Unidade IV - Geometria

IME 04-10842
Computação Gráfica
Professor Guilherme Mota

Métodos de Definição de Geometrias

Métodos de Definição de Geometrias

- Método Axiomático
    - Definição do espaço, objetos e axiomas
    - Consistência e completude
- Método de Coordenadas
    - Axiomas e teoremas são traduzidos em equações
- Método dos Grupos de Transformação
    - Espaço e Grupo de Transformações

Método dos Grupos de Transformação

Método de Grupos de Transformação

- Geometria consiste de um espaço S e de um grupo G de transformações deste espaço

  – Cada $T \in G$ onde $T: S \to S$ satisfaz às seguintes propriedades:

    - **Associatividade:**
      Dados $g, h, l \in G$, $(g\ h)\ l = g\ (h\ l)$

    - **Elemento neutro:**
      $\exists\ e \in G \mid g\ e = e\ g = g \ \ \forall\ g \in G$

    - **Elemento Inverso:**
      $\forall\ g \in G, \exists\ g^{-1} \mid g\ g^{-1} = g^{-1}\ g = e$

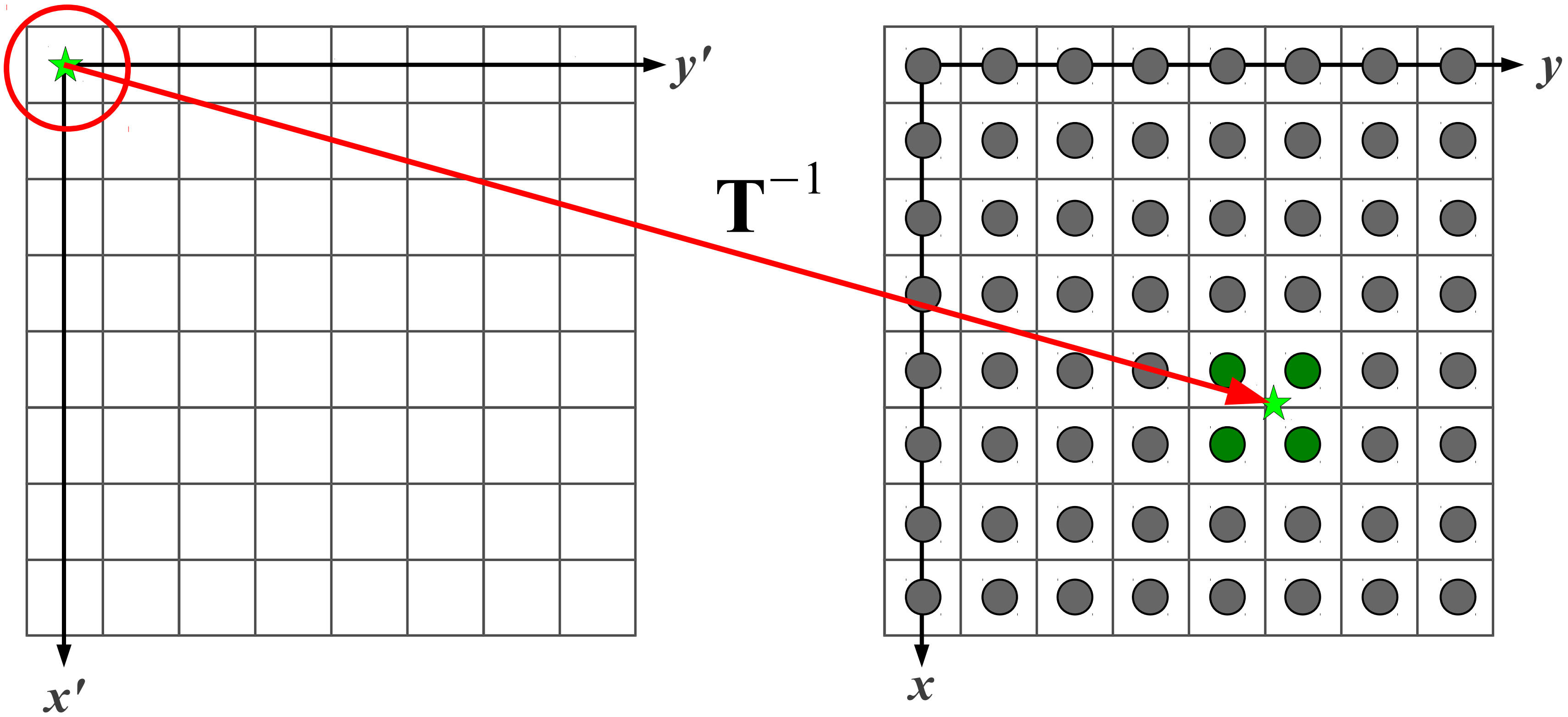
Método de Grupos de Transformação: Definições

- **Objeto geométrico:**
  O é um subconjunto de S
- **Propriedade geométrica:**
  se O é P, $g(O)$ também é P
- **Congruência:**
  O_1 e O_2 são congruentes *sse* $\exists\, g \mid g(O_1) = O_2$

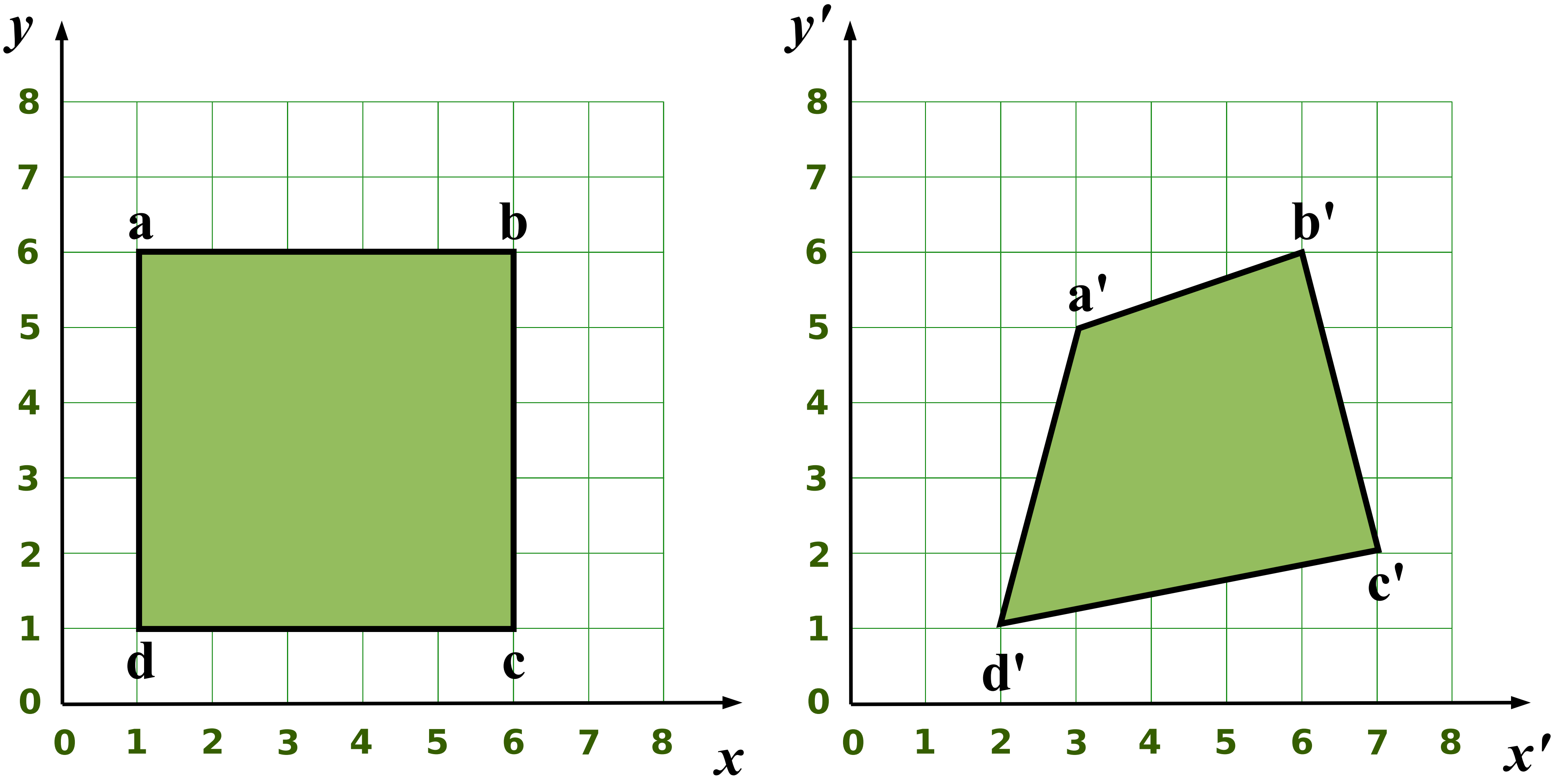
Espaço → Transformações → Propriedades → Geometria

