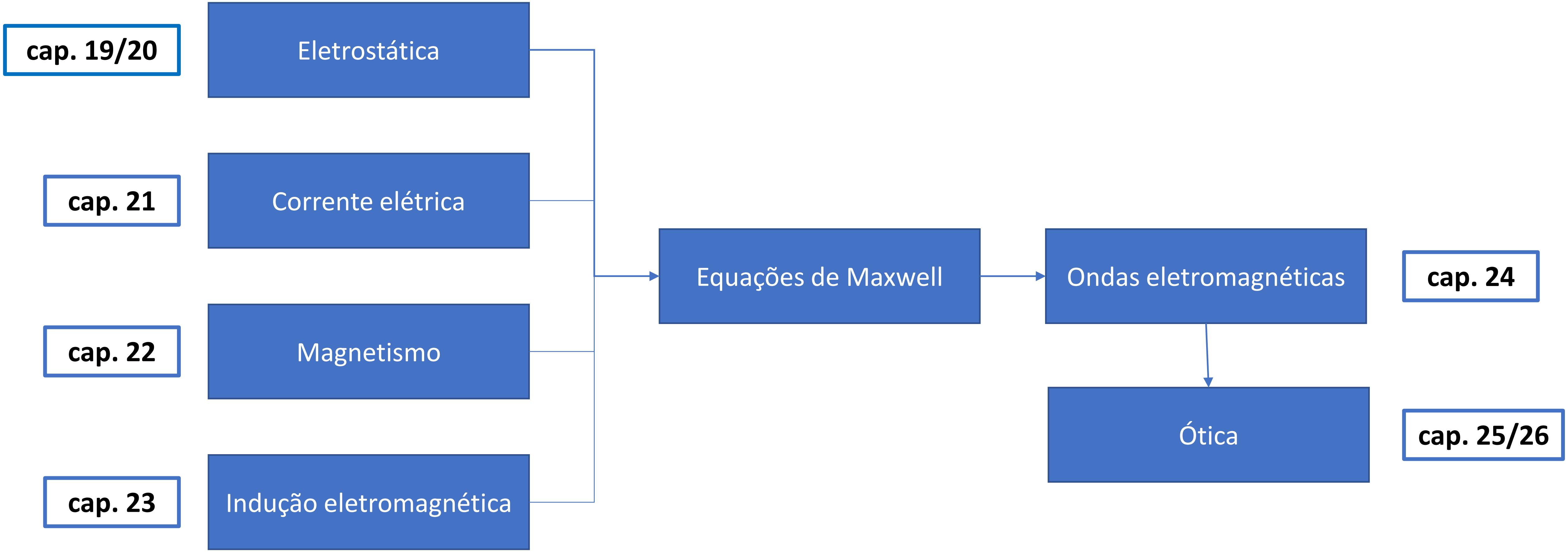
**Departamento de Eletrônica Quântica (DEQ) – Física II – IME – 2017.2 / 2018.1**

emilio.deq@gmail.com https://sites.google.com/site/fpm2deq/

**R. A. Serway & J. W. Jewett, Jr. - Princípios de Física - vol. 3 e 4 - 3ª ed. - Eletromagnetismo**



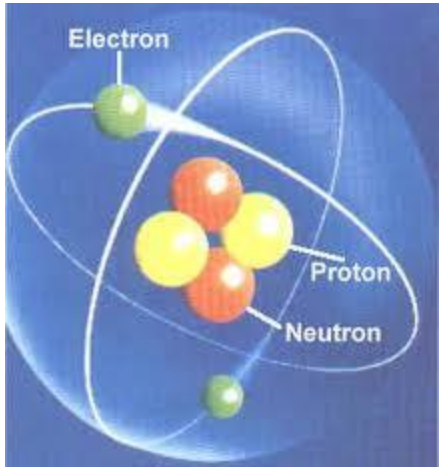
## Modelos atômicos

Modelo de Bohr → Modelo de Sommerfeld → Modelo de Schrödinger

Física Clássica → Modelo de Bohr

Mecânica Quântica → Modelo de Schrödinger

## Modelo simplificado




**Charge and Mass of the Electron, Proton, and Neutron**

| Particle | Charge (C) | Mass (kg) |
|---|---|---|
| Electron (e) | $-1.602\,191\,7 \times 10^{-19}$ | $9.109\,5 \times 10^{-31}$ |
| Proton (p) | $+1.602\,191\,7 \times 10^{-19}$ | $1.672\,61 \times 10^{-27}$ |
| Neutron (n) | 0 | $1.674\,92 \times 10^{-27}$ |

**Carga elétrica** – Excesso de elétrons (*carga negativa*) ou falta de elétrons (*carga positiva)*.

**Processos de eletrização:** ***atrito, indução, contato.***

**Unidade de carga elétrica no SI** – ***coulomb*** **(C). Carga elétrica não é uma grandeza fundamental.**

**Grandezas e unidades fundamentais do SI**

| tempo | comprimento | massa | temperatura | corrente elétrica | quantidade de matéria | intensidade luminosa |
|---|---|---|---|---|---|---|
| segundo (s) | metro (m) | quilograma | kelvin (K) | ampere (A) | mol | candela (cd) |

**<u>Condutores e isolantes</u>**

***Condutor:*** **grande mobilidade de portadores de carga. Ex.: metais.**

***Isolante (ou dielétrico):*** **mobilidade pequena ou desprezível de portadores de carga. Ex.: vidro, borracha, cerâmica, plástico.**

**Observação: Existem também materiais *semicondutores* e *supercondutores.***

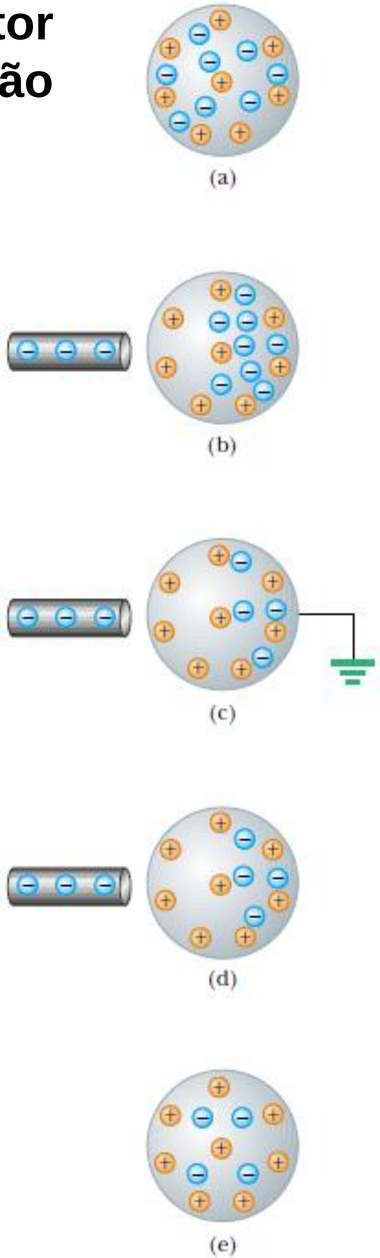
**Sugestão: [https://www.youtube.com/watch?v=ZgDIX2GOaxQ](https://www.youtube.com/watch?v=ZgDIX2GOaxQ)**

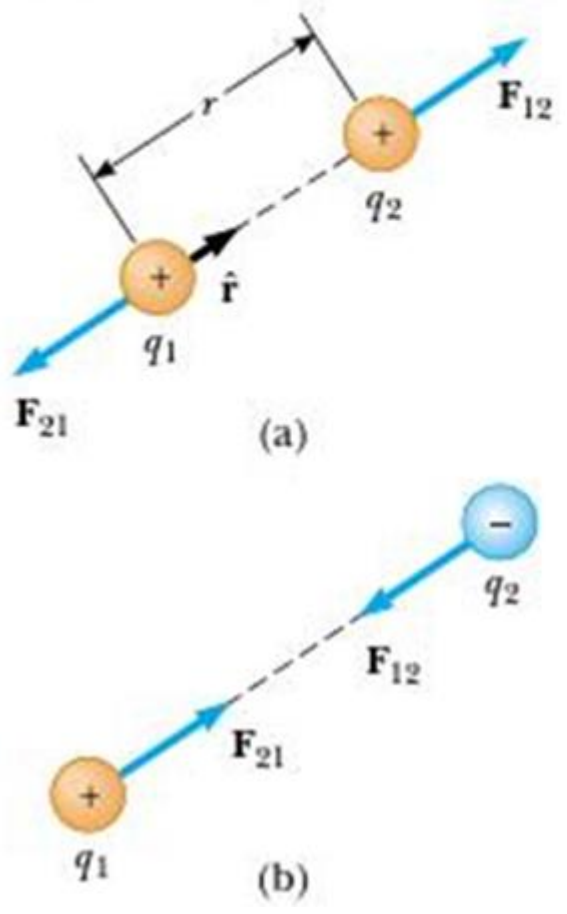
**<u>Propriedade fundamental de um condutor</u> – Como consequência da repulsão entre as cargas de mesmo nome, um condutor carregado em equilíbrio eletrostático apresenta a <u>carga distribuída uniformemente em sua superfície</u>.**

