DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães
Lista 2

1. a) Mostre que

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

b) Use esse resultado para provar que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

2. Use o resultado 1.a) para expressar $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$ em termos de produtos escalares.

3. Se $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ são funções explícitas do tempo, mostre que

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r})\right] = r^2\vec{a} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} - (v^2 + \vec{r} \cdot \vec{a})\vec{r}$$

onde $\dot{\vec{v}} = \vec{a}$.

4. Mostre que

$$\int \left(2a\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} + 2b\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right) dt = ar^2 + b\dot{r}^2 + \text{constante}.$$

onde $\vec{r}$ é um vetor da origem até o ponto (x_1, x_2, x_3). As quantidades a e b são constantes.

5. Mostre que

$$\int \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2}\right) dt = \frac{\vec{r}}{r} + \vec{C}.$$

onde $\vec{C}$ é um vetor constante.

6. Calcule a integral

$$\int dt\left(\vec{A}\times\ddot{\vec{A}}\right).$$

7. Quais das seguintes forças são conservativas? Encontre o potencial $U(\vec{r})$ para cada força conservativa (abaixo, a, b, c são constantes e $\vec{a}$ é um vetor constante).
a) $\vec{F}=(ayz+bx+c)\hat{e}_x+(axz+bz)\hat{e}_y+(axy+by)\hat{e}_z$
b) $\vec{F}=(-ze^{-x})\hat{e}_x+(\ln z)\hat{e}_y+(e^{-x}+\frac{y}{z})\hat{e}_z$
c) $\vec{F}=\frac{a}{r}\hat{e}_r$
d) $\vec{F}=\vec{a}\times\vec{r}$
e) $\vec{F}=(2ar\sin\theta\sin\phi)\hat{e}_r+(ar\cos\theta\sin\phi)\hat{e}_\theta+(ar\cos\phi)\hat{e}_\phi$

8. Calcule o trabalho realizado ao levar uma partícula em torno do círculo $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, se a força é:
a)$\vec{F}=y\hat{e}_x$
b) $\vec{F}=x\hat{e}_x$
Essas forças são conservativas?
(dica: Use a parametrização $x=a\cos\phi$, $y=a\sin\phi$, $z=0$)

9. Obtenha a força correspondente à energia potencial $U(\vec{r})=\frac{cz}{r^3}$, onde c é uma constante. Escreva sua resposta em notação vetorial e também em coordenadas esféricas. Verifique que $\nabla\times\vec{F}=0$

10. Um projétil é atirado com velocidade inicial de módulo v_0 fazendo um ângulo α com a horizontal. Suponha que o solo esteja inclinado por um ângulo β em relação à horizontal ($\beta<\alpha$).
a) Qual é o alcance do projétil, medido em relação à horizontal?
b) Para qual ângulo α o alcance é máximo?
c) Qual é o alcance máximo?

11. Uma partícula de massa m está acoplada à extremidade de uma mola de constante elástica k e massa desprezível, cujo tamanho de equilíbrio é a. O outro extremo da mola está fixo de tal forma que a mola está livre para rodar em um plano horizontal. Inicialmente, o sistema está em repouso e a partícula recebe um impulso que inicia seu movimento em uma direção perpendicular à mola com velocidade v.
a) Escreva as equações de movimento em coordenadas polares.
b) Dado que a distância radial máxima atingida é $2a$, Use conservação de energia e de momento angular para determinar a velocidade neste ponto.
c) Encontre v em função dos parâmetros (k, a e m) do sistema.
d) Encontre o valor de $\ddot{r}$ quando $r=a$ e quando $r=2a$.

12. Uma partícula é atraída em direção ao eixo z por uma força $\vec{F}$ proporcional ao quadrado de sua distância ao plano xy e inversamente proporcional à sua distância ao

eixo z. Adicione uma outra força, perpendicular à $\vec{F}$, de tal forma que a força total seja conservativa e encontre a energia potencial. Certifique-se que suas expressões para as forças e energia potencial estejam dimensionalmente consistentes.

13. Para um campo elétrico descrito pelo campo vetorial $\vec{E}$ e campo magnético descrito pelo campo $\vec{B}$, a força exercida por esses campos sobre uma partícula de massa m e carga elétrica q é dada pela força de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

suponha $v \ll c$ (= velocidade da luz).
a) Se o campo elétrico é nulo, e se a partícula entra em um campo magnético em uma direção perpendicular à $\vec{B}$, mostre que a trajetória é um círculo com raio

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\omega_c}$$

onde $\omega_c = \frac{qB}{m}$ é a frequência ciclotron.
b) Para a seguinte configuração do campo eletromagnético:

$$\vec{B} = B\hat{e}_z; \;\; \vec{E} = E_y\hat{e}_y + E_z\hat{e}_z$$

onde B, E_y e E_z são constantes, mostre que a componente z do movimento da partícula é dada por

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{qE_z}{2m}t^2$$

onde $z(0) = z_0$ e $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$
c) Continuando os cálculos, obtenha as expressões de $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$. Mostre que as médias temporais dessas componentes são:

$$\langle\dot{x}(t)\rangle = \frac{E_y}{B}; \;\; \langle\dot{y}(t)\rangle = 0$$

d) Integre as expressões de $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ encontradas na questão anterior usando as condições iniciais: $x(0) = \frac{A}{\omega_c}$, $\dot{x}(0) = \frac{E_y}{B}$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = A$ e mostre que

$$x(t) = -\frac{A}{\omega_c}\cos\omega_c t + \frac{E_y}{B}t; \;\; y(t) = \frac{A}{\omega_c}\sin\omega_c t$$

Essas são as equações paramétricas de uma trocóide. Esta é uma curva obtida por um ponto fixo em um círculo a medida em que ele se move sobre uma linha reta (veja por exemplo http://en.wikipedia.org/wiki/Trochoid). Esboce a curva para os casos *i)* $A > \frac{E_y}{B}$, *ii)* $A < \frac{E_y}{B}$ e *iii)* $A = \frac{E_y}{B}$ (este último caso é denominado ciclóide)