Prof. Rafael Clarim - Cálculo III

Integrais Múltiplas

Questão 1: Resolva as integrais duplas abaixo.

(a) $\int\int ysen(xy)dxdy$; $0 \leq x \leq 1$ e $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$

(b) $\int\int xydxdy$; $0 \leq x \leq 1$ e $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$

(c) $\int\int \frac{x}{1+y^2}dxdy$; $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$

(d) $\int\int xdxdy$; $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq x^2$

(e) $\int\int \frac{x}{y}dxdy$; $1 \leq x \leq 2$ e $x \leq y \leq 2x$

(f) $\int\int(x+2)dxdy$; $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$

(g) $\int\int dxdy$; $0 \leq x \leq 2$ e $x^3 \leq y \leq 4x$

(h) $\int\int dxdy$; $y^2 \leq x \leq (2-y)$ e $0 \leq y \leq 1$

(i) $\int\int ydxdy$; $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq x^2$

(j) $\int\int dxdy$; $2 \leq x \leq 4$ e $2 \leq y \leq 6$

(l) $\int\int cos(x)sen(y)dxdy$; $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq y \leq \pi$

Questão 2: Resolva as integrais triplas abaixo.

(a) $\int\int\int xyz^2dxdydz$; $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ e $1 \leq z \leq 3$

(b) $\int\int\int(x^2+2yz)dxdydz$; $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ e $0 \leq z \leq x+y$

(c) $\int\int\int xyzdxdydz$; $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$ e $0 \leq z \leq 3$

(d) $\int\int\int sen(x+y+z)dxdydz$; $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ e $0 \leq z \leq \pi$

(e) $\int\int\int(x^2+y^2+z^2+xyz)dxdydz$; $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$

(f) $\int\int\int \frac{sen(2z)}{4-z}dydzdx$; $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq x \leq \sqrt{4-z}$

(g) $\int\int\int x^2y^2z^2dxdydz$; $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ e $-1 \leq z \leq 1$

Questão 3: Com base no seu conhecimento sobre mudanças de coordenadas, responda o que se pede.

(a) O Jacobiano da mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares;

(b) O Jacobiano da mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas;

(c) O Jacobiano da mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas;

(d) A área de um semicírculo de raio 1 (Atenção com os limites de integração utilizados);

(e) O volume de um cilíndro de raio 2 e altura 2(Atenção com os limites de integração utilizados);

(f) O volume de uma esfera de raio 1 (Atenção com os limites de integração utilizados);

(g) $\int\int(x^2+y^2)dxdy$; $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$;

(h) $\int\int\int(x^2+y^2)dxdydz$; $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 2$;

(i) $\int\int\int(x^2+y^2+z^2)dxdydz$; $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$

Funções Vetoriais e Curvas Parametrizadas

Questão 4: Obtenha uma parametrização das seguintes curvas, determinando I.

(a) $y = 2x + 7$

(b) $y - x + 2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 = 16$

(d) $y = tan^2(x)$

(e) $y = \ln(x)$

(f) $9x^2 + 4y^2 = 36$

(g) Reta ligando os pontos $(1, 1)$ e $(4, 3)$

(h) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

(i) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

(j) $x^2 + y = 1$

(k) $x^2 + y^2 - y = 0$

Questão 5: Obtenha as equações cartesianas das seguintes curvas parametrizadas.

(a) $x(t) = a(1 - t)$, $y(t) = bt$

(b) $x(t) = a\sec(t)$, $y(t) = a\tan(t)$

(c) $x(t) = 2\tan(t)$, $y(t) = 3\cot(t)$

(d) $x(t) = 2t + 2$, $y(t) = 2t^2 + 4t$

(e) $x(t) = 2(1 + \cos(t))$, $y(t) = 2\sin(t)$

(f) $x(t) = \sin^4(t)$, $y(t) = \cos^4(t)$

(g) $x(t) = \frac{2at}{1+t^2}$, $y(t) = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(h) $x(t) = 2\sin(t) - 3\cos(t)$,
$y(t) = 4\sin(t) + 2\cos(t)$

(i) $x(t) = a\sin(t)$, $y(t) = b\tan(t)$

(j) $x(t) = \sin(\frac{t}{2})$, $y(t) = \cos(t)$

Dica: Sempre busque uma identidade que elimine as funções trigonométricas.

Vetor e Reta Tangentes

Questão 6: Obtenha o **vetor tangente** à curva.

