Teoria dos Grafos

Grafos e Subgrafos

versão 2.2

Prof. DSc. Fabiano Oliveira
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

Definições Básicas

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G = (V, E) é um ***grafo*** se V é um conjunto de elementos (cada elemento é chamado ***vértice***) e E é uma família de pares não-ordenados de vértices (cada par é chamado ***aresta***)

  - Se G é um grafo, denotamos o conjunto de vértices de G por V(G) e o de arestas por E(G)

  - Um par (a, b) não-ordenado pode ser denotado por ab

Grafos e Subgrafos

- Ex.:
  - $G_1 = (V_1, E_1)$
    $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$
    $E_1 = \{aa, ab, bc, bd, cd, dc, ee, ce, cf, de, df, fd, fe\}$

  - $G_2 = (V_2, E_2)$
    $V_2 = \mathbb{N}$
    $E_2 = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = bk \text{ ou } b = ak, \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \}$

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um grafo G é ***finito*** se V(G) e E(G) são conjuntos finitos

  - Ex (slide anterior):

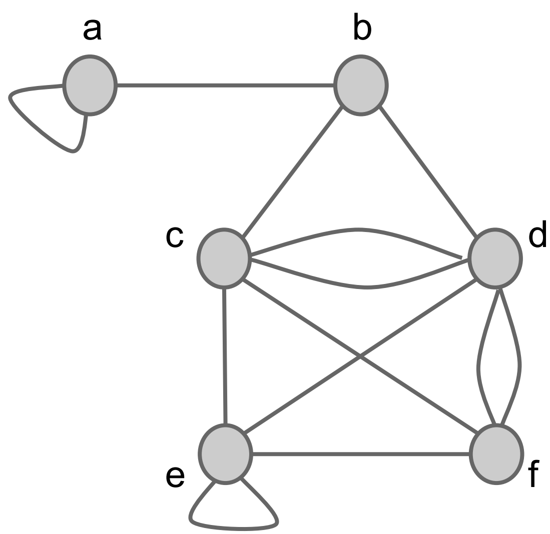
    G_1 é finito

    G_2 é infinito

Grafos e Subgrafos

- Uma representação usual de grafos finitos é através de um gráfico onde um vértice $v \in V(G)$ é representado por um círculo rotulado como “v” e uma aresta $uv \in E(G)$ por um segmento de linha com extremidades nas representações dos vértices u e v

Grafos e Subgrafos

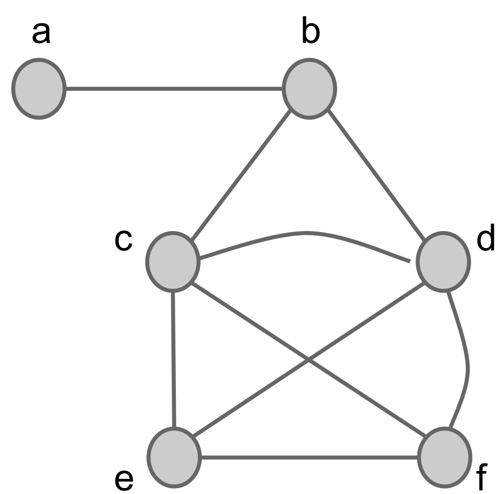


Representação de G_1 (slides anteriores)

- Note que um grafo possui infinitas representações!

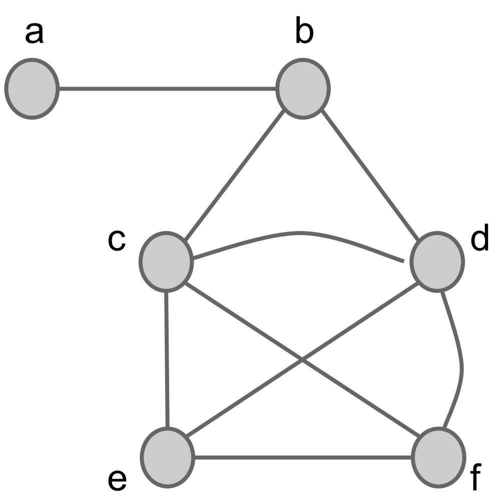
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G = (V, E) é um grafo ***simples*** se não existem nem ***laços*** (aa ∈ E(G)), nem ***multiarestas*** (ab, ab ∈ E(G))



Grafos e Subgrafos

- **Def.:** ab ∈ E(G) é ***incidente*** a a, b (e somente a estes vértices)



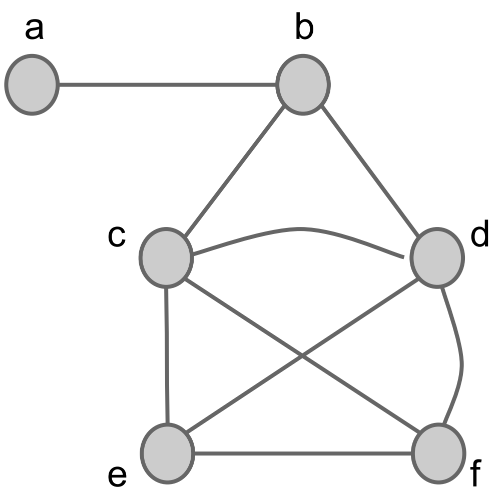
ab é incidente a a, b

bc é incidente a b, c

de não é incidente a a

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** a, b $\in$ V(G) são ***adjacentes*** se ab $\in$ E(G)

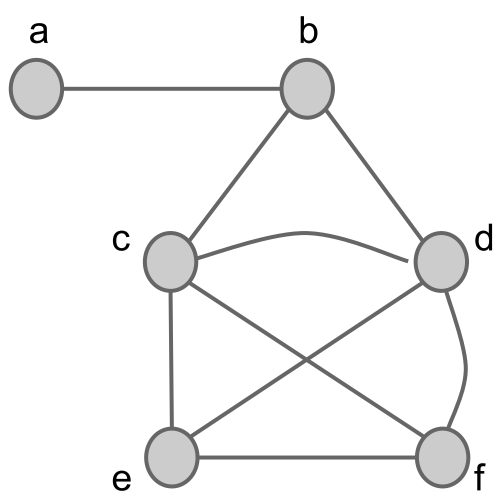


a e b são adjacentes

b e f não são adjacentes

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Se G é um grafo finito, e nada contrário for dito, ***n*** representa o número de vértices do grafo e ***m*** o seu número de arestas (ou seja, $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$)

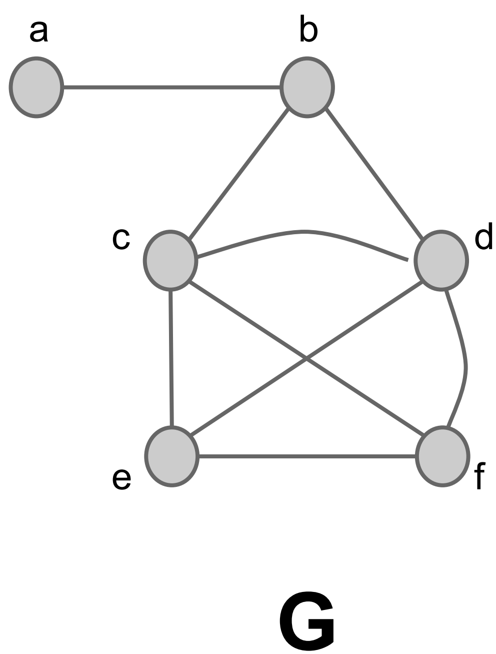


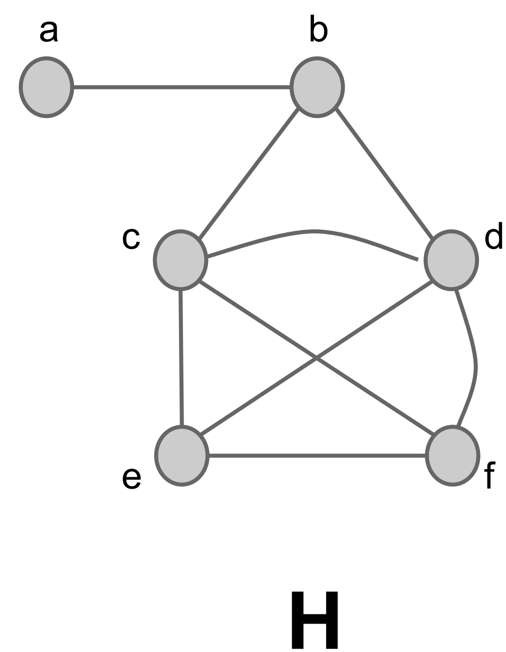
$n = 6, m = 9$

Exercício:
qual a relação geral entre n e m para grafos simples?

