§7.2 Exercícios

1. Seja S uma superfície parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (v\cos u, v\,\text{sen}\,u, 1 - v^2); \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad , \quad v \geq 0.$$

a) Identifique esta superfície. Esta superfície é regular?

b) Trace as curvas na superfície S, definidas por $\varphi(u_0, v)$ e $\varphi(u, v_0)$, onde:

$$\text{i)}u_0 = 0 \quad , \quad \text{ii)}u_0 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{iii)}v_0 = 0 \quad , \quad \text{iv)}v_0 = 1.$$

c) Encontre um vetor tangente à curva, definida por $\varphi(0, v)$, no ponto $\varphi(0,1)$.

d) Encontre um vetor tangente à curva, definida por $\varphi(u, 1)$, no ponto $\varphi(0,1)$.

e) Encontre uma equação da reta normal e a equação do plano tangente a S em $\varphi(0,1)$.

2. a) Encontre uma parametrização para a superfície obtida girando-se o círculo $(x-a)^2 + z^2 = r^2$, $0 < r < a$, em torno do eixo z. Esta superfície é chamada toro.

b) Encontre um vetor normal a esta superfície. N=

c) Esta superfície é regular?

3. Considere as superfícies S_1 e S_2 parametrizadas por

$$\varphi_1(u,v) = (u,v,0) \quad \text{e} \quad \varphi_2(u,v) = (u^3, v^3, 0) \quad , \quad (u,v) \in I\!R^2,$$

respectivamente.

a) Mostre que S_1 e S_2 são o plano xy.

b) Mostre que S_1 é regular e que S_2 não o é. Conclua que a regularidade de uma superfície S depende da existência de pelo menos uma parametrização na qual S seja regular.

c) É possível encontrar uma parametrização na qual o cone da figura 7.4

seja regular em (0,0,0)?

4. Dada a esfera de raio 2, centrada na origem, encontre a equação do plano tangente a ela no ponto $(1,1,\sqrt{2})$, considerando a esfera como:

a) Uma superfície parametrizada por

$$\varphi(\phi,\theta) = (2 \text{ sen } \phi \cos\theta \ , \ 2 \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \ , \ 2\cos\phi) \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

b) Uma superfície de nível de $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

c) O gráfico de $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

5. a) Encontre uma parametrização para o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

b) Encontre um vetor normal a esta superfície.

c) Encontre a equação do plano tangente à superfície em $(x_0, y_0, 0)$.

6. Considere a superfície parametrizada por

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta \ , \ r \text{ sen } \theta \ , \ \theta) \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi.$$

a) Esboce esta superfície.

b) Encontre uma expressão para um vetor normal à superfície.

c) Esta superfície é regular?

No restante deste capítulo consideraremos apenas superfícies que são imagens de funções $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que:
(i) D é um subconjunto limitado e fechado do plano.
(ii) φ é injetora, exceto possivelmente na fronteira de D.
(iii) A superfície é regular, exceto possivelmente num número finito de pontos.

1 a – parabolóide circular; S é regular exceto no ponto (0,0,1)
b - ?
c - (1,0,-2)

d) $\varphi(u,1)$ no ponto $\varphi(0,1)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,1) = (-1.\cancel{\operatorname{sen} 0}, 1.\cos 0, 0) = \boxed{(0,1,0)}$$

e) $\varphi(0,1) = (1.\cos 0, 1.\cancel{\operatorname{sen} 0}, 1-1) = (1,0,0)$

$$N(0,1) = (-2.1^2.\cos 0, -2.1^2.\cancel{\operatorname{sen} 0}, -1) = (-2,0,-1)$$

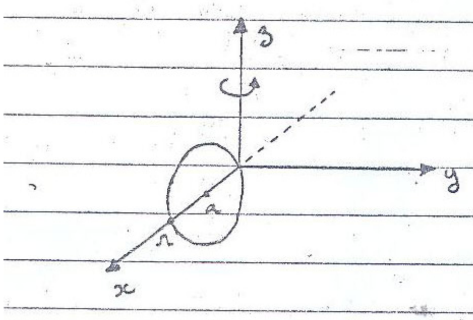
• equação do plano tangente: $(-2,0,-1).(x-1, y-0, z-0) = 0$

$$-2(x-1) - z = 0$$
$$-2x + 2 - z = 0$$
$$\boxed{z = 2 - 2x}$$

• equação da reta normal: $(1,0,0) + t.(-2,0,-1)$

$\boxed{x(t) = 1-2t}$ $\boxed{y(t) = 0}$ $\boxed{z(t) = -t}$ $t \in \mathbb{R}$

② a) $(x-a)^2 + z^2 = r^2$, $0 \le r \le a$



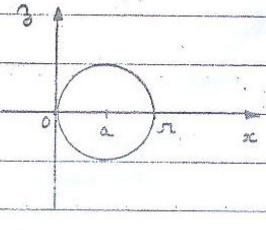
sup. de revolução:

$\varphi(\theta,t) = (x(t)\cos\theta, x(t)\operatorname{sen}\theta, z(t))$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$(x-a)^2 + z^2 = r^2$