Transformações e Computação Gráfica

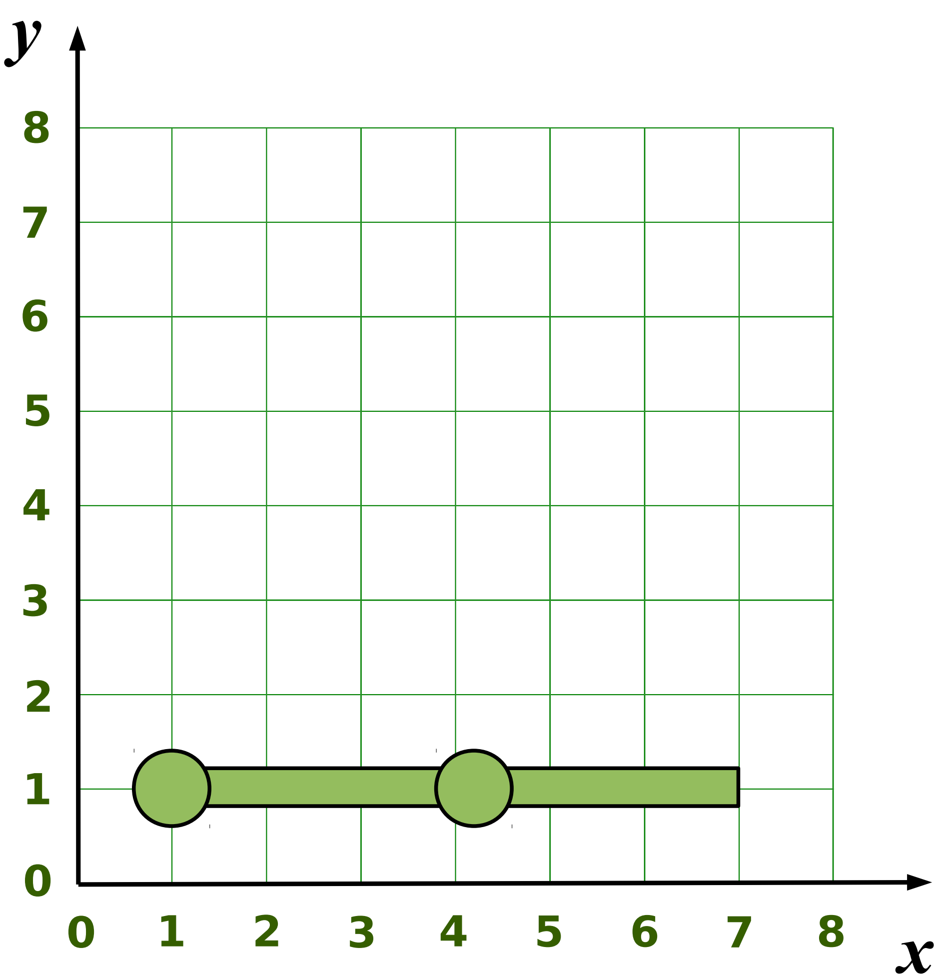
- Mudança de Coordenadas

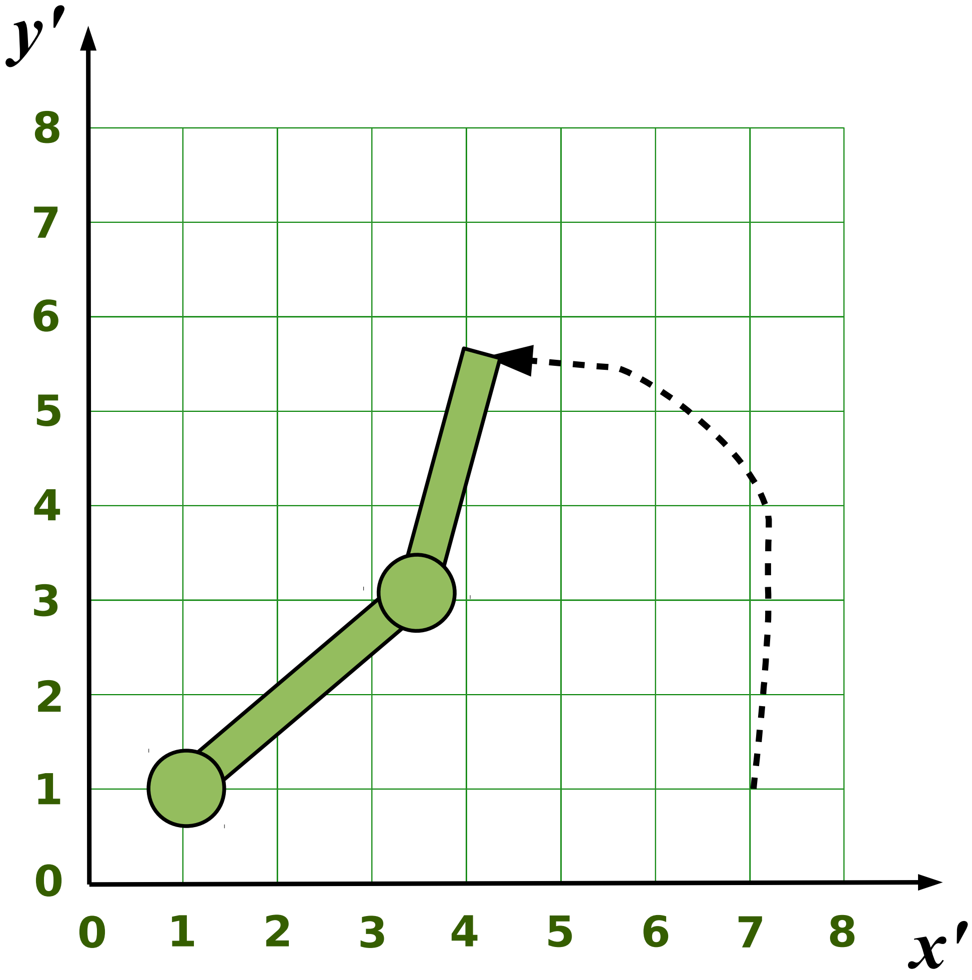


- Deformação de objetos do espaço



- Movimento





Conceitos de Álgebra Linear

Conceitos de Álgebra Linear

$$\mathbb{R}^n = \{(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$: pontos no $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

Operações no $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) + (y_{1,} y_{2,} \ldots, y_n)$$

$$= (x_1 + y_{1,} x_2 + y_{2,} \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda (x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) = (\lambda x_{1,} \lambda x_{2,} \ldots, \lambda x_n)$$

Transformações Lineares

Definição:

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

$$L(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda L(\mathbf{u})$$

$GL(n)$: grupo especial linear de ordem n

Transformações Lineares

Base do $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0) \qquad \mathbf{a_1} = L\,\mathbf{e_1} = (a_{11,} a_{21,} a_{31,} \ldots, a_{n1})$$

$$\mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \mathbf{a_2} = L\,\mathbf{e_2} = (a_{12,} a_{22,} a_{32,} \ldots, a_{n2})$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\mathbf{e_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1) \qquad \mathbf{a_n} = L\,\mathbf{e_1} = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots, a_{nn})$$

$$L_e = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad L(\mathbf{x}) = L_e\,\mathbf{x}$$

Transformações Lineares

$$L(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad L() \Leftrightarrow A$$

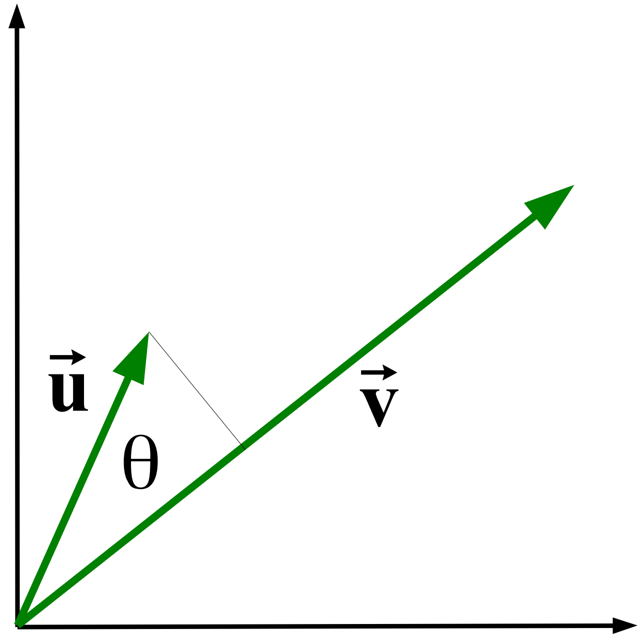
1. $(T \circ L)(\mathbf{x}) = T(L(\mathbf{x})) = (T_e L_e) \cdot \mathbf{x}$

2. $(T + L)(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + L(\mathbf{x}) = (T_e + L_e) \cdot \mathbf{x}$

Produto Interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad \|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle} \qquad \cos\theta = \frac{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle}{\|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\|}$$

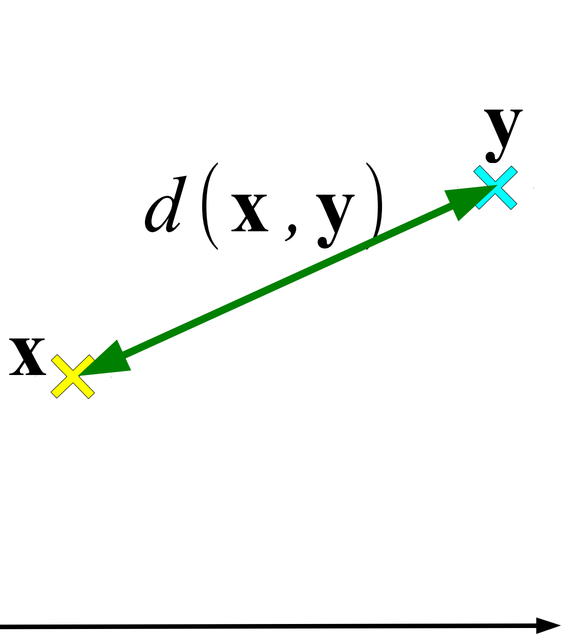
$$\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle$$



