Teoria dos Grafos

Grafos e Subgrafos

versão 3.1

Fabiano Oliveira
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

Grafos e Subgrafos

- Antes de mais nada, consulte "Conceitos Gerais", sobre Conjuntos e Lógica

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G = (V, E) é um ***grafo*** se V é um conjunto de elementos (cada elemento é chamado ***vértice***) e E é uma família de pares não-ordenados de vértices (cada par é chamado ***aresta***)

    - Se G é um grafo, denotamos o conjunto de vértices de G por V(G) e o de arestas por E(G)

    - Um par (a, b) não-ordenado pode ser denotado por ab **se isto não trouxer ambiguidades**

Grafos e Subgrafos

- Ex.:
  - $G_1 = (V_1, E_1)$
    $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$
    $E_1 = \{aa, ab, bc, bd, cd, dc, ee, ce, cf, de, df, fd, fe\}$

  - $G_2 = (V_2, E_2)$
    $V_2 = \mathbb{N}$
    $E_2 = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = bk \text{ ou } b = ak, \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \}$

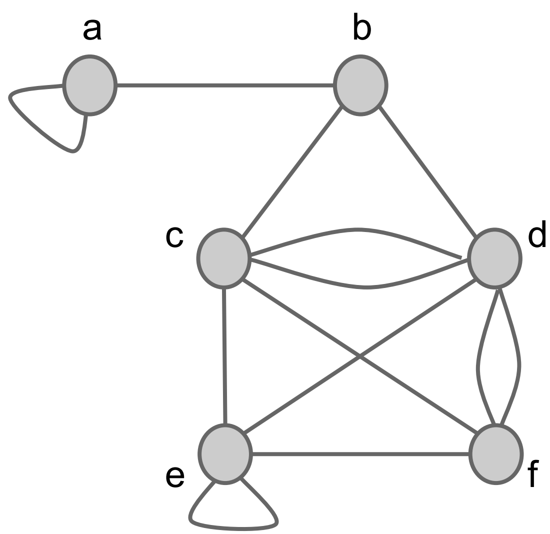
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um grafo G é ***finito*** se V(G) e E(G) são conjuntos finitos
  - Ex (slide anterior):
    G_1 é finito
    G_2 é infinito

Grafos e Subgrafos

- Uma representação usual de grafos finitos é através de um gráfico onde um vértice $v \in V(G)$ é representado por um círculo rotulado como “v” e uma aresta $uv \in E(G)$ por um segmento de linha com extremidades nas representações dos vértices u e v

Grafos e Subgrafos

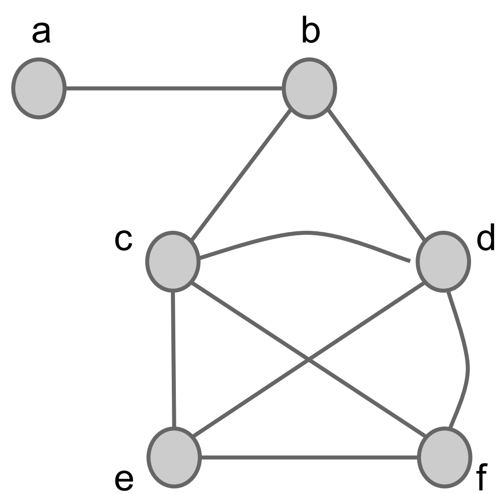


Representação de G_1 (slides anteriores)

- Note que um grafo possui infinitas representações!

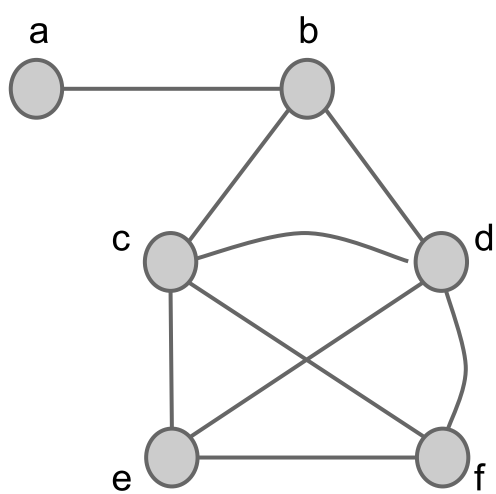
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G = (V, E) é um grafo ***simples*** se não existem nem ***laços*** (aa ∈ E(G)), nem ***multiarestas*** (ab,ab ∈ E(G))
- Exceto se for dito o contrário, **admitiremos que todo grafo é simples**



Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Se G é um grafo finito, e nada contrário for dito, ***n*** representa o número de vértices do grafo e ***m*** o seu número de arestas (ou seja, n = |V(G)| e m = |E(G)|)

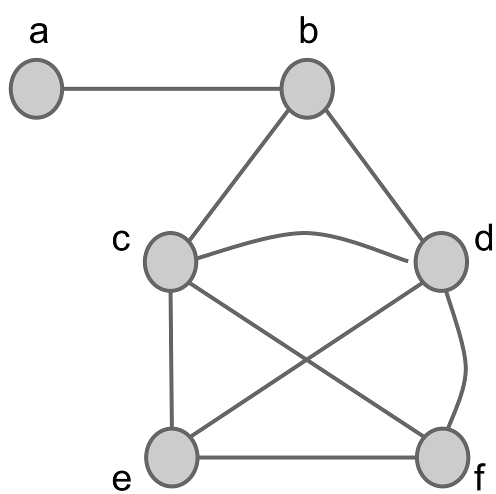


n = 6, m = 9

Exercício:
qual a relação geral entre n e m para grafos simples?

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** ab $\in$ E(G) é ***incidente*** a a, b (e somente a estes vértices)



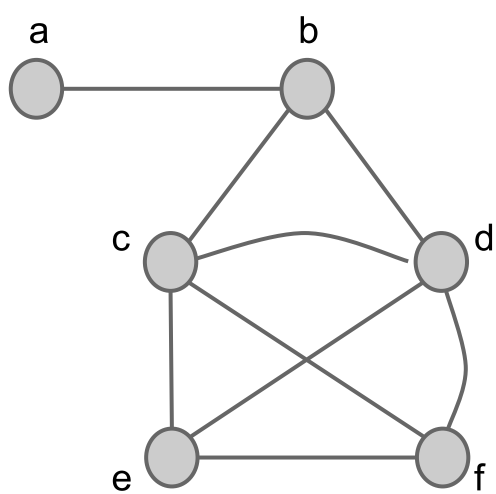
ab é incidente a a, b

bc é incidente a b, c

de não é incidente a a

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** a, b $\in$ V(G) são ***adjacentes*** se ab $\in$ E(G)
- **Def.:** O conjunto ***N(v)*** de ***vizinhos*** de v é o conjunto N(v) = { u $\in$ V(G) | uv $\in$ E(G) }



a e b são adjacentes

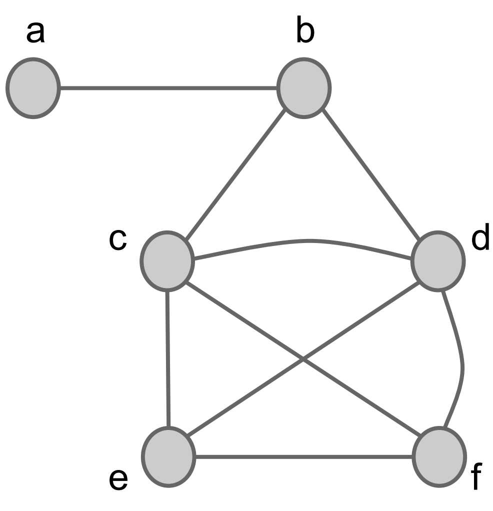
b e f não são adjacentes

N(b) = {a, c, d}

N(b) $\cap$ N(f) = {c, d}

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** O ***grau*** de um v $\in$ V(G), denotado por **d(v)**, é o número de arestas incidentes a v

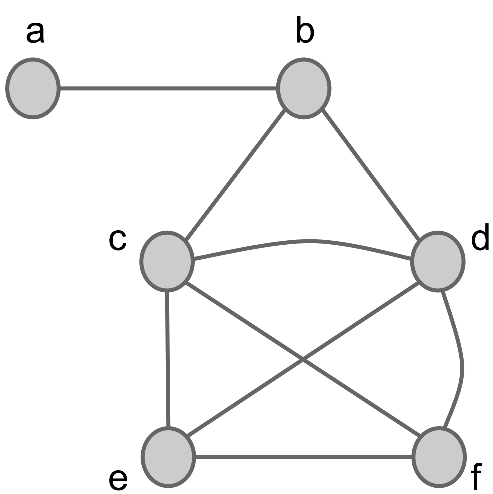


d(a) = 1, d(b) = 3, etc.

Exercício:
Quanto vale
$\sum \{ d(v) : v \in V(G) \}$?

