§7.2 Exercícios

1. Seja S uma superfície parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (v\cos u, v \sin u, 1 - v^2); \quad \ 0 \le u \le 2\pi \quad \ , \quad \ v \ge 0.$$

- a) Identifique esta superfície. Esta superfície é regular?
- b) Trace as curvas na superfície S, definidas por $\varphi(u_0,v)$ e $\varphi(u,v_0)$, onde:

$$i)u_0 = 0$$
 , $ii)u_0 = \frac{\pi}{2}$, $iii)v_0 = 0$, $iv)v_0 = 1$.

- c) Encontre um vetor tangente à curva, definida por $\varphi(0,v),$ no ponto $\varphi(0,1).$
- d) Encontre um vetor tangente à curva, definida por $\varphi(u,1)$, no ponto $\varphi(0,1)$.
- e) Encontre uma equação da reta normal e a equação do plano tangente a S em $\varphi(0,1)$.
- 2. a) Encontre uma parametrização para a superfície obtida girando-se o círculo $(x-a)^2+z^2=r^2$, 0 < r < a, em torno do eixo z. Esta superfície é chamada toro.
 - b) Encontre um vetor normal a esta superfície.

coa superficie.

No

- c) Esta superfície é regular?
- 3. Considere as superfícies S_1 e S_2 parametrizadas por

$$\varphi_1(u,v) = (u,v,0)$$
 e $\varphi_2(u,v) = (u^3, v^3, 0)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

respectivamente.

- a) Mostre que S_1 e S_2 são o plano xy.
- b) Mostre que S_1 é regular e que S_2 não o é. Conclua que a regularidade de uma superfície S depende da existência de pelo menos uma parametrização na qual S seja regular.
- c) É possível encontrar uma parametrização na qual o cone da figura 7.4

seja regular em (0,0,0)?

- 4. Dada a esfera de raio 2, centrada na origem, encontre a equação do plantangente a ela no ponto $(1,1,\sqrt{2})$, considerando a esfera como:
 - a) Uma superfície parametrizada por

$$\varphi(\phi,\theta) = (2 \sin \phi \cos \theta , \ 2 \sin \phi \sin \theta , \ 2 \cos \phi) , \ 0 \le \phi \le \pi , \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

- b) Uma superfície de nível de $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.
- c) O gráfico de $g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.
- 5. a) Encontre uma parametrização para o hiperboló
ide $x^2+y^2-z^2=1. \label{eq:contre}$
 - b) Encontre um vetor normal a esta superfície.
 - c) Encontre a equação do plano tangente à superfície em $(x_0, y_0, 0)$.
- 6. Considere a superfície parametrizada por

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta \;,\; r\sin\theta \;,\; \theta) \quad \; , \quad \; 0 \leq {\bf r} \leq 1 \quad \; , \quad \; 0 \leq \theta \leq 4\pi.$$

- a) Esboce esta superfície.
- b) Encontre uma expressão para um vetor normal à superfície.
- c) Esta superfície é regular?

No restante deste capítulo consideraremos apenas superfícies que são imagens de funções $\varphi:D\subset \mathbb{R}^2\to \mathbb{R}^3$ tais que:

- (i) D é um subconjunto limitado e fechado do plano.
- (ii) φ é injetora, exceto possivelmente na fronteira de D.
- (iii) A superfície é regular, exceto possivelmente num número finito de pontos.

1 a – parabolóide circular; S é regular exceto no ponto (0,0,1) b - ? c - (1,0,-2)d) y(u,1) no ponto y(0,1) - Ju · lquação do plano tangente: (-2,0,-1). (x-1, y-0, 3=0)=0 -2(x-1)-3=01-20c+2-3=0 · equação da reta mormal: (1,0,0) + t. (-2,0,-1) x(t)= 1-2t, y(t)=0,, teir a) $(x-a)^2 + 3^2 = n^2$ 0 \(n \) \(a \) " sup. de revolução: 4 (0,t) = (x(t) cond, x(t) send, g(t)) 048 6211 (=-a)2+ 32=12 (4)= (a+romy, rusy) 3(t) 0545211 4(0,4) = ((a+rring)cost, (a+rring). uno, rosy), 0 5 0 5 27 0 = 4 = 21

p) N(1,0)- 34 x 34 .	= ocit), (-3'(t) cood, -3'(t) amo, 2	(£))
octt) = a+, n zeny	oc)(t)= 1 co=4	
$z(t) = n \cos q$	3'(t) = - n sind	The second set of the second entered
N(0,4)= (a+ namy) (.	(press, bour forces, Oces pouss	
E) (N'B)N (2	(θ) => Logo, a superfice e REG	ULAR.
(3) Sq: 41(U,N):	$= (u, v, 0) \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$	91
	= (43, 10-3,0)	
a) 4,(u,v)=(u,v	(0) M=2c N=4 0=3	
$U_2(u, v) = (u^3, v)$	3,0) u3=x N3=y 0=3	That and analysis is not all and a proper proper to the second at the contract of the contract
		*
Qualquer nº pode 2	er escrito como u ou ro, ou como u3	ou N3.
logo, S, e Sz não o	1	- h
D () () () () () () () () () (AND THE RESERVE OF THE PARTY OF
b). 241 = (1,0,0)	244 = (0,1.0)	THAT HE SHEET BOARD AND THE STREET SHEET
du	9rv	
N(u,v) = 24, x 241 =	1 i k l k	
on go	1 0 0 0 1 = (0,0,1)	
	01010	
Logo, S1 í regular	V (x,y) ∈ D ₁₁	A region to the second of the
<u> 342 = (342,00)</u>	342 = (0,3N2,0)	
- Ju	300	