Produto Interno

$$\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad \|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle} \qquad \cos\theta = \frac{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle}{\|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\|}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$



Geometria Euclideana

Geometria Euclideana

- Definição transformação ortogonal

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

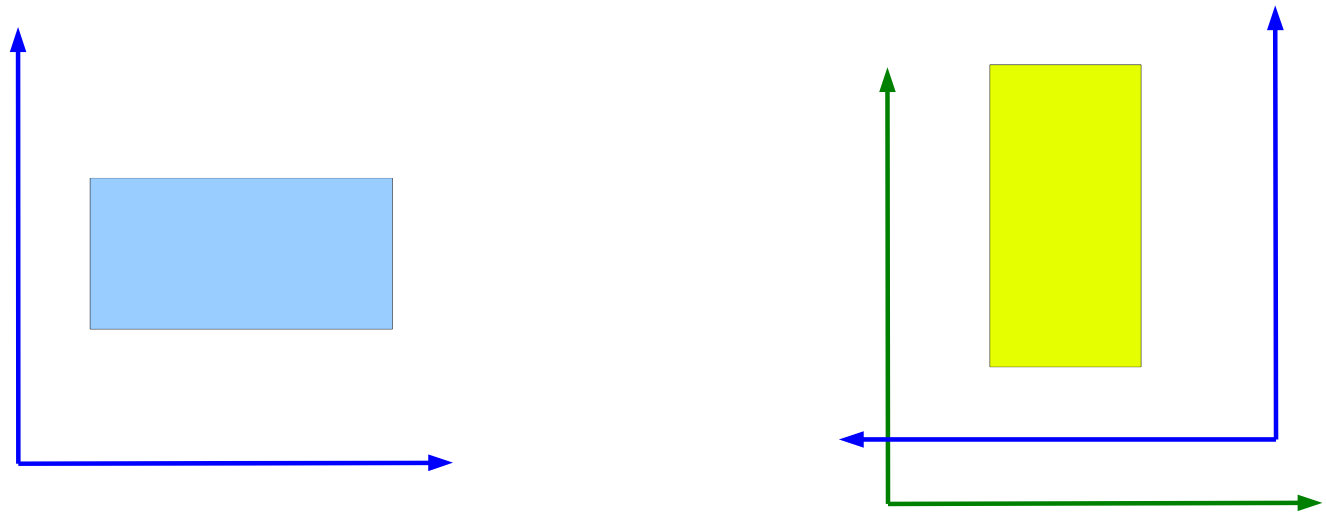
- Transformações ortogonais preservam a norma do espaço e portanto a distância → ***Isometria***
- Isometrias modificam a posição dos objetos e pontos, mas mantêm as relações métricas

Geometria Euclideana

- Definição Congruência:
  - Dois Objetos O_1 e O_2 são ditos congruentes se somente se existir uma isometria T tal que:

$$T\left(O_1\right)=O_2$$

- Congruência é o conceito básico da geometria Euclideana



Geometria Euclideana

- Representação Matemática

$$T(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) + \mathbf{v_0}$$

  - Onde:

    L é uma transformação ortogonal

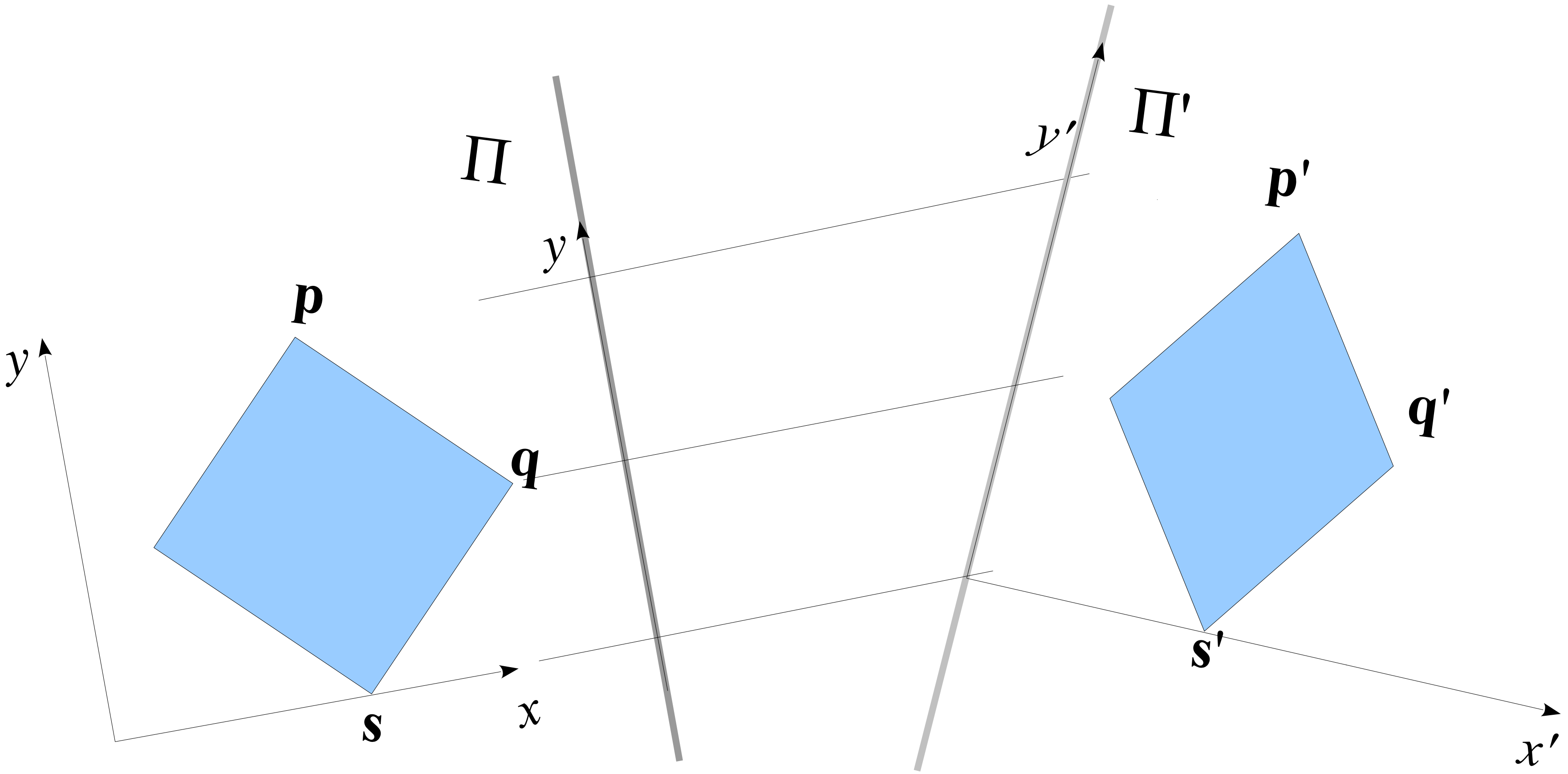
    v_0 é um vetor fixo

Geometria Afim

Geometria Afim: Transformação Afim Geral

- Raios projetantes paralelos
- Espaços projetivos oblíquos
- Preserva o paralelismo

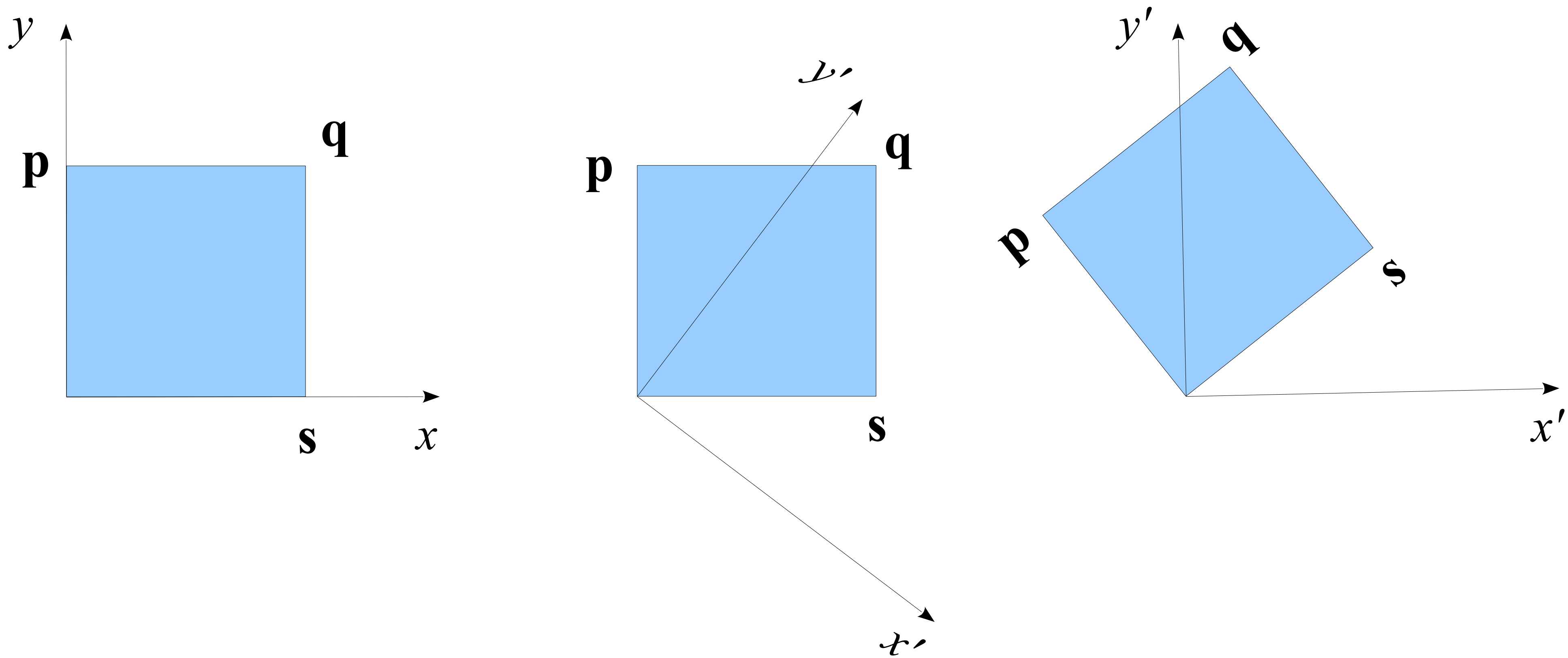
$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$