Grafos e Subgrafos

- **Exercício:** Mostre que para qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par



Ex.: a, b, e, f são aqueles de grau ímpar (em número par, portanto)

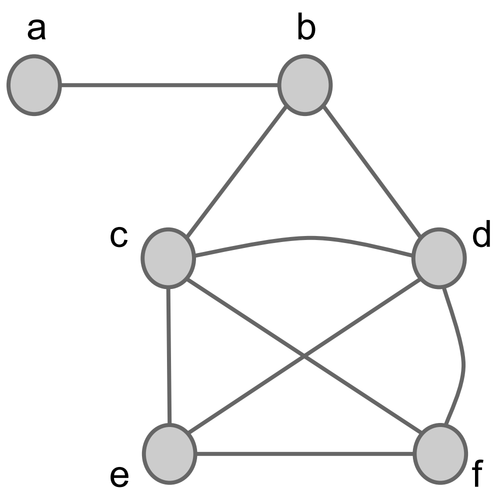
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** O ***grau máximo*** de um grafo G, denotado por Δ***(G)***, é o grau do vértice de G que possui o maior valor, i.e., $\Delta(G) = \text{máx } \{ d(v) : v \in V(G) \}$

- **Def.:** O ***grau mínimo*** de um grafo G, denotado por ***δ(G)***, é o grau do vértice de G que possui o menor valor, i.e., $\delta(G) = \min \{ d(v) : v \in V(G) \}$

- Por definição, $\delta(G) \leq \Delta(G)$

Grafos e Subgrafos



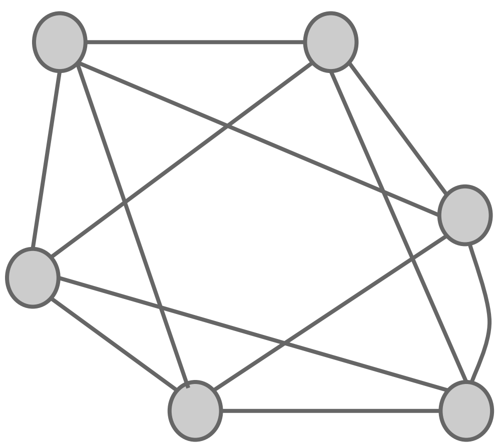
$\delta(G) = 1$

$\Delta(G) = 4$

Exercício:
Qual a relação entre
n, m, $\delta(G)$, $\Delta(G)$?

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um grafo G é ***k-regular*** se d(v) = k para todo v $\in$ V(G)



4-regular

Exercício:

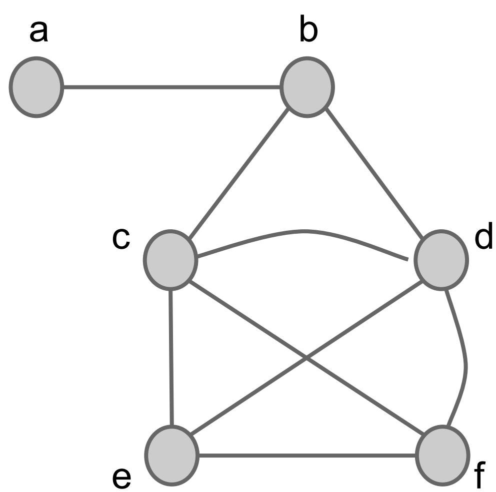
Quais são os grafos 0-regulares?

Quais são os grafos 1-regulares?

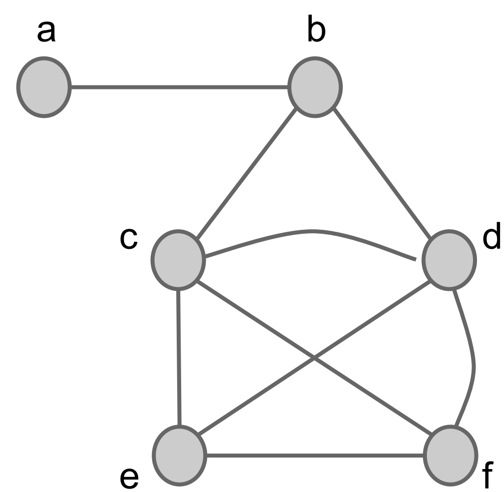
Quais são os grafos (n−1)-regulares?

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G e H são **idênticos** (**G = H**) se V(G) = V(H) e E(G) = E(H)



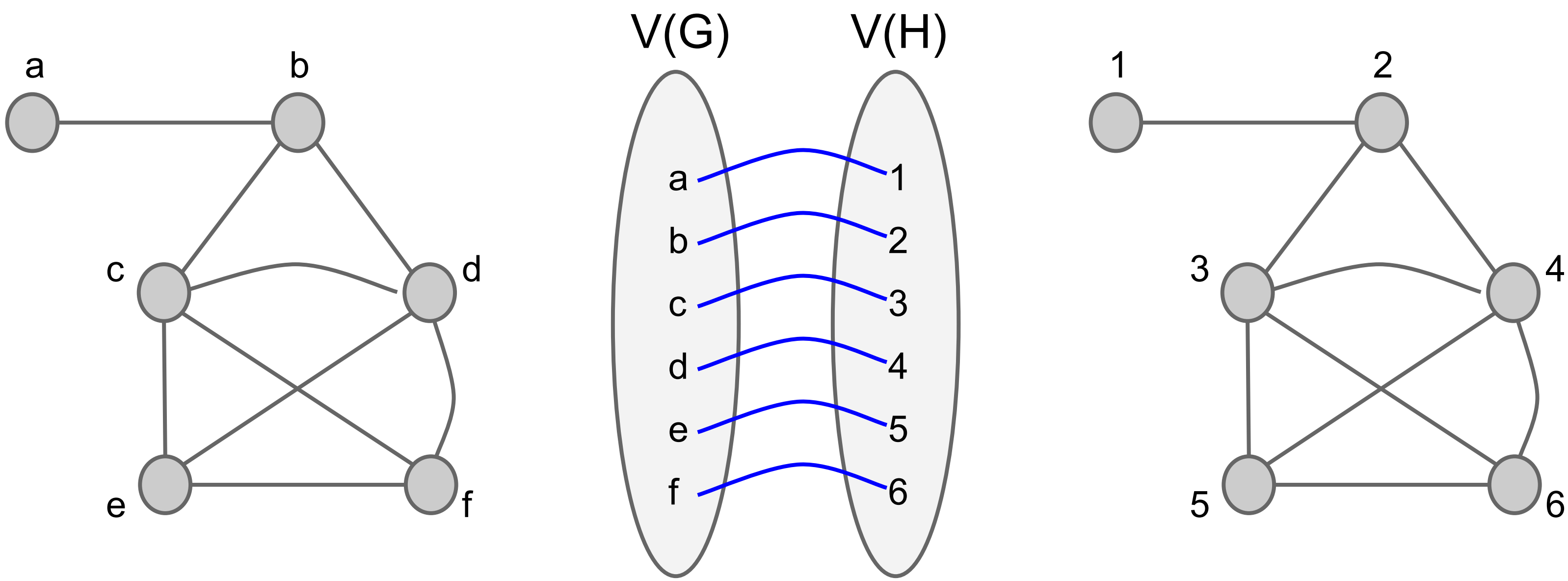
G



H

Grafos e Subgrafos

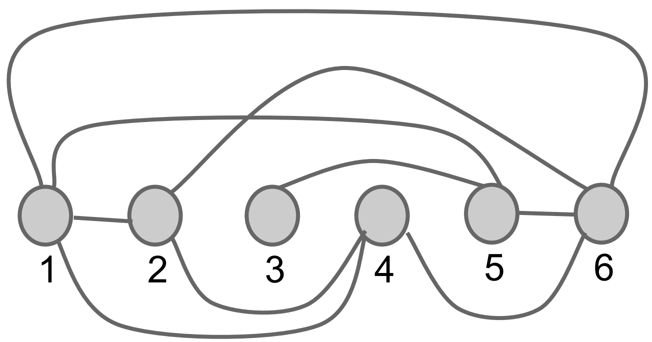
- **Def.:** G e H são **isomorfos** (**G ≅ H**) se existir bijeção $\theta: V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$