## Eletrização por atrito

| Série triboelétrica | Pele humana seca |
|---|---|
| | Couro |
| | Pele de coelho |
| Maior probabilidade de ceder elétrons | Vidro |
| | Cabelo humano |
| | Nylon |
| | Lã |
| | Chumbo |
| | Pele de gato |
| | Seda |
| | Alumínio |
| | Papel |
| Neutros | Algodão |
| | Aço |
| | Madeira |
| | Âmbar |
| | Borracha dura |
| | Níquel e cobre |
| | Prata e latão |
| | Ouro e platina |
| | Poliéster |
| Maior probabilidade de receber elétrons | Isopor |
| | Filme de PVC |
| | Poliuretano |
| | Polietileno |
| | PVC |
| | Teflon |

## Eletrização de um condutor por indução






## Lei de Coulomb

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$ (3ª lei de Newton)

$$k_e = 8.9875 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

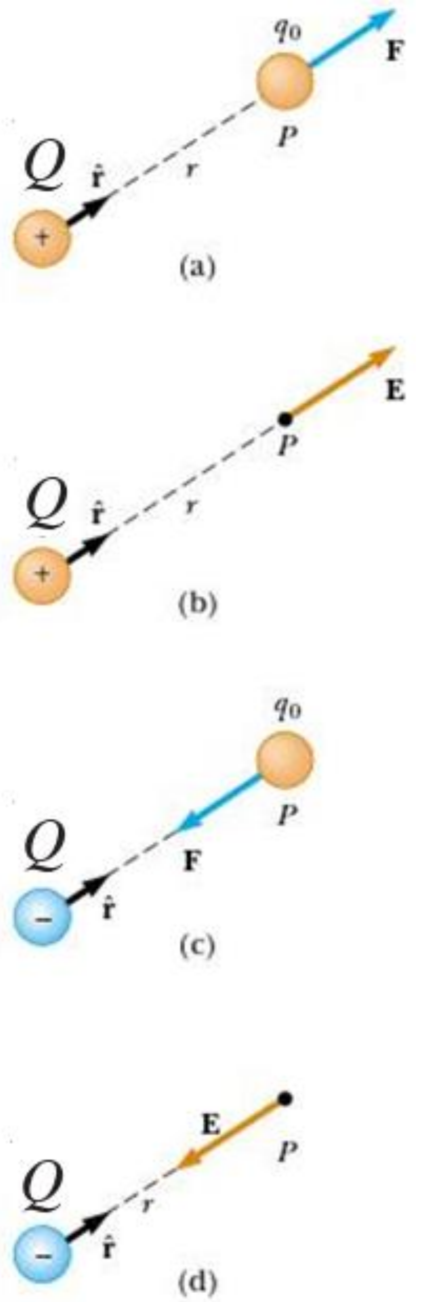
$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$$

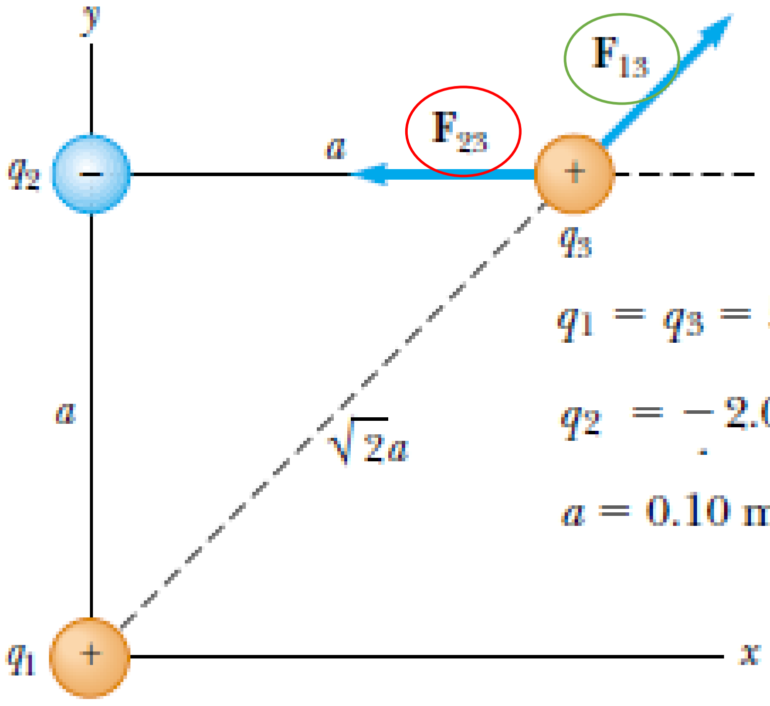
## Campo elétrico

$$\boxed{\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q_0}}$$

$$\boxed{\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$



## Exemplo 1. Calcular a força resultante sobre a carga $q_3$




$q_1 = q_3 = 5.0\ \mu C,$

$q_2 = -2.0\ \mu C,$

$a = 0.10\ m.$

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{a^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}) \frac{(2.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.10\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 9.0\ \mathrm{N}$$

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(\sqrt{2}a)^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}) \frac{(5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{2(0.10\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 11\ \mathrm{N}$$

$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 7.9\ \mathrm{N} + (-9.0\ \mathrm{N}) = -1.1\ \mathrm{N}$$

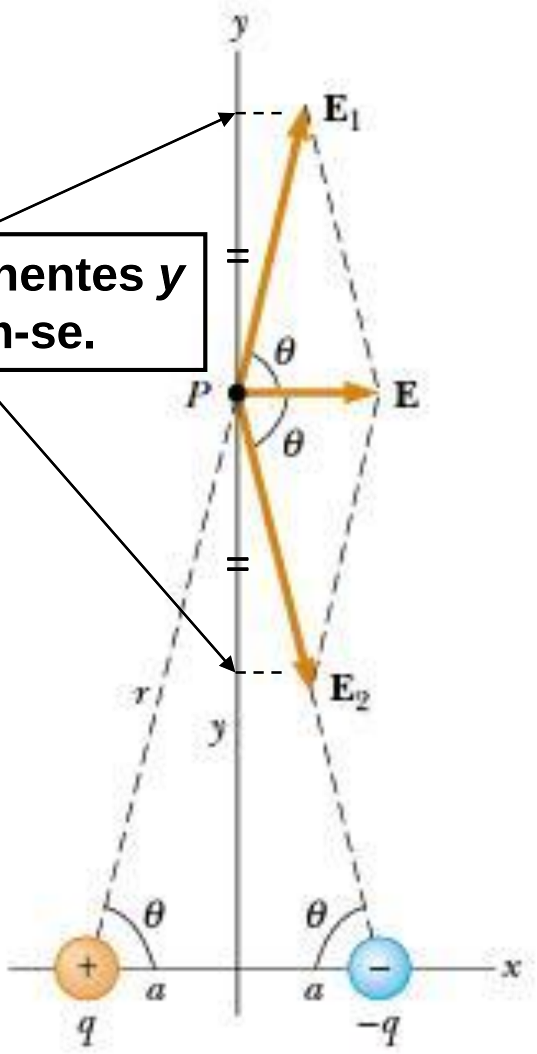
$$F_{3y} = F_{13y} + F_{23y} = 7.9\ \mathrm{N} + 0 = 7.9\ \mathrm{N}$$

11cos(45°)

$$\mathbf{F}_3 = \boxed{(-1.1\hat{\mathbf{i}} + 7.9\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}}$$

## Exemplo 2. Determinar o campo elétrico no ponto *P* próximo de um dipolo elétrico

**As componentes *y* anulam-se.**




$$E_1 = E_2 = k_e \frac{q}{r^2} = k_e \frac{q}{y^2 + a^2}$$

$$\cos\theta = a/r = a/(y^2 + a^2)^{1/2}$$

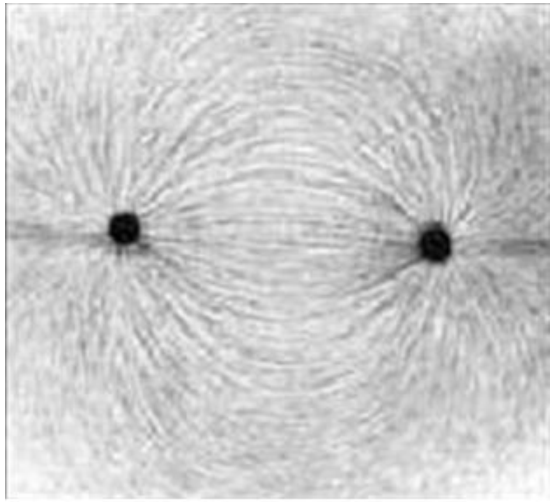
$$E = 2\overbrace{E_1 \cos\theta}^{E_x} = 2k_e \frac{q}{(y^2 + a^2)} \frac{a}{(y^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$= k_e \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

