Calculo Numérico

Professor: Pedro Henrique González Silva

Período: 2013/1

Objetivos

- Ao final do período o aluno deverá estar capacitado a utilizar os recursos computacionais na solução de problemas matemáticos, através da aplicação de algoritmos de métodos numéricos.

Ementa do Curso

- Erros nas aproximações numéricas.
- Desenvolvimento em série de Taylor/Maclaurin.
- Resolução numérica de sistemas de equações algébricas e transcendentes.
- Resolução numérica de sistemas lineares.
- Interpolação.
- Diferenciação Numérica.
- Integração Numérica.

Bibliografia

- Dom, Willian S./ McCraken, Daniel D. – Cálculo Numérico com estudos de Casos em Fortran IV – ed. Campus.

- Ruggiero, Marcia / Lopes, Vera Lucia – Cálculo Numérico (aspectos teóricos e computacionais) ed. McGraw.Hill.

- Mirshawka, Victor – Cálculo Numérico – ed. Nobel.

- Portes, Mariluci F. – Apostila de Calculo Numérico.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.1 – Considerações Gerais:
  - Uso de dados provenientes de medições ;
  - Uso de dados matemáticos inexatos ;
  - Uso de dados provenientes de tabelas;
  - Uso de dados inexatos provenientes da supressão de algarismos ;
  - Aproximações devido à fórmulas de resolução aproximadas.
  - Ordem de cálculo nas operações;
  - Uso de rotinas inadequadas de cálculo;
  - Enganos.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.2 – Números Aproximados:

DEFINIÇÃO:

Número aproximado é a aproximação de um valor exato, sendo a diferença entre os dois bem pequena. Consideramos um valor exato quando não existe aproximação ou incerteza associado a ele.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.3 – Algarismos Significativos de um Numero:

  - {1,2,3,4,5,6,7,8,9} → Sempre são.

  - {0} → Exceto nas casos em que é usado para fixar a posição da parte decimal ou preencher casas decimais de dígitos desprezados ou desconhecidos.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.3 – Algarismos Significativos de um Numero:
  - Exemplo:
    - 3,124
    - 405
    - 0,0095
    - 45,1300

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.3 – Algarismos Significativos de um Numero:

  - Solução Exemplo:

    - 3,124 $\rightarrow$ 4 significativos
    - 405 $\rightarrow$ 3 significativos
    - 0,0095 = $9{,}5\ 10^{-3}$ $\rightarrow$ 2 significativos
    - 45,1300 $\rightarrow$ 4 significativos se os zeros estiverem preenchendo casas decimais vazias

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.4 – Arredondamento de um Numero:

DEFINIÇÃO:

Arredondar um número é guardar uma certa quantidade de dígitos, contados a partir da esquerda para a direita, ignorando consequentemente os demais dígitos do número.

Erro nas Aproximações Numéricas

- Regras de Arredondamento:
  - Se o algarismo desprezado for maior que 5, adiciona-se 1 unidade ao enésimo dígito;
  - Se o algarismo desprezado for menor que 5, o enésimo dígito permanece inalterado;
  - Se o algarismo desprezado for igual a 5, então:
    - deixa-se o enésimo dígito inalterado se for par;
    - acrescenta-se 1 unidade ao enésimo dígito se for ímpar.

Erro nas Aproximações Numéricas

- Regras de Arredondamento:
  - Exemplo:
    - 2,45879 (Obtendo 4 Dígitos Significativos) $\rightarrow$
    - 2,45376 (Obtendo 3 Dígitos Significativos) $\rightarrow$
    - 4,67857 (Obtendo 4 Dígitos Significativos) $\rightarrow$
    - 4,67757 (Obtendo 4 Dígitos Significativos) $\rightarrow$

Erro nas Aproximações Numéricas

- Regras de Arredondamento:
  - Solução Exemplo:
    - 2,45879 → 2,459
    - 2,45376 → 2,45
    - 4,67857 → 4,678
    - 4,67757 → 4,678

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5 – Tipos de Erro:
  - Erro Absoluto
  - Erro Relativo
  - Erro Percentual Relativo

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5 – Tipos de Erro:
  - Erro Absoluto:

DEFINIÇÃO:

Definimos erro absoluto como sendo a diferença em módulo entre o valor exato e o valor aproximado.

$$\Delta Q = |Q - Q^*|$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5 – Tipos de Erro:

  - Erro Relativo:

DEFINIÇÃO:

Definimos erro relativo como sendo a razão entre o erro absoluto e valor exato do numero.

$$\delta Q = \frac{\Delta Q}{Q}$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5 – Tipos de Erro:

  - Erro Percentual Relativo :

DEFINIÇÃO:

Definimos erro relativo percentual como sendo a razão entre o erro absoluto e valor exato do numero expresso em percentagem.

$$\delta Q\% = \frac{\Delta Q}{Q} x100$$

- 1.5 – Tipos de Erro:
  - Exemplo Tipos Erro:
    - Dados $Q = 3{,}251408$ e $Q^{*} = 3{,}2524634$, determine:
      - O erro absoluto;
      - O erro relativo;
      - O erro percentual relativo.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5 – Tipos de Erro:
  - Solução Exemplo Tipos Erro:
    - Dados Q = 3,251408 e Q^*= 3,2524634, determine:
      - O erro absoluto - $1{,}0554x10^{-3}$
      - O erro relativo - $0{,}324597x10^{-3}$
      - O erro percentual relativo - $0{,}324597x10^{-1}$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5.1 – Cota Superior:
  - Cota Superior de Erro Absoluto:

DEFINIÇÃO:

Cota superior de erro absoluto é o limite máximo permitido para o erro absoluto .

$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5.1 – Cota Superior:
  - Exemplo de Cota Superior de Erro Absoluto:
    - Considerando $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ e $e^* = \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{i!}$, determine a cota superior de erro absoluto :

Erro nas Aproximações Numéricas

De imediato sabemos:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \ldots \qquad (1)$$

$$e^* = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{7!} \qquad (2)$$

$$\Delta e = |e - e^*| = \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \ldots \qquad (3)$$

Erro nas Aproximações Numéricas

Analisando a equação (3) temos:

$$\frac{1}{8!} = \frac{1}{8!}$$

$$\frac{1}{9!} = \frac{1}{8! \cdot 9}$$

$$\frac{1}{10!} = \frac{1}{8! \cdot 9 \cdot 10} < \frac{1}{8! \cdot 9^2}$$

$$\frac{1}{11!} = \frac{1}{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} < \frac{1}{8! \cdot 9^3}$$

$$\Delta e < \frac{1}{8!}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \ldots\right) \qquad \rightarrow \textit{P.G. ilimitada decrescente com } q = \frac{1}{9}$$

$$\Delta e < \frac{1}{8!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \quad \Rightarrow \quad \Delta e < 0{,}279017 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \Delta e < 0{,}3 \cdot 10^{-4}$$

Logo a cota superior de erro absoluto é 10^{-4}

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5.1 – Cota Superior:
  - Cota Superior de Erro Relativo:

DEFINIÇÃO:

Cota superior de erro relativo é o limite máximo permitido para o erro relativo.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.5.2 – Propagação de Erros em Operações Elementares:

  - Adição:

    - Erro Absoluto:

$$\Delta_{X+Y} = \Delta_X + \Delta_Y$$

    - Erro Relativo:

$$\delta_{x+y} = \frac{x^*}{x^* + y^*} \cdot \delta x + \frac{y^*}{x^* + y^*} \cdot \delta y$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- Subtração:

  - Erro Absoluto:

$$\Delta_{X-Y} = \Delta_X - \Delta_Y$$

  - Erro Relativo:

$$\delta_{x+y} = \frac{x^*}{x^* - y^*} \cdot \delta x - \frac{y^*}{x^* - y^*} \cdot \delta y$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- Multiplicação:
  - Erro Absoluto:

$$\Delta_{xy} = x^*\Delta y + y^*\Delta x$$

  - Erro Relativo:

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- Divisão:
  - Erro Absoluto:

$$\Delta\frac{x}{y} \approx \frac{y^{*}\Delta x - x^{*}\Delta y}{y^{*2}}$$

  - Erro Relativo:

$$\delta\frac{x}{y} = \delta x - \delta y$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.6 - Algarismos Significativos Exatos contidos em um Numero Aproximado:

DEFINIÇÃO

Consideramos que os "n" primeiros algarismos de um número são exatos quando o erro absoluto não exceder a uma unidade na enésima casa, contando-se da esquerda para a direita.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.6 - Algarismos Significativos Exatos contidos em um Numero Aproximado:

  - Teorema I:

Se o 1º algarismo significativo de um número aproximado A^* é k, contendo o referido número N de algarismos significativos, então o erro relativo associado à aproximação será:

$$\delta A \leq \frac{1}{k} \times 10^{1-N}$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.6 - Algarismos Significativos Exatos contidos em um Numero Aproximado:
  - Exemplo de Aplicação do Teorema I:
    - Seja A*=3,1415 com 5 algarismos significativos exatos. Determine uma cota superior de erro relativo.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.6 - Algarismos Significativos Exatos contidos em um Numero Aproximado:

  - Teorema II:

Se o erro relativo δA cometido na aproximação de A for menor que $\frac{1}{k+1}10^{1-N}$, então A^* contém N algarismos significativos exatos.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.6 - Algarismos Significativos Exatos contidos em um Numero Aproximado:
  - Exemplo de Aplicação do Teorema II:
    - Determine o número de algarismos significativos exatos contidos em $A^* = 3{,}241$ sendo $\Delta A < 0{,}001$.

Erro nas Aproximações Numéricas

1.7 – Propagação de Erros:

- 1.7.1 - Funções de uma variável real:

$$\Delta y \leq |f'(x)| \cdot \Delta x$$

- 1.7.2 – Funções de varias variáveis reais:

$$\Delta w \leq |\frac{\partial f}{\partial x_1}|\Delta x_1 + \ldots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}|\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}|\Delta x_i$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.7 – Propagação de Erros:
  - 1.7.3 – Problema Inverso:

$$\partial x_i = \frac{\partial w}{n} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.7 – Propagação de Erros:
  - Exemplos Propagação de Erros:
    - Determine o erro absoluto cometido no cálculo do volume de um cubo de 0,45 metros de aresta, sabendo que o erro cometido na medida da aresta é inferior a 0,005 metros.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.7 – Propagação de Erros:
  - Exemplos Propagação de Erros:
    - Entre que valores está o valor real do volume do cubo do exercício anterior ?
    - Entre que valores está o valor real de $z(x,y) = x^2y + 2y + 0{,}3$ para $x = 3{,}14$ e $y = 2{,}71$; com Δx e Δy inferiores a 0,01.

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.7 – Propagação de Erros:
  - Exemplos Propagação de Erros:
    - Sabendo-se que o volume de uma esfera é dado pela expressão $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, determine entre que valores está o valor real de V, considerando $\pi \approx 3{,}141$ (com $\Delta\pi < 0{,}001$) e $d = 3{,}71$ cm (com $\Delta d < 0{,}005$ cm).

Erro nas Aproximações Numéricas

- 1.7 – Propagação de Erros:

  - Exemplos Propagação de Erros:

    - Qual deve ser a precisão da medida do raio R = 30,5 cm de um círculo e quantas decimais devem ser consideradas em π para que o erro cometido no cálculo da área não ultrapasse a 0,1%.

Séries de Potências

- 2 - Série de Potências:

Uma série da forma $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$, onde "a" e c_i ($0 \leq i < \infty$) são constantes, é chamada de série de potências em (x - a).

Séries de Potências

- 2.1 - Série de Taylor e MacLaurin:
  - Seja $y = f(x)$ uma função contínua e que todas as suas derivadas existam no domínio que nos interessa.
  - Suponha que se conheça tudo da função no ponto $x = 0$, ou seja:
    - $f(0) \Rightarrow$ valor da $f(x)$ em $x = 0$
    - $f'(0) \Rightarrow$ inclinação da curva $f(x)$ em $x = 0$
    - $f''(0) \Rightarrow$ curvatura da $f(x)$ em $x = 0$
    - $f^{n}(0) \Rightarrow$ n-ésima derivada da $f(x)$ em $x = 0$