Grafos e Subgrafos

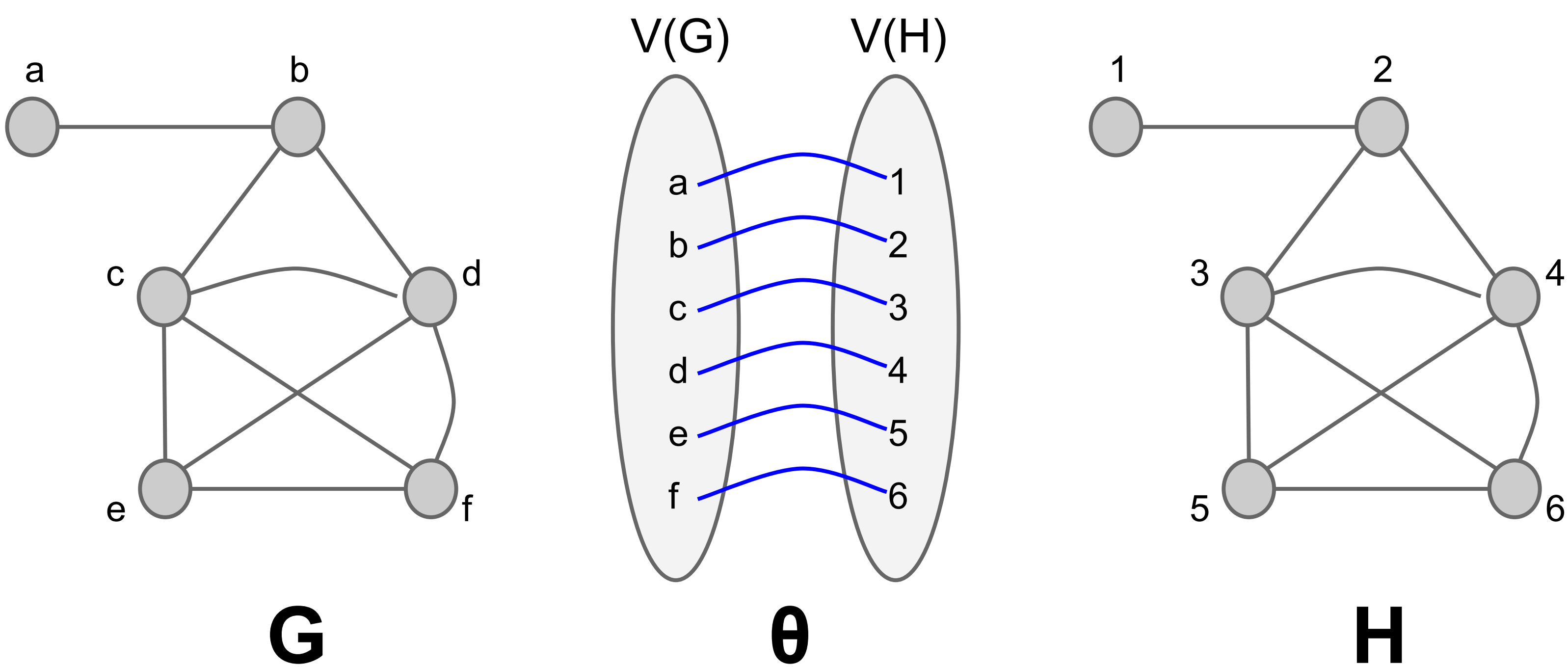
- **Def.:** G e H são **idênticos** (**G = H**) se V(G) = V(H) e E(G) = E(H)





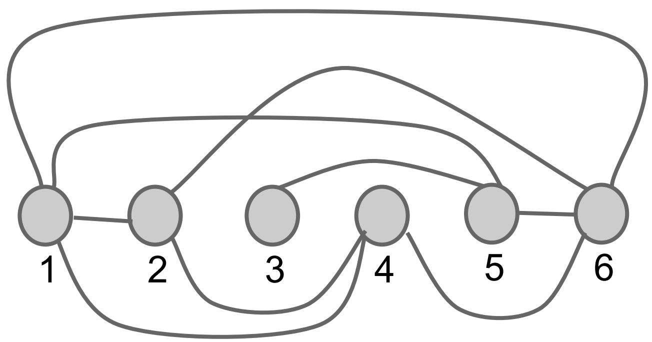
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G e H são **isomorfos** (**G ≅ H**) se existir bijeção θ: V(G) → V(H) tal que uv ∈ E(G) ⇔ θ(u)θ(v) ∈ E(H)

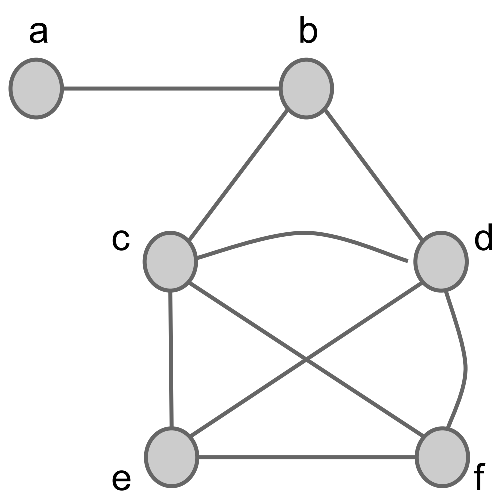


Grafos e Subgrafos

H



G



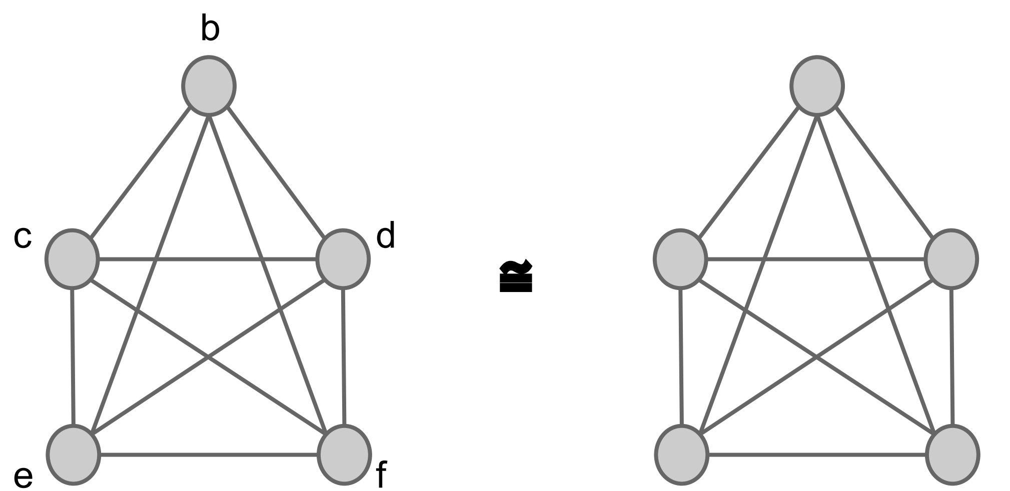
G ≠ H, mas G ≅ H

Exercício:
Encontre a bijeção que comprova o isomorfismo

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** um grafo simples G é ***completo*** se uv $\in$ E(G) para todo u, v $\in$ V(G) distintos

