Unidade IV - Geometria

IME 04-10842
Computação Gráfica
Professor Guilherme Mota
Professor Gilson Costa

Problemas Fundamentais

Geometrias – Problemas Fundamentais

- Qual a geometria da Computação Gráfica?
- O que é uma geometria?

Métodos de Definição de Geometrias

Métodos de Definição de Geometrias

- Método Axiomático
  - Definição do espaço, axiomas e teoremas
- Método de Coordenadas
  - Axiomas e teoremas são traduzidos em equações
- Método dos Grupos de Transformação
  - Espaço e Grupo de Transformações

Método Axiomático

- Introduzido por Euclides (~300 a.C.)
- Espaço: $\mathbb{R}^n$
- Objetos: pontos, retas, planos, hiperplanos
- Axiomas e Postulados (Teoremas)

Elementos

Geometria Euclidiana

- Axioma 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- Axioma 2: Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- Axioma 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Axioma 4: Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- Axioma 5: O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Geometria Euclidiana

- Postulado 1: Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;
- Postulado 2: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- Postulado 3: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
- Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes;
- Postulado 5: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se forem estendidas indefinidamente.

Método Axiomático

- Garantir que o conjunto de axiomas é **consistente**, i.e., não levam a uma contradição lógica.
- Garantir que o conjunto de axiomas é **completo**, i.e., suficientes para provar todas as propriedades da geometria.
- Grande poder de síntese: axiomas resumem propriedades comuns para um grande número de espaços e objetos.
- Problema: não determina uma **representação** da geometria.

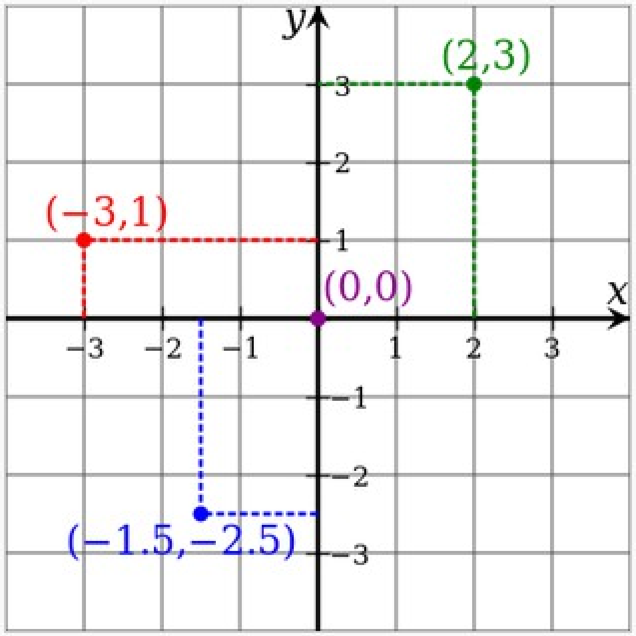
Método de Coordenadas

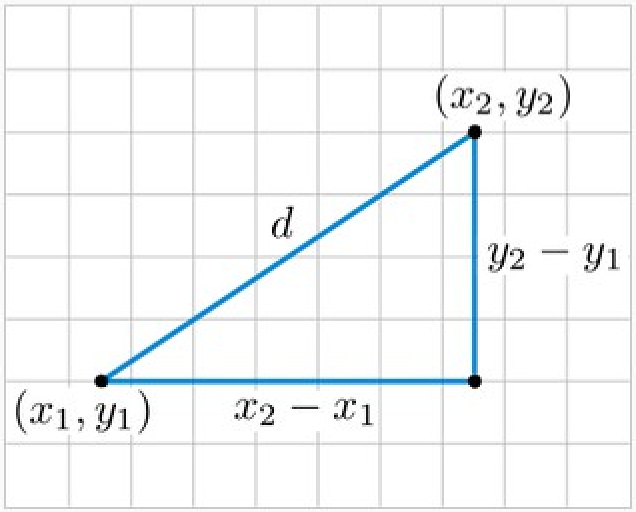
- Introduzido por René Descartes (1596-1650)
- Abordagem analítica: Geometria Analítica
- Consiste em definir um sistema de coordenadas: propriedades da geometria (axiomas e teoremas) são traduzidas para equações matemáticas.

Cogito ergo sum

Método de Coordenadas

- Introduzido por René Descartes (1596-1650)
- Abordagem analítica: Geometria Analítica
- Consiste em definir um sistema de coordenadas: propriedades da geometria (axiomas e teoremas) são traduzidas para equações matemáticas.





Método de Coordenadas

- Diversos sistemas de coordenadas podem ser considerados: Cartesianas, Polares, Cilíndicas, Esféricas, …
- Adequado para técnicas computacionais: define uma representação.

Método de Coordenadas

- Diversos sistemas de coordenadas podem ser considerados: Cartesianas, Polares, Cilíndicas, Esféricas, …
- Adequado para técnicas computacionais: define uma representação.
- Problemas:
  - Redundância: precisamos de três coordenadas (x, y, z) para representar um único ponto
  - Objetos dependem do sistema de coordanadas utilizado na representação

Método dos Grupos de Transformação

Método de Grupos de Transformação

- Introduzido por Felix Klein (1849-1925)
- Geometria: espaço *S* (os objetos da geometria) e um grupo *G* de transformações deste espaço.
- Grupo de transformações tem algumas propriedades invariantes.

Espaço → **Transformações** → **Propriedades** → **Geometria**

Método de Grupos de Transformação

- Geometria: espaço S (os objetos da geometria) e um grupo G de transformações deste espaço.

- Cada $T \in G$ onde $T: S \rightarrow S$ deve satisfazer às seguintes propriedades:
  - **Associatividade:**
    Dados $g, h, l \in G$, $(g\,h)\,l = g\,(h\,l)$
  - **Elemento neutro:**
    $\exists\, e \in G \mid g\,e = e\,g = g \quad \forall\, g \in G$
  - **Elemento Inverso:**
    $\forall\, g \in G, \exists\, g^{-1} \mid g\,g^{-1} = g^{-1}\,g = e$

Método de Grupos de Transformação: Definições

- **Objeto geométrico:**
  O é um subconjunto de S

- **Propriedade geométrica:**
  se O goza da propriedade P, $g(O)$ também goza de P

- **Congruência:**
  O_1 e O_2 são congruentes *sse* $\exists\, g \mid g(O_1) = O_2$
  Ou seja, O_1 pode ser transformado em O_2 e vice-versa.

Método de Grupos de Transformação

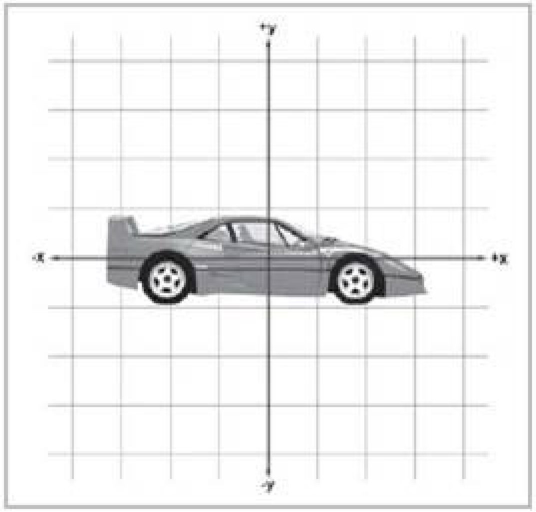
- Buscar representação de S e do grupo G para implementar modelos da geometria (modelagem geométrica).

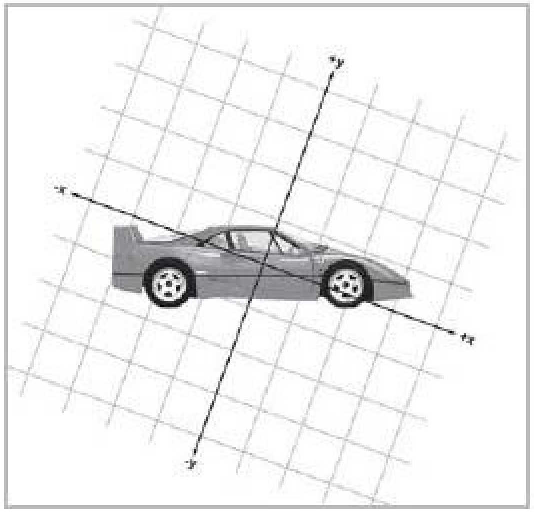
Espaço → Transformações → Geometria → Representação

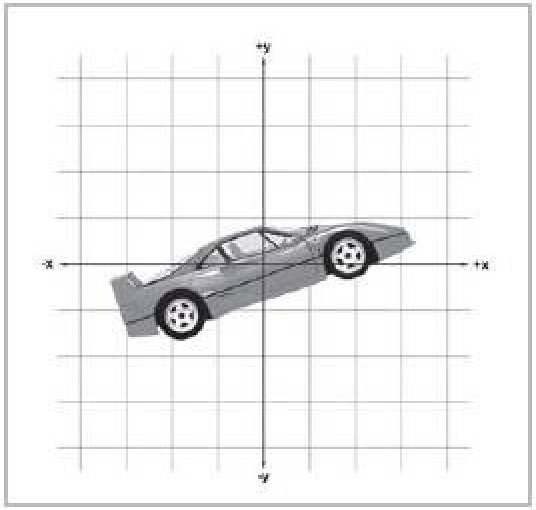
- Transformações em Computação Gráfica: movimentos de objetos no espaço e mudança de referencial.
- Exemplo: movimento de um corpo rígido no espaço $\rightarrow$ mudança de posição e orientação.

Transformações e Computação Gráfica

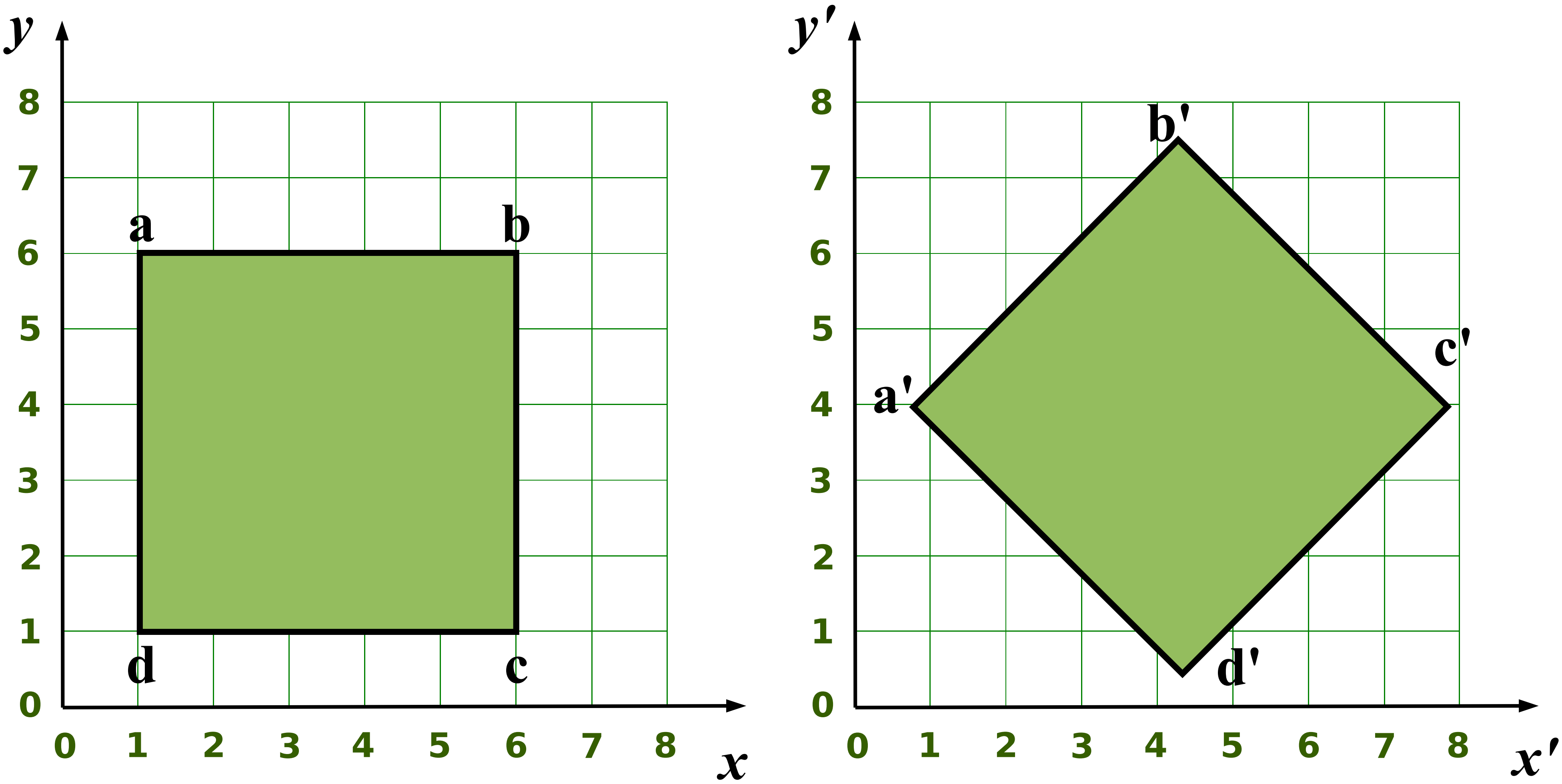
- Mudança de Coordenadas



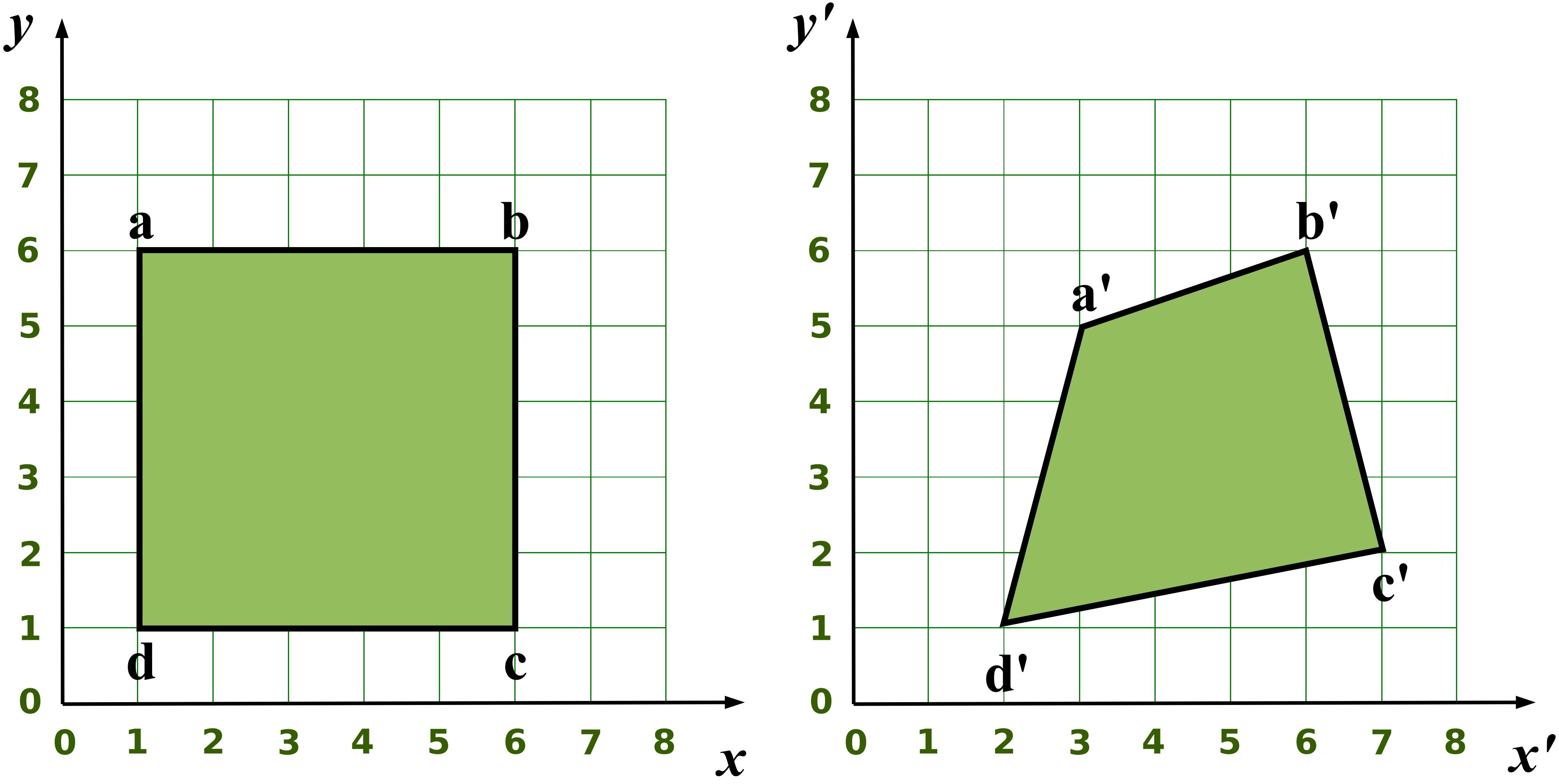




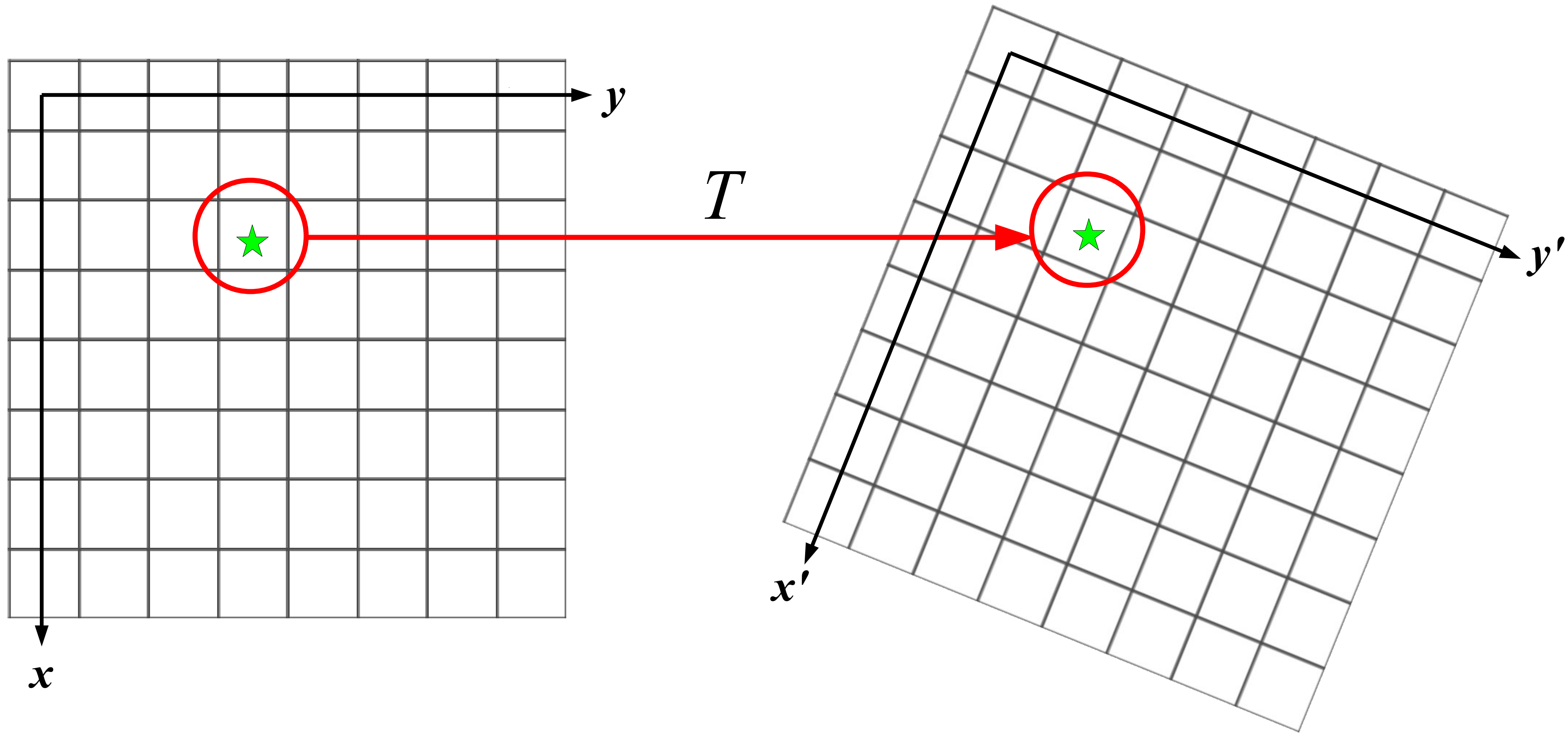
- Deformação de objetos do espaço (rígidas)



