

Capítulo 41

1. De acordo com a Eq. 41-9, a energia de Fermi é dada por

$$E_F = \left(\frac{3}{16\sqrt{2}\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{2/3},$$

em que n é o número de elétrons de condução por unidade de volume, m é a massa do elétron e h é a constante de Planck. Este resultado pode ser escrito na forma $E_F = An^{2/3}$, em que

$$A = \left(\frac{3}{16\sqrt{2}\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} = \left(\frac{3}{16\sqrt{2}\pi} \right)^{2/3} \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 5,842 \times 10^{-38} \text{ J}^2\cdot\text{s}^2/\text{kg}.$$

Como $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, a unidade de A também pode ser expressa como $\text{m}^2 \cdot \text{J}$. Dividindo por $1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}$, obtemos $A = 3,65 \times 10^{-19} \text{ m}^2\cdot\text{eV}$.

2. De acordo com a Eq. 41-5, a densidade de estados de um metal é dada por

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2},$$

que pode ser escrita na forma

$$N(E) = CE^{1/2}$$

em que

$$\begin{aligned} C &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} = \frac{8\sqrt{2}\pi (9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})^{3/2}}{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^3} = 1,062 \times 10^{56} \text{ kg}^{3/2}/\text{J}^3\cdot\text{s}^3 \\ &= 6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3}\cdot(\text{eV})^{-2/3}. \end{aligned}$$

Assim,

$$N(E) = CE^{1/2} = [6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3}\cdot(\text{eV})^{-2/3}] (8,0 \text{ eV})^{1/2} = 1,9 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}\cdot\text{eV}^{-1},$$

o que está de acordo com a curva da Fig. 41-6.

3. O número de átomos de cobre por unidade de volume é dado por $n = d/M$, em que d é a massa específica do cobre e M é a massa de um átomo de cobre. Como cada átomo contribui com um elétron de condução, n também é o número de elétrons de condução por unidade de volume. Chamando de A a massa molar do cobre, temos

$$M = \frac{A}{N_A} = \frac{63,54 \text{ g/mol}}{6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,055 \times 10^{-22} \text{ g}.$$

Assim,

$$n = \frac{8,96 \text{ g/cm}^3}{1,055 \times 10^{-22} \text{ g}} = 8,49 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 8,49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

4. Seja $E_1 = 63 \text{ meV} + E_F$ e seja $E_2 = -63 \text{ meV} + E_F$. Nesse caso, de acordo com a Eq. 41-6,

$$P_1 = \frac{1}{e^{(E_1 - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^x + 1},$$

em que $x = (E_1 - E_F)/kT$. Explicitando e^x , obtemos

$$e^x = \frac{1}{P_1} - 1 = \frac{1}{0,090} - 1 = \frac{91}{9}.$$

Assim,

$$P_2 = \frac{1}{e^{(E_2 - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-(E_1 - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{(91/9)^{-1} + 1} = 0,91.$$

5. (a) De acordo com a Eq. 41-5, a densidade de estados de um metal é dada por

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2},$$

que pode ser escrita na forma

$$N(E) = CE^{1/2}$$

em que

$$C = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} = \frac{8\sqrt{2}\pi(9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})^{3/2}}{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^3} = 1,062 \times 10^{56} \text{ kg}^{3/2} / \text{J}^3 \cdot \text{s}^3.$$

(b) Como $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$, $1 \text{ kg} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$. Assim, a unidade de C pode ser escrita na forma

$$(\text{J} \cdot \text{s}^2)^{3/2} \cdot (\text{m}^{-2})^{3/2} \cdot \text{J}^{-3} \cdot \text{s}^{-3} = \text{J}^{-3/2} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Isso significa que

$$C = (1,062 \times 10^{56} \text{ J}^{-3/2} \cdot \text{m}^{-3})(1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})^{3/2} = 6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-3/2}.$$

(c) Para $E = 5,00 \text{ eV}$, temos

$$N(E) = (6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-3/2})(5,00 \text{ eV})^{1/2} = 1,52 \times 10^{28} \text{ eV}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}.$$

6. Como, de acordo com o resultado do Problema 41-3, $n = 8,49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} = 84,9 \text{ nm}^{-3}$, a Eq. 41-9 nos dá

$$E_F = \frac{0,121(hc)^2}{m_e c^2} n^{2/3} = \frac{0,121(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{511 \times 10^3 \text{ eV}} (84,9 \text{ nm}^{-3})^{2/3} = 7,0 \text{ eV}.$$

7. **PENSE** Este problema envolve $P(E)$, a probabilidade de que um nível de energia esteja ocupado por um elétron.

FORMULE A Fig. 41-7 mostra um gráfico de $P(E)$ em função de E . Como se pode ver na figura, para $T = 0 \text{ K}$, $P(E) = 1$ para $E \leq E_F$, em que E_F é a energia de Fermi, e zero para $E > E_F$. Por outro lado, a probabilidade de que um estado de energia E esteja ocupado à temperatura T é dada por

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}$$

em que k é a constante de Boltzmann e E_F é a energia de Fermi.

ANALISE (a) Para $T = 0$, a probabilidade de que qualquer estado com uma energia maior que a energia de Fermi esteja ocupado é zero; por isso, a resposta é zero.

(b) $E - E_F = 0,0620 \text{ eV}$ e

$$(E - E_F) / kT = (0,0620 \text{ eV}) / (8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(320 \text{ K}) = 2,248.$$

Assim,

$$P(E) = \frac{1}{e^{2,248} + 1} = 0,0955.$$

O valor de k está no Apêndice B.

APRENDA Para $E = E_F$, a probabilidade de ocupação é $P(E_F) = 0,5$. Assim, podemos pensar na energia de Fermi como a energia de um estado que tem uma probabilidade de 0,5 de ser ocupado por um elétron.

8. Se o ouro é um metal monovalente, cada átomo do elemento contribui com um elétron de condução. Assim, a Eq. 41-4 nos dá

$$n = \frac{(19,3 \text{ g/cm}^3)(10^6 \text{ cm}^3/\text{m}^3)}{(197 \text{ g/mol})/(6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})} = 5,90 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

9. PENSE De acordo com o Apêndice F, a massa molar da prata é $M = 107,870 \text{ g/mol}$ e a massa específica é $\rho = 10,49 \text{ g/cm}^3$. A prata é monovalente.

FORMULE A massa do átomo de prata pode ser calculada dividindo a massa molar pelo número de Avogadro:

$$M_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{107,870 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}{6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,791 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

Como a prata é monovalente, existe um elétron de valência por átomo de prata (veja a Eq. 41-2).