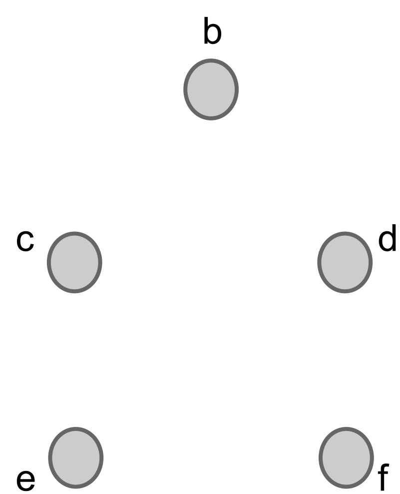
- **Def.:** $\boldsymbol{K_n}$ é um grafo completo com n vértices



K_5

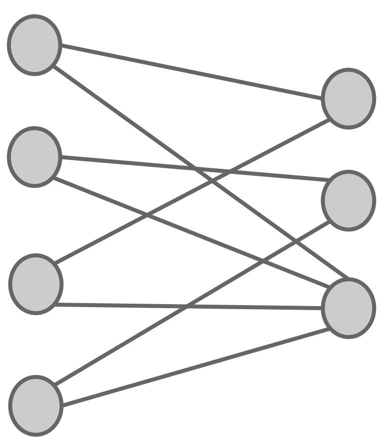
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G é um grafo ***vazio*** se $E(G) = \varnothing$

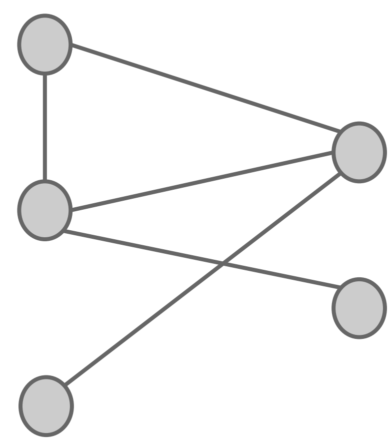


Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G é um grafo ***bipartido*** se $V(G) = X \cup Y$, com $X \cap Y = \varnothing$, tal que $uv \notin E(G)$ para todo $u, v \in X$ e $uv \notin E(G)$ para todo $u, v \in Y$



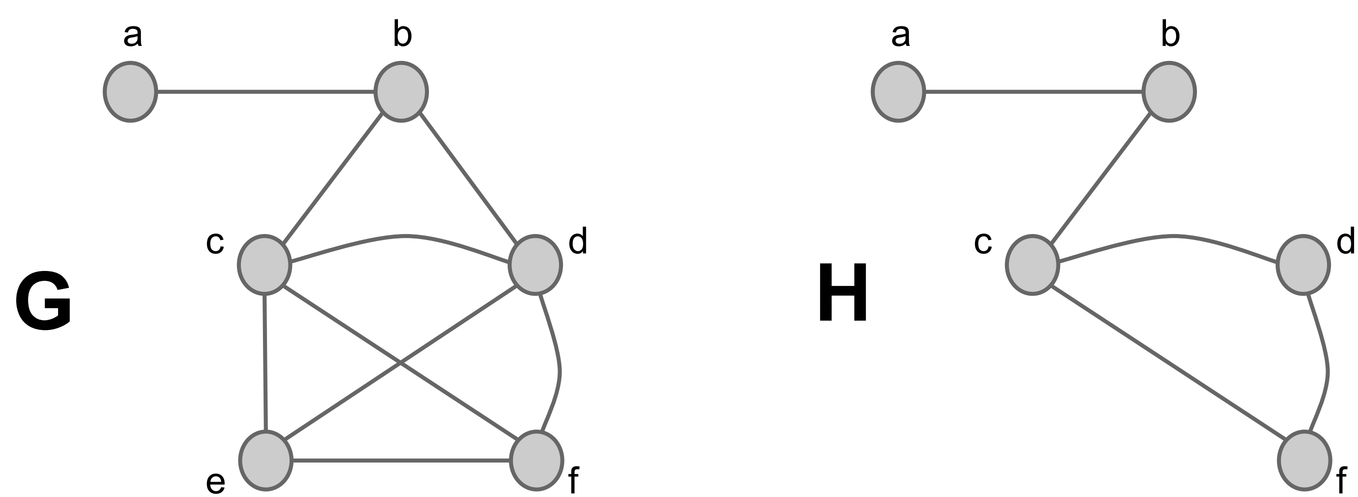
bipartido



não bipartido

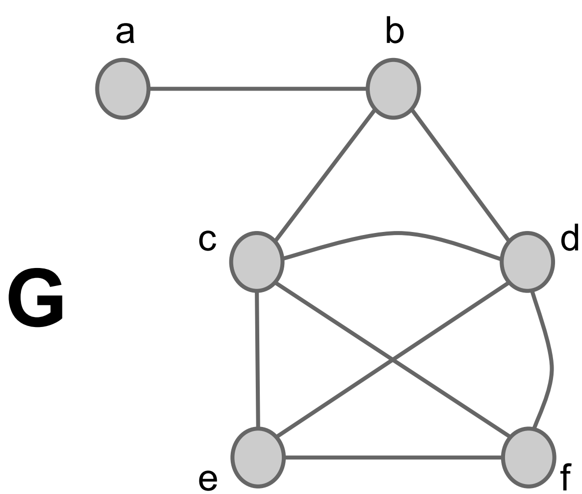
Grafos e Subgrafos

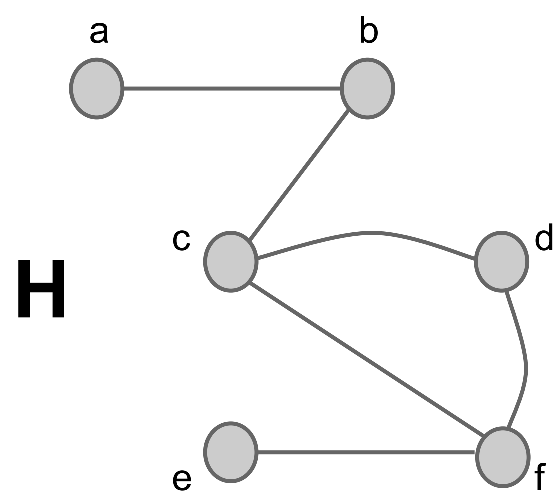
- **Def.:** H é um ***subgrafo*** de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. H é subgrafo ***próprio*** de G se $V(H) \subset V(G)$ ou $E(H) \subset E(G)$.
- **Def.:** Se H é um subgrafo de G, então G é um ***supergrafo*** de H



Grafos e Subgrafos

- **Def.:** H é um subgrafo ***gerador*** de G se é um subgrafo de G tal que V(H) = V(G)

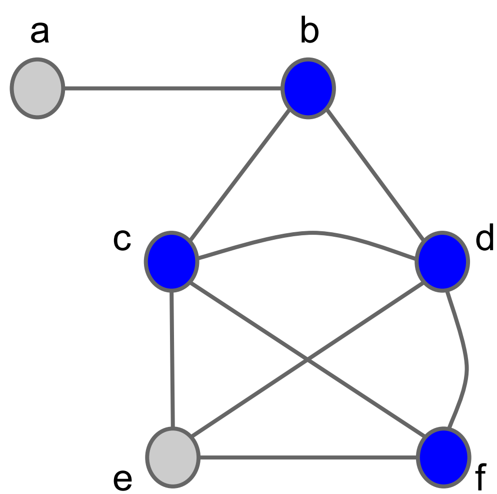




Grafos e Subgrafos

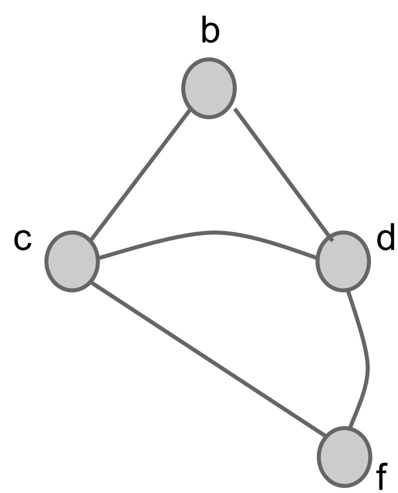
- **Def.:** O subgrafo ***induzido*** de G ***por V, V ⊆ V (G)***, denotado por ***G[V]***, é o subgrafo H de G tal que V(H) = V e para todo u, v ∈ V, uv ∈ E(H) ⇔ uv ∈ E(G)

