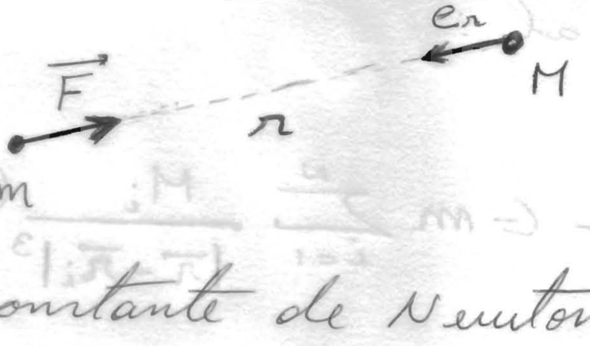
Gravitação Newtoniana

→ A lei da gravitação foi formulada por Newton em 1666 e publicada no "Principia" em 1687.

. **Lei da gravitação**: toda partícula atrai qualquer outra partícula com uma força que varia diretamente como o produto das massas das duas partículas e inversamente como o quadrado da distância entre elas.

Matematicamente:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{e}_r$$

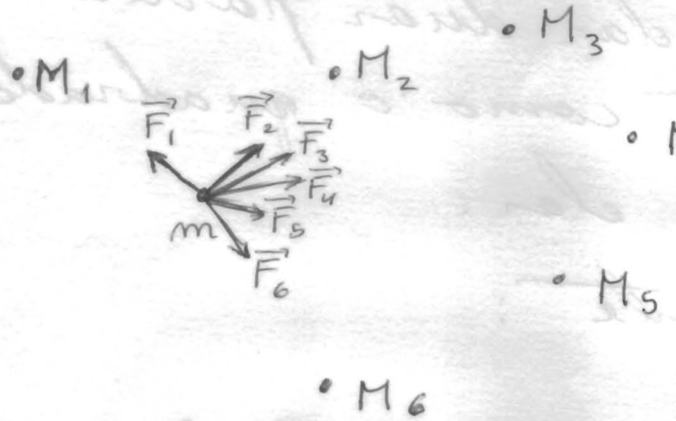


G é a constante de Newton:

$$G = 6,673 \pm 0,010 \times 10^{-11} \frac{N.m^2}{kg^2}$$

→ Uma hipótese fundamental sobre a atuação da força gravitacional é a validade do princípio **da superposição**, ou seja, a força gravitacional total sobre uma partícula devido a presença de outras partículas é igual a <u>soma</u> <u>vetorial</u> **das** forças exercidas por cada uma das outras partículas.

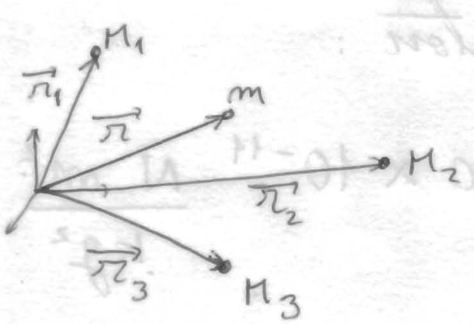
ex:



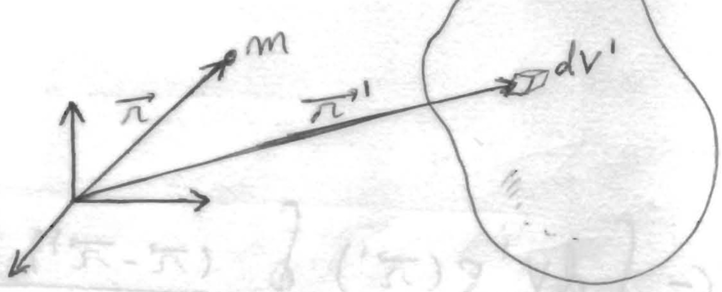
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6$$

De forma geral:

$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$



Ou, para uma distribuição contínua:



$$\vec{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}')\, dV'$$

$$= m\,\vec{g}(\vec{r})$$

onde:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} (\vec{r}-\vec{r}')\, dV'$$

é o campo gravitacional. Este é um campo vetorial, definindo um vetor em cada ponto do espaço. Note que $\vec{g}$ tem dimensão de aceleração; m/s^2

→ Note que:

$$\oint_c \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

De fato:

$$\oint_c \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -G \int_V dV' \rho(\vec{r}\,') \oint_c \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Mas:

$$\oint_c \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \oint_c \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\, d(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= \oint \frac{\vec{u}\, d\vec{u}}{u^3} = \oint \frac{du}{u^2}$$

$$= \int_{u_0}^{u_0} \frac{du}{u^2} = 0, \quad u = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