Séries de Potências

- 2.1 - Série de Taylor e MacLaurin:
  - De um modo geral, uma série que representa o valor exato da f (x) será dado por um polinômio de grau infinito, ou seja:
    - $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$
  - Para se determinar , apliquemos a derivação sucessiva de f (x) em x = 0:
    - $f(0) = c_0$
    - $f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots \Rightarrow f'(0) = c_1$
    - $f''(x) = 2c_2 + 6c_3x + \ldots + n \cdot (n-1)c_nx^{n-2} + \ldots \Rightarrow f''(0) = 2c_2$
    - $f'''(x) = 6c_3 + \ldots + n \cdot (n-1)(n-2)c_nx^{n-3} + \ldots \Rightarrow f'''(0) = 6c_3$
    - ...
    - $f^n(0) = n!\,c_n + \ldots \Rightarrow f^n(0) = n!\,c_n$

Séries de Potências

- 2.1- Série de Taylor e MacLaurin:
  - Em seguida temos:
    - $c_0 = f(0)$
    - $c_1 = f'(0)$
    - $c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$
    - $c_3 = \frac{f''\prime(0)}{3!}$
    - …
    - $c_n = \frac{f^n(0)}{n!}$

Séries de Potências

- 2.1 - Série de Taylor e MacLaurin:
  - Então:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

É o desenvolvimento de f(x) em série de MacLaurin.

Séries de Potências

- 2.1 - Série de Taylor e MacLaurin:
  - Para $x \neq 0$ temos:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \ldots$$

É o desenvolvimento de f(x) em torno do ponto a em série de Taylor.

Séries de Potências

- 2.1 - Série de Taylor e MacLaurin:
  - 2.1.1 - Raio de Convergência:
    - Teorema:

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ uma série de potências em (x - a). Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = R \quad 0 \leq R \leq \infty$, então R é raio de convergência da série de potências.

Séries de Potências

- 2.1 - Série de Taylor e MacLaurin:
  - 2.1.2 - Erro de Truncamento no desenvolvimento em série:

  - Definição:

Sejam R_n os termos da série após o termo que envolve a n-ésima derivada.
Então:

$$|R_n| \leq M \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{onde } M = \text{máx}\,|f^{n+1}(t)| \text{ em } [a, x]$$

Resolução de Equações Algébricas Transcendentes

3.1 - Introdução

- Métodos Gráficos:
  - Interseção da curva com o eixo das abcissas.
  - Interseção de duas curvas.
    - $f(x) = sen(x) - \cos(x)$

- Métodos Numéricos:
  - Método de Newton-Raphson.
  - Método das Partes Proporcionais.

Resolução de Equações Algébricas Transcendentes

- 3.2 – Métodos Numéricos:
  - 3.2.1 - Método de Newton-Raphson
    - Definição da formula de iteração do método:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Resolução de Equações Algébricas Transcendentes

- 3.2.1.1 – Critério de Fourier – Condição de convergência:
  - F'(x) tem que ter sinal determinado em [a,b]
  - F''(x) não pode se anular em [a,b]
  - Escolhe-se o extremo em que F(x).F''(x)>0

Resolução de Equações Algébricas Transcendentes

- 3.2.1.2 – Erro de Truncamento

  - Definição:

$$E_T < \frac{k.h^2}{2.|f'(a)|}$$

onde $h = x - a$ e $k = \max|f''(x)|$ ***em [a,b]***

Resolução de Equações Algébricas Transcendentes

- 3.2.2 - Método das Partes Proporcionais
  - Definição da formula de iteração do método:
    - Para f(x) estritamente decrescente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} f(x_n)$$

    - Para f(x) estritamente crescente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} f(x_n)$$

Resolução de Equações Algébricas Transcendentes

- 3.2.2 - Método das Partes Proporcionais
  - Critério de Parada:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4 - Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

I - Métodos de eliminação.
II - Métodos iterativos.

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.0.1 – Definição 1:

O vetor = (x_1 , x_2 , ... , x_n) ^{t} constitui uma solução para S_n se para $x_i = \bar{x}_i$ ($1 \leq i \leq n$) as equações de S_n forem satisfeitas.
Um sistema linear pode ser classificado do seguinte modo:

1. **Compatível** (quando possuí solução):
   a. **Determinado** (única solução)
   b. **Indeterminado** (infinitas soluções)
2. **Incompatível** (quando NÃO possuí solução)

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.0.2 – Definição 2:

Dois sistemas lineares S_n e S_n' são equivalentes quando S_n' é obtido de S_n por meio de transformações elementares. Nesse caso, S_n tendo solução, S_n' também terá.