G



V = {b, c, d, f}

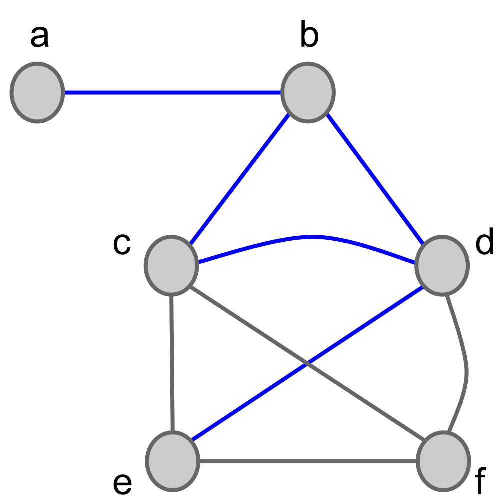
G[V]



Grafos e Subgrafos

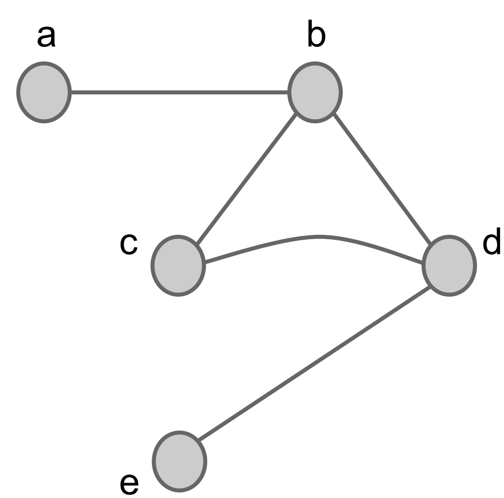
- **Def.:** O subgrafo ***induzido*** de G ***por E, E ⊆ E (G)***, denotado por ***G[E]***, é o subgrafo H de G tal que E(H) = E e não existe vértice sem aresta incidente em H

G



E = {ab, bc, bd, cd, de}

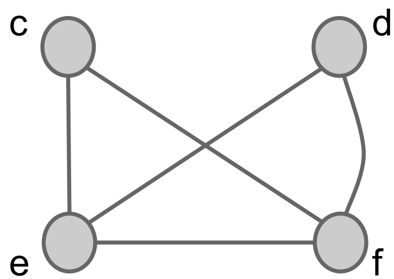
G[E]



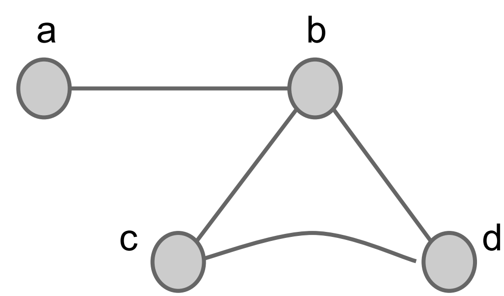
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G e H são ***disjuntos em arestas*** se $E(G) \cap E(H) = \varnothing$

G

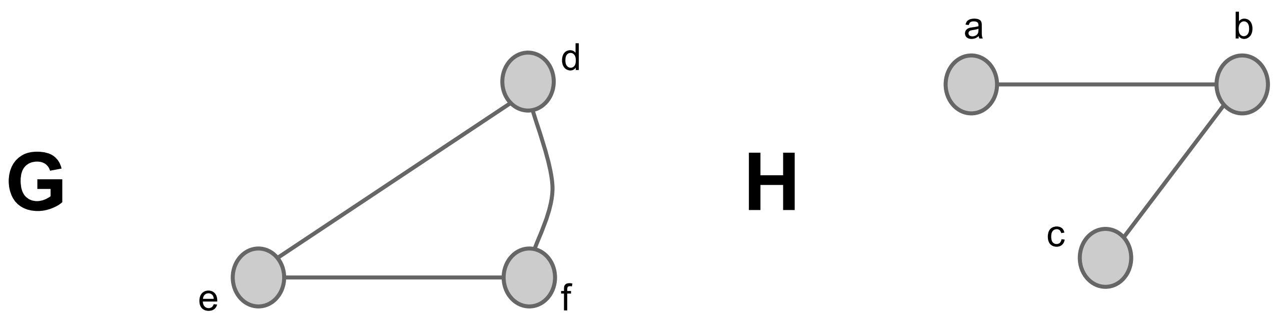


H



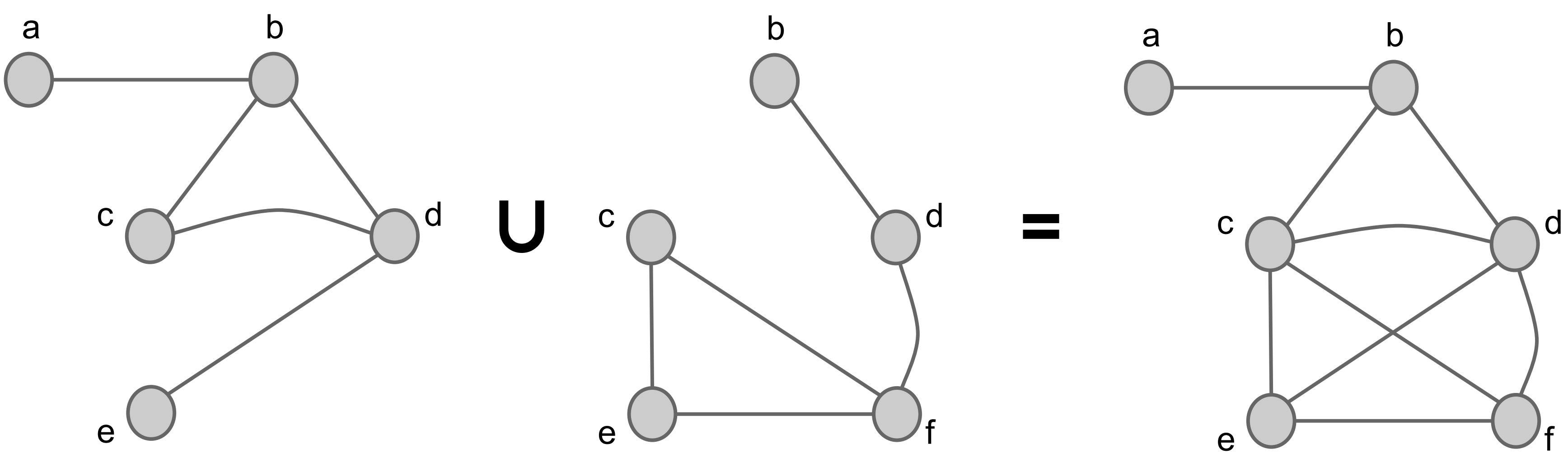
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G e H são ***disjuntos em vértices*** se V(G) ∩ V(H) = ∅



Grafos e Subgrafos

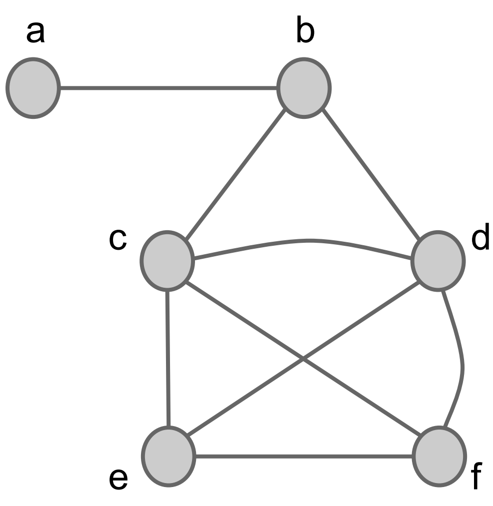
- **Def.:** A ***união G U H*** de dois grafos é o grafo J tal que V(J) = V(G) ∪ V(H) e E(J) = E(G) ∪ E (H)



