

Capítulo 39

1. De acordo com a Eq. 39-4, $E_n \propto 1/L^2$. Assim, o novo nível de energia, E'_1 , satisfaz a relação

$$\frac{E'_1}{E_1} = \left(\frac{L_1}{L'_1} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

o que nos dá

$$\frac{L'_1}{L_1} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

2. (a) De acordo com a Eq. 39-4, temos

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{h^2}{8m_e L^2} \right) n^2 = \left[\frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(200 \times 10^{-12} \text{ m})^2} \right] (1)^2 = 1,51 \times 10^{-18} \text{ J} \\ &= 9,42 \text{ eV}. \end{aligned}$$

(b) De acordo com a Eq. 39-4, temos

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{h^2}{8m_p L^2} \right) n^2 = \left[\frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(200 \times 10^{-12} \text{ m})^2} \right] (1)^2 = 8,225 \times 10^{-22} \text{ J} \\ &= 5,13 \times 10^{-3} \text{ eV}. \end{aligned}$$

3. De acordo com a Eq. 39-4, $E_n \propto 1/L^2$. Assim, se L for multiplicada por dois, a energia será dividida por quatro:

$$E_1 = \frac{2,6 \text{ eV}}{4} = 0,65 \text{ eV}.$$

4. A Eq. 39-4 pode ser escrita na forma

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8(mc^2)L^2}.$$

A energia necessária é, portanto,

$$\Delta E = E_4 - E_1 = \frac{(4^2 - 1^2)h^2}{8m_e L^2} = \frac{15(hc)^2}{8(mc^2)L^2} = \frac{15(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{8(511 \times 10^3 \text{ eV})(0,250 \text{ nm})^2} = 90,3 \text{ eV}.$$

5. A Eq. 39-4 pode ser escrita na forma

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8(mc^2)L^2}.$$

Fazendo $n = 3$, igualando essa expressão a 4,7 eV e explicitando L , obtemos

$$L = \frac{n(hc)}{\sqrt{8(mc^2)E_n}} = \frac{3(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\sqrt{8(511 \times 10^3 \text{ eV})(4,7 \text{ eV})}} = 0,85 \text{ nm}.$$

6. De acordo com a Eq. 39-4, temos

$$E_1 = \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 = \left[\frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{8(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(100 \times 10^{12} \text{ m})^2} \right] (1)^2 = 3,29 \times 10^{-21} \text{ J} = 0,020 \text{ eV}.$$

7. Fazendo $n = 1$, L igual ao diâmetro nuclear e m igual à massa do elétron, a Eq. 39-4 nos dá

$$E = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(1)^2 (6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{8(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1,4 \times 10^{-14} \text{ m})^2} = 3,07 \times 10^{-10} \text{ J} = 1920 \text{ MeV} \approx 1,9 \text{ GeV}.$$

8. De acordo com a Eq. 39-4, a frequência da luz que excita o elétron do estado de número quântico n_i para o estado de número quântico n_f é

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{h}{8mL^2} (n_f^2 - n_i^2)$$

e o comprimento de onda dessa luz é

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{8mL^2 c}{h(n_f^2 - n_i^2)}.$$

Explicitando L , obtemos

$$L = \sqrt{\frac{\lambda h c (n_f^2 - n_i^2)}{8 m c^2}}.$$

O maior comprimento de onda mostrado na Fig. 39-27 é $\lambda = 80,78 \text{ nm}$, que corresponde a uma transição de $n_i = 2$ para $n_f = 3$. Assim, a largura do poço de potencial é

$$L = \sqrt{\frac{\lambda h c (n_f^2 - n_i^2)}{8 m c^2}} = \sqrt{\frac{(80,78 \text{ nm})(1240 \text{ eV}\cdot\text{nm})(3^2 - 2^2)}{8(511 \times 10^3 \text{ eV})}} = 0,350 \text{ nm} = 350 \text{ pm}.$$

9. A Eq. 39-4 pode ser escrita na forma

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8(mc^2)L^2}.$$

(a) O primeiro estado excitado corresponde a $n = 2$, e o terceiro a $n' = 4$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{(hc)^2}{8(mc^2)L^2} (n'^2 - n^2) = \frac{(1240 \text{ eV}\cdot\text{nm})^2}{8(511 \times 10^3 \text{ eV})(0,250 \text{ nm})^2} (4^2 - 2^2) = (6,02 \text{ eV})(16 - 4) \\ &= 72,2 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Quando se encontra no nível $n' = 4$, o elétron pode decair para vários níveis n'' de menor energia. Nessas transições, o comprimento de onda do fóton emitido é dado por

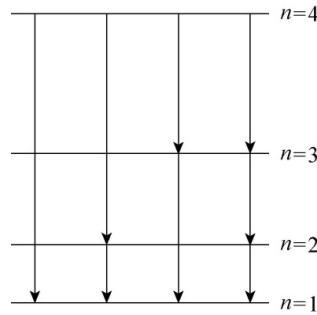
$$\lambda = \frac{hc}{E_{n'} - E_{n''}} = \frac{8(mc^2)L^2}{hc(n'^2 - n''^2)}.$$

Assim, por exemplo, no caso da transição de $n' = 4$ para $n'' = 3$, o comprimento de onda do fóton emitido seria

$$\lambda = \frac{8(511 \times 10^3 \text{ eV})(0,250 \text{ nm})^2}{(1240 \text{ eV}\cdot\text{nm})(4^2 - 3^2)} = 29,4 \text{ nm},$$

e, depois de chegar ao nível $n'' = 3$, o elétron pode decair para o nível $n''' = 2$ emitindo outro fóton. Calculando desta forma os comprimentos de onda de todos os fótons que podem ser emitidos no processo de decaimento, obtemos os seguintes resultados:

- (b) O menor comprimento de onda que pode ser emitido é $\lambda_{4 \rightarrow 1} = 13,7 \text{ nm}$.
- (c) O segundo menor comprimento de onda que pode ser emitido é $\lambda_{4 \rightarrow 2} = 17,2 \text{ nm}$.
- (d) O maior comprimento de onda que pode ser emitido é $\lambda_{2 \rightarrow 1} = 68,7 \text{ nm}$.
- (e) O segundo maior comprimento de onda que pode ser emitido é $\lambda_{3 \rightarrow 2} = 41,2 \text{ nm}$.
- (f) O diagrama a seguir mostra as transições possíveis (os níveis de energia não estão em escala).



(g) O comprimento de onda de $29,4 \text{ nm}$ corresponde à transição $4 \rightarrow 3$. Uma vez no estado $n = 3$, o elétron pode sofrer a transição $3 \rightarrow 1$ ou a transição $3 \rightarrow 2$ seguida pela transição $2 \rightarrow 1$. O maior comprimento de onda que pode ser emitido em seguida à transição $4 \rightarrow 3$ é $\lambda_{2 \rightarrow 1} = 68,7 \text{ nm}$.

(h) O menor comprimento de onda que pode ser emitido em seguida à transição $4 \rightarrow 3$ é $\lambda_{3 \rightarrow 1} = 25,8 \text{ nm}$.

10. Sejam os números quânticos do par em questão n e $n + 1$. Nesse caso,

$$E_{n+1} - E_n = E_1 (n + 1)^2 - E_1 n^2 = (2n + 1)E_1.$$

Fazendo

$$E_{n+1} - E_n = (2n + 1)E_1 = 3(E_4 - E_3) = 3(4^2 E_1 - 3^2 E_1) = 21E_1,$$

obtemos $2n + 1 = 21$, o que nos dá $n = 10$. Assim,

(a) o número quântico maior é $n + 1 = 10 + 1 = 11$.

(b) o número quântico menor é $n = 10$.

(c) Fazendo

$$E_{n+1} - E_n = (2n + 1)E_1 = 2(E_4 - E_3) = 2(4^2 E_1 - 3^2 E_1) = 14E_1,$$

obtemos $2n + 1 = 14$, o que nos dá $n = 6,5$, um valor fracionário. Assim, não existe um par de níveis de energia, associados a números inteiros, que satisfaça a condição proposta.

11. Sejam os números quânticos do par em questão n e $n + 1$. Nesse caso,

$$E_{n+1} - E_n = \frac{(n+1)^2 h^2}{8mL^2} - \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = \frac{(2n+1)h^2}{8mL^2},$$

o que nos dá $E_{n+1} - E_n = (2n + 1)E_1$.

Fazendo

$$E_{n+1} - E_n = E_5 = 5^2 E_1 = 25 E_1 = (2n+1) E_1,$$

obtemos $2n + 1 = 25$, o que nos dá $n = 12$. Assim,

(a) o número quântico maior é $n + 1 = 12 + 1 = 13$.

(b) o número quântico menor é $n = 12$.

(c) Fazendo

$$E_{n+1} - E_n = E_6 = 6^2 E_1 = 36 E_1 = (2n+1) E_1,$$

obtemos $2n + 1 = 36$, o que nos dá $n = 17,5$, um valor fracionário. Assim, não existe um par de níveis de energia, associados a números inteiros, que satisfaça a condição proposta.