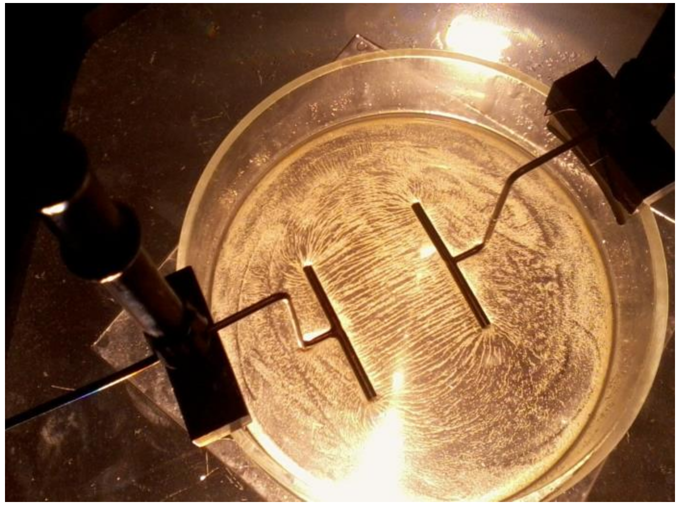
$$\text{se } \; y \gg a, \quad E \approx \boxed{k_e \frac{2qa}{y^3}}$$

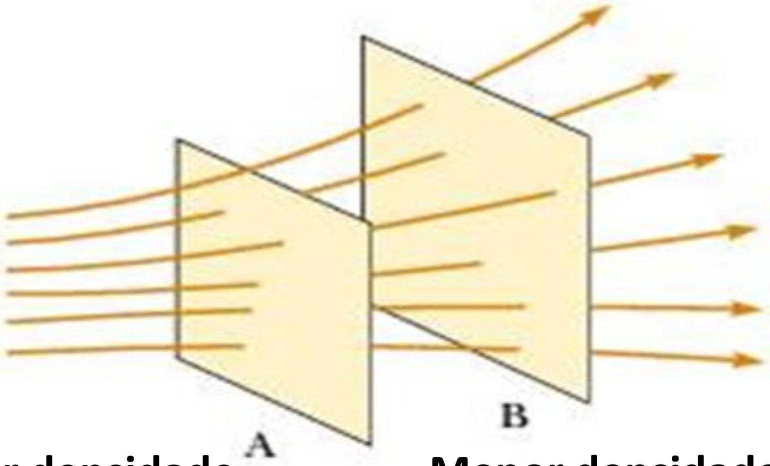
# <u>Linhas do campo elétrico</u> – Tangentes em cada ponto ao vetor $\vec{E}$.

**Dipolo elétrico**



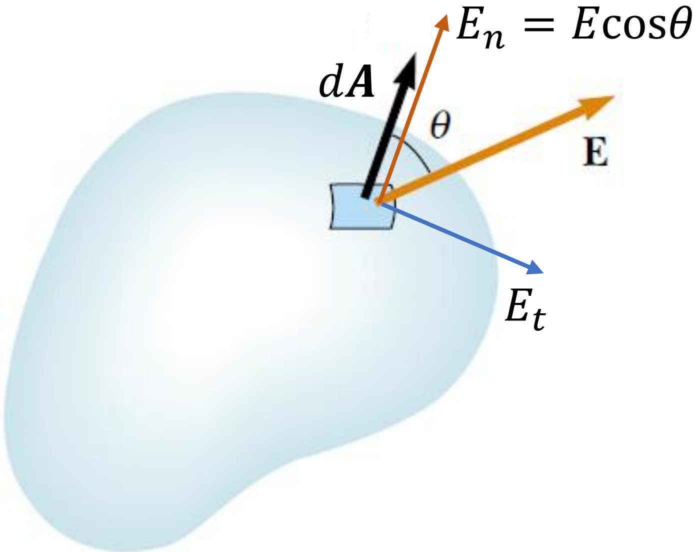
**Hastes paralelas**






**Maior densidade de linhas**

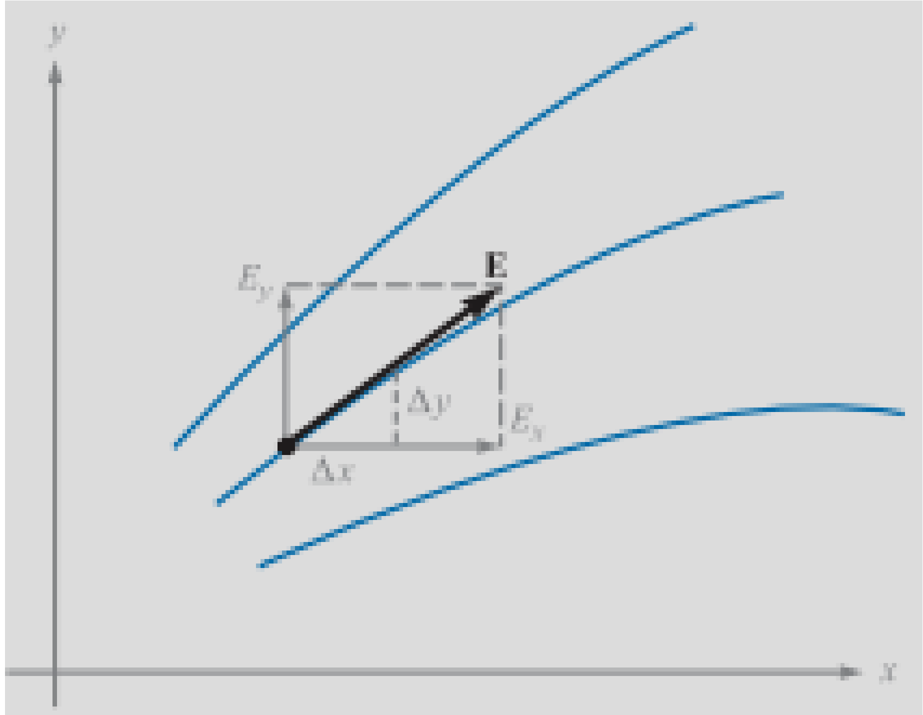
**Menor densidade de linhas**




**<u>Fluxo do campo elétrico</u>:** $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int E_n \, dA$

***somente a componente normal à superfície contribui para o fluxo***

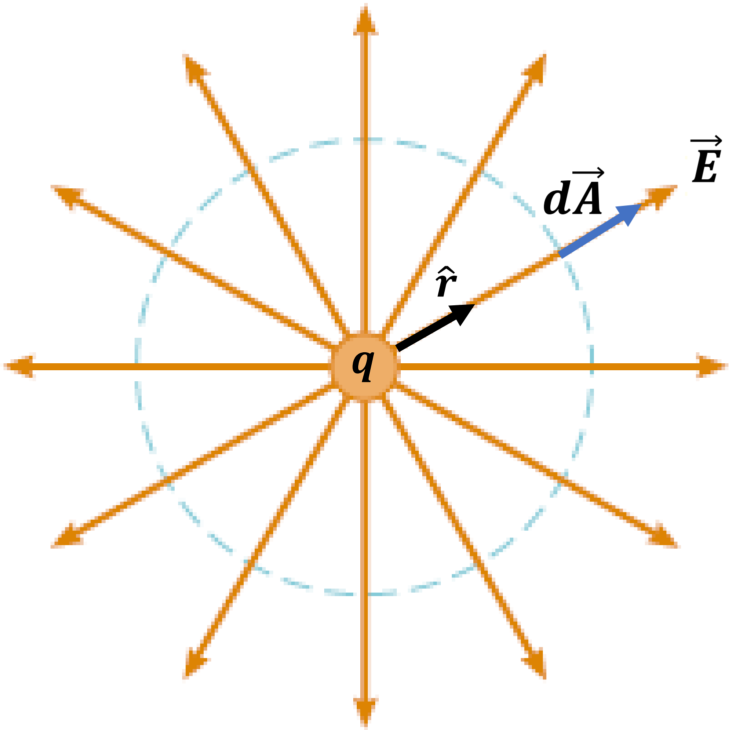
# Equações das linhas do campo elétrico




Hayt, William H.
Eletromagnetismo [recurso eletrônico] / William H. Hayt, Jr., John A. Buck ; tradução: Marco Aurélio de Oliveira Schroeder ; revisão técnica: Antonio Pertence Júnior. – 8. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2013.

$$\text{Triângulos} \longrightarrow \frac{E_x}{\Delta x} = \frac{E_y}{\Delta y} \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}} \longleftarrow \text{EDO das LC}$$