ANALISE (a) A concentração de elétrons de condução é

$$n = \frac{\rho}{M_0} = \frac{10,49 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3}{1,791 \times 10^{-25} \text{ kg}} = 5,86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

(b) A energia de Fermi é

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{0,121 h^2}{m} n^{2/3} = \frac{(0,121)(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}} = (5,86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})^{2/3} \\ &= 8,80 \times 10^{-19} \text{ J} = 5,49 \text{ eV}. \end{aligned}$$

(c) Como $E_F = mv_F^2/2$,

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \sqrt{\frac{2(8,80 \times 10^{-19} \text{ J})}{9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1,39 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

(d) O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda = \frac{h}{mv_F} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})(1,39 \times 10^6 \text{ m/s})} = 5,22 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

APRENDA Uma vez conhecida a concentração de elétrons de condução, a energia de Fermi de um metal pode ser calculada usando a Eq. 41-9.

10. A probabilidade P_b de que um estado esteja ocupado por um buraco é igual à probabilidade de que o estado *não esteja ocupado* por um elétron. Como a soma da probabilidade de que um estado esteja ocupado com a probabilidade de que o estado não esteja ocupado é igual a 1, $P_b + P = 1$ e, portanto,

$$P_b = 1 - \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} = \frac{e^{(E-E_F)/kT}}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} = \frac{1}{e^{-(E-E_F)/kT} + 1}.$$

11. De acordo com a Eq. 41-7 e o Problema 41-2,

$$N_o(E) = N(E)P(E) = CE^{1/2} \left[e^{(E-E_F)/kT} + 1 \right]^{-1}$$

em que

$$C = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} = \frac{8\sqrt{2}\pi(9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})^{3/2}}{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^3} = 1,062 \times 10^{56} \text{ kg}^{3/2} / \text{J}^3 \cdot \text{s}^3$$

$$= 6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot (\text{eV})^{-2/3}.$$

(a) Para $E = 4,00 \text{ eV}$,

$$N_o = \frac{[6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot (\text{eV})^{-3/2}](4,00 \text{ eV})^{1/2}}{\exp\{(4,00 \text{ eV} - 7,00 \text{ eV})/[(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1000 \text{ K})]\} + 1} = 1,36 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}.$$

(b) Para $E = 6,75 \text{ eV}$,

$$N_o = \frac{[6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot (\text{eV})^{-3/2}](6,75 \text{ eV})^{1/2}}{\exp\{(6,75 \text{ eV} - 7,00 \text{ eV})/[(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1000 \text{ K})]\} + 1} = 1,68 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}.$$

(c) Para $E = 7,00 \text{ eV}$,

$$N_o = \frac{[6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot (\text{eV})^{-3/2}](7,00 \text{ eV})^{1/2}}{\exp\{(7,00 \text{ eV} - 7,00 \text{ eV})/[(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1000 \text{ K})]\} + 1} = 9,01 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}.$$

(d) Para $E = 7,25 \text{ eV}$,

$$N_o = \frac{[6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot (\text{eV})^{-3/2}](7,25 \text{ eV})^{1/2}}{\exp\{(7,25 \text{ eV} - 7,0 \text{ eV})/[(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1000 \text{ K})]\} + 1} = 9,56 \times 10^{26} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}.$$

(e) Para $E = 9,00 \text{ eV}$,

$$N_o = \frac{[6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot (\text{eV})^{-3/2}](9,00 \text{ eV})^{1/2}}{\exp\{(9,00 \text{ eV} - 7,00 \text{ eV})/[(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1000 \text{ K})]\} + 1} = 1,71 \times 10^{18} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}.$$

12. Chamando de m a massa molar do carbono e de M a massa da Terra, o número de átomos de carbono contidos em um diamante com a mesma massa que a Terra é $N = (M_e/m)N_A$, em que N_A é a constante de Avogadro. De acordo com o resultado do Exemplo 41.01 “Probabilidade de excitação de um elétron em um isolante”, a probabilidade pedida é dada por

$$P = N_e^{-E_g/kT} = \left(\frac{M_e}{m} \right) N_A e^{-E_g/kT} = \left(\frac{5,98 \times 10^{24} \text{ kg}}{12,01115 \text{ g/mol}} \right) (6,02 \times 10^{23} / \text{mol}) (3 \times 10^{-93})$$

$$= 9 \times 10^{-43} \approx 10^{-42}.$$

13. (a) De acordo com a Eq. 41-6, temos

$$E = E_F + kT \ln(P^{-1} - 1) = 7,00 \text{ eV} + (8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1000 \text{ K}) \ln\left(\frac{1}{0,900} - 1\right) = 6,81 \text{ eV}.$$

(b) De acordo com o Problema 41-2, temos

$$N(E) = CE^{1/2} = (6,81 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-3/2})(6,81 \text{ eV})^{1/2} = 1,77 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}.$$

(c) De acordo com a Eq. 41-7, temos

$$N_O(E) = N(E)P(E) = (1,77 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1})(0,900) = 1,59 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}.$$

14. (a) Como o volume ocupado pelos íons de sódio em uma amostra de sódio com um volume de 1 m^3 é

$$V_{\text{Na}} = \frac{(971 \text{ kg})(10^3 \text{ g/kg})(6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(4\pi/3)(98,0 \times 10^{-12} \text{ m})^3}{(23,0 \text{ g/mol})} = 0,100 \text{ m}^3,$$

a porcentagem do volume ocupada pelos elétrons de condução é

$$P = \frac{1,00 - 0,100}{1,00} \times 100\% = 90,0\%$$

(b) No caso do cobre, temos

$$V_{\text{Cu}} = \frac{(8960 \text{ kg})(10^3 \text{ g/kg})(6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(4\pi/3)(135 \times 10^{-12} \text{ m})^3}{(63,5 \text{ g/mol})} = 0,876 \text{ m}^3$$

e a porcentagem do volume ocupada pelos elétrons de condução é

$$P = \frac{1,00 - 0,876}{1,00} \times 100\% = 12,4\%.$$

(c) É o sódio, já que, no sódio, os elétrons ocupam uma parte maior do volume disponível.

15. **PENSE** A probabilidade de ocupação de Fermi-Dirac é dada por $F_{\text{FD}} = 1/(e^{\Delta E/kT} + 1)$ e a probabilidade de ocupação de Boltzmann é dada por $P_B = e^{-\Delta E/kT}$.

