DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães
Prova 1 - Gabarito

1- Uma partícula de massa m se move em uma trajetória dada por $x = x_0 \cos \omega_1 t$, $y = y_0 \sin \omega_2 t$.
a) Encontre a força que age na partícula. Sob que condições essa força será uma força central? (1 pt)
b) Encontre a energia potencial como função de x e y. (1 pt)
c) Determine a energia cinética da partícula e mostre que a energia total é conservada. (0.5 pt)

Resposta - 1
a) Pela segunda lei de Newton, em componentes:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y. \end{aligned} \tag{1}$$

A força é portanto o vetor

$$\vec{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y = m\ddot{x}\hat{e}_x + m\ddot{y}\hat{e}_y. \tag{2}$$

Com

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x_0 \omega_1^2 \cos \omega_1 t = -\omega_1^2 x, \\ \ddot{y} &= -y_0 \omega_2^2 \sin \omega_2 t = -\omega_2^2 y. \end{aligned} \tag{3}$$

Obtemos

$$\vec{F} = -m\omega_1^2 x \hat{e}_x - m\omega_2^2 y \hat{e}_y, \tag{4}$$

e notamos que a força será central se $\omega_1 = \omega_2$, pois neste caso: $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$.

b) Temos:

$$V(x,y) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_0}^{x} F_x dx - \int_{y_0}^{y} F_y dy$$

$$= m\omega_1^2 \int_{x_0}^{x} x dx + m\omega_2^2 \int_{y_0}^{y} y dy = \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2} - \frac{m\omega_1^2 x_0^2}{2} - \frac{m\omega_2^2 y_0^2}{2}. \quad (5)$$

Escolhendo o zero do potencial em $x = 0, y = 0$, obtemos:

$$V(x, y) = \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2}. \quad (6)$$

c) A energia cinética é:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} \\ &= \frac{m}{2}\left(x_0^2\omega_1^2 \sin^2 \omega_1 t + y_0^2\omega_2^2 \cos^2 \omega_2 t\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Portanto, a energia total será:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{m}{2}\left(x_0^2\omega_1^2 \sin^2 \omega_1 t + y_0^2\omega_2^2 \cos^2 \omega_2 t + x_0^2\omega_1^2 \cos^2 \omega_1 t + y_0^2\omega_2^2 \sin^2 \omega_2 t\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(x_0^2\omega_1^2 + y_0^2\omega_2^2\right), \end{aligned} \quad (8)$$

que é uma constante.

2- Uma bola é solta com velocidade inicial zero de uma altura h acima do solo. Na ausência da resistência do ar, a bola iria atingir o solo em um instante $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Suponha que exista uma pequena força de resistência do ar proporcional à velocidade, $\vec{F} = -km\vec{v}$. O tempo para a bola atingir o solo irá aumentar por uma pequena quantidade e será da forma $t_s = t_0 + t_1$. Para k pequeno t_1 será proporcional à k.
a) Escreva a equação do movimento da bola e determine a posição da bola em função do tempo. (1.5 pt)
b) Calcule t_1 até a primeira ordem em k. (Dica: estude a expansão em série de potências na quantidade adimensional $k(t_0 + t_1)$. A fórmula geral da série de Taylor é dada por $f(x + x_0) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$) (1.0 pt)

Resposta - 2
a) A equação de movimento da bola é dada pela segunda lei de Newton:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - km\vec{v}. \quad (9)$$

Esse é um movimento unidimensional, escolhendo o eixo x ao longo do movimento e direcionado para cima, temos:

$$m\ddot{x} = -mg - km\dot{x}. \quad (10)$$

Precisamos resolver portanto a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv, \quad (11)$$

onde $v = \frac{dx}{dt}$. Usando que $v = 0$ em $t = 0$, a expressão de $v(t)$ pode ser obtida pela integral:

$$-\int_0^t dt' = \int_0^v dv' \frac{1}{g + kv'} \Rightarrow -t = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{g + kv}{g}\right) \tag{12}$$

e vemos que:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \frac{g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}. \tag{13}$$