12. De acordo com a Eq. 39-4, a frequência da luz que excita o elétron do estado com número quântico n_i para o estado com número quântico n_f é

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{h}{8mL^2} (n_f^2 - n_i^2)$$

e o comprimento de onda correspondente é

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{8mL^2c}{h(n_f^2 - n_i^2)}.$$

Calculando o valor desta expressão para $n_i = 1$ e $n_f = 2, 3, 4$ e 5 , obtemos os seguintes resultados:

(a) $6,87 \times 10^{-8}$ m para $n_f = 2$ (o maior comprimento de onda).

(b) $2,58 \times 10^{-8}$ m para $n_f = 3$ (o segundo maior comprimento de onda).

(c) $1,37 \times 10^{-8}$ m para $n_f = 4$ (o terceiro maior comprimento de onda).

13. A posição de máxima densidade de probabilidade é o centro do poço:

$$x = \frac{L}{2} = \frac{200 \text{ pm}}{2} = 100 \text{ pm}.$$

(a) A probabilidade de que o elétron seja detectado no ponto x é dada pela Eq. 39-11:

$$p(x) = \psi_n^2(x) dx = \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right]^2 dx = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$

Para $n = 3$, $L = 200$ pm e $dx = 2,00$ pm (a largura do detector), a probabilidade de que o elétron seja detectado no ponto $x = L/2 = 100$ pm é

$$p(x = L/2) = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{3\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}\right) dx = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) dx = \frac{2}{L} dx = \frac{2}{200 \text{ pm}} (2,00 \text{ pm}) = 0,020.$$

(b) O número esperado de observações do elétron para $N = 1000$ experiências independentes é

$$n = Np = (1000)(0,020) = 20.$$

14. De acordo com as Eqs. 39-11 e 39-12, a condição de densidade de probabilidade zero é

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{L}x = m\pi,$$

em que m é um número inteiro. Para que a densidade de probabilidade seja zero nos pontos $x = 0,300L$ e $x = 0,400L$, é preciso que

$$\sin(0,300n\pi) = \sin(0,400n\pi) = 0,$$

condições que são satisfeitas para $n = 10m$, em que $m = 1, 2, \dots$. Como, porém, de acordo com o enunciado, a densidade de probabilidade não é zero para nenhum valor entre $x = 0,300L$ e $x = 0,400L$, concluímos que o elétron se encontra no estado $n = 10$. Sendo assim, a variação de energia quando o elétron sofre uma transição para o estado $n' = 9$ é

$$|\Delta E| = \frac{h^2}{8mL^2}(n^2 - n'^2) = \frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2,00 \times 10^{-10} \text{ m})^2}(10^2 - 9^2) = 2,86 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

15. **PENSE** A probabilidade de que o elétron seja encontrado em um intervalo qualquer é dada por $P = \int |\psi|^2 dx$, em que a integral é calculada para o intervalo desejado.

FORMULE Se a largura Δx do intervalo é pequena, a probabilidade é aproximadamente igual a $|\psi|^2 \Delta x$, em que a função de onda é calculada para o centro do intervalo. No caso de um elétron aprisionado em um poço de potencial infinito de largura L , a densidade de probabilidade do estado fundamental é

$$|\psi|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

e, portanto,

$$P = \left(\frac{2\Delta x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

ANALISE (a) Para $L = 100 \text{ pm}$, $x = 25 \text{ pm}$ e $\Delta x = 5,0 \text{ pm}$,

$$P = \left[\frac{2(5,0 \text{ pm})}{100 \text{ pm}}\right] \sin^2\left[\frac{\pi(25 \text{ pm})}{100 \text{ pm}}\right] = 0,050.$$

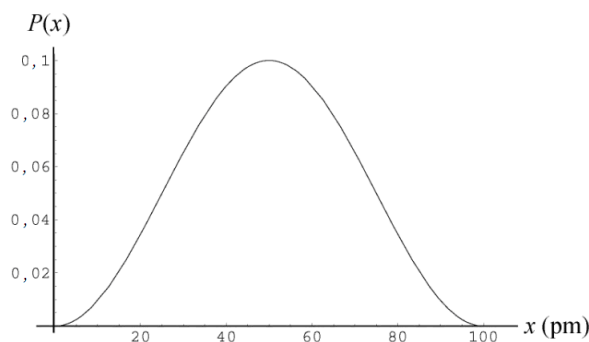
(b) Para $L = 100 \text{ pm}$, $x = 50 \text{ pm}$ e $\Delta x = 5,0 \text{ pm}$,

$$P = \left[\frac{2(5,0 \text{ pm})}{100 \text{ pm}}\right] \sin^2\left[\frac{\pi(50 \text{ pm})}{100 \text{ pm}}\right] = 0,10.$$

(c) Para $L = 100 \text{ pm}$, $x = 90 \text{ pm}$ e $\Delta x = 5,0 \text{ pm}$,

$$P = \left[\frac{2(5,0 \text{ pm})}{100 \text{ pm}}\right] \sin^2\left[\frac{\pi(90 \text{ pm})}{100 \text{ pm}}\right] = 0,0095.$$

APRENDA O gráfico a seguir mostra a probabilidade em função de x . Como era de esperar, a probabilidade de detectar o elétron é máxima no centro do poço, ou seja, em $x = L/2 = 50 \text{ pm}$.



16. O método usado para resolver o problema será o mesmo do Exemplo “Níveis de energia de um poço de potencial infinito unidimensional”. A integração mostrada a seguir é discutida com mais detalhes no referido exemplo. Note que os argumentos das funções seno estão em radianos.

(a) A probabilidade de que a partícula seja detectada na região $0 \leq x \leq L/4$ é

$$\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L}{\pi}\right)\int_0^{\pi/4} \sin^2 y \, dy = \frac{2}{\pi}\left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right)\bigg|_0^{\pi/4} = 0,091.$$

(b) Como era de esperar, já que o poço é simétrico em relação ao ponto central, a probabilidade de que a partícula seja detectada na região $3L/4 \leq x \leq L$ é

$$\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L}{\pi}\right)\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^2 y \, dy = \frac{2}{\pi}\left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right)\bigg|_{\pi/4}^{\pi} = 0,091.$$

(c) A probabilidade de que a partícula seja detectada na região $L/4 \leq x \leq 3L/4$ é

$$\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L}{\pi}\right)\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 y \, dy = \frac{2}{\pi}\left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right)\bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4} = 0,82.$$

O mesmo resultado pode ser obtido subtraindo de 1 os resultados dos itens (a) e (b):

$$1 - 2(0,091) = 0,82.$$

17. De acordo com a Fig. 39-9, a energia inicial do elétron é 106 eV. Depois que a energia fornecida pela fonte externa é absorvida, a energia total do elétron passa a ser $106 \text{ eV} + 400 \text{ eV} = 506 \text{ eV}$. Como, de acordo com o enunciado, o elétron é transferido para uma posição na qual $x > L$, a energia potencial do elétron é 450 eV (veja o Módulo 39-3) e, portanto, a energia cinética do elétron é $506 \text{ eV} - 450 \text{ eV} = 56 \text{ eV}$.

18. De acordo com a Fig. 39-9, a energia total de um elétron no estado $n = 3$ é 233 eV. Como, no interior do poço de potencial, a energia potencial é zero, a energia cinética do elétron é igual à energia total, ou seja, $K = 233 \text{ eV}$.

19. Como $E = hc/\lambda = (1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})/\lambda$, temos

$$E_a = \frac{hc}{\lambda_a} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{14,588 \text{ nm}} = 85,00 \text{ eV}$$

$$E_b = \frac{hc}{\lambda_b} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{4,8437 \text{ nm}} = 256,0 \text{ eV}$$

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_c} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2,9108 \text{ nm}} = 426,0 \text{ eV}.$$

A energia do estado fundamental é

$$E_1 = E_4 - E_c = 450,0 \text{ eV} - 426,0 \text{ eV} = 24,0 \text{ eV}.$$

Como $E_a = E_2 - E_1$, a energia do primeiro estado excitado é

$$E_2 = E_1 + E_a = 24,0 \text{ eV} + 85,0 \text{ eV} = 109 \text{ eV}.$$

20. A menor energia que o fóton pode possuir corresponde a uma transição da região não quantizada para E_3 . Como a diferença de energia entre E_3 e E_4 é

$$\Delta E = E_4 - E_3 = 9,0 \text{ eV} - 4,0 \text{ eV} = 5,0 \text{ eV},$$

a energia do fóton é

$$E_{\text{fóton}} = K + \Delta E = 2,00 \text{ eV} + 5,00 \text{ eV} = 7,00 \text{ eV}.$$

21. A equação de Schrödinger para a região $x > L$ é

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - U_0]\psi = 0.$$

Se $\psi = De^{2kx}$, então $d^2\psi/dx^2 = 4k^2De^{2kx} = 4k^2\psi$ e

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - U_0]\psi = 4k^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - U_0]\psi = 0,$$

o que nos dá

$$k = \frac{\pi}{h}\sqrt{2m(U_0 - E)}.$$

Como $U_0 > E$ na região $x > L$, o radicando da equação anterior é positivo, o que significa que k é um número real. Entretanto, se k é um número real positivo, como propõe o enunciado, a função $\psi(x)$ não é fisicamente admissível como uma densidade de probabilidade, pois aumenta exponencialmente com x para valores positivos de x , e a integral de qualquer densidade de probabilidade da forma $\psi(x)$ ao longo de todo o eixo x deve ser igual à unidade.