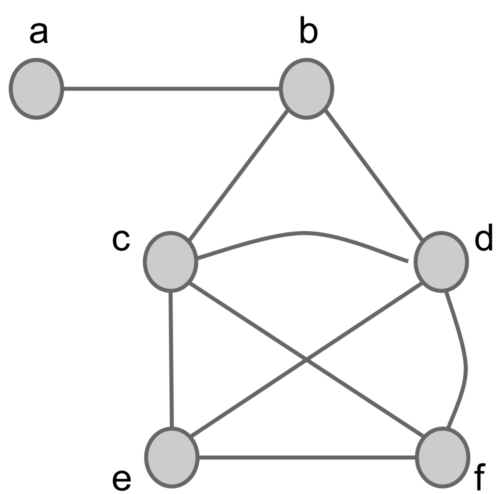
G **θ** **H**

Grafos e Subgrafos

H



G



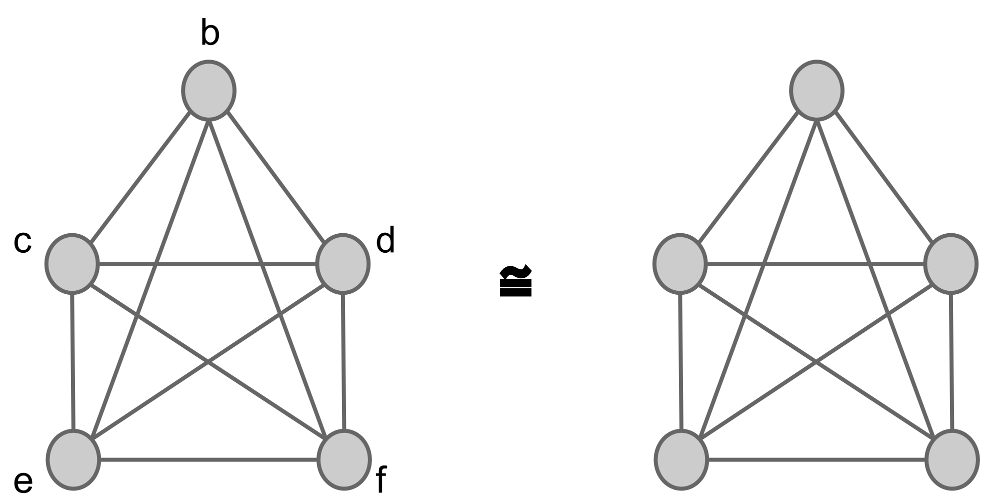
G ≠ H, mas G ≅ H

Exercício:
Encontre a bijeção que comprova o isomorfismo

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** um grafo simples G é ***completo*** se uv $\in$ E(G) para todo u, v $\in$ V(G) distintos

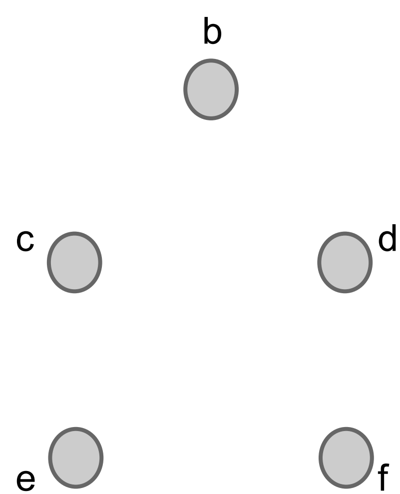
- **Def.:** $\boldsymbol{K_n}$ é um grafo completo com n vértices



K_5

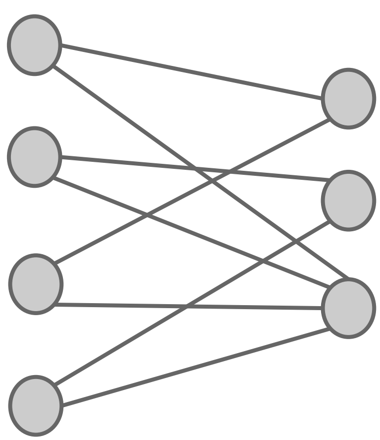
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G é um grafo ***vazio*** se E(G) = ∅

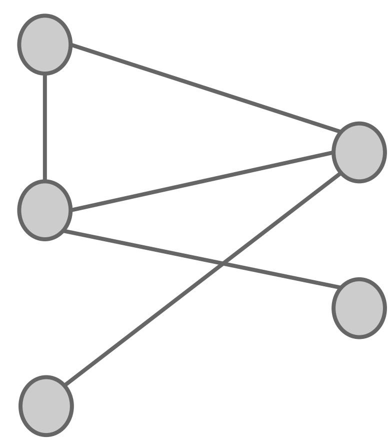


Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G é um grafo ***bipartido*** se $V(G) = X \cup Y$, com $X \cap Y = \varnothing$, tal que $uv \notin E(G)$ para todo $u, v \in X$ e $uv \notin E(G)$ para todo $u, v \in Y$



bipartido



não bipartido

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G é um grafo ***bipartido completo*** $\boldsymbol{K_{n,m}}$ se G é bipartido, com partição $V(G) = X \cup Y$, tal que $|X| = n$ e $|Y| = m$, e para todo $x \in X$, $y \in Y$, vale que $xy \in E(G)$ (ou seja, existem todas as possíveis arestas entre X e Y)

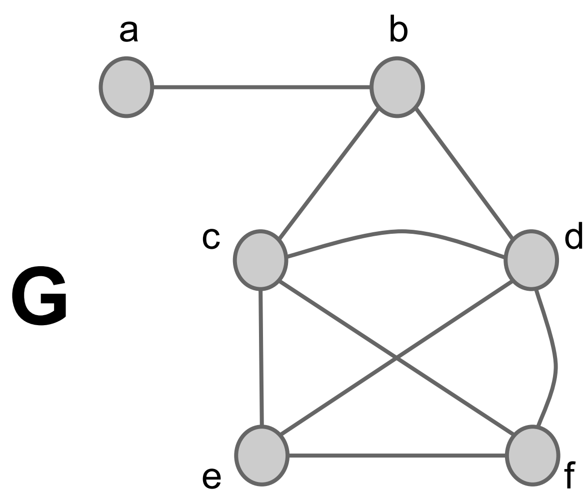
Exercício:

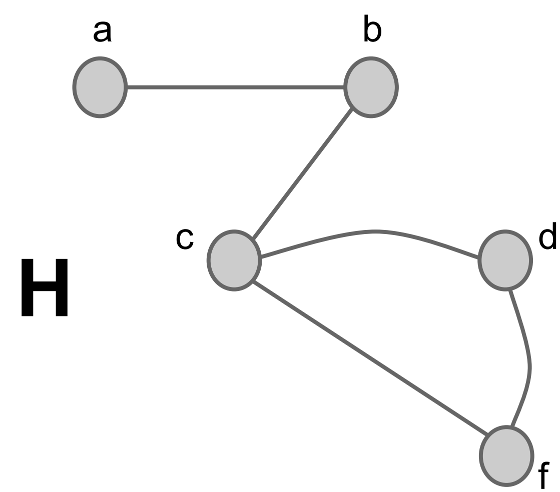
$|V(K_{n,m})| = ?$

$|E(K_{n,m})| = ?$

Grafos e Subgrafos

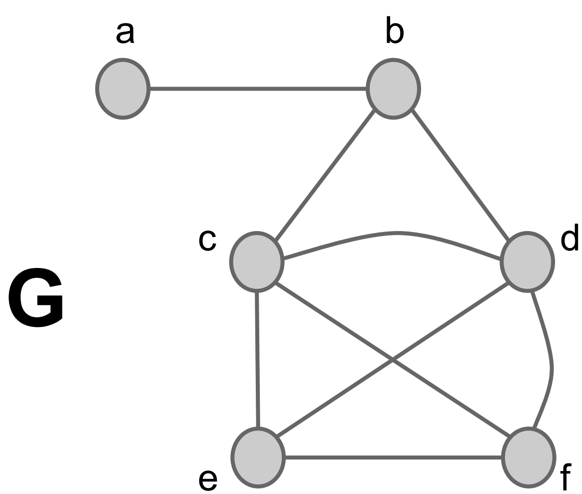
- **Def.:** H é um ***subgrafo*** de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. H é subgrafo ***próprio*** de G se $V(H) \subset V(G)$ ou $E(H) \subset E(G)$.
- **Def.:** Se H é um subgrafo de G, então G é um ***supergrafo*** de H

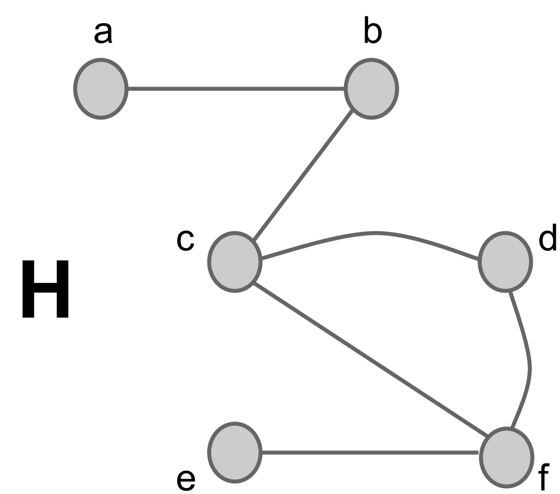




Grafos e Subgrafos

- **Def.:** H é um subgrafo ***gerador*** de G se é um subgrafo de G tal que V(H) = V(G)

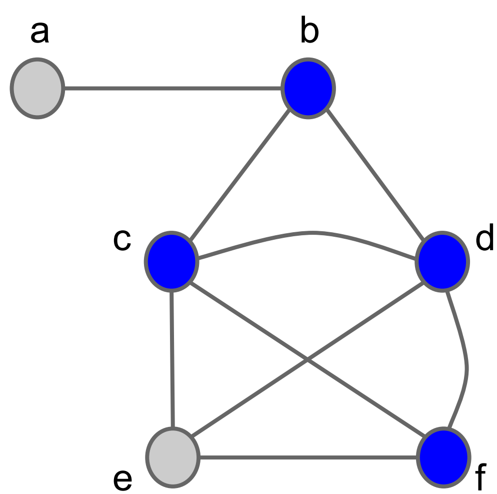




Grafos e Subgrafos

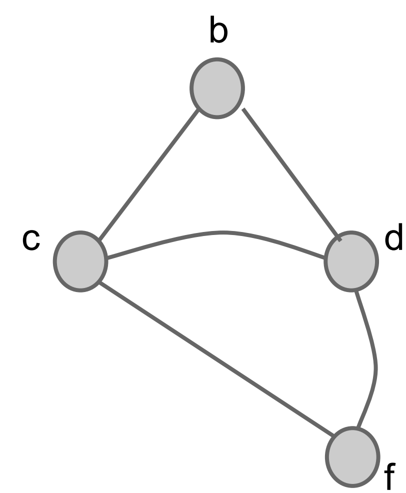
- **Def.:** O subgrafo ***induzido*** de G ***por V, V ⊆ V(G)***, denotado por ***G[V]***, é o subgrafo H de G tal que V(H) = V e para todo u, v ∈ V, uv ∈ E(H) ⇔ uv ∈ E(G)