Integrando novamente (usando que $x(0) = h$)

$$\int_h^x dx' = \int_0^t dt' \left(\frac{g}{k} e^{-kt'} - \frac{g}{k}\right) \tag{14}$$

encontramos:

$$x(t) = h - \frac{g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right) - \frac{g}{k} t. \tag{15}$$

b) Quando a bola chega ao solo, no referencial que escolhemos temos a condição $x(t_s) = 0$ e portanto a seguinte equação para t_s:

$$h - \frac{g}{k^2}\left(e^{-kt_s} - 1\right) - \frac{g}{k} t_s = 0. \tag{16}$$

Essa é uma equação transcendental para t_s e não pode ser resolvida exatamente. Vamos resolver então por aproximação. Expandindo a exponencial em série de Taylor:

$$e^{-kt_s} = 1 - kt_s + \frac{1}{2}(kt_s)^2 - \frac{1}{6}(kt_s)^3 + \ldots \tag{17}$$

e substituindo na equação para t_s, temos

$$\begin{aligned} \frac{g}{k^2}\left(-kt_s + \frac{1}{2}(kt_s)^2 - \frac{1}{6}(kt_s)^3 + \ldots\right) &= h - \frac{g}{k} t_s \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(kt_s)^2 - \frac{1}{6}(kt_s)^3 + \ldots &= \frac{hk^2}{g}. \end{aligned} \tag{18}$$

Note que se mantivermos apenas termos de ordem k^2 obteremos uma resposta trivial ($t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$), vamos portanto manter até ordem k^3 nessa expansão

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(kt_s)^2 \left(1 - \frac{1}{3}(kt_s)\right) &= \frac{hk^2}{g} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(kt_s)^2 &= \frac{hk^2}{g} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}(kt_s)\right)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Com $t_s = t_0 + t_1$ temos:

$$t_0 + t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{3}(t_0 + t_1)\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{k}{6}(t_0 + t_1)\right). \tag{20}$$

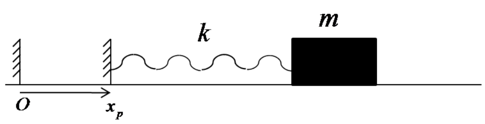
Usando que $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$:

$$t_1 \approx \frac{hk}{3g} + \frac{k}{6}\sqrt{\frac{2h}{g}} t_1. \tag{21}$$

Note que o último termo será de ordem superior em k e portanto em ordem mais baixa temos apenas:

$$t_1 \approx \frac{hk}{3g}. \tag{22}$$

3- Considere um bloco de massa m acoplado à uma mola de massa desprezível e constante elástica k, que por sua vez está presa à uma parede inicialmente fixa localizada em x_p (veja a figura abaixo).



a) Se a mola tem comprimento l quando está relaxada (no equilíbrio), qual é a expressão da força elástica que a mola exerce no bloco? (0.5 pt)
b) Suponha que no instante $t = 0$ a parede comece a oscilar de acordo com $x_p(t) = A \sin \omega t$. Escreva a equação do movimento do bloco e mostre que é a equação de um oscilador harmônico forçado. Qual é a expressão da força externa? (0.5 pt)
c) Resolva essa equação e encontre a posição do bloco em função do tempo, supondo que em $t = 0$ o bloco estava em repouso $\dot{x}(0) = 0$ na posição $x(0) = l$ em relação ao referencial O. (1.5 pt)

Resposta - 3:
a) Adotando a origem em O, vemos que o deslocamento da mola em relação ao seu comprimento de equilíbrio é $x - x_p - l$, onde x é a posição do bloco em relação à origem O, portanto a força elástica no bloco será:

$$F = -k(x - x_p - l). \tag{23}$$

b) A segunda lei de Newton para o movimento do bloco é

$$m\ddot{x} = F = -k(x - x_p - l). \tag{24}$$

Com $x_p(t) = A\sin\omega t$, a equação do movimento é portanto

$$m\ddot{x} = -k(x - A\sin\omega t - l). \tag{25}$$

Definindo $X = x - l$ podemos escrever essa equação como

$$m\ddot{X} + kX = kA\sin\omega t, \tag{26}$$

que é a equação de um oscilador harmônico forçado, com a força externa $F_{ext}(t) = kA\sin\omega t$.