22. De acordo com a Eq. 39-20, temos

$$E_{n_x, n_y} = \frac{2h^2}{8m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right) = \frac{(hc)^2}{8(mc^2)} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right).$$

Para $n_x = n_y = 1$, obtemos

$$E_{1,1} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{8(511 \times 10^3 \text{ eV})} \left[\frac{1}{(0,800 \text{ nm})^2} + \frac{1}{(1,600 \text{ nm})^2} \right] = 0,734 \text{ eV}.$$

23. De acordo com a Eq. 39-21, temos

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{2h^2}{8m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) = \frac{(hc)^2}{8(mc^2)} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right).$$

Para $n_x = n_y = n_z = 1$, obtemos

$$E_{1,1,1} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{8(511 \times 10^3 \text{ eV})} \left[\frac{1}{(0,800 \text{ nm})^2} + \frac{1}{(1,600 \text{ nm})^2} + \frac{1}{(0,390 \text{ nm})^2} \right] = 3,21 \text{ eV}.$$

24. Se existem três pontos de máxima densidade de probabilidade ao longo da reta $x = L_x/2$, $n_y = 3$, como mostra a Fig. 39-6. Como a distância entre esses pontos é 2,00 nm, a altura L_y é dada por $L_y = n_y(2,00 \text{ nm}) = 3(2,00 \text{ nm}) = 6,00 \text{ nm}$. Analogamente, se existem cinco pontos de máxima densidade de probabilidade ao longo da reta $y = L_y/2$, $n_x = 5$. Como a distância entre esses pontos é 3,00 nm, a largura L_x é dada por $L_x = n_x(3,00 \text{ nm}) = 5(3,00 \text{ nm}) = 15,0 \text{ nm}$. Assim, de acordo com a Eq. 39-20, a energia do elétron é

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y} &= \frac{h^2}{8m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right) = \frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})} \left[\frac{1}{(3,00 \times 10^{-9} \text{ m})^2} + \frac{1}{(2,00 \times 10^{-9} \text{ m})^2} \right] \\ &= 2,2 \times 10^{-20} \text{ J}. \end{aligned}$$

25. Por analogia com a Eq. 39-10, a função de onda normalizada para um curral bidimensional infinito é

$$\begin{aligned}\psi_{n_x, n_y}(x, y) &= \psi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \\ &= \sqrt{\frac{4}{L_x L_y}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right).\end{aligned}$$

A probabilidade de que um elétron seja detectado por uma sonda de dimensão $\Delta x \Delta y$ situada no ponto (x, y) é

$$p(x, y) = |\psi_{n_x, n_y}(x, y)|^2 \Delta x \Delta y = \frac{4(\Delta x \Delta y)}{L_x L_y} \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right).$$

Para $L_x = L_y = L = 150$ pm, a probabilidade de que seja detectado um elétron que está no estado $(n_x, n_y) = (1, 3)$ por uma sonda de dimensão $\Delta x = \Delta y = 5,00$ pm situada no ponto $(0, 200L; 0, 800L)$ é

$$\begin{aligned}p &= \frac{4(\Delta x \Delta y)}{L_x L_y} \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) = \frac{4(5,00 \text{ pm})^2}{(150 \text{ pm})^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{L} \cdot 0,200L\right) \sin^2\left(\frac{3\pi}{L} \cdot 0,800L\right) \\ &= 4 \left(\frac{5,00 \text{ pm}}{150 \text{ pm}}\right)^2 \sin^2(0,200\pi) \sin^2(2,40\pi) = 1,4 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

26. Estamos interessados em calcular os valores da razão

$$\frac{E_{n_x, n_y}}{h^2/8mL^2} = L^2 \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right) = (n_x^2 + 0,25n_y^2)$$

e as diferenças correspondentes.

(a) Para $n_x = n_y = 1$, o valor da razão é $1 + 0,25 = 1,25$.

(b) Para $n_x = 1$ e $n_y = 2$, o valor da razão é $1 + 0,25(4) = 2,00$. É fácil verificar, calculando a razão para outros valores de n_x e n_y , que este é o segundo estado de menor energia do sistema, ou seja, é o primeiro estado excitado.

(c) Os estados degenerados de menor energia são os estados $(1, 4)$ e $(2, 2)$, cuja razão é $1 + 0,25(16) = 4 + 0,25(4) = 5,00$.

(d) Para $n_x = 1$ e $n_y = 3$, a razão é $1 + 0,25(9) = 3,25$. É fácil verificar, calculando a razão para outros valores de n_x e n_y , que este é o terceiro estado de menor energia do sistema, ou seja, é o segundo estado excitado. O terceiro estado excitado é o estado $(2, 1)$, para o qual a razão é $4 + 0,25(1) = 4,25$. A diferença entre os dois valores é $4,25 - 3,25 = 1,00$.

27. **PENSE** Os níveis de energia de um elétron aprisionado em um curral bidimensional de larguras L_x e L_y são dados pela Eq. 39-20:

$$E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8m} \left[\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right].$$

FORMULE Para $L_x = L$ e $L_y = 2L$, temos

$$E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8m} \left[\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right] = \frac{h^2}{8mL^2} \left[n_x^2 + \frac{n_y^2}{4} \right].$$

Assim, em unidades de $h^2/8mL^2$, os níveis de energia são dados por $n_x^2 + n_y^2/4$. Os cinco níveis de menor energia são $E_{1,1} = 1,25$, $E_{1,2} = 2,00$, $E_{1,3} = 3,25$, $E_{2,1} = 4,25$ e $E_{2,2} = E_{1,4} = 5,00$. É evidente que não existem outros níveis cuja energia é menor que 5 ou igual a 5.

A frequência da luz emitida ou absorvida quando o elétron passa de um estado inicial i para um estado final f é $f = (E_f - E_i)/h$, e, em unidades de $h/8mL^2$, é simplesmente a diferença entre os valores de $n_x^2 + n_y^2/4$ para os dois estados. As frequências possíveis são as seguintes:

$$\begin{aligned} &0,75(1,2 \rightarrow 1,1), 2,00(1,3 \rightarrow 1,1), 3,00(2,1 \rightarrow 1,1), \\ &3,75(2,2 \rightarrow 1,1), 1,25(1,3 \rightarrow 1,2), 2,25(2,1 \rightarrow 1,2), 3,00(2,2 \rightarrow 1,2), 1,00(2,1 \rightarrow 1,3), \\ &1,75(2,2 \rightarrow 1,3), 0,75(2,2 \rightarrow 2,1), \end{aligned}$$

todas em unidades de $h/8mL^2$.

ANALISE (a) De acordo com o que foi visto aqui, existem oito frequências diferentes.

(b) A menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 0,75 ($1, 2 \rightarrow 1,1$) ou ($2,2 \rightarrow 2,1$).

(c) A segunda menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 1,00 ($2, 1 \rightarrow 1,3$).

(d) A terceira menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 1,25 ($1, 3 \rightarrow 1,2$).

(e) A maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 3,75 ($2, 2 \rightarrow 1,1$).

(f) A segunda maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 3,00 ($2, 1 \rightarrow 1,1$) ou ($2, 2 \rightarrow 1,2$).

(g) A terceira maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, 2,25 ($2, 1 \rightarrow 1,2$).

APRENDA Em geral, quando um elétron executa uma transição de um nível (n_x, n_y) para um nível (n'_x, n'_y) de maior energia, a frequência do fóton absorvido é dada por

$$\begin{aligned} f = \frac{\Delta E}{h} &= \frac{E_{n'_x, n'_y} - E_{n_x, n_y}}{h} = \frac{h}{8mL^2} \left(n'^2_x + \frac{n'^2_y}{4} \right) - \frac{h}{8mL^2} \left(n^2_x + \frac{n^2_y}{4} \right) \\ &= \frac{h}{8mL^2} \left[(n'^2_x - n^2_x) + \frac{1}{4}(n'^2_y - n^2_y) \right]. \end{aligned}$$

28. Estamos interessados em calcular os valores da razão

$$\frac{E_{n_x, n_y, n_z}}{h^2/8mL^2} = L^2 \left(\frac{n^2_x}{L^2_x} + \frac{n^2_y}{L^2_y} + \frac{n^2_z}{L^2_z} \right) = (n^2_x + n^2_y + n^2_z)$$

e as diferenças correspondentes.

(a) Para $n_x = n_y = n_z = 1$, a razão é $1 + 1 + 1 = 3,00$.

(b) Para $n_x = n_y = 2$ e $n_z = 1$, a razão é $4 + 4 + 1 = 9,00$. É fácil verificar, calculando a razão para outros valores de n_x, n_y e n_z , que esta é a terceira menor energia do sistema, ou seja, a energia do segundo estado excitado. A mesma energia é obtida para $(n_x, n_y, n_z) = (2, 1, 2)$ e $(1, 2, 2)$.