Portanto, $\nabla \times \vec{g}(\vec{r}) = 0$ e ainda:

$$\vec{g} = -\nabla \Phi$$

Φ é o potencial gravitacional

o potencial gerado por uma partícula é:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\frac{M}{r^2}\hat{e}_r = -\nabla\Phi$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial r} = G\frac{M}{r^2}$$

$$\Longrightarrow \Phi = -\frac{GM}{r}$$

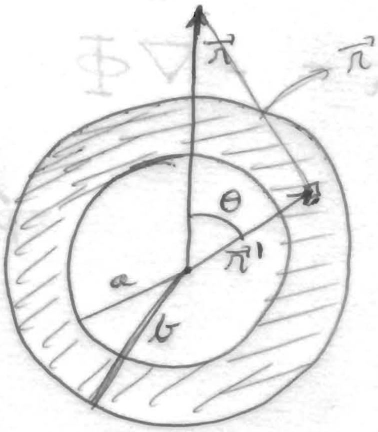
onde Φ é definido a menos de uma constante. Neste caso, definimos $\Phi = 0$, $r \to \infty$

Podemos naturalmente generalizar para uma distribuição de partículas

$$\Phi(\vec{r}) = -G\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

<u>obs</u>: note que na construção deste potencial [está implícito] que $\Phi = 0$ em $\vec{r} \to \infty$.

Como Φ é um escalar, em muitas situações pode ser vantajoso calcular Φ e depois obter o campo gravitacional desejado simplesmente tomando o gradiente ex: casca esférica com distribuição homogênea de massa ($\rho = \underline{\underline{cte}}$)



$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')^2}$$
$$= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$$

$$\Phi(\vec{r}) = -G\int_V dv' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -G\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \int_a^b dr' \, r'^2 \, \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}$$

$$= -2\pi G\rho \int_a^b dr' \, r'^2 \cdot \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}\,\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2\pi G\rho}{r} \int_a^b dr' \, \left[(r+r') - |r-r'|\right] r'$$

• $r \leq a$:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-2\pi G\rho}{r} \int_a^b dr' \, 2rr'$$

$$= -2\pi G\rho\,(b^2-a^2) = \text{constante}$$

• $a \leq r \leq b$:

$$\Phi(r) = -\frac{2\pi\rho G}{r}\left[\int_a^r dr'\, 2r'^2 + \int_r^b dr'\, 2rr'\right]$$

$$= -\frac{2\pi\rho G}{r}\left[\frac{2}{3}(r^3-a^3) + r(b^2-r^2)\right]$$

$$= -2\pi\rho G\left[b^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{a^3}{r}\right]$$

• $r \geq b$:

$$\Phi(r) = -\frac{2\pi G\rho}{r}\int_a^b dr'\, 2r'^2$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\frac{G\rho}{r}(b^3-a^3)$$

observe que:

$$M = \int_V dV'\rho(r') = \rho\cdot 4\pi\int_a^b dr'\, r'^2 = \frac{\rho\, 4\pi}{3}(b^3-a^3)$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad ; \; r \geq b$$

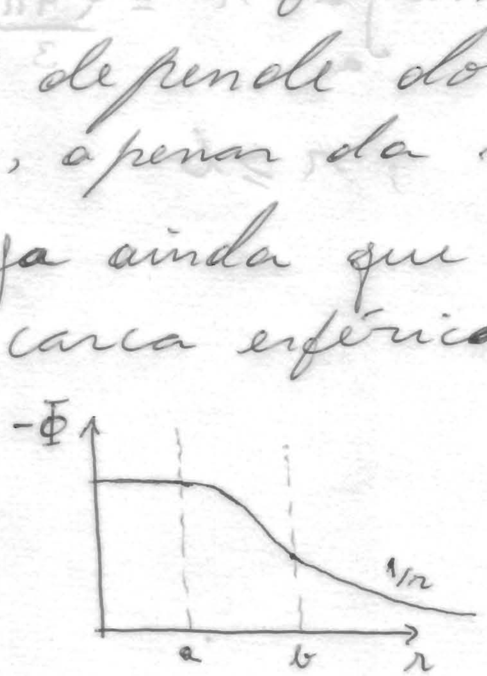
O campo gravitacional será portanto, com

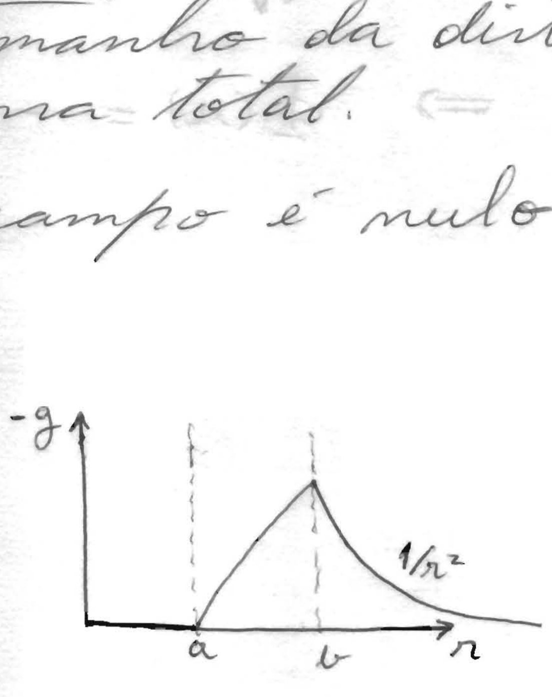
$$\vec{g} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\hat{e}_r \;:$$

$$\vec{g}(r) = \begin{cases} 0 \;, & \text{se } r \leq a \\ -\dfrac{4\pi\rho G}{3}\left(r - \dfrac{a^3}{r^2}\right)\hat{e}_r \;; & a \leq r \leq b \\ -\dfrac{GM}{r^2}\,\hat{e}_r \;; & r \geq b \end{cases}$$