N(u,v) = 342 x 342 = 1 1 1 K	
3u 3v 3u2 0 0	= 9 w ² , w ² K
0 302 0	
= (0,0,9 m202)	
=> para (4,0), (10,0) ou (0,0), 5 m	to i regular,
c) Para uma superficte ser REGULA	ir, sendo ela parametri
Jada per y: QCIR² → IR³, ila dive per im (uo, vo) € D. alim disso, difunimes i superficie no ponto (uo, vo). No intanto, mão í possívil difinir um plano tangi definidas as divisadas parciais siego, n	caurither 25 , ye rhice use use arrigant another mu en 10,0,0) etned an ater m etned steen pa steen
a) y (\$,0)= (2 sin \$ coo0, 2 sin \$ sin	nθ, 2coo Φ) O ≤ Φ ≤ π
	0 5 9 5 51
$x(t) = 2 \operatorname{sun} \tilde{\Phi}$ $x'(t) = 2 \operatorname{cos} \tilde{\Phi}$	
$g(t)=2\cos\Phi$ $g'(t)=-2\sin\Phi$	(1t) (-3/t) (200, -3/t) 200, al
N(\$,0)= 2 sen \$ (2 sen \$ coo, 2 sen \$ 200	(I cos b, on
200 = 12 2.12 00 = 1 2.13	. 2m θ = 1
CAD \$\overline{D} = \sqrt{12/2}	
\$ = π/4, conθ = V2/2 sur	·θ=√2/2 => Θ= π/4
$\frac{N\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)-2\cdot\sqrt{2}\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot2},\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot2},\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot2}\right)}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot$	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$
N(11, 11) = (12, 12, 2)	

	lo plano tangente no ponto (1,1,12):
	V (T/4, T/4). (x-x0, y-y0, 3-30)=0
	(12.12.2) (7-1
The state of the s	$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2).(x-1, y-1, 3-\sqrt{2})=0$
	Jax-Ja+Jay-Ja+23-252=0
STOPPED STATE AND ADDRESS OF THE STATE ADDRESS OF THE STATE AND ADDRESS OF THE STATE ADDRESS OF THE STATE AND ADDRESS OF THE STATE ADDRESS OF THE STATE ADDRESS OF THE STAT	Jax + Jay + 23 = 4 Ja (+Ja)
	$\frac{3c + y + 2a}{\sqrt{a}} = 4$
THE REAL PROPERTY AND ADDRESS OF THE PERSON ADDRESS OF THE PERSON AND ADDRESS OF THE PERSON AND ADDRESS OF THE PERSON ADDR	The state of the s
	x+y+ \[23 = 4 \(\mu \) \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \
The state of the s	A THE COLUMN ASSESSMENT ASSESSMENT OF THE PROPERTY OF THE PROP
م (عار	inpurficul de mirel de $F(x,y,3) = x^2 + y^2 + 3^2 = K$
	0-01-2-19-13-24
ae	sfera l'a superfécte de névol em K=4;
	$x^2 + y^2 + 3^2 = 4$
=> 1	a sup de revolução da curva x2+32 = 4 em tarma
=> 1 do 1/2	a sup de revolução da curva x2+32 = 4 em tarma
=> 1 ao 10	a sup de revolução da curva x2+32 = 4 em tormo
-> 1 ou un	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo 3 . $5(k) = (\infty(k), 3(k))$
=> 1 ou un (a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo (3 3.
-> 1 do Un	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo (3 3.
=> 1 do Un	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo 3 . $7(t) = (x(t), y(t))$ $7(t) = (2xin \sqrt{2}, 2cos \sqrt{2})$
0.0 Un	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo co 3. $\sqrt{(k)} = (x(k), 3(k))$ $\sqrt{(k)} = (2 x n \Phi, 2 cos \Phi)$ $\sqrt{(k)} = (2 x n \Phi, 2 cos \Phi)$
3.0 11.0	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo 3 . $7(t) = (x(t), 3(t))$ $7(t) = (2 x m \sqrt{2}, 2 cos \sqrt{2})$ $9 \leq 6 \leq 2\pi$
4 (o . e	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo (3) $\frac{3}{5}$
4 (o . e	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo (3)
4 (o . e	a sup de revolução da curra $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo 3 . $ 7(t) = (x(t), 3(t)) $ $ 7(t) = (2 x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x, 3 x x) $ $ 9) = ($
4 (o . e	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo 3 . $ 7(t) = (x(t), 3(t)) $ $ 7(t) = (2 x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x, 3 x, $
4 (o . e	a sup de revolução da curra $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo 3 . $ 7(t) = (x(t), 3(t)) $ $ 7(t) = (2 x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x x, 3 x x) $ $ 9) = (x(t) x x, 3 x x) $ $ 9) = ($
4 (o . e . y (o	a sup de revolução da curva $x^2 + 3^2 = 4$ em tormo 3 . $ 7(t) = (x(t), 3(t)) $ $ 7(t) = (2 x x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x, 2 x x) $ $ 9) = (x(t) x x, 3 x, $