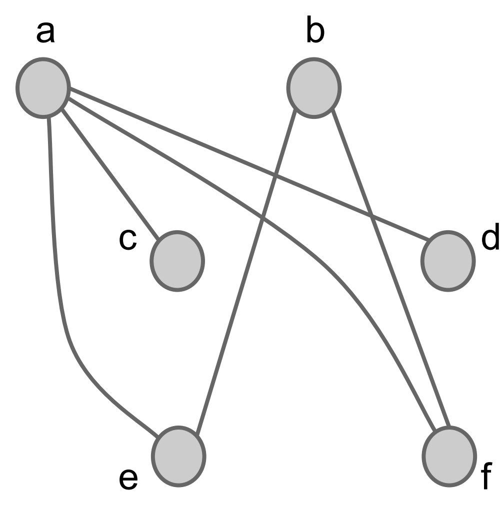
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** O ***complemento*** de um grafo G, denotado por $\mathbf{G^c}$, é tal que $V(G^c) = V(G)$ e $E(G^c) = \{ uv : u, v \in V(G) \mid u \neq v \text{ e } uv \notin E(G) \}$

G



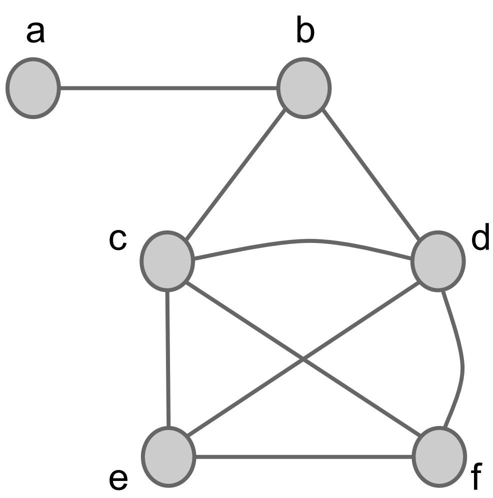
$\mathbf{G^c}$



Grafos e Subgrafos

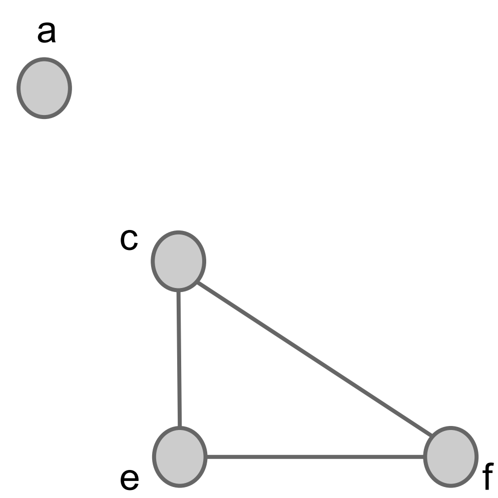
- **Def.:** A ***diferença*** de um grafo G ***por V ⊆ V(G)***, denotado por **G − V**, é o grafo G[V(G) - V]

G



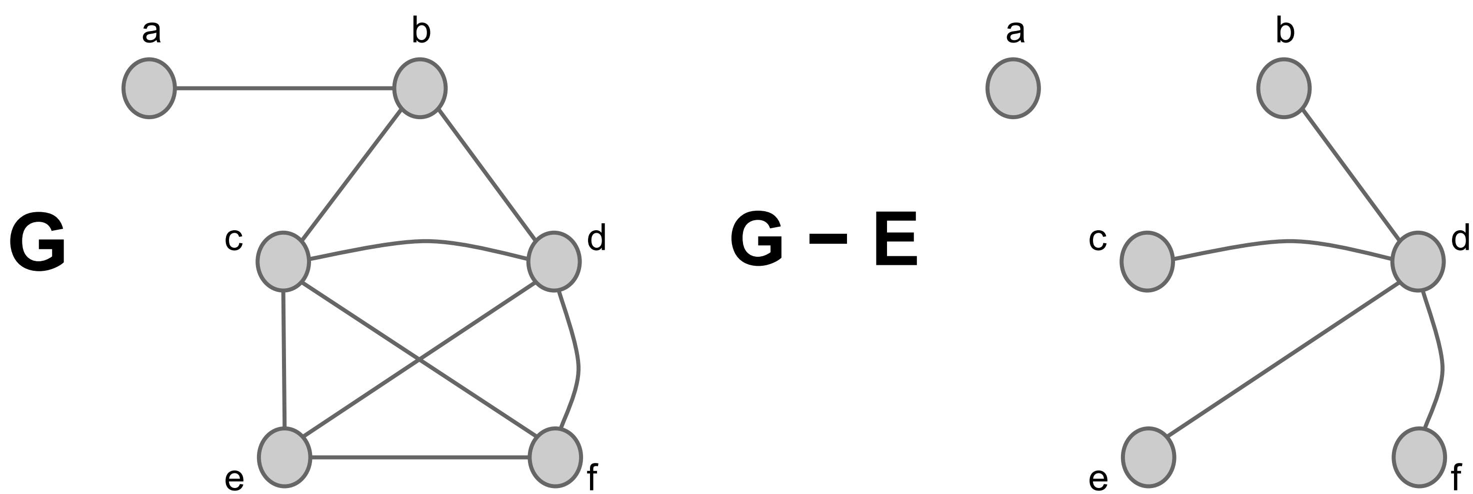
V = {b, d}

G − V



Grafos e Subgrafos

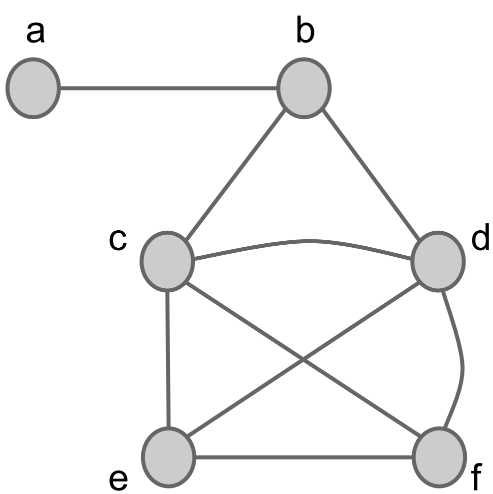
- **Def.:** A ***diferença*** de um grafo G ***por E ⊆ E(G)***, denotado por **G − E**, é o grafo H, onde V(H) = V (G) e E(H) = E(G) - E



E = {ab, bc, cf, ef, ce}

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** O ***grau*** de um v ∈ V(G), denotado por **d (v)**, é o número de arestas incidentes a v

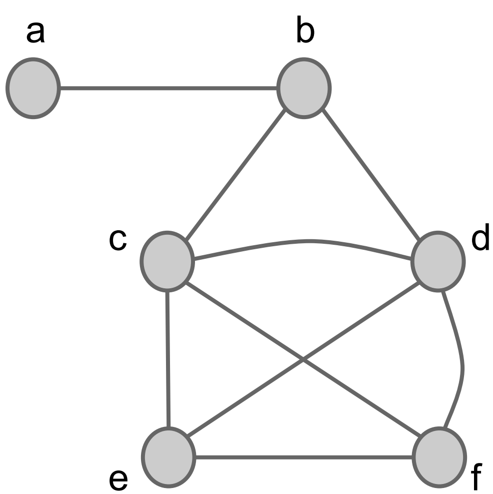


d(a) = 1, d(b) = 3, etc.

Exercício:
Quanto vale
∑ { d(v) : v ∈ V(G) }?

