Teoria dos Grafos

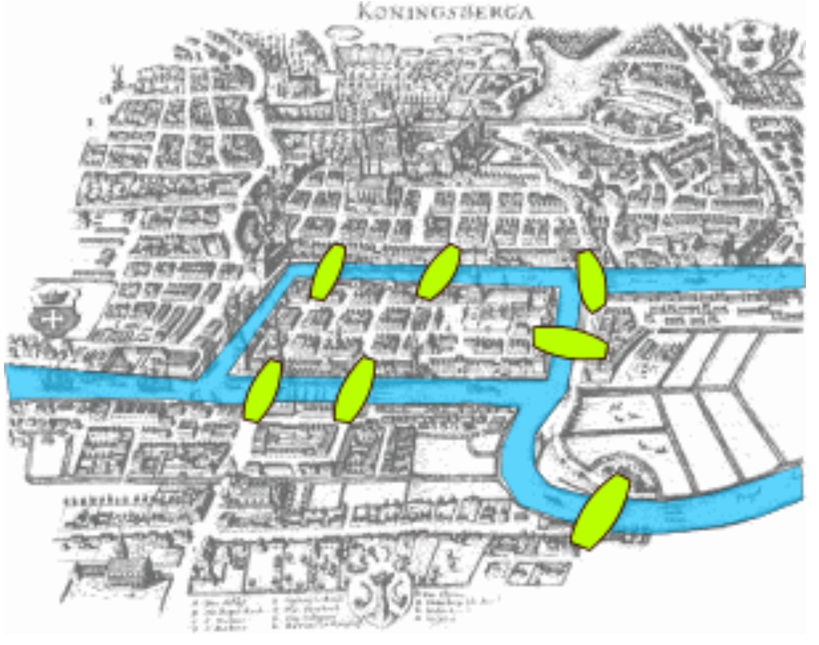
Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

versão 1.5

Prof. DSc. Fabiano Oliveira
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

- Na cidade de Königsberg na Prússia, havia um conjunto de 7 pontes sobre o Rio Pregel como o abaixo:



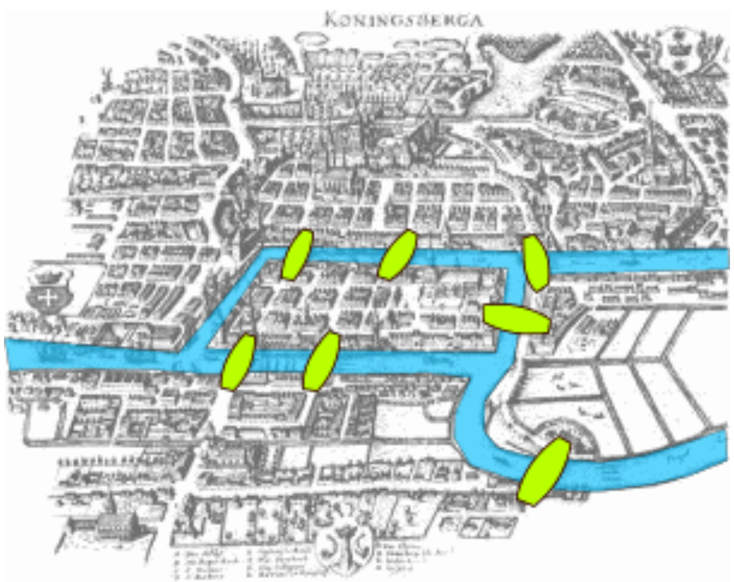
Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

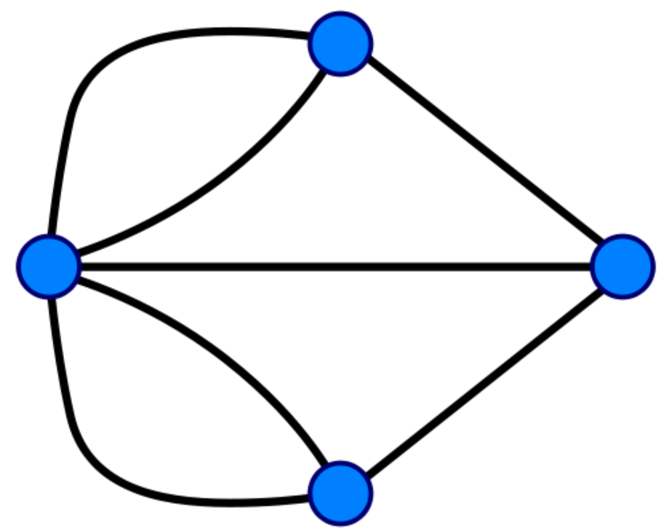
- O Problema das 7 Pontes de Königsberg consistia em estabelecer um caminho no qual um pedestre passe pelas 7 pontes e retorne ao ponto de partida sem repetir nenhuma ponte