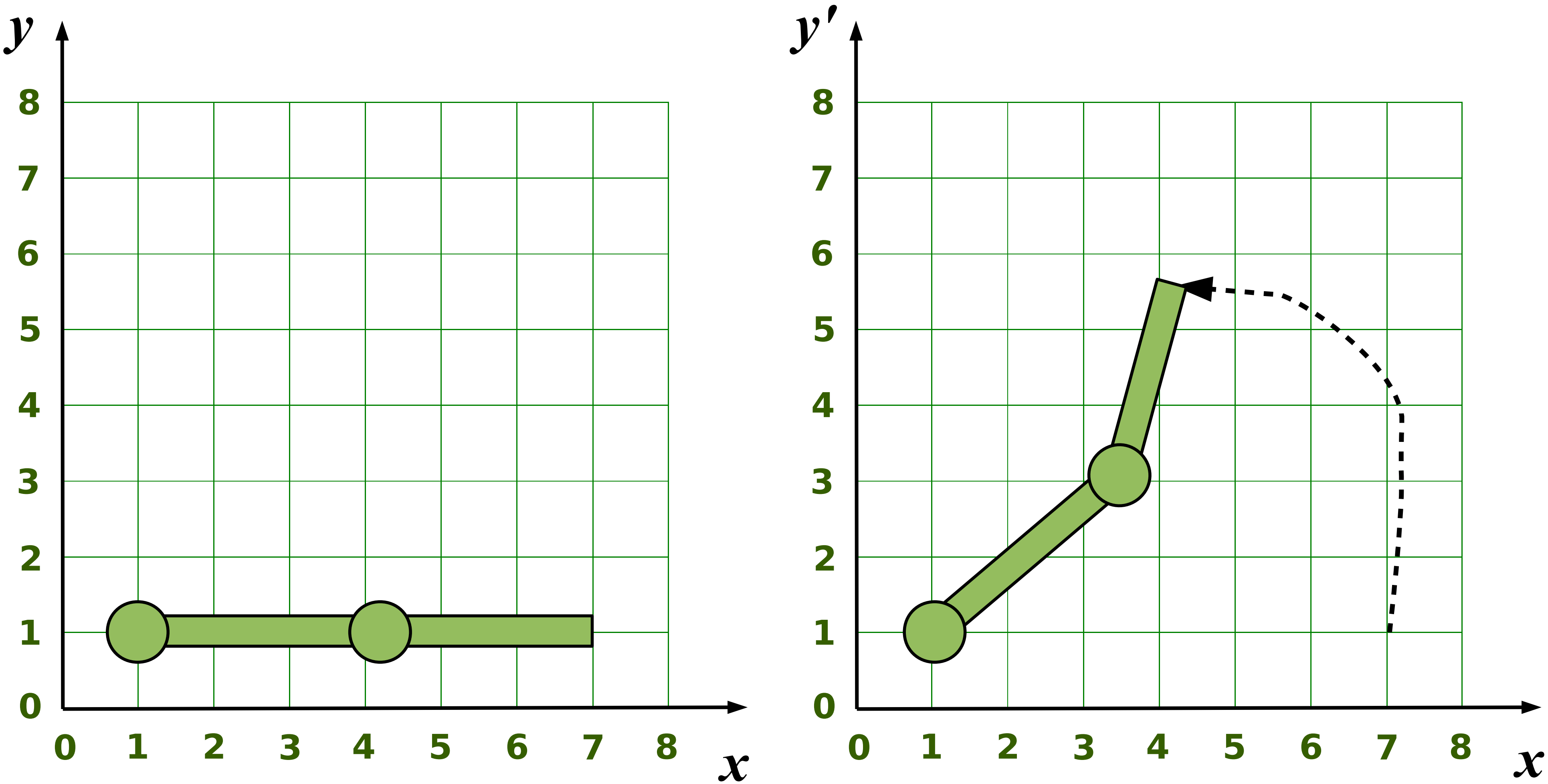
- Deformação de objetos do espaço (não rígidas)



- Mudança de Coordenadas



- Movimento



Conceitos de Álgebra Linear

Conceitos de Álgebra Linear

$$\mathbb{R}^n = \{(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$: pontos no $\mathbb{R}^\mathrm{n}$

Operações lineares no $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) + (y_{1,} y_{2,} \ldots, y_n)$$

$$= (x_1 + y_{1,} x_2 + y_{2,} \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda (x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) = (\lambda x_{1,} \lambda x_{2,} \ldots, \lambda x_n)$$

Transformações Lineares

Definição:

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Propriedades:

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

$$L(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda L(\mathbf{u})$$

$GL(n)$: grupo especial linear de ordem n
transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$

Transformações Lineares

Base do $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0) \qquad \mathbf{a_1} = L\,\mathbf{e_1} = (a_{11,} a_{21,} a_{31,} \ldots, a_{n1})$$

$$\mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \mathbf{a_2} = L\,\mathbf{e_2} = (a_{12,} a_{22,} a_{32,} \ldots, a_{n2})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathbf{e_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1) \qquad \mathbf{a_n} = L\,\mathbf{e_1} = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots, a_{nn})$$

$$L_e = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad L(\mathbf{x}) = L_e\,\mathbf{x}$$

Transformação Linear: representada por **Matriz**

$$L(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad L() \Leftrightarrow A$$

Combinação: multiplicação de matrizes

$$(T \circ L)(\mathbf{x}) = T(L(\mathbf{x})) = (T_e L_e) \cdot \mathbf{x}$$

Soma: soma de matrizes

$$(T + L)(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + L(\mathbf{x}) = (T_e + L_e) \cdot \mathbf{x}$$

Transformações Lineares

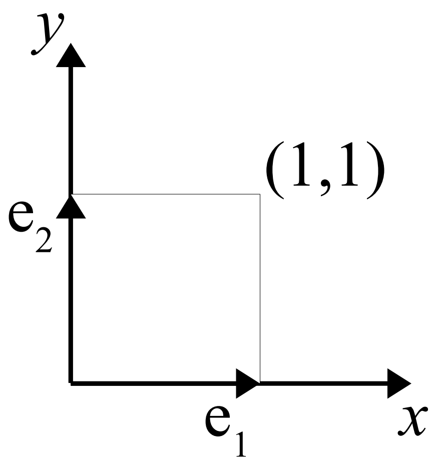
Transformação Linear: representada por **Matriz**

$$L(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad L(\,) \Leftrightarrow A$$

$GL(n)$: grupo especial linear de ordem n
transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$
matrizes invertíveis de ordem n

Transformações Lineares

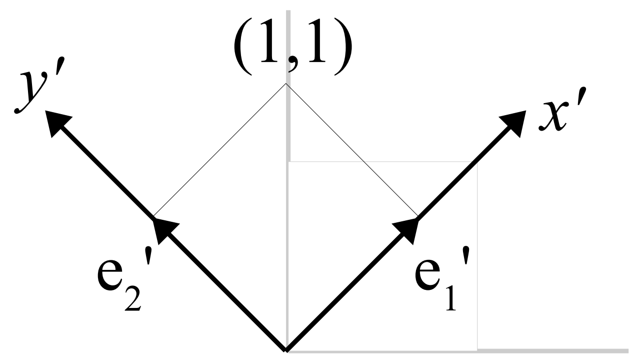
Exemplos: mudança de base/referencial



Base F

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$



Base G

$$e_1' = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{vmatrix}$$

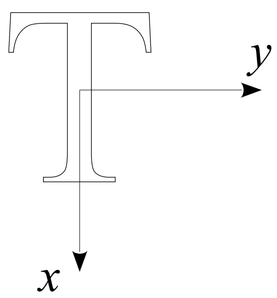
$$e_2' = \begin{vmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{vmatrix}$$

Transformação **T**: transforma coordenadas de G para F

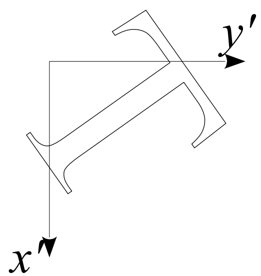
$$\mathbf{T} = e_1' e_2' = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{vmatrix}$$

Transformações Lineares

$$x' = a_2 x + a_1 y$$
$$y' = b_2 x + b_1 y$$

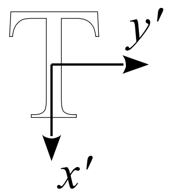
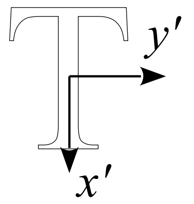
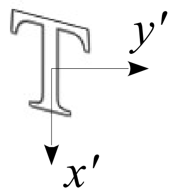
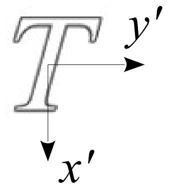


$$\mathbf{p}' = \mathbf{T} \times \mathbf{p}$$

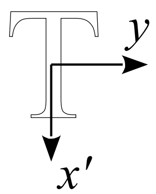
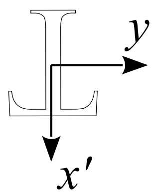
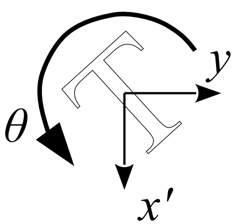


$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

Transformações Lineares

Nome	Matriz (T)	Equações	Exemplo
Identidade	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$	
Escala	$\begin{vmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{vmatrix}$	$x' = c_x x$ $y' = c_y y$	
Cisalhamento vertical	$\begin{vmatrix} 1 & s_v \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x + s_v y$ $y' = y$	
Cisalhamento horizontal	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s_h & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x$ $y' = s_h x + y$	

Transformações Lineares

Nome	Matriz (T)	Equações	Exemplo
Reflexão (em torno de x)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$	
Reflexão (em torno de y)	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$	
Rotação	$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$	$x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y$ $y' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y$	

- **Produto Interno**: métrica para distâncias

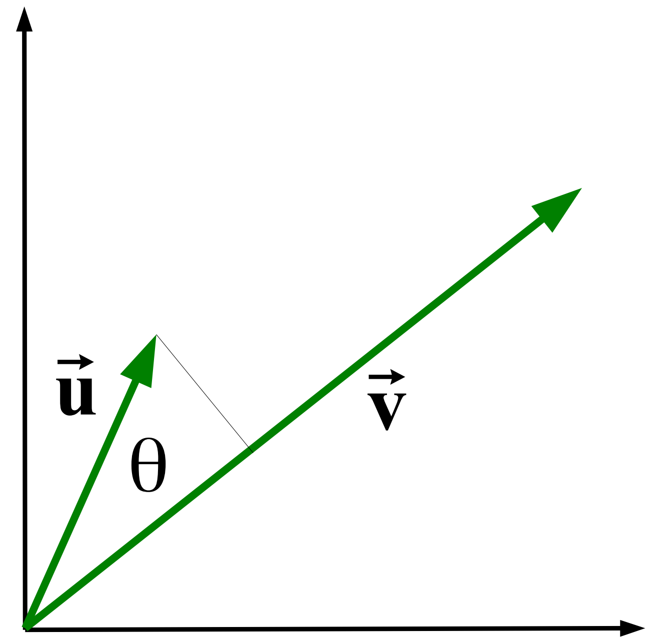
$$\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Comprimento (norma) de um vetor

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle}$$

- Ângulo entre dois vetores

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|}$$



- **Produto Interno**: métrica para distâncias

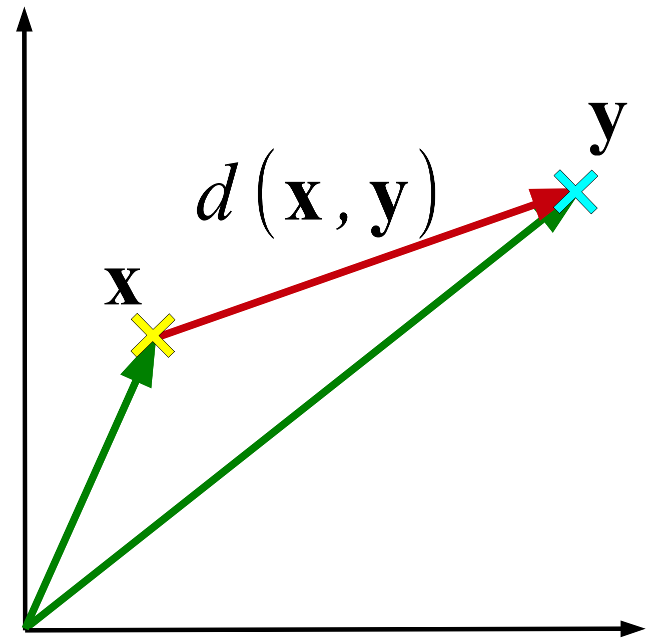
$$\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Comprimento (norma) de um vetor

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle}$$

- Distância entre dois pontos

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$



Transformações Ortogonais

- Definição transformação ortogonal

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

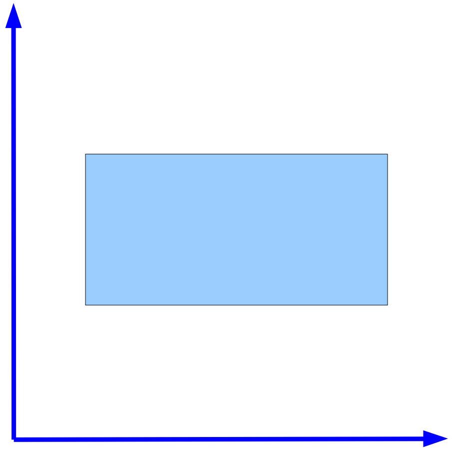
- Transformações ortogonais preservam a norma do espaço e portanto a distância → ***Isometria***
- Isometrias modificam a posição dos objetos e pontos, mas mantêm as relações métricas (distâncias, ângulos).
- Transformações: reflexões, rotações e translações (movimentos rígidos).

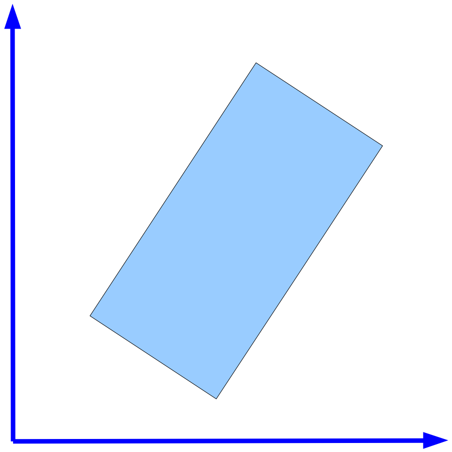
Geometria Euclideana

Geometria Euclideana

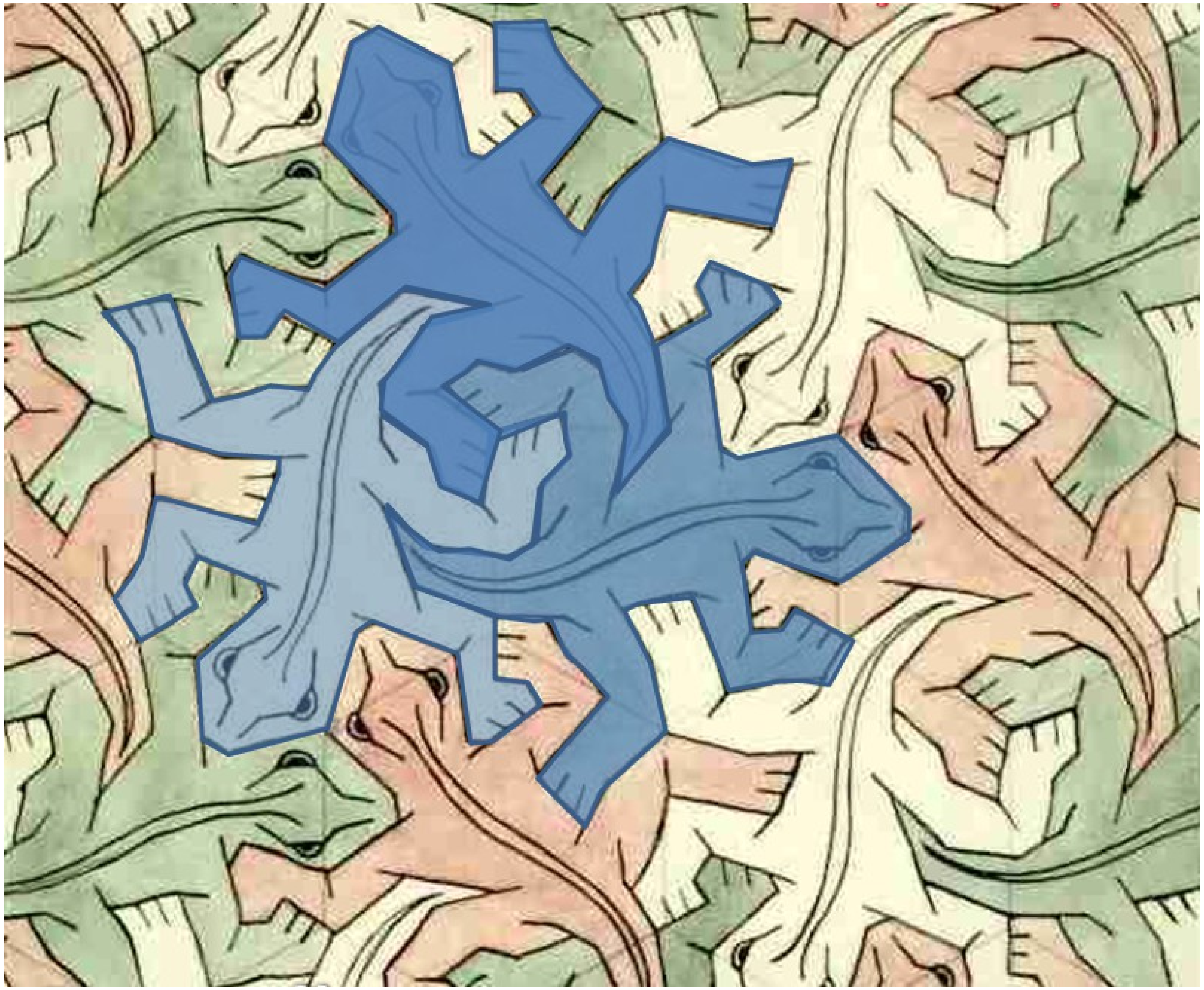
- **Congruência** é o conceito básico da Geometria Euclideana
- Dois objetos O_1 e O_2 são ditos congruentes se somente se existir uma **isometria** *T* tal que:

$$T\left(O_1\right)=O_2$$





Qual o grupo de isometrias do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$?



Geometria Euclideana

- Qual o grupo de isometrias do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$?

