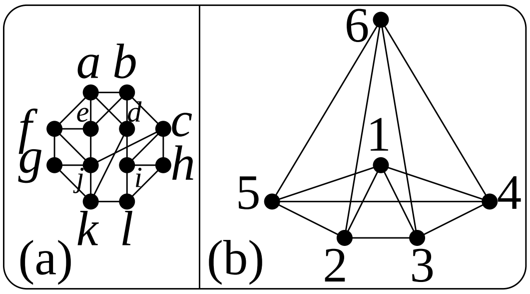

Figure 1: Prove se são ou não são planares.

Instituto de Matemática e Estatítica

2^a Lista de Teoria dos Grafos
Professor: Luerbio Faria
Data: **21/11/2015**

1. Na Figura 1. Demonstre se são planares.
2. Prove ou refute: Não existe grafo Euleriano conexo simples com número par de vértices e número ímpar de arestas.
3. Um grafo é semi-euleriano se existe uma trilha não fechada contendo todas as arestas de G. Prove que dado $G = (V, E)$ um grafo conexo, então: G é semieuleriano se e somente se G possui exatamente 2 vértices de grau ímpar.
4. Para cada grafo a seguir diga para quais valores de m e n o grafo é hamiltoniano, euleriano, planar, o número cromático χ, o tamanho da maior clique ω, e o tamanho do maior conjunto independente α com a respectiva justificativa.

GRAFO	HAMILT.	EUL.	PLANAR	χ	ω	α
$K_{m,n}$						
K_n						
Q_n						
S_n						
P_n						
C_n						
Dodecaedro						
W_n						
$L(Q_3)$						
PETERSEN						

5. Prove que se G é um grafo Euleriano e e, f são duas arestas de G com um extremo comum, então G tem uma trilha Eulerianoa fechada no qual e, f aparecem consecutivamente.
6. Mostre que se um grafo $G = (V, E)$ é hamiltoniano, então $L(G)$ é hamiltoniano.
7. Mostre que se um grafo $G = (V, E)$ é eulerianiano, então $L(G)$ é euleriano.
8. Dado um grafo $G = (V, E)$ e $\omega(G)$ o tamanho do maior completo subgrafo de G, mostre que $\omega(G) \leq \chi \leq \Delta + 1$. Dê duas classes de grafos nas quais $\chi = \Delta + 1$.
9. Mostre o teorema das 6 cores, isto é se G é planar, então G é 6-colorível.
10. Mostre que em todo grafo $G = (V, E)$ colorido com $\chi(G)$ cores satisfaz que para cada cor $c \in \{1, 2, 3, \ldots \chi\}$ existe um vértice $v \in V$ tal que para toda cor c diferente da cor $c(v)$ de v existe um vizinho de v com a cor c.
11. Mostre que:
    (a) Se G é planar, então G é 6 colorível.
    (b) Se G é hamiltoniano, então $L(G)$ é hamiltoniano.
    (c) Se G é Euleriano, então $L(G)$ é Euleriano.
    (d) Mostre que vale o se e somente se em b) e c).
12. Dado um grafo $G = (V, E)$ e $k \in I\!N^*$, uma k-coloração das arestas de G é uma função $f : E \to \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ tal que $f(uv) \neq f(uw)$. O índice cromático $\chi'(G)$ é o menor k tal que G tem uma k coloração de arestas. Determine:

    $a)\chi'(K_3)$ $\quad b)\chi'(K_4)$ $\quad c)\chi'(K_5)$ $\quad d)Petersen$
    $e)\chi'(K_n)$ $\quad f)\chi'(W_n)$ $\quad g)\chi'(C_n)$ $\quad h)\chi'(Q_3)$

    $i)$Dado um grafo $G = (V, E)$,δ e Δ serem, respectivamente, o grau mínimo e máximo de G. Determine os valores possíveis de $\chi'(G)$.
13. V (com justificativa) ou F (com contra-exemplo)
    (a) ( ) Se G contem K_n como subgrafo, então $\chi(G) > n$.
    (b) ( ) Se G satisfaz $\chi(G) > n$, então G contem K_n como subgrafo.
    (c) ( ) Dados $k, \ell \in I\!N^*, k \geq \ell$; Existe uma família de grafos com $\chi = k$ e $\omega = \ell$.
    (d) ( ) Se P=NP, então existe um algoritmo polinomial para todo problema de NP.
    (e) ( ) Se existe um algoritmo polinomial para um problema de NP, então P=NP.
    (f) ( ) P$\subseteq$ NP.
14. Mostre que estão em NP:
    (a) CICLO HAMILTONIANO
    (b) TRILHA EULERIANA
    (c) SATISFABILIDADE
    Instância: $I = (U, C)$, onde U é um conjunto de variáveis lógicas e C é uma coleção de cláusulas disjuntivas sob U.
    Pergunta: Existe uma atribuição de verdade para U com um literal verdadeiro em cada cláusula de C?
    (d) MOCHILA
    Instância: Capacidade M da mochila, Lucro L da mochila, seqüência de capacidades e lucros dos n objetos $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ e $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_n)$.
    Pergunta: Existe um subconjunto $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tal que $\sum_{i \in A} c_i \leq M$ e $\sum_{i \in A} \ell_i \geq L$?