①

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - IME - Depto. de Análise

PRIMEIRA PROVA DE CÁLCULO 4 - (turma 01)

Prof. Rogerio Oliveira Data: 26/11/14

Questão 1 Dado $a > 1$, defina a sequência $\{a_n\}$ indutivamente pondo $a_1 = \sqrt{a}$ e $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ para $n \geq 1$.

(a) (1 pto) Usando indução matemática, mostre que a sequência é crescente e limitada superiormente por $3a$.

(b) (1 pto) Calcule o limite da sequência, justificando sua resposta.

Questão 2 (1 pto cada) Diga se as séries abaixo são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-x^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n-4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

Questão 3 (2 ptos) Encontre uma representação em série de potências para as funções $\dfrac{1}{1+x}$ e $\operatorname{arctg}(x)$ e dê seus raios de convergência, justificando sua resposta. (Sugestão: use, primeiramente, a série geométrica para calcular a primeira série)

Questão 4 (2 ptos) Mostre que 0 é um ponto ordinário da equação $(1-x)y'' + y = 0$ e ache sua solução geral em série de potências.

BOA SORTE!

Gabarito

(Q1) (a) $\{a_n\}$ é crescente:

- $a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = a_1$ OK
- Suponha que $a_n > a_{n-1}$. Então:

$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} > \sqrt{a + a_{n-1}} = a_n$. Logo, $\{a_n\}$ é crescente.

$\{a_n\}$ é l.tda superiormente por $3a$.

• $a_1 = a < 3a$ OK

• supondo que $a_n < 3a$, temos que $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} < \sqrt{a+3a} = 2\sqrt{a}$ $< 3a$. logo, $a_n < 3a$, $\forall n$.

(b) Como $\{a_n\}$ é crescente e l.tda superiormente, segue-se do Teo. da seq. monotônica que existe $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Passando o limite q^do $n \to \infty$ na eq. $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, obtemos

$$L = \sqrt{a+L} \Rightarrow L^2 - L - a = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \overset{L>0}{\Rightarrow} L = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

(Q2) (a) $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-b^2} + e^{-1}}{2} =$ $= \frac{1}{2e} < \infty$. logo, pelo teste da integral a série é absolutamente convergente.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{4}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$. Logo, a série diverge pelo teste da divergência.

(c) • $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$.

• $|a_n| < |a_{n-1}| \iff \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n-1+2} \iff n+1 < n+2 \iff 1 < 2$ OK. Logo, $\{a_n\}$ é decrescente

Pelo teste de Leibniz, $\{a_n\}$ converge. Agora, pela comparação por limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 > 0.$$ Como $\sum \frac{1}{n}$ diverge, a série $\sum |a_n|$ tb diverge.

$\therefore$ $\sum a_n$ é condicionalmente convergente.

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \cdot (n-4) \cdots (2)\cdot(1) = \infty$

logo, pelo teste da raiz, a série é divergente.

(Q3) Para $-1 < x < 1$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. (série geométrica)

Assim, $\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, para $|-x| < 1 \iff |x| < 1$

Agora, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n$ para $|x^2|<1 \Leftrightarrow |x|<1$. Logo, ②

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1 \;//$$

(Q4) $p = \frac{0}{1-x} = 0$ e $q = \frac{1}{1-x}$ são analíticas em 0. Logo, 0 é pto ordinário $\Rightarrow$ $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Substituindo na E.D.O.:

$$(1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a_2 + a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + a_n\right] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2} \\ \text{e} \\ a_{n+2} = \frac{+(n)(n+1)a_{n+1} - a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_3 = \frac{+2a_2 - a_1}{2.3} = +\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{6} = -\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6} \qquad a_4 = \frac{+6a_3 - a_2}{12} = +\frac{a_3}{2} - \frac{a_2}{12} = \frac{a_2}{6} - \frac{a_1}{12} - \frac{a_2}{12} = -\frac{a_1}{12} - \frac{a_0}{24}$$

Assim,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 + \left(-\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{a_1}{12} - \frac{a_0}{24}\right)x^4 \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right) \;//$$

—— // ——