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

- Transformação é isometria se e somente se:

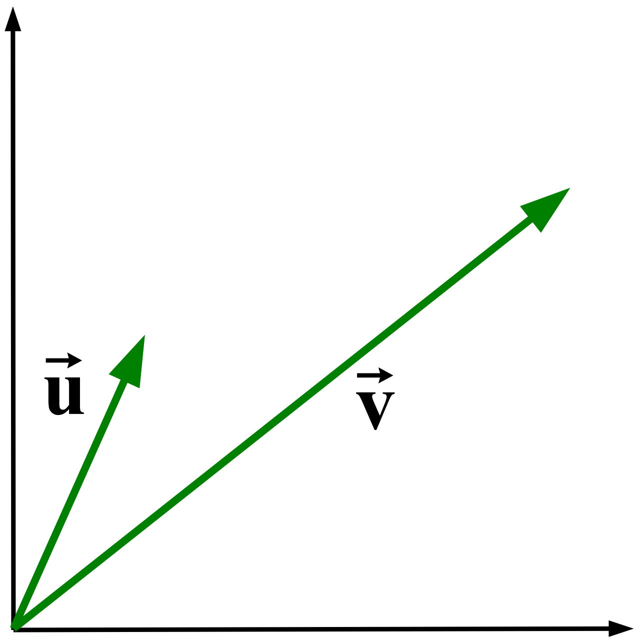
$$T(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) + \mathbf{v_0}$$

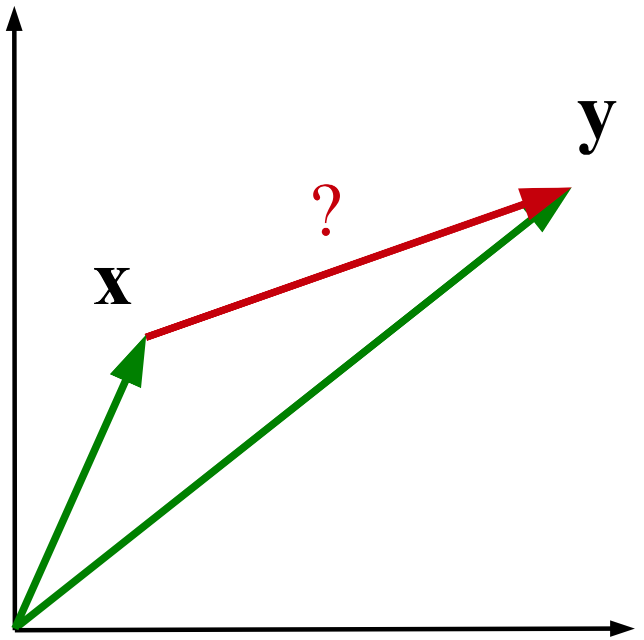
  - L é uma transformação ortogonal
  - v_0 é um vetor fixo

- Isometria: transformação ortogonal + translação.
- Transformação T não é necessariamente linear!

Problemas:

- O grupo de transformações da Geometria Euclidiana não tem uma álgebra associada: translação não é linear, não pode ser representada por uma matriz.
- No espaço Euclidiano não há distinção clara entre ponto e vetor.





Geometria Afim

Geometria Afim

- Como resolver a confusão entre pontos e vetores da geometria Euclidiana?

- O espaço afim é constituído por um par (P, V)
  - P é o espaço de pontos: $\mathbf{x} \in P$
  - V é o espaço de vetores: $\vec{\mathbf{x}} \in V$

- Na realidade: $V = P = \mathbb{R}^n$

Geometria Afim

- Como V é um espaço vetorial: admite combinação linear de vetores

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{\mathbf{u}}_i\,,\;\; a_i \in \mathbb{R}$$

- Admite também transformações lineares entre vetores:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}\right)$$

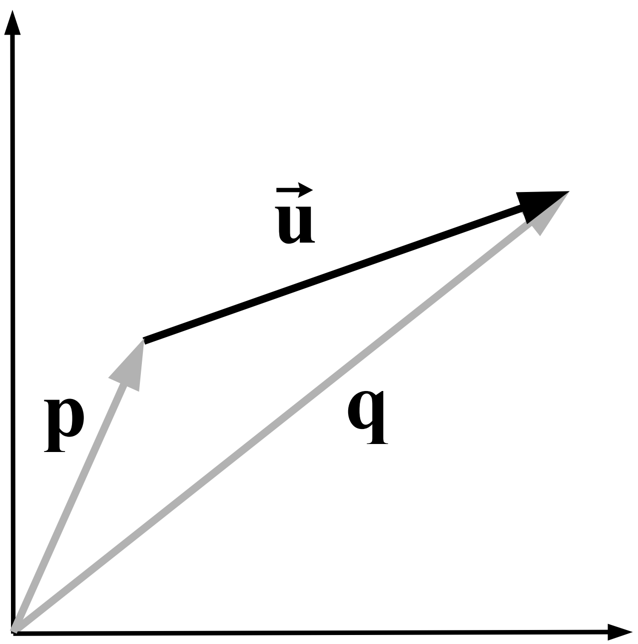
Geometria Afim

- Definimos: soma de ponto com vetor:

$$\mathbf{p} + \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{q} \in P$$

- Subtração de pontos:

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = \vec{\mathbf{u}}$$



Geometria Afim

- Soma de ponto com vetor:

$$\mathbf{p} + \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{q} \in P$$

- Subtração de pontos:

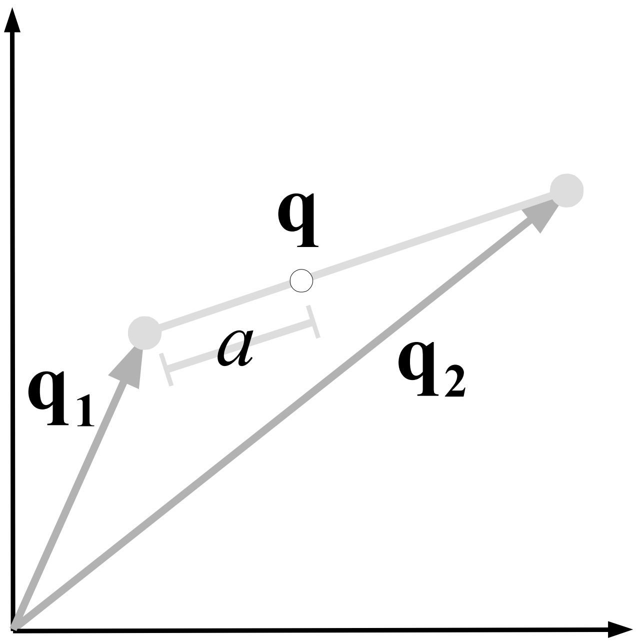
$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = \vec{\mathbf{u}}$$

- Generalizando (combinação linear arbitrária de pontos):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{p}_i \in V \quad \text{sse} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

- Definimos: interpolação de pontos:

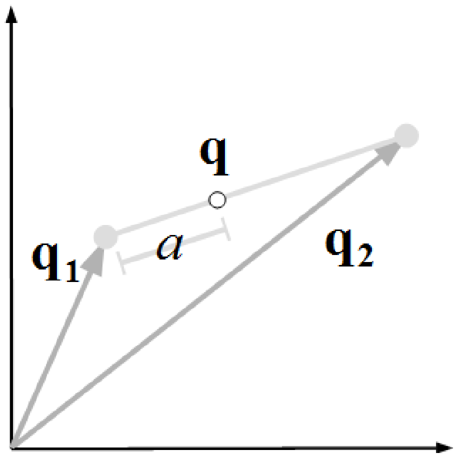
$$\mathbf{q} = \mathbf{q_1} + a\left(\mathbf{q_2} - \mathbf{q_1}\right),\ \ a \in [0,1]$$



Geometria Afim

- Interpolação de pontos:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_1} + a(\mathbf{q_2} - \mathbf{q_1}),\ \ a \in [0,1]$$



- De outra forma:

$$\mathbf{q} = a_1 \mathbf{q_1} + a_2 \mathbf{q_2} \ \text{ com } \ a_1, a_2 \in [0,1], a_1 + a_2 = 1$$

- Combinação afim de pontos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{p}_i \in P \quad \text{sse} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Geometria Afim

- Conceito afim: equação paramétrica da reta (que passa pelos pontos a e b)

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$
$$\mathbf{r}(t)=(1-t)\mathbf{a}+t(\mathbf{b}) \qquad t\in\mathbb{R}$$

- Uma reta é um conjunto de pontos!

Resumindo:

- Vetores sempre podem ser combinados (combinação linear):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{\mathbf{u}}_i , \; a_i \in \mathbb{R}$$

- Pontos podem ser combinados em duas situações:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{p}_i , \; a_i \in \mathbb{R}$$

se $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ combinação resulta num vetor

se $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ combinação resulta num ponto

Transformações Afim

- Transformação $T : A_1 \rightarrow A_2$ entre dois espaços afim $A_1 = (P_1, V_1)$ e $A_2 = (P_2, V_2)$ é afim sse:

  1) T preserva vetores, além disso T é transformação linear

  2) T preserva pontos, e além disso: $T(\mathbf{p}+\vec{\mathbf{v}})=T(\mathbf{p})+T(\vec{\mathbf{v}})$

- Generalizando (2): T preserva combinações afim de pontos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \Rightarrow \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{p}_{\boldsymbol{i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\mathbf{p}_{\boldsymbol{i}})$$

Transformações Afim

- T preserva combinações afim de pontos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \Rightarrow \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{p}_{\boldsymbol{i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\mathbf{p}_{\boldsymbol{i}})$$

- T preserva retas:

$r(t) = (1 - t)\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ reta que passa por **a** e **b**

$$\begin{aligned} T(r(t)) &= T((1-t)\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}) \\ &= T((1-t)\,\mathbf{a}) + T(t\,\mathbf{b}) \\ &= (1-t)\,T(\mathbf{a}) + t\,T(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

reta que passa por $T(\mathbf{a})$ e $T(\mathbf{b})$

Transformações Afim

- Retas paralelas: r passa por $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ e s passa por $\mathbf{c}$,$\mathbf{d}$

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \lambda\,(\mathbf{d} - \mathbf{c})$$

$$r(t) = (1 - t)\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b} \qquad\qquad s(q) = (1 - q)\,\mathbf{d} + q\,\mathbf{c}$$

$$T\,(r(t)) = T\,(\lambda\,(s(q))$$
$$T\,((1 - t)\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}) = T\,(\lambda\,((1 - q)\,\mathbf{d} + q\,\mathbf{c}))$$
$$T\,((1 - t)\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}) = \lambda T\,((1 - q)\,\mathbf{d} + q\,\mathbf{c})$$
$$T\,((1 - t)\,\mathbf{a}) + T(t\,\mathbf{b})) = \lambda(T\,((1 - q)\,\mathbf{d}) + T(q\,\mathbf{c}))$$
$$(1 - t)\,T\,(\mathbf{a}) + t\,T(\mathbf{b}) = \lambda((1 - q)\,T(\mathbf{d}) + q\,T(\mathbf{c}))$$

- T preserva o paralelismo: reta que passa por $T(\mathbf{a})$,$T(\mathbf{b})$ é paralela à que passa por $T(\mathbf{c})$,$T(\mathbf{d})$

Transformações Afim

- Translação é uma transformação afim? $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}$
- Dada uma combinação afim de pontos: $t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}$, $t_1 + t_2 = 1$

$$\begin{aligned}
T(t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}) &= t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}} \\
&= t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} + (t_1 + t_2)\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}} \\
&= t_1(\mathbf{u} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}) + t_2(\mathbf{v} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}) \\
&= t_1 T(\mathbf{u}) + t_2 T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

- Translação preserva combinações afim de pontos: é transformação afim!

Transformações Afim

- Transformação $T(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}$, onde L é linear é afim?
- Dada uma combinação afim de pontos: $t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}$, $t_1+t_2=1$

$$\begin{aligned}
T(t_1\mathbf{u}+t_2\mathbf{v}) &= L(t_1\mathbf{u}+t_2\mathbf{v})+\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}\\
&= t_1 L(\mathbf{u})+t_2 L(\mathbf{v})+(t_1+t_2)\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}\\
&= t_1(L(\mathbf{u})+\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}})+t_2(L(\mathbf{v})+\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}})\\
&= t_1 T(\mathbf{u})+t_2 T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

- Preserva combinações afim de pontos: é transformação afim!

Transformações Afim

- Transformação $T(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{0}$, onde L é uma transformação ortogonal é uma isometria!

- Transformações rígidas (isometrias) que constituem o grupo de transformações da geometria Euclidiana são transformações afim!

Coordenadas Afim

- A é um espaço afim de dimensão n
- $\mathbf{o}$ é um ponto no espaço A
- $\{\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}\}$ é uma base de A
- $F = (\mathbf{o}, \{\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}\})$ é um referencial de A (define um sistema de coordenadas no espaço afim)

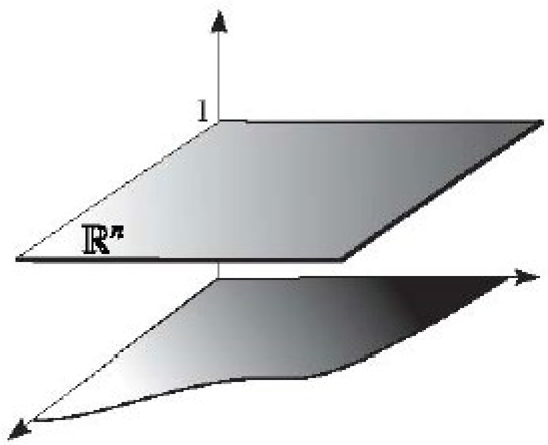
$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + \vec{\mathbf{v}} \in A$$

$$\vec{\mathbf{v}} = c_1 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} + c_2 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}} + \ldots + c_n \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + c_1 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} + c_2 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}} + \ldots + c_n \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}$$

Coordenadas Afim

- n+1 escalares 1, c_1, c_2, . . ., c_n são as coodenadas do ponto **p** no referencial F.
- Coordenadas indicadas por (c_1, c_2, . . ., c_n, 1)
- Geometricamente:



Transformações Afim

- Considere os referenciais:

$$F = (\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n, \mathbf{o})$$

$$G = (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n, \mathbf{o}')$$

- Considere o ponto: $\mathbf{x} = x_1 \vec{\mathbf{u}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{u}}_2 + \ldots + x_n \vec{\mathbf{u}}_n + \mathbf{o}$

- Seja T uma transformação linear

$$T(\vec{\mathbf{u}}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{\mathbf{v}}_i \qquad T(\mathbf{o}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,n+1} \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{u}}_j + \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\vec{\mathbf{u}}_j) + T(\mathbf{o})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i\,n+1} \right) \vec{\mathbf{v}}_i$$

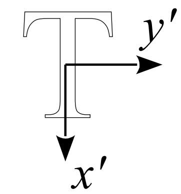
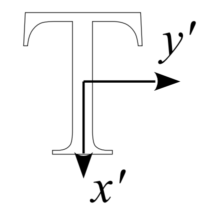
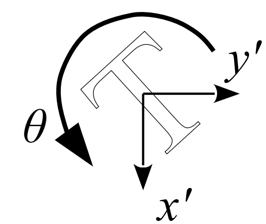
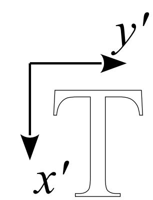
Transformações Afim

$$\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{u}}_j+\mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n} x_j T(\vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{j}})+T(\mathbf{o})$$

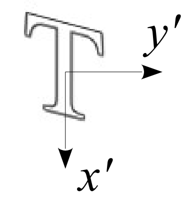
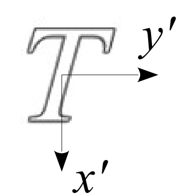
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j+a_{i\,n+1}\right)\vec{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{i}}$$

$$T(\mathbf{x})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} & a_{1\ n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} & a_{2\ n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n\ n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{vmatrix}$$

Tipos de Transformações Afim 2D

Nome	Matriz (T)	Equações	Exemplo
Identidade	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$	
Escala	$\begin{vmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = c_x x$ $y' = c_y y$	
Rotação	$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y$ $y' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y$	
Translação	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x + t_x$ $y' = y + t_y$	

Tipos de Transformações Afim 2D

Nome	Matriz (T)	Equações	Exemplo
Cisalhamento vertical	$\begin{vmatrix} 1 & s_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x + s_v y$ $y' = y$	
Cisalhamento horizontal	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$x' = x$ $y' = s_h x + y$	

O produto de transformações afim produz uma transformação afim

Composição de Transformações

Composição de transformações é equivalente à multiplicação de matrizes.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p'} = T_{\text{translação}} \circ T_{\text{rotação}} \circ T_{\text{cisalhamento}} \circ \mathbf{p}$$

Composição de Transformações

Composição de transformações é equivalente à multiplicação de matrizes.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p'} = T_{\text{translação}} \circ T_{\text{rotação}} \circ T_{\text{cisalhamento}} \circ \mathbf{p}$$

Composição de Transformações

Ordem das multiplicações é importante: operação não é comutativa!

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

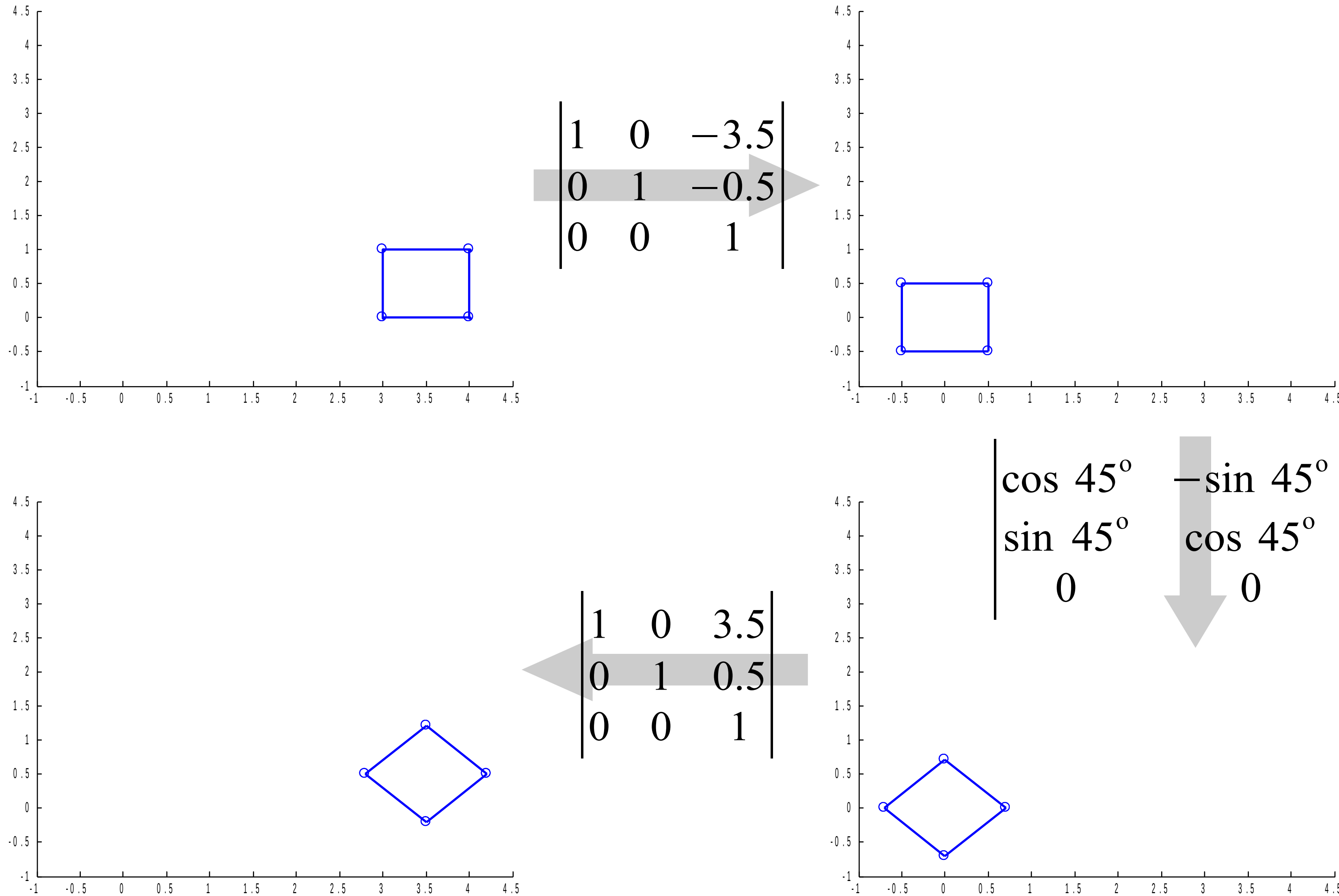
$$\mathbf{p'} = T_{\text{translação}} \circ T_{\text{rotação}} \circ T_{\text{cisalhamento}} \circ \mathbf{p}$$

$$\mathbf{p'} = (T_{\text{translação}} * (T_{\text{rotação}} * (T_{\text{cisalhamento}} * \mathbf{p})))$$

$$\mathbf{p'} = (T_{\text{translação}} * T_{\text{rotação}} * T_{\text{cisalhamento}}) * \mathbf{p})$$

