Universidade do Estado do Rio de Janeiro - IME - Depto. de Análise

SEGUNDA PROVA DE CÁLCULO 4

Prof. Rogerio Oliveira Data: 01/10/2012

Questão 1 Seja $g(x) = 25 - 3x \quad , \quad 0 < x < 20$.

(a) (1 ponto) Faça o gráfico da extensão ímpar $\widetilde{g}$ de g e dê sua definição analítica.

(b) (2 pontos) Calcule a série de Fourier de $\widetilde{g}$.

(c) (1 ponto) Diga para onde a série em (b) converge no intervalo $0 < x < 20$. Justifique sua resposta.

Questão 2 (4 pontos) Usando o método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e de fronteira:

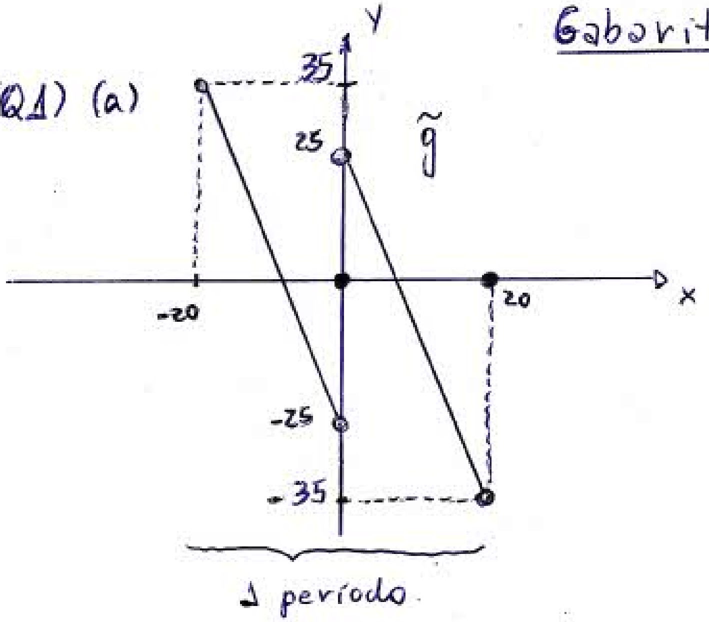
$$\begin{cases} w_t = w_{xx} \ , & 0 < x < 20 \ , \ t > 0 \\ w(x,0) = 25 - 3x \ , & 0 < x < 20 \\ w(0,t) = 0 = w(20,t) \ , & t \geq 0 \ . \end{cases}$$

Questão 3 (2 pontos) Considere uma barra com 20 cm de comprimento e difusidade $\alpha^2 = 1$ com uma temperatura inicial uniforme de 25^0C. Suponha que, no instante $t = 0$, a extremidade $x = 0$ é esfriada a 0^0C, enquanto a extremidade $x = 20$ é aquecida a 60^0C e ambas são mantidas, daí para frente, a essas temperaturas. Encontre a distribuição de temperatura na barra em qualquer instante t. Justifique sua resposta.

BOA SORTE!

Gabarito.

(Q1) (a)



$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 25-3x, & 0<x<20 \\ -25-3x, & -20<x<0 \\ 0, & x=0 \text{ ou } 20 \end{cases}$$

$\tilde{g}(x+40) = \tilde{g}(x) \ , \ \forall x.$

(b) Como $\tilde{g}$ é ímpar, temos que $a_n = 0,\ \forall n \geq 0$ e $(L = 20)$

$$b_n = \frac{2}{20}\int_0^{20} (25 - 3x)\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\int_0^{20} 25\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right) dx - 3\int_0^{20} x\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right) dx\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left[-25 \cdot \frac{20}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{20}\right)\Big|_0^{20} - 3\left(-\frac{20x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{20}\right) + \underbrace{\frac{20^2}{n^2\pi^2}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)}_{\to 0}\Big|_0^{20}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[-\frac{500}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{500}{n\pi} + \frac{1200}{n\pi}\cos(n\pi)\right] =$$

$$= \frac{50}{n\pi} + \frac{70}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{10}{n\pi}\left[5 + 7(-1)^n\right], \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$SF[\tilde{g}](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left[5 + 7(-1)^n\right]\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)$$

