UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: Otimização Combinatória
Professor: Marcos Roboredo

2015 – 1
Lista de exercícios nº 4 (Gabarito)

1) a) Para garantir que se o projeto 1 é selecionado então o projeto 5 também é:

$$x_5 \geq x_1$$

Analogamente, para garantir que se o projeto 3 é selecionado então o projeto 5 também é:

$$x_5 \geq x_3$$

b)

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

c)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$$

2) Variáveis:

$$x_i = \begin{Bmatrix} 1 & se\ o\ item\ i\ foi\ carregado \\ 0 & C.C. \end{Bmatrix}$$

$$max\ z = \sum_{i=1}^{5} r_i x_i$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{5} w_i x_i \leq 112$$

$$\sum_{i=1}^{5} v_i x_i \leq 109$$

$$x_i \epsilon \{0,1\}, \qquad \forall i \epsilon \{1,2,3,4,5\}$$

3) Vamos denotar a preferência do estudante i pelo curso j por $pref(i,j)$ e a capacidade de alunos na escola j por $cap(j)$. O modelo terá as seguintes variáveis:

$$x_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & se\ o\ aluno\ i\ \text{é}\ atribuido\ ao\ curso\ j \\ 0 & C.C. \end{Bmatrix}$$

$$Max \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{6} pref(i,j) \times x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 2, \forall i = 1, \dots, 10$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \leq cap(j), \forall j = 1, \dots, 6$$

$x_{ij} \epsilon \{0,1\}, \qquad \forall i \epsilon \{1,2,\dots,10\}, \forall j \epsilon \{1,2,\dots,6\}$

4)

Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 & se\ o\ indivíduo\ i\ está\ no\ comitê \\ 0 & C.C. \end{cases}$$

Modelo:

$$min \sum_{i \epsilon \{a,b,c,j\}} x_i$$

s.a.

$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e \geq 1$
$x_f + x_g + x_h + x_i + x_j \geq 1$
$x_a + x_b + x_c + x_j \geq 1$
$x_e + x_f \geq 1$
$x_d + x_g + x_h + x_i \geq 1$
$x_i \epsilon \{0,1\}, \qquad \forall i \epsilon \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

OBS: Note que na f.o. só entraram os índices dos estudantes pois o enunciado pede para minimizar o número de estudantes. As restrições garantem que cada categoria terá pelo menos um indivíduo no comitê.

5) Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 & se\ a\ antena\ na\ cidade\ i\ é\ instalada \\ 0 & C.C. \end{cases}$$

Modelo:

$$min \sum_{i=1}^{6} x_i$$

s.a.

$x_1 + x_3 + x_5 \geq 1$
$x_2 + x_4 + x_6 \geq 1$
$x_1 + x_3 \geq 1$
$x_2 + x_4 \geq 1$
$x_1 + x_5 + x_6 \geq 1$

$x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$
$x_i \epsilon \{0,1\}, \qquad \forall i \epsilon \{1,2,\dots,6\}$

6) Variáveis:

$x_i \rightarrow n^{\underline{o}}\ de\ enfermeiros\ que\ iniciam\ plantão\ no\ período\ i$

Os enfermeiros que começam sua jornada de 8 hrs de trabalho nos turnos 1 e 2, receberão \$ 800 (\$100 por cada hora de trabalho). Já os que começam no turno 3, receberão \$900 (\$100 por cada hora entre 16h – 20h e \$125 por cada hora entre 20h-24h). De maneira análoga, os que começam nos turnos 4 e 5 recebem \$1000 e os que começam no turno 6 recebem \$900.

A função objetivo consiste de minimizar o gasto total com salários:

$$min\, 800x_1 + 800x_2 + 900x_3 + 1000x_4 + 1000x_5 + 900x_6$$

Restrição 1: No turno 1 devem haver no mínimo 51 enfermeiros. Observe que os enfermeiros que trabalham no turno 1 são os que começaram a jornada de 8 hrs nos turnos 1 ou 6. Assim, temos:

$x_1 + x_6 \geq 51$

Vamos fazer restrições análogas para os demais turnos e o modelo completo fica:

$min\, 800x_1 + 800x_2 + 900x_3 + 1000x_4 + 1000x_5 + 900x_6$
s.a
$x_1 + x_6 \geq 51$
$x_2 + x_1 \geq 58$
$x_3 + x_2 \geq 62$
$x_4 + x_3 \geq 41$
$x_5 + x_4 \geq 32$
$x_6 + x_5 \geq 19$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{Z}^+$

7) Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & se\ o\ item\ i\ é\ carregado\ na\ mochila\ j \\ 0 & C.C. \end{Bmatrix}$$

$$Max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \leq W_j, \forall j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} \leq V_j, \forall j = 1, \dots, m$$

$x_{ij} \epsilon \{0,1\}, \qquad \forall i \epsilon \{1,2,\dots,n\}, \forall j \epsilon \{1,2,\dots,m\}$

8) Vamos denotar a distância do local i para o cliente j por d_{ij}. Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 & se\ a\ banca\ no\ local\ \ i\ é\ localizada \\ 0 & C.C. \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & a\ banca\ i\ é\ a\ localizada\ que\ atenderá\ o\ cliente\ j \\ 0 & C.C. \end{cases}$$

Modelo:

$$max\, z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ d_{ij} \leq \delta}}^{n} y_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{m} b_i x_i \leq B$$

$$y_{ij} \leq x_i, \qquad \forall i \epsilon \{1, \dots, m\}, \forall j \epsilon \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = 1\,, \qquad \forall j \epsilon \{1, \dots, n\}$$

$$y_{ij} \epsilon \{0,1\}, \qquad \forall i \epsilon \{1,2, \dots, n\}, \forall j \epsilon \{1,2, \dots, m\}$$

$$x_i \epsilon \{0,1\}, \qquad \forall i \epsilon \{1,2, \dots, m\}$$

9) Toda par linha i, coluna j que já tiver um valor fixado terá este valor guardado no vetor fixado(i,j)

Variáveis do modelo:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & se\ a\ linha\ i, coluna\ j\ for\ preenchida\ com\ o\ valor\ k \\ 0 & C.C. \end{cases}$$

A f.o. para este modelo pode ser qualquer uma pois só queremos uma solução viável para o jogo. As restrições serão:

1º tipo) Algumas variáveis já estão fixados.

$$x_{fixado(i,j)ij} = 1, \forall\ i \epsilon \{1, \dots, 9\}, \forall\ j \epsilon \{1, \dots, 9\} \text{ tal que existe o vetor } fixado(i,j)$$

2º tipo) Para toda linha i, coluna j, esta célula será preenchida com apenas 1 valor inteiro entre 1 e 9:

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1\,, \qquad \forall j \epsilon \{1, \dots, 9\}, \forall i \epsilon \{1, \dots, 9\}$$

3º tipo) Para toda linha i, para cada possível valor a ser assumido k, apenas 1 coluna terá este valor k:

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1\,, \qquad \forall i \epsilon \{1, \ldots ,9\}, \forall k \epsilon \{1, \ldots ,9\}$$

4º tipo) Para toda coluna j, para cada possível valor a ser assumido k, apenas 1 linha terá este valor k:

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1\,, \qquad \forall j \epsilon \{1, \ldots ,9\}, \forall k \epsilon \{1, \ldots ,9\}$$

5º tipo) Para cada uma das 9 submatrizes, para cada possível valor a ser assumido k, apenas 1 para (linha, coluna) desta submatriz terá este valor k:

Submatriz 1: Linhas 1 a 3 e colunas 1 a 3

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ijk} = 1, \forall k = 1, \ldots ,9$$

Este procedimento será feito de maneira análoga até a submatriz 9:

$$\sum_{i=7}^{9} \sum_{j=7}^{9} x_{ijk} = 1, \forall k = 1, \ldots ,9$$

10) Variáveis:

$x_{ij} \rightarrow$ Fluxo passado do nó i para o nó j

A capacidade de fluxo entre um nó i e um nó j será denotado por $cap(i,j)$. Se não houver orientação de fluxo, $cap(i,j)$=0

Modelo:

$max\, x_{EG} + x_{FG}$

s.a.

$x_{ij} \leq cap(i,j), \forall i,j \epsilon \{A, B, \ldots, G\}$

Para todo nó de passagem, a soma de todo o fluxo que entra é igual a soma do fluxo que sai.

Nó B: $x_{AB} = x_{BC} + x_{BD} + x_{BE}$

Nó C: $x_{AC} + x_{BC} = x_{CD} + x_{CF}$

Nó D: $x_{CD} + x_{BD} = x_{DE} + x_{DF}$

Nó E: $x_{BE} + x_{DE} + x_{FE} = x_{EG}$

Nó F: $x_{CF} + x_{DF} = x_{FE} + x_{FG}$

$x_{ij} \epsilon \mathbb{Z}^+$

11)

a) $x_1 = 2, x_2 = 0, z = 6$

b) $x_1 = 0, x_2 = 5, z = 40$

c) $(x_1 = 0, x_2 = 3, z = 12)$

d) $(x_1 = 2, x_2 = 1, z = 7)$