# Exemplo 3. Fluxo do campo elétrico de uma carga pontual através de uma superfície esférica com centro na carga

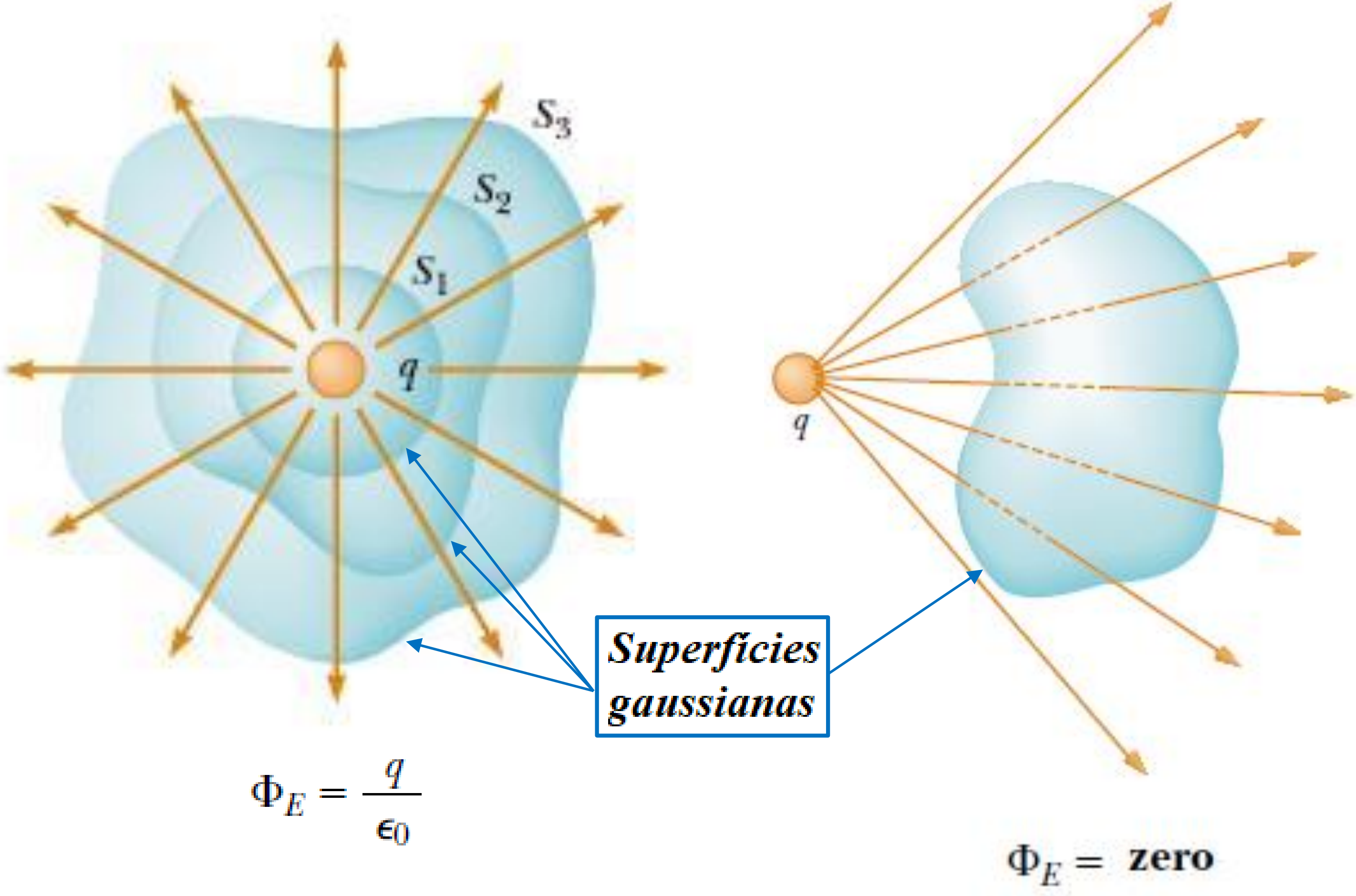



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint k\frac{q}{r^2}\hat{r} \cdot (dA)\hat{r} = k\frac{q}{r^2}\oint dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

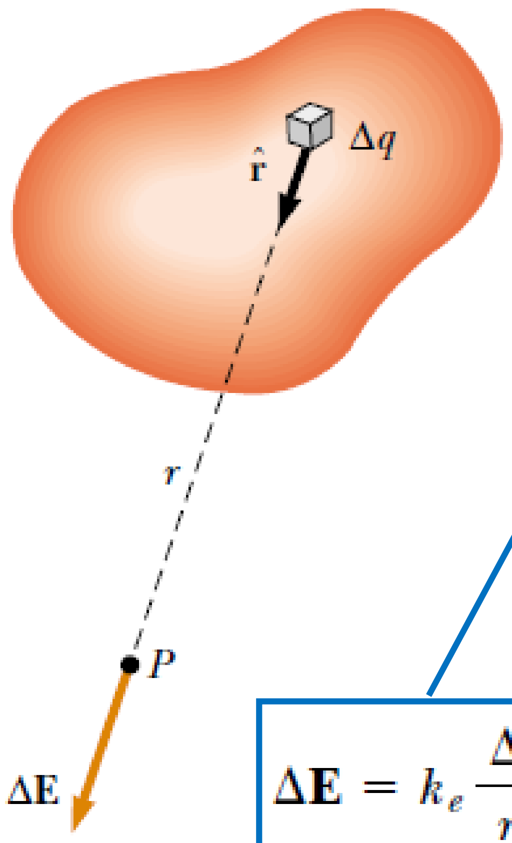
# Lei de Gauss

**Para qualquer superfície fechada que tenha em seu interior uma carga total $q$,**

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$



# Campo elétrico de uma distribuição contínua de carga




$$\boxed{\Delta\mathbf{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^{\,2}}\,\hat{\mathbf{r}}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}}$$

Volume $\rightarrow$ densidade $\rho \equiv {dq}/{dvol}$

Superfície $\rightarrow$ densidade $\sigma \equiv {dq}/{dA}$

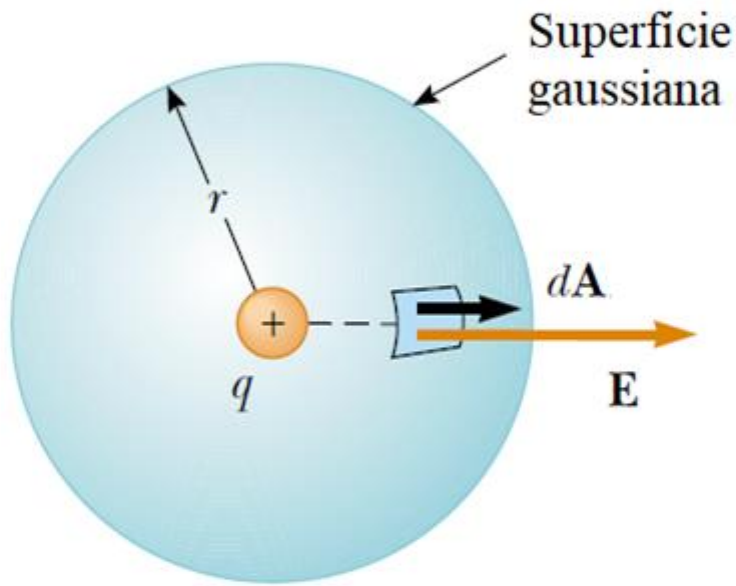
Linha $\rightarrow$ densidade $\lambda \equiv {dq}/{d\ell}$

Método de cálculo, em geral:

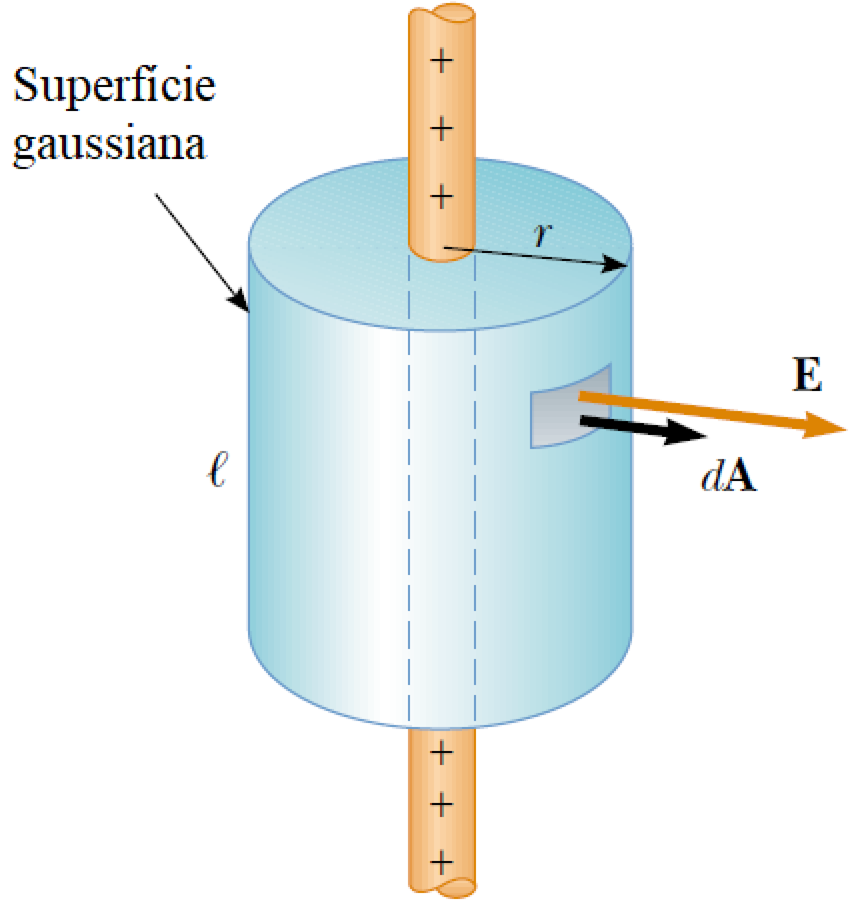
1. Verificar a simetria
2. Escrever a expressão para *dE*
3. Integrar

