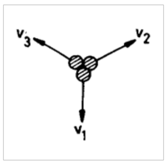
DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães
Prova 2 - Gabarito

1- Uma granada é lançada para cima e, quando alcança a sua máxima altitude, a granada explode em três pedaços de massas iguais (veja a figura). Observa-se que um dos pedaços cai verticalmente chegando ao chão em um instante t_1 após a explosão. Os outros dois pedaços chegam ao chão no instante t_2 após a explosão.
a) Determine a altura $h(t_1, t_2)$ na qual a explosão ocorreu. (1.5)
b) Determine o instante $t(t_1, t_2)$ após a explosão em que o centro de massa do sistema chega ao chão. (1.0)



Resposta - 1
a) Na máxima altitude, a velocidade da granada é nula e portanto o momento linear total do sistema é nulo neste instante. No momento da explosão portanto temos

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0. \tag{1}$$

A componente vertical (definida pelo eixo y) dessa equação vetorial fornece:

$$v_{1y} + v_{2y} + v_{3y} = 0. \tag{2}$$

Considerando o eixo y orientado para baixo e com origem no ponto da explosão, temos que quando a partícula 1 (que cai verticalmente) atinge o solo:

$$h = v_{1y}t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2. \tag{3}$$

As partículas 2 e 3 atingem o solo no mesmo instante t_2 e portanto, de forma análoga:

$$h = v_{2y}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2.$$
$$h = v_{3y}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2. \tag{4}$$

Somando essas duas últimas equações obtemos, devido a (2), que

$$2h = -v_{1y}t_2 + gt_2^2. \tag{5}$$

Eliminado v_{1y} desta equação por meio de (3), obtemos finalmente que

$$h = \frac{1}{2}gt_1t_2\frac{(t_1 + 2t_2)}{(t_2 + 2t_1)}. \tag{6}$$

b) O centro de massa está apenas sob a ação da gravidade. Tomando o instante inicial como o instante da explosão, onde sua velocidade é nula, o centro de massa chegará ao chão em um tempo t dado pela equação:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \tag{7}$$

Com h determinado na questão anterior obtemos portanto:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{t_1 t_2 \frac{(t_1 + 2t_2)}{(t_2 + 2t_1)}} \tag{8}$$

2- Duas partículas idênticas de massa m estão vinculadas a se mover sobre um círculo horizontal. As partículas estão conectadas por duas molas idênticas de constante elástica k como mostra a figura. Encontre os modos normais de vibração e interprete fisicamente o movimento descrito por cada modo. (2.5)

Resposta - 2

Usando coordenadas que descrevem o deslocamento ao longo do círculo, positivas no sentido horário, a energia potencial do sistema é a soma da energia elástica de cada mola:

$$U = \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 = k(x_1 - x_2)^2 \tag{9}$$

onde x_1 e x_2 são os deslocamentos das partículas 1 e 2 em relação as suas respectivas posições de equilíbrio. As forças agindo nas partícula 1 e 2 serão:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -2k(x_1 - x_2) \\ F_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -2k(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{10}$$

e portanto, pela segunda lei de Newton, as equações de movimento das duas massas são

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Os modos normais são combinações lineares de x_1 e x_2 que diagonalizam essas equações. Neste caso é imediato que os modos normais são obtidos pela soma e subtração dessas equações, de fato:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 0 \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 4k(x_1 - x_2) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

que são equações independentes definindo os modos normais $q_1 \equiv x_1 + x_2$ e $q_2 \equiv x_1 - x_2$. Pelas equações para q_1 e q_2 temos as soluções gerais:

$$\begin{aligned} q_1 &= At + B \\ q_2 &= C\cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \tag{13}$$

onde $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ e A, B, C e θ são constantes determinadas pelas condições iniciais.

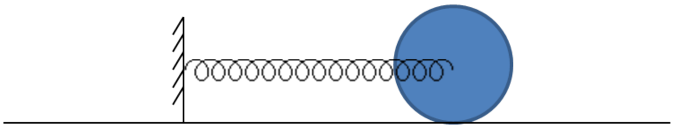
Fisicamente, o modo q_1 descreve uma rotação uniforme ($\dot{q}_1 = A = cte$) das duas massas em conjunto em torno do círculo. O modo q_2, por outro lado, descreve as duas massas se movendo em direções opostas (as duas massas oscilam em direções opostas se aproximando e se afastando).

3- Um cilindro maciço de raio R, massa M e densidade de massa uniforme está ligado a uma mola de constante elástica k. O cilindro é deslocado até uma posição tal que a mola se alonga por um comprimento x_0 com relação ao seu comprimento de equilíbrio, em seguida o cilindro é solto. Suponha que em seu movimento o cilindro rola sem deslizamento.

a) Mostre que o momento de inércia do cilindro com relação ao seu eixo de rotação é $I = \frac{1}{2}MR^2$. (0.5)

b) Calcule as energias cinéticas de rotação e de translação do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio. (1.0)

c) Mostre que o centro de massa do cilindro se move em um movimento harmônico simples. Qual é o período desse movimento? (1.0)