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4 – Definição 2.1: Transformações Elementares

a) Trocar a ordem de duas equações do sistema;
b) Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula;
c) Adicionar duas equações do sistema.

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.1 - Sistema Triangular Superior:

Seja S_n um sistema da forma $Ax = b$, onde $A = a_{ij}$ tal que:

$$S_n = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

São facilmente resolvidos pelo processo retroativo

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.1 - Sistema Triangular Superior:
  - 4.1.1 - Processo Retroativo

a) Obter o valor de x_n da n-ésima equação por meio da relação:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

b) Substituir o valor de x_n na equação de ordem (n-1) para obter x_{n-1}. E assim sucessivamente, até calcular x_1 .

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.2 - Método de Eliminação de Gauss:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Transformações Elementares

Processo Retroativo

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.2 - Método de Eliminação de Gauss:
  - 4.2.1 - Condensação Pivotal Parcial :
    - A finalidade da condensação pivotal parcial é:
      - Minimizar o erro de arredondamento.
      - Evitar a divisão por zero.
      - Testar a singularidade do sistema.

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.1 - Método de Jacobi
  - 4.3.2 - Método de Gauss-Seidel

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.1 - Método de Jacobi

O método de Jacobi consiste em partindo da aproximação inicial $x^{(0)}$, gera-se a sequência de aproximações $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$. Como critério de parada, utilizamos $||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| < \varepsilon$, onde ε = precisão desejada para raiz.

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.1 - Método de Jacobi
    - Para se aplicar o método é necessário transformar o sistema dado em: $x = F(x) + d$, onde:
      - F é uma matriz de ordem n, chamada de matriz iteração;
      - x, d são matrizes $n \times 1$

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.1 - Método de Jacobi

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad d = \left(\frac{b_1}{a_{11}} \; \frac{b_2}{a_{22}} \cdots \frac{b_n}{a_{nn}} \right)^t$$

Mas o que isso significa ?

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.1 - Método de Jacobi
    - Exemplo:

$$S_2 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{2}(3 - x_1^{(k-1)}) \\ X^{(0)} &= (0{,}9 \quad 0{,}9) \end{aligned}$$

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.2 - Método de Gauss-Seidel
    - Exemplo:

$$S_2 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{2}(3 - x_1^{(k)}) \end{aligned}$$

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.3 – Critério de Parada dos Métodos Iterativos:

$$|| x^{(k)} - x^{(k-1)} || < e$$

onde,

$$|| x^{(k)} - x^{(k-1)} || = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad \text{e} \quad \text{“e” é a precisão desejada}$$

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.4 – Convergência:

Seja o sistema AX = b, na forma:

(1) $x = F x + d$, e a iteração definida por:

(2) $x^{(k+1)} = F x^{(k)} + d$

Subtraindo (1) de (2) $\rightarrow x^{(k+1)} - x = F(x^{(k)} - x)$

Fazendo $e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x \rightarrow e^{(k+1)} = F e^{(k)}$

Resolução numérica de sistemas lineares.

- 4.3 - Métodos Iterativos:
  - 4.3.4 – Convergência:

Teorema : A condição suficiente para que a iteração dada em (2) convirja é que os elementos $f_{i\,j}$ da matriz F satisfaçam a desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{n} |f_{i\,j}| < L < 1 \qquad j=1,n$$

Corolário 1: (Critério das linhas)
A condição suficiente para que a iteração dada em (2) convirja é que:

$$|a_{i\,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i\,j}| \qquad i=1,n$$

Corolário 2: (Critério das colunas)
A condição suficiente para que a iteração dada em (2) convirja é que:

$$|a_{j\,j}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{i\,j}| \qquad j=1,n$$