G



V = {b, c, d, f}

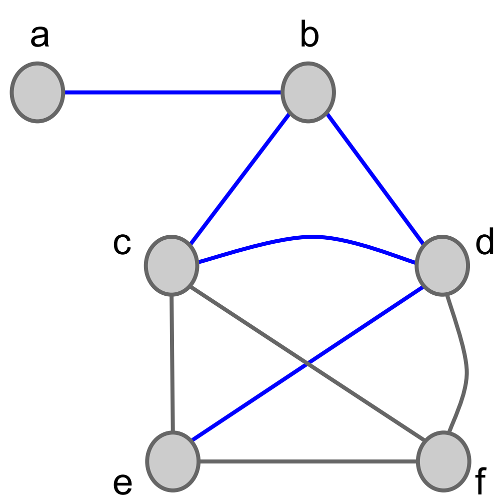
G[V]



Grafos e Subgrafos

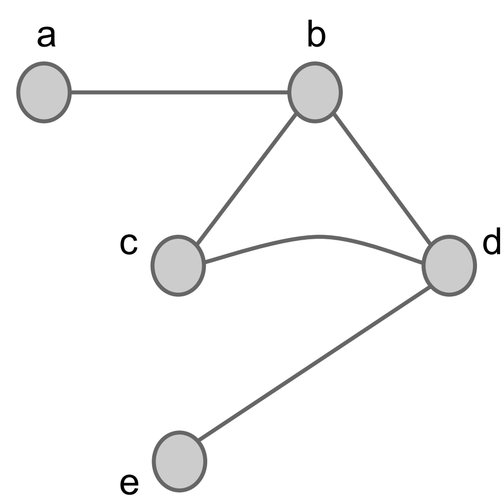
- **Def.:** O subgrafo ***induzido*** de G ***por E, E ⊆ E(G)***, denotado por ***G[E]***, é o subgrafo H de G tal que E(H) = E e não existe vértice sem aresta incidente em H

G



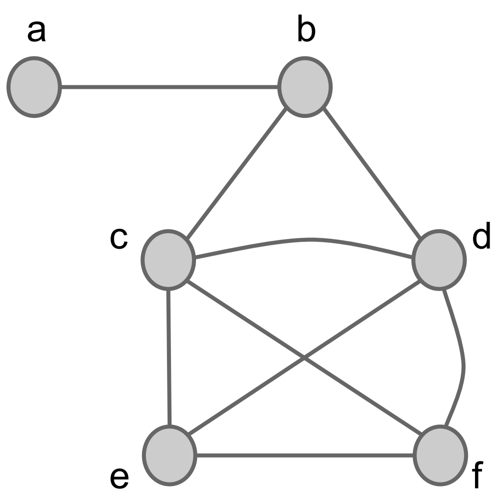
E = {ab, bc, bd, cd, de}

G[E]



Grafos e Subgrafos

- **Def.:** $C \subseteq V(G)$ é uma ***clique*** de um grafo G se G[C] é completo.



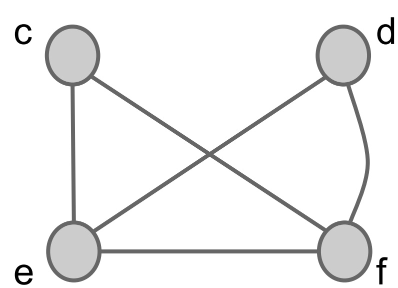
{a}, {a,b}, {b,c,d}, {c,d,e,f} são cliques

{a,b,c,d}, {b,c,d,e,f} não são cliques

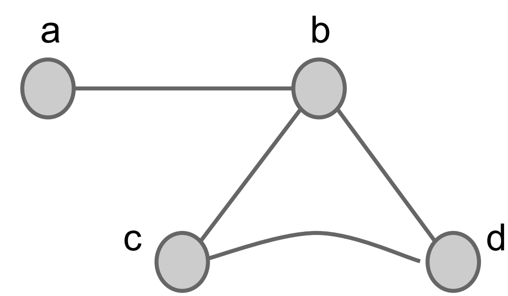
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G e H são ***disjuntos em arestas*** se $E(G) \cap E(H) = \varnothing$

G

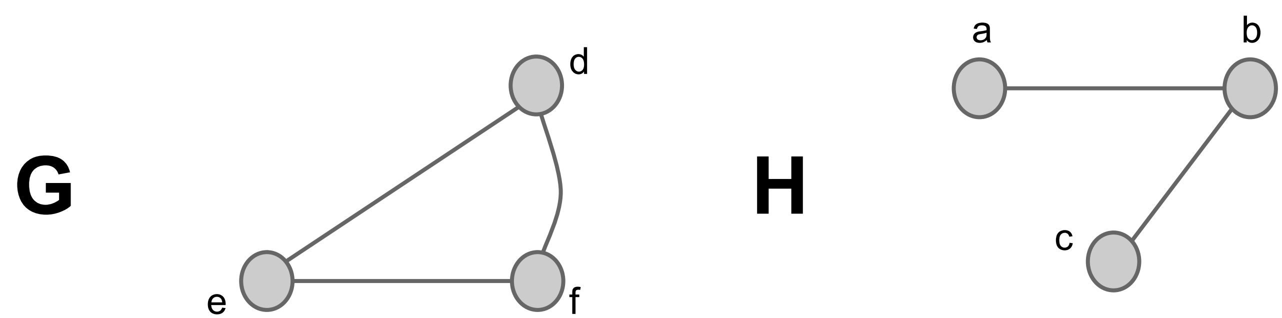


H



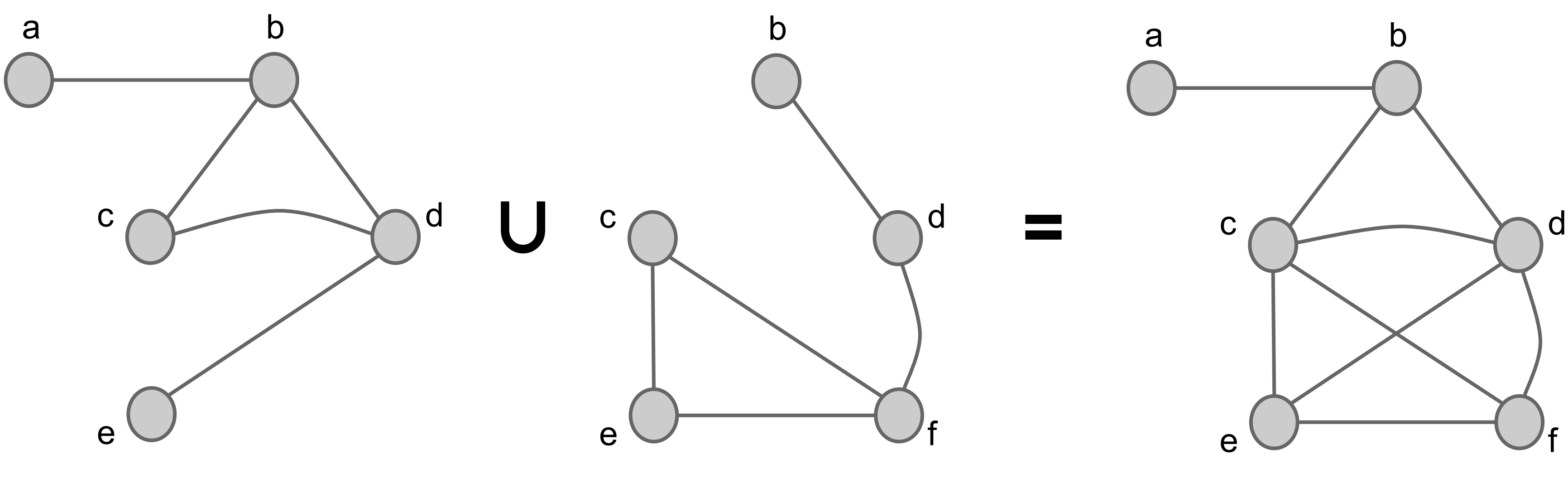
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** G e H são ***disjuntos em vértices*** se V(G) ∩ V(H) = ∅