**<u>Simetria gaussiana</u>** **$\rightarrow$ distribuições com simetria esférica, cilíndrica, ou plana:**

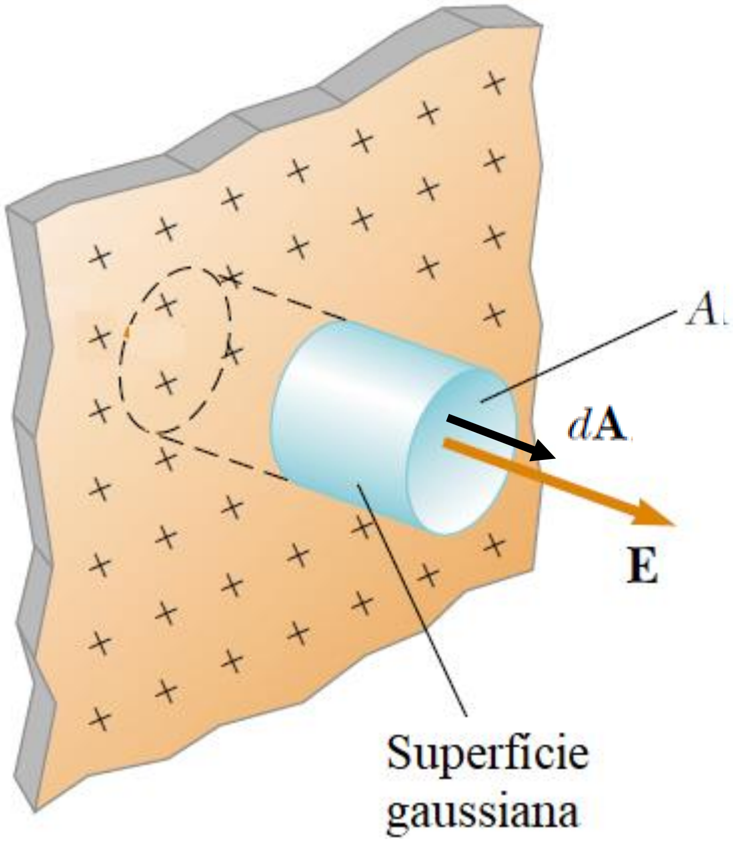
$\vec{E} \, // \, d\vec{A}$ **e** $\left|\vec{E}\right|$ **invariável** $\Rightarrow \quad \Phi_E = EA.$




$$\Phi_E = E\left(4\pi r^2\right)$$

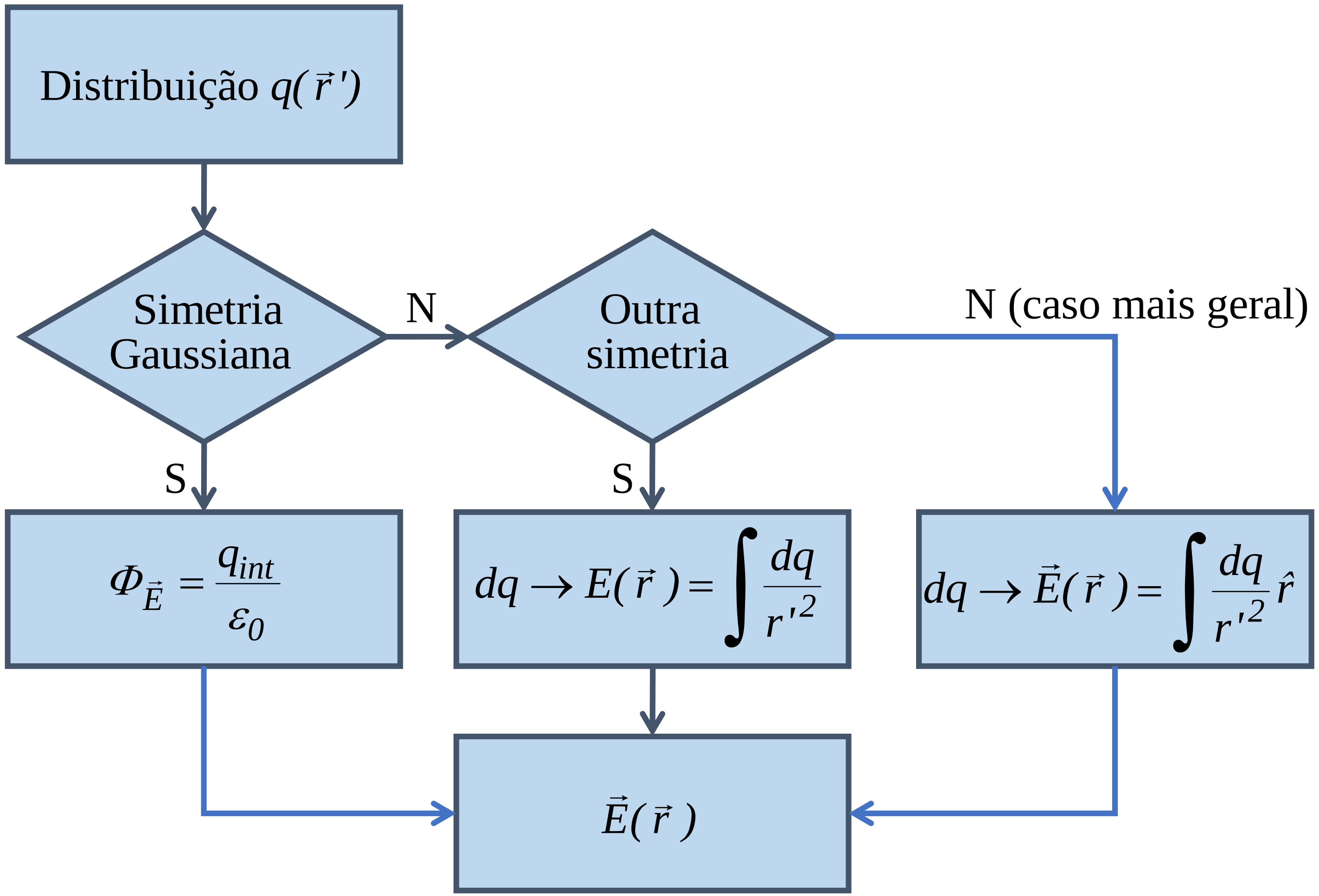



$$\Phi_E = E\left(2\pi r \ell\right)$$

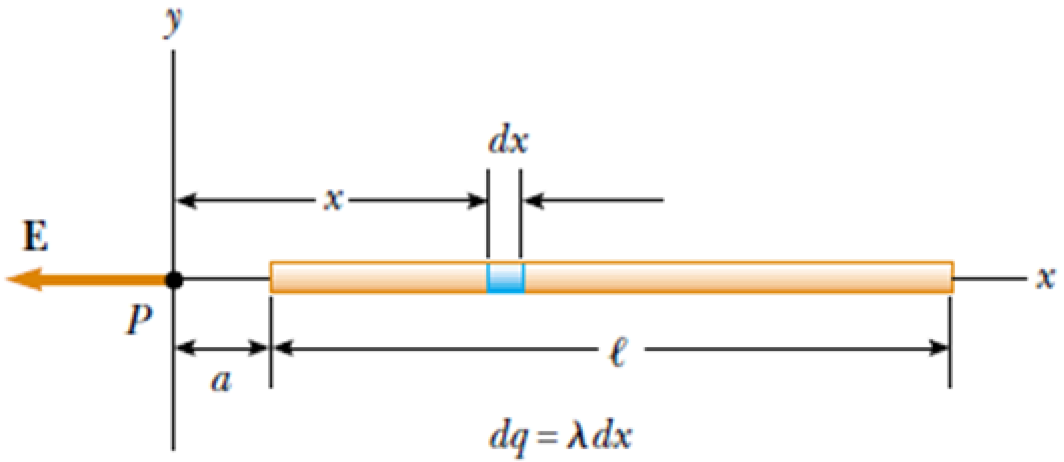



$$\Phi_E = EA$$

# Solução de problemas envolvendo distribuições de carga elétrica



**Exemplo 4. Determinar o campo elétrico em um ponto *P* sobre o eixo de uma barra fina carregada uniformemente**




$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \frac{\lambda\, dx}{x^2}$$

Método de cálculo, em geral:

1. Verificar a simetria
2. Escrever a expressão para *dE*
3. Integrar

$$E = \int_a^{\ell+a} k_e \lambda \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \int_a^{\ell+a} \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^{\ell+a}$$