(a) $x(t) = a(1 - t)$, $y(t) = bt$

(b) $x(t) = a\sec(t)$, $y(t) = a\tan(t)$

(c) $x(t) = 2\tan(t)$, $y(t) = 3\cot(t)$

(d) $x(t) = 2t + 2$, $y(t) = 2t^2 + 4t$

(e) $x(t) = 2(1 + \cos(t))$, $y(t) = 2\sin(t)$

(f) $x(t) = \sin^4(t)$, $y(t) = \cos^4(t)$

(g) $x(t) = \frac{2at}{1+t^2}$, $y(t) = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(h) $x(t) = a\sin(t) + b\tan(t)$

(i) $x(t) = 2\sin(t) - 3\cos(t)$,
$y(t) = 4\sin(t) + 2\cos(t)$

Questão 7: Obtenha as equações paramétricas da **reta tangente** à curva no ponto P_0.

(a) $\sigma(t) = (t, 1-t^2, 2)$, $P_0 = (0,1,2)$

(b) $\sigma(t) = (2t^3 - 1, 3 - 5t^2, 8t + 2)$, $P_0 = (1, -2, 10)$

(c) $\sigma(t) = (e^t, te^t, t + 4)$, $P_0 = (1, 0, 4)$

(d) $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), 1 - 2\sin(t))$, $P_0 = (-1, 0, 1)$

(e) $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$, $P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

Dica: Obtenha o valor t_0 que corresponde ao ponto P_0. Obtenha o vetor tangente $\sigma'(t)$ e calcule-o no ponto P_0. Uma vez que $\sigma'(t_0)$ é o vetor tangente à reta em P_0, $V = \sigma'(t_0)$ é o vetor diretor e a reta é dada por $r(t) = \sigma(t_0) + tV, t \in \mathbb{R}$.

Funções vetoriais de classe C^1 e regulares

Uma função vetorial $\sigma(t)$ é de **classe** C^1 se é diferenciável ($\sigma'(t)$ existe para todo $t \in I$) e se $\sigma'(t)$ é **contínua** em I. Por sua vez, uma função vetorial $\sigma(t)$ de classe C^1 é dita regular quando $\sigma'(t)$=0.

Questão 8: Seja $\mathcal{C}$ a curva definida pelas equações $x = t^3$ e $y = t^6$, $t \in [-1, 1]$

a) A curva é de classe C^1?

b) A curva é regular?

c) Elimine o parâmetro e esboce o traço da curva.

Questão 9: Seja

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se} \quad t > 0 \\ 0, & \text{se} \quad t = 0 \\ -t^2, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

e considere a curva definida por

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = t^2, t \in [-1, 1] \end{cases}$$

a) A curva é de classe C^1?

b) A curva é regular?

c) Elimine o parâmetro e esboce o traço da curva.

Norma e Produto Escalar

Questão 10: Seja a função vetorial $\sigma(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1)$, mostre que o ângulo entre $\sigma(t)$ e $\sigma(t)'$ é independente de t.

Comentário: Analogamente aos vetores, o produto escalar entre duas funções vetoriais $\sigma(t)$ e $\lambda(t)$ é dado por $\sigma(t) \cdot \lambda(t) = ||\sigma(t)||.||\lambda(t)|| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\sigma(t)$ e $\lambda(t)$.

Questão 11: Verifique que se $\sigma(t)$ é a parametrização de uma reta, então $\sigma'(t)$ é perpendicular a $\sigma''(t)$.

Dica: Escreva a equação cartesiana da reta e escolha uma parametrização qualquer.

Comprimento de Arco

Questão 12: Obtenha o comprimento das seguintes curvas.

(a) $\sigma(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$, $t \in [0, 2]$.

(b) $\sigma(t) = (a(\cos t + t \sin t),\ a(\sin t - t \cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

(c) $\sigma(t) = (\sin t, t,\ 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(d) $\sigma(t) = (t,\ 3t^2,\ 6t^3)$, $t \in [0, 2]$.

(e) $\sigma(t) = (t,\ \ln(\sec t),\ \ln(\sec t + \tan t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Questão 13: Uma partícula se move ao longe de uma curva definida por $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Determine os instantes $t_1,\ t_2 \in [0, 2\pi]$ onde $v(t) = 1$.

(b) Calcule o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo $[t_1,\ t_2]$.

Questão 14: Seja a reta $y = 2x + 7$.

(a) Obtenha duas parametrizações para a reta.

(b) Obtenha o comprimento da curva entre os pontos $(-1, 5)$ e $(1, 9)$ para as duas parametrizações.