(c) A série em (b) converge para $\tilde{g}$ em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$, pois $\tilde{g}$ e $\tilde{g}'$ são contínuas por partes e onde $\tilde{g}$ é descontínua, a média aritmética dos limites laterais é zero, que é o mesmo valor de $\tilde{g}$ nestes pontos. (Estamos usando o Teo. de converg. de Fourier).

(Q2) $w(x,t) = F(x) \cdot G(t) \Rightarrow F(x) \cdot G'(t) = F''(x) \cdot G(t) \Rightarrow \dfrac{F''(x)}{F(x)} = \dfrac{G'(t)}{G(t)} = \lambda$,

λ real $\Rightarrow F''(x) - \lambda F(x) = 0$ e $G'(t) - \lambda G(t) = 0$.

$w(0,t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$ e $w(20,t) = 0 \Rightarrow F(20) = 0$.

$$(1^{\circ})\ \begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ F(0) = 0 = F(20) \end{cases}$$

1º caso: $\lambda > 0$: $\Rightarrow r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$F(0) = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow F(x) = A(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$.

$F(20) = 0 \Rightarrow 0 = A \cdot (e^{20\sqrt{\lambda}} - e^{-20\sqrt{\lambda}}) = 2A\ \text{senh}\ (20\sqrt{\lambda}) \Rightarrow A = 0$, pois $20\sqrt{\lambda} \neq 0$.

$\therefore F \equiv 0$ (Não serve!)

2º caso: $\lambda = 0$ $\Rightarrow F(x) = Ax + B$

$F(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow F(x) = Ax$

$F(20) = 0 \Rightarrow 20A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F \equiv 0$ (Não serve!)

3º caso: $\lambda < 0$, i.e., $\lambda = -\mu^2$ com $\mu > 0$

Então $r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \mu i \Rightarrow F(x) = A\cos(\mu x) + B\,\text{sen}(\mu x)$

$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F(x) = B\,\text{sen}(\mu x)$

$F(20) = 0 \Rightarrow B\,\text{sen}(20\mu) = 0 \overset{B \neq 0}{\Rightarrow} 20\mu = n\pi \Rightarrow \mu_n = \frac{n\pi}{20},\ n \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = -\dfrac{n^2\pi^2}{400},\quad n \geq 1 \\ \\ F_n(x) = \text{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{20}\right) \end{array}}$$

e

(2º) $G_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{400} G_n(t) = 0 \Rightarrow \left(G_n(t) \cdot e^{\frac{n^2\pi^2 t}{400}}\right)' = 0 \Rightarrow$ cte $= 1$

$\Rightarrow G_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{400}}, \quad n \geq 1.$

$\therefore$ Candidata à solução: $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{400}}$. (1)

(3º) Pelas letras (b) e (c) da questão 1,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left[5 + 7(-1)^n\right] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right) = 25 - 3x = w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)$$

$\Rightarrow c_n = \frac{10}{n\pi}\left[5 + 7(-1)^n\right], \quad n \geq 1.$ (2)

Logo, uma solução do problema é a função w dada por (1) com c_n's dados por (2) //

(Q3) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 20,\ t > 0 \\ u(x,0) = 25, & 0 < x < 20 \\ u(0,t) = 0 \text{ e } u(20,t) = 60, & t > 0. \end{cases}$

Solução Estacionária: $v(x) = \left(\frac{60-0}{20}\right)x + 0 = 3x$

Logo, $w(x,t) = u(x,t) - 3x \Rightarrow w$ satisfaz o problema da questão 2. Portanto,

$$u(x,t) = 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left[5 + 7(-1)^n\right] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{400}} \quad //$$

~ // ~