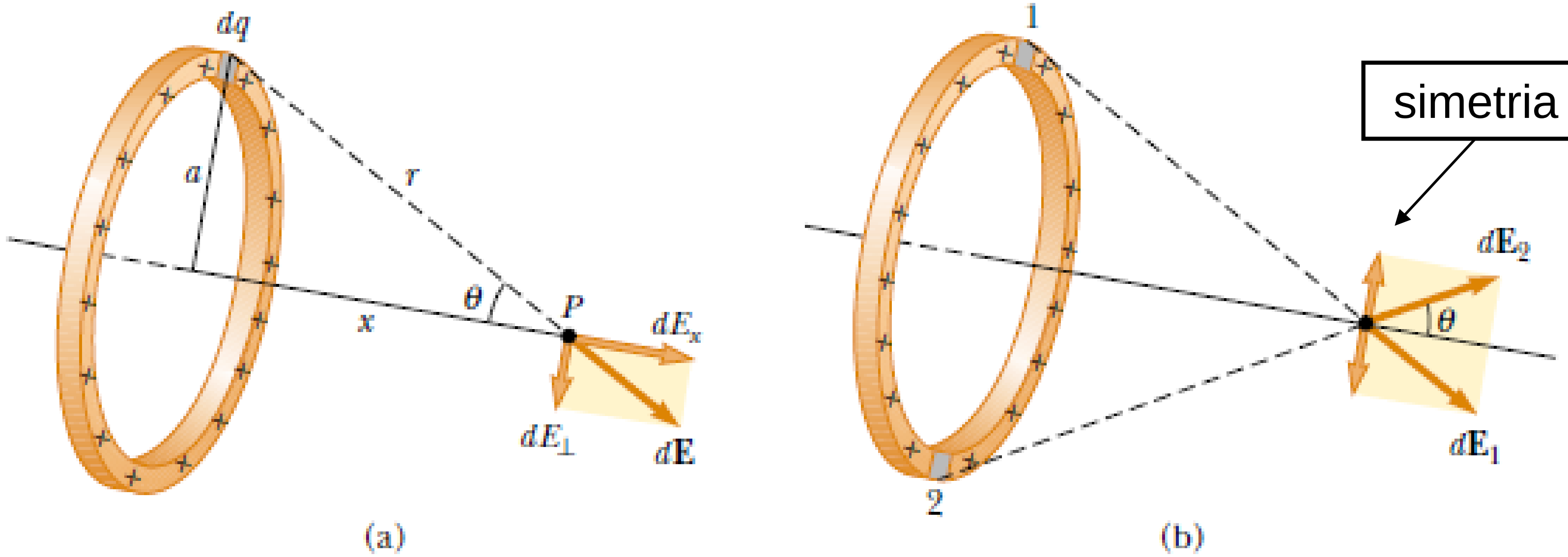
$$E = k_e \lambda \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\ell + a} \right) = \frac{k_e Q}{a(\ell + a)} \qquad [\ Q = \lambda \ell\ ]$$

se $a \gg \ell \longrightarrow E \approx k_e Q / a^2$

# Exemplo 5. Campo em um ponto $x$ do eixo de um anel com carga $Q$ uniformemente distribuída

Método de cálculo, em geral:

1. Verificar a simetria
2. Escrever a expressão para *dE*
3. Integrar




simetria

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} \qquad dE_x = dE\cos\theta = \left(k_e \frac{dq}{r^2}\right)\frac{x}{r} = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dq$$

$$E_x = \int \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dq = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \int dq \;=\; \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,Q$$

se $x \ll a$, $\quad E_x = \dfrac{k_e Q}{a^3}\,x$

**Exemplo 6. Numa caixa cúbica existe uma teia de aranha cujo centro coincide com o centro geométrico do cubo. Nesse ponto existe um acúmulo de poeira mantido agregado pela força de atração eletrostática entre os grãos de pó. A carga do agregado é $Q$.**

**(a) Quanto vale o fluxo do campo elétrico através de cada face da caixa cúbica?**

**(b) Quanto valeria o fluxo total do campo elétrico se o agregado de poeira não se encontrasse no centro da caixa?**

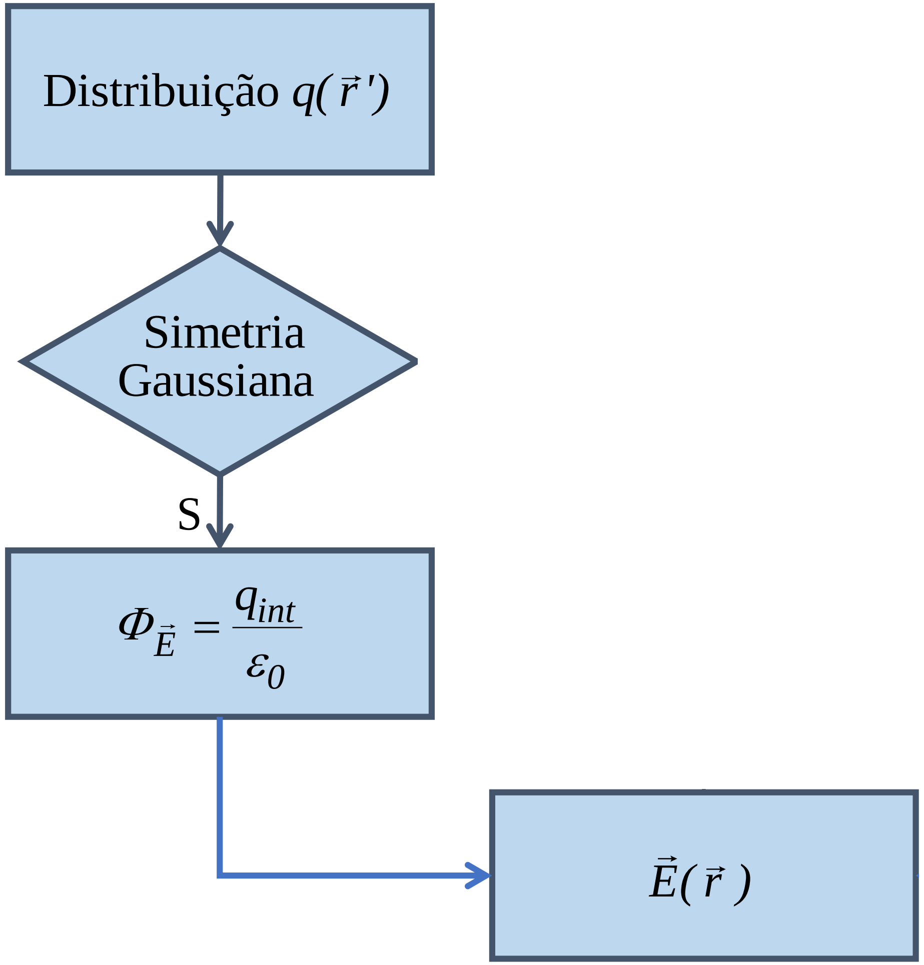
(a) A lei de Gauss implica

$$\Phi_E^{(total)} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \Phi_E^{(cada\,face)} = \frac{Q}{6\varepsilon_0}.$$

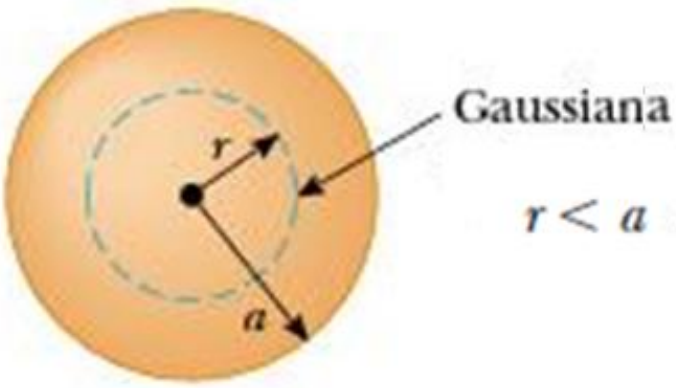
(b) Calculado no item (a):

$$\Phi_E^{(total)} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

**Exemplo 7. Uma esfera sólida isolante de raio $a$ tem uma carga $Q$ distribuída uniformemente em seu volume. Determinar o módulo do campo elétrico no interior da esfera.**



**Exemplo 7. Uma esfera sólida isolante de raio $a$ tem uma carga $Q$ distribuída uniformemente em seu volume. Determinar o módulo do campo elétrico no interior da esfera.**