(c) Para $n_x = n_y = 1$ e $n_z = 3$, a razão é $1 + 1 + 9 = 11,00$. É fácil verificar, calculando a razão para outros valores de n_x, n_y e n_z , que esta é a quarta menor energia do sistema, ou seja, a energia do terceiro estado excitado. A mesma energia é obtida para $(n_x, n_y, n_z) = (1, 3, 1)$ e $(3, 1, 1)$. Calculando a diferença entre este resultado e o resultado do item (b), obtemos $11,0 - 9,00 = 2,00$.

(d) Para $n_x = n_y = 1$ e $n_z = 2$, a razão é $1 + 1 + 4 = 6,00$. É fácil verificar, calculando a razão para outros valores de n_x, n_y e n_z , que esta é a segunda menor energia do sistema, ou seja, a energia do primeiro estado excitado. A mesma energia é obtida para $(n_x, n_y, n_z) = (2, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$. Assim, três estados degenerados possuem a energia do primeiro estado excitado.

(e) Para $n_x = 1, n_y = 2$ e $n_z = 3$, a razão é $1 + 4 + 9 = 14,0$. É fácil verificar, calculando a razão para outros valores de n_x, n_y e n_z , que esta é a sexta menor energia do sistema, ou seja, a energia do quinto estado excitado. A mesma energia é obtida para $(n_x, n_y, n_z) = (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$. Assim, seis estados degenerados possuem a energia do quinto estado excitado.

29. As razões calculadas no Problema 39-28 podem ser relacionadas às frequências emitidas usando a equação $f = \Delta E/h$, em que cada nível E é igual a uma das razões multiplicada por $h^2/8mL^2$. Na prática, esta operação envolve apenas a mudança do fator de

normalização de $h^2/8mL^2$ para $h/8mL^2$. Assim, para uma transição do segundo estado excitado [item (b) do Problema 39-28] para o estado fundamental [item (a) do Problema 39-28], temos

$$f = (9,00 - 3,00) \left(\frac{h}{8mL^2} \right) = (6,00) \left(\frac{h}{8mL^2} \right).$$

Nos cálculos que se seguem, vamos omitir o fator $h/8mL^2$. Para uma transição entre o quarto estado excitado e o estado fundamental, temos $f = 12,00 - 3,00 = 9,00$. Para uma transição entre o terceiro estado excitado e o estado fundamental, temos $f = 11,00 - 3,00 = 8,00$. Para uma transição entre o terceiro estado excitado e o primeiro estado excitado, temos $f = 11,00 - 6,00 = 5,00$. Para uma transição entre o quarto estado excitado e o terceiro estado excitado, temos $f = 12,00 - 11,00 = 1,00$. Para uma transição entre o terceiro estado excitado e o segundo estado excitado, temos $f = 11,00 - 9,00 = 2,00$. Para uma transição entre o segundo estado excitado e o primeiro estado excitado, temos $f = 9,00 - 6,00 = 3,00$, que também corresponde a outras transições.

(a) De acordo com os cálculos anteriores, o elétron é capaz de emitir ou absorver sete frequências diferentes.

(b) A menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 1,00.

(c) A segunda menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 2,00.

(d) A terceira menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 3,00.

(e) A maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 9,00.

(f) A segunda maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 8,00.

(g) A terceira maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 6,00.

30. Por analogia com a Eq. 39-10, a função de onda normalizada para um poço de potencial bidimensional infinito é

$$\begin{aligned} \psi_{n_x, n_y}(x, y) &= \psi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \\ &= \sqrt{\frac{4}{L_x L_y}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right). \end{aligned}$$

A probabilidade de que um elétron seja detectado por uma sonda de dimensão $\Delta x \Delta y$ situada no ponto (x, y) é

$$p(x, y) = \left| \psi_{n_x, n_y}(x, y) \right|^2 \Delta x \Delta y = \frac{4(\Delta x \Delta y)}{L_x L_y} \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right).$$

Se a probabilidade de que um elétron no estado fundamental ($n_x = n_y = 1$) seja detectado por uma sonda de área $\Delta x \Delta y = 400 \text{ pm}^2$ com o centro no ponto $(x, y) = (L/8, L/8)$ é 0,0450, temos

$$0,0450 = \frac{4(400 \text{ pm}^2)}{L^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{8}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{8}\right) = 4 \left(\frac{20 \text{ pm}}{L} \right)^2 \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Explicitando L , obtemos $L = 27,6 \text{ pm}$.

31. PENSE As transições da série de Lyman são transições em que o nível de menor energia é o nível $n = 1$ do átomo de hidrogênio, enquanto as transições da série de Balmer são transições em que o nível de menor energia é o nível $n = 2$.

FORMULE A energia E do fóton emitido quando um átomo de hidrogênio passa de um estado cujo número quântico principal é n' para um estado cujo número quântico principal é $n < n'$ é dada por

$$E = A \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

em que $A = 13,6 \text{ eV}$. A frequência f da onda eletromagnética é dada por $f = E/h$ e o comprimento de onda é dado por $\lambda = c/f$. Assim,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{E}{hc} = \frac{A}{hc} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right).$$

ANALISE O menor comprimento de onda corresponde ao limite da série, para o qual $n' = \infty$. No caso da série de Balmer, $n = 2$ e o menor comprimento de onda é $\lambda_B = 4hc/A$. No caso da série de Lyman, $n = 1$ e o menor comprimento de onda é $\lambda_L = hc/A$. A razão entre os dois comprimentos de onda limites é $\lambda_B/\lambda_L = 4,0$.

APRENDA A energia do fóton emitido quando um elétron sofre uma transição $n' = \infty \rightarrow n = 2$ (ou seja, é capturado por um átomo de hidrogênio e passa a ocupar o estado $n = 2$) é

$$E_{\infty \rightarrow 2} = \frac{13,6 \text{ eV}}{2^2} = 3,4 \text{ eV}.$$

Analogamente, a energia do fóton emitido quando um elétron sofre uma transição $n' = \infty \rightarrow n = 1$ (ou seja, é capturado por um átomo de hidrogênio e passa a ocupar o estado $n = 1$) é

$$E_{1 \rightarrow \infty} = \frac{13,6 \text{ eV}}{1^2} = 13,6 \text{ eV}.$$

32. Como a diferença entre a energia do fóton absorvido e a energia do fóton emitido é

$$E_a - E_e = \frac{hc}{\lambda_a} - \frac{hc}{\lambda_e},$$

a energia absorvida é

$$hc\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = (1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}) \left(\frac{1}{375 \text{ nm}} - \frac{1}{580 \text{ nm}} \right) = 1,17 \text{ eV}.$$

33. (a) De acordo com a lei de conservação da energia, a energia E do fóton é dada por $E = E_i - E_f$, em que E_i é a energia inicial do átomo de hidrogênio e E_f é a energia final. Como a energia do elétron é dada por $(-13,6 \text{ eV})/n^2$, em que n é o número quântico principal, temos

$$E = E_3 - E_1 = \frac{-13,6 \text{ eV}}{(3)^2} - \frac{-13,6 \text{ eV}}{(1)^2} = 12,1 \text{ eV}.$$

(b) O momento do fóton é dado por

$$p = \frac{E}{c} = \frac{(12,1 \text{ eV})(1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 6,45 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

(c) O comprimento de onda é dado por

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{12,1 \text{ eV}} = 102 \text{ nm}.$$

34. (a) A densidade de probabilidade radial do átomo de hidrogênio no estado fundamental é dada pela Eq. 39-44. Para $r = 0$, $P(r) = 0$.

(b) Para $r = a$, $P(r) = \frac{4}{a^3} a^2 e^{-2a/a} = \frac{4e^{-2}}{a} = \frac{4e^{-2}}{5,29 \times 10^{-2} \text{ nm}} = 10,2 \text{ nm}^{-1}$.

(c) Para $r = 2a$, $P(r) = \frac{4^2}{a^3} (2a)^2 e^{-4a/a} = \frac{16e^{-4}}{a} = \frac{16e^{-4}}{5,29 \times 10^{-2} \text{ nm}} = 5,54 \text{ nm}^{-1}$.

35. (a) A densidade de probabilidade do átomo de hidrogênio no estado fundamental é dada pela Eq. 39-39. Para $r = a$,

$$\psi^2(r) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}} e^{-r/a} \right)^2 = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2} = \frac{1}{\pi(5,29 \times 10^{-2} \text{ nm})^3} e^{-2} = 291 \text{ nm}^{-3}.$$

(b) A densidade de probabilidade radial do átomo de hidrogênio no estado fundamental é dada pela Eq. 39-44. Para $r = a$,

$$P(r) = \frac{4}{a^3} a^2 e^{-2a/a} = \frac{4e^{-2}}{a} = \frac{4e^{-2}}{5,29 \times 10^{-2} \text{ nm}} = 10,2 \text{ nm}^{-1}.$$

36. (a) O nível de energia correspondente à densidade de probabilidade mostrada na Fig. 39-23 é o nível $n = 2$, cuja energia é

$$E_2 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{2^2} = -3,4 \text{ eV}.$$

(b) Quando o elétron é removido do átomo de hidrogênio, a energia potencial final do sistema próton-elétron é zero. Assim, a menor energia necessária para remover um elétron com uma energia de $-3,4 \text{ eV}$ é $3,4 \text{ eV}$. (Se a energia fornecida for maior que este valor, o elétron terá uma energia cinética diferente de zero depois de ser removido do átomo.)