Grafos e Subgrafos

- **Exercício:** Mostre que para qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par



Ex.: a, b, e, f são aqueles de grau ímpar (em número par, portanto)

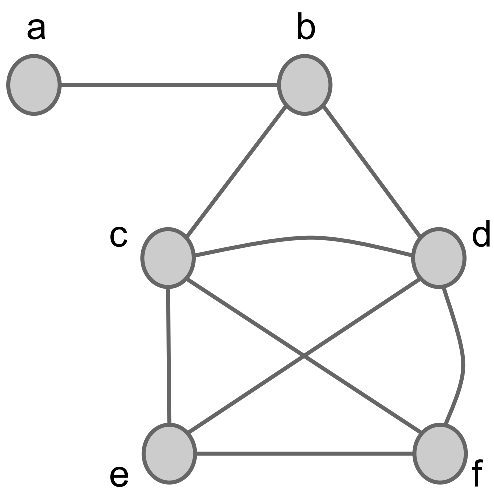
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** O ***grau máximo*** de um grafo G, denotado por Δ***(G)***, é o grau do vértice de G que possui o maior valor, i.e., $\Delta(G) = \text{máx}\ \{ d(v) : v \in V(G) \}$

- **Def.:** O ***grau mínimo*** de um grafo G, denotado por ***δ(G)***, é o grau do vértice de G que possui o menor valor, i.e., $\delta(G) = \min\ \{ d(v) : v \in V(G) \}$

- Por definição, $\delta(G) \leq \Delta(G)$

Grafos e Subgrafos



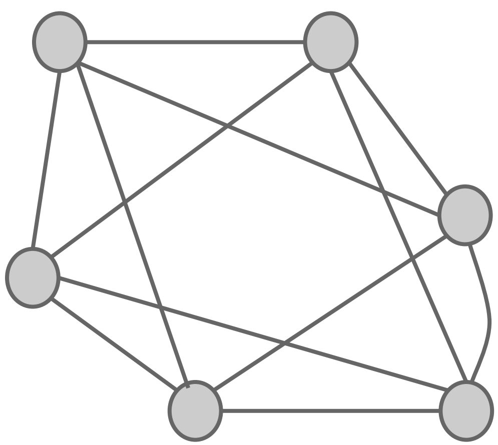
$\delta(G) = 1$

$\Delta(G) = 4$

Exercício:
Qual a relação entre m, $\delta(G)$, $\Delta(G)$?

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um grafo G é ***k-regular*** se d(v) = k para todo v $\in$ V(G)



4-regular

Exercício:

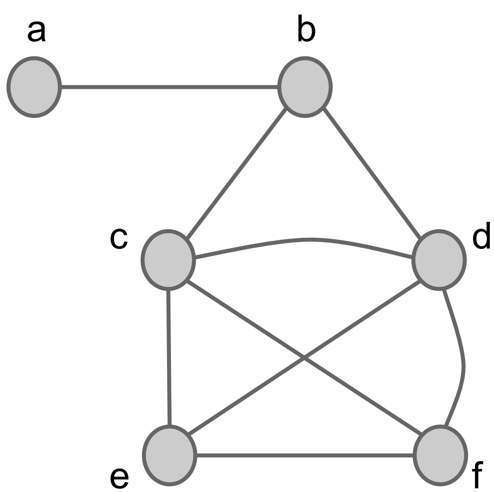
Quais são os grafos 0-regulares?

Quais são os grafos 1-regulares?

Quais são os grafos (n−1)-regulares?

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um ***passeio*** em um grafo G é uma sequência $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$, para todo $0 \leq i < k$.
  O ***tamanho*** deste passeio é k.

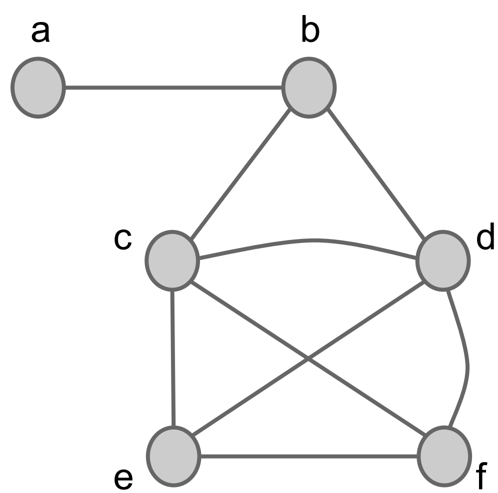


a,b,f não é um passeio

a,b,d,e,f,c,e,d,b é um passeio (de tamanho 8)

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Uma ***trilha*** em um grafo simples G é um passeio $v_0,v_1,v_2,...,v_k$ tal que v_iv_{i+1} é distinta para todo $0 \leq i < k$

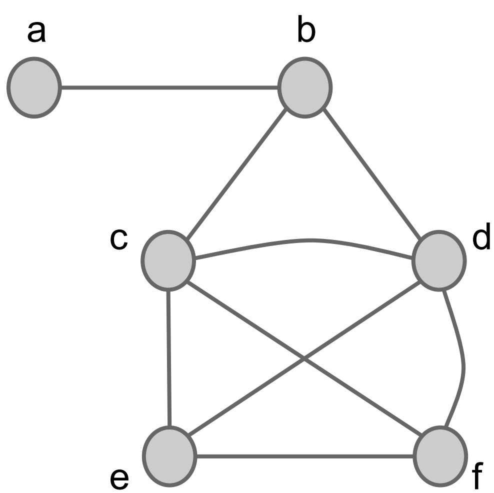


a,b,d,e,f,c,e,d,b não é uma trilha

a,b,d,f,c,d,e é uma trilha

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um ***caminho*** em um grafo simples G é uma trilha $v_0,v_1,v_2,...,v_k$ tal que v_i é distinto para todo $0 \leq i \leq k$

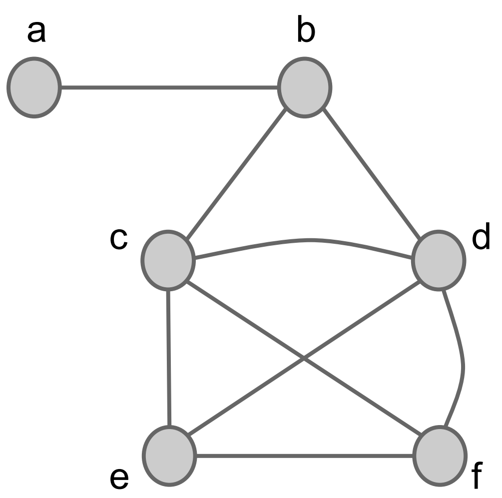


a,b,d,f,c,d,e não é um caminho

a,b,d,f,c,e é um caminho

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** A ***distância*** entre u, v ∈ V(G), denotado por ***d(u, v)***, é o menor k para o qual existe um caminho u,...,v de tamanho k



d(a, a) = 0

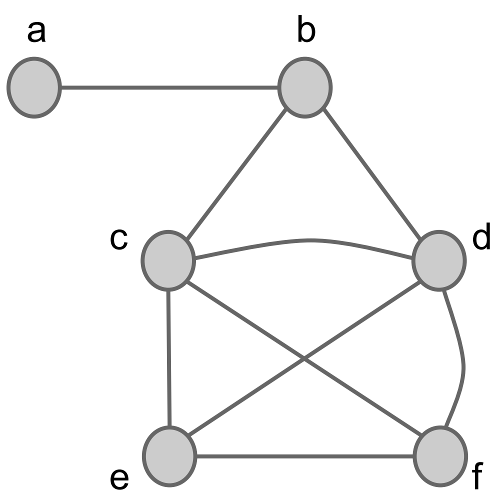
d(a, b) = 1

d(a, d) = 2

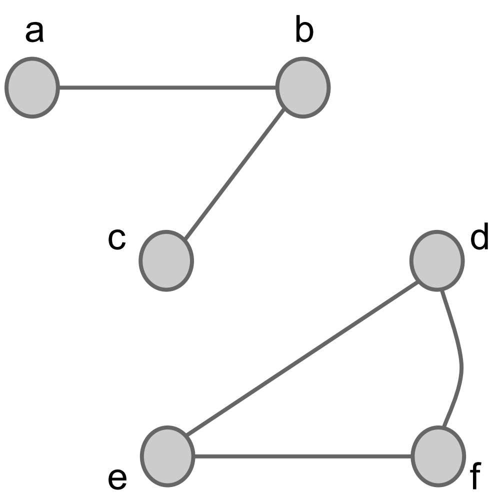
d(a, f) = 3

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um grafo G é ***conexo*** se existe um caminho entre quaisquer u, v ∈ V(G). Caso contrário, é ***desconexo***