	and the state of t
(9-22-42)= 32 misma parametrizacas
	4-22-42=32
CONTROL OF THE PARTY OF THE PAR	22+42+32=4 =7 19. do plano toingente:
er trike jarjak esitti reprimer	(370) x+ x+y+ 123=4,
•	
(8)	a) hipurboloide $3c^2 + y^2 - 3^2 = 1$
1	de 1 folha
=>	oblido pela notação da pepíreble x2-32=1 (270) em torno
	Unco g .
	The second secon
	$C: \int x^2 - y^2 = 1$ $C: \int x(t) = \cosh t -\infty \le t \le$
	in ling (tre punhtics)
	∞
	$-\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$
	$(t,\theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, y(t))$
9	f(t,0)= (cosh t coso, cosh t sind, sinht), 0 6 8 6 2 11
	teir
Ţ	$N(t,\theta) = x(t)(-g(t)\cos\theta, -g(t)\sin\theta, x(t))$
1	oc(t)= cosht · x'(t)= senht
	g(t)= sunht g'(t)= cosht
,	
	N(t,0)= cosht (-cosht, cos0, - cosht, seno, senht)
	N(t, 0) = (cosh2t cost cosh2t seno, - sent t cosht),

$y(t,\theta) = t \cosh t \cosh \theta$, co		N, 55-4	
P = (x0, y0, 0)			4.
P - (20,190,0)			
sen $ht=0$: $cost$	$\frac{1}{10}$, where $\frac{1}{20}$	ma Onco) = 40
And the state of t	යා ව = <u>x දී</u>	amθ=	
			- 11
$N = (xon^2 0. xo,$	(esh20, 40 - A	unho. cosho)	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
N = (>(0, 40,0)	0 7		
10 = 2013			
eg. de plane tangent	ž :		-
9			
(x0, y0, 0), (x	- xo, y- yo, 3-	0) = 0	-
	yo y - yo2 = 0	* 40	an proceeding the property in any continuents and the first in-
	y - (x+y2)		
	2 sen 7 9 + co		
20. x + y	0. 4 = 1,1		*
		mater a constant a part made (that take up not an immunitable parties and the production of the constant and	and the second second second second
(B) 4(n,0) = (n	O, Orus n, Oce) 05n61	
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \		06864	T.
$2)$ $\propto (0,0) = n \cos \theta$			
y(1,0) = nsen0	=> hillie cis	rkulan a	= 1
$g(n,\theta) = \theta$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	d	= 1
	-48	the same of the same and the sa	at its factor members and its appropriate about the same
		The state of the s	
(179,0,1)	(0,n, 3Tila	.)	R.
		en y e di	
(10,0,271)	\$ (0,1, T(2)	Marketon Committee Committ	Will come a section and the second
		3	
	۸,0,0)		Colombia de la California de la colombia como de la colombia como de la colombia de la colombia de la colombia
Hillia	,	*	
*			

$ \frac{y_0}{6} \times \frac{y_0}{6} = (\theta, n) N (0) $ $ \frac{y_0}{6} \times \frac{y_0}{6} = (\theta, n) N $	
$N(r,\theta) = (coso, amo, 0) \times (0, \theta ma, \theta cos) = (\theta, n)N$ $N(r,\theta) = 0$	
$N(n,\theta) = i$ $N(n,\theta) = 0$	
$N(n,\theta)$ = i j K $+ \times \theta^{r} \cos n + i \cdot \theta \cos n = 0 \theta \cos n \theta \cos n = 0$ $+ \times \theta^{r} \cos n \theta \cos n = 0$ $+ \times \theta^{r} \cos n \theta \cos n = 0$ $+ \times \theta^{r} \cos n \theta \cos n = 0$ $+ \times \theta^{r} \cos n \theta \cos n = 0$ $+ \times \theta^{r} \cos n \theta \cos n = 0$	
t x 6 ress + i emes = 0 emes emess. jeces - x 6 rms 1 emess. [r. 6 res - , 6 mes) = (6,1)N	
N(r, 0, -coo, r),	
(r, Ges) = (e, r)N	
() N(())-(
(1, Oce -, Oma) = (0,1) 0 (1)	4.11.92.9
०६ ७६ ५ त	
51M, pay nunca sint = 0 i cost = 0 plim mism	
	0 0