DICC-IME-UERJ 1^a Lista de Grafos, Professor: Luerbio Faria , Data: **11/05/2015**

1. Dado um grafo $G = (V, E)$. O *grafo de linha* $L(G)$ de G é o grafo que satisfaz $V(L(G)) = E(G)$ e $e_1e_2 \in E(L(G))$, se e somente se $e_1 = uv$ e $e_2 = vw$, para alguma tripla de vértices u, v, w de V e $uv, vw \in E$.

   (a) Determine os grafos de linha de K_4, C_n, Q_3, Petersen (Figura 1a), P_n, S_n, W_n.

   (b) Dê o número de arestas no grafo de linha $L(G)$ em função dos graus dos vértices de G.

2. Um grafo G é *autocomplementar*, se G e seu complemento são isomorfos. Mostre que se G é autocomplementar, então $|V| = 4k$ ou $|V| = 4k + 1$ para algum k inteiro não negativo.

3. Mostre que dois caminhos máximos em um grafo conexo **SEMPRE** possuem pelo menos um vértice em comum.

4. Prove ou disprove que os seguintes pares de grafos são isomorfos:

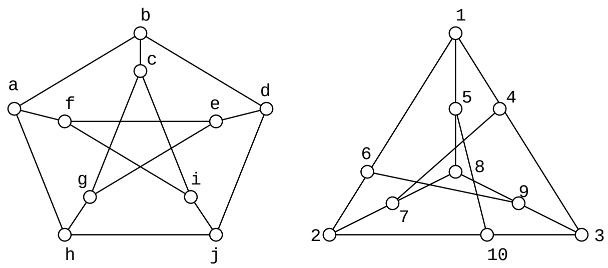

Figure 1:

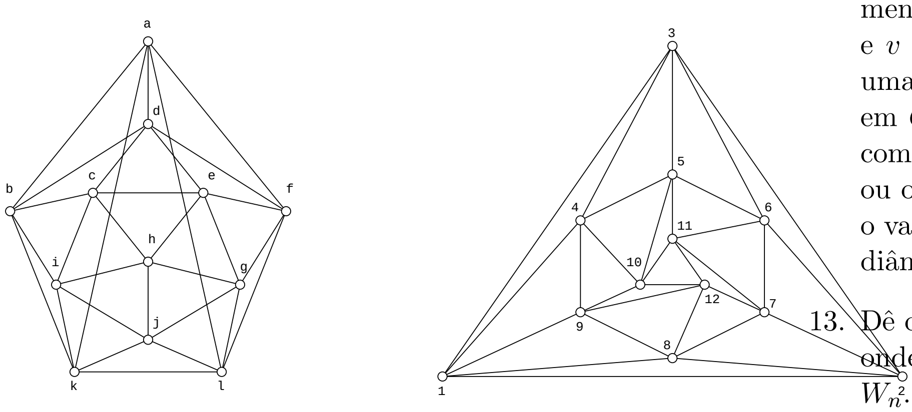

Figure 2:

5. V ou F, respectivamente, com justificativa e contra-exemplos:

   (a) G e seu complemento não podem ser ambos des-conexos.

   (b) Se G é um grafo bipartido d-regular e (X, Y) consiste em uma partição em conjuntos independentes para V, então $|X| = |Y|$.

   (c) substitua "grafo bipartido d-regular" por "grafo bipartido completo d-regular". Muda alguma coisa?

   (d) Se G é um grafo com $\delta \geq 4$, então existe um ciclo de comprimento maior ou igual a 5.

6. Prove o Teorema da Amizade: em qualquer festa com pelo menos seis pessoas, ou três se conhecem mutuamente, ou três não se conhecem mutuamente.

7. Suponha que G é um grafo sem vértices de grau zero e sem subgrafos induzidos contendo duas arestas. Prove que G é um grafo completo.

8. Desenhe todas as árvores não isomorfas com 7 vértices.

9. Mostre que se $T = (V, E)$ é uma árvore e $e \notin E$, então $T + e$ contém exatamente um ciclo.

10. Mostre que uma árvore com exatamente dois vértices de grau um é um caminho.

11. Prove ou refute: se G é um grafo contendo exatamente dois vértices de grau ímpar, então existe necessariamente um caminho ligando estes dois vértices em G.

12. Dado um grafo $G = (V, E)$, e um par $u, v \in V$ a *distância* $d(u, v)$ entre u e v é $+\infty$ se u e v pertencem a diferentes componentes conexas ou o comprimento (número de arestas) do menor caminho em G que liga u até v. Se u e v pertencem a mesma componente conexa, uma *geodésica* de u até v é um menor caminho em G que liga u até v. O *diâmetro* de G é o comprimento máximo de uma geodésica de G, ou o comprimento de sua maior geodésica, ou o valor $d = \max_{u,v \in V} d(u, v)$. Dê os valores do diâmetro de K_n, K_{n_1,n_2}, C_n, S_n, Q_n, P_n, e W_n.

13. Dê os valores de Δ, $|V|$, $|E|$, $ce(G)$, $cv(G)$ e δ, onde G é o grafo K_n, K_{n_1,n_2}, C_n, S_n, Q_n, P_n, e W_n.

14. Quais os possíveis diâmetros de uma árvore geradora de um grafo: K_n, Q_n.