- A solução negativa de Euler em 1736 é considerada o primeiro resultado de Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

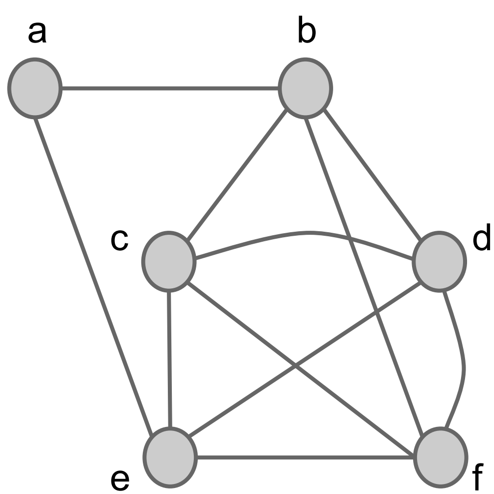
- O problema pode ser modelado por um grafo:





Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

- **Def.:** Um ***ciclo euleriano*** de um grafo G é uma trilha T = $v_0,...,v_m$ tal que $v_0 = v_m$



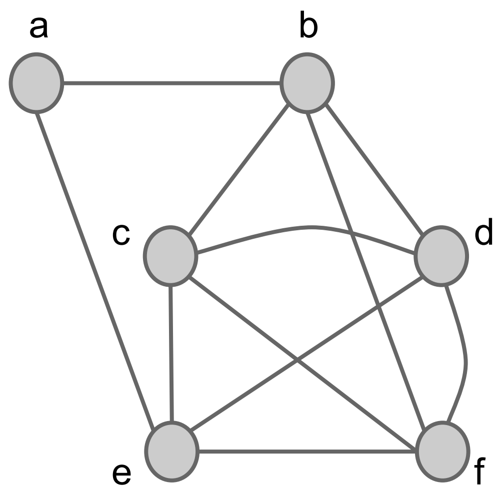
Ciclos Eulerianos:

a,b,d,f,b,c,d,e,f,c,e,a

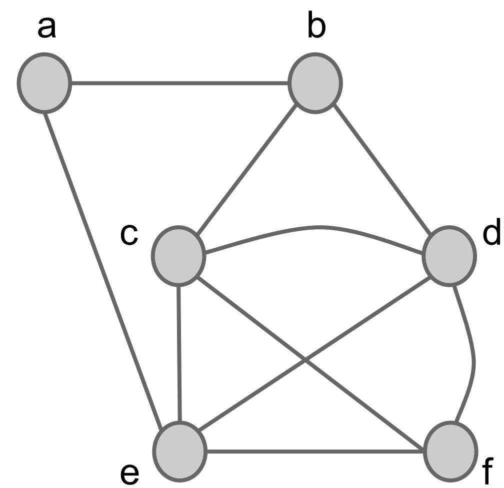
a,b,c,d,b,f,c,e,d,f,e,a

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

- **Def.:** Um ***grafo euleriano*** é um grafo que possui um ciclo euleriano



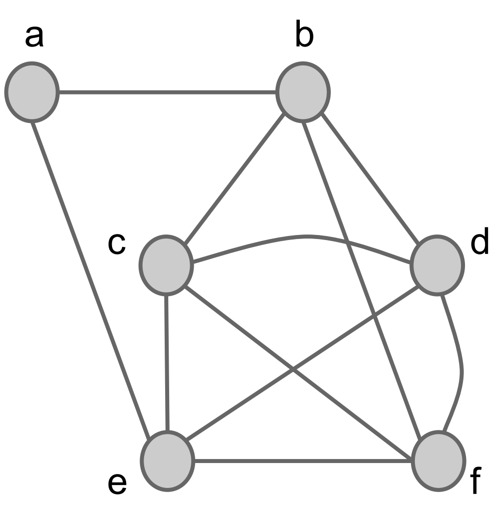
euleriano



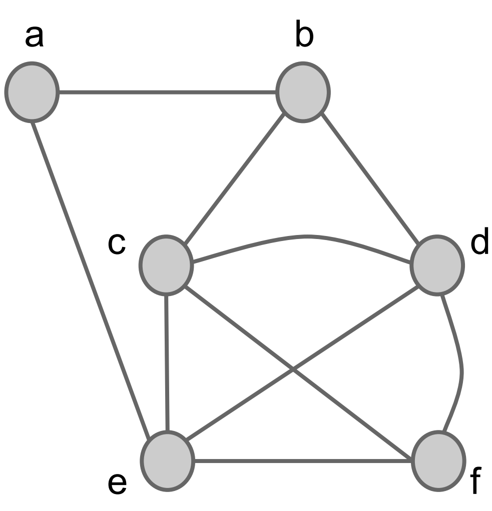
não euleriano

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Teorema:
Um grafo não-vazio conexo G é euleriano ⇔ G não possui vértices de grau ímpar



euleriano



não euleriano

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Prova (⇒) :

- Seja G um grafo euleriano.
- Seja C um ciclo euleriano de G. Direcione este ciclo de modo a percorrê-lo.
- Note que cada vez que uma destas arestas de C "entra" em $v \in V(G)$, outra "sai" de v. Como todas as arestas são visitadas por C, então $d(v)$ é par.
- Logo, não existem vértices de grau ímpar em G.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Prova ($\Leftarrow$) :

- Seja G um grafo conexo no qual não existem vértices de grau ímpar.
- Vamos mostrar que G é euleriano por indução em $|E(G)|$.
- Se $|E(G)| = 0$, então G é trivial e o ciclo euleriano é trivial. (base)
- Suponha que todo grafo não-vazio conexo com menos que $|E(G)|$ seja euleriano. (H. I.)
- (P. I.): Como G é conexo e não existem vértices de grau ímpar, $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V(G)$.
- Logo, G não pode ser uma árvore (por Teorema anterior, uma árvore tem ao menos dois vértices folhas, ou seja, dois vértices de grau 1).

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Prova (⇐) (continuação):

- Como G é conexo, então G é cíclico.
- Seja T o maior ciclo de G
- Suponha, por absurdo, que G não seja euleriano. Portanto, T não é um ciclo euleriano.
- Seja H um componente conexo de G - E(T) com $|E(H)| > 0$.
- Como G é conexo, existe $v \in V(H) \cap V(T)$.
- Como o grau de todo vértice é par em T, o grau de todo vértice em H é par também.
- Portanto, H é um grafo não-vazio conexo no qual não existem vértices de grau ímpar e tal que $|E(H)| < |E(G)|$.
- Por H. I., H é euleriano e seja C um ciclo euleriano de H.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

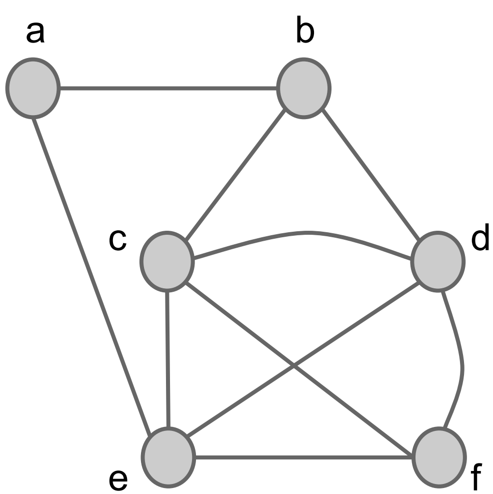
Prova ($\Leftarrow$) (continuação):

- Portanto, existe um ciclo T' em G que começa por v, caminha por T até voltar a v, caminha agora por C até voltar a v.
- Naturalmente, $|T'| > |T|$, contrariando a escolha de T, um absurdo.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

- **Def.:** Uma ***trilha euleriana*** de um grafo G é uma trilha que possui todas as arestas de G

- Note que se G é euleriano, então G possui uma trilha euleriana.



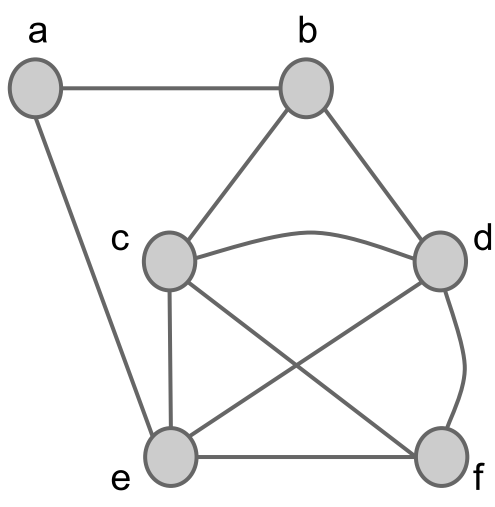
Trilhas Eulerianas:

b,a,e,c,b,d,c,f,d,e,f

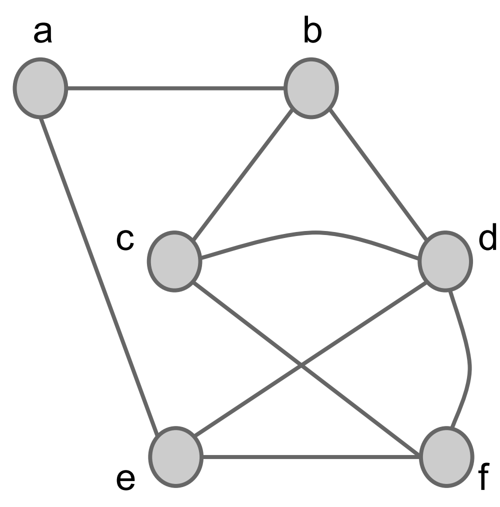
b,c,d,e,a,b,d,f,e,c,f

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Teorema:
Um grafo não-vazio conexo G possui uma trilha euleriana ⇔ G possui no máximo 2 vértices de grau ímpar



possui trilha euleriana



não possui trilha euleriana

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Prova (⇒) :

- Seja G um grafo que possui uma trilha euleriana.
- Seja T uma trilha euleriana de G. Direcione este trilha de modo a percorrê-la.
- Note que cada vez que uma destas arestas de T "entra" em $v \in V(G)$, outra "sai" de v. Como todas as arestas são visitadas por C, então d(v) é par, a menos da primeira e da última aresta de T (se o primeiro e último vértices não são os mesmos). Como todas as arestas são visitadas por T, então d(v) é necessariamente par para todo v que não comece nem termine T.
- Logo, existem no máximo 2 vértices de grau ímpar em G.

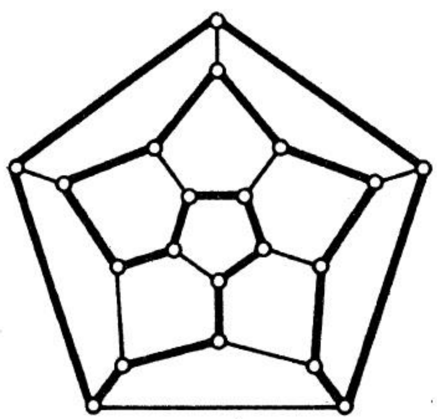
Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Prova (⇐) :

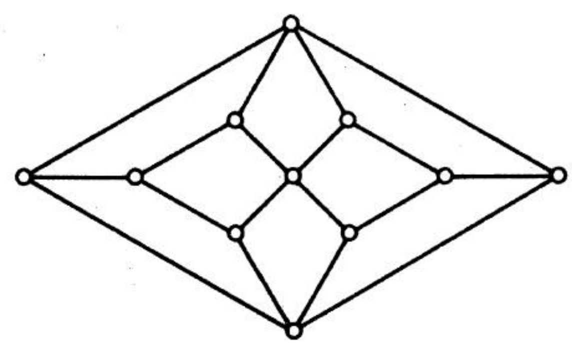
- Seja G um grafo conexo no qual existem k vértices de grau ímpar, onde $k \leq 2$.
- Se $k = 0$, então pelo Teorema anterior, G é euleriano e, portanto, G possui uma trilha euleriana.
- Pela prova da ida, nota-se que se $k = 1$ não é um caso possível.
- Se $k = 2$, pela prova de ida, os extremos da trilha só podem ser os vértices x e y de grau ímpar.
- Seja $H = G + xy$.
- Como H é não-vazio conexo e sem vértices de grau ímpar, H é euleriano e seja C um ciclo euleriano de H.
- Percorrendo C de x a y é claramente uma trilha euleriana de G.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

- **Def.:** Um ***caminho hamiltoniano*** de um grafo G é um caminho que contém todos os vértices de G.
- **Def.:** Um ***ciclo hamiltoniano*** de um grafo G é um ciclo que contém todos os vértices de G.
- **Def.:** Um grafo é ***hamiltoniano*** se possui um ciclo hamiltoniano.