Grafos e Subgrafos

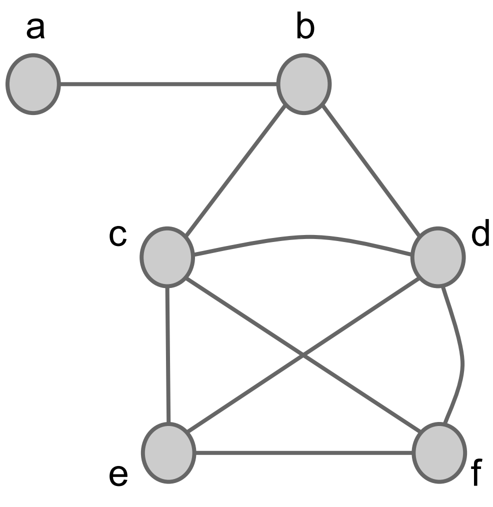
- **Def.:** A ***união G U H*** de dois grafos é o grafo J tal que V(J) = V(G) ∪ V(H) e E(J) = E(G) ∪ E(H)



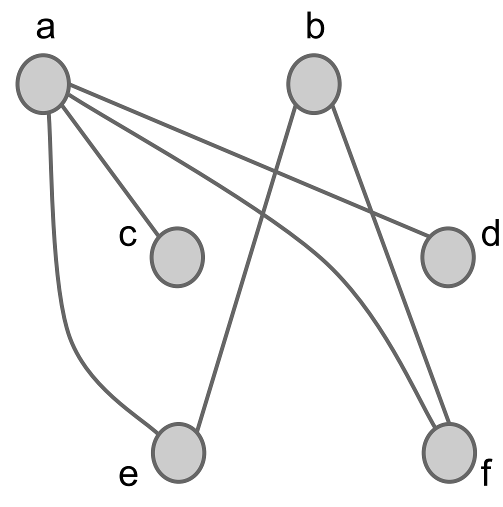
Grafos e Subgrafos

- **Def.:** O ***complemento*** de um grafo G, denotado por $\mathbf{G^c}$, é tal que $V(G^c) = V(G)$ e $E(G^c) = \{ uv : u, v \in V(G) \mid u \neq v \text{ e } uv \notin E(G) \}$

G



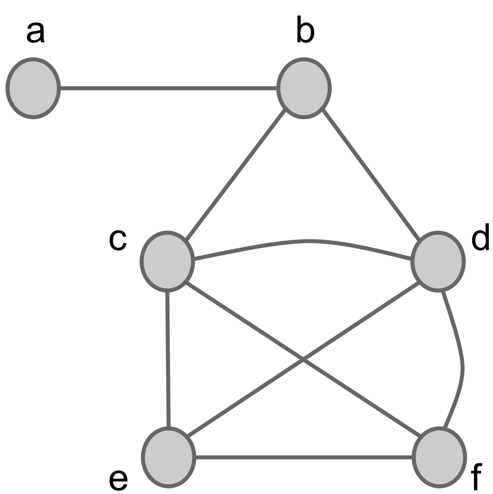
$\mathbf{G^c}$



Grafos e Subgrafos

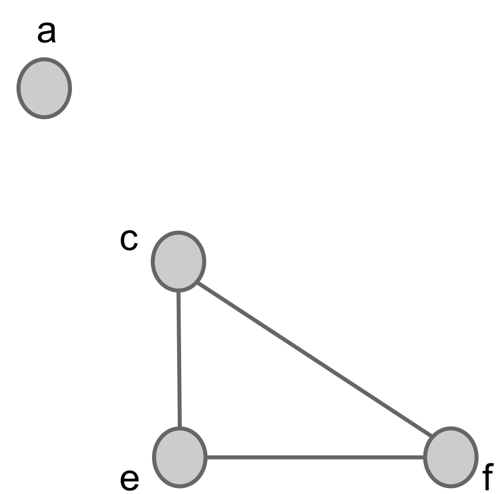
- **Def.:** A ***diferença*** de um grafo G ***por V ⊆ V(G)***, denotado por **G – V**, é o grafo G[V(G) - V]

G



V = {b, d}

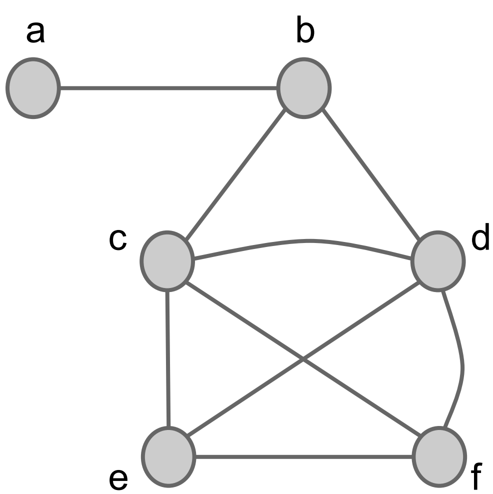
G – V



Grafos e Subgrafos

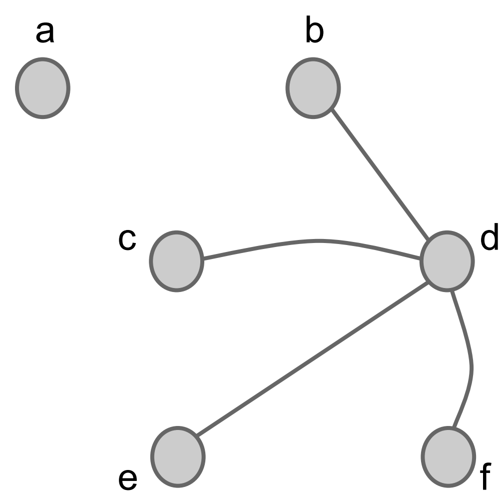
- **Def.:** A ***diferença*** de um grafo G ***por E ⊆ E(G)***, denotado por **G − E**, é o grafo H, onde V(H) = V(G) e E(H) = E(G) - E

G



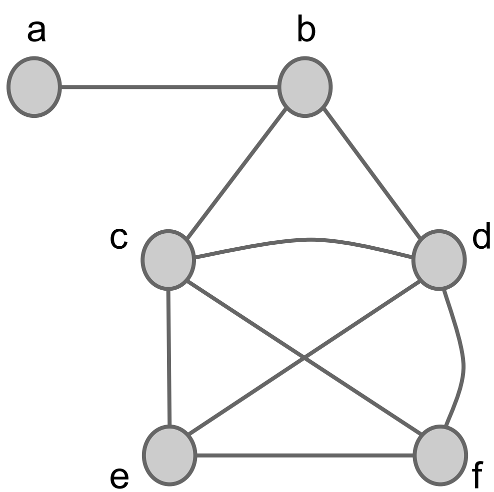
E = {ab, bc, cf, ef, ce}

G − E



Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um ***passeio*** em um grafo G é uma sequência $v_0,v_1,v_2,...,v_k$ de vértices de G tal que $v_iv_{i+1} \in E(G)$, para todo $0 \leq i < k$.
  O ***comprimento*** deste passeio é k.

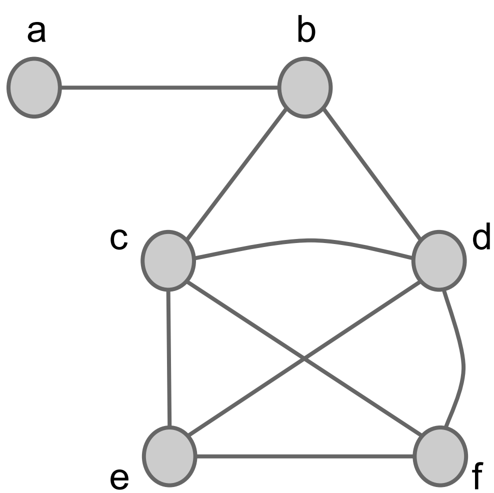


a,b,f não é um passeio

a,b,d,e,f,c,e,d,b é um passeio (de comprimento 8)

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Uma ***trilha*** em um grafo simples G é um passeio $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que $v_i v_{i+1}$ é distinta para todo $0 \leq i < k$

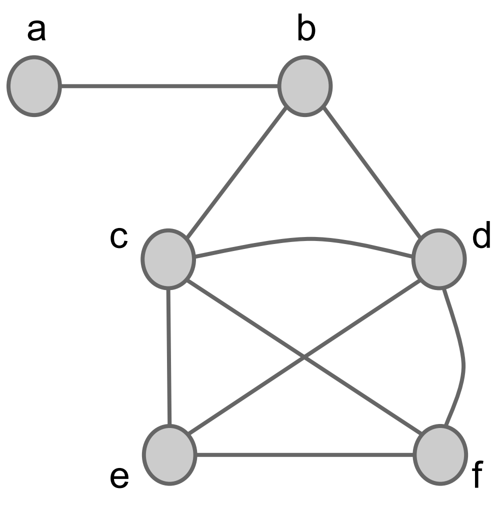


a,b,d,e,f,c,e,d,b não é uma trilha

a,b,d,f,c,d,e é uma trilha

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um ***caminho*** em um grafo simples G é uma trilha $v_0,v_1,v_2,...,v_k$ tal que v_i é distinto para todo $0 \leq i \leq k$. Um grafo que consiste num caminho com n vértices é denotado por $\mathbf{P_n}$.