Composição de Transformações

Exemplo: girar um objeto sobre seu centro



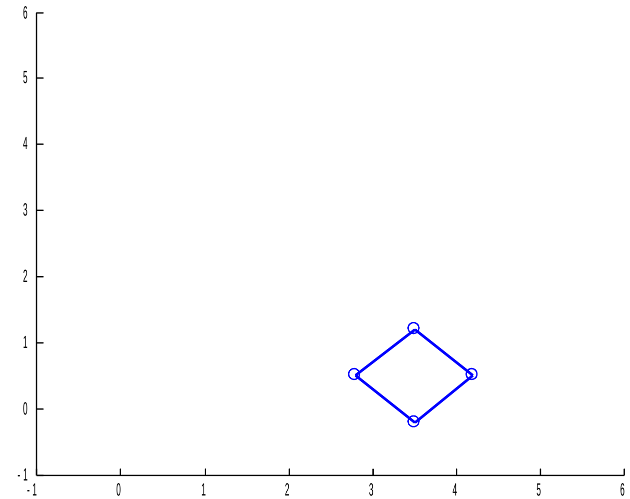
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

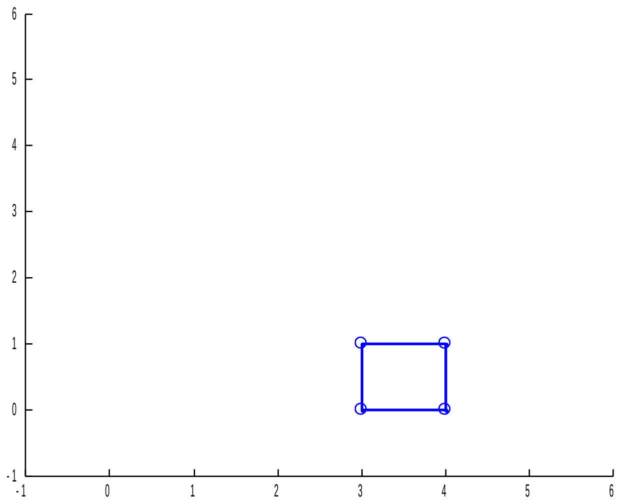
$$\begin{vmatrix} \cos\,45^{o} & -\sin\,45^{o} & 0 \\ \sin\,45^{o} & \cos\,45^{o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

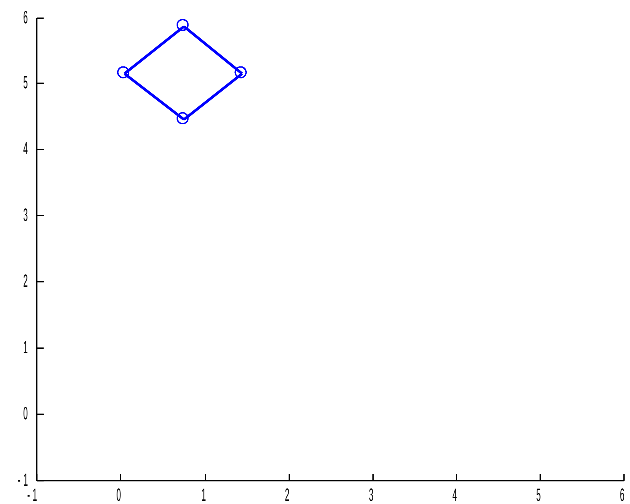
Exemplo: girar um objeto sobre seu centro

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos 45^{o} & -\sin 45^{o} & 0 \\ \sin 45^{o} & \cos 45^{o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$





$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos 45^{o} & -\sin 45^{o} & 0 \\ \sin 45^{o} & \cos 45^{o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



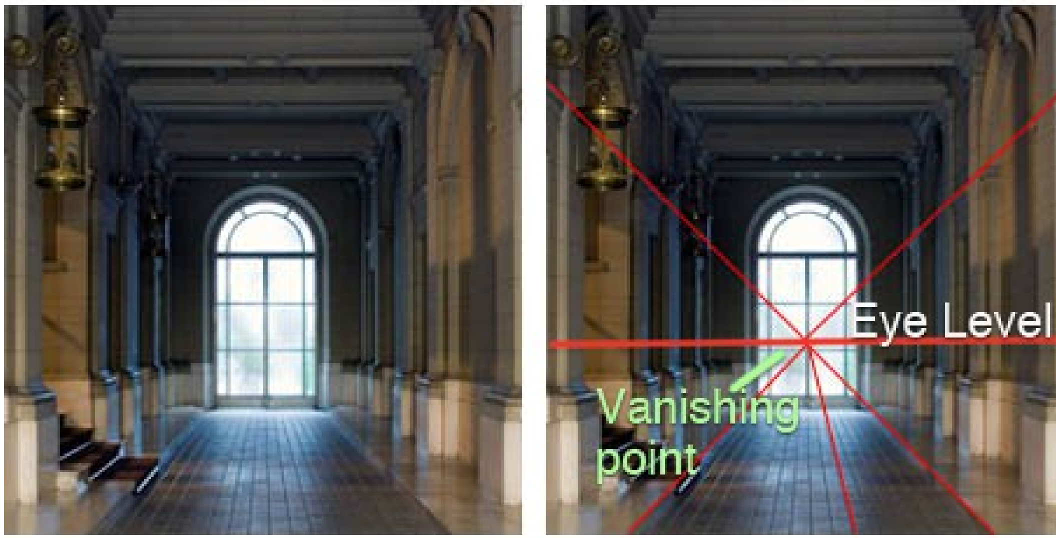
Geometria Projetiva

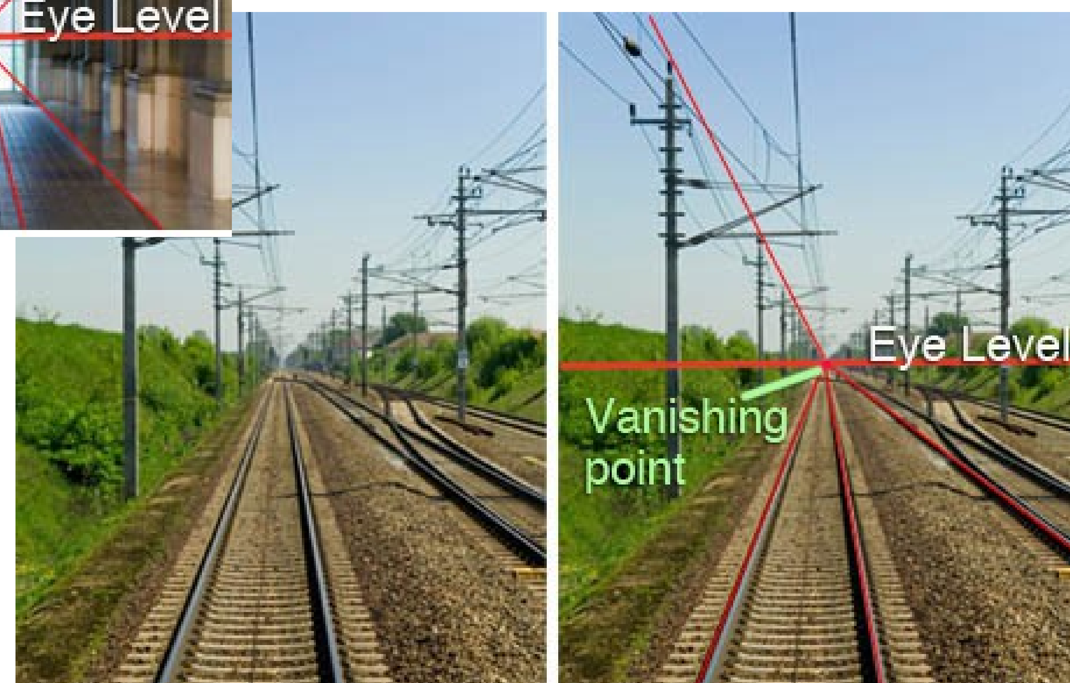
Perspectiva

Representação dos objetos em seus tamanhos e posições "corretas", tal qual a visão humana supostamente os compreenderia, a partir de um observador.

Perspectiva

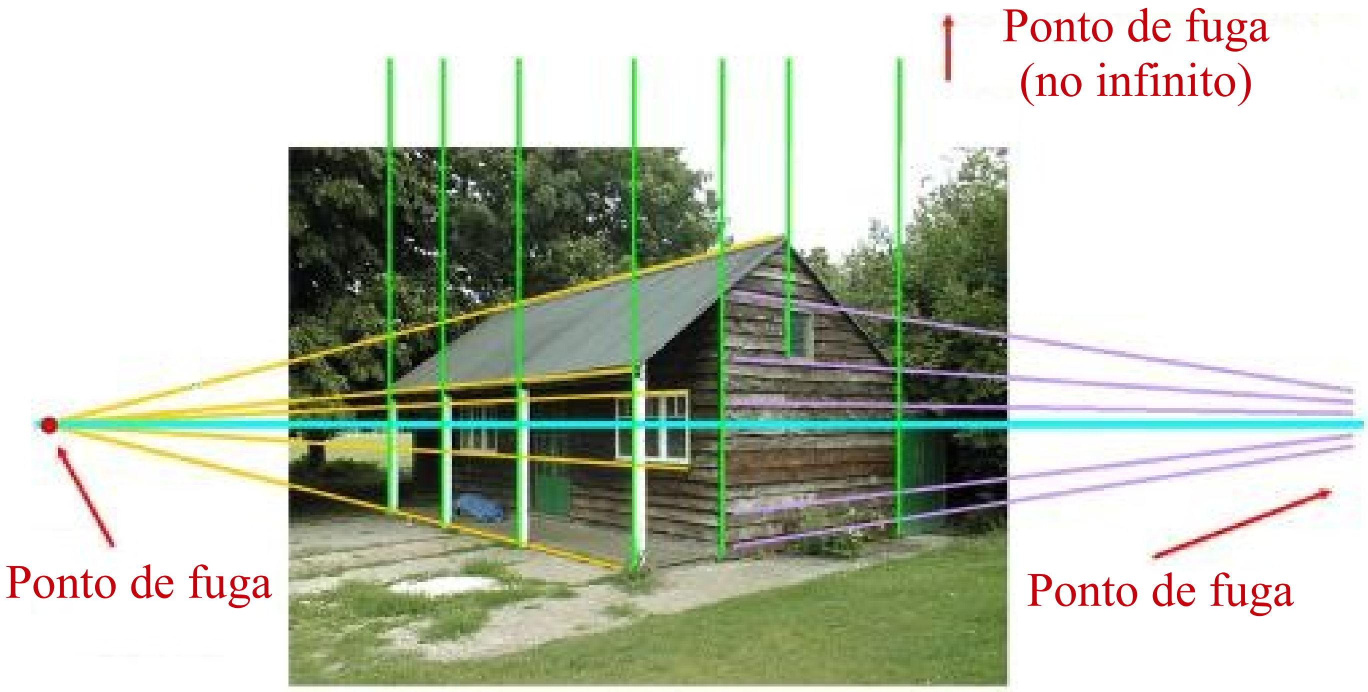
Pontos de fuga: onde retas paralelas se encontram