Interpolação

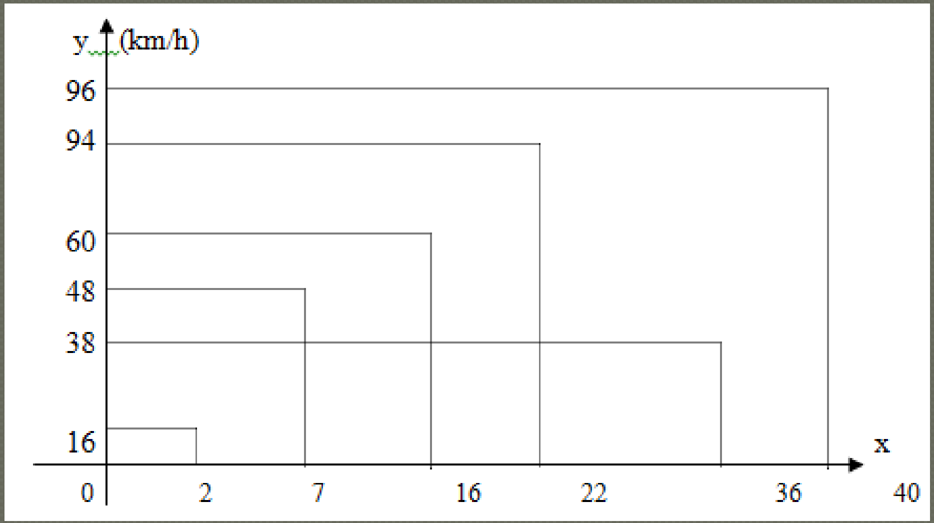
- Definição:

Interpolar significa determinar valores intermediários entre valores dados de uma função.

Interpolação

- Exemplo:
  - Suponha que um móvel, partindo do repouso, é dirigido com uma aceleração máxima até atingir 96 Km/h e que as leituras do velocímetro, com intervalos não equidistantes, são apresentadas no gráfico do próximo slide:

Interpolação



- Desejaríamos que os pontos definissem uma curva suave. No entanto, devido a erros de leitura e outros fatores, os pontos não estão muito bem situados, pois as velocidades são grandes, e outras são pequenas.

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - Para melhor aproximação de f (x) poderíamos escolher uma curva de ordem mais elevada. dados (n + 1) pontos, a curva de mais alto grau e o polinômio de grau n, cuja expressão é:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.1- **Polinômio Interpolador de Lagrange:**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\left(\prod_{\substack{j=0 \\ i=j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) f(x_i) \right]$$

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.1- **Polinômio Interpolador de Lagrange:**
    - **Exemplo:**
      - Dados os valores f (0) = 7,3 ; f (0,5) = - 5,1 ; f (1) = 6 ; determine a expressão do Polin. Int. de Lagrange e f (0,8).

$$\boxed{P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)}$$

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \dfrac{(x - 0{,}5)(x - 1)}{(-0{,}5)(-1)} = 2x^2 - 3x + 1 \\ L_1(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \dfrac{x(x - 1)}{0{,}5(-0{,}5)} = 4x^2 + 4x \\ L_2(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \dfrac{x(x - 0{,}5)}{1(-0{,}5)} = 2x^2 - x \end{cases}$$

$$P_2(x) = (2x^2 - 3x + 1) \cdot 7{,}3 + (4x^2 + 4x)(-5{,}1) + 6(2x^2 - x)$$

$$P_2(x) = 47x^2 - 48{,}3x + 7{,}3$$

$$P_2(0{,}8) = -1{,}26$$

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.2 – Polinômio Interpolador de Newton Gregory:
    - Quando os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são igualmente espaçados, recorremos ao cálculo das diferenças finitas para interpolarmos.

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.2 – Polinômio Interpolador de Newton Gregory:
    - Definição:

Definimos operador diferença progressiva Δ_h da seguinte maneira:

$$\Delta_h^{f(x)} = f(x+h) - f(x)$$

onde h é o passo (no idioma inglês, ‘step’) entre os pontos.