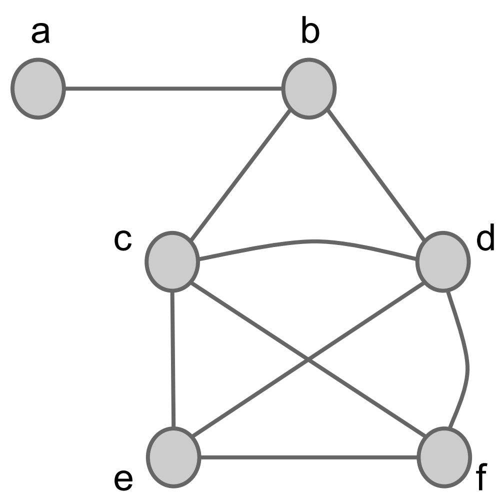


a,b,d,f,c,d,e não é um caminho

a,b,d,f,c,e é um caminho

Grafos e Subgrafos

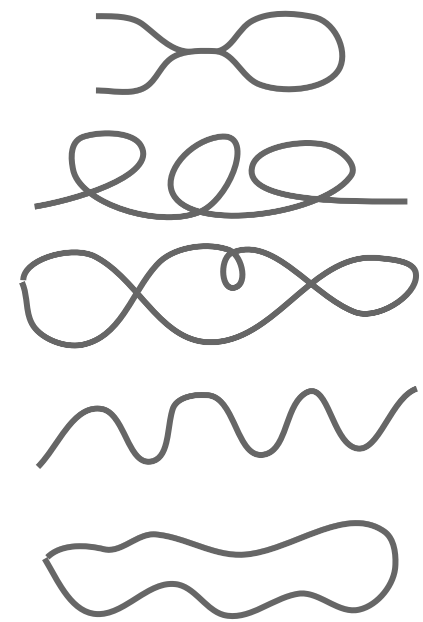
- **Def.:** Um passeio $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ é ***fechado*** se $v_0 = v_k$
- **Def.:** Um ***ciclo ou circuito*** é uma trilha fechada. Um ciclo é ***simples*** se é um caminho fechado. Um grafo que consiste num ciclo simples em n vértices é denotado por $\mathbf{C_n}$.



- c,d,e,f,d,e,c é um passeio fechado (não é um ciclo)
- c,d,e,f,d,b,c é um ciclo (não é simples)
- c,e,f,d,c é um ciclo simples, isomorfo ao C_4

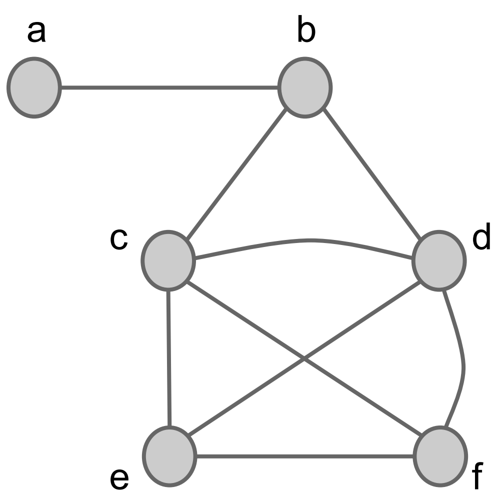
Grafos e Subgrafos

- **Resumo dos tipos de passeio:**

Tipo	Permite repetir...		Sempre Fechado?	
	vértices?	arestas?		
Passeio	✔	✔	-	
Trilha	✔	-	-	
Circuito/ Ciclo	✔	-	✔	
Caminho	-	-	-	
Ciclo Simples	-	-	✔	

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** A ***distância*** entre u, v $\in$ V(G), denotado por ***d(u,v)***, é o menor k para o qual existe um caminho u,...,v de comprimento k



$d(a,a) = 0$

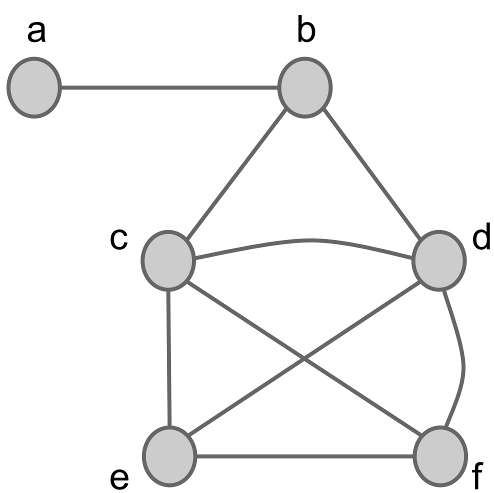
$d(a,b) = 1$

$d(a,d) = 2$

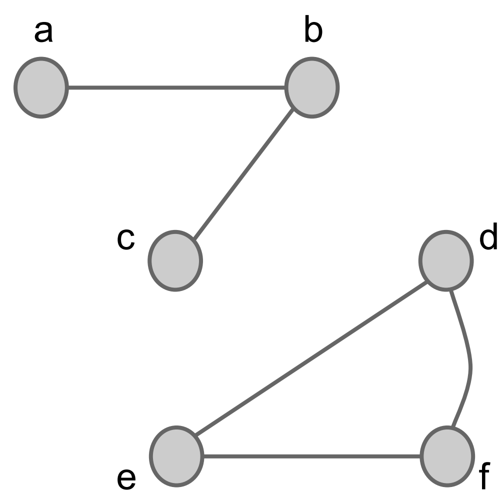
$d(a,f) = 3$

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Um grafo G é ***conexo*** se existe um caminho entre quaisquer u, v ∈ V(G). Caso contrário, é ***desconexo***



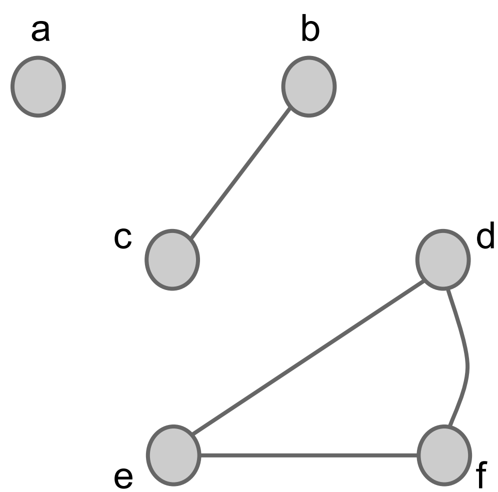
Conexo



Desconexo

Grafos e Subgrafos

- **Def.:** Seja V ⊆ V(G) um conjunto maximal tal que G[V] é conexo. Chamamos G[V] de ***componente conexo*** de G
- O número de componentes conexos de um grafo G é denotado por ***ω(G)***



$\omega(G) = 3$

G[{a}], G[{b, c}] e G[{d, e, f}] são os componentes conexos de G

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uma prova matemática é uma sequência passo-a-passo de como se concluir Y a partir de X. É análogo a um algoritmo, que transforma uma entrada X em uma saída em Y em diversos passos. Assim como um algoritmo, a Matemática tem uma linguagem particular que deve ser conhecida e usada, a fim de conseguir ler e escrever trabalhos de/para outros matemáticos.

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uma prova matemática é tão análoga a um algoritmo que sua depuração é a mesma, "fazendo um Chinês" da mesma: ir seguindo passo-a-passo acompanhando o que é dito por um rascunho e atualizando as variáveis sendo usadas.

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Seja/Tome x ∈ X com propriedade P**" para escolher um elemento arbitrário x de um conjunto X que possua a propriedade P (é necessário que haja pelo menos um!)
  - Seja $x \in \mathbb{N}$ …. (OK)
  - Seja $x \in \{ y \in \mathbb{N} \mid y \text{ é par} \}$ (OK)
  - Seja $x \in \{ y \in \mathbb{N} \mid y \text{ é par}, y > 3, y \text{ é primo}\}$ (errado)
  - Seja $x \in V(G)$ (OK se $V(G) \neq \varnothing$)
  - Seja $x \in E(G)$ (OK se G não for vazio)

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Para mostrar "X **se e somente se** Y **(X ⇔ Y)**", é necessário mostrar a "ida" e a "volta", ou seja, mostramos que se X, então Y ("ida"), e em seguida, mostramos que se Y, então X ("volta")
  - a afirmação "chove ⇒ minha janela fica molhada" pode ser verdade, mas não o contrário!
  - **Exercício:**
    A: "G é conexo"; B: "$\exists\ v \in V(G) : d(v)>1$". Então:
    (a) A ⇒ B ? (b) B ⇒ A? (c) A ⇔ B? (d) NRA
  - o objetivo da elaboração de uma prova é tal que seja verdade a declaração:
    "estudar bastante ⇔ ser aprovado"

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Sem perda de generalidade, suponha/considere X**" para fixar alguma verdade que antes não era necessariamente o caso. Esta expressão denota que esta premissa sempre pode ser admitida ou algum pré-processamento ou pós-processamento nos dados do problema pode ser feito para que X se verifique. Se o pré-/pós-processamento não for informado, ele deve ser trivial de perceber. Exemplos:
  - "Sejam X e Y dois inteiros. Sem perda de generalidade, X ≤ Y." (E se não for?)
  - "Seja V um vetor de inteiros. Sem perda de generalidade, V está ordenado." (E se não estiver?)

