# Instituto de Matemática

## Gabarito da $1^a$ Lista de Teoria da Computação

Professora: Maria Alice Silveira de Brito

Data: **14/10/2010**

1. Considere as seguintes linguagens regulares definidas a seguir sobre o alfabeto S = 0,1 e para cada uma delas:
   (a) Enumere os seus primeiros elementos - linguagens dos itens K a V.
   (b) Apresente uma gramática regular que a gere.
   (c) Apresente um autômato finito determinístico que a reconheça.
   (d) Apresente uma expressão regular que a denote.

(a) $L_A = \{\varepsilon\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_1\})$

ii. $S \rightarrow \varepsilon$

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_2$ |

iv. $e = \varepsilon$

(b) $L_B = \{0\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_2\})$

ii. $S \rightarrow 0$

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_3$ |

iv. $e = 0$

(c) $L_C = \{1\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_2\})$

ii. $S \rightarrow 1$

iii.

| $\delta$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_3$ |

iv. $e = 1$

(d) $L_D = \{00\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_3\})$

ii. $S \rightarrow 0R$
$R \rightarrow 0$

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_4$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_4$ | $q_4$ |

iv. $e = 00$

(e) $L_E = \{11\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_3\})$

ii. $S \rightarrow 1R$
$R \rightarrow 1$

iii.

| $\delta$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_4$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_4$ | $q_4$ |

iv. $e = 11$

(f) $L_F = \{000\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_4\})$

ii. $S \rightarrow 0R$,
$R \rightarrow 0Q$,
$Q \rightarrow 0$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_5$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_5$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_5$ |
| $q_5$ | $q_5$ | $q_5$ |

iv. $e = 000$

(g) $L_G = \{00, 0000, 000000, \ldots\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_3\})$

ii. $S \rightarrow 0R$,
$R \rightarrow 0S|0$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_4$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_3$ | $q_2$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_4$ | $q_4$ |

iv. $e = 00(00)^*$

(h) $L_H = \{\varepsilon, 00, 0000, 000000, \ldots\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_1\})$

ii. $S \rightarrow 0R|\varepsilon$,
$R \rightarrow 0S$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_2$ | $q_1$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_3$ |

iv. $e = (00)^*$

(i) $L_I = \{111, 111111, 111111111, \ldots\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_4\})$

ii. $S \rightarrow 1R$,
$R \rightarrow 1T$,
$T \rightarrow 1S|1$ .

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_5$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_5$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_5$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_2$ |
| $q_5$ | $q_5$ | $q_5$ |

iv. $e = 111(111)^*$

(j) $L_J = \{\varepsilon, 111, 111111, 111111111, \ldots\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_1\})$

ii. $S \to 1R|\varepsilon$,
$R \to 1T$,
$T \to 1S$ .

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_4$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_4$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_1$ |
| $q_4$ | $q_4$ | $q_4$ |

iv. $e = (111)^*$

(k) $L_K = \{w \in \Sigma^*\colon\ |w| = 2q \geq 0, q \in \mathbb{Z}\}$

i. $M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_1\})$

ii. $S \to 0R|1R|\varepsilon$,
$R \to 0S|1S$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_1$ | $q_1$ |

iv. $e = ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$

(l) $L_L = \{w \in \Sigma^*\colon\ |w| = 2q \geq 2, q \in \mathbb{Z}\}$

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_3\})$

ii. $S \to 0R|1R$,
$R \to 0|1|0S|1S$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_2$ | $q_2$ |

iv. $e = (0 \cup 1)(0 \cup 1)\ ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$

(m)

(n) $L_N = \{w \in \Sigma^*\colon\ |w| = 2q, q \in \mathbb{Z}$ e $w$ começa com 00$\}$

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_3\})$

ii. $S \to 0R$,
$R \to 0T$,
$T \to 0M|1M|\varepsilon$,
$M \to 0T|1T$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_5$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_5$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_3$ | $q_3$ |

iv. $e = 00\,((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$

(o) $L_O = \{w \in \Sigma^*\colon\ |w| = 3q, q \in \mathbb{Z}$ e $w$ termina com 11$\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_5\})$

ii. $S \to 0R|1R$,
$R \to 0T|1Q$,
$T \to 0S|1S$,
$Q \to 0S|1S|1$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_3$ | $q_1$ | $q_1$ |
| $q_4$ | $q_1$ | $q_5$ |
| $q_5$ | $q_2$ | $q_2$ |

iv. $e = ((0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1))^*\ (0 \cup 1)11$

(p) $L_P = \{w \in \Sigma^*\colon\ |w| = 3q, q \in \mathbb{Z}$ e $w$ começa com 000$\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_4\})$

ii. $S \to 0R$,
$R \to 0Q$,
$Q \to 0T$,
$T \to 0U|1U|\varepsilon$,
$U \to 0X|1X$,
$X \to 0T|1T$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_7$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_7$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_7$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_5$ |
| $q_5$ | $q_6$ | $q_6$ |
| $q_6$ | $q_4$ | $q_4$ |

iv. $e = 000\,((0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$

(q) $L_Q = \{w \in \Sigma^*\colon\ w$ não possui nem zeros nem uns isolados $\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_1, q_3, q_5\})$

ii. $S \to 0R|1Q|\varepsilon$,
$R \to 0T$,
$Q \to 1U$,
$T \to 0T|1Q|\varepsilon$,
$U \to 1U|0R|\varepsilon$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_4$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_6$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_6$ | $q_5$ |
| $q_5$ | $q_2$ | $q_5$ |
| $q_6$ | $q_6$ | $q_6$ |

iv. $e = (((00)0^*) \cup ((11)1^*))^*$

(r) $L_R = \{w \in \Sigma^*\colon\ w$ possui o símbolo inicial e final distintos $\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_3, q_5\})$

ii. $S \to 0R|1Q$,
$R \to 0R|1R|1$,
$Q \to 0Q|1Q|0$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_4$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_4$ |
| $q_5$ | $q_5$ | $q_4$ |

iv. $e = (1(0 \cup 1)^*0) \cup (0(0 \cup 1)^*1)$

(s) $L_S = \{w \in \Sigma^*$: $w$ começa com um número par de zeros e termina com um número ímpar de uns $\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_2\})$

ii. $S \to 0Z|1U$,
$Z \to 0S$,
$U \to 0R|1T|\varepsilon$,
$T \to 1U|0R$,
$R \to 1U|0R$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_2$ |
| $q_4$ | $q_3$ | $q_2$ |

iv. $e = (00)^*(0 \cup 1)^*(11)^*1$

(t) $L_T = \{w \in \Sigma^*$: $w$ possui exatamente 3 uns $\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_4\})$

ii. $S \to 0S|1R$,
$R \to 0R|1Q$,
$Q \to 0Q|1F$,
$F \to 0F|\varepsilon$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_4$ | $q_5$ |
| $q_5$ | $q_5$ | $q_5$ |

iv. $e = 0^*10^*10^*10^*$

(u) $L_U = \{w \in \Sigma^*$: $w$ possui exatamente 3 uns não consecutivos $\}$.

i. $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_6\})$

ii. $S \to 0S|1R$,
$R \to 0Q$,
$Q \to 0Q|1T$,
$T \to 0M$,
$M \to 0M|1N$,
$N \to 0N|\varepsilon$.

iii.

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_7$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_7$ | $q_5$ |
| $q_5$ | $q_5$ | $q_6$ |
| $q_6$ | $q_6$ | $q_7$ |
| $q_7$ | $q_7$ | $q_7$ |

iv. $e = 0^*100^*100^*10^*$

(v) $L_V = \{w \in \Sigma^*$: $w$ possui blocos de tamanho 5, cada com pelo menos 2 zeros $\}$.

2. Essa gramática $G = (N, S, P, S)$, abaixo, define as propriedades de um conjunto bem familiar seu, tente descobrir qual é esse conjunto, gerando cadeias por árvores de derivação, ou, por intuição.
$S \to V| - V$,
$V \to P|ED$,
$D \to AD|P$,
$E \to 1|2|3|4|5|6|7|8|9$,
$A \to 1|2|3|4|5|6|7|8|9|0$,
$P \to 0|2|4|6|8$.

Resposta: Os números inteiros pares.

3. Enumere os elementos das seguintes linguagens e apresente a gramática correspondente a cada uma:

(a) $L_A = \{a^i b^j : 1 \leq i \leq j \leq 2.i\}$,
Resposta:
$S \to aR$,
$R \to Qb|Sb|b$,
$Q \to Sb|b$.

(b) $L_B = \{a^i b^i c^{2j} : i, j \geq 1\}$,
Resposta:
$S \to aAbCcc$,
$A \to aAb|\varepsilon$,
$C \to Ccc|\varepsilon$.

(c) $L_C = \{w : |w| > 0$ e o número de a's é igual ao número de b's $\}$.
Resposta:
$S \to ARB$
$R \to ARB|\varepsilon$,
$AB \to BA$,
$A \to a$,
$B \to b$.

4. Talvez o exemplo mais famoso de ambigüidade em linguagem de programação seja representado pelo comando `if b then if b then a else a`, no qual o `else` pode estar associado tanto ao primeiro `if` quanto ao segundo. A seguinte gramática reflete esta ambigüidade. $G_1 = (\{S\}$, `if, then, else, a, b` , $P_1, S)$, em que
$P_1 = \{S \to$`if b then` $S$ `else` $S|$ `if b then` $S|a\}$.

(a) Mostre que $G_1$ é ambígua. Esta ambigüidade pode ser tratada se, arbitrariamente, estabelecermos que, para o comando em questão, o `else` deva estar associado ao último `then`. A seguinte gramática reflete esta consideração.
$G_2 = (\{S_1, S_2\}, \texttt{if}, \texttt{then}, \texttt{else}, \texttt{a}, \texttt{b}, P_2, S_1)$, em que,
$P_2 = \{S_1 \to$ `if b then` $S_1|$ `if b then` $S_2$ `else` $S_1|a$, $S_2 \to$`if b then` $S_2$ `else` $S_2|a\}$.

(b) Apresente a árvore de derivação de $G_2$ cujo resultado seja `if b then if b then a else a`

5. Enumere os elementos da linguagem e construa o AFND $M$ que reconheça $L(M) = \{xyz | x, z \in \{a, b\}^*$ e $(y = aaa$ ou $y = bb)\}$.

   Resposta:

   Obtemos o AFND a partir do seguinte AFD $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_4, q_6\})$

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_5$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_5$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ |
| $q_4$ | $q_4$ | $q_5$ |
| $q_5$ | $q_2$ | $q_6$ |
| $q_6$ | $q_2$ | $q_6$ |

6. Apresente um AFD que reconheça a linguagem gerada pela gramática $G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$, em que P é o seguinte conjunto:

   $S \rightarrow 0A | 1B$,
   $A \rightarrow 1S | \varepsilon$,
   $B \rightarrow 0S | \varepsilon$.

   Resposta:

   $M = (\{S, A, B, F\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{A, B\})$

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $S$ | $A$ | $B$ |
| $A$ | $F$ | $S$ |
| $B$ | $S$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

7. Apresente uma gramática regular que gere a linguagem reconhecida pelo AFD $M = (\{A, B, C, D\}, \{0, 1\}, \delta, A, \{C\})$, em que $\delta$ é definido por:

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $A$ |
| $B$ | $C$ | $D$ |
| $C$ | $A$ | $B$ |
| $D$ | $C$ | $B$ |

   Resposta: $G = (\{A, B, C, D\}, \Sigma = \{0, 1\}, P, A)$, onde $P$ é definido por:

   $P = \{$
   $A \rightarrow 0B | 1A$,
   $B \rightarrow 0C | 1D$,
   $C \rightarrow 0A | 1B | \varepsilon$,
   $D \rightarrow 0C | 1B\}$.

8. Apresente uma expressão regular que represente a linguagem:

   $L = \{a^{2i} b^{2j+1} c^{3k+3} : i, j, k \geq 0\}$,

   Resposta: $e = (aa)^* b(bb)^* ccc(ccc)^*$.

9. Apresente o AFD que reconhece cada uma das seguintes expressões regulares:

   (a) $0 \cup (01)^* 00 \cup 1^* 0$

   $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_2, q_5\})$

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_4$ |
| $q_2$ | $q_5$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_2$ | $q_6$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_4$ |
| $q_5$ | $q_6$ | $q_6$ |
| $q_6$ | $q_6$ | $q_6$ |

   (b) $(10 \cup 100)^* 10$

   $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_3, q_4\})$

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_5$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_5$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_2$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_2$ |
| $q_5$ | $q_5$ | $q_5$ |