Transformações do Grupo Afim: Rotação

- Raios projetantes paralelos
- Espaços projetivos paralelos

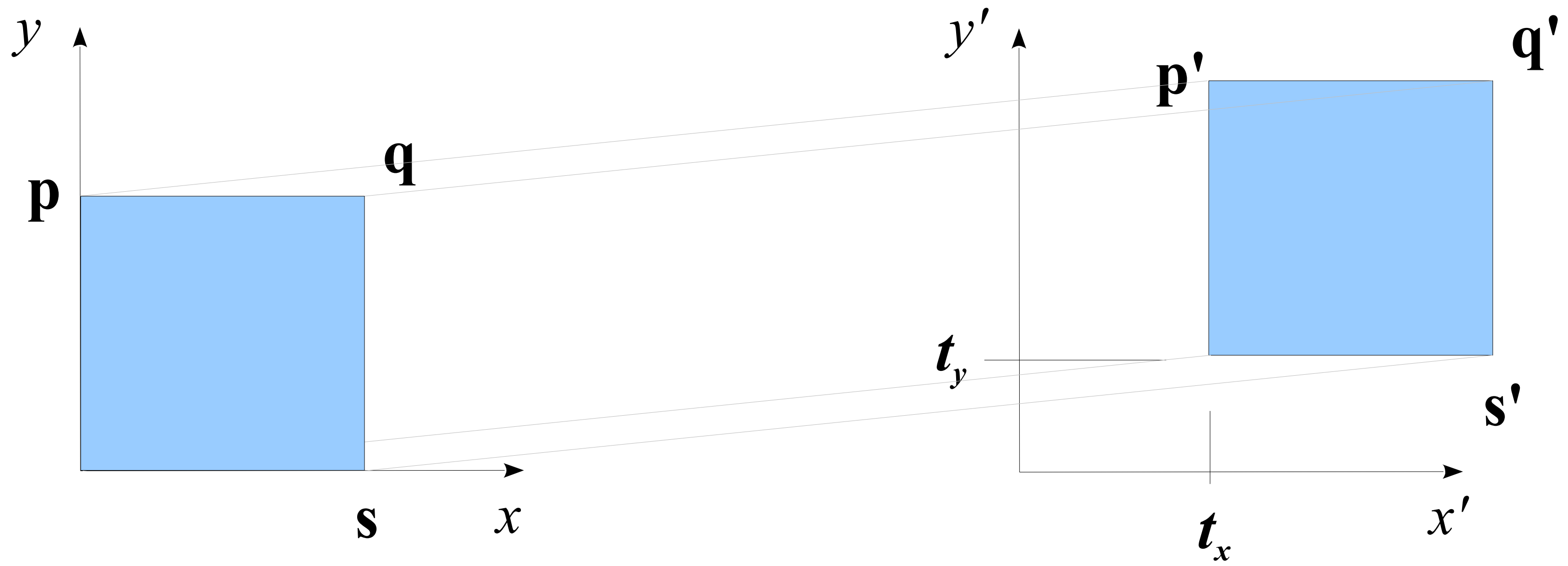
$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$



Transformações do Grupo Afim: Translação

- Raios projetantes paralelos
- Espaços projetivos paralelos

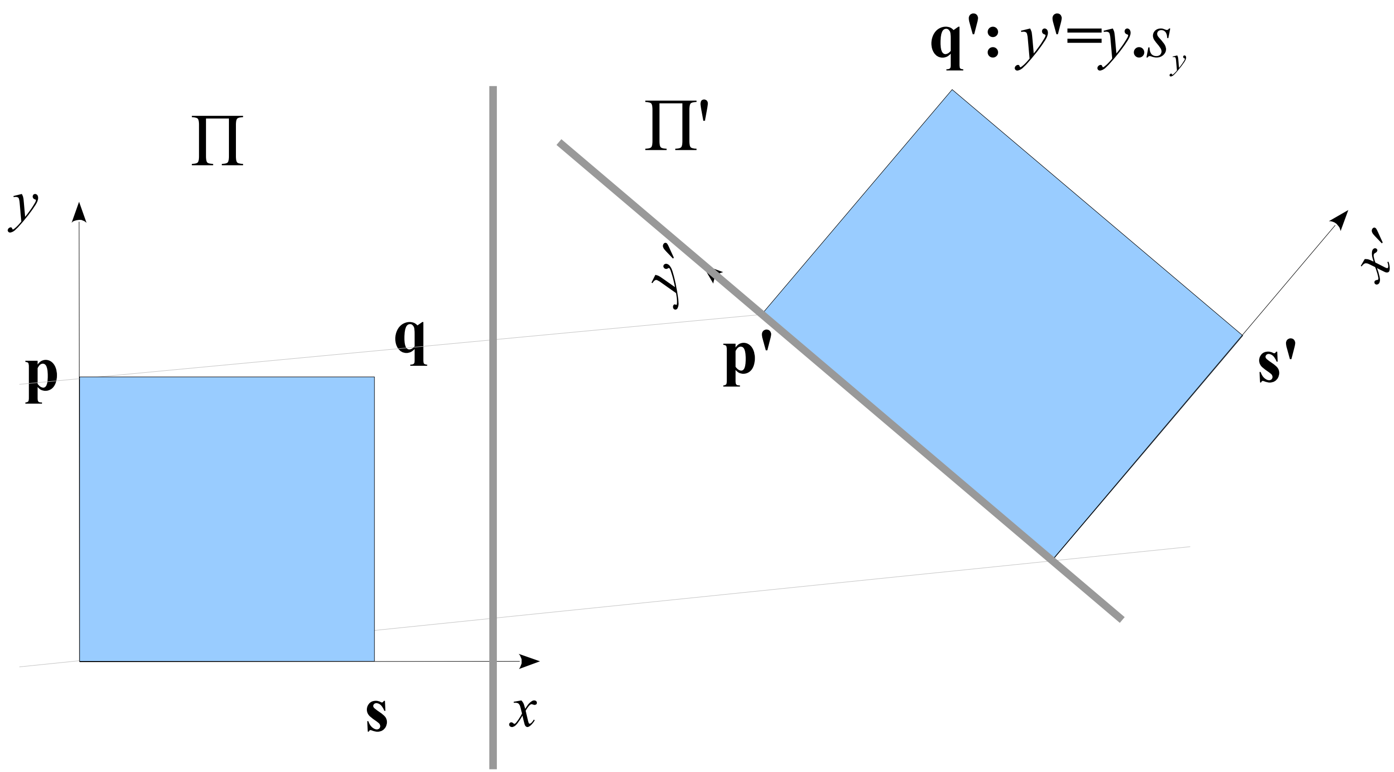
$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$