c) A solução geral dessa equação será a solução da equação homogênea somada à uma solução particular. A solução homogênea $X_h(t)$ é simplesmente a solução do oscilador harmônico simples com frequência $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$X_h(t) = B\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{27}$$

onde B e α são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

Para a solução particular $X_p(t)$ tentamos uma solução com o mesmo comportamento da força externa: $X_p(t) = C\sin\omega t$, onde C é uma constante. Substituindo na equação de movimento obtemos:

$$-Cm\omega^2 + kC = kA \Rightarrow C = \frac{kA}{k - m\omega^2} = \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{28}$$

A solução geral será portanto:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = B\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t, \tag{29}$$

ou, lembrando que $X = x - l$:

$$x(t) = l + B\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t. \tag{30}$$

As condições iniciais fornecem:

$$\begin{aligned} x(0) = l &\Rightarrow B\cos\alpha = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 &\Rightarrow -B\omega_0\sin\alpha + \frac{\omega_0^2\omega A}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Pela primeira equação vemos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e pela segunda $B = \frac{\omega_0\omega A}{\omega_0^2 - \omega^2}$, logo, lembrando que $\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -\sin\omega_0 t$, obtemos finalmente:

$$x(t) = l + \frac{\omega_0 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t\right). \tag{32}$$

4- Uma das principais evidências para a existência de matéria escura no universo vem da observação da dinâmica de galáxias, em particular das curvas de rotação planas de galáxias. Observa-se que as estrelas mais distantes do centro de galáxias espirais se movem com uma velocidade orbital que não depende do raio da órbita (veja na figura abaixo um esboço dos resultados)

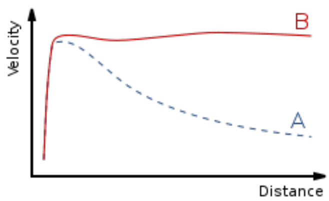


Figura 1: velocidades orbitais das estrelas como função da distância ao centro das galáxias. A curva (A) representa o resultado esperado e a curva (B) representa o resultado observado.

O movimento nos extremos das galáxias (longe do centro) envolve velocidades baixas se comparadas à velocidade da luz e o campo gravitacional é fraco nessa região, portanto a mecânica Newtoniana deveria funcionar muito bem.
a) Considere uma partícula de massa m sob a ação de uma força central $F(r)$ atrativa. Escreva as equações de movimento em coordenadas polares (r, θ) e obtenha a expressão da velocidade orbital da partícula em uma órbita circular de raio r_0. Suponha que as estrelas na galáxia se movam em uma órbita circular. Qual a dependência da velocidade com o raio da órbita se $F(r)$ for a força gravitacional de Newton? Observe que esse comportamento deve concordar com a curva A da figura. (0.5 pt)
b) Qual deve ser o comportamento da força $F(r)$ como função de r para que o comportamento da curva B em longas distâncias seja reproduzido (ou seja, para que a velocidade não dependa da distância)? *Obs: Acredita-se que esse comportamento reflete o efeito de uma distribuição de matéria de composição desconhecida que permeia a galáxia, se concentrando principalmente em anéis (halos) nos extremos da galáxia. Essa matéria interage apenas gravitacionalmente (ou muito fracamente de outra forma) com a matéria usual (bariônica) e recebe o nome de matéria escura.* (0.5 pt)
c) Encontre o potencial efetivo associado à força obtida no item b) e esboce o gráfico desse potencial. Mostre que esse potencial admite uma órbita circular, encontre o raio da órbita circular e mostre que essa órbita é estável. Qual é a frequência de revolução na órbita circular? Obtenha também a frequência de pequenas oscilações radiais em torno da órbita circular. A órbita irá precessar? (1.5 pt)

Resposta - 4:
a) A segunda lei de Newton nos fornece

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = F(r)\hat{r}, \tag{33}$$

onde $F(r) < 0$ pois a força é atrativa. Lembrando que

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y,$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{e}_x + \cos\theta \hat{e}_y, \tag{34}$$

podemos obter, com $\vec{r} = r\hat{r}$:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta},$$
$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}, \tag{35}$$

e a segunda lei de Newton em coordenadas polares será

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r),$$
$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0. \tag{36}$$

Em uma órbita circular sabemos que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ e a primeira equação fornece neste caso para uma órbita de raio r_0:

$$mr_0\dot{\theta}^2 = -F(r_0) \Rightarrow mr_0^2\dot{\theta}^2 = -r_0F(r_0) \Rightarrow mv^2 = -r_0F(r_0) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-r_0F(r_0)}{m}}, \tag{37}$$

onde $v = r_0\dot{\theta}$ é a velocidade orbital. Note que essa é simplesmente a equação da força centrípeta $\frac{mv^2}{r_0} = -F(r_0)$.