37. **PENSE** A energia do átomo de hidrogênio é quantizada.

FORMULE Para que a energia cinética não fosse conservada, parte da energia cinética inicial do nêutron teria de ser usada para excitar o átomo de hidrogênio. Como a energia dos estados do átomo de hidrogênio é dada por $-(13,6 \text{ eV})/n^2$, em que n é o número quântico principal, a menor energia de excitação é

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{-13,6 \text{ eV}}{(2)^2} - \frac{-13,6 \text{ eV}}{(1)^2} = 10,2 \text{ eV}.$$

ANALISE Como a energia do nêutron é $6,0 \text{ eV} < 10,2 \text{ eV}$, o nêutron não possui energia suficiente para excitar o átomo de hidrogênio e, por isso, o átomo de hidrogênio permanece no estado fundamental e toda a energia cinética inicial do nêutron é dividida entre as energias cinéticas finais do nêutron e do átomo de hidrogênio. Em outras palavras, a colisão é necessariamente elástica.

APRENDA A energia cinética mínima que o nêutron deve ter para excitar o átomo de hidrogênio é $10,2 \text{ eV}$.

38. De acordo com a Eq. 39-6, $\Delta E = hf = (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(6,2 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 2,6 \text{ eV}$.

39. **PENSE** A função densidade de probabilidade radial para o estado fundamental do átomo de hidrogênio é

$$P(r) = (4r^2/a^3) e^{-2r/a},$$

em que a é o raio de Bohr.

FORMULE Estamos interessados em calcular a integral $\int_0^\infty P(r) dr$. Para isso, podemos usar a Equação 15 da tabela de integrais do Apêndice E:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

ANALISE Fazendo $n = 2$ na expressão anterior e substituindo a por $2/a$ e x por r , obtemos

$$\int_0^\infty P(r) dr = \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} dr = \frac{4}{a^3} \frac{2}{(2/a)^3} = 1.$$

APRENDA A integral de 0 a ∞ da função densidade de probabilidade radial $P(r)$ deve ser igual a 1, pois isso assegura que o elétron esteja em algum lugar.

40. (a) O intervalo pedido é a diferença entre os valores obtidos nos itens (a) e (b) do Exemplo 39.08 “Emissão de luz por um átomo de hidrogênio”: $122 \text{ nm} - 91,4 \text{ nm} \approx 31 \text{ nm}$.

(b) De acordo com a Eq. 38-1, temos

$$\Delta f = \frac{c}{\lambda_{\min}} - \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{2,998 \times 10^8 \text{ m/s}}{91,4 \times 10^{-9} \text{ m}} - \frac{2,998 \times 10^8 \text{ m/s}}{122 \times 10^{-9} \text{ m}} = 8,2 \times 10^{14} \text{ Hz.}$$

(c) De acordo com a Eq. 39-36, no caso das transições da série de Balmer, nas quais o estado inicial é o estado $n = 2$, temos

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = (1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})(0,1389) = 0,15237 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda_{\max} = 656,3 \text{ nm}$$

e

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{2^2} \right) = (1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})(0,25) = 0,274255 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda_{\min} = 364,6 \text{ nm.}$$

Assim, o intervalo pedido é $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = 656,3 \text{ nm} - 364,6 \text{ nm} \approx 292 \text{ nm} \approx 0,29 \mu\text{m}$.

(d) De acordo com a Eq. 38-1, temos

$$\Delta f = \frac{c}{\lambda_{\min}} - \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{2,998 \times 10^8 \text{ m/s}}{364,6 \times 10^{-9} \text{ m}} - \frac{2,998 \times 10^8 \text{ m/s}}{656,3 \times 10^{-9} \text{ m}} = 3,65 \times 10^{14} \text{ Hz} \approx 3,7 \times 10^{14} \text{ Hz.}$$

41. Como Δr é pequeno, podemos calcular a densidade de probabilidade utilizando a relação $p \approx P(r)\Delta r$, em que $P(r)$ é a densidade de probabilidade radial. No caso do estado fundamental do hidrogênio, a densidade de probabilidade radial é dada pela Eq. 39-44:

$$P(r) = \left(\frac{4r^2}{a^3} \right) e^{-2r/a},$$

em que a é o raio de Bohr.

(a) Para $r = 0,500a$ e $\Delta r = 0,010a$, temos

$$P = \left(\frac{4r^2 \Delta r}{a^3} \right) e^{-2r/a} = 4(0,500)^2 (0,010) e^{-1} = 3,68 \times 10^{-3} \approx 0,0037.$$

(b) Para $r = 1,00a$ e $\Delta r = 0,010a$, temos

$$P = \left(\frac{4r^2 \Delta r}{a^3} \right) e^{-2r/a} = 4(1,00)^2 (0,010) e^{-2} = 5,41 \times 10^{-3} \approx 0,0054.$$

42. De acordo com a lei de conservação do momento linear,

$$p_{\text{reco}} = p_{\text{fóton}} \Rightarrow m_p v_{\text{reco}} = \frac{hf}{c},$$

em que usamos a Eq. 38-7 para o fóton e a expressão clássica do momento para o átomo, já que esperamos que a velocidade de reco seja muito menor que a velocidade da luz. Assim, de acordo com a Eq. 39-6 e a Tabela 37-3,

$$v_{\text{reco}} = \frac{\Delta E}{m_p c} = \frac{E_4 - E_1}{(m_p c^2)/c} = \frac{(-13,6 \text{ eV})(4^{-2} - 1^{-2})}{(938 \times 10^6 \text{ eV})/(2,998 \times 10^8 \text{ m/s})} = 4,1 \text{ m/s.}$$

43. (b) De acordo com a Eq. 39-38, a energia potencial do elétron a uma distância do núcleo igual ao raio de Bohr é dada por

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{5,292 \times 10^{-11} \text{ m}} = -4,36 \times 10^{-18} \text{ J} = -27,2 \text{ eV}.$$

(a) A energia cinética é $K = E - U = (-13,6 \text{ eV}) - (-27,2 \text{ eV}) = 13,6 \text{ eV}$.

44. (a) Uma vez que $E_2 = -0,85 \text{ eV}$ e $E_1 = -13,6 \text{ eV} + 10,2 \text{ eV} = -3,4 \text{ eV}$, a energia do fóton é

$$E_{\text{fóton}} = E_2 - E_1 = -0,85 \text{ eV} - (-3,4 \text{ eV}) = 2,6 \text{ eV}.$$

(b) Como

$$E_2 - E_1 = (-13,6 \text{ eV}) \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = 2,6 \text{ eV},$$

temos

$$\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} = \frac{2,6 \text{ eV}}{13,6 \text{ eV}} \approx -\frac{3}{16} = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2}.$$

Assim, o maior número quântico da transição responsável pela emissão é 4.

(c) De acordo com o resultado do item (b), o menor número quântico da transição responsável pela emissão é 2.

45. **PENSE** A densidade de probabilidade é dada por $|\psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta)|^2$, em que $\psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta)$ é a função de onda.

FORMULE Para calcular $|\psi_{n\ell m_\ell}|^2 = \psi_{n\ell m_\ell}^* \psi_{n\ell m_\ell}$, multiplicamos a função de onda pelo complexo conjugado. Se a função é real, $\psi_{n\ell m_\ell}^* = \psi_{n\ell m_\ell}$. Note que $e^{+i\phi}$ e $e^{-i\phi}$ são complexos conjugados e que $e^{i\phi} e^{-i\phi} = e^0 = 1$.

ANALISE (a) ψ_{210} é real. Elevando a função ao quadrado, obtemos a densidade de probabilidade:

$$|\psi_{210}|^2 = \frac{r^2}{32\pi a^5} e^{-r/a} \cos^2 \theta.$$

(b) Analogamente,

$$|\psi_{21+1}|^2 = \frac{r^2}{64\pi a^5} e^{-r/a} \sin^2 \theta$$

e

$$|\psi_{21-1}|^2 = \frac{r^2}{64\pi a^5} e^{-r/a} \sin^2 \theta$$

As últimas duas funções de onda possuem a mesma densidade de probabilidade.

(c) Para $m_\ell = 0$, a densidade de probabilidade $|\psi_{210}|^2$ diminui com a distância radial do núcleo. Graças ao fator $\cos^2 \theta$, $|\psi_{210}|^2$ é máxima no eixo z , em que $\theta = 0$. Isso está de acordo com o gráfico de pontos da Fig. 39-23a.

Para $m_\ell = \pm 1$, a densidade de probabilidade $|\psi_{21\pm 1}|^2$ diminui com a distância radial do núcleo. Graças ao fator $\sin^2 \theta$, $|\psi_{21\pm 1}|^2$ é máxima no plano xy , em que $\theta = 90^\circ$. Isso está de acordo com o gráfico de pontos da Fig. 39-23b.

(d) A densidade de probabilidade total dos três estados é dada por

$$|\psi_{210}|^2 + |\psi_{21+1}|^2 + |\psi_{21-1}|^2 = \frac{r^2}{32\pi a^5} e^{-r/a} \left[\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right] = \frac{r^2}{32\pi a^5} e^{-r/a}.$$

Note que a densidade de probabilidade total depende apenas de r , ou seja, tem simetria esférica.