Transformações do Grupo Afim: Escala

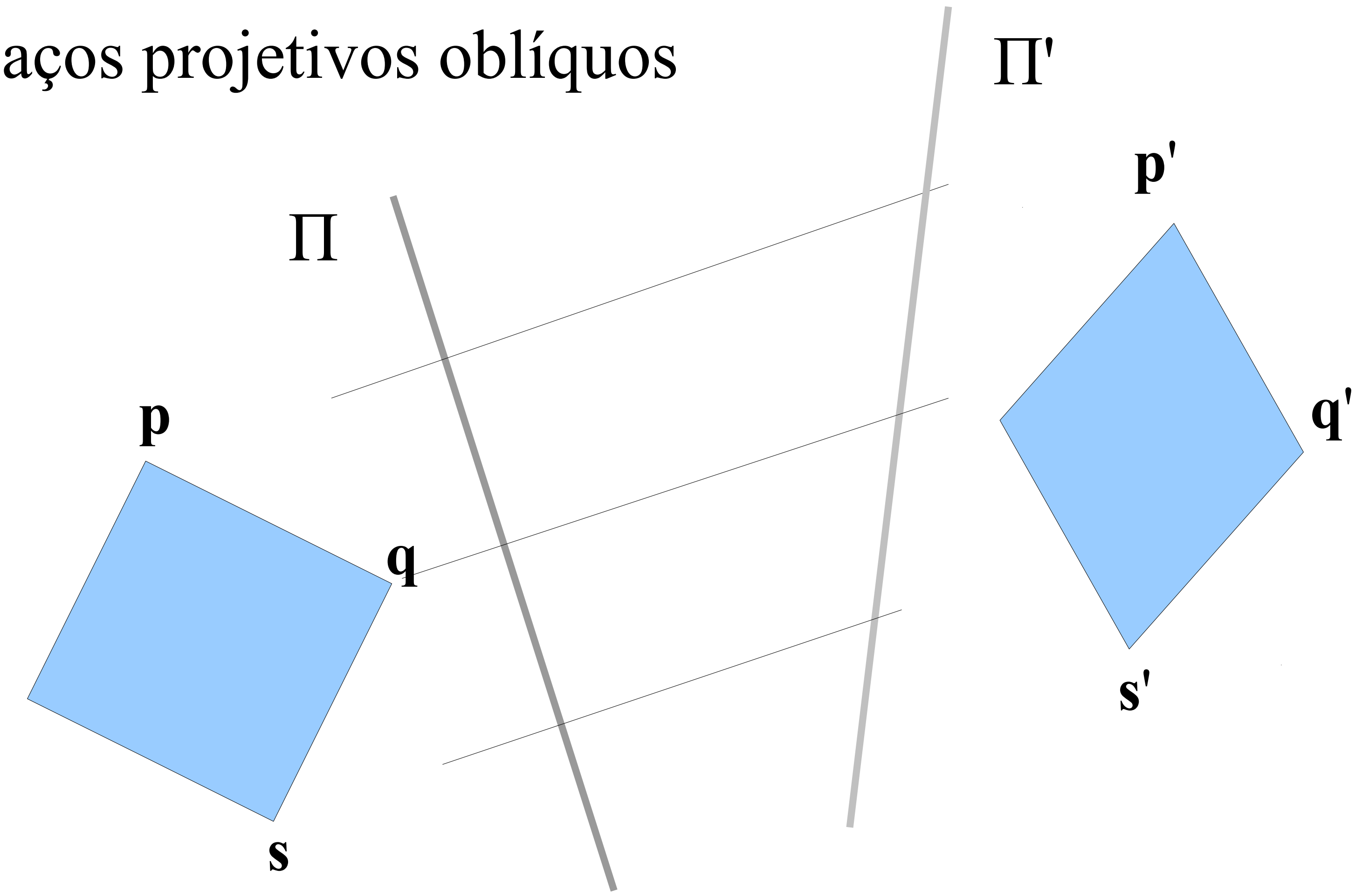
- Raios projetantes paralelos
- Espaços projetivos oblíquos

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$



Transformações do Grupo Afim: Cisalhamento

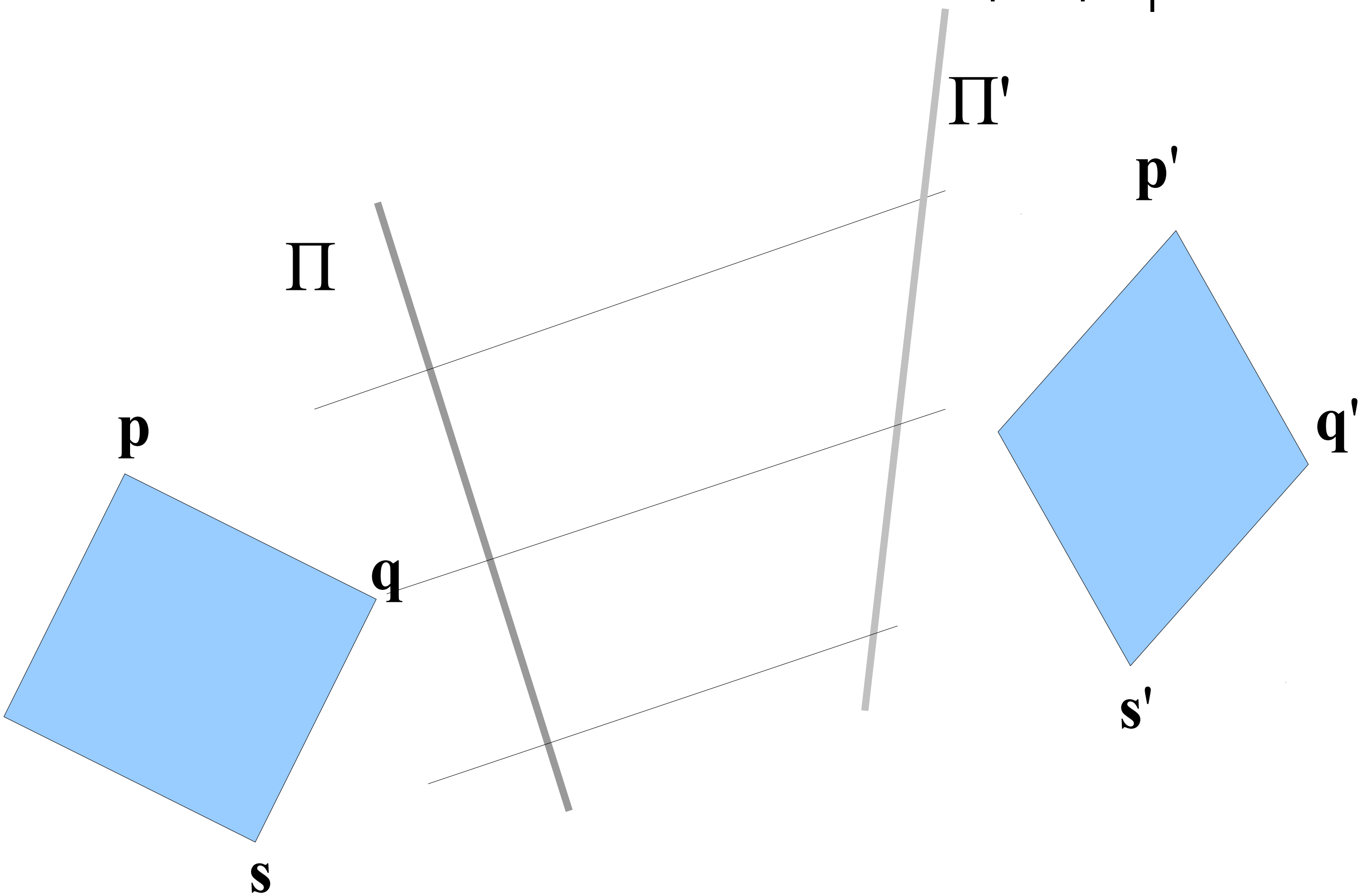
- Raios projetantes paralelos
- Espaços projetivos oblíquos



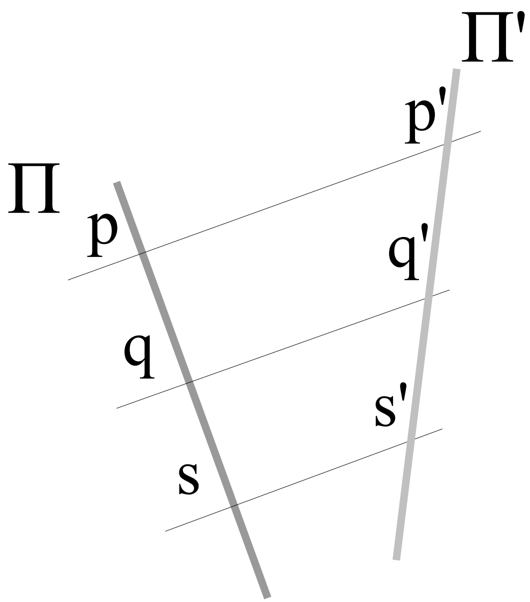
Geometria Afim

- Raios projetantes paralelos
- Espaços projetivos oblíquos

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \kappa_x & 0 \\ \kappa_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$



Geometria Afim



- Raios projetantes paralelos:
- Planos projetivos oblíquos
- Preserva retas:
  - Seja uma reta $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$
  - $\mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) = (1-t)\mathrm{T}(\mathbf{a}) + t.\mathrm{T}(\mathbf{b})$
- Preserva a combinação afim de pontos:
  - $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \Rightarrow \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\,\boldsymbol{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\boldsymbol{T}(p_i)$
- Preserva o paralelismo:
  - Sejam r e s duas retas paralelas | $\mathbf{b}-\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{d}-\mathbf{c})$
  - $\mathrm{T}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathrm{T}(\lambda(\mathbf{d}-\mathbf{c}))$, $\mathrm{T}(\mathbf{b})-\mathrm{T}(\mathbf{a}) = \lambda(\mathrm{T}(\mathbf{d})-(\mathrm{T}(\mathbf{c}))$

