II Seqüências e Séries Numéricas

1 Seqüências:

Uma seqüência é uma função cujo domínio é um subconjunto dos números naturais e seu contradomínio são os reais, i.e.,

$$f : D \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n) = a_n.$$

Podemos representar a seqüência por uma lista:

$$\{a_n\}_{n \geq 1} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots).$$

onde n é o índice do termo a_n.

Exemplos de seqüências:

a) $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ Note que $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots, \dfrac{n}{n+1}, \dots \right)$

b) $\left\{ \sqrt{n-3} \right\}_{n \geq 3} = \left(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n-3}, \dots \right).$

c) $\left\{ \dfrac{(-1)^n (n+1)}{3^n} \right\}_{n \geq 1} = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dots, \dfrac{(-1)^n (n+1)}{3^n}, \dots \right)$

__Exemplo 1__: Ache uma fórmula p/ o termo geral a_n da seqüência

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \dots\right)$$

__Obs__: $a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{5}$

$$a_2 = -\frac{4}{25} = \frac{(-1)^{2+1}(3+1)}{5^2}$$

$$a_3 = \frac{5}{125} = \frac{(-1)^{3+1}(4+1)}{5^3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{5^n}$$

__Obs__: Em geral não é fácil encontrar o termo geral da seqüência.

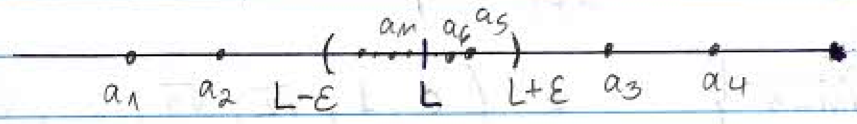
__Definição__ Uma seqüência $\{a_n\}$ tem o limite L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ q}^{\text{do}}\ n\to\infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um inteiro $N > 0$ tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$



__Exemplo 2__ Considere a seq. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$.

Parece que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. De fato, se tomarmos $\varepsilon > 0$

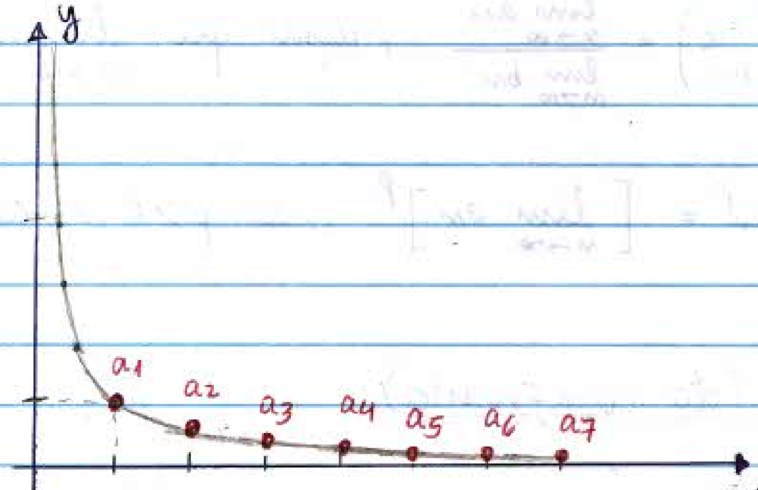
tilibra

qualquer, temos que, se escolhermos um inteiro $N > \frac{1}{\varepsilon}$ então

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon. \text{ Logo,}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

<u>Teorema 1</u>. Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$, quando n é um inteiro >0, então $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.



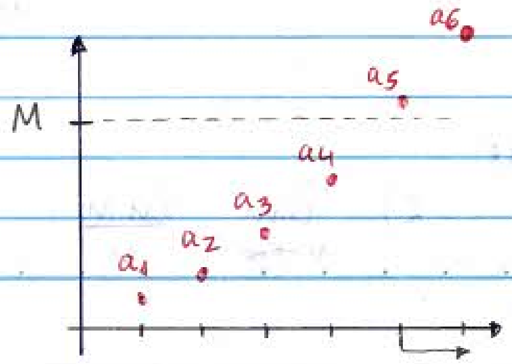
Ex.: $f(x) = \frac{1}{x}$

$a_n = \frac{1}{n}$.

(Nesse caso dizemos que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ é convergente).

<u>Definição</u>: $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ significa que, dado um $M > 0$, existe um inteiro $N > 0$ t.q.

$$a_N > M$$



As leis de limites tb são válidas p/ seqüências.

Teorema 2: Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem seqüências convergentes e c for uma constante, então:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (c a_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, desde que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right]^p$, se $p > 0$ e $a_n > 0$.

Teorema 3 (do confronto).

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$, e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, então

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Teorema 4. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Exemplo 3: Calcule

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$

Solução:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

b) Seja $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$\overset{\text{Teo 1}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ //

Exemplo 4: Determine q^do a seq. $a_n = (-1)^n$ é convergente ou divergente.

Solução: $(-1)^n = (-1, +1, -1, +1, -1, \ldots)$.

Como os termos não se aproximam de nenhum valor, segue-se que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe, i.e., $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ é divergente.