APRENDA As funções de onda discutidas aqui são para estados do átomo de hidrogênio com $n = 2$ e $\ell = 1$. Como o momento angular é diferente de zero, as densidades de probabilidade não têm simetria esférica, mas dependem de r e de θ .

46. De acordo com o Exemplo “Probabilidade de detecção do elétron de um átomo de hidrogênio”, a probabilidade de que o elétron de um átomo de hidrogênio no estado fundamental seja encontrado no interior de uma esfera de raio r é dada por

$$p(r) = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2),$$

em que $x = r/a$. Assim, a probabilidade de que o elétron seja encontrado na região entre duas cascas esféricas de raios a e $2a$ é

$$\begin{aligned} p(a < r < 2a) &= p(2a) - p(a) = \left[1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2) \right]_{x=2} - \left[1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2) \right]_{x=1} \\ &= 0,439. \end{aligned}$$

47. De acordo com a Fig. 39-24, o número quântico n em questão satisfaz à relação $r = n^2 a$. Fazendo $r = 1,0$ nm e explicitando n , obtemos

$$n = \sqrt{\frac{r}{a}} = \sqrt{\frac{1,0 \times 10^{-3} \text{ m}}{5,29 \times 10^{-11} \text{ m}}} \approx 4,3 \times 10^3.$$

48. De acordo com a Eq. 39-6,

$$\Delta E = E_{\text{fóton}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{121,6 \text{ nm}} = 10,2 \text{ eV}.$$

Como $\Delta E > (13,6 \text{ eV})/4$, sabemos que $n_{\text{baixo}} = 1$. Assim, temos

$$E_{\text{alta}} = E_{\text{baixa}} + \Delta E \Rightarrow -\frac{13,6 \text{ eV}}{n_{\text{alto}}^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{1^2} + 10,2 \text{ eV},$$

o que nos dá $n_{\text{alto}} = 2$. Assim, trata-se da transição do estado $n = 2$ para $n = 1$ da série de Lyman.

(a) O maior número quântico é $n = 2$.

(b) O menor número quântico é $n = 1$.

(c) A transição pertence à série de Lyman.

49. (a) Se a energia potencial eletrostática é considerada como sendo zero quando o elétron e o próton estão separados por uma distância infinita, a energia final do átomo é zero e o trabalho necessário para separar o elétron do próton é $W = -E_i$, em que E_i é a energia do estado inicial. A energia do estado inicial é dada por $E_i = (-13,6 \text{ eV})/n^2$, em que n é o número quântico principal do estado. No caso do estado fundamental, $n = 1$ e $W = 13,6 \text{ eV}$.

(b) No caso do estado $n = 2$, $W = (13,6 \text{ eV})/(2)^2 = 3,40 \text{ eV}$.

50. De acordo com a Eq. 39-6,

$$\Delta E = E_{\text{fóton}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{106,6 \text{ nm}} = 12,09 \text{ eV}.$$

Como $\Delta E > (13,6 \text{ eV})/4$, sabemos que $n_{\text{baixo}} = 1$. Assim, temos

$$E_{\text{alta}} = E_{\text{baixa}} + \Delta E \Rightarrow -\frac{13,6 \text{ eV}}{n_{\text{alto}}^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{1^2} + 12,09 \text{ eV},$$

o que nos dá $n_{\text{alto}} = 3$. Assim, trata-se da transição do estado $n = 3$ para o estado $n = 1$ da série de Lyman.

- (a) O maior número quântico é $n = 3$.
- (b) O menor número quântico é $n = 1$.
- (c) A transição pertence à série de Lyman.

51. De acordo com o Exemplo “Probabilidade de detecção do elétron de um átomo de hidrogênio”, a probabilidade de que o elétron de um átomo de hidrogênio no estado fundamental seja encontrado no interior de uma esfera de raio r é dada por

$$p(r) = 1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2),$$

em que $x = r/a$ e a é o raio de Bohr. Para $r = a$, $x = 1$ e

$$p(a) = 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2) = 1 - 5e^{-2} = 0,323.$$

A probabilidade p' de que o elétron seja encontrado do lado de fora dessa esfera é, portanto,

$$p' = 1 - p(a) = 1 - 0,323 = 0,677 \approx 0,68\%.$$

52. (a) De acordo com a Eq. 39-6,

$$\Delta E = -(13,6 \text{ eV})(4^{-2} - 1^{-2}) = 12,8 \text{ eV}.$$

(b) Existem seis energias possíveis associadas às transições $4 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 1$.

(c) A maior energia é $E_{4 \rightarrow 1} = 12,8 \text{ eV}$.

(d) A segunda maior energia é $E_{3 \rightarrow 1} = -(13,6 \text{ eV})(3^{-2} - 1^{-2}) = 12,1 \text{ eV}$.

(e) A terceira maior energia é $E_{2 \rightarrow 1} = -(13,6 \text{ eV})(2^{-2} - 1^{-2}) = 10,2 \text{ eV}$.

(f) A menor energia é $E_{4 \rightarrow 3} = -(13,6 \text{ eV})(4^{-2} - 3^{-2}) = 0,661 \text{ eV}$.

(g) A segunda menor energia é $E_{3 \rightarrow 2} = -(13,6 \text{ eV})(3^{-2} - 2^{-2}) = 1,89 \text{ eV}$.

(h) A terceira menor energia é $E_{4 \rightarrow 2} = -(13,6 \text{ eV})(4^{-2} - 2^{-2}) = 2,55 \text{ eV}$.

53. PENSE O estado fundamental do átomo de hidrogênio corresponde a $n = 1$, $\ell = 0$ e $m_\ell = 0$.

FORMULE A função de onda proposta é

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^{3/2}}} e^{-r/a}$$

em que a é o raio de Bohr. Nosso objetivo é mostrar que, quando a função genérica ψ é substituída por essa função na equação de Schrödinger, o resultado é zero.

ANALISE A derivada de ψ em relação a r é

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{\pi a^{3/2}}} e^{-r/a}$$

e, portanto,

$$r^2 \frac{d\psi}{dr} = -\frac{r^2}{\sqrt{\pi a^{3/2}}} e^{-r/a}$$

e

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a^{5/2}} \left[-\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right] e^{-r/a} = \frac{1}{a} \left[-\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right] \psi.$$

Como a energia do estado fundamental é dada por $E = -me^4 / 8\epsilon_0^2 h^2$, e o raio de Bohr é dado por $a = h^2 \epsilon_0 / \pi m e^2$, então $E = -e^2 / 8\pi \epsilon_0 a$. Uma vez que a energia potencial é fornecida por

$$U = -e^2 / 4\pi \epsilon_0 r,$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2 m}{h^2} E - U \psi &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[-\frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 a} + \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \right] \psi = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{e^2}{8\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} \right] \psi \\ &= \frac{\pi m e^2}{h^2 \epsilon_0} \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} \right] \psi = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} \right] \psi. \end{aligned}$$

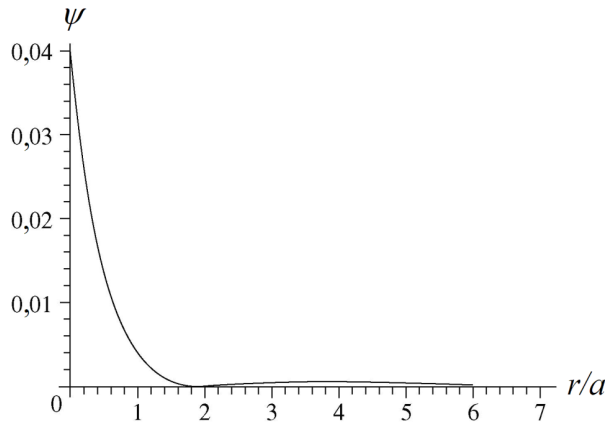
Assim, os dois termos da equação se cancelam, o que mostra que a função de onda proposta satisfaz a equação de Schrödinger.

APRENDA A densidade de probabilidade radial do estado fundamental do átomo de hidrogênio é dada pela Eq. 39-44:

$$P(r) = |\psi|^2 (4\pi r^2) = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} (4\pi r^2) = \frac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a}.$$

A Fig. 39-19 mostra o gráfico de $P(r)$ em função de r .

54. (a) O gráfico de $|\psi_{200}(r)|^2$ mostrado a seguir deve ser comparado com o gráfico de pontos da Fig. 39-21. Note que o gráfico apresenta valores elevados na região entre $r = 0$ e $r = 1,5a$, que corresponde à região com alta concentração de pontos em torno da origem na Fig. 39-21. Para valores maiores de r , existe uma região na qual os valores de $|\psi_{200}(r)|^2$ são muito pequenos, que corresponde ao espaço praticamente vazio da Fig. 39-21. Para valores ainda maiores de r , os valores de $|\psi_{200}(r)|^2$ voltam a aumentar, atingindo um segundo máximo, bem menor que o máximo central, em $r = 4a$. A região em torno deste ponto corresponde ao anel com alta concentração de pontos da Fig. 39.21.



