

2015 – 2
Lista de exercícios nº 2 (GABARITO)

- 1) 1ª forma: multiplicando ambos os lados da desigualdade por -1 e então convertendo a desigualdade resultante em igualdade

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5 \Rightarrow -10x_1 + 3x_2 \leq 5 \Rightarrow -10x_1 + 3x_2 + s_1 = 5$$

2ª forma: convertendo a desigualdade em igualdade e então multiplicando ambos os lados da desigualdade por -1

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5 \Rightarrow 10x_1 - 3x_2 - s_1 = -5 \Rightarrow -10x_1 + 3x_2 + s_1 = 5$$

Claramente percebemos que as duas formas são equivalentes.

- 2) Para “tratarmos” o máx da f.o podemos criar uma variável y e fazer da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= y \\ \text{s. a. } y &\geq |x_1 - x_2 + 3x_3| \\ y &\geq |-x_1 + 3x_2 - x_3| \\ y, x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Agora para “tratarmos” os módulos, devemos lembrar que dados a, b tais que $b \geq 0$, tem-se

$$|a| \leq b \Leftrightarrow a \leq b \text{ e } a \geq -b$$

Logo, aplicando isto ao problema, temos

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= y \\ \text{s. a. } y &\leq x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y &\geq -x_1 + x_2 - 3x_3 \\ y &\leq -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y &\geq x_1 - 3x_2 + x_3 \\ y, x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- 3) a) *Maximizar* $z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{s. a. } x_1 + 3x_2 + s_1 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- b) 1ª solução básica: (x_1, x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right) \Rightarrow z = \frac{48}{7}$$

Classificação: Viável

2ª solução básica: (x_1, s_1)

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 6 \\ 3x_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_1, s_1) = (2, 4) \Rightarrow z = 4$$

Classificação: Viável

3ª solução básica: (x_1, s_2)

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ 3x_1 + s_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_1, s_2) = (6, -12)$$

Classificação: Inviável pois $s_2 \leq 0$

4ª solução básica: (x_2, s_1)

$$\begin{cases} 3x_2 + s_1 = 6 \\ 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_2, s_1) = (3, -3)$$

Classificação: Inviável pois $s_1 \leq 0$

5ª solução básica: (x_2, s_2)

$$\begin{cases} 3x_2 = 6 \\ 2x_2 + s_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_2, s_2) = (2, 2) \Rightarrow z = 6$$

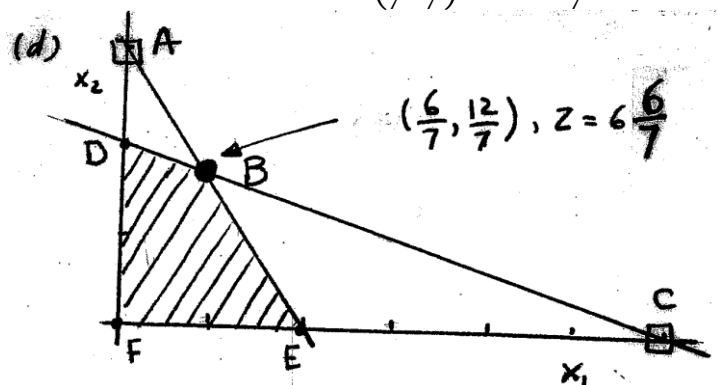
Classificação: viável

6ª solução básica: (s_1, s_2)

$$\begin{cases} s_1 = 6 \\ s_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (s_1, s_2) = (6, 6) \Rightarrow z = 0$$

Classificação: viável

c) Solução ótima: $(x_1, x_2) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right) \Rightarrow z = \frac{48}{7}$



e) As soluções inviáveis são os pontos A e C do gráfico.