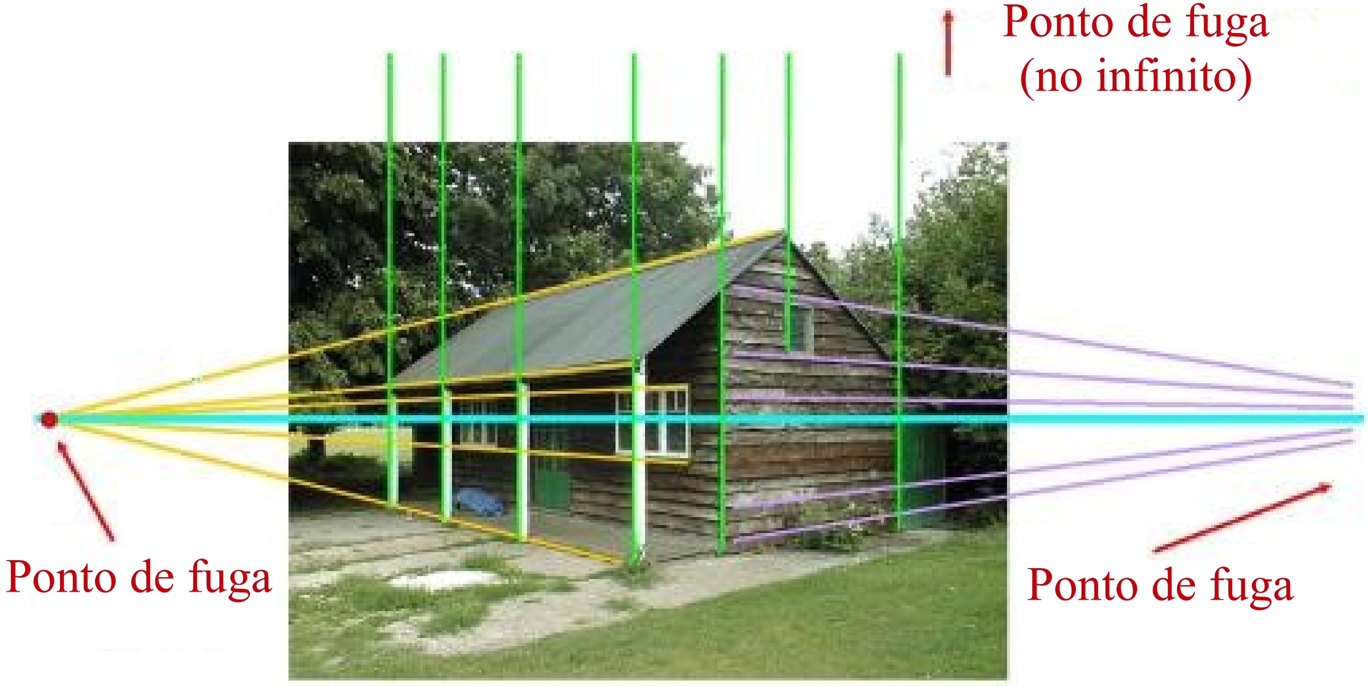
Perspectiva

Pontos de fuga: onde retas paralelas se encontram

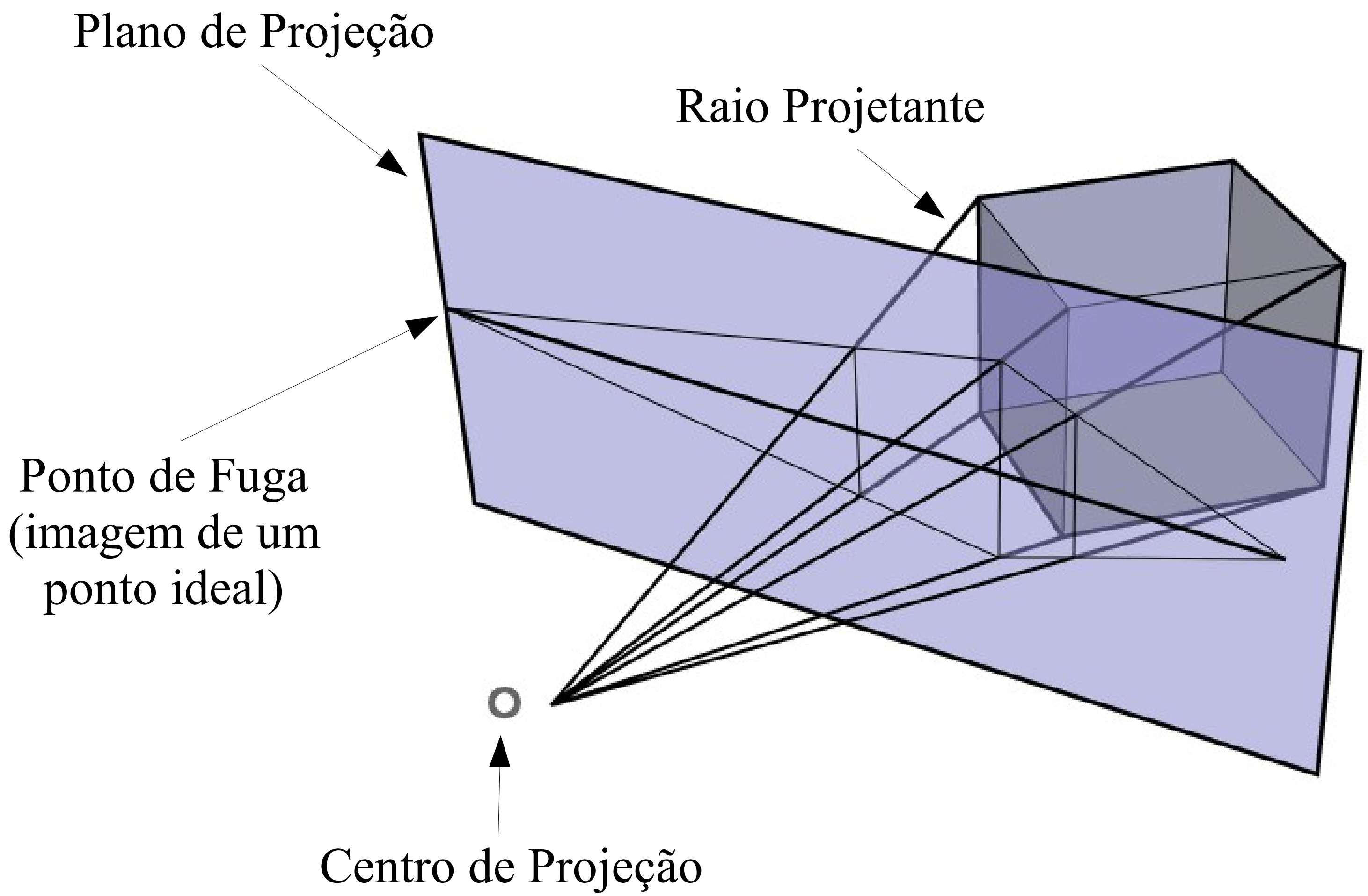


Perspectiva

Pontos de fuga: onde retas paralelas se encontram

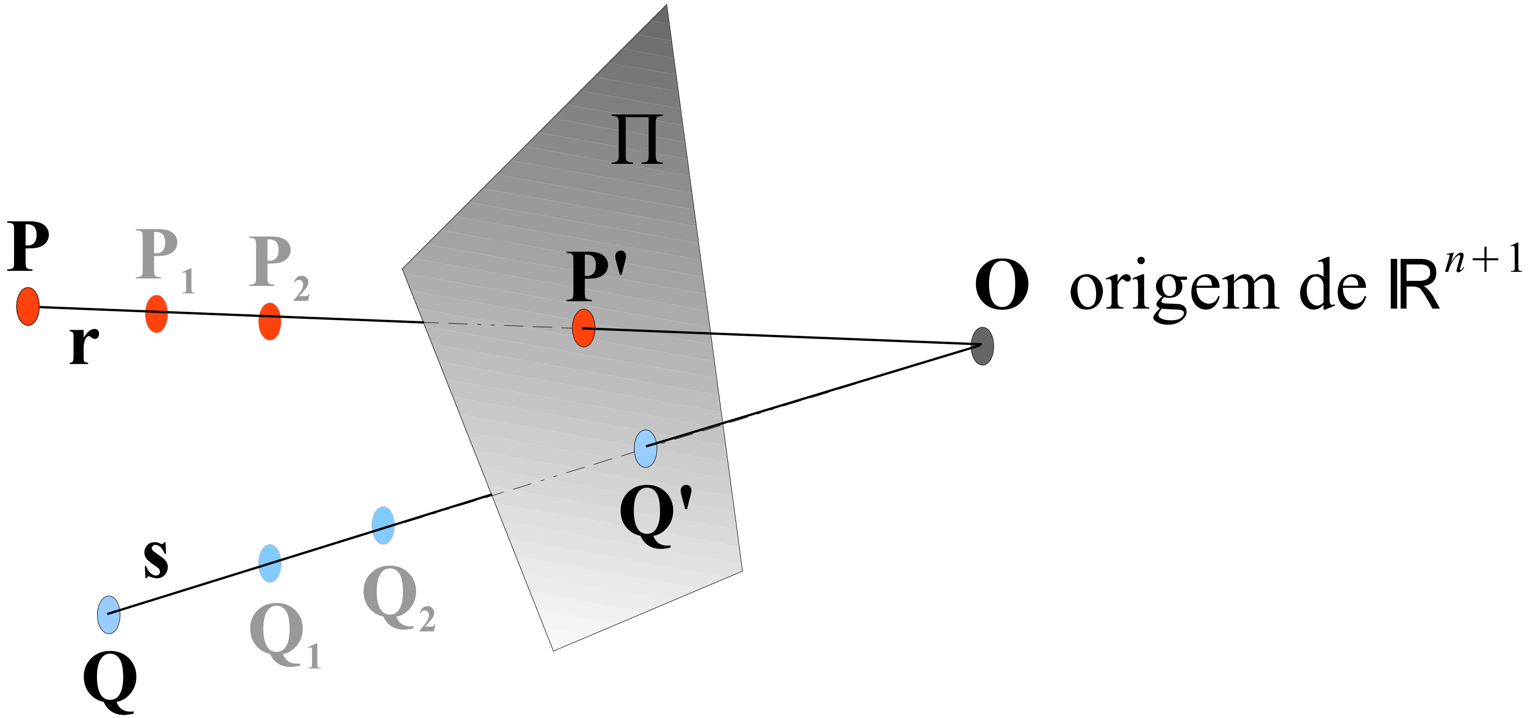


Projeção Perspectiva



Espaço Projetivo

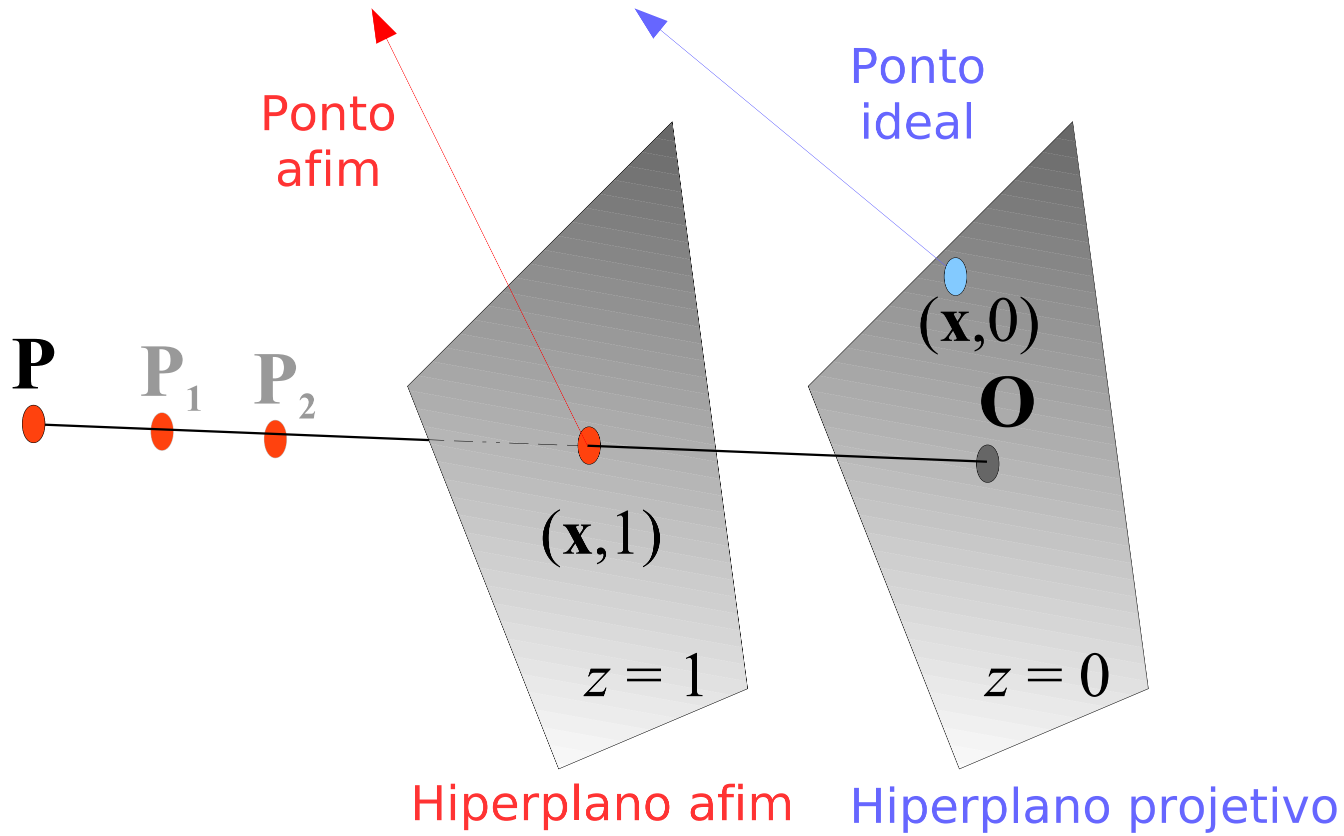
- Seja $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um hiperplano, onde $\mathbf{O} \notin \Pi$
- A projeção cônica de $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{P} \neq \mathbf{O}$ em Π é o ponto **P'** onde a reta **r**, definida por **OP**, intersecta Π



Partição de Pontos no Espaço Projetivo

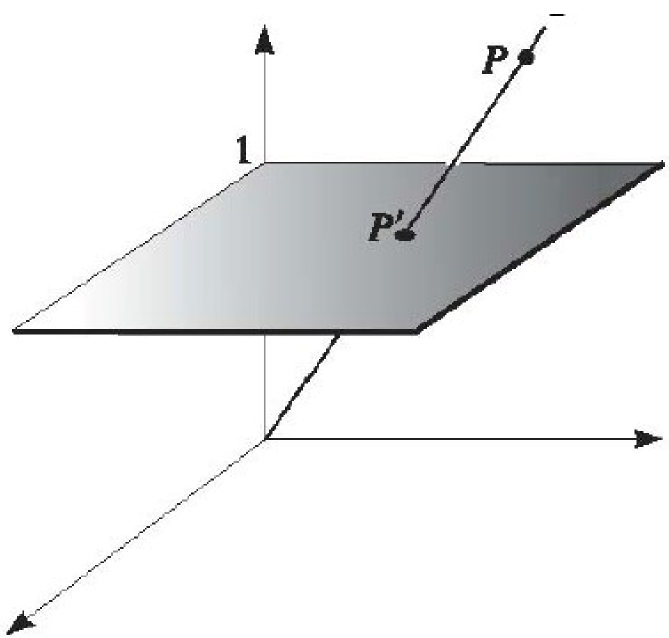
$$\left(x_{1,} x_{2,} \ldots , x_n , x_{n+1}\right) \in \mathrm{RP}^n \Leftrightarrow \left(\mathbf{x} , x_{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

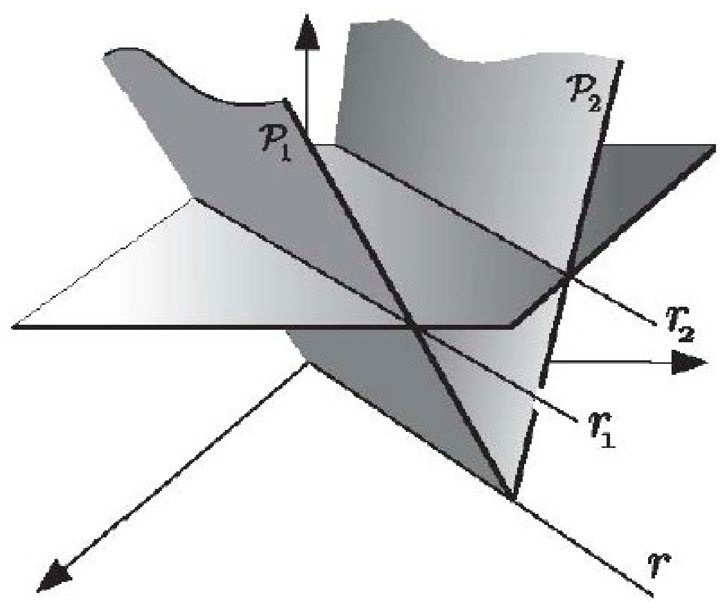
$$\mathrm{RP}^n = \left\{\left(\mathbf{x} , 1\right) \cup \left(\mathbf{x} , 0\right)\right\} \in \mathrm{RP}^n$$



Partição de Pontos no Espaço Projetivo

- Uma reta no plano afim define um plano passando pela origem do espaço projetivo
- Duas retas no plano afim se encontram num ponto (projetivo) ideal: ponto no infinito



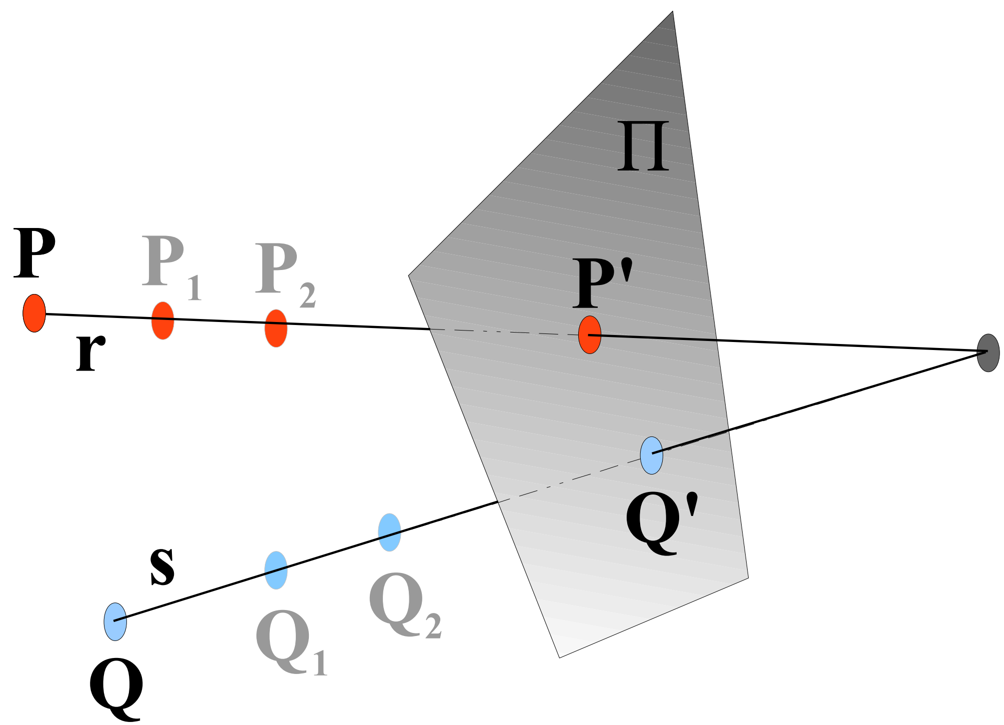


Coordenadas Homogêneas

- Todos os pontos de **r** representam o mesmo ponto projetivo

$$\mathbf{P'} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \text{ representa } \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P_1} = \lambda\mathbf{P'} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),\ \lambda \neq 0, \text{ também representa } \mathbf{P}$$



Coordenadas Homogêneas

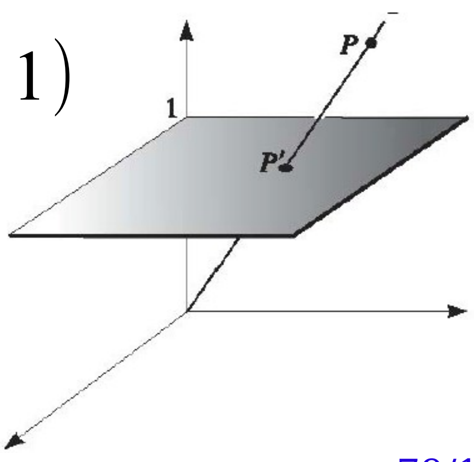
- Coordenadas de **P'** e λ**P'** representam o mesmo ponto projetivo: coordenadas homogêneas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),\ \lambda \neq 0$$

- Normalmente trabalhamos com pontos sobre o plano afim, i.e., $x_{n+1}=1$

- Para normalizar coordenadas homogêneas:

$$(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right)$$

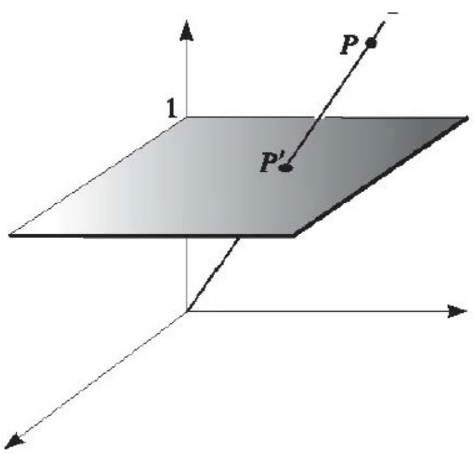


Transformações Projetivas

Transformações Projetivas

- Transformam pontos de RP^n em pontos de RP^n
- Do ponto de vista Euclidiano: transformam retas que passam pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ em outras retas que passam pela origem
- Transformação linear invertível $T: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
- Representada por matriz de ordem n+1
- T é definida a menos de um escalar não nulo

$$T(\lambda \mathbf{P}) = \lambda T(\mathbf{P}) = T(\mathbf{P})$$



Análise da Transformação Projetiva em $\mathbf{RP}^2$

Anatomia da matriz de transformação projetiva:

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

Blocos:

linear	perspectiva	translação	escala
$A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$	$P = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \end{vmatrix}$	$T = \begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \end{vmatrix}$	$S = \begin{vmatrix} s \end{vmatrix}$

Análise da Transformação Projetiva em $\mathbb{RP}^2$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & 0 \\ b & d & | & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva em $\mathbb{RP}^2$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & t_1 \\ 0 & 1 & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva em $\mathbb{RP}^2$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva em $\mathbf{RP}^2$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & s \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva em $\mathbb{RP}^2$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

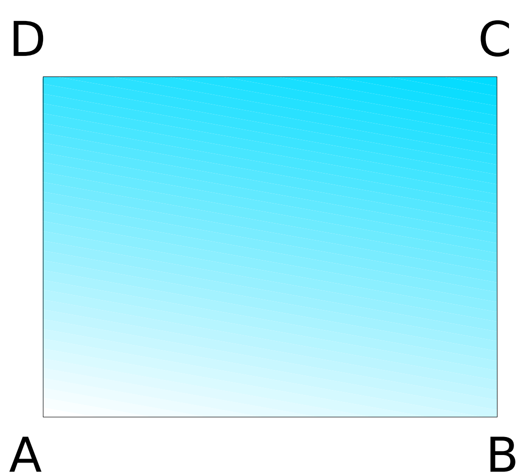
$$P = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

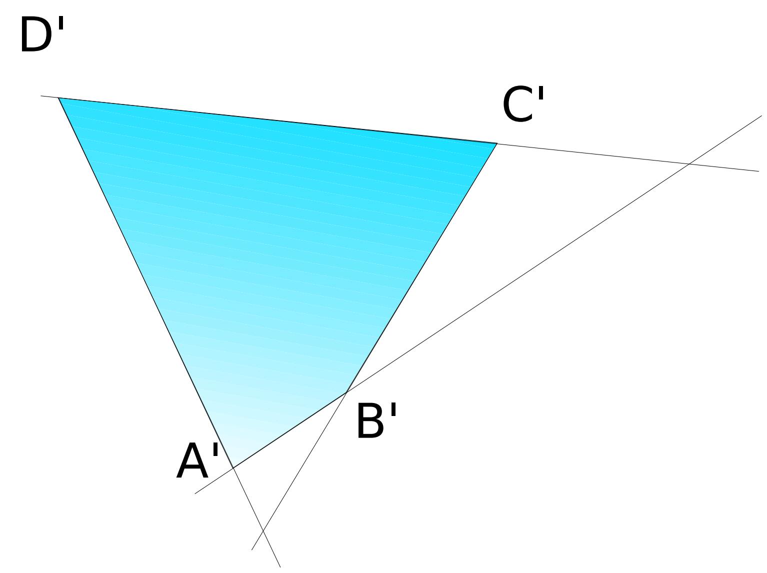
$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva em $\mathbf{RP}^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ x \cdot p_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/p_1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ y \cdot p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/p_2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x \cdot p_1 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{p_1} \qquad y \cdot p_2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{p_2}$$





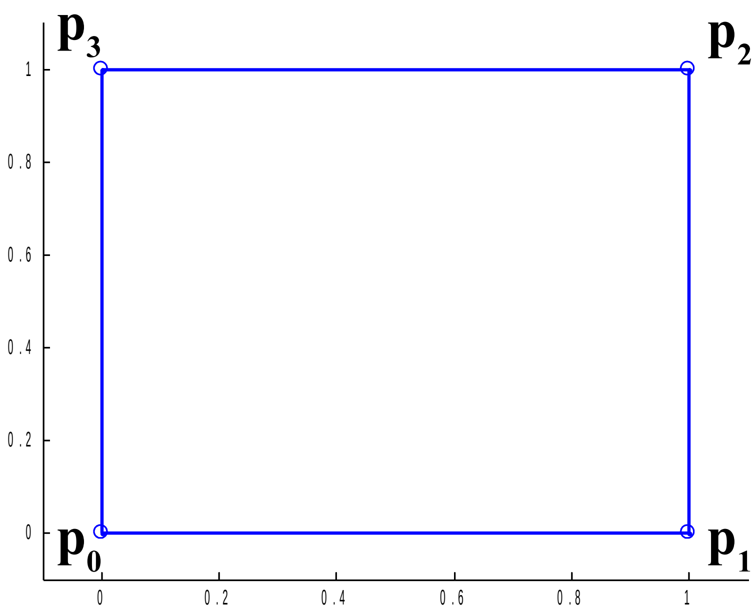
Coeficientes da Transformação Projetiva em $\mathbb{RP}^2$

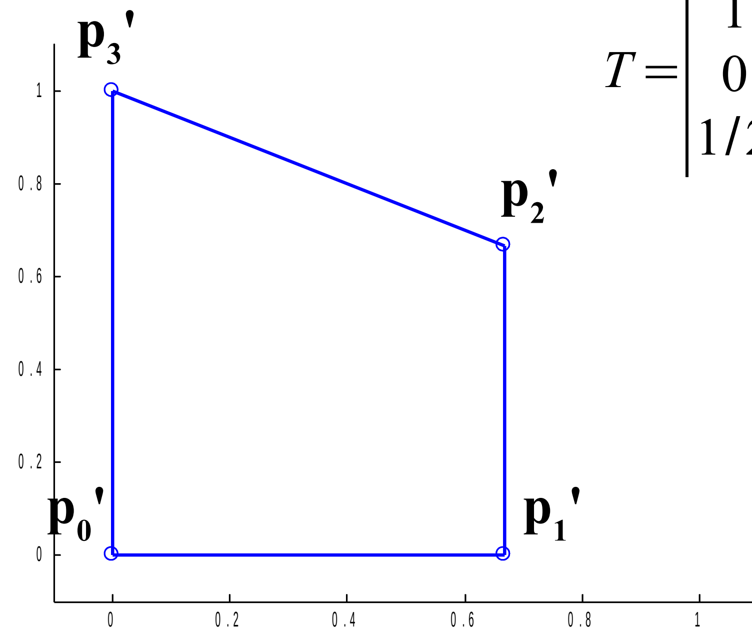
$$T(x, y, 1) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= (ax + by + c, dx + ey + f, gx + hy + i)$$

$$= \begin{vmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ gx + hy + i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{ax + by + c}{gx + hy + i} \\ \dfrac{dx + ey + f}{gx + hy + i} \\ 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo de Transformação Projetiva