$\sigma(t) = (\underbrace{a + r\operatorname{sen}\varphi}_{x(t)}, \underbrace{r\cos\varphi}_{z(t)})$ $0 \le \varphi \le 2\pi$



$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi(\theta,\varphi) = ((a + r\operatorname{sen}\varphi)\cos\theta, (a+r\operatorname{sen}\varphi).\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\end{array}}$$

b) $N(t,\theta) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = x(t) \cdot (-z'(t)\cos\theta, -z'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta, x'(t))$

$x(t) = a + r\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad x'(t) = r\cos\varphi$

$z(t) = r\cos\varphi \qquad z'(t) = -r\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$\boxed{N(\theta,\varphi) = (a + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,(r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\varphi)_{,,}}$$

c) $N(\theta,\varphi)\ \exists\ \forall(\varphi,\theta)$ => logo, a superfície é REGULAR.

8) S_1: $\varphi_1(u,v) = (u,v,0) \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

S_2: $\varphi_2(u,v) = (u^3, v^3, 0)$

a) $\varphi_1(u,v) = (u,v,0) \qquad u = x \quad v = y \quad 0 = z$

$\varphi_2(u,v) = (u^3,v^3,0) \qquad u^3 = x \quad v^3 = y \quad 0 = z$

Qualquer nº pode ser escrito como $\underline{\underline{u}}$ ou $\underline{\underline{v}}$, ou como $\underline{\underline{u^3}}$ ou $\underline{\underline{v^3}}$.
Logo, S_1 e S_2 são o plano xy.

b) • $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} = (1,0,0) \qquad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} = (0,1,0)$

$$N(u,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & j & k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| = (0,0,1)$$

Logo, S_1 é regular $\forall (x,y) \in D_{//}$

• $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} = (3u^2, 0, 0) \qquad \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} = (0, 3v^2, 0)$

$$N(u,v) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \end{vmatrix} = 9u^2 \cdot v^2 \, k$$

$= (0, 0, 9u^2 v^2)$

$\Rightarrow$ para $(u,0)$, $(v,0)$ ou $(0,0)$, S não é regular.

c) Para uma superfície ser REGULAR, sendo ela parametrizada por $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ela deve possuir $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ contínuas em $(u_0, v_0) \in D$. Além disso, definimos um plano tangente à essa superfície no ponto (u_0, v_0). No entanto, no ponto $(0,0,0)$ do cone, não é possível definir um plano tangente pq neste ponto ñ estão definidas as derivadas parciais. Logo, não existirá nenhuma parametrização do cone que o torne regular no ponto $(0,0,0)$.

4) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $\quad P = (1, 1, \sqrt{2})$

a) $\varphi(\Phi, \theta) = (2 \operatorname{sen}\Phi \cos\theta, 2 \operatorname{sen}\Phi \operatorname{sen}\theta, 2\cos\Phi)$ $\quad 0 \le \Phi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$x(t) = 2\operatorname{sen}\Phi \qquad x'(t) = 2\cos\Phi$

$z(t) = 2\cos\Phi \qquad z'(t) = -2\operatorname{sen}\Phi \qquad x(t)\,(-z'(t)\cos\theta, -z'(t)\operatorname{sen}\theta, x'(t))$

$N(\Phi, \theta) = 2\operatorname{sen}\Phi\,(2\operatorname{sen}\Phi\cos\theta, 2\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta, 2\cos\Phi)$

$2\cos\Phi = \sqrt{2} \qquad \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \cos\theta = 1 \qquad \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \operatorname{sen}\theta = 1$

$\cos\Phi = \sqrt{2}/2$

$\Phi = \pi/4 \qquad \cos\theta = \sqrt{2}/2 \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = \pi/4$

$$N\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \left(\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$N\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$$

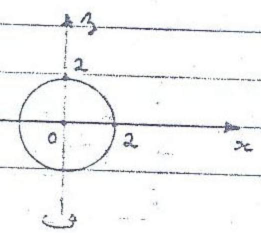
eq. do plano tangente no ponto $(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{\sqrt{2}})$:

$$N(\pi/4, \pi/4) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \cdot (x-1, y-1, z-\sqrt{2}) = 0$$
$$\sqrt{2}x - \sqrt{2} + \sqrt{2}y - \sqrt{2} + 2z - 2\sqrt{2} = 0$$
$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z = 4\sqrt{2} \quad (\div \sqrt{2})$$
$$x + y + \frac{2z}{\sqrt{2}} = 4$$

$$\boxed{x + y + \sqrt{2}z = 4_{\,''}}$$

b) superfície de nível de $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = K$

A esfera é a superfície de nível em $K = 4$:
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$
=> é a sup. de revolução da curva $x^2 + z^2 = 4$ em torno do eixo z.