FORMULE A diferença relativa entre as duas distribuições é

$$f = \frac{P_B - P_{\text{FD}}}{P_B} = \frac{e^{-\Delta E/kT} - \frac{1}{e^{\Delta E/kT} + 1}}{e^{-\Delta E/kT}}.$$

Após algumas transformações algébricas, essa equação assume a seguinte forma:

$$f = \frac{e^{-\Delta E/kT}}{e^{-\Delta E/kT} + 1}$$

Explicitando $e^{-\Delta E/kT}$, obtemos

$$e^{-\Delta E/kT} = \frac{f}{1-f}.$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os membros e explicitando T , obtemos

$$T = \frac{\Delta E}{k \ln\left(\frac{f}{1-f}\right)}.$$

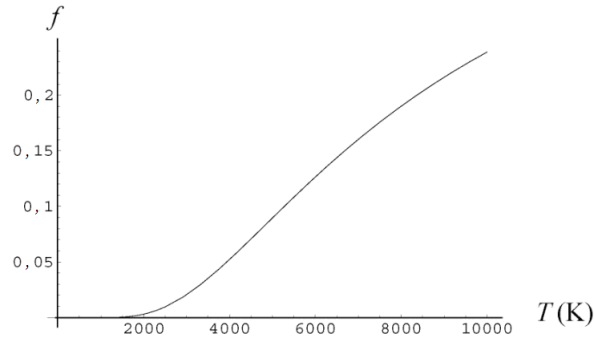
ANALISE (a) Para $f = 0,01$, a equação anterior nos dá

$$T = \frac{(1,00 \text{ eV})(1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}) \ln\left(\frac{0,010}{1-0,010}\right)} = 2,50 \times 10^3 \text{ K}.$$

(b) Para $f = 0,10$, a equação anterior nos dá

$$T = \frac{(1,00 \text{ eV})(1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}) \ln \left(\frac{0,10}{1-0,10} \right)} = 5,30 \times 10^3 \text{ K}.$$

APRENDA O gráfico a seguir mostra a diferença relativa entre as duas distribuições em função de T .



Para um dado valor de ΔE , a diferença aumenta quando T aumenta.

16. (a) De acordo com a lei dos gases ideais, Eq. 19-9, $p = NkT/V = n_0 kT$, em que n_0 é o número de moléculas por unidade de volume. Explicitando n_0 , obtemos

$$n_0 = \frac{p}{kT} = \frac{(1,0 \text{ atm})(1,0 \times 10^5 \text{ Pa/atm})}{(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(273 \text{ K})} = 2,7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

(b) De acordo com as Eqs. 41-2, 41-3 e 41-4, o número de elétrons de condução por unidade de volume do cobre é dado por

$$n = \frac{(8,96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(1000 \text{ g/kg})}{(63,54 \text{ g/mol})/(6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})} = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

(c) A razão é $n/n_0 = (8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})/(2,7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}) = 3,1 \times 10^3$.

$$(d) d_{\text{méd}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2,7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3})}} = 3,3 \text{ nm}.$$

$$(e) d_{\text{méd}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})}} = 0,23 \text{ nm}.$$

17. Se N é o número de átomos por unidade de volume e n é o número de elétrons livres por unidade de volume, o número de elétrons livres por átomo é n/N . Considerando que, de acordo com o resultado do Problema 41-1, $E_F = An^{2/3}$, em que $A = 3,65 \times 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{eV}$, temos

$$n = \left(\frac{E_F}{A} \right)^{3/2} = \left(\frac{11,6 \text{ eV}}{3,65 \times 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{eV}} \right)^{3/2} = 1,79 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}.$$

Se M é a massa de um átomo de alumínio e d é a massa específica do alumínio, $N = d/M$. Como

$$M = (27,0 \text{ g/mol})/(6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) = 4,48 \times 10^{-23} \text{ g},$$

temos

$$N = (2,70 \text{ g/cm}^3)/(4,48 \times 10^{-23} \text{ g}) = 6,03 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 6,03 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Assim, o número de elétrons livres por átomo é

$$\frac{n}{N} = \frac{1,79 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}}{6,03 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}} = 2,97 \approx 3.$$

18. A massa da amostra é

$$m = \rho V = (9,0 \text{ g/cm}^3)(40,0 \text{ cm}^3) = 360 \text{ g},$$

que corresponde a

$$n = \frac{m}{M} = \frac{360 \text{ g}}{60 \text{ g/mol}} = 6,0 \text{ mol}.$$

Como os átomos são divalentes (cada um contribui com dois elétrons livres), existem 12,0 mols de elétrons de condução, o que nos dá

$$N = nN_A = (12,0 \text{ mol})(6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) = 7,2 \times 10^{24}.$$

19. (a) Vamos calcular $P(E) = 1/[e^{(E-E_F)/kT} + 1]$ para os valores dados de E e

$$kT = \frac{(1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K})(273 \text{ K})}{1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 0,02353 \text{ eV}.$$

Para $E = 4,4 \text{ eV}$, $(E - E_F)/kT = (4,4 \text{ eV} - 5,5 \text{ eV})/(0,02353 \text{ eV}) = -46,25$ e

$$P(E) = \frac{1}{e^{-46,25} + 1} \approx 1,0.$$

(b) Para $E = 5,4 \text{ eV}$, $P(E) = 0,986 \approx 0,99$.

(c) Para $E = 5,5 \text{ eV}$, $P(E) = 0,50$.

(d) Para $E = 5,6 \text{ eV}$, $P(E) = 0,014$.

(e) Para $E = 6,4 \text{ eV}$, $P(E) = 2,447 \times 10^{-17} \approx 2,4 \times 10^{-17}$.

(f) Explicitando $e^{\Delta E/kT}$ na equação $P = 1/(e^{\Delta E/kT} + 1)$, obtemos

$$e^{\Delta E/kT} = \frac{1}{P} - 1.$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os membros e explicitando T , obtemos

$$T = \frac{\Delta E}{k \ln\left(\frac{1}{P} - 1\right)} = \frac{(5,6 \text{ eV} - 5,5 \text{ eV})(1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{(1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}) \ln\left(\frac{1}{0,014} - 1\right)} = 699 \text{ K} \approx 7,0 \times 10^2 \text{ K}.$$

20. De acordo com a Eq. 41-6, a probabilidade de que um estado de energia E esteja ocupado à temperatura T é dada por

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1},$$

em que k é a constante de Boltzmann e E_F é a energia de Fermi. Como

$$E - E_F = 6,10 \text{ eV} - 5,00 \text{ eV} = 1,10 \text{ eV}$$

e

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{1,10 \text{ eV}}{(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1500 \text{ K})} = 8,51,$$

temos

$$P(E) = \frac{1}{e^{8,51} + 1} = 2,01 \times 10^{-4}.$$

De acordo com a Fig. 41-6, a densidade de estados para 6,0 eV é $N(E) = 1,7 \times 10^{28} / \text{m}^3 \cdot \text{eV}$. Assim, de acordo com a Eq. 41-7, a densidade de estados ocupados é

$$N_O(E) = N(E)P(E) = (1,7 \times 10^{28} / \text{m}^3 \cdot \text{eV})(2,01 \times 10^{-4}) = 3,42 \times 10^{24} / \text{m}^3 \cdot \text{eV}.$$

