Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
Instituto de Matemática e Estatística.
Disciplina: Cálculo IV.
Código: 01-10828
Professor: Ditter Adolfo Yataco Tasayco.

TRABALHO: Parte 1

1) (a) Mostre que, se $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{2n+1} = L$, então $(a_n)_{n\geq 1}$ é convergente e $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = L$.

   (b) Se $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}$, encontre os oito primeiros mebros da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Então use a parte (a) para mostrar que $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = \sqrt{2}$.

   COMENTÁRIO: Isto dá a **expansão em frações contínuas**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\dots}}$$

2) (a) Suponha que $\sum_{n\geq 1} a_n$ e $\sum_{n\geq 1} b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum_{n\geq 1} b_n$ seja convergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

   então, $\sum_{n\geq 1} a_n$ é convergente

   (b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}e^n}$.

3) Mostre que a série é convergente. Quantos termos da série precisamos somar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada? Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ $(|\text{erro}| < 0,00005)$. (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{10^n n!}$ $(|\text{erro}| < 0,000005)$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n5^n}$ $(|\text{erro}| < 0,0001)$. (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}n}{e^n}$ $(|\text{erro}| < 0,01)$.

4) Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$. (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$. (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

5) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

(a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n 4^n x^n$.

(b) $\sum_{n\geq 0}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

(c) $\sum_{n\geq 1}\frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$.

(d) $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$.