DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães
Prova de Reposição

1- Um estranho planeta possui um campo gravitacional dependente do tempo e uniforme próximo a sua superfície dado por $g(t) = \beta t$, onde β é uma constante. Um projétil de massa m é lançado da superfície no instante $t = 0$ com uma velocidade v fazendo um ângulo θ com a superfície.
a) Qual é a distância horizontal percorrida pelo projétil?
b) Qual é o ângulo θ para o qual essa distância será máxima?

Resposta - 1
a) Usando coordenadas com origem na superfície do planeta e com x a distância horizontal percorrida e y a distância vertical, as equações de movimento do projétil são:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -mg = -m\beta t \end{aligned} \tag{1}$$

As soluções dessas equações são:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{\beta}{6}t^3 \end{aligned} \tag{2}$$

No instante $t = 0$, temos $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v\cos\theta$, $v_{0y} = v\sin\theta$, portanto:

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos\theta t \\ y(t) &= v\sin\theta t - \frac{\beta}{6}t^3 \end{aligned} \tag{3}$$

Quando o projétil chega ao chão, em $t = t_f$ digamos, temos $y = 0$, logo

$$0 = v\sin\theta t_f - \frac{\beta}{6}t_f^3 \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{6v\sin\theta}{\beta}} \tag{4}$$

A distância em x percorrida neste intervalo de tempo é:

$$x(t_f) = D = v\cos\theta\sqrt{\frac{6v\sin\theta}{\beta}} \tag{5}$$

b) O ângulo que maximiza essa distância é obtido pela condição $\frac{dD}{d\theta} = 0$

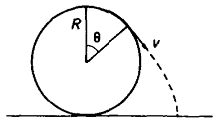
$$\frac{dD}{d\theta} = -v\sin\theta\sqrt{\frac{6v\sin\theta}{\beta}} + \frac{v\cos^2\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\sqrt{\frac{6v}{\beta}} = 0 \tag{6}$$

de onde obtemos:

$$\tan\theta_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

2- Uma esfera de raio R está em repouso em um plano horizontal. Uma partícula escorrega sem atrito pela superfície da esfera começando do repouso no topo.

a) Para qual valor do ângulo θ (veja a figura) a partícula perde o contato com a esfera?
b) Qual é a velocidade da partícula neste instante?



Resposta - 2
a) Enquanto está sobre a esfera, atuam sobre a partícula a força normal ($\vec{N} = N\hat{r}$) de contato com a superfície (perpendicular a mesma) e a força peso. Enquanto se move sobre a esfera a posição da partícula é descrita pelo ângulo θ e é conveniente usar coordenadas polares. As equações de movimento da partícula são portanto, em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} mR\dot{\theta}^2 &= mg\cos\theta - N \\ mR\ddot{\theta} &= mg\sin\theta \end{aligned} \tag{8}$$

onde foi usado que, com $R = constante$, $\vec{r} = R\hat{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = R\ddot{\theta}\hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\hat{r}$. A primeira equação expressa portanto a componente radial da força resultante, ou seja, a força centrípeta.

A energia é conservada e portanto, adotando o zero da energia potencial gravitacional no plano horizontal, temos:

$$mg2R = mgR(1+\cos\theta) + \frac{mv^2}{2} \tag{9}$$

No ponto em que a partícula perde o contato com a esfera, a força normal de contato se anula. A equação da força centrípeta fica então:

$$mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta \tag{10}$$

Notando que $v = R\dot{\theta}$, temos pela conservação de energia que

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 = 2gR(1-\cos\theta) \tag{11}$$

Usando este resultado na equação (10), encontramos o valor desejado do ângulo θ:

$$2g(1-\cos\theta) = g\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \tag{12}$$

b) Usando o valor do cosseno encontrado na questão anterior na expressão (13), obtemos:

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \tag{13}$$

3- Uma partícula de massa m se move ao longo do eixo x sob a influência da força $F = -F_0 \sinh \alpha x$. Onde F_0 e α são constantes positivas.
a) Encontre o potencial associado a essa força.
b) Encontre o ponto de equilíbrio estável deste potencial e escreva um potencial aproximado descrevendo as pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. Qual é a frequência angular dessas oscilações?