Teorema Fundamental da Geometria Afim

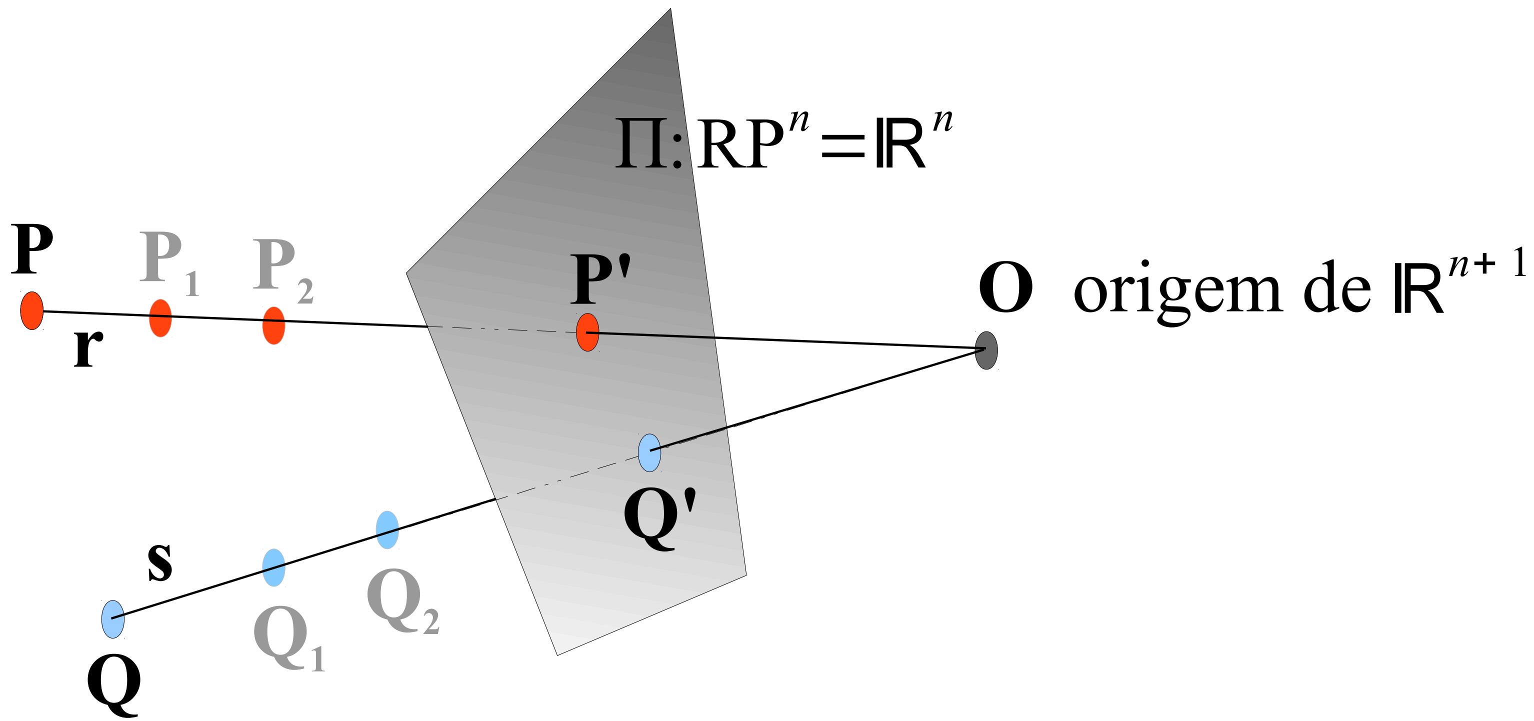
- Uma transformação Afim fica completamente determinada por seus valores numa base afim.

- Se $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ são bases afins existe uma única transformação afim L tal que $L(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ onde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Geometria Projetiva

Espaço Projetivo

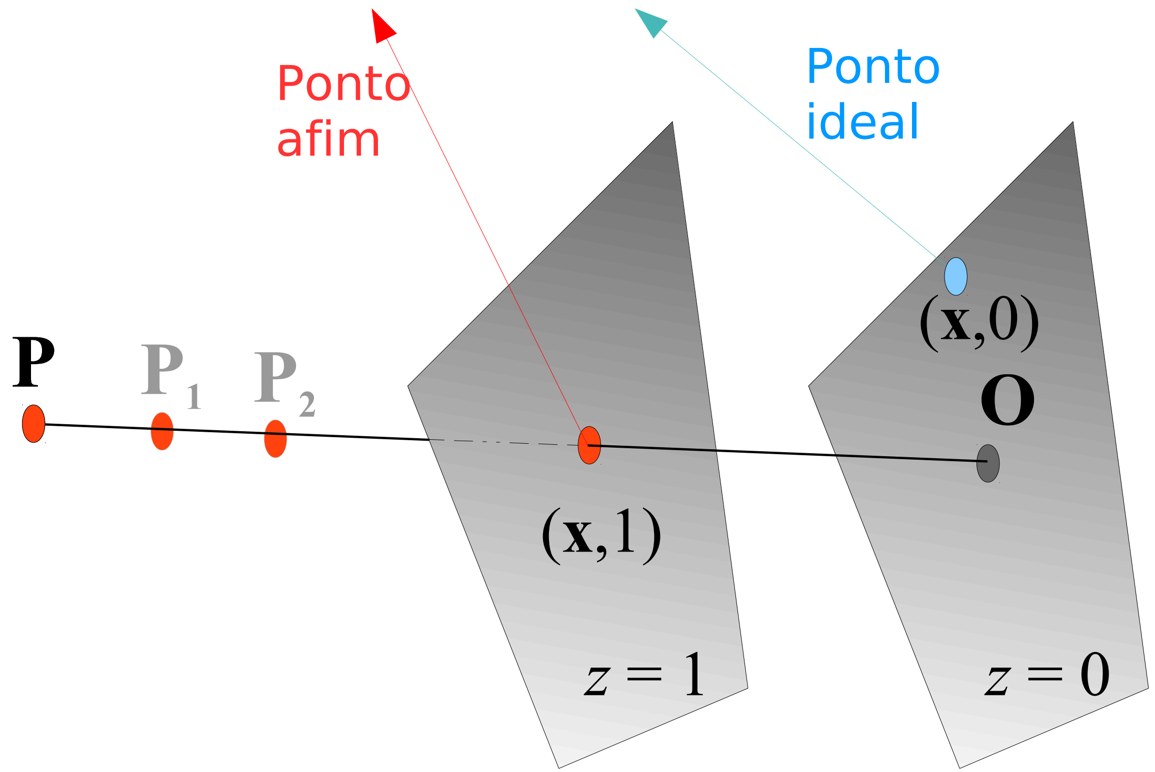
- Projeção cônica:
  - todos os feixes projetivos se cruzam no ponto **O**
- Formado pelo hiperplano Π onde $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbf{O} \notin \Pi$



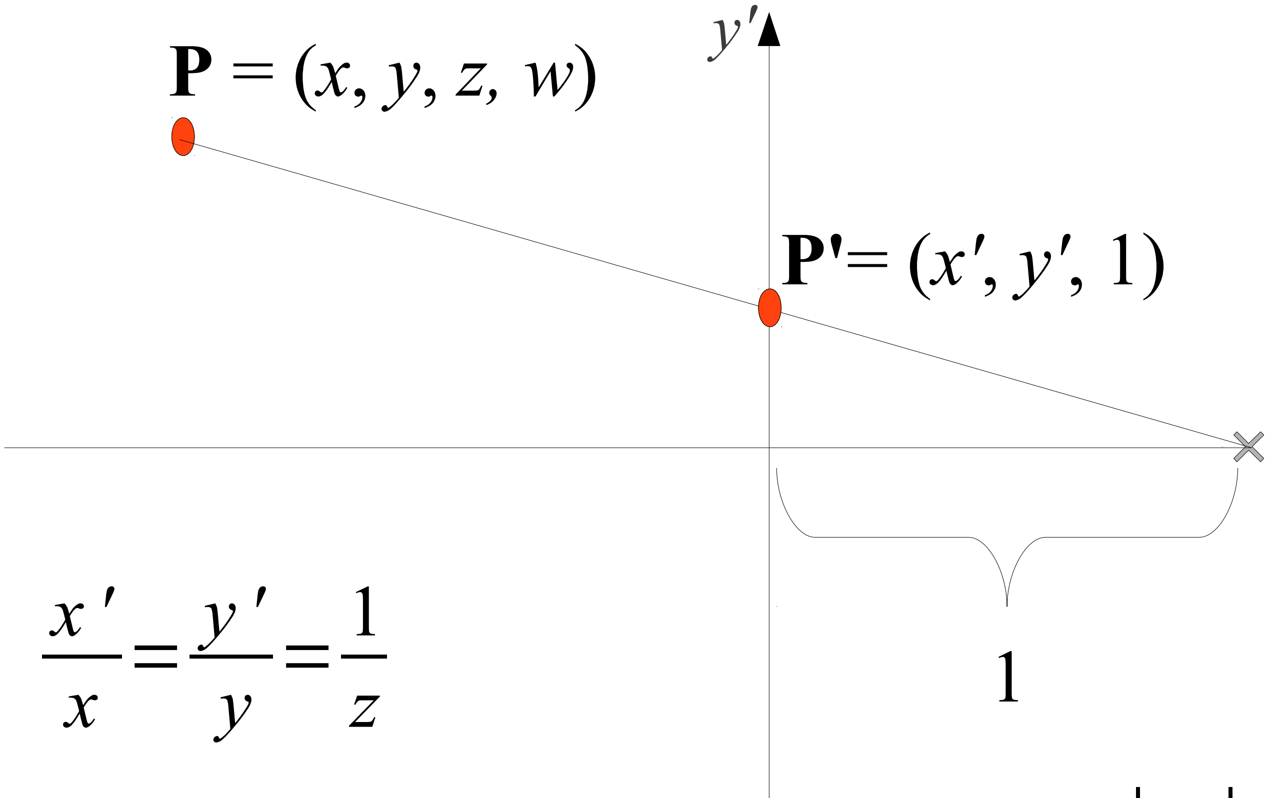
Espaço Projetivo: Representação dos Pontos

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) \in \mathrm{RP}^n \Leftrightarrow \left(\mathbf{x}, x_{n+1}\right) \in \mathrm{RP}^n$$

$$\mathrm{RP}^n = \left\{\left(\mathbf{x}, 1\right) \cup \left(\mathbf{x}, 0\right)\right\} \in \mathrm{RP}^n$$