Em um intervalo de energia ΔE e um volume V , o número n de estados ocupados é

$$\begin{aligned} n &= N_O(E)V\Delta E = (3,42 \times 10^{24} / \text{m}^3 \cdot \text{eV})(5,00 \times 10^{-8} \text{ m}^3)(0,0300 \text{ eV}) \\ &= 5,1 \times 10^{15}. \end{aligned}$$

21. (a) Para $T = 300 \text{ K}$, $\text{frac} = \frac{3kT}{2E_F} = \frac{3(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})}{2(7,0 \text{ eV})} = 0,0055.$

(b) Para $T = 1000 \text{ K}$, $\text{frac} = \frac{3kT}{2E_F} = \frac{3(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(1000 \text{ K})}{2(7,0 \text{ eV})} = 0,018.$

(c) De acordo com as Eqs. 41-5, 41-6 e 41-7, temos

$$\text{frac} = \frac{\int_{E_F}^{\infty} \sqrt{E} / [e^{(E-E_F)/kT} + 1] dE}{\int_0^{\infty} \sqrt{E} / [e^{(E-E_F)/kT} + 1] dE}.$$

Usando um programa de computador como Maple ou Mathematica para calcular as integrais, obtemos, para $E_F = 7,0 \text{ eV}$ e $T = 300 \text{ K}$, $\text{frac} = 0,00385$, e para $E_F = 7,0 \text{ eV}$ e $T = 1000 \text{ K}$, $\text{frac} = 0,0129$. No primeiro caso, o erro percentual é de 30%; no segundo, é de 28%.

22. De acordo com o Problema 41-21, a fração f de elétrons é dada, aproximadamente, por

$$f = \frac{3kT}{2E_F},$$

em que k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura em kelvins e E_F é a energia de Fermi. Explicitando T , obtemos

$$T = \frac{2fE_F}{3k} = \frac{2(0,013)(4,70 \text{ eV})}{3(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})} = 472 \text{ K}.$$

23. A energia média dos elétrons de condução é dada por

$$E_{\text{méd}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} E N(E) P(E) dE,$$

em que n é o número de elétrons livres por unidade de volume, $N(E)$ é a densidade de estados e $P(E)$ é a probabilidade de ocupação. Como a densidade de estados é proporcional a $E^{1/2}$, podemos fazer $N(E) = CE^{1/2}$, em que C é uma constante de proporcionalidade. Em $T = 0 \text{ K}$, a probabilidade de ocupação é 1 para energias menores que a energia de Fermi e 0 para energias maiores que a energia de Fermi. Assim,

$$E_{\text{méd}} = \frac{C}{n} \int_0^{E_F} E^{3/2} dE = \frac{2C}{5n} E_F^{5/2}.$$

O número de elétrons livres por unidade de volume é dado por

$$n = \int_0^{\infty} N(E) P(E) dE = C \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{2C}{3} E_F^{3/2}.$$

Substituindo n por seu valor na expressão da energia média, obtemos

$$E_{\text{méd}} = \left(\frac{2C}{5} \right) E_F^{5/2} \left(\frac{3}{2CE_F^{3/2}} \right) = \frac{3}{5} E_F.$$

24. De acordo com a Eq. 41-9, o número de elétrons de condução por unidade de volume é

$$\begin{aligned} n &= \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \left(\frac{m_e E_F}{h^2} \right)^{3/2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \left(\frac{(m_e c^2) E_F}{(hc)^2} \right)^{3/2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \left[\frac{(0,511 \times 10^6 \text{ eV})(5,0 \text{ eV})}{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2} \right]^{3/2} \\ &= 50,9 \text{ nm}^{-3} = 5,09 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \\ &\approx 8,4 \times 10^4 \text{ mol/m}^3. \end{aligned}$$

Como o material possui dois elétrons de valência por átomo, o número de átomos por unidade de volume é

$$n_a = n/2 = 4,2 \times 10^4 \text{ mol/m}^3,$$

e a massa específica do material é

$$\rho = n_a M = (4,2 \times 10^4 \text{ mol/m}^3)(20,0 \text{ g/mol}) = 8,4 \times 10^5 \text{ g/m}^3 = 0,84 \text{ g/cm}^3.$$

25. (a) De acordo com o Problema 41-23, a energia liberada seria

$$\begin{aligned} E &= NE_{\text{méd}} = \frac{(3,1 \text{ g})}{(63,54 \text{ g/mol})/(6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})} \left(\frac{3}{5} \right) (7,0 \text{ eV})(1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) \\ &= 1,97 \times 10^4 \text{ J} = 19,7 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

(b) Como $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$, temos

$$t = \frac{E}{P} = \frac{1,97 \times 10^4 \text{ J}}{100 \text{ J/s}} = 197 \text{ s}.$$

26. De acordo com a Eq. 41-6, a probabilidade de ocupação de um estado situado a uma distância ΔE da energia de Fermi E_F é dada por

$$P = \frac{1}{e^{(E_F + \Delta E - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{\Delta E/kT} + 1}.$$

Explicitando ΔE , obtemos

$$\Delta E = kT \ln \left(\frac{1}{P} - 1 \right) = (1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) \ln \left(\frac{1}{0,10} - 1 \right) = 9,1 \times 10^{-21} \text{ J} = 57 \text{ meV}.$$

27. (a) De acordo com as Eqs. 41-2, 41-3 e 41-4, temos

$$n = \frac{2(7,133 \text{ g/cm}^3)}{(65,37 \text{ g/mol})/(6,02 \times 10^{23} \text{ mol})} = 1,31 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3} = 1,31 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}.$$

(b) De acordo com a Eq. 41-9,

$$E_F = \frac{0,121 h^2}{m_e} n^{2/3} = \frac{0,121 (6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2 (1,31 \times 10^{29} \text{ m}^{-3})^{2/3}}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} = 9,43 \text{ eV}.$$

(c) Igualando a energia de Fermi a $m_e v_F^2/2$, obtemos

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F c^2}{m_e c^2}} = \sqrt{\frac{2(9,43 \text{ eV})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{511 \times 10^3 \text{ eV}}} = 1,82 \times 10^6 \text{ m/s} = 1,82 \times 10^3 \text{ km/s}.$$

(d) De acordo com a Eq. 38-13, o comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda = \frac{h}{m_e v_F} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1,82 \times 10^6 \text{ m/s})} = 0,40 \text{ nm}.$$