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Basta mostrar que X**" para chamar à atenção que se provarmos X, então o trabalho o qual estávamos interessados está finalizado. Exemplos:
  - Objetivo: mostrar que um vetor `V` está ordenado. "Basta mostrar que `V[i] ≤ V[i+1]` para todo `1 ≤ i < |V|`"
  - Objetivo: mostrar que um passeio P é um caminho. "Basta mostrar que em P todo vértice é distinto."

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Naturalmente, X**", "**É claro que X**", "**Trivialmente, X**", etc. para evidenciar um novo fato X cuja dedução o leitor deve chegar sem maiores explicações de maneira simples
  - Ex.: Naturalmente, existe natural k tal que x = 2k. (pressupondo que x ser par é fato)

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Mostraremos que X**" para mostrar o próximo fato X que a prova pretende alcançar. É mais fácil seguir uma prova com o objetivo de destino em mente.
  (Análogo a comentários em uma linguagem de programação!)
  - Ex.: Prove que x é divisível por 6. Prova: Mostraremos que x é par. (....). Agora, mostraremos que x é divisível por 3. (....). Logo, x é divisível por 6.

Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**O raciocínio é análogo para demonstrar X**" para indicar que os mesmos passos de provas utilizados podem ser usados com ligeiras modificações para demonstrar X.

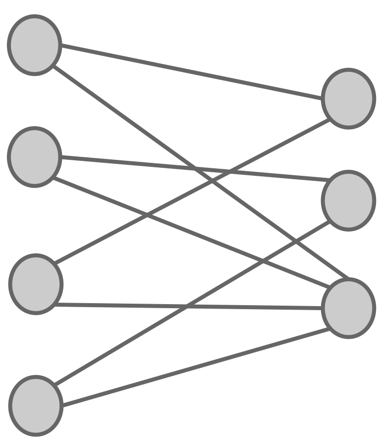
Grafos e Subgrafos

Linguagem das Provas:

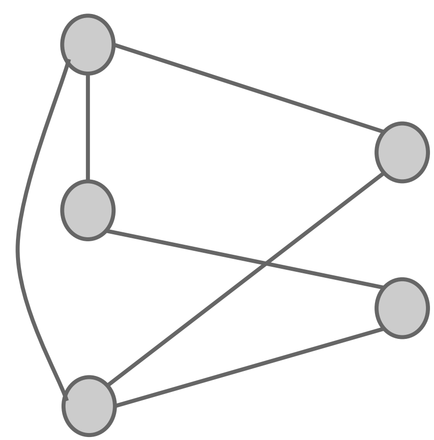
- Por fim: atentar para a notação dos elementos matemáticos:
  - Conjuntos e famílias: $\{ e_1, e_2, ..., e_N \}$
  - Sequências: $e_1, e_2, ..., e_N$
  - Arestas: (u,v) ou uv (se não causar ambiguidade)

Grafos e Subgrafos

Teorema:
Um grafo G é bipartido ⇔ G não contém um ciclo de comprimento ímpar



bipartido



não bipartido

Grafos e Subgrafos

(⇒):

- Seja G um grafo bipartido.
- Sejam $X \cup Y$ uma bipartição de V(G) que comprove que G é bipartido.
- Se G não possui ciclos, vale a ida. Considere então que exista um ciclo $v_0, v_1, v_2, ..., v_k, v_0$ em G.
- Sem perda de generalidade, $v_0 \in X$.
- Como G[X] e G[Y] são vazios, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, $v_3 \in Y$, $v_4 \in X$, $v_5 \in Y$, …, $v_k \in Y$.
- Portanto, k é ímpar.
- O comprimento do ciclo é k+1 e portanto par.

Grafos e Subgrafos

($\Leftarrow$) (1 de 3):

- Seja G um grafo sem ciclos de comprimento ímpar.
- Se G é desconexo, basta mostrar que cada componente conexo H é bipartido para G ser bipartido.
- Sejam H um componente conexo de G e $u \in V(H)$.
- Sejam:
  - $X = \{ v \in V(H) \mid d(u,v) \text{ é par} \}$,
  - $Y = \{ v \in V(H) \mid d(u,v) \text{ é ímpar} \}$.
- Naturalmente, $X \cup Y = V(H)$ e $X \cap Y = \varnothing$. Mostraremos que $G[X]$ e $G[Y]$ são grafos vazios.
- Se $|X| = 1$, $G[X]$ é vazio. Considere então $|X|>1$ e tome distintos $x, y \in X$. Como x,y são vértices arbitrários, basta mostrar que $xy \notin E(H)$ para concluir que $G[X]$ é vazio.

Grafos e Subgrafos

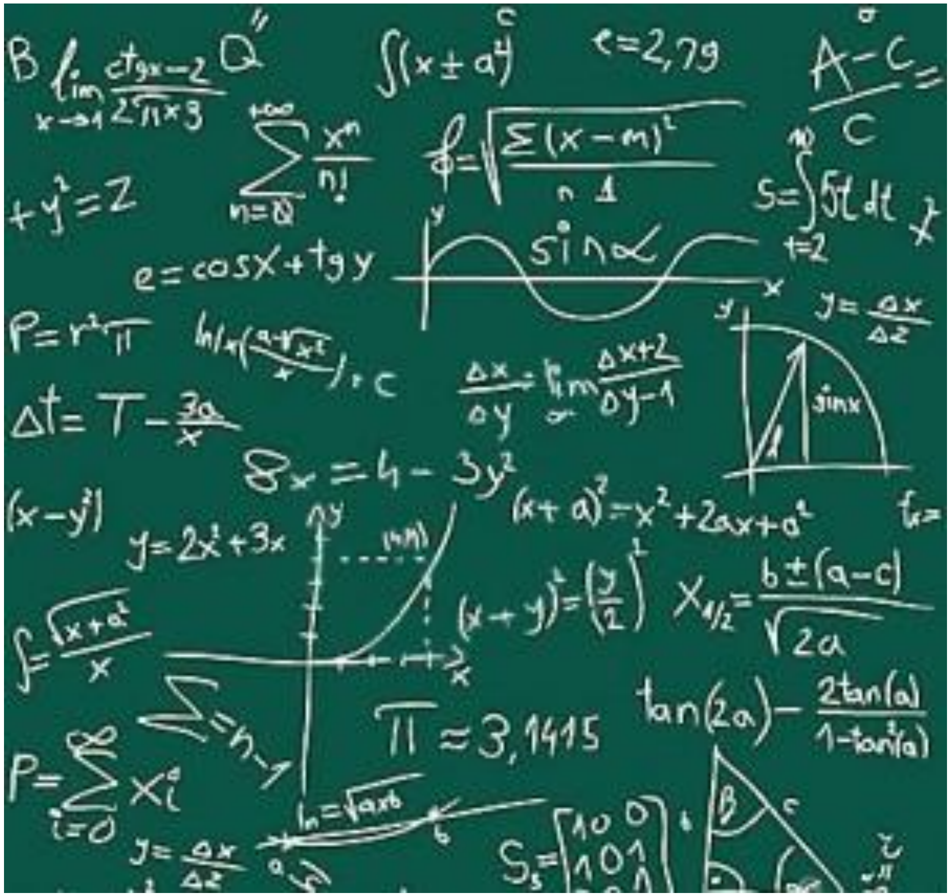
(⇐) (2 de 3):

- Sejam P um menor caminho de u a x e Q um menor caminho de u a y. Seja z o último vértice comum a P e Q.
- Chame de P_1 e P_2 respectivamente os trechos do caminho P de u até z e de z até x. Analogamente, chame de Q_1 e Q_2 respectivamente os trechos do caminho Q de u até z e de z até y.
- Como P e Q são menores caminhos, então $|P_1|=|Q_1|$.
- Como $|P|$ e $|Q|$ são pares, então $|P_2|$ e $|Q_2|$ têm a mesma paridade.
- Logo, o caminho que se obtém de x até z por P_2 seguido de z até y por Q_2 tem comprimento par.
- Se $xy \in E(H)$, há um ciclo de comprimento ímpar, o que não é possível. Logo, $xy \notin E(H)$.

Grafos e Subgrafos

(⇐) (3 de 3):

- O raciocínio é análogo para demonstrar que H[Y] é vazio.
- Logo, X e Y mostram que H é bipartido.



Será que um programador _realmente_ precisa saber Matemática a este ponto?

Grafos e Subgrafos

- Se você quer **criar algoritmos inovadores**, é muito provável que você terá que saber. Argumentos a favor:
    - "Argumentos Técnicos":
        - Programar é criar um processo mecânico para processar uma função matemática. Logo, conhecer funções e todos os assuntos correlatos a ela (Teoria dos Conjuntos, Lógica, Relações, etc.) parece fundamental, não?