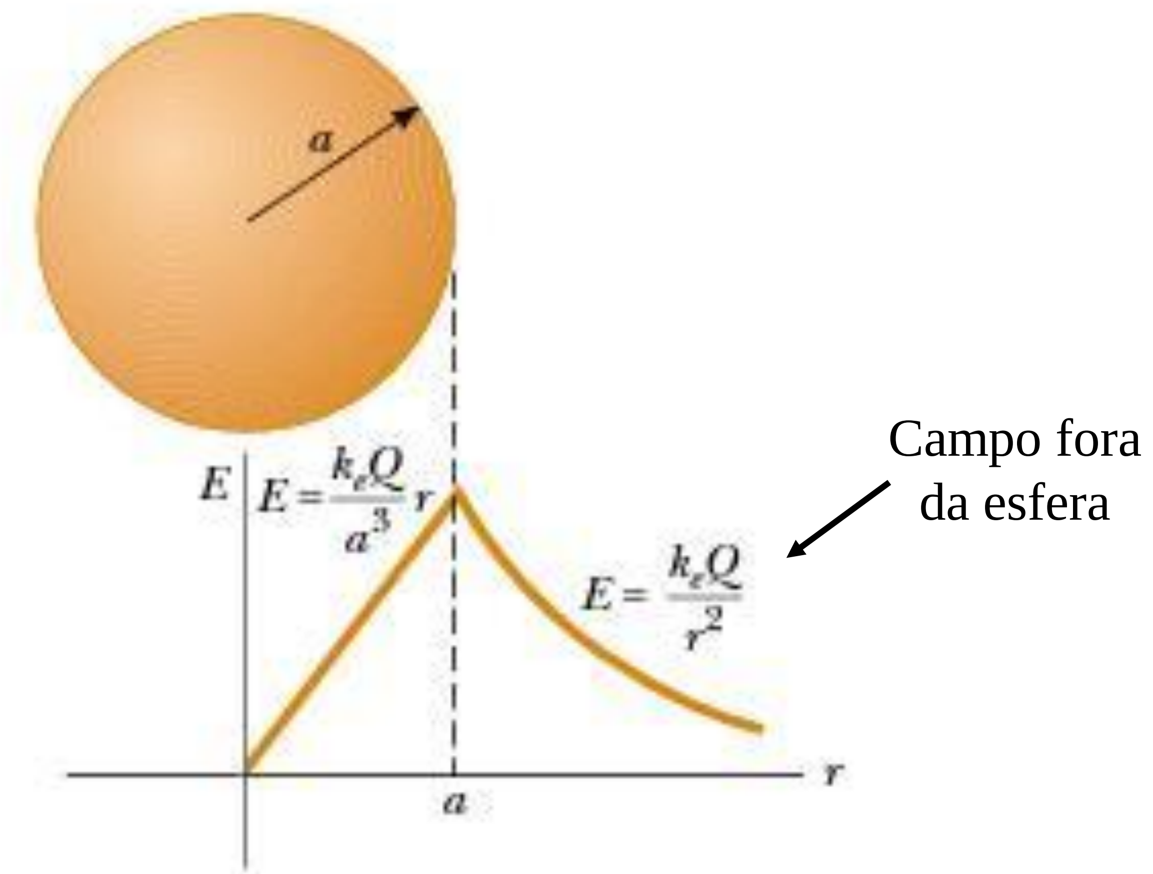



$$r < a \longrightarrow \oint E\,dA = E \oint dA = E\,(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{\text{in}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

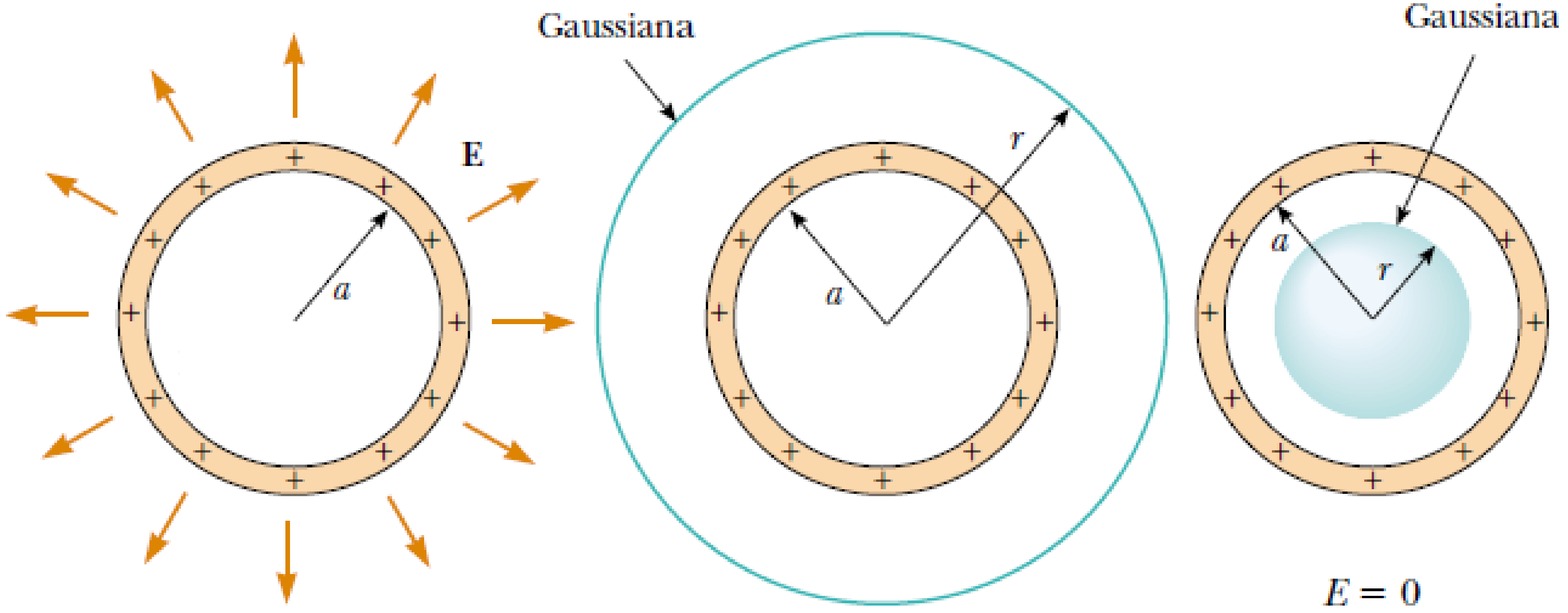
$$V' \longrightarrow q_{\text{in}} = \rho V' = \rho\,(\tfrac{4}{3}\pi r^3);\;\; \rho = Q/\tfrac{4}{3}\pi a^3$$

$$E = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

**Exemplo 7 (continuação). Variação do módulo do campo em função da distância ao centro da distribuição**



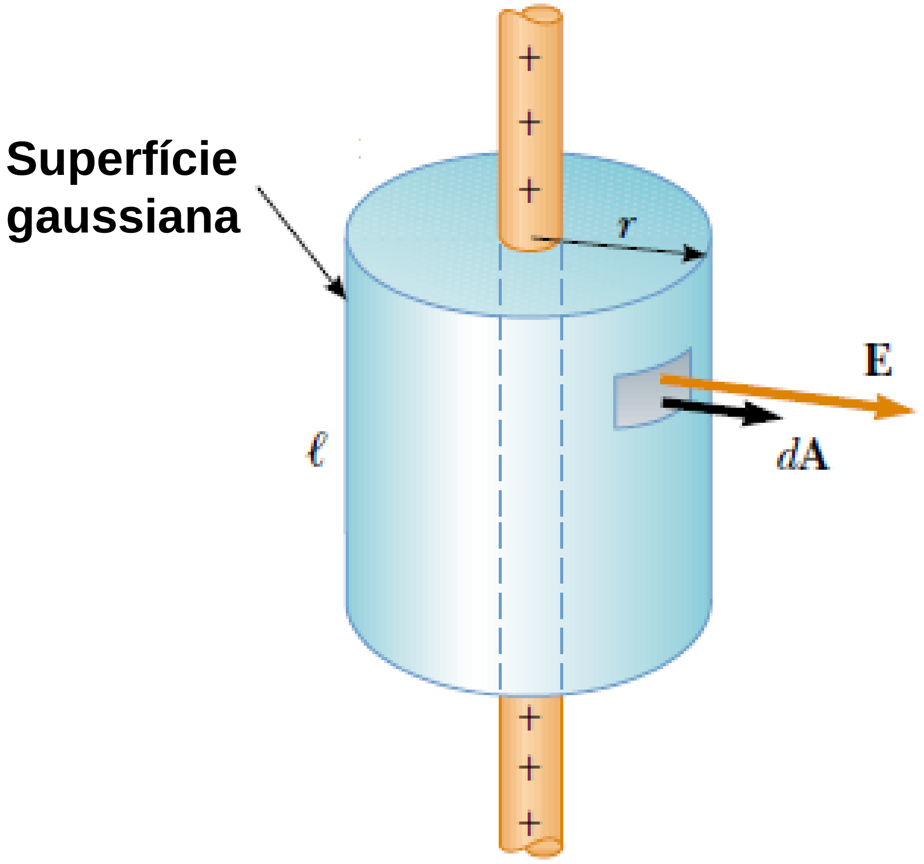
# Exemplo 8. Determinar o campo devido a uma casca esférica carregada positivamente