4) Solução:

OBS: Infeasible = Inviável

maximize $Z = x_1 + x_2$
subject to

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 = 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Combination	Solution	Status
x_1, x_2	$26/3, -4/3$	Infeasible
x_1, x_3	$8, -2$	Infeasible
x_1, x_4	$6, -4$	Infeasible
x_2, x_3	$16, -26$	Infeasible
x_2, x_4	$3, -13$	Infeasible
x_3, x_4	$6, -16$	Infeasible

5) Forma canônica:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ -6x_1 + 7x_2^- - 7x_2^+ - 9x_3 - s_1 &= 4 \\ x_1 + x_2^- - x_2^+ + 4x_3 - s_2 &= 16 \\ x_1, x_2^-, x_2^+, x_3, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vamos tentar considerar a solução básica (x_2^-, x_2^+) , ou seja, as demais variáveis são nulas:

$$\begin{cases} 7x_2^- - 7x_2^+ = 4 \\ x_2^- - x_2^+ = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^- - x_2^+ = \frac{4}{7} \\ x_2^- - x_2^+ = 16 \end{cases}$$

O sistema é indeterminado. Logo, uma solução básica não pode incluir ambas, x_2^- e x_2^+ simultaneamente.

6) Solução:

maximize $Z = x_1 + 3x_2$
 Subject to

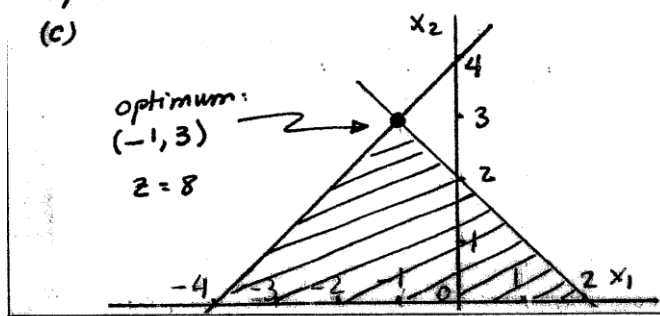
5

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 &\text{unrestricted} \\ x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Combination	Solution	Status	Z
x_1, x_2	-1, 3	Feasible	8
x_1, x_3	-4, 6	Feasible	-4
x_1, x_4	2, 6	Feasible	2
x_2, x_3	4, -2	Infeasible	—
x_2, x_4	2, 2	Feasible	6
x_3, x_4	2, 4	Feasible	0

Optimum: $x_1 = -1, x_2 = 3, Z = 8$

(c)



7) Só serão colocadas as soluções ótimas de cada item

- a) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (0, 6, 0, 7, 0, 0, 29) \Rightarrow z = 41$
- b) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (10, 15, 0, 0, 0, 3, 0) \Rightarrow z = 170$
- c) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (0, 6, 14, 0, 0, 0, 8) \Rightarrow z = 36$
- d) $(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (0, 6, 0, 7, 0, 0, 29) \Rightarrow z = -80$

- 8) a) Variáveis básicas: $x_8 = 12, x_3 = 6, x_1 = 0$. As demais variáveis são não básicas e possuem valor nulo.
 b) Variáveis não básicas que melhoram a f.o: x_2, x_5, x_6

Se entra x_2 então sai x_8 pois está associado ao $\min \left\{ \frac{12}{3}, \frac{6}{1}, - \right\} = 4$

Se entra x_5 então sai x_1 pois está associado ao $\min \left\{ -\frac{6}{1}, \frac{0}{6} \right\} = 0$

Se entra x_6 então nenhuma variável sai pois todas as razões são negativas ou infinito

c) Variáveis não básicas que melhoram a f.o: x_4

Se entra x_4 então sai x_3 pois está associado ao $\min \left\{ -\frac{6}{3}, - \right\} = 2$

d) Como mostrado no item b, x_5 não pode melhorar a f.o. pois o mínimo do critério de saída da base foi nulo. Outra variável não básica que também não produz alteração é x_7 pois possui coeficiente nulo na linha z.

9) a) e b) Não serão feitas as tabelas do algoritmo simplex mas a sol ótima é $x_1 = \frac{93}{71}$ e $x_2 = \frac{164}{71}$

c) Item a precisou de 4 iterações enquanto b precisou de 3.

d) Não necessariamente o critério do coeficiente mais negativo na escolha da variável que entra na base é o que acarreta em menos iterações.