Teoria dos Grafos

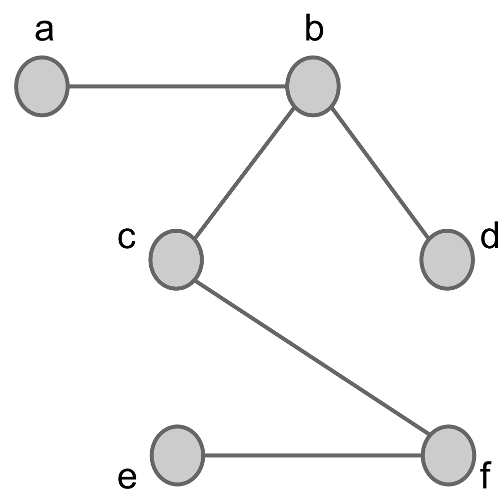
Árvores e Florestas

versão 1.5

Prof. DSc. Fabiano Oliveira
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

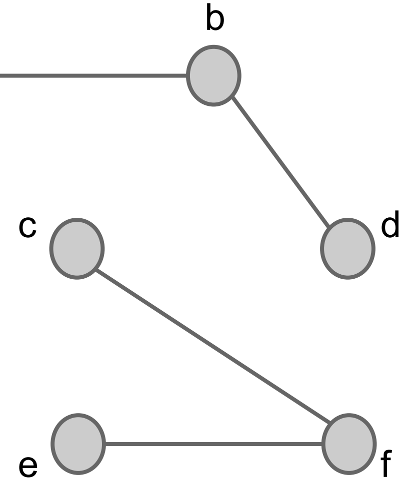
Árvores e Florestas

- **Def.:** Um grafo G é ***acíclico*** se G não possui ciclos.
  Def.: Um grafo T é uma ***árvore*** se T é conexo e acíclico.



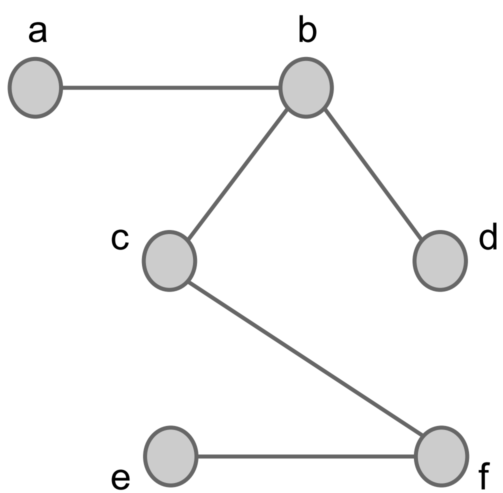
Árvores e Florestas

- **Def.:** Um grafo G é uma ***floresta*** se G é acíclico.



Árvores e Florestas

Teorema:
Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por um único caminho



a, f estão conectados pelo único caminho a,b,c,f

e, d estão conectados pelo único caminho e,f,c,b,d

Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

- "**Por contradição, assuma X**" é uma técnica de prova bastante poderosa e, por isso, bastante usada. Ela visa assumir X, o contrário que se pretende demonstrar, e a partir daí concluir um absurdo. Neste caso, o contrário de X tem que ser necessariamente verdade.

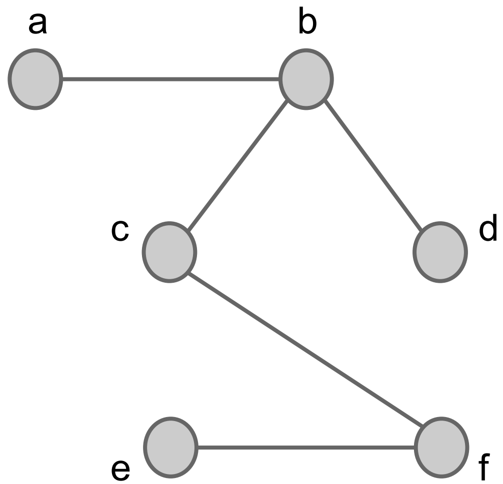
Árvores e Florestas

Prova:

- Por contradição, assuma que existam caminhos distintos P_1 e P_2 em uma árvore T conectando dois vértices.
- Seja uma aresta xy $\in P_1$ tal que xy $\notin P_2$.
- Seja T' = T - {xy}.
- Naturalmente, existe um caminho P entre x e y em T'.
- Logo, P acrescido de xy é um ciclo em T, o que é um absurdo pois T é uma árvore.