$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

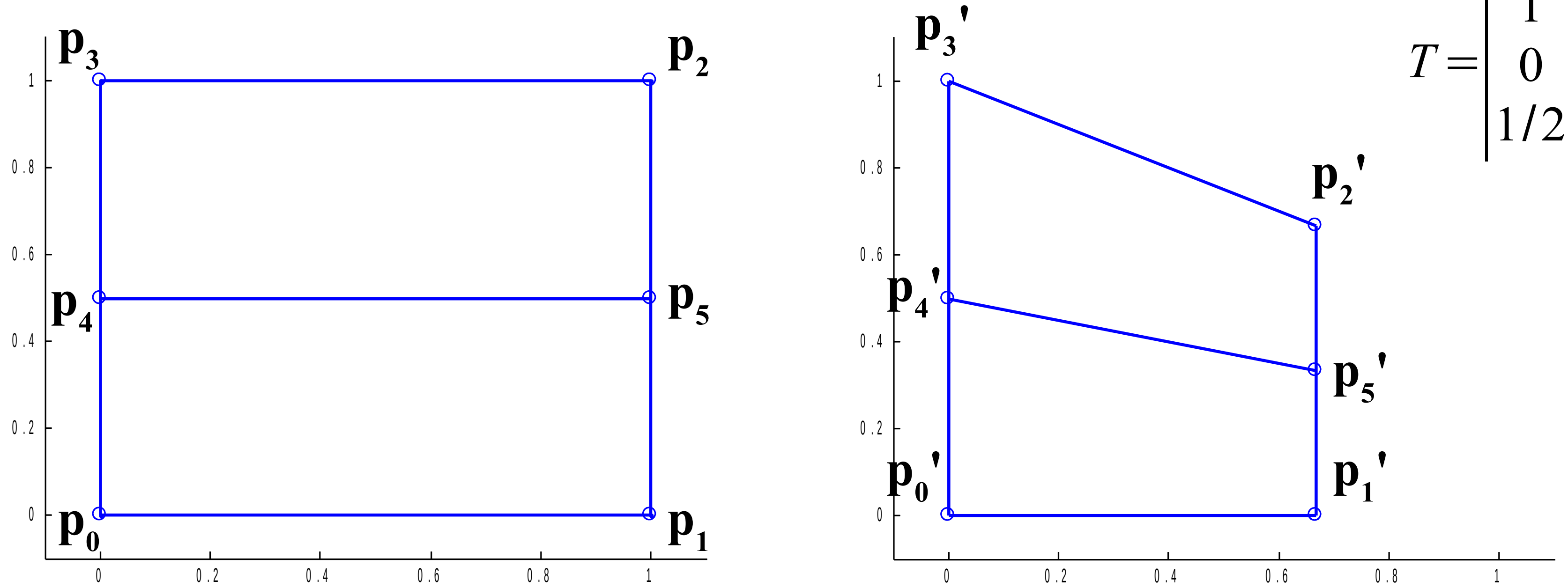
$$T(\mathbf{p_0}) = T \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p_1}) = T \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.67 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p_2}) = T \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.67 \\ 0.67 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p_3}) = T \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

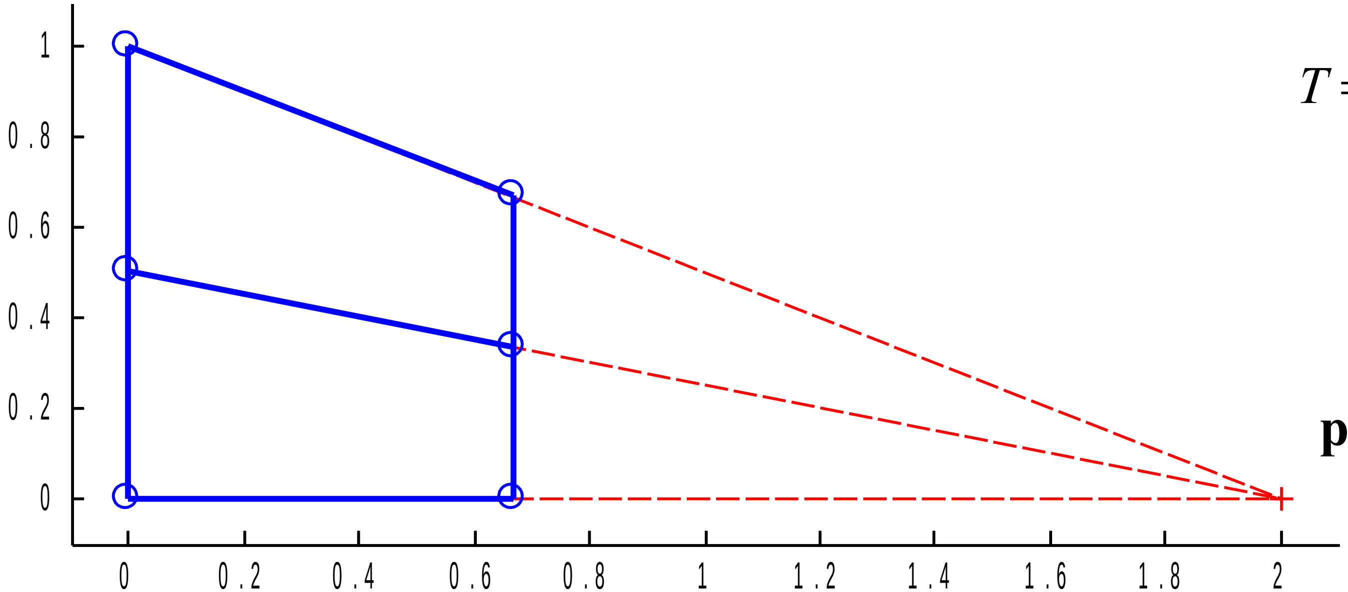
Exemplo de Transformação Projetiva



$$T=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p_4})=T\begin{vmatrix}0\\1/2\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\1/2\\1\end{vmatrix} \qquad T(\mathbf{p_5})=T\begin{vmatrix}1\\1/2\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\1/2\\1/2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\1/2\\3/2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2/3\\1/3\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0.67\\0.33\\1\end{vmatrix}$$

Exemplo de Transformação Projetiva

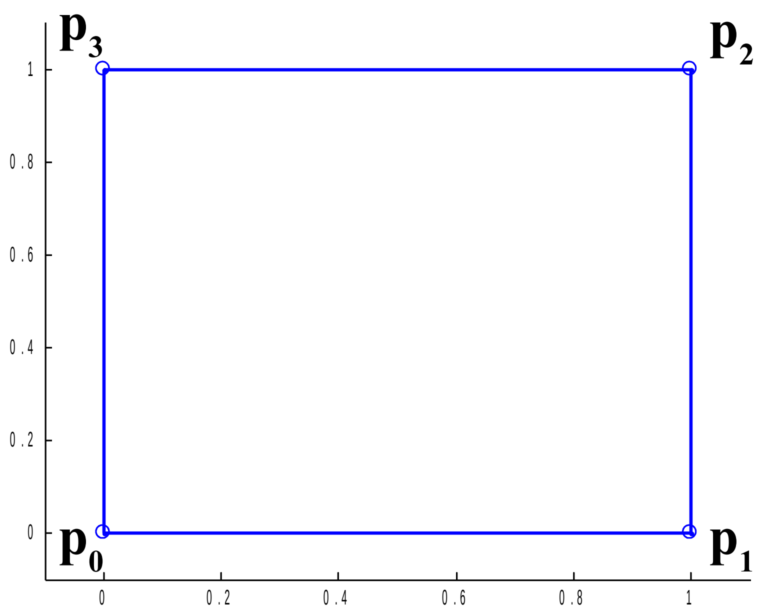


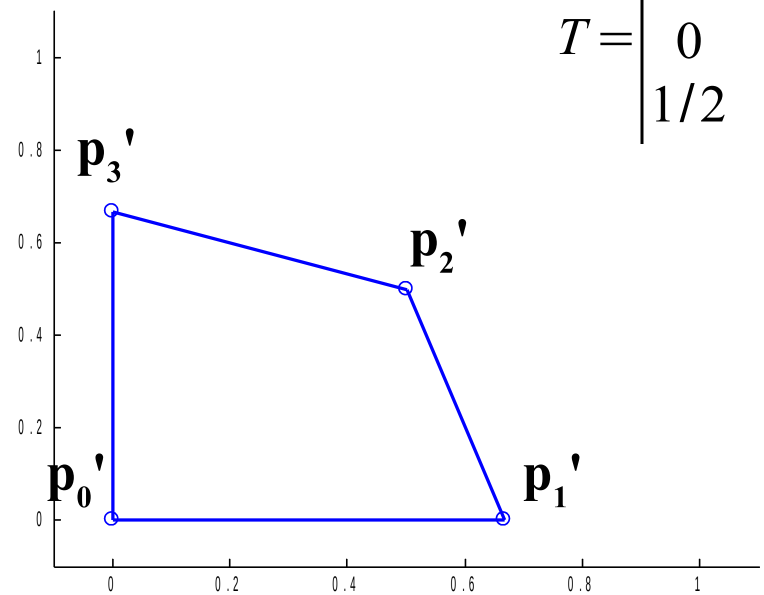
$$\mathbf{p}_{\mathbf{fx}}'$$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p}_{\mathbf{fx}}) = T \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ x/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ x/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo de Transformação Projetiva





$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

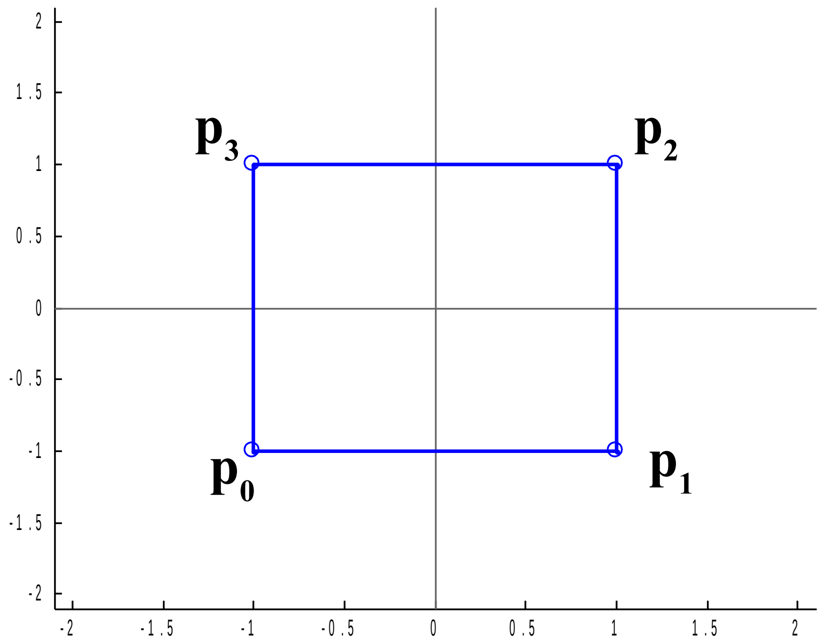
$$T(\mathbf{p_0}) = T\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

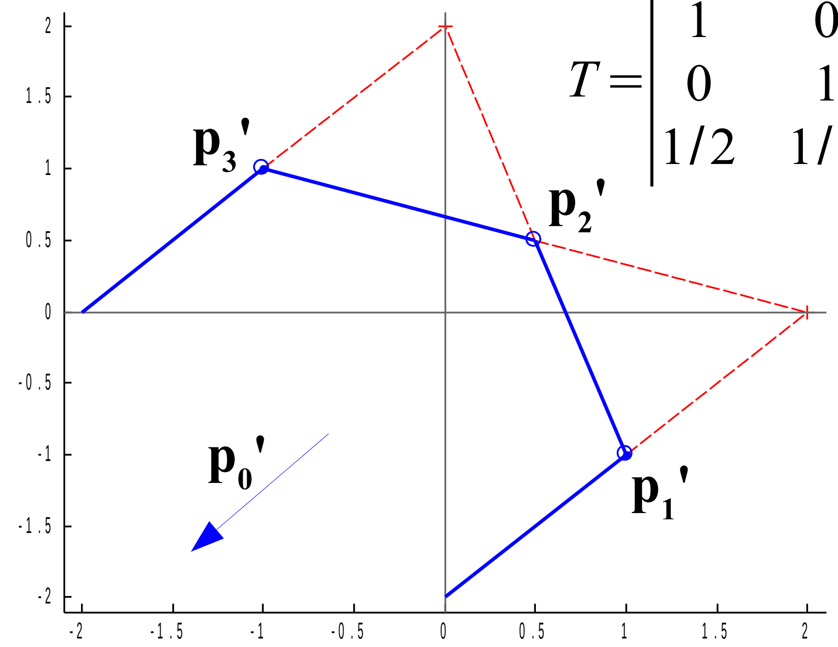
$$T(\mathbf{p_2}) = T\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2+1/2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p_1}) = T\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.67 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p_3}) = T\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.67 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo de Transformação Projetiva





$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

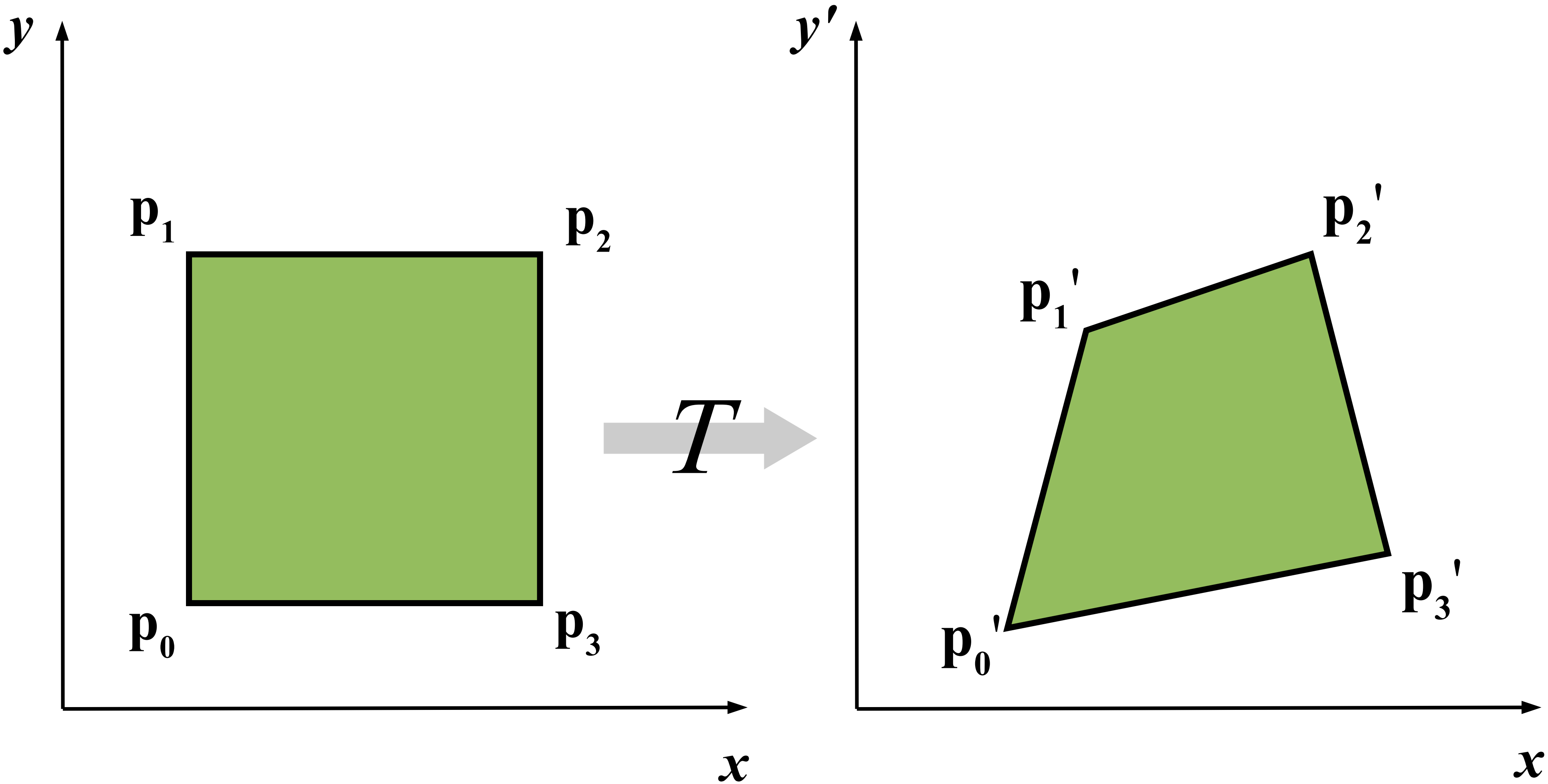
$$T(\mathbf{p}_3) = T \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2+1/2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p}_2) = T \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2+1/2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p}_1) = T \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2-1/2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T(\mathbf{p}_0) = T \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1/2-1/2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Cálculo dos coeficientes da transformação projetiva



y
p1
p2
p0
p3
x
T
y'
p1'
p2'
p0'
p3'
x'

Coeficientes da Transformação Projetiva

$$T(x, y, 1) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax+by+c \\ dx+ey+f \\ gx+hy+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{ax+by+c}{gx+hy+1} \\ \dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}$$

Coeficientes da Transformação Projetiva

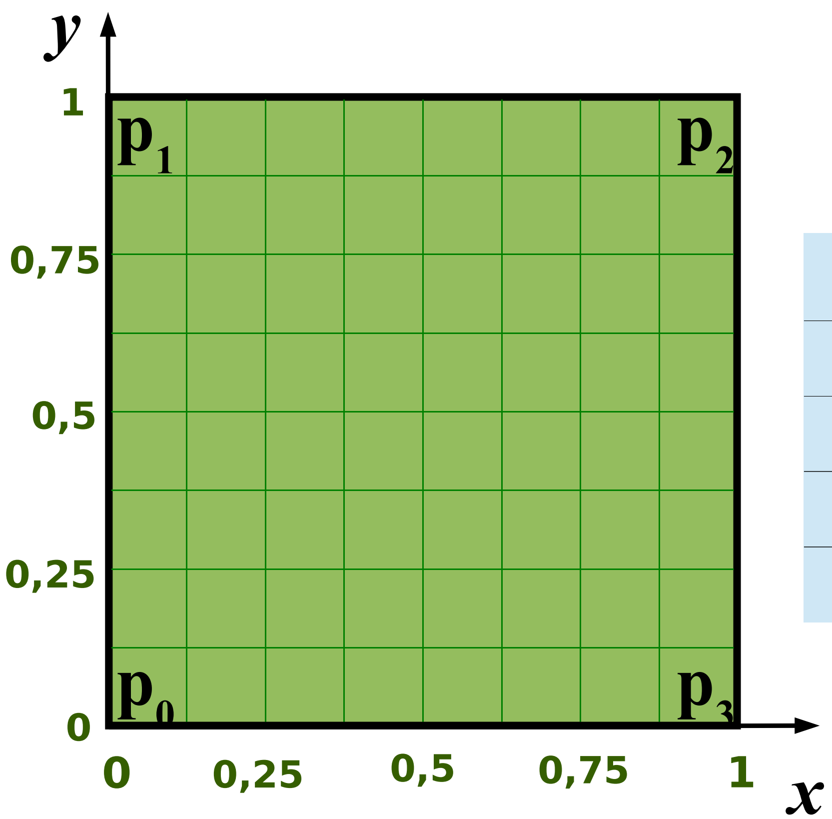
$$T(x, y, 1) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax+by+c \\ dx+ey+f \\ gx+hy+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{ax+by+c}{gx+hy+1} \\ \dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}$$

