Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
Instituto de Matemática e Estatística.
Disciplina: Cálculo IV.
Código: 01-10828
Professor: Ditter Adolfo Yataco Tasayco.

TRABALHO: Parte 2

1) Encontre a série de Maclaurin das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$. (b) $f(x) = x^2 \arctan\left(x^3\right)$.

2) Encontre a série de Taylor de $f(x)$ centrada no valor dado de a.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = -3$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 9$.

3) (a) Use a série de Maclaurin de $\arctan(x)$ para demonstrar a seguinte expressão para π como a soma de uma série infinita.

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

   (b) Use a multiplicação de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin da função $f(x) = e^{-x^2}\cos x$.

4) Sabendo que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Use a fatoração de $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ para reescrever a integral anterior. Depois expresse $\dfrac{1}{x^3+1}$ como a soma de série de potências e use-a para demonstrar a seguinte fórmula para π

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right).$$

5) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ função periódica de período $2L$, definida por $f(x) = x^2$ para $-L \leq x \leq L$. Encontre a sua série de Fourier. Use esta série para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$