

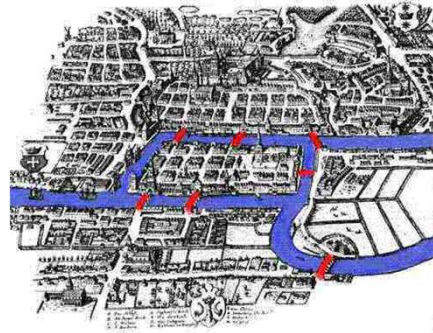
## Histórico e motivação da Teoria dos Grafos

Notas de aula da disciplina IME 04-11311  
Algoritmos em Grafos (Teoria dos Grafos)

Paulo Eustáquio Duarte Pinto  
(pauloedp at ime.uerj.br)

abril/2018

O Problema Original: as pontes de Königsberg  
Sobre o rio Pregel



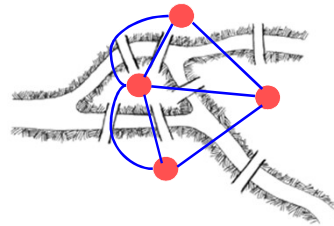
O problema Original: as pontes de Königsberg:

"É possível fazer um passeio que passe por todas as pontes uma única vez e retorne ao ponto de partida?"



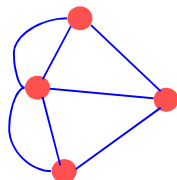
O problema original: as pontes de Königsberg

A solução de Euler (1736)



O problema original: as pontes de Königsberg

A solução de Euler (1736)



Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

Problema das 4 cores

Francis Guthrie conjecturou, em 1852, que qualquer mapa poderia ser colorido com, no máximo, 4 cores.



Várias tentativas de solução fracassaram. Provou-se que pode-se usar apenas 5 cores.

Teorema "provado" em 1976, por Appel e Hacken..

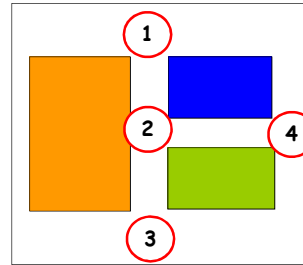
No Século XIX Kirchoff e Cayley criaram a Teoria das Árvores, para ajudar a resolver problemas de circuitos elétricos.

Na década de 30, os fundamentos da Teoria dos Grafos foi estabelecida por Kuratowski, Konig e Menger.

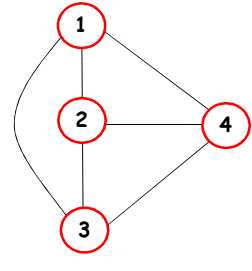
Após a invenção do computador, a Teoria "explodiu", pois grafos são a estrutura de dados mais geral possível.

### Grafos - Problemas clássicos em grafos

#### Estudos de trânsito - orientação de grafo



Mapa de ruas

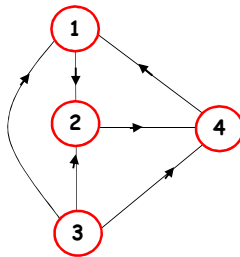


Grafo associado

É possível atribuir mão única a todas as ruas da cidade?

### Grafos - Problemas clássicos em grafos

#### Estudos de trânsito - Alcanceabilidade



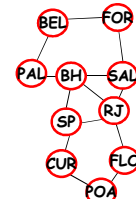
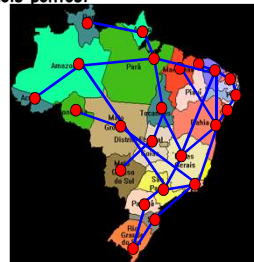
Grafo associado

O Departamento de Trânsito quer mudar o trânsito devido a obras que irão começar. Com a nova configuração algum ponto da cidade ficaria inacessível a partir de algum outro?

### Grafos - Problemas clássicos em grafos

#### Caminhos em grafos simples-

Dado um grafo simples, qual o menor e o maior caminho simples entre dois pontos?



