DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães
Lista 1

1. Uma partícula, inicialmente em repouso no instante $t = 0$, é submetida à uma força

$$F(t) = F_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta).$$

a) Encontre o movimento, ou seja, determine $x(t)$.
b) Como a velocidade final depende de θ e de ω?
[dica: os cálculos serão mais simples se $\cos(\omega t + \theta)$ for escrito na representação complexa]

2. Um barco com velocidade inicial v_0 tem sua velocidade reduzida pela água, devido à ação de uma força $F(v) = -\alpha e^{\beta v}$.
a) Encontre a expressão da velocidade $v(t)$.
b) Determine o instante e a posição em que o barco entra em repouso.

3. Uma partícula é projetada verticalmente para cima em um campo gravitacional constante com uma velocidade inicial v_0. Suponha que exista uma força de resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade instantânea. Mostre que a velocidade da partícula quando ela retorna à sua posição inicial é dada por uma expressão da forma:

$$v = \frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}},$$

onde v_t é a velocidade terminal. Qual a expressão da velocidade terminal em termos dos parâmetros que você utilizou no problema?

4. A velocidade de uma partícula de massa m varia com a distância x na forma $v(x) = ax^{-n}$. Suponha que $v(x = 0) = 0$ em $t = 0$.
a) Encontra a força $F(x)$.
b) Determine $x(t)$ e $F(t)$

5. Uma partícula de massa m é repelida da origem por uma força inversamente proporcional ao cubo de sua distância à origem. Escreva e resolva a equação de movimento considerando que a partícula estava inicialmente em repouso à uma distância x_0 da origem.

6. De acordo com a relatividade especial, uma partícula de massa de repouso m_0 acelerada em uma dimensão por uma força F obedece a equação $\frac{dp}{dt} = F$, onde

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

é o momento relativístico, que se reduz ao momento Newtoniano $m_0 v$ para velocidades muito menores que a velocidade da luz ($\frac{v^2}{c^2} \ll 1$).
a) Para o caso de uma força F constante e condições iniciais $x(0) = v(0) = 0$, encontre $x(t)$ e $v(t)$.
b) Faça um esboço do gráfico da função $v(t)$
c) Suponha que $\frac{F}{m_0} = 10 m/s^2$ ($\approx g$ na terra). Em quanto tempo a partícula atinge a velocidade correspondente à metade da velocidade da luz ($c = 3 \times 10^8 m/s$)? Em quanto tempo ela atinge 99% da velocidade da luz?

7. Uma partícula se movendo sob a influência de uma força conservativa está oscilando entre os pontos x_1 e x_2. Mostre que o período de oscilação é

$$\tau = 2 \int_{x_1}^{x_2} dx \, \sqrt{\frac{m}{2(V(x_2) - V(x))}}.$$

8. Considere o potencial

$$V(x) = \frac{m\omega_0^2}{2}(x^2 - bx^4),$$

a) Encontre a força $F(x)$.
b) Esboce o gráfico de $V(x)$. Encontre as posições de equilíbrio estável e instável do sistema.
c) Se a partícula oscila em torno do ponto de equilíbrio estável com amplitude A, mostre que o período de oscilação pode ser escrito na forma (veja a questão anterior)

$$\tau = \frac{2}{\omega_0} \int_{-A}^{A} dx \, \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}\sqrt{1 - b(A^2 + x^2)}}.$$

d) Para $bA^2 \ll 1$, determine o período τ a partir da expressão acima até a primeira ordem em uma expansão em potências de bA^2.
e) Qual é a velocidade mínima (velocidade de escape) que a partícula precisa ter na origem ($x = 0$) para conseguir escapar para o infinito?
f) Em $t = 0$ a partícula está na origem e sua velocidade é positiva e igual em magnitude à velocidade de escape obtida no item e). Encontre $x(t)$ e esboce o gráfico do resultado.

9. Duas massas $m_1 = 100g$ e $m_2 = 200g$ deslizam livremente em uma superfície sem atrito e estão conectadas por uma mola de constante elástica $k = 0.5N/m$. Encontre a frequência do movimento oscilatório do sistema.

10. a)Usando o princípio da superposição, encontre o movimento de um oscilador sub-amortecido ($\gamma = \frac{1}{3}\omega_0$) inicialmente em repouso e, depois de $t = 0$, sob a ação de uma força

$$F = A\sin(\omega_0 t) + B\sin(3\omega_0 t),$$

onde ω_0 é a frequência natural do oscilador.
b) Qual a razão entre B e A necessária para que a oscilação forçada de frequência $3\omega_0$ tenha a mesma amplitude da oscilação forçada com frequência ω_0?

11. Considere um oscilador amortecido sob a ação de uma força periódica $F(t) = F\cos(\omega t)$.
a) Calcule a potência desta força (despreze a componente transiente do movimento). Mostre que a potência média transferida ao sistema é $P = m\gamma\omega^2 A^2$, onde A é a amplitude do movimento.
b) Verifique que a potência média transferida ao sistema é igual à média da taxa de variação da energia dissipada pelo amortecimento.
c) Mostre que a potência P assumirá um valor máximo como função de ω para $\omega = \omega_0$, onde ω_0 é a frequência natural do sistema. Para quais valores de ω a potência assume a metade de seu valor máximo?

12. Resolva o problema do oscilador amortecido sob a ação de uma força externa $F(t) = F\cos(\omega t)$ (ligada em $t = 0$) pelo método da função de Green. (suponha que o amortecimento é subcrítico)
[dica: lembre que $\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$]