28. De acordo com as Eqs. 41-2, 41-3 e 41-4,

$$n = \frac{(19,3 \text{ g/cm}^3)(6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{(197 \text{ g/mol})} = 5,90 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 59,0 \text{ nm}^{-3}$$

e, portanto, de acordo com a Eq. 41-9,

$$E_F = \frac{0,121(hc)^2}{(m_e c^2)} n^{2/3} = \frac{0,121(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{511 \times 10^3 \text{ eV}} (59,0 \text{ nm}^{-3})^{2/3} = 5,52 \text{ eV}.$$

29. De acordo com o Problema 41-23,

$$\begin{aligned} K_{\text{total}} &= NE_{\text{méd}} = nVE_{\text{méd}} = (8,43 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,00 \times 10^{-6} \text{ m}^3) \left(\frac{3}{5} \right) (7,00 \text{ eV})(1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) \\ &= 5,71 \times 10^4 \text{ J} = 57,1 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

30. De acordo com a Eq. 41-6, a probabilidade de que um estado de energia E esteja ocupado à temperatura T é dada por

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

em que k é a constante de Boltzmann e

$$E_F = \frac{0,121h^2}{m_e} n^{2/3} = \frac{0,121(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}} (1,70 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})^{2/3} = 3,855 \times 10^{-19} \text{ J}$$

é a energia de Fermi.

Como

$$E - E_F = 4,00 \times 10^{-19} \text{ J} - 3,855 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,45 \times 10^{-20} \text{ J}$$

e

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{1,45 \times 10^{-20} \text{ J}}{(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(200 \text{ K})} = 5,2536,$$

temos

$$P(E) = \frac{1}{e^{5,2536} + 1} = 5,20 \times 10^{-3}.$$

Além disso, de acordo com a Eq. 41-5, temos

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} = \frac{8\sqrt{2}\pi(9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})^{3/2}}{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^3} (4,00 \times 10^{-19} \text{ J})^{1/2} \\ &= (1,062 \times 10^{56} \text{ kg}^{3/2}/\text{J}^3 \cdot \text{s}^3)(4,00 \times 10^{-19} \text{ J})^{1/2} \\ &= 6,717 \times 10^{46} / \text{m}^3 \cdot \text{J}. \end{aligned}$$

Assim, de acordo com a Eq. 41-7, a densidade de estados ocupados é

$$N_O(E) = N(E)P(E) = (6,717 \times 10^{46} / \text{m}^3 \cdot \text{J})(5,20 \times 10^{-3}) = 3,49 \times 10^{44} \text{m}^3 \cdot \text{J}.$$

Em um intervalo de energia ΔE e em um volume V , o número de estados ocupados é

$$\begin{aligned} n &= N_O(E)V\Delta E = (3,49 \times 10^{44} / \text{m}^3 \cdot \text{J})(6,00 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(3,20 \times 10^{-20} \text{ J}) \\ &= 6,7 \times 10^{19}. \end{aligned}$$

31. PENSE A banda de valência e a banda de condução estão separadas por uma banda proibida.

FORMULE Para que o elétron passe da banda de valência para a banda de condução, a energia do fóton deve ser pelo menos igual à largura da banda proibida. A energia do fóton é dada por $hf = hc/\lambda$, em que f é a frequência da onda eletromagnética e λ é o comprimento de onda.

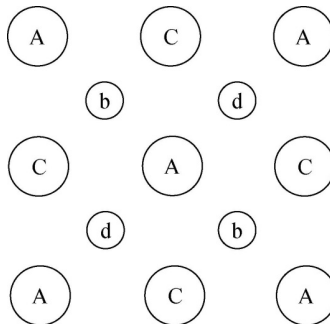
ANALISE (a) Explicitando λ na relação $hc/\lambda = E_g$, em que E_g é a largura da banda proibida, temos

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s})}{(5,5 \text{ eV})(1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} = 2,26 \times 10^{-7} \text{ m} = 226 \text{ nm}.$$

(b) Esses fótons estão na região do ultravioleta do espectro eletromagnético.

APRENDA Note que ondas com menor comprimento de onda podem excitar elétrons para a banda de condução, pois possuem uma energia maior que a largura da banda proibida.

32. Cada átomo de arsênio está ligado (através de ligações covalentes) a quatro átomos de gálio; da mesma forma, cada átomo de gálio está ligado a quatro átomos de arsênio. No modelo bidimensional da figura a seguir, as letras foram usadas para indicar a distância a que os átomos se encontram do observador: A indica os átomos mais próximos, b os átomos da segunda camada, C os da terceira camada, e d os da quarta camada. As letras maiúsculas são usadas para os átomos de gálio e as letras minúsculas para os átomos de arsênio.



Considere o átomo de arsênio com a letra b perto do canto superior esquerdo. Esse átomo forma ligações covalentes com os dois átomos A e os dois átomos C mais próximos. Por outro lado, o átomo de arsênio com a letra d perto do canto superior direito forma ligações covalentes com os dois átomos C mais próximos e com os dois átomos que estão em uma quinta camada, diretamente abaixo dos átomos A mais próximos.

(a) Nos átomos de arsênio e gálio, todas as camadas até a subcamada 4s estão completas. Um átomo neutro de gálio possui um elétron na camada 4p e um átomo neutro de arsênio possui três elétrons na subcamada 4p. Para completar a camada $n = 4$, os átomos de gálio e arsênio precisam compartilhar não só os elétrons da subcamada 4p, mas também os elétrons da subcamada 4s. Assim, o caroço do íon de gálio possui uma carga $q = +3e$, causada pela “perda” dos dois elétrons da subcamada 4s e do elétron da subcamada 4p.

(b) O caroço do íon de arsênio possui uma carga $q = +5e$, causada pela “perda” dos dois elétrons da subcamada 4s e dos três elétrons da subcamada 4p.

(c) Como no caso do silício, cada ligação covalente envolve 2 elétrons.