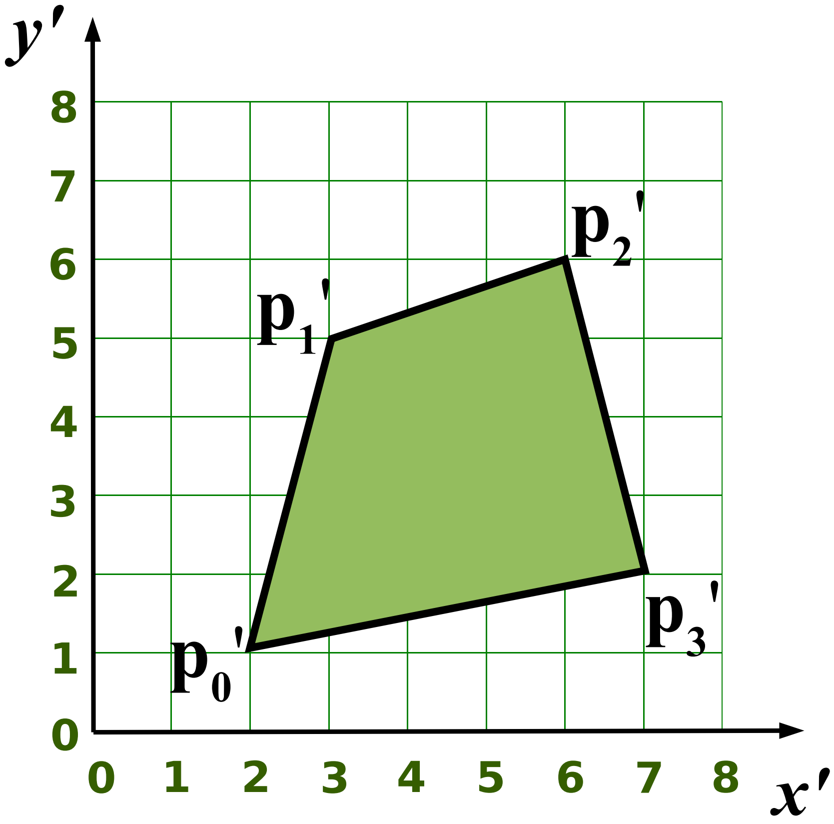
Sistema de equações:

$$x_k' = x_k a + y_k b + c - x_k\, x_k' g - y_k\, x_k' h$$
$$y_k' = x_k d + y_k e + f - x_k\, y_k' g - y_k\, y_k' h$$

Coeficientes da Transformação Projetiva



k	(x_k, y_k)	(x_k', y_k')
0	(0, 0)	(2,1)
1	(0, 1)	(3, 5)
2	(1, 1)	(6, 6)
3	(1, 0)	(7, 2)



$$x_k' = x_k a + y_k b + c - x_k\, x_k' g - y_k\, x_k' h$$
$$y_k' = x_k d + y_k e + f - x_k\, y_k' g - y_k\, y_k' h$$

Coeficientes da Transformação Projetiva

$$x_k' = x_k a + y_k b + c + 0d + 0e + 0f - x_k x_k' g - y_k x_k' h$$

$$y_k' = 0a + 0b + 0c + x_k d + y_k e + f - x_k y_k' g - y_k y_k' h$$

Forma matricial:

$$\begin{vmatrix} x_k' \\ y_k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_k x_k' & -y_k x_k' \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 & -x_k y_k' & -y_k y_k' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{vmatrix}$$

Sistema de Equações Lineares

$$\begin{vmatrix} x_k{}' \\ y_k{}' \end{vmatrix} \quad \mathbf{L}$$

Observações

$$\begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_k\,x_k{}' & -y_k\,x_k{}' \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 & -x_k\,y_k{}' & -y_k\,y_k{}' \end{vmatrix} \quad A$$

Coeficientes

(sistema de equações)

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{vmatrix} \quad \mathbf{x}$$

Coeficientes

(transformação projetiva)

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

Sistema de Equações Lineares

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

Observações $\mathbf{L}$

Coeficientes A

$$\begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \\ x_1' \\ y_1' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ y_{n-1}' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_0\, x_0' & -y_0\, x_0' \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & 1 & -x_0\, y_0' & -y_0\, y_0' \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1\, x_1' & -y_1\, x_1' \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1\, y_1' & -y_1\, y_1' \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_{n-1}\, x_{n-1}' & -y_{n-1}\, x_{n-1}' \\ 0 & 0 & 0 & x_{n-1} & y_{n-1} & 1 & -x_{n-1}\, y_{n-1}' & -y_{n-1}\, y_{n-1}' \end{bmatrix}$$

Método dos Mínimos Quadrados: ($k \geq 4$)

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{L}$$

$$A^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = A^t \cdot \mathbf{L}$$

$$\left(A^t \cdot A \right)^{-1} A^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = \left(A^t \cdot A \right)^{-1} A^t \cdot \mathbf{L}$$

$$\mathbf{x} = \left(A^t \cdot A \right)^{-1} A^t \cdot \mathbf{L}$$

Método dos Mínimos Quadrados: ($k \geq 4$)

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = y_i \ \left(i = 1, \ldots, m \right)$$

Erro médio quadrático:

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right|^2 = \| \mathbf{y} - A\mathbf{x} \|^2$$

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) = \| \mathbf{y} - A\mathbf{x} \|^2 &= (\mathbf{y} - A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} (\mathbf{y} - A\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{y} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \mathbf{y} - \mathbf{y}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{y} - 2 \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \mathbf{y} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} \end{aligned}$$

Método dos Mínimos Quadrados: ($k \geq 4$)

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = y_i \ \left(i = 1, \ldots, m \right)$$

Erro médio quadrático:

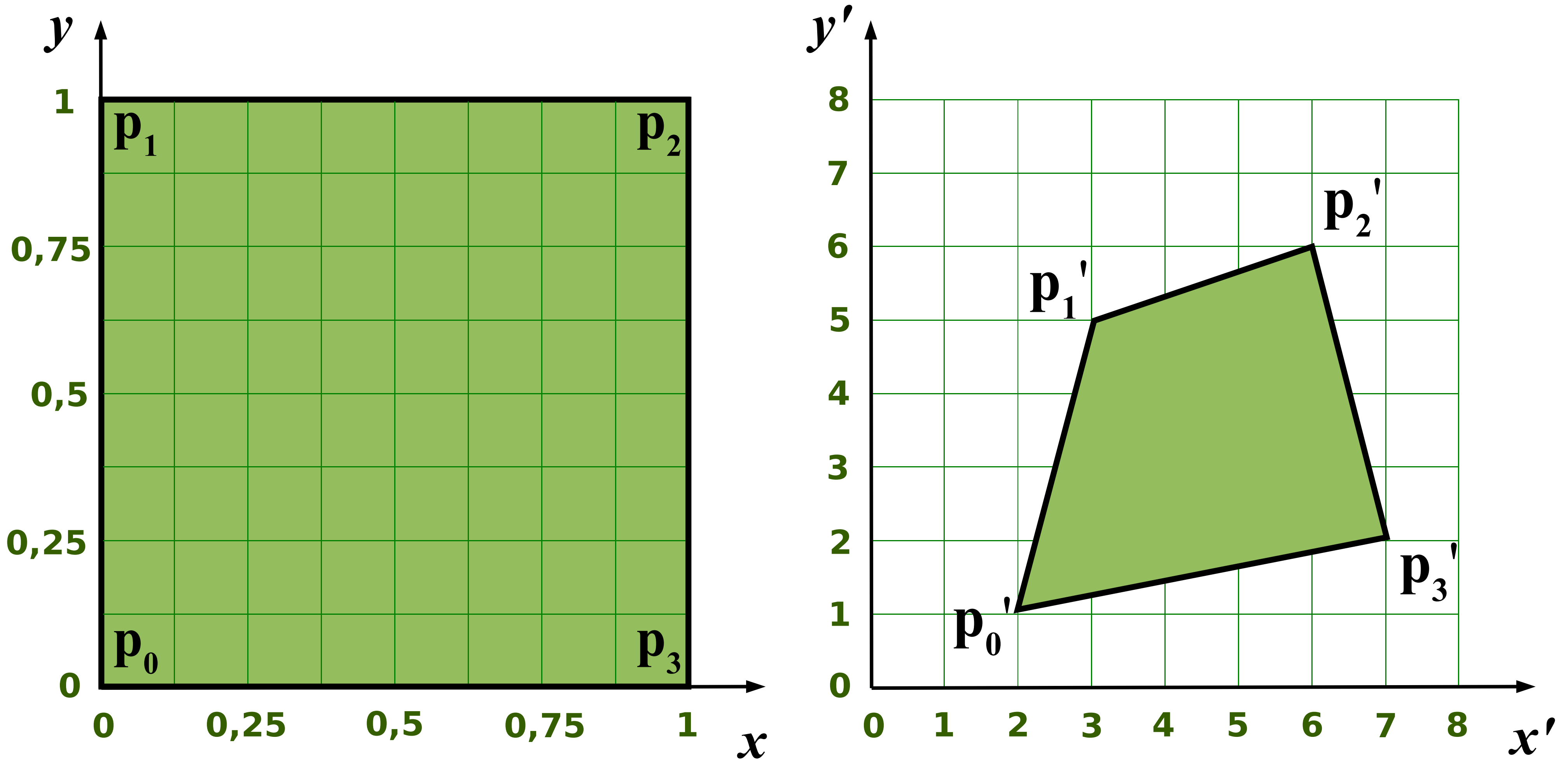
$$S(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - A\,\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \mathbf{y} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\,\mathbf{x}$$

Minimizando o erro médio quadrático: (derivada em $\mathbf{x}$ = 0)

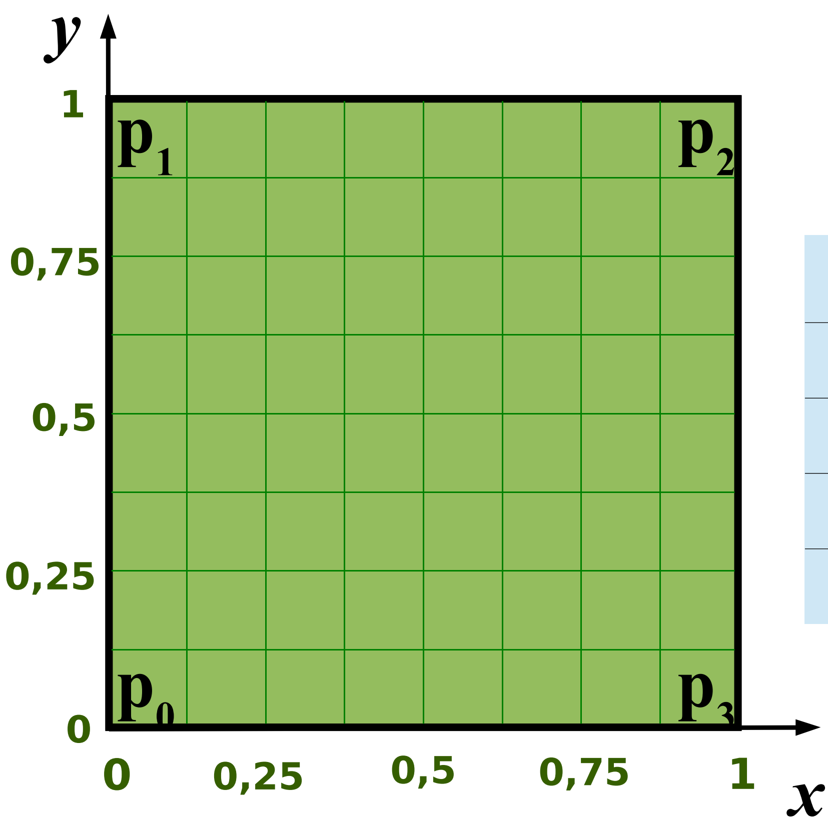
$$-A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \left(A^{\mathrm{T}} A\right)\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} = \left(A^{\mathrm{T}} A\right)^{-1} A^{\mathrm{T}} \mathbf{y}$$

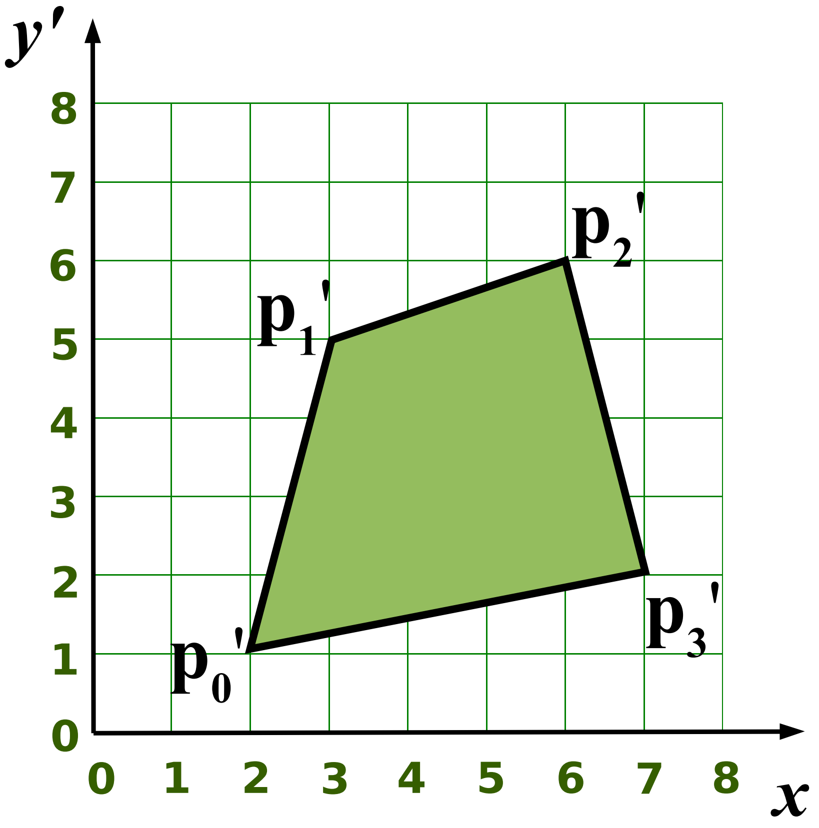
Exemplo: transformação entre dois quadriláteros



Exemplo: transformação entre dois quadriláteros



k	(x_k, y_k)	(x_k', y_k')
0	(0, 0)	(2,1)
1	(0, 1)	(3, 5)
2	(1, 1)	(6, 6)
3	(1, 0)	(7, 2)



Composição da Matriz dos Coeficientes

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

Observações $\mathbf{L}$

Coeficientes A

$$\begin{vmatrix} x_0' \\ y_0' \\ x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ y_2' \\ x_3' \\ y_3' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_0 x_0' & -y_0 x_0' \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & 1 & -x_0 y_0' & -y_0 y_0' \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 x_1' & -y_1 x_1' \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1 y_1' & -y_1 y_1' \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2 x_2' & -y_2 x_2' \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2 y_2' & -y_2 y_2' \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3 x_3' & -y_3 x_3' \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -x_3 y_3' & -y_3 y_3' \end{vmatrix}$$

Composição da Matriz dos Coeficientes

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

k	(x_k, y_k)	(x_k', y_k')
0	(0, 0)	(2,1)
1	(0, 1)	(3, 5)
2	(1, 1)	(6, 6)
3	(1, 0)	(7, 2)

Observações

$$\mathbf{L}$$

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Coeficientes

$$A$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Resultado: Mínimos Quadrados

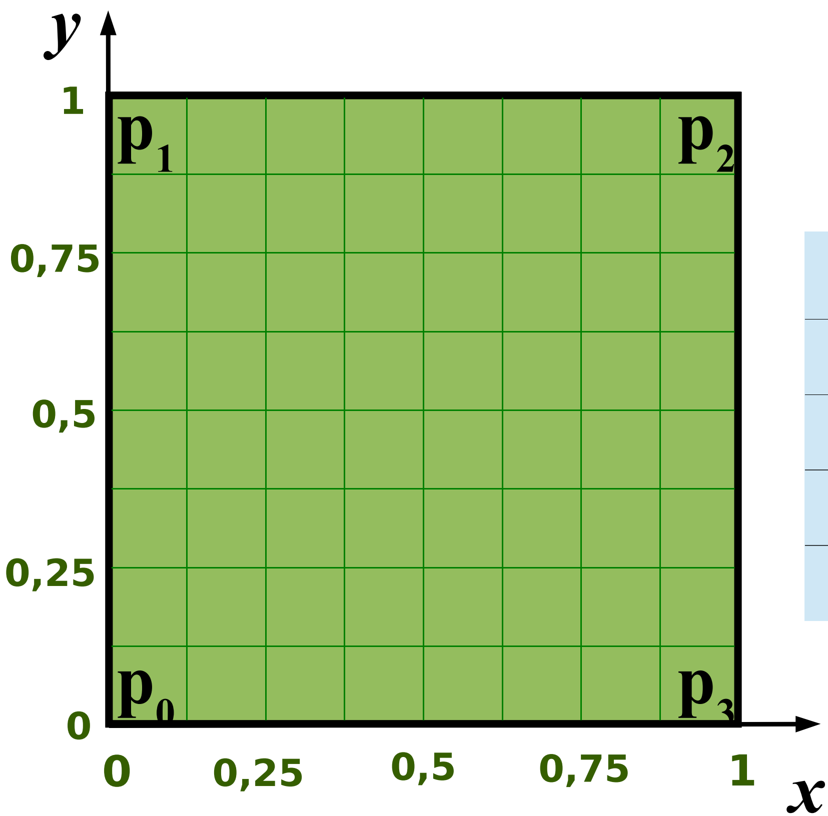
$$\mathbf{x} = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot \mathbf{L}$$

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} 3.92 & 2.84 & 2.0 & 0.69 & 7.07 & 1.0 & -0.15 & 0.61 \end{vmatrix}^t$$

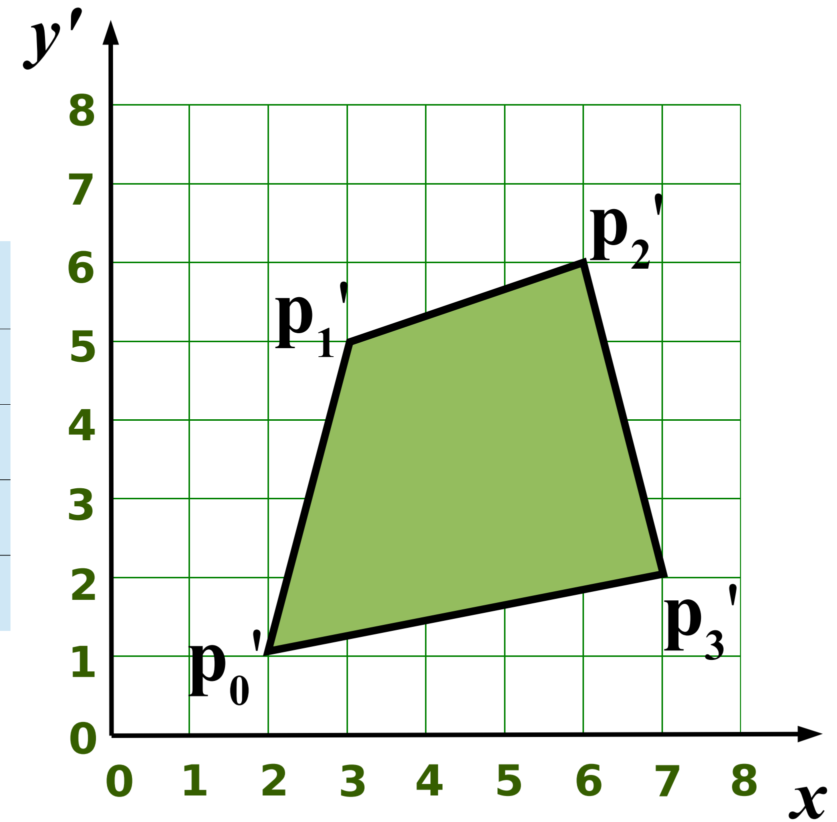
$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 3.92 & 2.84 & 2.0 \\ 0.69 & 7.07 & 1.0 \\ -0.15 & 0.61 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_k'' \\ y_k'' \\ z_k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.92 & 2.84 & 2.0 \\ 0.69 & 7.07 & 1.0 \\ -0.15 & 0.61 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_k'' \\ y_k'' \\ z_k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k''/z_k'' \\ y_k''/z_k'' \\ z_k''/z_k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k' \\ y_k' \\ 1 \end{vmatrix}$$