hamiltoniano



não-hamiltoniano

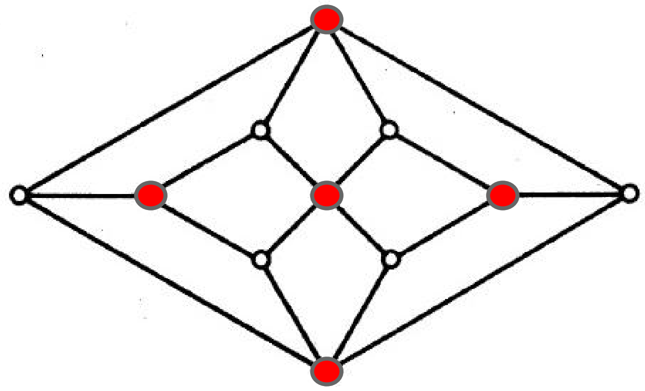
Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

- Diferentemente dos grafos eulerianos, não há condições ao mesmo tempo necessárias e suficientes conhecidas para um grafo ser hamiltoniano

- Vejamos algumas condições conhecidas que são ou necessárias, ou suficientes

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Teorema:
Se G é hamiltoniano, então para todo $S \subseteq V(G)$, $\omega(G - S) \leq |S|$.



Seja S o conjunto dos vértices marcados.

Como $\omega(G - S) > |S|$, G não pode ser hamiltoniano.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Prova:

- Seja G um grafo hamiltoniano.
- Seja C um ciclo hamiltoniano de G.
- Note que $\omega(C - S) \leq |S|$.
- Como $C - S$ é um subgrafo de $G - S$, então $\omega(G - S) \leq \omega(C - S)$.
- Portanto, $\omega(G - S) \leq |S|$.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Teorema:
Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ e $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Prova:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ e $\delta(G) \geq n/2$. Por absurdo, suponha que G não é hamiltoniano.
- Seja G' o supergrafo maximal de G em relação à adição de arestas e à propriedade de ser não-hamiltoniano.
- Logo, $\delta(G') \geq n/2$.
- G' não pode ser um grafo completo ou, caso contrário, existiria um ciclo hamiltoniano. Seja $x, y \in V(G)$ distintos tal que $xy \notin E(G')$.
- Como G' é maximal, $G' + xy$ é hamiltoniano. Portanto, existe um caminho C hamiltoniano $u=v_1,v_2,\ldots,v_n=v$ em G'.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

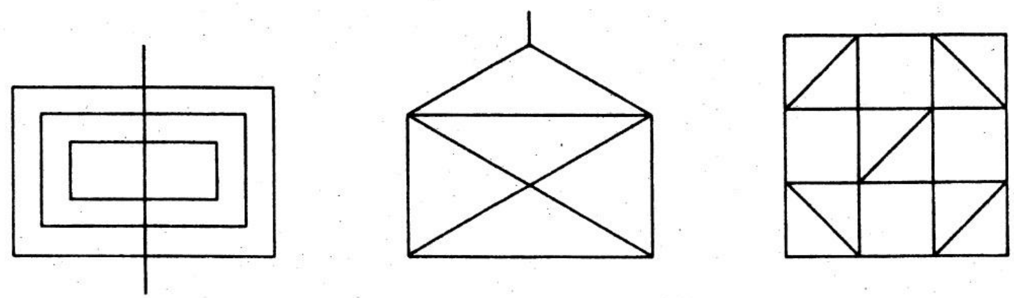
Prova (continuação):

- Sejam:
  - $S = \{v_i \in C \mid uv_{i+1} \in E(G')\}$
  - $T = \{v_i \in C \mid vv_i \in E(G')\}$
- Como $v \notin S \cup T$, então $|S \cup T| < n$.
- Se existir $v_i \in S \cap T$, então em G' haveria um ciclo hamiltoniano $v_1,\ldots,v_i,v_n,v_{n-1},\ldots,v_{i+1},v_1$, um absurdo. Logo, $S \cap T = \varnothing$.
- Portanto, $d(u) + d(v) < |S| + |T| = |S \cup T| - |S \cap T| < n$.
- Isto contradiz o fato de que $\delta(G') \geq n/2$.

Exercícios

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

1. Quais destas figuras podem ser desenhadas sem levantar a caneta do papel nem cobrir uma linha mais de uma vez?



2. Exiba um grafo euleriano com n par e m ímpar ou explique por que tal grafo não existe.
3. Mostre que se G é euleriano, todo bloco de G é euleriano.
4. Para $n \geq 2$, mostre que se G não é 2-conexo ou G é bipartido com bipartição $X \cup Y$ dos vértices tal que $|X| \neq |Y|$, então G não é hamiltoniano.