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.2 – Polinômio Interpolador de Newton Gregory:
    - Exemplo:

      - Seja f (x) = $x^3 + 5$, considere a tabela:

x	f (x)	$\Delta_2\, f(x)$	$\Delta_2^2\, f(x)$	$\Delta_2^3\, f(x)$	$\Delta_2^4\, f(x)$
0	5	8	48	48	0
2	13	56	96	48	0
4	69	52	144	48	
6	221	296			
8	517				

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.2 – Polinômio Interpolador de Newton Gregory:
    - Definição:

$$P_{i+1}(x) = P_i x + \frac{\Delta_h^i f(x_0)}{i!\ h^i}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})$$

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.2 – Polinômio Interpolador de Newton Gregory:
    - Exemplo:

Dada a tabela:

x	0	2	4	6
f (x)	1	3	2	5

a. Obter a fórmula do Pol. Interp. de Newton-Gregory;

b. Determinar o valor aproximado de f (5).

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - 5.2 – Polinômio Interpolador de Newton Gregory:
    - Resolução do Exemplo:

x	f (x)	Δ_2 f (x)	$\Delta_2^2 f(x)$	$\Delta_2^3 f(x)$
0	1	2	-3	7
2	3	-1	4	
4	2	3		
6	5			

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta_h^3 f(x_0)}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{2}{2}(x - 0) + \frac{(-3)}{2 \cdot 2^2}(x - 0)(x - 2) + \frac{7}{6 \cdot 2^3}(x - 0)(x - 2)(x - 4)$$

$$P_3(x) = 1 + x - \frac{3}{8}(x^2 - 2x) + \frac{7}{48}(x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{48}(7x^3 - 60x^2 + 140x + 48)$$

Interpolação

- 5 - Polinômio Interpolador
  - Observações Finais:
    - O processo do Pol. Interp. exige grande quantidade de cálculos;
    - O método de Lagrange é útil, porém ainda hoje exige muitos cálculos;
    - O método das diferenças de Newton-Gregory é ineficiente se forem necessárias poucas interpolações; porém uma vez construída a tabela, torna-se fácil utilizá-la para outras interpolações.

Diferenciação Numérica

- 6 – Métodos de Diferenciação Numérica
  - Pontos Equidistantes

x	0	2	4	6
f(x)	1	9	65	217

  - Pontos não Equidistantes

x	0	1	3	6
f(x)	1	5	54	217

Diferenciação Numérica

- 6 – Métodos de Diferenciação Numérica
  - 6.2 - Pontos Equidistantes
    - Definição:

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + {}^{h}/_{2}) - f(x_0 - {}^{h}/_{2})}{h}$$

Onde $h = 2\Delta x$ e $e_t \leq |\frac{h^2}{24} f'''(\xi)|$ é o erro de truncamento associado.

Diferenciação Numérica

- 6 – Métodos de Diferenciação Numérica
  - 6.1 – Pontos não Equidistantes
    - Definição:

$$f'(x_0) = \frac{h_1^2 f(x_0 + h_2) + (h_2^2 - h_1^2) f(x_0) - h_2^2 f(x_0 - h_1)}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}$$

Onde h_i são as respectivas distâncias entre os pontos tabelados e o ponto que desejamos informação.

$e_t \leq \frac{h_1 h_2}{6} M$ é o erro de truncamento associado e $|f'''(x)| < M$.

Integração Numérica

- 7 – Métodos de Integração Numérica
  - Método do Trapézio
  - Método de Simpson de 1/3

Integração Numérica

- 7 – Métodos de Integração Numérica
  - 7.1 - Método do Trapézio:
    - Definição:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\left(f(x_1) + f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right)\right]$$

Onde $h = \frac{b-a}{n}$

Integração Numérica

- 7 – Métodos de Integração Numérica
  - 7.1 - Método do Trapézio:
    - Erro de Truncamento:

$$E_t = \sum_{i=0}^{n=1} E_{t_i} = -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

Integração Numérica

- 7 – Métodos de Integração Numérica
  - 7.2 - Método de Simpson de 1/3:
    - Definição:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_n) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2 + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2}))]$$

Onde $h = \frac{b-a}{n}$

Integração Numérica

- 7 – Métodos de Integração Numérica
  - 7.1 - Método do Trapézio:
    - Erro de Truncamento:

$$E_t \leq \frac{h^4}{180}(b-a)f^{IV}(\xi)$$

Onde $\xi \in (a, b)$