**Casca esférica**

$$E = \boxed{k_e \frac{Q}{r^2}}$$

## Exemplo 9. Determinar o campo devido a uma barra longa e fina

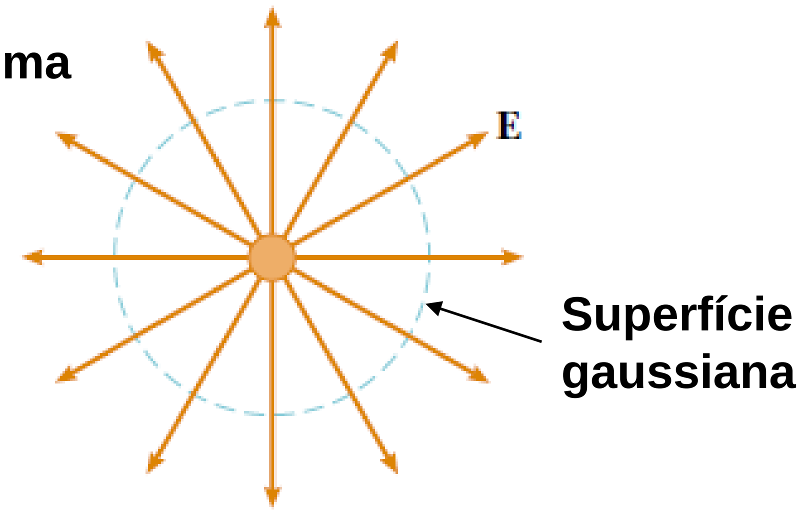



$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0};$$

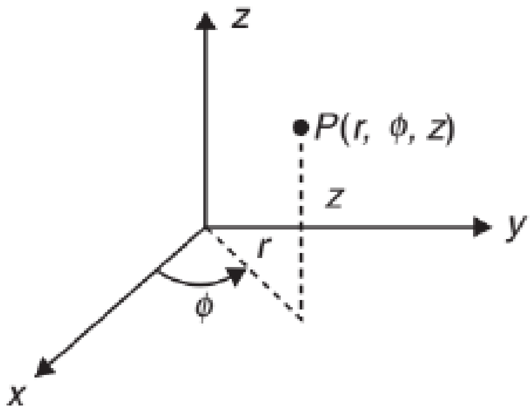
$$A = 2\pi r \ell \quad \longrightarrow \quad E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = \boxed{2k_e \frac{\lambda}{r}}$$

Vista de cima



# Equações das linhas do campo elétrico




EDO das linhas de campo $\longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{E_y}{E_x}$

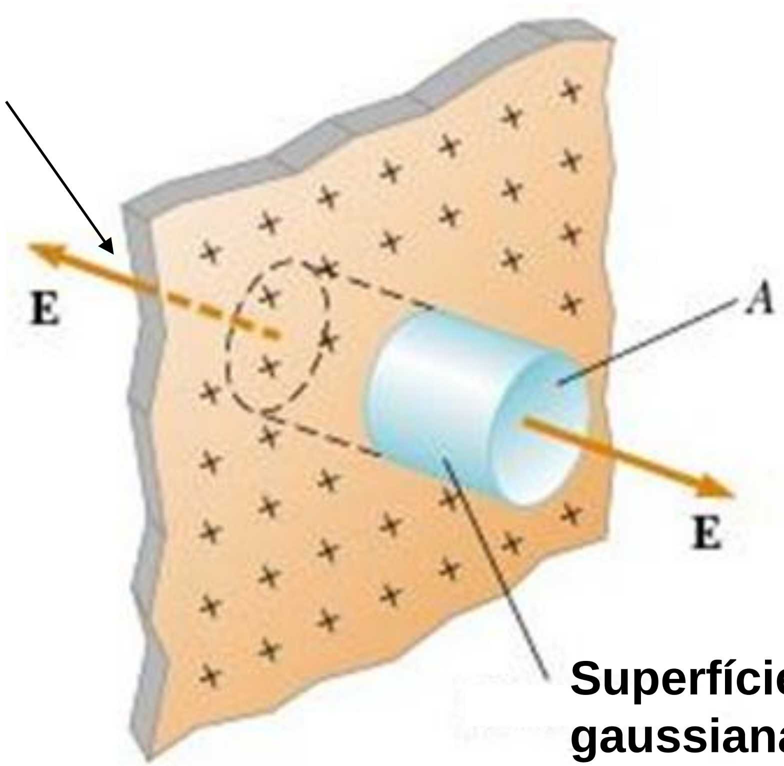
Coordenadas cilíndricas $\longrightarrow x = rcos\phi; y = rsen\phi; z = z;\ \hat{r} = \vec{\imath}cos\phi + \vec{\jmath}sen\phi = \dfrac{x}{r}\vec{\imath} + \dfrac{y}{r}\vec{\jmath}$

Para simplificar, seja $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} = 1 \Longrightarrow \vec{E} = \dfrac{1}{r}\hat{r} = \dfrac{1}{r^2}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})\dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{E_y}{E_x} = \dfrac{y}{x}$ ou $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \ln y = \ln x + C'$ ou $\ln y = \ln x + \ln C \Longrightarrow \boxed{y = Cx}$

## Exemplo 10. Campo próximo de uma distribuição plana e uniforme de cargas positivas

**Há cargas no interior da distribuição**



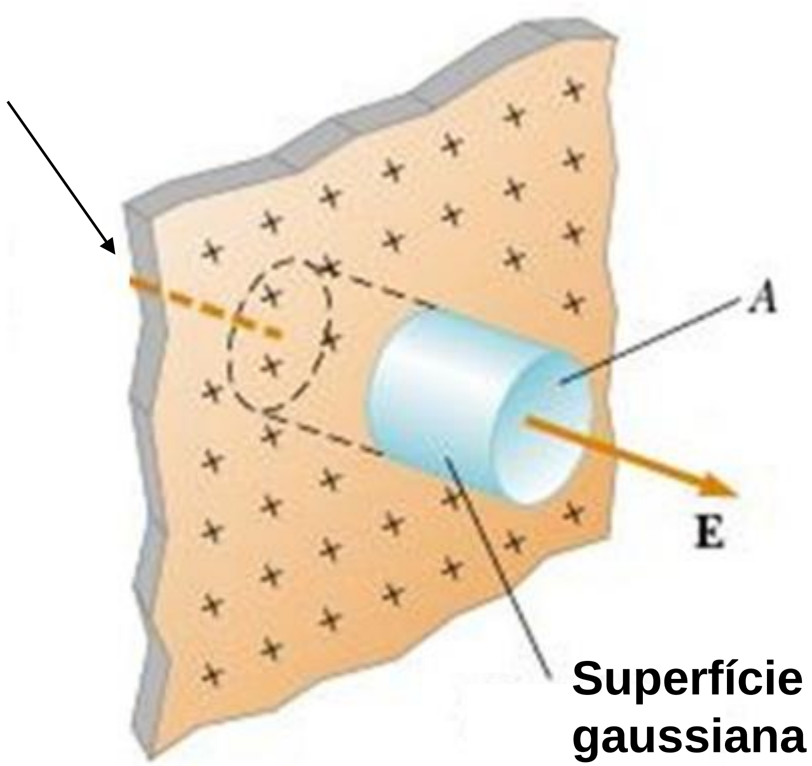

**Superfície gaussiana**

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

## Exemplo 11. Campo próximo de uma placa plana condutora

Não há cargas no interior da distribuição

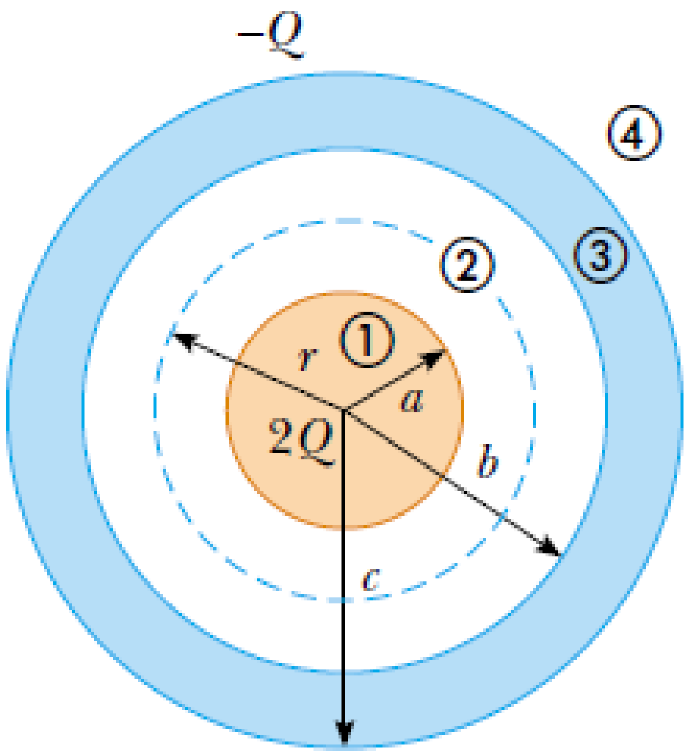



Superfície gaussiana

$$\Phi_E = EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

**Exemplo 12. Determinar o campo do sistema formado por uma esfera sólida condutora de carga 2*Q* no interior de uma casca esférica condutora de carga – *Q* concêntrica à esfera sólida**




$$E_1 = 0 \;\text{ e }\; E_3 = 0.$$

$$E_2 A = E_2(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{2k_e Q}{r^2}}$$

$$E_4 = \boxed{\frac{k_e Q}{r^2}}$$

**Forma diferencial da lei de Gauss**

Lei de Gauss:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{vol} \rho d(vol) \,.$$

Teorema de Gauss (teorema da divergência):

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{vol} (\nabla \cdot \vec{E}) d(vol) \,.$$

Portanto,

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \vec{E}) d(vol) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{vol} \rho d(vol) \Longrightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$