(b) Os extremos de $|\psi_{200}(r)|^2$ para $r > 0$ podem ser determinados elevando ao quadrado a função dada, derivando em relação a r e igualando o resultado a zero. Isso nos dá a equação

$$-\frac{1}{32} \frac{(r-2a)(r-4a)}{a^6 \pi} e^{-r/a} = 0,$$

cujas raízes são $r = 2a$ e $r = 4a$. Observando o gráfico anterior, constatamos que $r = 4a$ é um máximo local e $r = 2a$ é um mínimo local.

(c) De acordo com as Eqs. 39-41 e 39-43, a densidade de probabilidade radial é

$$P_{200}(r) = 4\pi r^2 \psi_{200}^2(r) = \frac{r^2}{8a^3} \left(2 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a}.$$

(d) Fazendo $r = ax$ e usando a relação $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ (Eq. 15 da tabela de integrais do Apêndice E, com $a = 1$), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_{200}(r) dr &= \int_0^\infty \frac{r^2}{8a^3} \left(2 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a} dr = \frac{1}{8} \int_0^\infty x^2 (2-x)^2 e^{-x} dx = \int_0^\infty (x^4 - 4x^3 + 4x^2) e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{8} [4! - 4(3!) + 4(2!)] = 1 \end{aligned}$$

55. De acordo com a Eq. 39-44, a densidade de probabilidade radial para o estado fundamental do átomo de hidrogênio é dada por

$$P(r) = (4r^2/a^3) e^{-2r/a},$$

em que a é o raio de Bohr. Fazendo $r = x$ e usando a Eq. 15 da tabela de integrais do Apêndice E com $n = 3$ e $a = 2/a$, obtemos

$$r_{\text{méd}} = \int_0^\infty r P(r) dr = \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a} dr = \frac{4}{a^3} \frac{6}{(2/a)^4} = 1,5a.$$

56. (a) De acordo com a Eq. 39-4, os níveis de energia do poço de potencial são dados por $E_n = n^2 h^2 / 8mL^2$. A diferença de energia entre o estado n e o estado $n + 1$ é

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \left[(n+1)^2 - n^2 \right] \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(2n+1)h^2}{8mL^2},$$

o que nos dá

$$\frac{\Delta E}{E} = \left[\frac{(2n+1)h^2}{8mL^2} \right] \left(\frac{8mL^2}{n^2 h^2} \right) = \frac{2n+1}{n^2}.$$

Para grandes valores de n , $2n + 1 \rightarrow 2n$ e, portanto, $(2n + 1)/n^2 \rightarrow 2/n$.

(b) Não. Quando $n \rightarrow \infty$, $\Delta E \rightarrow \infty$.

(c) Não. Quando $n \rightarrow \infty$, $E \rightarrow \infty$.

(d) Sim. Quando $n \rightarrow \infty$, $\Delta E/E \approx 1/n \rightarrow 0$.

(e) Esses resultados significam que $\Delta E/E$ é um melhor exemplo que ΔE e E , tomados isoladamente, de que, pelo princípio de correspondência, os resultados quânticos tendem para os resultados clássicos para grandes números quânticos.

57. De acordo com a Eq. 39-4,

$$E_{n+2} - E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right) (n+2)^2 - \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 = \left(\frac{h^2}{2mL^2} \right) (n+1).$$

58. (a) e (b) Na região $0 < x < L$, $U_0 = 0$; portanto, a equação de Schrödinger para esta região é

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi = 0,$$

em que $E > 0$. Se $\psi^2(x) = B \sin^2 kx$, $\psi(x) = B' \sin kx$, em que B' é uma constante tal que $B'^2 = B$. Assim,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 B' \sin kx = -k^2 \psi(x)$$

e

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi = -k^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi.$$

Para que a equação anterior se anule, é preciso que

$$k^2 = \frac{8\pi^2 m E}{h^2},$$

o que nos dá

$$k = \pm \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}.$$

59. PENSE No caso de um poço de potencial finito, a onda de matéria pode atravessar as paredes do poço. Assim, a função de onda do lado de fora do poço não é zero, mas diminui exponencialmente com a distância.

FORMULE A equação de Schrödinger para a região $x > L$ é

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U_0) \psi = 0,$$

em que $E - U_0 < 0$. Se $\psi^2(x) = C e^{-2kx}$, então $\psi(x) = \sqrt{C} e^{-kx}$.

ANALISE (a) e (b) Assim,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 4k^2 \sqrt{C} e^{-kx} = 4k^2 \psi$$

e

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U_0) \psi = k^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U_0) \psi.$$

Para que o segundo membro da equação anterior se anule, é necessário que $k^2 = (8\pi^2 m/h^2)(U_0 - E)$. Escolhendo a raiz positiva, obtemos

$$k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U_0 - E)}.$$

APRENDA Note que a escolha da raiz positiva é necessária para que a solução tenha significado físico. Como a grandeza $U_0 - E$ é positiva, k é um número real. Se k fosse negativo, a solução aumentaria exponencialmente com x e tenderia a infinito quando x tendesse a infinito. Como a integral da densidade de probabilidade de 0 a ∞ deve ser igual a 1, uma solução desse tipo é inaceitável.

60. De acordo com a Eq. 39-4,

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8(mc^2)L^2}.$$

(a) Para $L = 3,0 \times 10^9 \text{ nm}$, a diferença de energia é

$$E_2 - E_1 = \frac{1240^2}{8(511 \times 10^3)(3,0 \times 10^9)^2} (2^2 - 1^2) = 1,3 \times 10^{-19} \text{ eV}.$$

(b) Como $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, temos

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8mL^2} (2n+1) = \frac{(hc)^2}{8(mc^2)L^2} (2n+1).$$

Igualando a expressão anterior a 1,0 eV e explicitando n , obtemos

$$n = \frac{4(mc^2)L^2\Delta E}{(hc)^2} - \frac{1}{2} = \frac{4(511 \times 10^3 \text{ eV})(3,0 \times 10^9 \text{ nm})^2(1,0 \text{ eV})}{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2} - \frac{1}{2} \approx 1,2 \times 10^{19}.$$

(c) Para este valor de n , a energia é

$$E_n = \frac{1240^2}{8(511 \times 10^3)(3,0 \times 10^9)^2} (6 \times 10^{18})^2 \approx 6 \times 10^{18} \text{ eV}.$$

Portanto,

$$\frac{E_n}{mc^2} = \frac{6 \times 10^{18} \text{ eV}}{511 \times 10^3 \text{ eV}} = 1,2 \times 10^{13}.$$

(d) Como $E_n/mc^2 \gg 1$, a velocidade do elétron é relativística.

61. (a) Como a dimensão da derivada em relação a uma grandeza é igual à dimensão original dividida pela dimensão da grandeza, a dimensão do primeiro termo da Eq. 39-18 é a dimensão de ψ dividida pela dimensão de x^2 (m^2 , em unidades do SI). A dimensão do segundo termo é a dimensão de ψ multiplicada por

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(x)] \Rightarrow \frac{\text{kg}}{(\text{J} \cdot \text{s})^2} [\text{J}]$$

em unidades do SI. Uma vez que, de acordo com a Eq. 7-9, $\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, a dimensão do segundo termo também é a dimensão de ψ dividida por m^2 , ou seja, pela dimensão de x^2 .

(b) De acordo com a Eq. 39-17, a dimensão da função de onda unidimensional é $\text{m}^{-0,5}$ em unidades do SI. Como a dimensão dos termos da Eq. 39-18 é a dimensão de ψ dividida por m^2 , a unidade desses termos no SI é o metro^{-2,5}.

62. (a) Como o nível de menor energia das transições da série de Balmer é $n = 2$, a transição cujos fótons têm menor energia é a transição do nível $n = 3$ para o nível $n = 2$. A energia desses fótons é

$$\Delta E = E_3 - E_2 = -(13,6 \text{ eV}) \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 1,889 \text{ eV}$$

e o comprimento de onda correspondente é

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1,889 \text{ eV}} = 658 \text{ nm}.$$

(b) No caso do limite da série, a diferença de energia é

$$\Delta E = E_\infty - E_2 = -(13,6 \text{ eV}) \left(\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 3,40 \text{ eV}$$

e o comprimento de onda correspondente é

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{3,40 \text{ eV}} = 366 \text{ nm}.$$

63. (a) Como os valores permitidos de ℓ para um dado valor de n são $0, 1, 2, \dots, n-1$, existem n valores permitidos de ℓ .

(b) Como os valores permitidos de m_ℓ para um dado valor de ℓ são $-\ell, -\ell+1, \dots, \ell$, existem $2\ell+1$ valores permitidos de m_ℓ .