(c) O que se conclui a respeito das diferentes parametrizações? Este é um resultado geral?

Gabarito

Questão 1:

(a)	$\frac{3\pi}{2}$;	(g)	4 ;
(b)	$\frac{15}{32}$;	(h)	$\frac{7}{6}$;
(c)	$\frac{3\pi}{8}$;	(i)	$\frac{16}{5}$;
(d)	$\frac{1}{4}$;	(j)	8
(e)	$\frac{3}{2}ln(2)$;	(l)	4
(f)	5 ;		

Questão 2:

(a) $\frac{26}{3}$;

(b) $\frac{46}{15}$;

(c) $\frac{27}{8}$;

(d) -8;

(e) $\frac{9}{8}$;

(f) $\frac{1-cos(8)}{4}$;

(g) $\frac{8}{27}$

Questão 3:

(a) r

(b) r ;

(c) $rsen(\phi)$;

(d) $\frac{\pi}{2}$;

(e) 8π ;

(f) $\frac{4\pi}{3}$;

(g) 6π

(h) 16π

(i) $\frac{4\pi}{5}$

Questão 4:

(a) $x = t,\ y = 2t + 7;\ t \in \mathbb{R}$

(b) $x = t - 2,\ y = t;\ t \in \mathbb{R}$

(c) $x = 4\cos(t),\ y = 4\sin(t);\ t \in [0, 2\pi]$

(d) $x = t,\ y = \tan^2(t);$

$t \in \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\ \left(n + \frac{3}{2}\right)\pi\right),\ n \in \mathbb{Z}$

(e) $x = t^2,\ y = 2\ln(t);\ t > 0$

(f) $x = 2\cos(t),\ y = 3\sin(t);\ t \in [0, 2\pi]$

(g) $x = 3t + 1,\ y = 2t + 1;\ t \in [0, 1]$

(h) $x = 1 + \cos(t),\ y = 2 + \sin(t);$

$t \in [0, 2\pi]$

(i) $x = -1 + 2\cos(t),\ y = 1 + 2\sin(t);$

$t \in [0, 2\pi]$

(j) $x = t,\ y = 1 - t^2;\ t \in \mathbb{R}$

(l) $x = \frac{\cos(t)}{2},\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sin(t)}{2};\ t \in [0, 2\pi]$

Questão 5:

(a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

(b) $x^2 - y^2 = a^2$

(c) $xy = 6$

(d) $x^2 = 2y + 4$

(e) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

(f) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

(g) $x^2 + y^2 = a^2$

(h) $20x^2 - 4xy + 13y^2 = 256,$

(i) $x^2y^2 + b^2x^2 = a^2y^2$

(j) $2x^2 + y = 1$

Questão 6:

(a) $x(t) = -a,\ y(t) = b$

(b) $x(t) = a\sec(t)\tan(t),\ y(t) = a\sec^2(t)$

(c) $x(t) = 2\sec^2(t),\ y(t) = -3\csc^2(t)$

(d) $x(t) = 2,\ y(t) = 4t + 4$

(e) $x(t) = -2\sin(t),\ y(t) = 2\cos(t)$

(f) $x(t) = 4\cos(t)\sin^3(t),\ y(t) = -4\sin(t)\cos^3(t)$

(g) $x(t) = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2},\ y(t) = -\frac{4at}{1+t^2}$

(h) $x(t) = a\cos(t),\ y(t) = b\sec^2(t)$

(i) $x(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t),$

$y(t) = 4\cos(t) - 2\sin(t)$

Questão 7:

(a) $(x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, 0, 0)$

(b) $(x, y, z) = (1, -2, 10) + t(6, -10, 8)$

(c) $(x, y, z) = (1, 0, 4) + t(1, 1, 1)$

(d) $(x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(0, -1, 2)$

(e) $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) + t\left(1, 1, \frac{3}{4}\right)$

Questão 8: (a) Sim, (b) Não, (c) $y = x^2$.

Questão 9: (a) Sim, (b) Não, (c) $y = |x|$.

Questão 12:

(a) $\sqrt{2}(e^2 - 1)$.

(b) $2\pi^2 a$.

(c) $2\sqrt{2}\pi$.

(d) 50.

(e) $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

Questão 13: (a) $t_1 = \frac{\pi}{3},\ t_2 = \frac{5\pi}{3}$, (b) $4\sqrt{3}$.

Questão 14: (b) $2\sqrt{5}$, (c) O comprimento de arco é o mesmo independente da parametrização escolhida para qualquer curva.