Árvores e Florestas

Teorema:
Em uma árvore, $m = n - 1$



$m = 5$

$n = 6$

Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

- "**Por indução em X**" é uma técnica de prova bastante poderosa e, por isso, bastante usada. Junto com a prova por contradição, elas "dominam" o universo das provas. Caso tenha dificuldades, revise o material de Matemática Discreta, onde Prova por Indução é formalmente apresentada.

Árvores e Florestas

Prova: (1 de 2)

- Seja T uma árvore.
- Por indução em n.
- **Base**: $n = 1 \Rightarrow m = 0$ (OK)
- **Hipótese de Indução (H.I.)**: Seja $n > 1$ e suponha que a proposição seja verdade para todas as árvores com menos que n vértices.

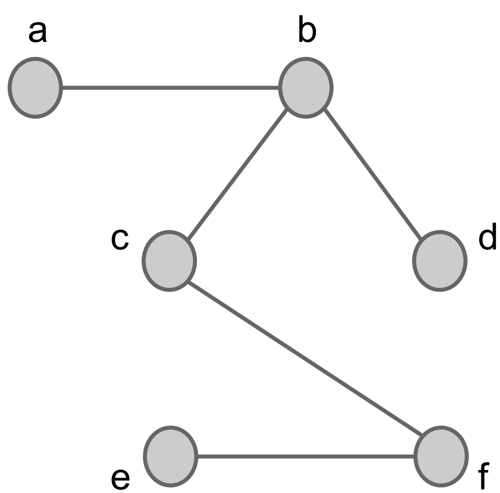
Árvores e Florestas

Prova (2 de 2):

- **Passo de indução**:
    - Seja $xy \in E(T)$.
    - Seja $T' = T - \{ xy \}$
    - Como o único caminho entre x e y é $P = x,y$ (Teorema anterior), então não há caminho entre x e y em T'.
    - Logo, T' é desconexo e sejam T_1 e T_2 os dois componentes conexos de T'.
    - Naturalmente, T_1 e T_2 são acíclicos e, portanto, árvores, e $|V(T_1)| < n$ e $|V(T_2)| < n$.
    - Por H.I., $|E(T_1)| = |V(T_1)| - 1$ e $|E(T_2)| = |V(T_2)| - 1$
    - Logo, $m = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = |V(T_1)| + |V(T_2)| - 1 =$
      $= n - 1$

Árvores e Florestas

Teorema:
Em uma árvore com $n \geq 2$, há pelo menos dois vértices de grau 1



$$d(a) = d(d) = d(e) = 1$$

Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

- É muito comum usarmos resultados anteriores já demonstrados para construir novos resultados. (Análogo ao processo de desenvolvimento de algoritmos, onde algoritmos novos são criados a partir dos previamente existentes.)

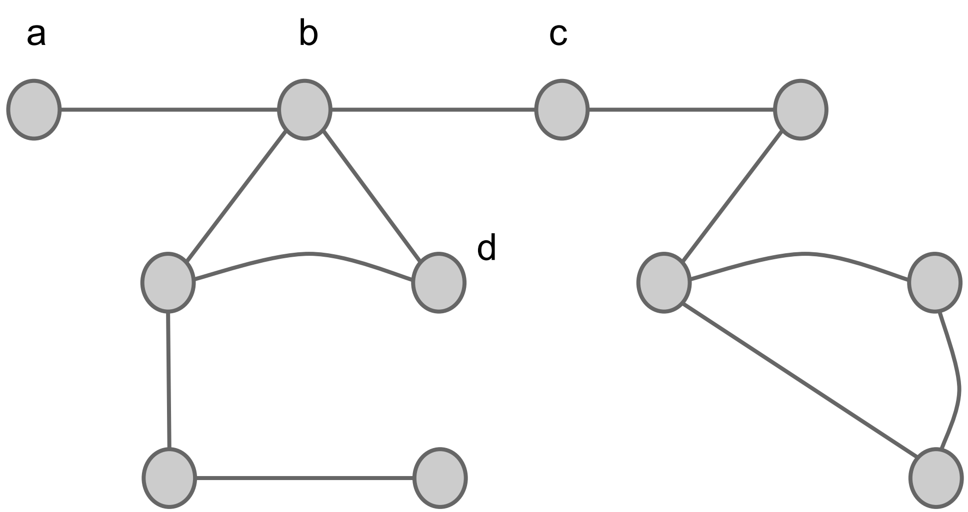
Árvores e Florestas

Prova:

- Seja T uma árvore.
- Em um grafo geral, $\sum \{ d(v) : v \in V(G) \} = 2m$.
- Para T, portanto, $\sum \{ d(v) : v \in V(G) \} = 2(n - 1)$.
- Por absurdo, suponha que exista $X \subset V(T)$, com $n - 1$ elementos todos possuindo grau maior que 1.
- Então: $\sum \{ d(v) : v \in V(T) \} =$
  $= \sum \{ d(v) : v \in X \} + d(y)$, onde y é o elemento em $V(T) - X$
  $\geq 2(n-1) + 1$, o que é absurdo com a conclusão anterior.

Árvores e Florestas

- **Def.:** Uma aresta e ∈ E(G) é uma ***ponte*** se ω(G) < ω(G - {e})

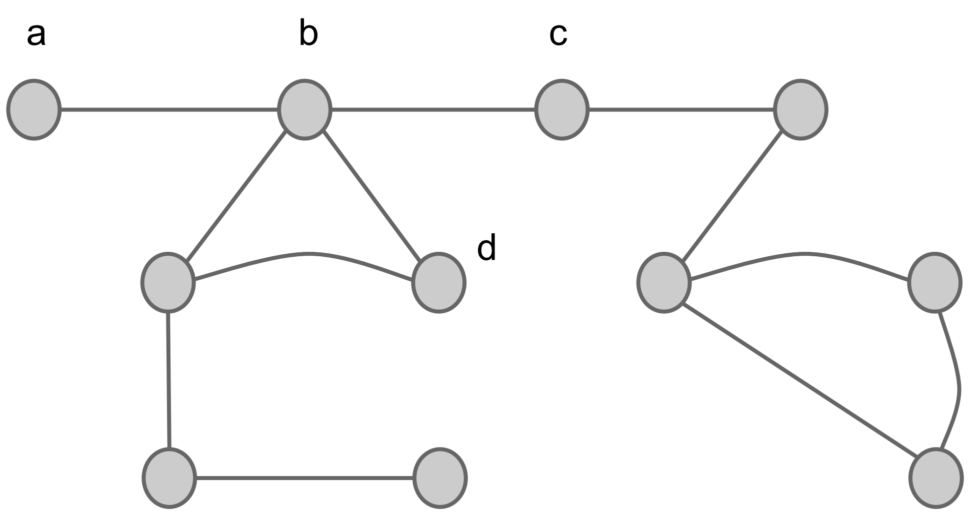


ab e bc são pontes

bd não é ponte

Árvores e Florestas

Teorema:
e ∈ E(G) é uma ponte ⇔ e não pertence a nenhum ciclo



De fato, ab e bc não pertencem a nenhum ciclo, já bd pertence a um ciclo

Árvores e Florestas

Prova (⇒) :

- Seja $e = xy \in E(G)$ uma ponte.
- Como xy é uma ponte, $\omega(G) < \omega(G - e)$.
- Logo, existe um único caminho que conecta x e y, que é a aresta xy.
- Por contradição, assuma que xy esteja num ciclo C.
- Seja P o caminho formado pela remoção de xy de C
- Logo, P é um caminho entre x e y em $G - \{xy\}$, um absurdo.

Árvores e Florestas

Prova ($\Leftarrow$) :

- Seja $xy \in E(G)$ tal que xy não pertence a nenhum ciclo.
- Seja P um caminho de x a y em G.
- Ou $P = x,y$, ou P é um caminho tal que $xy \notin P$.
- Se P é um caminho tal que $xy \notin P$, então P acrescido de xy é um ciclo, o que não é possível.
- Logo, o único caminho P de x a y possível é $P = x,y$
- Portanto, x e y estarão em componentes conexos distintos em $G - \{xy\}$, e estavam no mesmo componente conexo em G.
- Consequentemente, $\omega(G) < \omega(G - \{xy\})$ e concluimos que xy é uma ponte.

Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

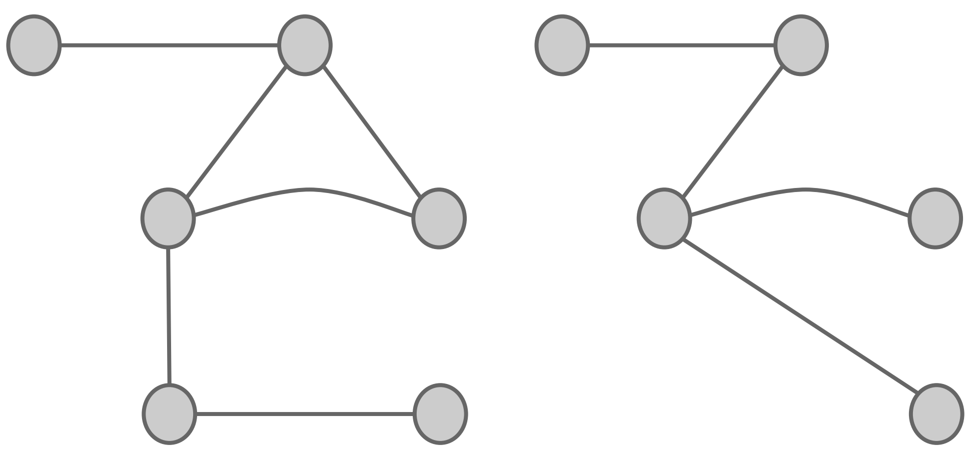
- Observe bem se há condições gerais, que valem tanto na ida quanto na volta. Exemplo:
  - **"Seja G um grafo com a propriedade P. G possui a propriedade X ⇔ G possui a propriedade Y"**.

    O universo sobre o qual a afirmação de equivalência foi feita é G possuindo a propriedade P.

    Logo, na "ida", mostramos que se G possui as propriedades P e X, então também possui Y. Na "volta", mostramos que se G possui as propriedades P e Y, então também possui X.

Árvores e Florestas

Teorema:
Se G é um grafo conexo, então G é uma árvore $\Leftrightarrow$ toda aresta de G é uma ponte



O grafo da esquerda possui arestas que não são pontes, logo não é uma árvore

Todas as arestas do grafo da direita são pontes, logo é uma árvore

Árvores e Florestas

Prova (⇒) :

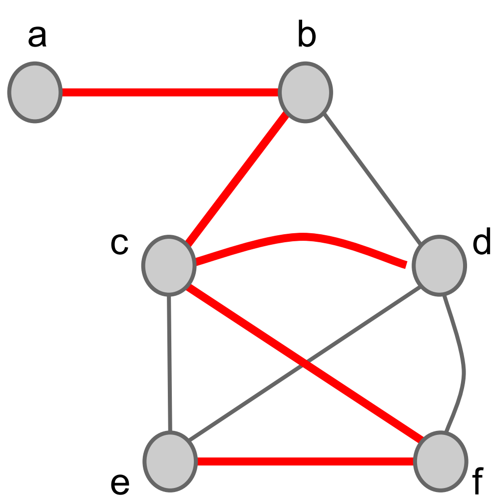
- Seja G uma árvore.
- Logo, G não tem ciclos.
- Portanto, não existe nenhuma aresta de G em um ciclo.
- Usando o Teorema anterior, toda aresta de G é uma ponte.

Prova (⇐) :

- Seja G um grafo conexo tal que toda aresta é uma ponte.
- Usando o Teorema anterior, então toda aresta está fora de ciclos.
- Logo, G não possui ciclos.
- Como G é conexo e acíclico, G é uma árvore.

Árvores e Florestas

- **Def.:** Uma ***árvore geradora*** de um grafo G é uma subgrafo gerador T de G tal que T é uma árvore



As arestas em vermelho do grafo ao lado induzem uma árvore geradora do grafo.