No caso da força da gravitação de Newton:

$$F(r_0) = -\frac{GMm}{r_0^2}, \tag{38}$$

obtemos

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}, \tag{39}$$

que de fato reproduz o comportamento esperado representado pela curva A.

b) Vemos pela expressão da velocidade deduzida acima que v será independente de r_0 se a força for da forma $\vec{F}(r) = -\frac{k}{r}\hat{r}$, pois nesse caso $F(r_0) = -\frac{k}{r_0}$ e:

$$v = \sqrt{\frac{-r_0F(r_0)}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{40}$$

c) A equação do movimento radial nos fornece para a força do item b):

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F(r) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{k}{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2} + k\ln r\right) = -\frac{dV_{ef}}{dr}, \tag{41}$$

onde $L = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular. Dessa expressão podemos ler imediatamente o potencial efetivo (definido a menos de uma constante):

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + k\ln r. \tag{42}$$

Pelo esboço do potencial, vemos que o potencial efetivo deve admitir um mínimo e portanto uma órbita circular estável.

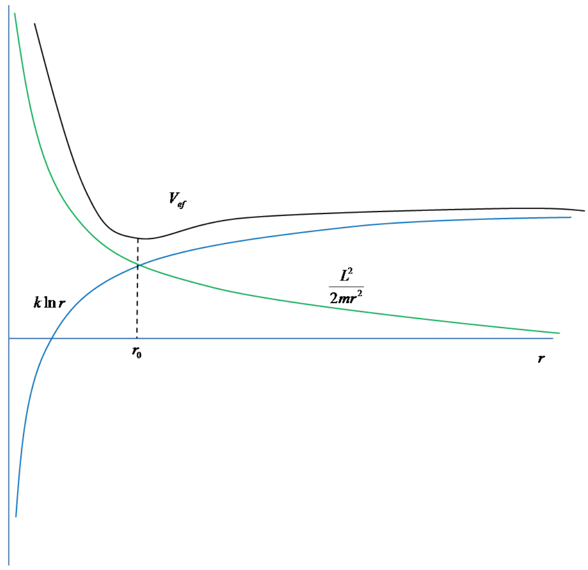


Figura 2: esboço do potencial efetivo (curva em preto)

O mínimo do potencial efetivo satisfaz a condição $\frac{dV_{ef}}{dr} = 0$, de onde obtemos o raio da órbita circular:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{k}{r_0} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L}{\sqrt{mk}}. \tag{43}$$

A órbita é de fato estável pois

$$\left.\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \frac{3L^2}{mr_0^4} - \frac{k}{r_0^2} = \frac{2mk^2}{L^2} > 0. \tag{44}$$

A velocidade orbital na órbita circular nos fornece diretamente a frequência de revolução:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} = r_0\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \omega = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{k}{L}. \tag{45}$$

Para pequenas oscilações em torno da órbita circular, a equação do movimento radial tem a forma (basta expandir $\frac{dV_{ef}}{dr}$ em série de Taylor e pegar apenas o primeiro termo não-nulo):

$$m\ddot{r} = -\left.\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}\right|_{r=r_0} r, \tag{46}$$

que reconhecemos como a equação do oscilador harmônico simples com frequência:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\left.\frac{d^2 V_{ef}}{dr^2}\right|_{r=r_0}} = \sqrt{2}\frac{k}{L}. \tag{47}$$

A órbita portanto irá precessar, pois a razão entre os períodos de revolução e radial não é uma razão de números inteiros.

$$\frac{\omega_r}{\omega} = \sqrt{2}. \tag{48}$$