Resultado: Mínimos Quadrados

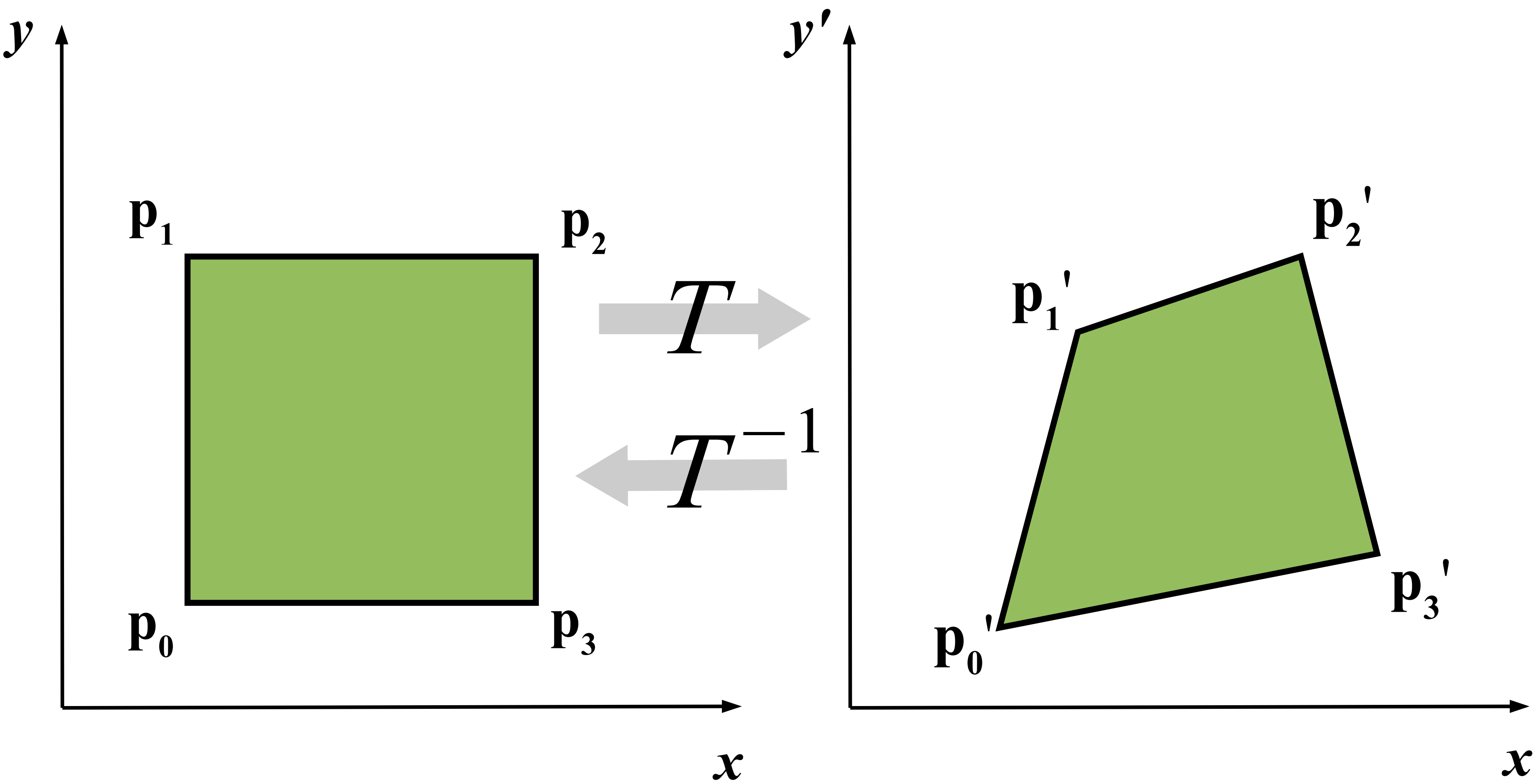


k	(x_k, y_k)	(x_k', y_k')
0	(0, 0)	(2,1)
1	(0, 1)	(3, 5)
2	(1, 1)	(6, 6)
3	(1, 0)	(7, 2)



$$\begin{vmatrix} x_k'' \\ y_k'' \\ z_k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.92 & 2.84 & 2.0 \\ 0.69 & 7.07 & 1.0 \\ -0.15 & 0.61 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{vmatrix}$$

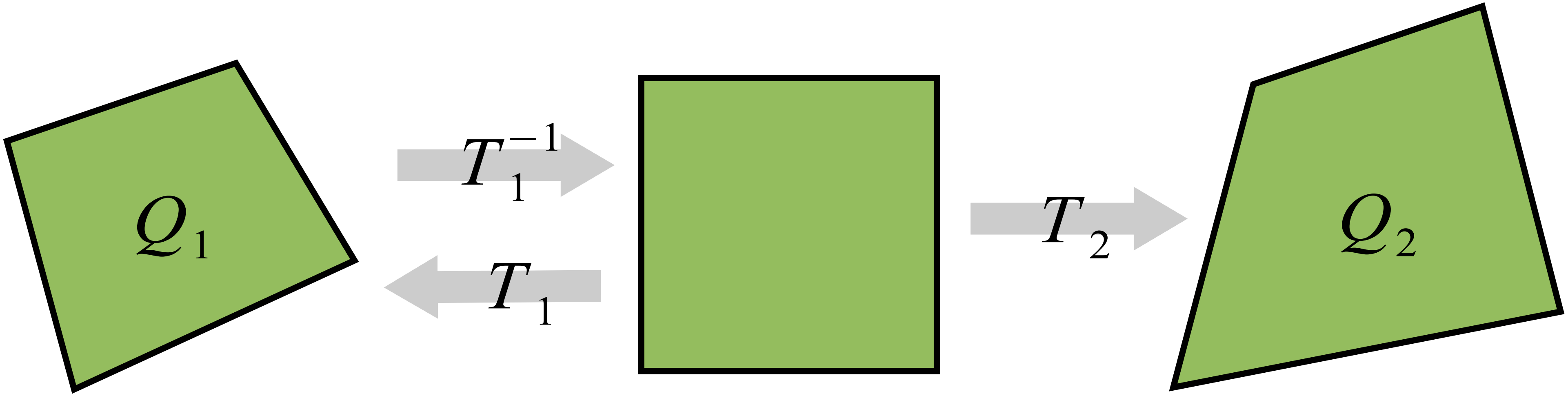
Teorema Fundamental da Geometria Projetiva



T **é único (só uma solução)**

Teorema Fundamental da Geometria Projetiva

$$T = T_2 \circ T_1^{-1}$$

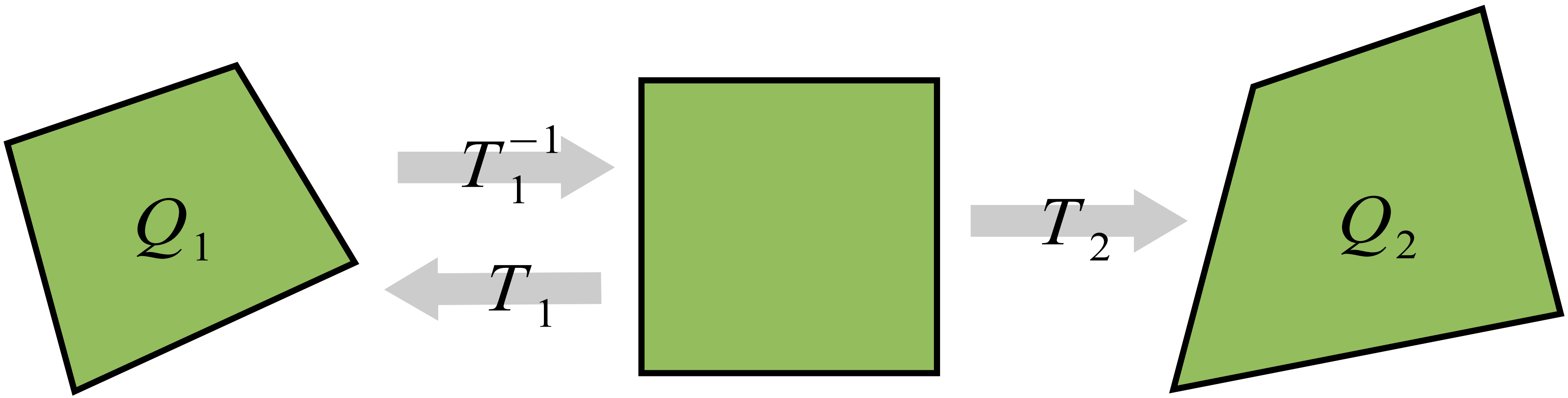


$$T : Q_1 \rightarrow Q_2$$

T **é único (só uma solução)**

Teorema Fundamental da Geometria Projetiva

$$T : Q_1 \rightarrow Q_2$$

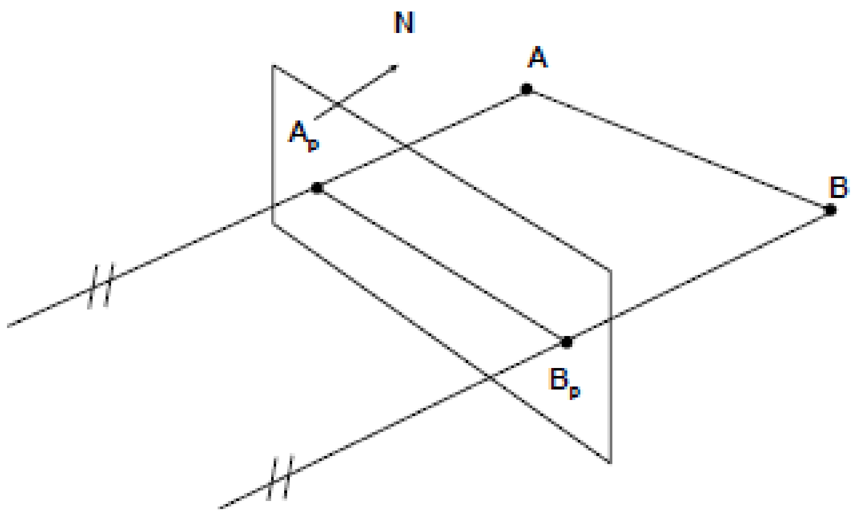


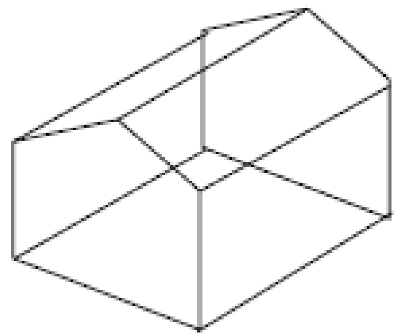
Dados dois referenciais projetivos existe uma única transformação projetiva T que transforma pontos de um referencial para outro.

Tipos de Projeções

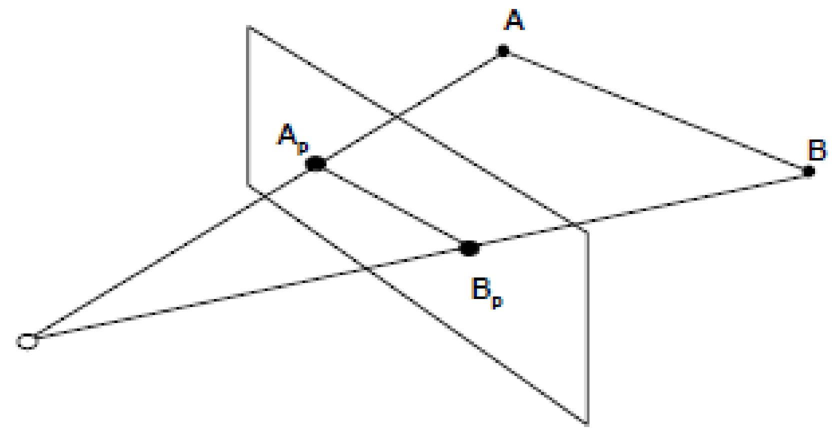
Projeções planares: em um plano de projeção (2D)

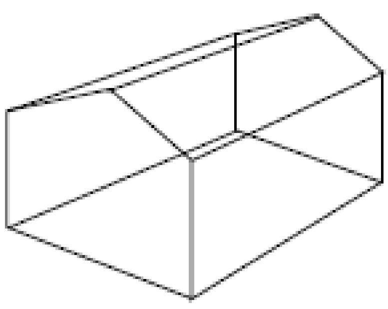
Projeções Cilíndricas (Paralelas)





Projeções Cônicas (Perspectiva)





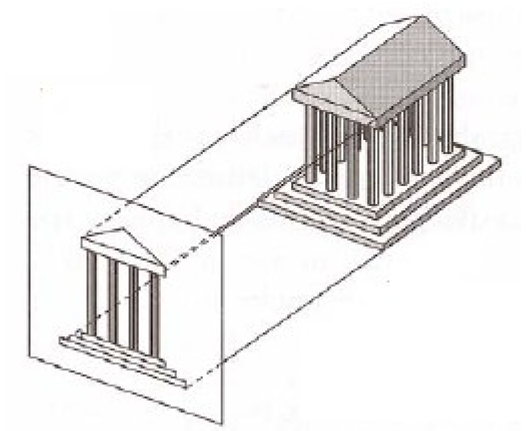
Tipos de Projeções

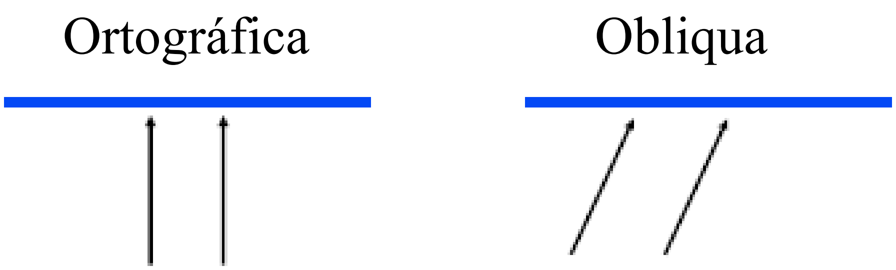
Projeções planares: em um plano de projeção (2D)

- Projeções Planares
  - Paralelas
    - Oblíquas
      - Cavalier
      - Cabinet
      - Outras
    - Ortográficas
      - Topo
      - Frente
      - Lado
      - Outras
  - Perspectiva
    - 1 ponto
    - 2 pontos
    - 3 pontos

Tipos de Projeções

Projeções Paralelas Ortográficas:
- Raios de projeção são perpendiculares ao plano de projeção



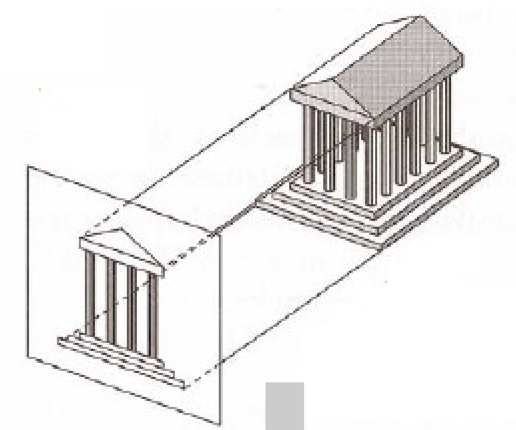


Projeções Paralelas Oblíquas:
- Raios de projeção não são perpendiculares ao plano de projeção

Tipos de Projeções

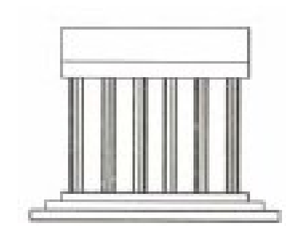
Projeções Paralelas Ortográficas:

- Raios de projeção são perpendiculares ao plano de projeção

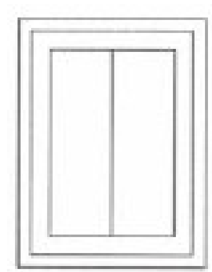


$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

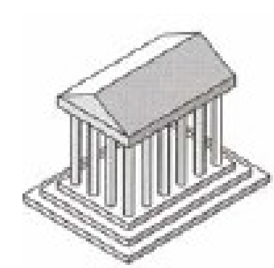
Frente



Lado



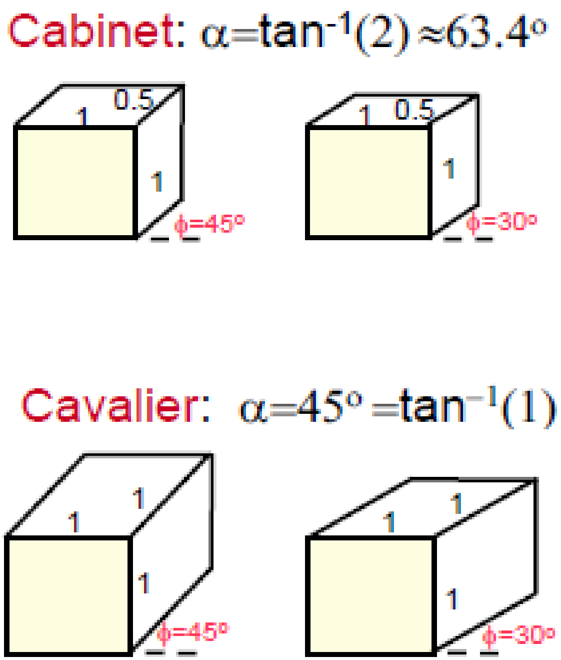
Topo

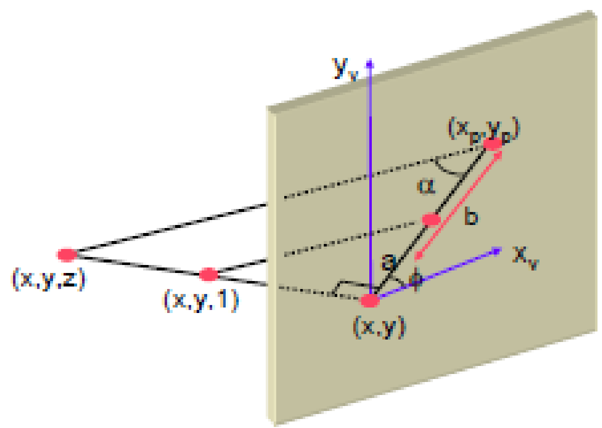


Arbitrário (rotação)

Projeções Paralelas Oblíquas:

- Raios de projeção não são perpendiculares ao plano de projeção





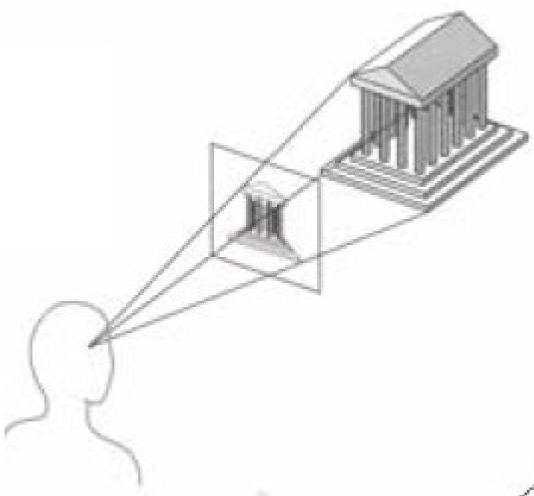
$1/a = \tan(\alpha)$
$z/b = 1/a$
$b = z\ a$
$x = z\ a \cos(\phi)$
$y = z\ a \sin(\phi)$

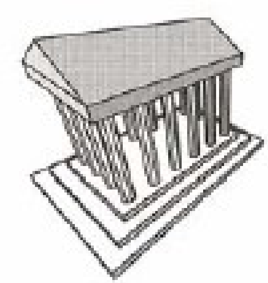
$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a\ \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & a\ \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+z\ a\ \cos(\phi) \\ y+z\ a\ \sin(\phi) \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Tipos de Projeções

Projeções Perspectivas:

- Transformação perspectiva seguida de projeção ortográfica





1 ponto de fuga 2 pontos de fuga 3 pontos de fuga

FIM