (a) De acordo com a Eq. 37-58 e a Tabela 37-3,

$$\gamma = \frac{K}{m_p c^2} + 1 = \frac{500\times10^3\ \text{MeV}}{938\ \text{MeV}} + 1 = 534\ \text{MeV}.$$

(b) De acordo com a Eq. 37-8,

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}99999825.$$

(c) Para fazer uso do valor de $m_p c^2$ dado na Tabela 37-3, reescrevemos a expressão apresentada no Problema 53 da seguinte forma:

$$r = \frac{\gamma mv}{qB} = \frac{y(m_p c^2)(v/c^2)}{eB} = \frac{\gamma(m_p c^2)\beta}{ecB}.$$

Assim, o módulo do campo magnético é

$$B = \frac{\gamma(m_p c^2)\beta}{ecr} = \frac{(534)(938\,\text{MeV})(0,99999825)}{ec(750\,\text{m})} = \frac{668\times10^6\ \text{eV}}{ec} = \frac{(668\times10^6)e\ \text{V/m}}{ec}$$
$$= \frac{668\times10^6\ \text{V/m}}{c} = \frac{668\times10^6\ \text{V/m}}{3\times10^8\ \text{m/s}} = 2,23\ \text{T}.$$

98. (a) A pulsação medida por um observador terrestre é

$$R = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\gamma\Delta t_0} = \frac{R_0}{\gamma} = (150/\text{min})\sqrt{1-(0,900)^2} = 65,4/\text{min}.$$

(b) De acordo com um observador terrestre, a passada parece mais curta, o tempo parece passar mais devagar, a velocidade observada é

$$v = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_0/\gamma}{\gamma\Delta t_0} = \frac{v_0}{\gamma^2},$$

e a distância coberta pelo astronauta na esteira parece ser

$$d = v\Delta t = \frac{v_0}{\gamma^2}\gamma\Delta t_0 = \frac{v_0\Delta t_0}{\gamma} = \sqrt{1-(0,900)^2}\,(1,0\ \text{m/s})(3600\ \text{s}) = 1570\ \text{m}.$$

99. A frequência recebida é dada por

$$f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

o que nos dá

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = (650\,\text{nm})\sqrt{\frac{1-0,42}{1+0,42}} = 415\ \text{nm}.$$

Isso significa que a luz é azul para um observador terrestre.

100. (a) Usando a equação clássica do efeito Doppler, $f' = vf/(v + v_f)$, obtemos

$$v_f = v\left(\frac{f}{f'}-1\right) = v\left(\frac{\lambda'}{\lambda}-1\right) = c\left(\frac{3\lambda}{\lambda}-1\right) = 2c > c.$$

(b) Explicitando β na Eq. 37-21, $f = f_0\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$, obtemos

$$\beta = \frac{1-(f/f_0)^2}{1+(f/f_0)^2} = \frac{1-(1/3)^2}{1+(1/3)^2} = \frac{8/9}{10/9} = 0,80$$

o que nos dá $v = 0,80c$.

101. (a) De acordo com a Eq. 37-43, a massa necessária é

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{(2,2\times10^{12}\ \text{kWh})(3,6\times10^{12}\ \text{J/kWh})}{(3\times10^8\ \text{m/s})^2} = 88\ \text{kg}.$$

(b) Não, a energia tem o mesmo valor, $2,2 \times 10^{12}$ kWh, independentemente da forma como foi gerada.

102. (a) O tempo que um elétron com uma componente horizontal da velocidade v leva para percorrer uma distância horizontal L é

$$t = \frac{L}{v} = \frac{20\times10^{-2}\,\text{m}}{(0,992)(2,998\times10^8\ \text{m/s})} = 6,72\times10^{-10}\ \text{s}.$$

(b) Durante esse tempo, o elétron cai uma distância vertical

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\left(9{,}8\,\text{m}/\text{s}^2\right)\left(6{,}72\times10^{-10}\,\text{s}\right)^2 = 2{,}2\times10^{-18}\,\text{m}.$$

Essa distância é muito menor que o raio de um próton.

(c) Pode-se concluir que, no caso de partículas que se movem com velocidade próxima da velocidade da luz em um laboratório, a Terra pode ser considerada um referencial inercial para todos os efeitos práticos.

103. Como o parâmetro de velocidade β é igual a v/c,

(a) Para v = 2,5 cm/ano,

$$\beta = \frac{(2{,}5\text{ cm/ano})(0{,}01\text{ m/cm})(1\text{ ano}/3{,}15\times10^7\text{ s})}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 3\times10^{-18}.$$

(b) Para v = 0,5 mm/s,

$$\beta = \frac{(0{,}5\text{ mm/s})(0{,}001\text{ m/mm})}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 2\times10^{-12}.$$

(c) Para v = 90 km/h,

$$\beta = \frac{(90\text{ km/h})(1000\text{ m/km})(1\text{ h}/3600\text{ s})}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 8{,}3\times10^{-8}.$$

(d) Para v = 1920 m/s,

$$\beta = \frac{1920\text{ m/s}}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 6{,}4\times10^{-6}.$$

(e) Para v = 1200 km/h,

$$\beta = \frac{(1200\text{ km/h})(1000\text{ m/km})(1\text{ h}/3600\text{ s})}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 1{,}1\times10^{-6}.$$

(f) Para v = 11,2 km/s,

$$\beta = \frac{(11{,}2\text{ km/s})(1000\text{ m/km})}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 3{,}7\times10^{-5}.$$

(g) Para v = 29,8 km/s,

$$\beta = \frac{(29{,}8\text{ km/s})(1000\text{ m/km})}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 9{,}9\times10^{-5}.$$

(h) Para $v = 3{,}0\times10^4$ km/s,

$$\beta = \frac{(3{,}0\times10^4\text{ km/s})(1000\text{ m/km})}{3{,}0\times10^8\text{ m/s}} = 0{,}10.$$