Geometria Projetiva



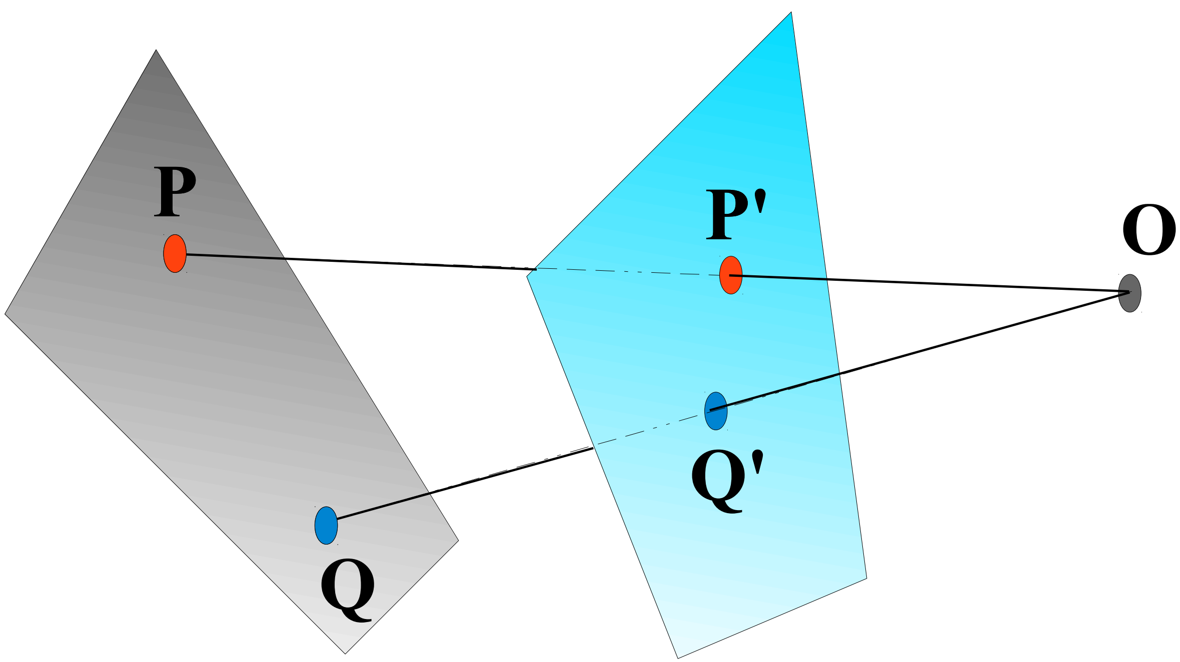
$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{1}{z}$$

$$\begin{vmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{vmatrix}$$

Transformações Projetivas

Transformação Projetiva Plana

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$



Análise da Transformação Projetiva Plana

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \qquad P = \begin{vmatrix} p_1 & p2 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} s \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva Plana

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & 0 \\ b & d & | & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva Plana

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & t_1 \\ 0 & 1 & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva Plana

$$M = \left| \begin{array}{cccc} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{array} \right|$$

$$A = \left| \begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right| \qquad T = \left| \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \end{array} \right|$$

$$P = \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right| \qquad S = \left| 1 \right|$$

$$M = \left| \begin{array}{cccc} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 \end{array} \right|$$

Análise da Transformação Projetiva Plana

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & s \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva Plana

$$M = \begin{vmatrix} a & c & | & t_1 \\ b & d & | & t_2 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & s \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

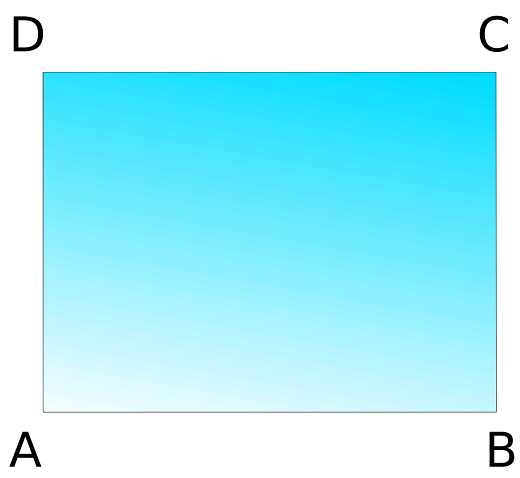
$$P = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

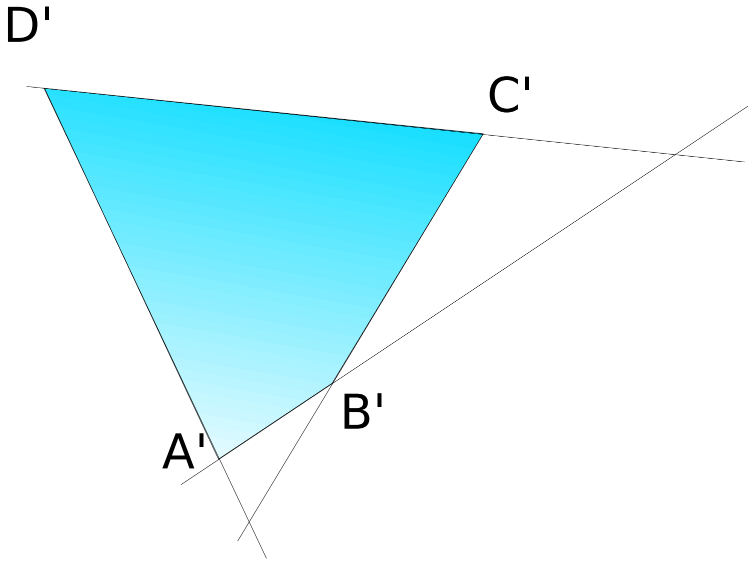
$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Análise da Transformação Projetiva Plana

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ x \cdot p_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/p_1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ y \cdot p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/p_2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x \cdot p_1 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{p_1} \qquad y \cdot p_2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{p_2}$$





Transformação Projetiva de um ponto Euclidiando

$$T(x, y, 1) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= (ax + by + c, dx + ey + f, gx + hy + i)$$

$$= \begin{vmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ gx + hy + i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{ax + by + c}{gx + hy + i} \\ \dfrac{dx + ey + f}{gx + hy + i} \\ 1 \end{vmatrix}$$

Cálculo dos parâmetros da transformação projetiva

Composição da Matriz dos Coeficientes

$$T(x,y,1)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ax+by+c \\ dx+ey+f \\ gx+hy+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{ax+by+c}{gx+hy+1} \\ \dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+1} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x_k' = x_k a + y_k b + c - x_k \, x_k' g - y_k \, x_k' h$$

$$y_k' = x_k d + y_k e + f - x_k \, y_k' g - y_k \, y_k' h$$

Composição da Matriz dos Coeficientes

$$x_k' = x_k a + y_k b + c + 0d + 0e + 0f - x_k x_k' g - y_k x_k' h$$

$$y_k' = 0a + 0b + 0c + x_k d + y_k e + f - x_k y_k' g - y_k y_k' h$$

$$\begin{vmatrix} x_k' \\ y_k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_k x_k' & -y_k x_k' \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 & -x_k y_k' & -y_k y_k' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{vmatrix}$$

Composição da Matriz dos Coeficientes

$$\begin{vmatrix} x_k' \\ y_k' \end{vmatrix} \quad \mathbf{L}$$

Observações

$$\begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_k\, x_k' & -y_k\, x_k' \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 & -x_k\, y_k' & -y_k\, y_k' \end{vmatrix} \quad A$$

Coeficientes

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{vmatrix} \quad \mathbf{x}$$

Parâmetros

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

Composição da Matriz dos Coeficientes

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

Observações $\mathbf{L}$

$$\begin{vmatrix} x_0' \\ y_0' \\ x_1' \\ y_1' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ y_{n-1}' \end{vmatrix}$$

Coeficientes A

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_0\ x_0' & -y_0\ x_0' \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & 1 & -x_0\ y_0' & -y_0\ y_0' \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1\ x_1' & -y_1\ x_1' \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1\ y_1' & -y_1\ y_1' \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_{n-1}\ x_{n-1}' & -y_{n-1}\ x_{n-1}' \\ 0 & 0 & 0 & x_{n-1} & y_{n-1} & 1 & -x_{n-1}\ y_{n-1}' & -y_{n-1}\ y_{n-1}' \end{vmatrix}$$

Método dos Mínimos Quadrados: ($k \geq 4$)