33. (a) Como, na extremidade inferior da banda de condução, $E = 0,67$ eV, e a energia de Fermi é $E_F \approx (0,67 \text{ eV})/2 = 0,335$ eV, a probabilidade de que um estado na extremidade inferior da banda de condução esteja ocupado é

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{(0,67 \text{ eV} - 0,335 \text{ eV})/(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(290 \text{ K})} + 1} = 1,5 \times 10^{-6}.$$

(b) Como, na extremidade superior da banda de valência, $E = 0$, a probabilidade de que um estado *não esteja ocupado* é

$$1 - P(E) = 1 - \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-(E-E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-(0 - 0,335 \text{ eV})/(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(290 \text{ K})} + 1} \\ = 1,5 \times 10^{-6}.$$

34. (a) O número de elétrons na banda de valência é

$$N_{ev} = N_v P(E_v) = \frac{N_v}{e^{(E_v-E_F)/kT} + 1}.$$

Como existem N_v estados na banda de valência, o número de buracos na banda de valência é

$$N_{bv} = N_v - N_{ev} = N_v \left[1 - \frac{1}{e^{(E_v-E_F)/kT} + 1} \right] = \frac{N_v}{e^{-(E_v-E_F)/kT} + 1}.$$

Por outro lado, o número de elétrons na banda de condução é

$$N_{ec} = N_c P(E_c) = \frac{N_c}{e^{(E_c-E_F)/kT} + 1}.$$

Assim, para que $N_{ec} = N_{bv}$, devemos ter

$$\frac{N_c}{e^{(E_c-E_F)/kT}} \approx \frac{N_v}{e^{-(E_v-E_F)/kT}},$$

(b) Nesse caso, $e^{-(E_v-E_F)/kT} \gg 1$ e $e^{(E_c-E_F)/kT} \gg 1$; a equação obtida no item (a) se reduz a

$$\frac{N_c}{e^{(E_c-E_F)/kT}} = \frac{N_v}{e^{-(E_v-E_F)/kT}},$$

o que nos dá

$$e^{(E_v-E_c+2E_F)/kT} \approx N_v/N_c.$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os membros, obtemos

$$\frac{2E_F - E_v - E_c}{kT} = \ln \left(\frac{N_v}{N_c} \right),$$

o que nos dá

$$E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_v) + \frac{1}{2}kT \ln \left(\frac{N_v}{N_c} \right).$$

35. **PENSE** Dopando silício com fósforo, é possível aumentar o número de elétrons na banda de condução.

FORMULE No Exemplo 41.06 “Dopagem do silício com fósforo”, é calculada a fração de átomos de silício que devem ser substituídos por átomos de fósforo. Vamos calcular o número de átomos de silício que existem em 1,0 g do material, o número de átomos que devem ser substituídos por átomos de fósforo e, finalmente, a massa dos átomos de fósforo a serem usados na substituição. Como a massa molar do silício é $M_{\text{Si}} = 28,086 \text{ g/mol}$, a massa de um átomo de silício é

$$m_{0,\text{Si}} = M_{\text{Si}} / N_A = (28,086 \text{ g/mol}) / (6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) = 4,66 \times 10^{-23} \text{ g}$$

e o número de átomos em 1,0 g é

$$N_{\text{Si}} = m_{\text{Si}} / m_{0,\text{Si}} = (1,0 \text{ g}) / (4,66 \times 10^{-23} \text{ g}) = 2,14 \times 10^{22}.$$

De acordo com o Exemplo 41.06, um em cada 5×10^6 átomos de silício deve ser substituído por um átomo de fósforo. Isso significa que devem ser usados

$$N_p = (2,14 \times 10^{22}) / (5 \times 10^6) = 4,29 \times 10^{15}$$

átomos de fósforo para dopar 1,0 g de silício.

ANALISE Como a massa molar do fósforo é $M_p = 30,9758 \text{ g/mol}$, a massa de um átomo de fósforo é

$$m_{0,p} = M_p / N_A = (30,9758 \text{ g/mol}) / (6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) = 5,14 \times 10^{-23} \text{ g}.$$

A massa de fósforo que deve ser acrescentada a 1,0 g de silício é

$$m_p = N_p m_{0,p} = (4,29 \times 10^{15})(5,14 \times 10^{-23} \text{ g}) = 2,2 \times 10^{-7} \text{ g}.$$

APRENDA O átomo de fósforo é chamado de átomo *doador* porque doa elétrons à banda de condução do silício. Os semicondutores dopados com átomos doadores são chamados de semicondutores tipo *n*.

36. (a) O nível de Fermi está acima da extremidade superior da banda de valência.

(b) A distância entre o nível dos doadores e a extremidade superior da banda de valência é

$$E = 1,11 \text{ eV} - 0,11 \text{ eV} = 1,0 \text{ eV}.$$

(c) De acordo com a Eq. 41-6, temos

$$\begin{aligned} E_F &= E - kT \ln[P^{-1} - 1] = 1,0 \text{ eV} - (8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) \ln[(5,00 \times 10^{-5})^{-1} - 1] \\ &= 0,744 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Para $E = 1,11 \text{ eV}$, temos

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{(1,11 \text{ eV} - 0,744 \text{ eV}) / [(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})]} + 1} = 7,13 \times 10^{-7}.$$

37. (a) De acordo com a Eq. 41-6, a probabilidade de que um estado de energia E esteja ocupado é

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

em que E_F é a energia de Fermi, T é a temperatura em kelvins e k é a constante de Boltzmann. Medindo as energias em relação à extremidade superior da banda de valência, a energia de um estado na extremidade inferior da banda de condução é $E = 1,11 \text{ eV}$. Além disso,

$$kT = (8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) = 0,02586 \text{ eV}.$$

No caso do silício puro, $E_F = 0,555 \text{ eV}$ e

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0,555 \text{ eV}}{0,02586 \text{ eV}} = 21,46,$$

o que nos dá

$$P(E) = \frac{1}{e^{21,46} + 1} = 4,79 \times 10^{-10}.$$

(b) No caso do silício dopado,

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0,11 \text{ eV}}{0,02586 \text{ eV}} = 4,254,$$

o que nos dá

$$P(E) = \frac{1}{e^{4,254} + 1} = 1,40 \times 10^{-2}.$$

(c) A energia do nível introduzido pelo doador, em relação à extremidade superior da banda de valência, é $1,11 \text{ eV} - 0,15 \text{ eV} = 0,96 \text{ eV}$. Como a energia de Fermi é $1,11 \text{ eV} - 0,11 \text{ eV} = 1,00 \text{ eV}$, temos

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0,96 \text{ eV} - 1,00 \text{ eV}}{0,02586 \text{ eV}} = -1,547,$$

o que nos dá

$$P(E) = \frac{1}{e^{-1,547} + 1} = 0,824.$$

38. (a) O semiconductor é tipo n , já que os átomos de fósforo possuem um elétron de valência a mais que os átomos de silício.

(b) A concentração dos portadores fornecidos pelos átomos de fósforo é

$$n_p = 10^{-7} n_{\text{Si}} = 10^{-7} (5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}) = 5 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}.$$

(c) A razão pedida é

$$\frac{5 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}}{2(5 \times 10^{15} \text{ m}^{-3})} = 5 \times 10^5.$$

O fator 2 no denominador se deve ao fato de que o silício puro contém dois tipos de portadores, elétrons e buracos, com concentrações praticamente iguais.

39. **PENSE** A banda de valência e a banda de condução estão separadas por uma banda proibida, de largura E_g . Um elétron deve receber uma energia igual a E_g para passar da banda de valência para a banda de condução.