$$\gamma(t) = (x(t), z(t))$$
$$\gamma(t) = (2 \operatorname{sen} \Phi, 2 \cos \Phi)$$
$$0 \leq \Phi \leq 2\pi$$

$$\varphi(\Phi, \theta) = (x(t)\cos\theta, x(t) \operatorname{sen}\theta, z(t))$$
$$\varphi(\Phi, \theta) = (2 \operatorname{sen}\Phi \cos\theta, 2 \operatorname{sen}\Phi \operatorname{sen}\theta, 2\cos\Phi)$$
$$0 \leq \Phi \leq 2\pi \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

=> eq. do plano tangente em $(1, 1, \sqrt{2})$:

$$\boxed{x + y + \sqrt{2}z = 4_{\,''}}$$

c) O gráfico de $g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

$(\sqrt{4-x^2-y^2})^2 = z^2$ mesma parametrização

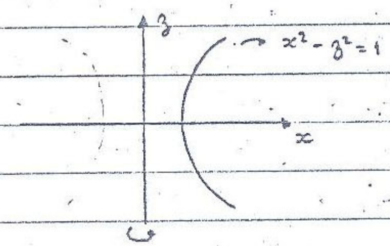
$4-x^2-y^2 = z^2$

$x^2+y^2+z^2 = 4$ => eq. do plano tangente:

$(z \geq 0)$ $x+y+\sqrt{2}z = 4$

(8) a) hiperbolóide $x^2+y^2-z^2 = 1$.
de 1 folha

=> obtido pela rotação da hipérbole $x^2-z^2=1$ $(x>0)$ em torno do eixo z.



$$C: \begin{cases} x(t) = \cosh t \\ z(t) = \operatorname{senh} t \end{cases} \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$

$\varphi(t,\theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\operatorname{sen}\theta, z(t))$

$$\boxed{\varphi(t,\theta) = (\cosh t\cos\theta, \cosh t \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} t)} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

b) $N(t,\theta) = x(t)\,(-z'(t)\cos\theta, -z'(t)\operatorname{sen}\theta, x'(t))$

$x(t) = \cosh t$ $x'(t) = \operatorname{senh} t$

$z(t) = \operatorname{senh} t$ $z'(t) = \cosh t$

$N(t,\theta) = \cosh t\,(-\cosh t.\cos\theta, -\cosh t \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} t)$

$$\boxed{N(t,\theta) = (\cosh^2 t\cos\theta, \cosh^2 t \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{senh} t\cosh t)}$$

c) equação do plano tangente em $(x_0, y_0, 0)$

$\varphi(t,\theta) = (\cosh t \cos\theta,\ \cosh t \operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{senh} t)$

$P = (x_0, y_0, 0)$

$\operatorname{senh} t = 0 \quad \therefore \quad \overbrace{\cosh 0}^{=1} \cdot \cos\theta = x_0 \qquad \overbrace{\cosh 0}^{=1} \cdot \operatorname{sen}\theta = y_0$

$t = 0 \qquad \cos\theta = x_0 \qquad \operatorname{sen}\theta = y_0$

$N = (\overbrace{\cosh^2 0}^{=1} \cdot x_0,\ \overbrace{\cosh^2 0}^{=1} \cdot y_0,\ -\overbrace{\operatorname{senh} 0}^{0} \cdot \cosh 0)$

$N = (x_0, y_0, 0)$

eq. do plano tangente:

$$(x_0, y_0, 0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - 0) = 0$$

$$x_0 x - x_0^2 + y_0 y - y_0^2 = 0$$

$$x_0 \cdot x + y_0\, y - \underbrace{(x_0^2 + y_0^2)}_{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1} = 0$$

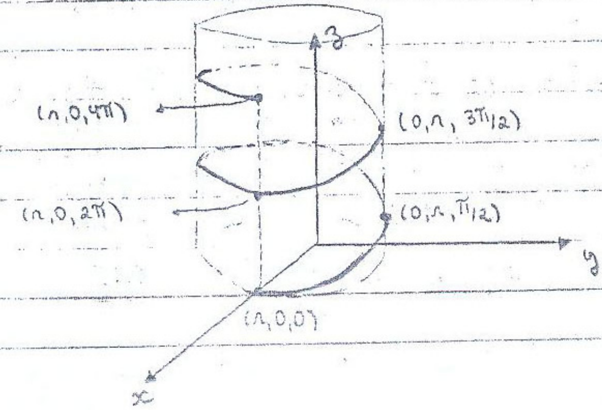
$$\boxed{x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 1}$$

(6) $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta,\ \theta) \qquad 0 \le r \le 1$
$0 \le \theta \le 4\pi$

a) $x(r,\theta) = r\cos\theta$

$y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow$ hélice circular $\quad a = r$, $b = 1$

$z(r,\theta) = \theta$



b) $N(r,\theta) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}$

$N(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \times (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 1)$

$$N(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}\theta\, i + r\cos^2\theta\, k + r\operatorname{sen}^2\theta\, k - \cos\theta\, j$$

$$\boxed{N(r,\theta) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)}$$

c) $N(r,\theta) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$ $\quad 0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 4\pi$

SIM, pq nunca $\operatorname{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = 0$ p/ um mesmo θ