(c) De acordo com os resultados dos itens (a) e (b), o número de valores permitidos de m_ℓ para um dado valor de n é

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = n^2.$$

64. Para $n=1$,

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -\frac{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^4}{8(8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m})^2 (6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2 (1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} = -13,6 \text{ eV}.$$

65. (a) O momento angular do gás diatômico é

$$L = I\omega = 2 \times m(d/2)^2 \omega = \frac{1}{2} md^2 \omega.$$

Se o momento angular é quantizado, ou seja, se os valores permitidos do momento angular são dados por $L = n\hbar$, em que $n = 1, 2, \dots$,

$$\frac{1}{2} md^2 \omega = n\hbar = \frac{nh}{2\pi} \Rightarrow \omega = \frac{nh}{\pi md^2}.$$

(b) As energias rotacionais permitidas são

$$E_n = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{md^2}{2} \right) \left(\frac{nh}{\pi md^2} \right)^2 = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 md^2}.$$

66. A expressão da probabilidade de que um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio seja detectado no interior de uma esfera de raio r aparece no Exemplo 39.07:

$$p(x) = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2)$$

em que $x = r/a_0$ e $a_0 = 5,292 \times 10^{-11} \text{ m}$. Para $r = 1,1 \times 10^{-15} \text{ m}$,

$$x = (1,1 \times 10^{-15} \text{ m}) / (5,292 \times 10^{-11} \text{ m}) = 2,079 \times 10^{-5}.$$

Como x é pequeno, podemos usar a seguinte aproximação para $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2) \approx 1 - \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \dots \right) (1 + 2x + 2x^2) = \frac{4}{3}x^3 \\ &= \frac{4}{3} (2,079 \times 10^{-5})^3 = 1,2 \times 10^{-14}. \end{aligned}$$

67. (a) No caso de uma partícula de massa m no interior de um recipiente cúbico de aresta L , os níveis permitidos de energia são dados por $E_n = n^2 h^2 / 8mL^2$. Para um átomo de argônio e $L = 0,20 \text{ m}$, a diferença de energia entre os dois menores níveis de energia é

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} (2^2 - 1^2) = \frac{3h^2}{8mL^2} = \frac{3(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(0,0399 \text{ kg} / 6,02 \times 10^{23}) (0,20 \text{ m})^2} \\ &= 6,21 \times 10^{-41} \text{ J} = 3,88 \times 10^{-22} \text{ eV}. \end{aligned}$$

(b) A energia térmica à temperatura $T = 300 \text{ K}$ é a energia cinética média dos átomos:

$$\bar{K} = \frac{3}{2} kT = (1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) = 6,21 \times 10^{-21} \text{ J} = 3,88 \times 10^{-2} \text{ eV}.$$

Assim, a razão é

$$\frac{\bar{K}}{\Delta E} = \frac{3,88 \times 10^{-2} \text{ eV}}{3,9 \times 10^{-22} \text{ eV}} = 10^{20}.$$

(c) A temperatura na qual $\bar{K} = 3kT/2 = \Delta E$ é

$$T = \frac{2(\Delta E)}{3k} = \frac{2(6,21 \times 10^{-41} \text{ J})}{3(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})} = 3,0 \times 10^{-18} \text{ K}.$$

68. Podemos calcular a velocidade orbital do múon usando a segunda lei de Newton. A igualdade entre o produto da massa do múon pela aceleração centrípeta e a força de atração do núcleo de He^+ nos dá

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Zke^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Zke^2}{mr}}$$

em que $k = 1/4\pi\epsilon_0$.

De acordo com a condição de quantização $L = mvr = n\hbar$, os valores permitidos do raio são

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{Zke^2 m}$$

A energia total é

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Zke^2}{r} = -\frac{Zke^2}{2r}.$$

Os níveis de energia do múon são dados por

$$E_n = -\frac{Zke^2}{2r_n} = -\frac{m(Ze^2)^2}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{m(Ze^2)^2}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{(207 \times 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2)^2 (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^4}{8(8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)^2 (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2} \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{1,8 \times 10^{-15} \text{ J}}{n^2} = -\frac{11,3 \text{ keV}}{n^2}. \end{aligned}$$

69. Pode-se explicar o princípio de combinação de Ritz notando que a transição de $n = n_i$ para $n = n_f < n_i$ pode acontecer em duas etapas, com um estado intermediário n' :

$$\Delta E = E_{n_f} - E_{n_i} = (-13,6 \text{ eV}) \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = (-13,6 \text{ eV}) \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n'^2} \right) + (-13,6 \text{ eV}) \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

A transição $n_i = 3 \rightarrow n_f = 1$ associada à segunda linha da série de Lyman pode ser considerada uma combinação da transição $n_i = 3 \rightarrow n' = 2$ (primeira linha da série de Balmer) com a transição $n' = 2 \rightarrow n_f = 1$ (primeira linha da série de Lyman). Outro exemplo é a transição $n_i = 4 \rightarrow n_f = 2$ (segunda linha da série de Balmer), que pode ser considerada uma combinação da transição $n_i = 4 \rightarrow n' = 3$ (primeira transição da série de Paschen) com a transição $n' = 3 \rightarrow n_f = 2$ (primeira linha da série de Balmer).

70. (a) Vamos usar o símbolo e_0 para representar a carga elétrica elementar. A constante A pode ser calculada integrando a distribuição de carga:

$$-e_0 = \int \rho(r) dV = \int_0^\infty (Ae^{-2r/a_0}) 4\pi r^2 dr = 4\pi A a_0^3 \int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx = \pi A a_0^3$$

o que nos dá $A = -e_0/\pi a_0^3$.

(b) Podemos usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico a uma distância r do centro do átomo. A carga envolvida por uma esfera gaussiana de raio $r = a_0$, incluindo a carga $+e_0$ do próton no centro da esfera, é dada por

$$\begin{aligned} q_{\text{env}} &= e_0 + \int \rho(r) dV = e_0 + \int_0^{a_0} (Ae^{-2r/a_0}) 4\pi r^2 dr = e_0 + 4\pi A a_0^3 \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx \\ &= e_0 + \pi A a_0^3 \left(1 - \frac{5}{e^2}\right) = e_0 + (-e_0) \left(1 - \frac{5}{e^2}\right) = (5e^{-2})e_0 \end{aligned}$$

Usando a lei de Gauss, $\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{\text{env}}/\epsilon_0$, obtemos

$$E(4\pi a_0^2) = \frac{(5e^{-2})e_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{(5e^{-2})e_0}{4\pi\epsilon_0 a_0^2}.$$

(c) Como a carga total envolvida é positiva, o sentido do campo elétrico é para longe do núcleo.

71. (a) A carga envolvida por uma esfera de raio r no interior de uma esfera de raio a_0 com uma carga total e e uma distribuição uniforme de carga é dada por $q_{\text{env}} = e(r/a_0)^3$. De acordo com a lei de Gauss, $\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{\text{env}}/\epsilon_0$, o campo elétrico a uma distância r do centro do átomo seria

$$E(4\pi r^2) = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a_0}\right)^3 \Rightarrow E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} r$$

e um elétron situado a uma distância r do centro da esfera seria submetido a uma força $F = -eE = -e^2 r / 4\pi\epsilon_0 a_0^3$. O sinal negativo significa que a força apontaria para o centro da esfera.

(b) Como $F = ma = m \frac{d^2 r}{dt^2}$,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} r \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0$$

e a frequência angular seria

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a_0^3}} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a_0^3}}.$$

72. (a) O potencial elétrico é

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{ke}{a_0} = \frac{8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2}{5,29 \times 10^{-11} \text{ m}} = 27,22 \text{ V}.$$

(b) A energia potencial elétrica do átomo é

$$U = qV = -eV = -e(27,22 \text{ V}) = -27,22 \text{ eV}.$$

(c) No caso de uma órbita circular,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}}.$$

Assim, a energia cinética do elétron para $r = a_0$ é

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{ke^2}{2a_0} = \frac{1}{2}(27,22 \text{ eV}) = 13,6 \text{ eV}.$$

(d) A energia total do sistema é

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{a_0} = -\frac{ke^2}{2a_0} = -13,6 \text{ eV}.$$

Assim, a energia necessária para ionizar o átomo é +13,6 eV.

73. Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\begin{aligned} E_{n_1, n_2, n_3} &= \frac{h^2}{8mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(0,25 \times 10^{-6} \text{ m})^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \\ &= (6,024 \text{ } \mu\text{eV})(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \end{aligned}$$

Os cinco estados de menor energia são os estados (1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 1) e (2, 2, 2), e as energias desses estados são

$$\begin{aligned} E_{111} &= \frac{h^2}{8mL^2} (1^2 + 1^2 + 1^2) = 3(6,024 \text{ } \mu\text{eV}) = 18,1 \text{ } \mu\text{eV} \\ E_{121} &= \frac{h^2}{8mL^2} (1^2 + 2^2 + 1^2) = 6(6,024 \text{ } \mu\text{eV}) = 36,2 \text{ } \mu\text{eV} \\ E_{122} &= \frac{h^2}{8mL^2} (1^2 + 2^2 + 2^2) = 9(6,024 \text{ } \mu\text{eV}) = 54,3 \text{ } \mu\text{eV} \\ E_{131} &= \frac{h^2}{8mL^2} (1^2 + 3^2 + 1^2) = 11(6,024 \text{ } \mu\text{eV}) = 66,3 \text{ } \mu\text{eV} \\ E_{222} &= \frac{h^2}{8mL^2} (2^2 + 2^2 + 2^2) = 12(6,024 \text{ } \mu\text{eV}) = 72,4 \text{ } \mu\text{eV} \end{aligned}$$