Árvores e Florestas

Teorema:
Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Exercício:
Mostre que se G é conexo, então $m \geq n - 1$.

Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Seja X um subgrafo minimal de G com respeito à operação O e propriedade P**", com o seguinte significado: A partir de G, use a operação O iteradas vezes, resultando a cada operação num subgrafo de G, sem que estes deixem de respeitar a propriedade P. Quando isto não for mais possível, o subgrafo resultante será dito minimal.

Árvores e Florestas

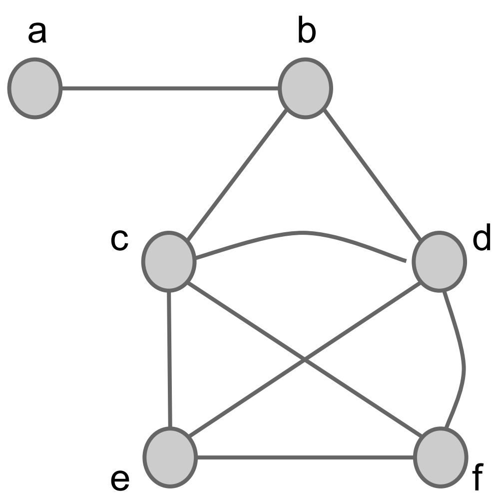
Prova:

- Seja G um grafo conexo.
- Seja T um subgrafo gerador conexo minimal. Vamos mostrar que T é uma árvore.
- Por absurdo, suponha que T possua um ciclo C.
- Seja $xy \in E(T)$ uma aresta de C.
- Note que todo caminho em T entre dois vértices que contenha xy, pode ser alterado para usar as outras arestas de C que não seja xy.
- Logo, $\omega(T) = \omega(T-\{xy\})$, o que é absurdo, pois T é subgrafo gerador conexo minimal.
- Portanto, T não tem ciclos. Como é conexo, T á árvore.

Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

- Analogamente, em relação a **maximal**. A diferença de minimal e maximal é que no primeiro a operação começa sendo aplicada ao grafo todo e vai removendo "partes" do grafo, enquanto o segundo começa do grafo vazio e vai acrescentando "partes".



G[V] é um grafo completo maximal em relação à adição de vértices em V para V = {a, b} e V = {b, c, d}. mas não é para V = {c, d, e}.

Árvores e Florestas

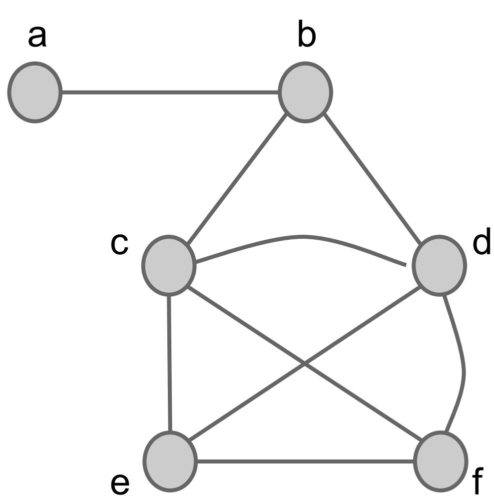
Linguagem das Provas:

- Note que muitos algoritmos surgem diretamente dos passos da prova. Isto é particularmente verdade para Algoritmos em Grafos, e é mais uma razão de ser conveniente conhecer a Teoria dos Grafos para melhor compreender os Algoritmos em Grafos

Exercício:
Descreva um algoritmo para se obter uma árvore geradora de um grafo conexo qualquer. (Suponha que esteja disponível para seu algoritmo uma função que testa se um grafo é conexo.)

Árvores e Florestas

- **Def.:** E ⊆ E(G) é um conjunto de ***arestas de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - E)$



Exemplos de arestas de corte:

{ab}, {bc, bd},
{ce, cd, bd, cf}

Exemplos que não o são:

{bc}, {bc, de, df}

Árvores e Florestas

- **Def.:** $E \subseteq E(G)$ é um conjunto de ***arestas de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - E)$

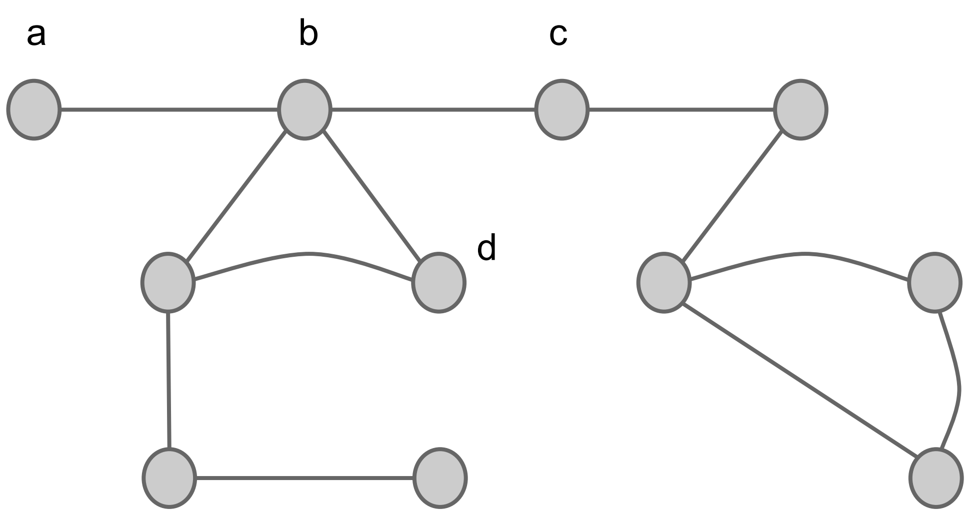
Exercícios:

Qual o tamanho de um conjunto de arestas de corte mínimo de um C_n?

Qual o tamanho de um conjunto de arestas de corte mínimo de um K_n?

Árvores e Florestas

- **Def.:** Um vértice v $\in$ V(G) é uma ***articulação*** se $\omega(G) < \omega(G - \{v\})$

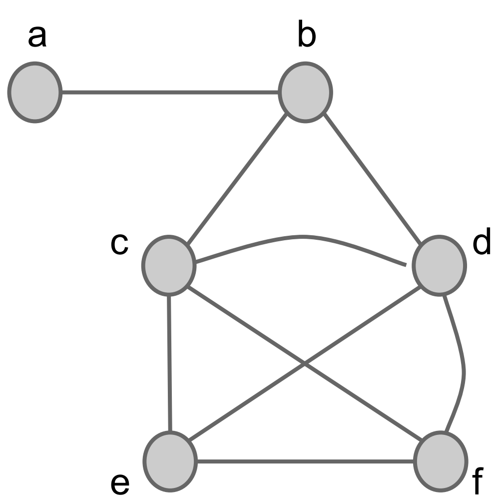


b, c são articulações

a, d não o são

Árvores e Florestas

- **Def.:** $V \subseteq V(G)$ é um conjunto de ***vértices de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - V)$



Exemplos de vértices de corte:

{b}, {c, d}

Exemplos que não o são:

{a}, {c, f}

Árvores e Florestas

- **Def.:** V $\subseteq$ V(G) é um conjunto de ***vértices de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - V)$

Exercícios:

Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um C_n?

Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um K_n?

Exercícios

Árvores e Florestas

1. Quantas árvores geradoras possuem os seguintes grafos:
   a. Um grafo conexo e acíclico
   b. Um grafo acíclico
   c. Um C_n
2. Mostre que se entre quaisquer dois vértices de um grafo G só existe um caminho, e G não possui laços, então G é uma árvore.
3. Mostre que uma árvore que possui exatamente dois vértices de grau 1 é, em particular, um caminho.
4. Mostre que se T é uma árvore geradora de G e $xy \in E(G)$ mas $xy \notin E(T)$, então T acrescido da aresta xy possui um único ciclo.
5. Qual o tamanho de um conjunto de arestas de corte minimal máximo de um C_n? e de um K_n?
6. Qual o tamanho de um conjunto de vértices de corte minimal máximo de um C_n?
7. Seja G um grafo tal que $n \geq 3$. Mostre que:
   a. se G tem uma ponte, então G tem uma articulação
   b. se G tem uma articulação, não necessariamente G tem uma ponte