Grafos e Subgrafos

- Se você quer **criar algoritmos inovadores**, é muito provável que você terá que saber. Argumentos a favor:
    - "Argumentos Técnicos":
        - Eficiência é executar com o menor número de passos, que significa não fazer todas as verificações que outros algoritmos fazem e ainda assim chegar a uma transformação correta da entrada. Para tanto, é necessário argumentar a correção do novo processo. (Se o algoritmo é inovador, o argumento passou desapercebido de muitos.) Exemplos:
            - Ordenação por Permutações, Bubblesort, e Quicksort.
            - Dado um número N, decidir se N é primo.

Grafos e Subgrafos

- "Argumento da Autoridade":
  A vasta maioria dos Departamentos de Computação do mundo todo colocam a Matemática a seus alunos de Ciência da Computação. Estariam todos errados?

- "Argumento Histórico":
  Os algoritmos mais criativos foram desenvolvidos por Matemáticos ou pessoas que tiveram forte base Matemática. Isto não é um indício de que esta faculdade mental seja desejável a um desenvolvedor de algoritmos?

- "Argumento da Analogia:"
  Um jogador de futebol de alto-desempenho precisa fazer musculação. Afinal de contas, ele vai levantar peso ou jogar bola?

Grafos e Subgrafos

- "Argumento do Custo-Benefício:"
  Programar e demonstrar são muito análogos. Se alguém já sabe um bem, saber o outro é um esforço extra pequeno. Por que não?

- "Argumento do Exemplo"
  Bill Gates, 4 anos depois de ter fundado a Microsoft, publicou um artigo científico com um grande teórico da Computação:
  Gates, W., Papadimitriou, C. (1979). "Bounds for Sorting by Prefix Reversal". Discrete Mathematics 27: 47–57. doi:10.1016/0012-365X(79)90068-2.

Exercícios

Grafos e Subgrafos

1. Mostre que se G e H tem a mesma família de graus, isto é, a família $\{d(v) : v \in V(G)\}$ é igual a família $\{d(v) : v \in V(H)\}$, não necessariamente $G \cong H$.

2. Mostre que há onze grafos simples não-isomorfos que possuem 4 vértices.

3. Um k-cubo, denotado por Q_k, é um grafo cujo conjunto de vértices é formado por todos os números de k-digitos, onde cada digito é 0 ou 1, e dois vértices são adjacentes precisamente quando diferem em exatamente um dígito. Mostre que o número de vértices e de arestas de um k-cubo são respectivamente 2^k e $k2^{k-1}$ para todo $k \geq 1$.

4. Mostre que um k-cubo é um grafo bipartido (ver exercício 3).

5. Mostre que $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$

Grafos e Subgrafos

6. Quantos vértices possui um grafo k-regular com m arestas?

7. Mostre que se um grafo bipartido com bipartição X e Y é k-regular, $k \geq 1$, então $|X| = |Y|$

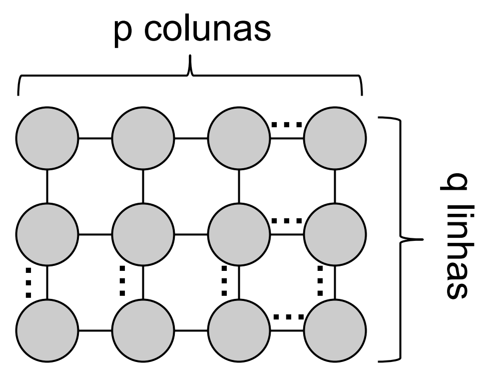
8. Mostre que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, há sempre duas com exatamente o mesmo número de conhecidos dentro do grupo. (Modele este problema com um grafo e argumente com o uso do grafo.)

9. Mostre que se há um passeio de u até v em G, então há um caminho de u até v em G.

10. Mostre que se G é desconexo, então G^c é conexo.
11. Mostre que quaisquer dois caminhos mais longos num grafo conexo tem um vértice em comum.

Grafos e Subgrafos

12. Mostre que se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo.



13. Um grafo grade $G_{p,q}$ é como indicado na figura.
    a. $|E(G_{p,q})| = ?$
    b. $G_{p,q}$ é bipartido?

14. Considere um grafo G_P que modela os movimentos possíveis da peça P do jogo de xadrez, onde P pode ser dama, rei, bispo, cavalo ou torre, da seguinte forma: há um vértice em G_P para cada casa do tabuleiro e as casas u e v são adjacentes exatamente se a peça P estando na casa u pode se movimentar para a casa v (consulte https://pt.wikipedia.org/wiki/Leis_do_xadrez para conhecer os movimentos de cada peça). Pergunta-se:
    a. quanto vale $|E(G_P)|$ se o tabuleiro é 8x8?
    b. quanto vale $|E(G_P)|$ se o tabuleiro é NxN?
    c. G_P é bipartido?

Grafos e Subgrafos

15. O grafo de Petersen G é definido da seguinte forma: V(G) é o conjunto com os subconjuntos de tamanho 2 de {1,2,3,4,5} e E(G) = { (u,v) : u, v $\in$ V(G) | u $\cap$ v = $\varnothing$ }. Desenhe o grafo de Petersen.

16. Qual o número de arestas do bipartido completo $K_{p,q}$ e do seu complemento?

17. Uma aplicação feita para uma empresa possui a seguinte modelagem em grafos: cada funcionário e cada atividade da empresa são representados por um vértice e uv é uma aresta deste grafo se o funcionário u consegue empenhar a atividade v. Este grafo é necessariamente:
    a. simples?
    b. ausente de vértices de grau 0?
    c. conexo?
    d. regular?
    e. bipartido?

Grafos e Subgrafos

18. O grafo de intervalo de uma família de intervalos $F = \{I_1, \ldots, I_n\}$ da reta real é o grafo tal que o conjunto de vértices é F e I_i e I_j são adjacentes no grafo se $I_i \cap I_j \neq \varnothing$.
    a. desenhe o grafo de intervalo da família de intervalos cujos elementos são $I_1 = [0,3]$, $I_2 = [2,5]$, $I_3 = [6,7]$, $I_4 = [1,8]$, $I_5 = [4,10]$, $I_6 = [9,11]$
    b. existe $V \subseteq V(G)$ tal que $G[V] \cong P_4$?
    c. é possível existir $V \subseteq V(G)$ tal que $G[V] \cong C_4$ para algum grafo de intervalo G?

19. Seja $S = \{1,2,3\}$. Seja G tal que V(G) é o conjunto dos subconjuntos de S e $(S_1, S_2) \in E(G)$ se $S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$. Desenhe o grafo G.

20. O grafo linha de um grafo G, denotado por L(G), é o grafo H tal que V(H) = E(G) e $(e_1, e_2) \in E(H)$ se e_1 e e_2 possuem um vértice em comum. Desenhe: (a) $L(P_n)$, (b) $L(C_n)$, (c) L(G), onde G é o exemplo de grafo simples dado no material.

Grafos e Subgrafos

21. Detemine $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ nos seguintes casos: (a) $G \cong P_n$, (b) $G \cong C_n$, (c) $G \cong K_n$, (d) $G \cong K_{p,q}$

22. Verdadeiro ou Falso?
    a. Todo grafo 2-regular é isomorfo a um ciclo.
    b. Se H é subgrafo de G tal que V(H) = V(G), então $H \cong G$.
    c. Se H é subgrafo de G tal que E(H) = E(G), então $H \cong G$.
    d. Seja G um grafo e $v \in V(G)$ tal que $d(v) = \Delta(G)$. Então, $\Delta(G-v) = \Delta(G)-1$.
    e. Todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo.
    f. Se V(G) = {1,...,6} e E(G) = {32,61,65,34,21,45}, então G é um C_6
    g. G_{CAVALO} em um tabuleiro 3×3 é isomorfo a um C_9 (ver exercício 14)
    h. o complemento de todo grafo regular é regular
    i. Todo grafo acíclico e conexo é um grafo bipartido, mas não o contrário.

Grafos e Subgrafos

23. Determine o complemento de P_3, P_4, P_5, C_3, C_4, C_5 e C_6.

24. Mostre que um k-cubo é isomorfo a um subgrafo do (k+1)-cubo (ver exercício 3).

25. Dado grafo G e inteiro k, elabore um procedimento para se obter o subconjunto $X \subseteq V(G)$ de tamanho máximo tal que $\delta(G[X]) \geq k$.

26. Seja G um grafo. Mostre que L(G) não possui um $K_{1,3}$ como subgrafo induzido (ver exercício 20).

27. Qual o comprimento do maior caminho em $G_{p,q}$ (ver exercício 13)? E do maior ciclo? E da maior distância encontrada entre um par de vértices?

Grafos e Subgrafos

28. Mostre que todo grafo G tem um caminho de comprimento $\delta(G)$.

29. Determine a clique máxima nos seguintes grafos:
    a. P_n, $(P_n)^C$
    b. C_n, $(C_n)^C$
    c. K_n, $(K_n)^C$
    d. G_P, para cada P (ver Ex. 14)
    e. Q_n (ver Ex. 3)

30. Um conjunto independente de um grafo é um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que G[S] é um grafo vazio. Se S é conjunto independente de G, o que S é em relação a G^C?

31. Mostre que um grafo pode ter um número exponencial de cliques máximas em função de n, isto é, o número de cliques máximas distintas é $\Omega(c^n)$, para alguma constante $c > 1$.