FORMULE Como a energia recebida pelos elétrons é E_g , a diferença entre o alto da banda de valência e a base da banda de condução, o número de elétrons que podem ser excitados da banda de valência para a banda de condução por um fóton de energia E é

$$N = E / E_g.$$

ANALISE Para $E_g = 1,1 \text{ eV}$ e $E = 662 \text{ keV}$, obtemos

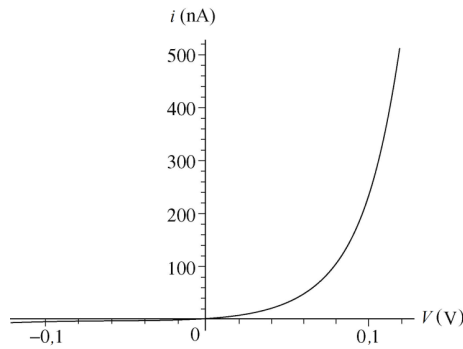
$$N = (662 \times 10^3 \text{ eV}) / (1,1 \text{ eV}) = 6,0 \times 10^5.$$

Como cada elétron que é excitado para a banda de condução deixa um buraco na banda de valência, esse também é o número de pares elétron-buraco que são criados.

APRENDA O comprimento de onda do fóton é

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ nm} \cdot \text{eV}}{662 \times 10^3 \text{ eV}} = 1,87 \times 10^{-3} \text{ nm} = 1,87 \text{ pm}.$$

40. (a) A figura que se segue mostra o gráfico da corrente em função da tensão aplicada.



(b) A razão é

$$\frac{I|_{V=+0,50\text{V}}}{I|_{V=-0,50\text{V}}} = \frac{I_0 \left[\exp\left(\frac{+0,50\text{eV}}{(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300\text{K})}\right) - 1 \right]}{I_0 \left[\exp\left(\frac{-0,50\text{eV}}{(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300\text{K})}\right) - 1 \right]} = 2,5 \times 10^8.$$

41. Na situação descrita, a banda de valência está completa e a banda de condução está vazia. Para que um elétron da banda de valência absorva um fóton, a energia do fóton deve ser igual ou maior que a diferença de energia entre a extremidade superior da banda de valência e a extremidade inferior da banda de condução. Fótons com uma energia menor que este valor não são absorvidos, e o semiconductor é transparente para a radiação; fótons com uma energia igual ou maior a este valor são absorvidos, e o semiconductor é opaco para a radiação. Assim, a distância entre a última banda ocupada e a primeira banda vazia do material é igual à energia de um fóton com um comprimento de onda de 295 nm:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{295 \text{ nm}} = 4,20 \text{ eV}.$$

42. Como

$$E_{\text{fóton}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{140 \text{ nm}} = 8,86 \text{ eV} > 7,6 \text{ eV},$$

a luz é absorvida pelo cristal de KCl e, portanto, o cristal é opaco para este comprimento de onda.

43. Vamos chamar de $\ell_{\text{máx}}$ a dimensão máxima (linear) de cada transistor, de A a área do circuito integrado, e de N o número de transistores. Nesse caso, $A = N \ell_{\text{máx}}^2$ e, portanto,

$$\ell_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{A}{N}} = \sqrt{\frac{(2,54 \text{ cm})(2,22 \text{ cm})}{3,5 \times 10^6}} = 1,3 \times 10^{-5} \text{ m} = 13 \mu\text{m}.$$

44. (a) De acordo com as Eqs. 25-9 e 25-27,

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \frac{(4,5)(8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(0,50 \mu\text{m})^2}{0,20 \mu\text{m}} = 5,0 \times 10^{-17} \text{ F}.$$

(b) Se N é o número de cargas elementares, a carga total que se acumula na porta é $q = Ne$. Nesse caso, $q = Ne = CV$, o que nos dá

$$N = \frac{CV}{e} = \frac{(5,0 \times 10^{-17} \text{ F})(1,0 \text{ V})}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 3,1 \times 10^2.$$

45. PENSE Vamos derivar a probabilidade de ocupação $P(E)$ em relação a E para investigar as propriedades de $P(E)$.

FORMULE A probabilidade de que um estado de energia E esteja ocupado à temperatura T é dada por

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

em que k é a constante de Boltzmann e E_F é a energia de Fermi.

ANALISE (a) A derivada de $P(E)$ em relação a E é

$$\frac{dP}{dE} = \frac{-1}{[e^{(E-E_F)/kT} + 1]^2} \frac{d}{dE} e^{(E-E_F)/kT} = \frac{-1}{[e^{(E-E_F)/kT} + 1]^2} \frac{1}{kT} e^{(E-E_F)/kT}.$$

Fazendo $E = E_F$, obtemos o resultado procurado:

$$\left. \frac{dP}{dE} \right|_{E=E_F} = \frac{-1}{[e^{(E_F-E_F)/kT} + 1]^2} \frac{1}{kT} e^{(E_F-E_F)/kT} = -\frac{1}{4kT}.$$

(b) A equação de uma reta pode ser escrita como $y = m(x - x_0)$, em que $m = -1/4kT$ é a inclinação, determinada no item (a), e x_0 é o ponto em que a reta intercepta o eixo x (que é o que o problema pede para calcular). Como $P(E_F) = 1/2$, fazendo $x = E_F$ na equação da reta, obtemos

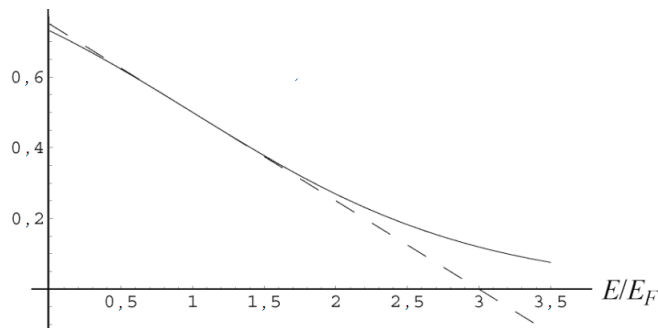
$$1/2 = (-1/4kT)(E_F - x_0),$$

o que nos dá $x_0 = E_F + 2kT$.

APRENDA A linha reta pode ser escrita na forma

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4kT}(E - E_F).$$

A figura a seguir mostra os gráficos de $P(E)$ (curva cheia) e $y(E)$ (reta tracejada) em unidades de E_F/kT . A reta intercepta o eixo horizontal no ponto $E/E_F = 3$.