Resposta - 3

a) O eixo de rotação é o eixo paralelo a altura do cilindro. Se h é a altura do cilindro, o momento de inércia em relação ao eixo de rotação é:

$$I = \int dV\ \rho r^2 = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r^3 = \rho \frac{\pi h R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}, \tag{14}$$

onde foi usado que a densidade é constante: $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$.

b) Como não há deslizamento, a energia é conservada. Na posição de equilíbrio a energia potencial da mola é nula e a energia possui apenas as contribuições cinéticas de rotação e translação do centro de massa. No instante inicial, por outro lado, a energia é puramente elástica pois o cilindro está em repouso e a mola distendida de x_0. Igualando essas energias temos (com V a velocidade do centro de massa e ω a velocidade angular do cilindro):

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \tag{15}$$

Como não há deslizamento temos que $V = \omega R$ e portanto (com $I = \frac{MR^2}{2}$):

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{MV^2}{4} = \frac{3MV^2}{4} \Rightarrow MV^2 = \frac{2kx_0^2}{3}, \tag{16}$$

e podemos agora escrever as contribuições de rotação e translação:

$$\begin{aligned} E_{cin-trans} &= \frac{MV^2}{2} = \frac{kx_0^2}{3}, \\ E_{cin-rot} &= \frac{I\omega^2}{2} = \frac{MV^2}{4} = \frac{kx_0^2}{6}, \end{aligned} \tag{17}$$

c) As forças que agem no centro de massa do cilindro são a força elástica da mola e a força de atrito (o peso e a normal também agem mas se cancelam mutuamente). Em relação ao centro de massa, somente o atrito produz torque. As equações de movimento do cilindro são portanto:

$$\begin{aligned} M\dot{V} &= -kX - F_{at}, \\ I\dot{\omega} &= F_{at}R. \end{aligned} \tag{18}$$

Pela segunda equação, temos (lembrando que sem deslizamento $V = \omega R \Rightarrow \dot{V} = \dot{\omega} R$)

$$F_{at} = \frac{M\dot{V}}{2}. \tag{19}$$

Substituindo na primeira equação de movimento, temos

$$M\dot{V} = -\frac{2}{3}kX, \tag{20}$$

que é a equação de um oscilador harmônico com período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}}. \tag{21}$$

4- Em um planeta esfericamente simétrico, a aceleração da gravidade tem magnitude $g = g_0$ no polo norte e $g = \lambda g_0$ no equador (onde $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$) devido a contribuição da força centrífuga. Encontre a magnitude da aceleração da gravidade $g(\theta)$ em um ponto qualquer da superfície de colatitude θ. (2.5)

Resposta - 4
A força centrífuga agindo em uma partícula de massa m tem a forma

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \,, \tag{22}$$

onde $\vec{r}$ é a posição da partícula em relação ao centro do planeta e $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de rotação do planeta em torno do seu eixo.

Uma partícula em repouso na superfície do planeta, no referencial do planeta, estará sob a ação da força gravitacional e da força centrífuga. Portanto a aceleração da gravidade $\vec{g}$ percebida pela partícula será modificada. No Polo Norte porém, a força centrífuga se anula pois $\vec{\omega}$ é paralelo à $\vec{r}$ e segue que $\vec{g} = \vec{g}_0$.

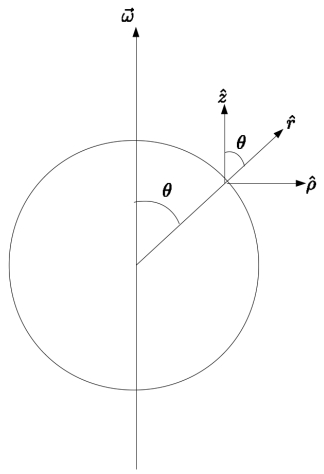
No caso geral, para um ponto arbitrário da superfície, temos:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \,. \tag{23}$$

e para um ponto qualquer na superfície de colatitude θ (veja a figura abaixo), a equação acima fica

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 r \sin\theta \hat{\rho}, \tag{24}$$

onde $\hat{\rho}$ é o unitário perpendicular ao eixo de rotação (conforme a figura)



No equador temos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\hat{\rho} = \hat{r}$, portanto

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 r \hat{r}, \tag{25}$$

de onde obtemos que (com $\vec{g} = -g\hat{r}$ e $\vec{g}_0 = -g_0\hat{r}$):

$$g = g_0 - \omega^2 r = \lambda g_0 \Rightarrow \omega^2 r = (1-\lambda) g_0. \tag{26}$$

Portanto, para um ponto qualquer na superfície de colatitude θ, temos

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + (1-\lambda) g_0 \sin\theta \hat{\rho}, \tag{27}$$

Note que $\vec{g}_0 = -g_0\hat{r}$, mas $\vec{g}$ não estará na direção $\hat{r}$ em geral. Tomando o quadrado da equação acima e notando, pela figura, que $\hat{r} \cdot \hat{\rho} = \sin\theta$, obtemos

$$g^2 = g_0^2 - 2(1-\lambda) g_0^2 \sin^2\theta + (1-\lambda)^2 g_0^2 \sin^2\theta = g_0^2 \left(\cos^2\theta + \lambda^2 \sin^2\theta\right), \tag{28}$$

e portanto:

$$g = g_0 \sqrt{\cos^2\theta + \lambda^2 \sin^2\theta}. \tag{29}$$