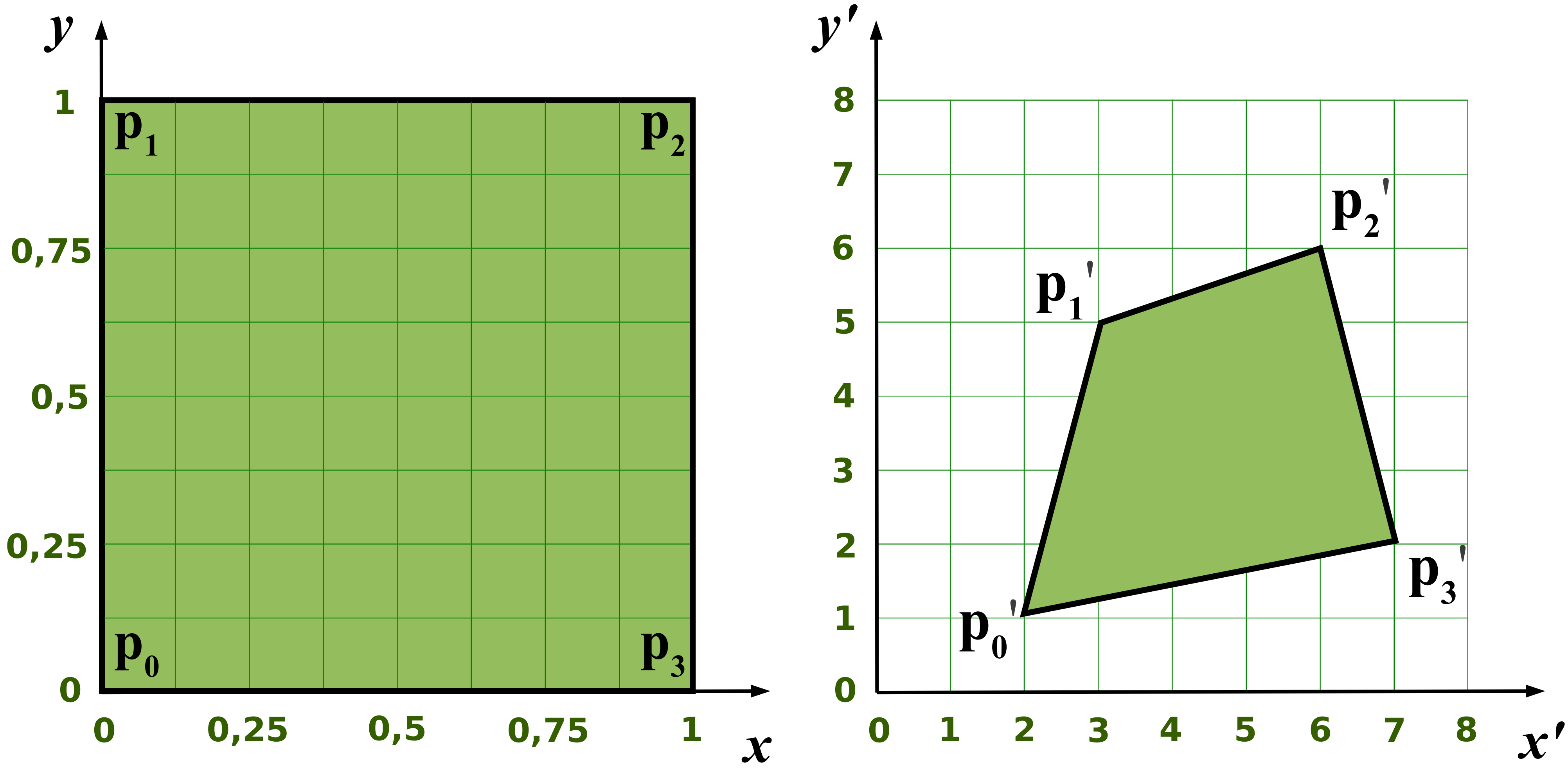
$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{L}$$

$$A^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = A^t \cdot \mathbf{L}$$

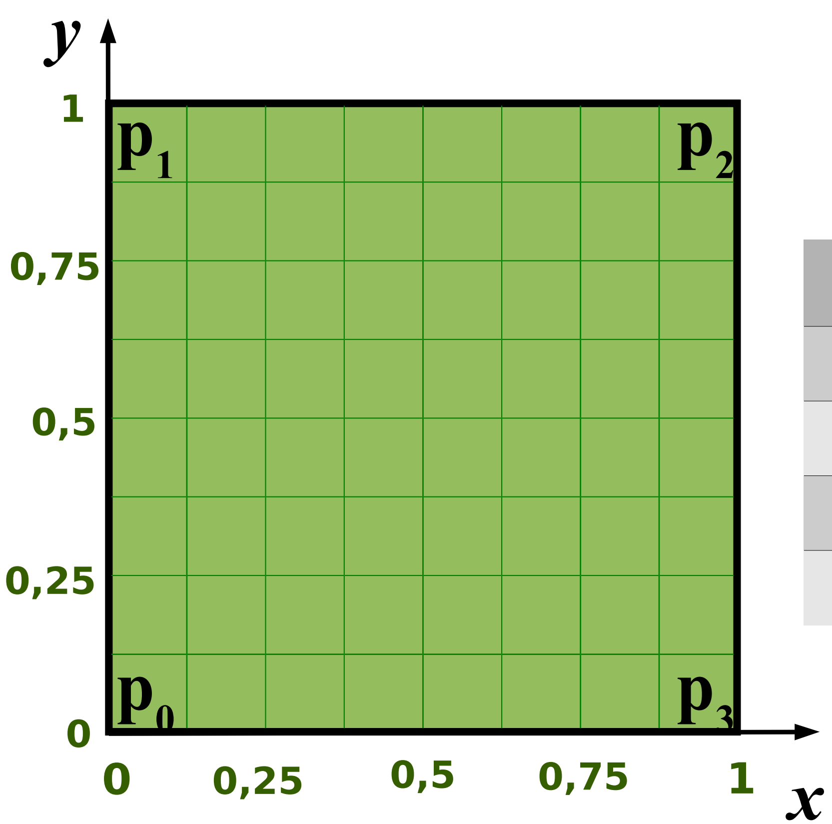
$$\left(A^t \cdot A \right)^{-1} A^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = \left(A^t \cdot A \right)^{-1} A^t \cdot \mathbf{L}$$

$$\mathbf{x} = \left(A^t \cdot A \right)^{-1} A^t \cdot \mathbf{L}$$

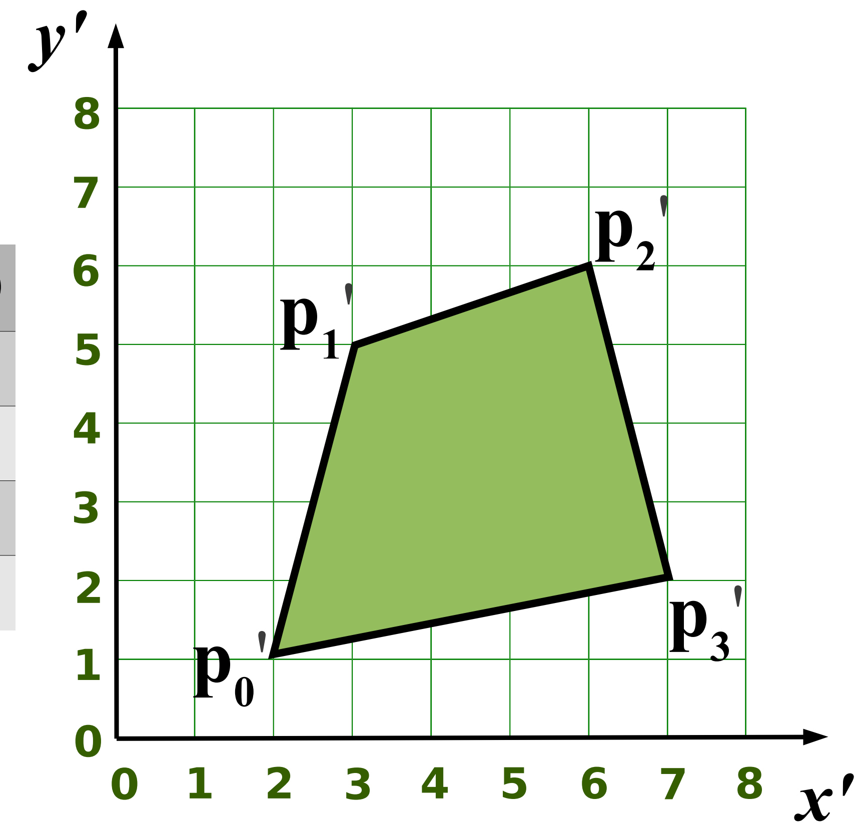
Exemplo: transformação entre dois quadriláteros



Exemplo: transformação entre dois quadriláteros



k	(x_k, y_k)	(x_k', y_k')
0	(0, 0)	(2,1)
1	(0, 1)	(3, 5)
2	(1, 1)	(6, 6)
3	(1, 0)	(7, 2)



Composição da Matriz dos Coeficientes

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

Observações $\mathbf{L}$

Coeficientes A

$$\begin{vmatrix} x_0' \\ y_0' \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2' \\ x_3' \\ y_3' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_0 x_0' & -y_0 x_0' \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & 1 & -x_0 y_0' & -y_0 y_0' \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 x_1' & -y_1 x_1' \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1 y_1' & -y_1 y_1' \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2 x_2' & -y_2 x_2' \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2 y_2' & -y_2 y_2' \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3 x_3' & -y_3 x_3' \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -x_3 y_3' & -y_3 y_3' \end{vmatrix}$$

Composição da Matriz dos Coeficientes

$$\mathbf{L} = A \cdot \mathbf{x}$$

k	(x_k, y_k)	(x_k', y_k')
0	(0, 0)	(2,1)
1	(0, 1)	(3, 5)
2	(1, 1)	(6, 6)
3	(1, 0)	(7, 2)

Observações

$$\mathbf{L}$$

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Coeficientes

$$A$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Resultado: Mínimos Quadrados

$$\mathbf{x} = \left(A^t \cdot A \right)^{-1} \cdot A^t \cdot \mathbf{L}$$

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} 3.92 & 2.84 & 2.0 & 0.69 & 7.07 & 1.0 & -0.15 & 0.61 \end{vmatrix}^t$$

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 3.92 & 2.84 & 2.0 \\ 0.69 & 7.07 & 1.0 \\ -0.15 & 0.61 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_k'' \\ y_k'' \\ z_k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.92 & 2.84 & 2.0 \\ 0.69 & 7.07 & 1.0 \\ -0.15 & 0.61 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_k'' \\ y_k'' \\ z_k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k''/z_k'' \\ y_k''/z_k'' \\ z_k''/z_k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k' \\ y_k' \\ 1 \end{vmatrix}$$

Dúvidas **?**