Este resultado mostra que o campo gravitacional fora de uma distribuição __esfericamente__ __simétrica__ de matéria é o mesmo que no caso em que toda a massa da distribuição estivesse concentrada no centro. De fato, note que o resultado não depende do tamanho da distribuição, apenas da massa total.

Veja ainda que o campo é nulo dentro da casca esférica.

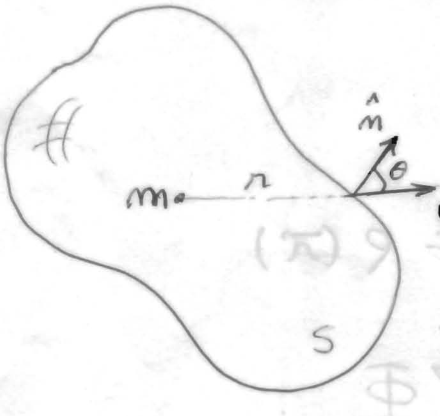


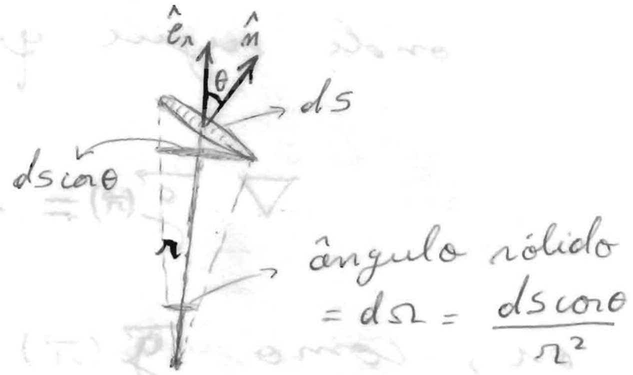


Equação de Poisson

Considere o fluxo do campo gravitacional através de uma superfície fechada devido a uma partícula de **massa** m em seu interior

$$I = \int_S d\vec{s} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = \int_S d\vec{s} \cdot \hat{e}_r \cdot \frac{-Gm}{r^2}$$





$$I = \int_S ds\, \hat{m} \cdot \hat{e}_r \left(\frac{-Gm}{r^2}\right) = -Gm \int_S ds\, \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$= -Gm \int d\Omega = -4\pi G m$$

Pelo princípio da superposição, para uma distribuição de massas no interior de S:

$$\int_S d\vec{s} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \sum_i m_i$$

Ou ainda, para uma distribuição contínua:

$$\int_S d\vec{S}\cdot\vec{g}(\vec{r}') = -4\pi G\int_V dV'\rho(\vec{r}')$$

onde V é o volume limitado por S. Podemos ainda encontrar uma expressão local usando a lei de gauss.

$$\int_S d\vec{S}\cdot\vec{g}(\vec{r}') = \int_V dV\,\nabla\cdot\vec{g}$$

De onde segue que:

$$\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r})$$

ou, como $\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\Phi$:

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho}$$

Esta é a equação de Poisson.

Exemplo:

Qual distribuição de massas produz um potencial gravitacional da forma:

$$\Phi(r) = k \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad ?$$

Em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\Phi(r)\right) + \cdots \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)}_{0}$$

$$= \frac{k}{r^2} = 4\pi G \rho$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(r) = \frac{k}{4\pi G r^2}$$

$$\Longrightarrow \quad M = \int_V dV\, \rho(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^R dr\, r^2 \frac{k}{4\pi G r^2}$$

$$= \frac{k}{G} R$$

O campo gravitacional correspondente será:

$$\vec{g} = -\nabla\Phi = -\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\Phi + \cdots \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}}_{0}$$

$$= -\frac{k}{r}\hat{e}_r$$

Uma partícula em órbita circular sob a influência desse campo terá uma velocidade orbital dada por:

$$\frac{mv^2}{r} = mg = \frac{mK}{r}$$

$$\Longrightarrow v = \sqrt{K} = \text{constante}$$

Se a massa estivesse concentrada próxima ao centro da órbita e pudéssemos ~~~~ considerar uma distribuição esfericamente simétrica teríamos: $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$, com M constante, e:

$$\frac{mv^2}{r} = mg = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Esse seria o comportamento esperado para o movimento nos extremos (distante do centro) das galáxias. Mas observa-se de fato que v é constante sinalizando uma distribuição de matéria, que não é diretamente observada, da forma $M \sim r$. Esse é um dos principais indícios da existência de matéria escura que constituiria cerca de 90%! da matéria do universo.