Resposta - 3
a) O potencial é dado por

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} dxF = F_0 \int_{x_0}^{x} dx \sinh \alpha x = \frac{F_0}{\alpha}\cosh \alpha x + const \tag{14}$$

b) O ponto de equilíbrio é obtido por

$$\frac{dU(x)}{dx} = F_0 \sinh \alpha x = 0 \Rightarrow x = 0 \tag{15}$$

O equilíbrio é estável pois

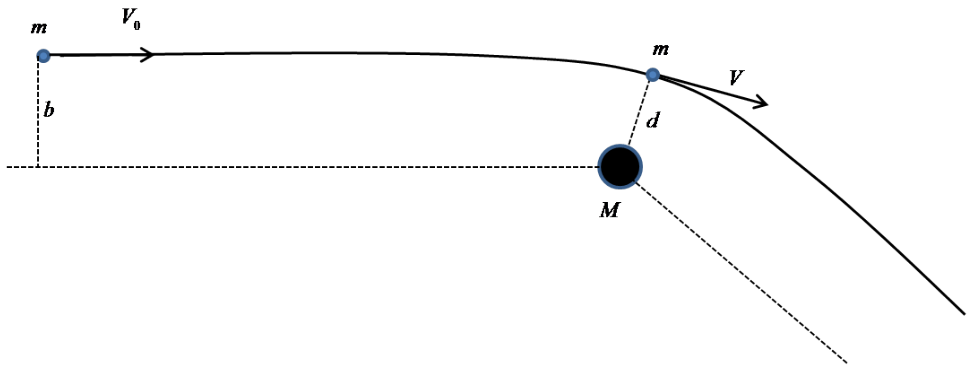
$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = F_0\alpha \cosh \alpha x\Big|_{x=0} = F_0\alpha > 0. \tag{16}$$

Para estudar os pequenos deslocamentos em torno deste ponto, podemos expandir o potencial em um série de Taylor em torno de $x = 0$.

$$\begin{aligned} U(x) &= U(0) + \left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ &\approx const + \frac{1}{2}F_0\alpha x^2 \end{aligned} \tag{17}$$

que, a menos de uma constante, é o potencial de um oscilador harmônico. A frequência angular será portanto $\omega = \sqrt{\frac{F_0\alpha}{m}}$.

4- Um cometa de massa m se aproxima de um planeta de massa M. Considere que $M \gg m$ de tal forma que M possa ser tratado como um centro estacionário de força. Devido a interação gravitacional o cometa é desviado de sua trajetória conforme ilustrado na figura.
Suponha que inicialmente a distância entre o cometa e o planeta seja grande o suficiente para que a interação gravitacional seja desprezada. Calcule o módulo da velocidade $\vec{V}$ no ponto de máxima aproximação e também a distância d de máxima aproximação em termos de b, V_0, M e da constante gravitacional de Newton G.



Resposta - 4
a) O cometa está se movendo no campo gravitacional produzido pelo planeta. Esta é uma força central e portanto a energia e o momento angular do cometa (em relação ao centro de forças localizado na massa M) são conservados. A conservação de energia fornece

$$\frac{mV_0^2}{2} = -\frac{GMm}{d} + \frac{mV^2}{2} \tag{18}$$

e a conservação do momento angular fornece:

$$mV_0 b = mVd. \tag{19}$$

A segunda equação fornece $d = \frac{V_0 b}{V}$. Substituindo na primeira, obtemos

$$\frac{V_0^2}{2} = -\frac{GMV}{V_0 b} + \frac{V^2}{2} \Rightarrow V^2 - \frac{2GM}{V_0 b}V - V_0^2 = 0. \tag{20}$$

Está é uma equação de segundo grau para V e a solução é

$$V = \frac{GM}{V_0 b} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{V_0^2 b^2} + V_0^2} \tag{21}$$

como estamos calculando o módulo, somente a solução positiva é aceitável. Obtemos portanto finalmente:

$$V = \frac{GM}{V_0 b} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{V_0^2 b^2} + V_0^2} \tag{22}$$

. A distância d de máxima aproximação pode ser imediatamente obtida agora:

$$d = \frac{V_0 b}{V} = \frac{V_0 b}{\frac{GM}{V_0 b} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{V_0^2 b^2} + V_0^2}} \tag{23}$$

.