46. (a) No caso do cobre, a Eq. 41-10 nos dá

$$\frac{d\rho}{dT} = [\rho\alpha]_{\text{Cu}} = (2 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})(4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}) = +8 \times 10^{-11} \Omega \cdot \text{m/K}.$$

(b) No caso do silício, a Eq. 41-10 nos dá

$$\frac{d\rho}{dT} = [\rho\alpha]_{\text{Si}} = (3 \times 10^3 \Omega \cdot \text{m})(-70 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}) = -2,1 \times 10^2 \Omega \cdot \text{m/K}.$$

47. Em um cristal de silício, cada átomo ocupa o ponto central C de um tetraedro formado por outros átomos de silício. Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, a altura desses triângulos é $h' = a\sqrt{3}/2$, em que a é o lado do tetraedro. Vamos chamar de C' o ponto central de uma das faces. Imagine um segmento de reta partindo do átomo A e terminando no ponto médio de um dos lados. Sabendo que esse segmento é a bissetriz do ângulo de 60° do triângulo equilátero, é fácil mostrar que a distância entre o ponto A e o ponto C' é $AC' = a/\sqrt{3}$. Imagine outro segmento de reta, perpendicular à face que contém o ponto A , partindo do ponto C' e terminando em outro átomo de silício, que vamos chamar de B . Este segundo segmento de reta é a altura h do tetraedro. De acordo com o teorema de Pitágoras,

$$h = \sqrt{a^2 - (AC')^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vamos agora definir um sistema de coordenadas. Suponha que o átomo B está no eixo y , no ponto $y_b = h = a\sqrt{2/3}$, e que o átomo A está no eixo x , no ponto $x_a = AC' = a/\sqrt{3}$. Nesse caso, o ponto C' está na origem. O ponto central C do tetraedro está no eixo y , em um ponto y_c equidistante de A e B . Como os pontos B e C estão no eixo y , a distância entre C e B é $y_b - y_c$. De acordo com o teorema de Pitágoras, a distância entre C e A é $\sqrt{x_a^2 + y_c^2}$. Assim,

$$y_b - y_c = \sqrt{x_a^2 + y_c^2} \Rightarrow a\sqrt{\frac{2}{3}} - y_c = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + y_c^2},$$

o que nos dá $y_c = a/2\sqrt{6}$.

(a) Na notação dos vetores unitários, de acordo com as informações anteriores, o vetor que liga os pontos C e A é dado por

$$\vec{r}_{ac} = x_a \hat{i} + (-y_c) \hat{j} = \frac{a}{\sqrt{3}} \hat{i} - \frac{a}{2\sqrt{6}} \hat{j}.$$

O vetor que liga os pontos C e B é dado por

$$\vec{r}_{bc} = (y_b - y_c) \hat{j} = a\sqrt{\frac{3}{8}} \hat{j}.$$

Assim, de acordo com a Eq. 3-20,

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{r}_{ac} \cdot \vec{r}_{bc}}{|\vec{r}_{ac}| |\vec{r}_{bc}|} \right) = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right),$$

o que nos dá $\theta = 109,5^\circ$.

(b) O comprimento do vetor \vec{r}_{bc} (que, naturalmente, é igual ao comprimento do vetor \vec{r}_{ac}) é

$$|\vec{r}_{bc}| = a\sqrt{\frac{3}{8}} = (388 \text{ pm})\sqrt{\frac{3}{8}} = 237,6 \text{ pm} \approx 238 \text{ pm}.$$

Na geometria, a distância $a\sqrt{3/8}$ é conhecida como raio da esfera circunscrita ao tetraedro regular.

48. De acordo com a Eq. 41-6,

$$P(E_F + \Delta E) = \frac{1}{e^{(E_F + \Delta E - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{\Delta E/kT} + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

e

$$P(E_F - \Delta E) = \frac{1}{e^{(E_F - \Delta E - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-\Delta E/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-x} + 1},$$

em que $x = \Delta E/kT$. Assim,

$$P(E_F + \Delta E) + P(E_F - \Delta E) = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^x + 1 + e^{-x} + 1}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} = 1.$$

Um caso especial deste resultado aparece no Problema 41-4, em que $\Delta E = 63 \text{ meV}$ e

$$P(E_F + 63 \text{ meV}) + P(E_F - 63 \text{ meV}) = 0,090 + 0,91 = 1,0.$$

49. (a) Fazendo $E = E_F$ na Eq. 41-5 e usando a Eq. 41-9, temos

$$N(E_F) = \frac{8\pi m \sqrt{2m}}{h^3} \left(\frac{3}{16\pi\sqrt{2}} \right)^{1/3} \frac{h}{\sqrt{m}} n^{1/3}.$$

Simplificando a expressão anterior, obtemos

$$N(E_F) = \frac{4m}{h^2} \sqrt[3]{3\pi^2 n},$$

que é equivalente à expressão que aparece no enunciado do problema. Substituindo por valores numéricos, obtemos

$$N(E_F) = \left[\frac{4mc^2}{(hc)^2} \sqrt[3]{3\pi^2} \right] n^{1/3} = \left[\frac{4(511 \times 10^3 \text{ eV})}{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2} \sqrt[3]{3\pi^2} \right] n^{1/3} = (4,11 \text{ nm}^{-2} \cdot \text{eV}^{-1}) n^{1/3}$$

(b) De acordo com o resultado do Problema 41-3,

$$n = 8,49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} = 84,9 \text{ nm}^{-3}.$$

Assim, a expressão do item (a) nos dá

$$\begin{aligned} N(E_F) &= (4,11 \text{ nm}^{-2} \cdot \text{eV}^{-1})(84,9 \text{ nm}^{-3})^{1/3} = (4,11 \text{ nm}^{-2} \cdot \text{eV}^{-1})(4,4 \text{ nm}^{-1}) \\ &= 18 \text{ nm}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1} = 1,8 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}. \end{aligned}$$

Este valor está de acordo com o que pode ser obtido a partir da curva da Fig. 41-6 fazendo $E_F = 7,0 \text{ eV}$.

50. Usando a expressão aproximada do Problema 41-21, obtemos

$$frac = \frac{3(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(961 + 273 \text{ K})}{2(5,5 \text{ eV})} \approx 0,03.$$

51. Explicitando v_F na equação $E_F = m_e v_F^2 / 2$, obtemos

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = c \sqrt{\frac{2E_F}{mc^2}} = (3,0 \times 10^5 \text{ km/s}) \sqrt{\frac{2(7,0 \text{ eV})}{5,11 \times 10^5 \text{ eV}}} = 1600 \text{ km/s}.$$

52. O fator numérico da Eq. 41-9 é

$$\left(\frac{3}{16\sqrt{2\pi}} \right)^{2/3} = 0,12122 \approx 0,121.$$

53. De acordo com a Eq. 19-9, temos

$$p = nkT = (8,43 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) = 3,49 \times 10^8 \text{ Pa} = 3,49 \times 10^3 \text{ atm}.$$