Capítulo 1

1. Integrais indefinidas - Método de Substituição

Devemos conhecer as <u>primitivas</u> muito bem, antes de começar a integrar funções, visto que a integral se baseia em determinar a anti-derivada do integrando.

Como primeiro exemplo:

$$\int \cos(x)\,dx = sen(x) + C, visto\ que, \qquad \frac{d}{dx}(sen(x) + C) = \cos(x).$$

Além das regras de integração já conhecidas, a ideia para se resolver diversas integrais é sempre além do conhecimento das regras básicas, saber muito bem as <u>relações de derivadas envolvidas</u> com o integrando considerado.

Um exemplo bem didático:

$$\frac{d}{dx}(sen(ax) + C) = \cos(ax)\,.\,a = a.\cos(ax)\,, \qquad "a"\ uma\ constante\ qualquer.$$

Assim a primitiva será:

$$\frac{sen(ax)}{a} + C$$

Sabendo dessa derivada, previamente, fica bem simples resolver a integral:

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{sen(ax)}{a} + C$$

A tarefa de determinar primitivas e, portanto, integrar uma função, de modo geral, <u>não é uma tarefa simples</u>. Na maioria dos casos é <u>impossível</u> determinar a primitiva de uma função, com uma rápida análise, para isso, devemos estudar os métodos gerais de integração.

De modo geral, esses métodos se originam das regras de derivação.

O método de substituição, mudança de variável, é um dos métodos de integração <u>mais poderosos</u>, assim como a definição de força de Newton está para a Física.

<u>Reforçando, tenha sempre em mente as derivadas de diversas funções relacionadas com o integrando.</u>

A integral:

$$\int \cos(ax+b)\,dx$$

Relaciona-se com a integral da função cosseno. E podemos notar que a derivada da função:

$$\frac{d}{dx}[Sen(ax+b)+C] = a.\cos(ax+b)$$

Um forte candidato à troca de variável é:

$$u = ax + b$$

Assim,

$$\cos(ax+b) = \cos(u)$$

Dado que: $du = a.dx$

Assim, poderíamos escrever:

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int a.\cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \cos(u)\,du = \frac{Sen(u)}{a} + C = \frac{Sen(ax+b)}{a} + C$$

Derivando-se a ultima equação, pode se verificar facilmente que o resultado está correto.

1.1 Definição formal do método

De modo geral:

$$\int \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))\mathrm{g}'(\mathrm{x})dx = \int \mathrm{f}(\mathrm{u})du,$$

Onde $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, como será explicado a seguir.

Se F for uma primitiva de f, isto é, F'=f, teremos

$$(F \circ g)'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x).$$

Assim, podemos escrever

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C.$$

Por outro lado,

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Assim, chamando $u = g(x),\ du = g'(x)dx$.

<u>O que se deve ter em mente nesse método é que u=g(x) implica que du=g'(x)dx. Embora seja essa a característica desse método. Ao escolher a função para a substituição, ela deve ser feita pensando-se em sua derivada e se ela realmente vai resolver ou ajudar a resolver a integral.</u>

Exemplo 1 Calcule $\int \quad 2x.e^{x^2}dx$

Solução Por se tratar de uma integral simples, fica fácil perceber que, determinando u=x^2 teremos du=2xdx. Transformando assim a integral em uma integral trivial.
É isso que você tem que ter em mente sempre que for resolver uma integral, seja qual método for.

Assim, u= x^2 e du= 2x dx

$$\int 2x.e^{x^2}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

Exemplo 2 Calcule as integrais abaixo

(a) $\int \quad x^2.e^{x^3}dx$

Solução Observe que $(x^3)'=3x^2$. de posse desse conhecimento prévio. Vamos sugerir a substituição:

u=x^3 e portando du=$3x^2$dx. Assim a integral se torna:

$$\int \frac{e^u}{3}du = \frac{e^u}{3} + C = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

(b) $\int \quad sen(x)\cos(x)dx$

Solução Como temos a função seno e cosseno, podemos escolher u=sen(x) ou u=Cos(x). Optamos por u=sen(x), tendo em vista que du=cos(x)dx. Assim não teríamos que lidar com o sinal negativo da derivada, se escolhêssemos u=cos(x).

$$\int sen(x)\cos(x)dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C$$

Como os exemplos acima mostram, **é impossível** dar uma regra geral dizendo, em cada caso, que substituições devem ser feitas, isto é, como escolher a função *u* de maneira a obter a melhor simplificação.

Por isso, que o estudo de integral é difícil, há a necessidade de um bom conhecimento de derivadas/ primitivas relacionadas com o integrando. Para a escolha de *u*, troca de variável, deve se ter em mente a sua derivada e como está pode ajudar, ou resolver, a integral.

Exemplo 3 A integral $\int \ Sec(x)dx$

Solução Está integral possui um complicador, pois

$$Sec(x) = \ Cos^{-1}(x),$$

Não há uma escolha de *u* de modo direto. Devemos manipular o integrando de forma a inserir algum seno ou alguma relação de *u* e *du*, que nos ajude a resolver a integral.

A primeira vista, não se tem, de forma clara qual a substituição ou manipulação necessária para resolver o integrando.

Diante de um conhecimento de derivadas de algumas funções relacionadas com o integrando, talvez surja alguma ideia de como resolver esta integral.

São elas:

1. $\frac{d}{dx}Cos(x) = -Sen(x)$
2. $\frac{d}{dx}Sen(x) = Cos(x)$
3. $\frac{d}{dx}Sec(x) = Sec(x)Tg(x)$
4. $\frac{d}{dx}Tg(x) = Sec^2(x)$

Observe essa tabela acima, em um pequeno instante, você poderá notar que existe uma relação, que é possível resolver a integral.

Tendo sempre o pensamento não só da escolha da função *u*, mas também da sua derivada *du*.

Note que se eu relacionar as identidades (3) e (4), de forma [3]+[4], vamos obter:

$$[3] + [4] = \frac{d}{dx}Sec(x) + \frac{d}{dx}Tg(x) = Sec(x)Tg(x) + Sec^2(x)$$

Utilizando-se da regra de soma de derivadas

$$\frac{d}{dx}\big(Sec(x) + Tg(x)\big) = Sec(x)Tg(x) + Sec^2(x)$$

E colocando Sec(x) em evidencia, no lado direito da equação acima,

$$\frac{d}{dx}\big(Sec(x) + Tg(x)\big) = Sec(x)\ \big(Tg(x) + Sec(x)\big)$$

Fica claro que a melhor escolha para a troca de variáveis, neste caso é:

$$u = Sec(x) + Tg(x), pois\ \frac{d}{dx}(u) = Sec(x)\ (u) => \frac{du}{u} = Sec(x)\ dx$$

Assim a integral se torna imediata,

$$\int Sec(x)dx = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C = ln|\sec(x) + tg(x)| + C$$

Q.E.D

Exercícios:

Resolva as integrais por substituição.

(a) $\int \ sen(x)Cos^3(x)dx$

(b) $\int \ \frac{cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

(c) $\int \ x\sqrt{x^2+10}dx$

(d) $\int \ \frac{\sqrt{a+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

(e) $\int \ \frac{x^2}{\sqrt{x^3+a}}dx$

(f) $\int \ \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(g) $\int \ \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(h) $\int \ \cos(x)\ sen^5(x)dx$

(i) $\int \ \frac{2+3x}{\sqrt{1+4x+3x^2}}dx$