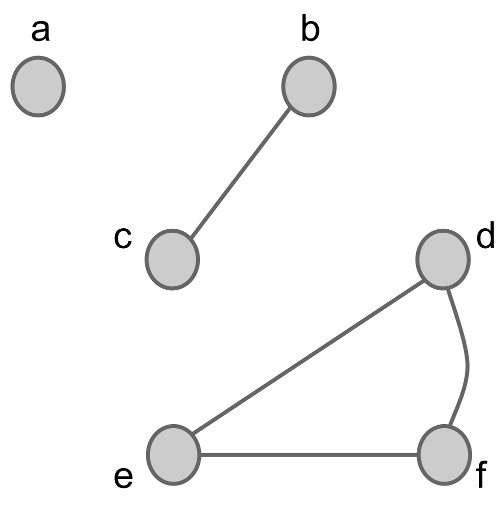
Conexo



Desconexo

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Seja V ⊆ V(G) um conjunto maximal tal que G[V] é conexo. Chamamos G[V] de ***componente conexo*** de G
- O número de componentes conexos de um grafo G é denotado por ***ω(G)***

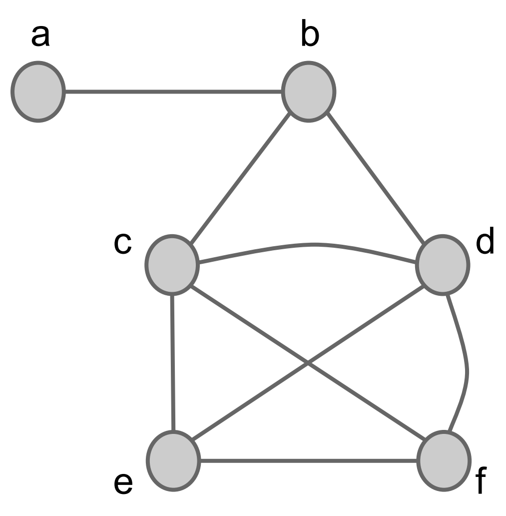


$\omega(G) = 3$

G[{a}], G[{b, c}] e G[{d, e, f}] são os componentes conexos de G

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um passeio $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ é ***fechado*** se $v_0 = v_k$
- **Def.:** Um ***ciclo*** é uma trilha fechada



c,d,e,f,d,e,c é um passeio fechado e não é um ciclo

c,d,e,f,d,b,c é um ciclo

c,e,f,d,c é um ciclo

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uma prova matemática é uma sequência passo-a-passo de como se concluir Y a partir de X. É análogo a um algoritmo, que transforma uma entrada X em uma saída em Y em diversos passos. Assim como um algoritmo, a Matemática tem uma linguagem particular que deve ser conhecida e usada, afim de conseguir ler e escrever trabalhos de/para outros matemáticos.

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uma prova matemática é tão análoga a um algoritmo que sua depuração é a mesma, "fazendo um Chinês" da mesma: ir seguindo passo-a-passo acompanhando o que é dito por um rascunho e atualizando as variáveis sendo usadas.

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Seja x ∈ X que respeite propriedade P**" para escolher um elemento arbitrário x de um conjunto X que possua a propriedade P (é necessário que haja pelo menos um!)

- Para mostrar "X **se e somente se** Y **(X ⇔ Y)**", é necessário mostrar a "ida" e a "volta", ou seja, mostramos que se X, então Y ("ida"), e em seguida, mostramos que se Y, então X ("volta")

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Sem perda de generalidade, assuma X**" para fixar alguma verdade que antes não era necessariamente o caso. Esta expressão denota que esta premissa sempre pode ser assumida ou algum pré-processamento ou pós-processamento nos dados do problema pode ser feito para que X se verifique. Se o pré-/pós-processamento não for informado, ele deve ser trivial de perceber. Exemplos:
    - "Sejam X e Y dois inteiros. Sem perda de generalidade, $X \leq Y$." (E se não for?)
    - "Seja V um vetor de inteiros. Sem perda de generalidade, V está ordenado." (E se não estiver?)

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Basta mostrar que X**" para chamar à atenção que se provarmos X, então o trabalho o qual estávamos interessados está finalizado. Exemplos:
  - Objetivo inicial: mostrar que um vetor V está ordenado.

    "Basta mostrar que $V(i) \leq V(i+1)$ para todo $1 \leq i < |V|$"
  - Objetivo inicial: mostrar que um grafo conexo é uma árvore.

    "Basta mostrar que G é acíclico."

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Naturalmente, X**", "**É claro que X**", "**Trivialmente, X**", etc. para afirmar uma nova verdade X cuja conclusão o leitor tem plenas condições de chegar sem maiores explicações

- Uso da expressão "**Vamos mostrar que X**" para mostrar o objetivo X que a prova pretende alcançar. É mais fácil seguir uma prova com o objetivo de destino em mente.
(Análogo a comentários em uma linguagem de programação!)

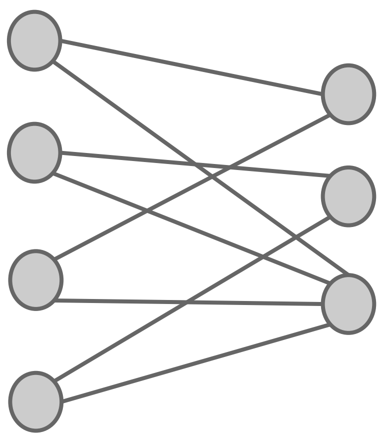
Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

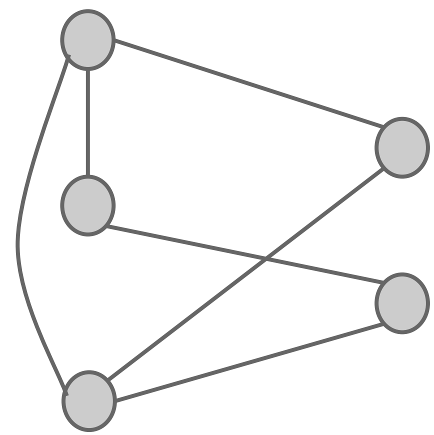
- Uso da expressão "**O raciocínio é análogo para demonstrar X**" para indicar que os mesmos passos de provas utilizados podem ser usados com ligeiras modificações para demonstrar X.

Grafos e Subgrafos

Teorema:
Um grafo G é bipartido $\Leftrightarrow$ G não contém um ciclo de tamanho ímpar



bipartido



não bipartido

Grafos e Subgrafos

(⇒):

- Seja G um grafo bipartido.
- Sejam X e Y uma bipartição de V(G).
- Se G não possui ciclos, vale a ida. Suponha então que exista um ciclo.
- Seja $v_0,v_1,v_2,...,v_k,v_0$ um ciclo de G.
- Sem perda de generalidade, $v_0 \in X$.
- Como G[X] e G[Y] são vazios, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, $v_3 \in Y$, $v_4 \in X$, $v_5 \in Y$, …, $v_k \in Y$.
- Portanto, $k = 2i+1$, para algum $i \in \mathbb{N}$.
- Logo, o tamanho do ciclo é $2i+2$, e par portanto.