Exemplo 5: Avalie $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Solução: Temos que $\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \dfrac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Logo, pelo Teo. 4, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$

* Exemplo 6: Discuta a convergência de $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Solução: $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{24}{125}, \ldots\right)$

Mas:
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{1.2}{2.2} \\ a_3 = \dfrac{1.2.3}{3.3.3} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = \dfrac{n!}{n} = \dfrac{1.2.\cdots.n}{n.n.\cdots.n} = \dfrac{1}{n}\underbrace{\left(\dfrac{2.3\cdots n}{n.n\cdots n}\right)}_{<1}$$

Logo, $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$, $\forall n$

Como $\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, pelo Teo. do confronto, segue-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ //

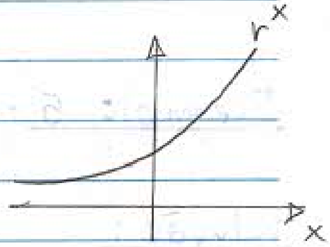
Teorema 5 A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e divergente para todos os outros valores de r, sendo

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1, & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

Prova: • $r = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ #

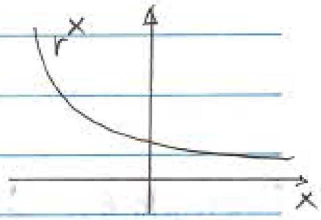
• $r = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 0^n \overset{n>0}{=} \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ #

• Se $f(x) = r^x$ então



$r > 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} r^x = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

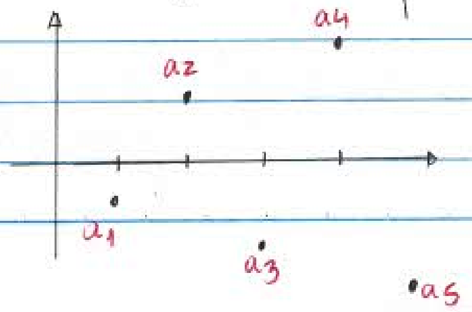
e



$0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} r^x = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^x = 0$ #

• Se $r = -1$, temos $(-1)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ diverge.

• Se $r < -1$, temos que $\lim_{n\to\infty} r^n$ não existe.



tilibra

<u>Definição</u> Uma seq. $\{a_n\}$ é <u>crescente</u> se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ (isto é, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$) e é <u>decrescente</u> se $a_n > a_{n+1}$ para todo n.
Ela é dita não-decresc. se $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n$; e não-cresc. se $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$. Uma seq. é <u>monótona</u> <u>(ou monotônica)</u> se ela for cresc./decresc./ñ-c./ñ-d.

<u>Exemplo 7</u> Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

$a_n < a_{n+1} \iff$

$$\iff \frac{n}{n^2+1} < \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \iff \frac{n}{n^2+1} < \frac{n+1}{n^2+2n+2} \iff$$

$$\iff (n^2+1)(n+1) < n(n^2+2n+2) \iff$$

$$\iff \cancel{n^3}+n^2+n+1 < \cancel{n^3}+2n^2+2n \iff$$

$$\iff n < n^2+n \iff$$

$$\iff 1 < n+1 \quad \text{verdadeiro } \forall n \geq 1.$$

ou faça por derivação!

Logo,

$$a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

<u>Definição:</u> Uma seq. $\{a_n\}$ é <u>limitada superiormente</u> se existir um nº M tal que

$$a_n \leq M, \quad \forall n \geq 1,$$

e é <u>limitada inferiormente</u> se existir um nº m tal que

$$m \leq a_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, dizemos que $\{a_n\}$ é uma <u>seq. limitada</u>.

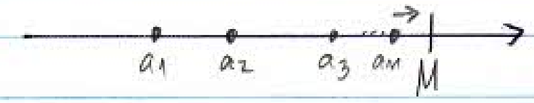
<u>Exemplo 8</u> A sequência $\{n\}_{n\geq 1}$ é ltda inferiormente por 1, mas não é limitada superiormente.

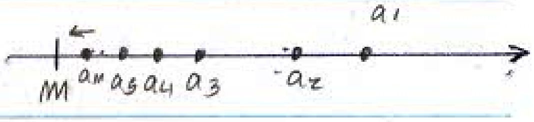
A sequência $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ é limitada por -1 e por 1 (mas não é convergente!).

Teorema 6 (da Seqüência Monotônica).

Toda seqüência limitada e monotônica é convergente.

Obs: Do Teo. acima, se uma seq. é limitada inferiormente e decrescente, ela é convergente. Do mesmo modo, se ela é limitada superiormente e crescente, ela tb é convergente.





Exemplo 9 Investigue a seq. $\{a_n\}$ definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \qquad p/\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Solução

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(5+6) = 5{,}5$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(5{,}5+6) = 5{,}75$$

(Parece que $\{a_n\}$ é crescente)

p/ $n \geq 1$,

$$a_n < a_{n+1} \iff \cancel{\frac{1}{2}}(n+6) < \cancel{\frac{1}{2}}(n+1+6) \iff$$

$$\iff \cancel{n}+6 < \cancel{n}+7 \iff 6 < 7 \quad \text{ok}, \ \forall n$$

Logo, $\{a_n\}$ é seq. crescente.

Parece que $\{a_n\}$ é limitada superiormente por 6: Usamos indução matemática:

1) $a_1 = 2 < 6$ ok.

2) $a_2 = 4 < 6$ ok

3) Hipótese de Indução: suponha que $a_n \leq 6$. Então temos que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6) \leq \frac{1}{2}(6+6) = 6 \quad \text{ok.}$$

Logo, vale p/ todo $n \geq 1$.

Então, pelo Obs. do Teo. 6, temos que $\{a_n\}$ é convergente. Além disso,

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n+6) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n + 3$$

$$\Rightarrow L = \frac{L}{2} + 3 \Rightarrow 2L = L + 6 \Rightarrow L = 6 \quad \#$$