Trecho do grafo associado mostrando as estradas

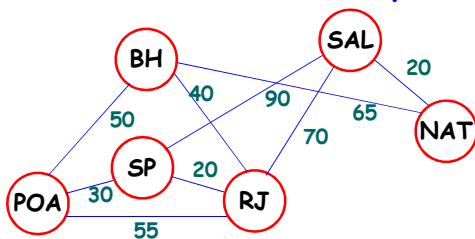
De SP para FLO o menor número de capitais visitadas é 2 e o maior (sem repetir) é 7.

### Grafos - Problemas clássicos em grafos

#### Caminhos em grafos ponderados-

Dado um grafo simples, qual o caminho de menor custo entre dois pontos?

#### Escolha de Transporte

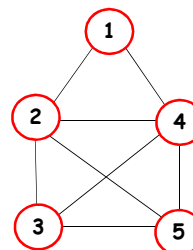


Qual a maneira mais barata de ir de POA a NAT?

### Grafos - Problemas clássicos em grafos

#### Ciclo Euleriano- Problema da casinha

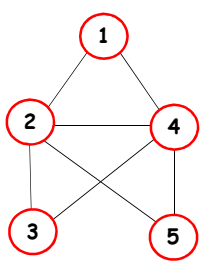
É possível desenhar a casinha abaixo começando em um ponto qualquer, sem retirar o lápis do papel e sem repetir traços? Como?



Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

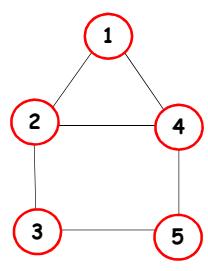
**Ciclo euleriano-**  
 Dado um grafo que representa um trecho de cidade, é possível que um carteiro comece seu trabalho em dado ponto e percorra todos os trechos de rua uma única vez, retornando ao ponto inicial? Como?



Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Circuito euleriano-**  
 Dado um grafo que representa um trecho de cidade, é possível que um carteiro comece seu trabalho em dado ponto e percorra todos os trechos de rua uma única vez, retornando ao ponto inicial? Como?



**Problema do carteiro chinês-**  
 quando o grafo não tem circuito euleriano, qual o número mínimo de repetições de arestas para se construir um circuito euleriano?

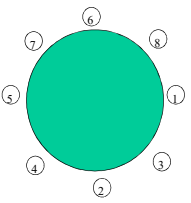
Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Circuito hamiltoniano-**  
 Dado um grafo que representa as amizades entre pessoas, é possível distribuí-las em uma mesa circular tal que inimigos não fiquem um ao lado do outro? Como?

Convidados:

- Dilma
- Aécio
- Pelé
- Maradona
- Trump
- Putin
- ...



Solução do problema:

Criar um grafo completo dos convidados, eliminar as arestas das inimizades e procurar um ciclo Hamiltoniano no mesmo

Inimizados:

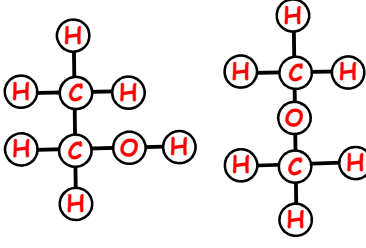
- Dilma x Aécio
- Pelé x Maradona
- Trump x Putin
- ...

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Isomorfismo de grafos -**  
 Dados dois grafos eles são isomorfos?

**Grafo de Moléculas**

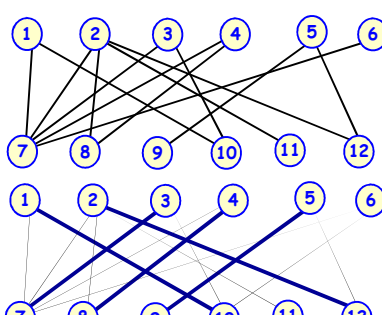


Os isômeros  $C_2H_6O$  são o mesmo produto?

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Emparelhamento máximo em grafo bipartido -**  
**Casamento estável:** Dados  $n$  rapazes e  $m$  garotas e os interesses, determinar o maior número de casais (estáveis) que podem ser formados

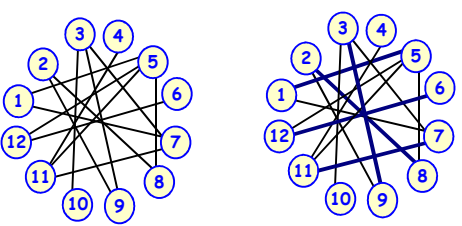


**Solução ótima 5**

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Emparelhamento máximo em grafo qualquer -**  
**Jogo de recrutamento:** Dadas  $n$  candidatos e seus conhecimentos, determinar o maior número de duplas de desconhecidos que podem ser formadas.



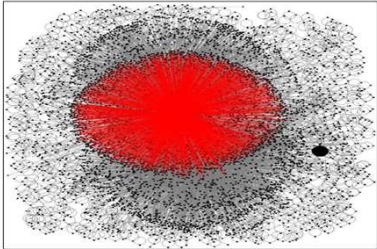
**Solução ótima 5**

Obs: fez-se o grafo dos "desconhecimentos"

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Estudo de redes sociais-**  
Disseminação da notícia falsa pelo Twitter do assassinato do delegado que investigou a morte do Teori.




Fonte: Dissertação de mestrado de Felipe de Oliveira Sampaio

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Conjectura do Mundo Pequeno-**  
Karinthy, Milgram - Existe sempre uma conexão entre duas pessoas quaisquer do mundo através de não mais que 6 conhecidos.

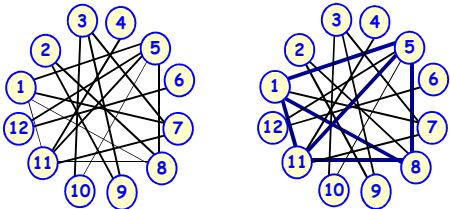


Fonte: A Tarde

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Clique máxima-**  
**Redes sociais:** Dados os relacionamentos numa rede social, qual o maior grupo de pessoas onde todos são relacionados dois a dois?

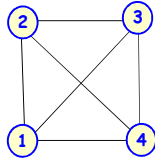


Clique máxima: 4

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Planaridade-**  
Dado o grafo de um circuito eletrônico, ele é planar? Se for significa que o circuito pode ser implementado apenas com uma placa.

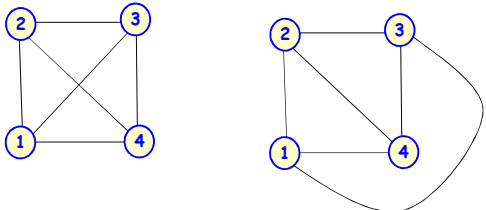


$K_4$  é planar?

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Planaridade-**  
Dado o grafo de um circuito eletrônico, ele é planar? Se for significa que o circuito pode ser implementado apenas com uma placa.

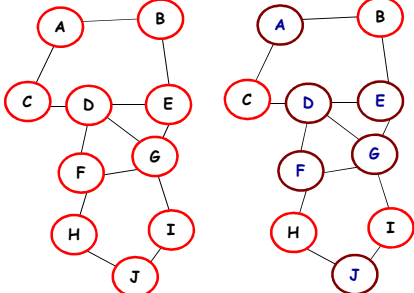


$K_4$  é planar? R: Sim

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Grafos - Problemas clássicos em grafos**

**Cobertura mínima de vértices-**  
**Segurança:** Dado o mapa de um trecho de cidade, qual o número mínimo de cabines de polícia a serem colocadas tal que todos os trechos de rua possam ser vigiados das cabines?



Cobertura mínima: 6

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

### Grafos - Problemas clássicos em grafos

**Busca de ciclos negativos-**  
**Arbitragem:** Dadas as taxas de conversão de moedas existe uma oportunidade de ganhar dinheiro sucessivamente fazendo câmbios de diversas moedas?

	USD	EUR	GPH	CHF	CAD
USD	1	0.741	0.657	1.061	1.011
EUR	1.350	1	0.888	1.433	1.366
GPH	1.521	1.126	1	1.614	1.538
CHF	0.943	0.698	0.620	1	0.953
CAD	0.995	0.732	0.650	1.049	1

Observe que  $USD \times EUR \times CAD \times USD = 1 \times 0.741 \times 1.366 \times 0.995 = 1.00714497$ .

O problema é resolvido criando-se um grafo adequado e procurando ciclos negativos no mesmo.

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

### Grafos - Problemas clássicos em grafos

**Problemas de colorabilidade:**  
**3-colorabilidade:** Cado mapa pode ser colorido com apenas 3 cores?

**Teorema "provado" em 1976, por Appel e Hacken.**  
 Todo grafo planar pode ser colorido com 4 cores, no máximo.

Poderia também ser colorido com apenas 3 cores ou 2?

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

### Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Dificuldades consideradas para os problemas:**  
 F - tem algoritmo polinomial fácil de implementar  
 T - tem algoritmo polinomial difícil de implementar  
 I - provavelmente só tem algoritmos exponenciais  
 ? - dificuldade desconhecida

**Problemas considerados:**  
**Conectividade** - determinar se o grafo é conexo.  
**Circuito Euleriano** - apresentar um circuito euleriano para o grafo  
**Ciclo Hamiltoniano** - apresentar um ciclo hamiltoniano para o grafo  
**Emparelhamento bipartido** - apresentar um emparelhamento máximo em um grafo bipartido  
**Emparelhamento máximo** - apresentar um emparelhamento máximo em um grafo qualquer  
**Planaridade** - determinar se dado grafo é planar  
**Clique máxima** - determinar a maior clique do grafo

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

### Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**2-colorabilidade** - determinar se o grafo pode ser colorido com 2 cores  
**3-colorabilidade** - determinar se o grafo pode ser colorido com 3 cores  
**Menores caminhos** - encontrar o menor caminho entre dois vértices dados  
**Maiores caminhos** - encontrar o maior caminho entre dois vértices dados  
**Cobertura de vértices** - encontrar uma cobertura mínima de vértices  
**Isomorfismo** - determinar se dois grafos dados são isomorfos  
**Fechamento transitivo** - determinar a alcançabilidade em um digrafo  
**Conectividade forte** - determinar os componentes fortemente conexos  
**Ciclo de tamanho par** - encontrar um ciclo de tamanho par num digrafo  
**Ciclo de tamanho ímpar** - encontrar um ciclo de tamanho ímpar num digrafo  
**Árvore Geradora Mínima** - encontrar a árvore geradora de custo mínimo de um grafo ponderado

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

### Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

**Caixeiro Viajante** - encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo em um grafo ponderado  
**Menores caminhos (pesos positivos)** - encontrar o caminho de custo mínimo entre um par de vértices em um grafo ponderado com pesos positivos  
**Menores caminhos (pesos negativos)** - encontrar o caminho de custo mínimo entre um par de vértices em um grafo ponderado com pesos negativos  
**Fluxo máximo** - determinar o fluxo máximo em uma rede, dadas as capacidades das arestas  
**Alocação** - apresentar um emparelhamento máximo em um grafo ponderado  
**Fluxo máximo/custo mínimo** - determinar o fluxo máximo em uma rede, dadas as capacidades das arestas considerando custos nas arestas

Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

### Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

GRAFOS SIMPLES	F	T	I	?
Conectividade	X			
Circuito Euleriano	X			
Ciclo Hamiltoniano			X	
Emparelhamento bipartido	X			
Emparelhamento máximo		X		
Planaridade		X		
Clique máxima			X	
2-colorabilidade	X			
3-colorabilidade			X	
Coloração de mapas		X		
Menores caminhos	X			
Maiores caminhos			X	
Cobertura de vértices			X	
Isomorfismo				X

**Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades**

DIGRAFOS	F	T	I	?
Fechamento transitivo	X			
Conectividade forte	X			
Ciclo de tamanho par	X			
Ciclo de tamanho ímpar		X		
GRAFOS PONDERADOS				
Árvore Geradora Mínima	X			
Caixeiro Viajante			X	
REDES				
Menores caminhos (pesos positivos)	X			
Menores caminhos (pesos negativos)			X	
Fluxo máximo	X			
Alocação		X		
Fluxo máximo/custo mínimo		X		

**FIM**