Grafos e Subgrafos

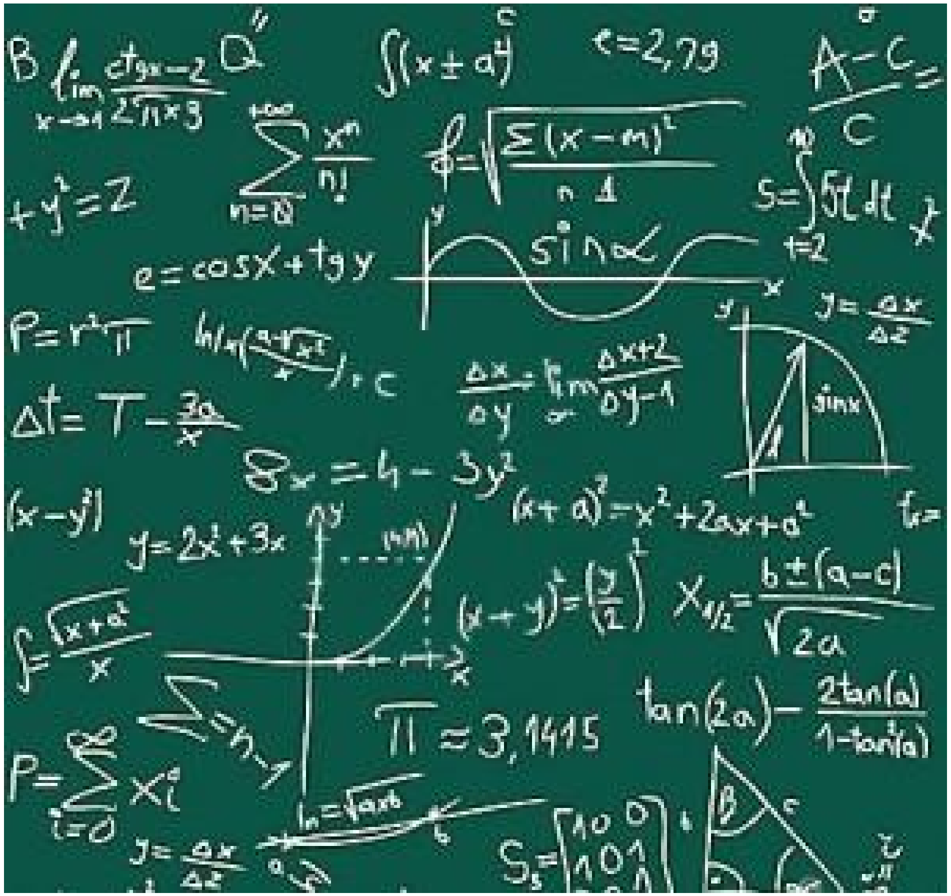
(⇐) (1 de 2):

- Seja G um grafo sem ciclos de tamanho ímpar.
- Se G é desconexo, basta mostrar que cada componente conexo H é bipartido para G ser bipartido.
- Sejam H um componente conexo de G e $u \in V(H)$.
- Sejam:
  - $X = \{ v \in V(H) \mid d(u, v) \text{ é par} \}$,
  - $Y = \{ v \in V(H) \mid d(u, v) \text{ é ímpar} \}$.
- Naturalmente, $X \cup Y = V(H)$ e $X \cap Y = \varnothing$. Vamos mostrar que X e Y é uma bipartição de V(H).
- Sejam $x, y \in X$.
- Sejam P o menor caminho entre u e x e Q o menor caminho entre u e y, e z o último vértice comum a ambos os caminhos.

Grafos e Subgrafos

(⇐) (2 de 2):

- Como P e Q são menores caminhos, então o trecho u até z no caminho P tem que ter o mesmo tamanho do trecho u até z no caminho Q.
- Como $|P|$ e $|Q|$ são pares, então o tamanho do caminho de z até x em P tem a mesma paridade do tamanho do caminho de z até y em Q.
- Logo, o caminho que vai de x até z por P e depois segue por Q até y tem tamanho par.
- Se $xy \in E(H)$, haverá um ciclo de tamanho ímpar, o que não é possível. Logo, $xy \notin E(H)$.
- Como x e y são vértices quaisquer de X, H[X] é vazio.
- O raciocínio é análogo para demonstrar que H[Y] é vazio.
- Logo, X e Y formam uma bipartição de V(H).



Será que um programador ***realmente*** precisa saber Matemática a este ponto?

Grafos e Subgrafos

- Se você quer **criar algoritmos inovadores**, é muito provável que você terá que saber. Argumentos a favor:
  - "Argumentos Técnicos":
    - Programar é criar um processo mecânico para processar uma função matemática. Logo, conhecer funções e todos os assuntos correlatos a ela (Teoria dos Conjuntos, Lógica, Relações, etc.) parece fundamental, não?

Grafos e Subgrafos

- Se você quer **criar algoritmos inovadores**, é muito provável que você terá que saber. Argumentos a favor:
  - "Argumentos Técnicos":
    - Eficiência é executar com o menor número de passos, que significa não fazer todas as verificações que algoritmos concorrentes fazem e ainda assim chegar a uma transformação correta da entrada. Para tanto, é necessário argumentar a correção do novo processo. (Se o algoritmo é inovador, o argumento passou desapercebido de muitos.) Exemplos:
      - Ordenação por Permutações, Bubblesort, e Quicksort.
      - Dado um número N, decidir se N é primo.

Grafos e Subgrafos

- "Argumento da Autoridade":
  A vasta maioria dos Departamentos de Computação do mundo todo colocam a Matemática a seus alunos de Ciência da Computação. Estariam todos errados?

- "Argumento Histórico":
  Os algoritmos mais criativos foram desenvolvidos por Matemáticos ou pessoas que tiveram forte base Matemática. Isto não é um indício de que esta faculdade mental seja desejável a um desenvolvedor de algoritmos?

- "Argumento da Analogia:"
  Um jogador de futebol de alto-desempenho precisa se exercitar na academia. Afinal de contas, ele vai levantar peso ou jogar bola?

Grafos e Subgrafos

- "Argumento do Custo-Benefício:"
  Programar e demonstrar são muito análogos. Se alguém já sabe um bem, saber o outro é um esforço extra pequeno. Por que não?

- "Argumento do Exemplo"
  Bill Gates, 4 anos depois de ter fundado a Microsoft, publicou um artigo científico com um dos maiores teóricos da Computação:
  Gates, W., Papadimitriou, C. (1979). "Bounds for Sorting by Prefix Reversal". Discrete Mathematics 27: 47–57. doi:10.1016/0012-365X(79)90068-2.

Grafos e Subgrafos

- (continuação)
    - "Argumento Pragmático":
      Esta disciplina é obrigatória no currículo de vocês. Este assunto vai cair na prova. :-)

Exercícios

Grafos e Subgrafos

1. Mostre que se G e H tem a mesma família de graus, isto é, a família $\{d(v) : v \in V(G)\}$ é igual a família $\{d(v) : v \in V(H)\}$, não necessariamente $G \cong H$.
2. Mostre que há onze grafos simples não-isomorfos que possuem 4 vértices.
3. Um k-cubo é um grafo cujo conjunto de vértices é formado por todos os números de k-digitos, onde cada digito é 0 ou 1, e dois vértices são adjacentes precisamente quando diferem em exatamente um dígito. Mostre que o número de vértices e de arestas de um k-cubo são respectivamente 2^k e $k2^{k-1}$ para todo $k \geq 1$.
4. Mostre que um k-cubo é um grafo bipartido.
5. Mostre que $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$
6. Mostre que se um grafo bipartido com bipartição X e Y é k-regular, então $|X| = |Y|$
7. Mostre que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, há sempre duas com exatamente o mesmo número de conhecidos dentro do grupo
8. Mostre que se há um passeio de u até v em G, então há um caminho de u até v em G.
9. Mostre que se G é desconexo, então G^c é conexo.
10. Mostre que quaisquer dois caminhos mais longos num grafo conexo tem um vértice em comum.
11. Mostre que se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo.