Coloração em Grafos

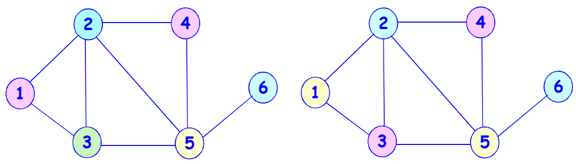
Notas de aula da disciplina IME 04-11311
Algoritmos em Grafos (Teoria dos Grafos)

Paulo Eustáquio Duarte Pinto
(pauloedp at ime.uerj.br)

junho/2018

Grafos – Coloração de Vértices

Uma **coloração própria** de vértices de um grafo G é uma atribuição de uma cor do conjunto $C = \{c_i\}$ para cada vértice de G tal que vértices vizinhos não tenham a mesma cor. Uma **k-coloração própria** é aquela que utiliza k cores. O **número cromático** $\chi(G)$ é o menor valor de k para o qual existe uma k-coloração própria.

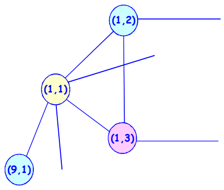


Uma 4-coloração e uma 3-coloração para G. O número cromático de G é 3 (porque?).

Grafos – Coloração de Vértices

Ex: Sudoku
Um problema de sudoku pode ser resolvido criando-se um grafo onde cada casa da matriz seja vizinho a todos da mesma linha, mesma coluna e mesmo mini-quadrado. A solução consiste em colorir esse grafo com 9 cores.

1		6		4			4	
			3	7	1			8
	3					9		7
4			5	8		6		
		3	6		7			5
2		8					3	
5			7	3	8			
	1			2		5		

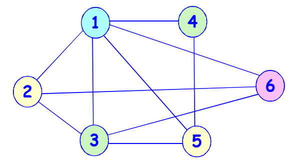


Nesse grafo cada vértice tem grau 24.

Grafos – Coloração de Vértices

Ex: Conferência
Vai ser realizada uma conferência com representantes de diversos países. Representantes de países inimigos não devem ficar no mesmo hotel. Qual o número mínimo de hotéis necessários?
A solução é criar um grafo de inimizades e encontrar a coloração mínima.

	1	2	3	4	5	6
1		X	X	X	X	X
2	X		X			X
3	X	X			X	
4	X				X	
5	X		X	X		
6	X	X	X			



Seria necessário reservar 4 hotéis.

Grafos – Coloração de Vértices

Teorema 8: Seja k o tamanho da clique máxima de um grafo G. Então

$$k \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$$

Prova:

a) $k \le \chi(G)$
Seja K, com $k = |K|$, uma clique máxima de G. Então nenhum vértice de K pode ter a mesma cor. Logo, precisamos de, no mínimo, k cores para colorir G.

b) $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$
A prova é construtiva. Inicialmente os vértices não estão coloridos. Tome um conjunto de cores $C = \{1, 2, \ldots \Delta(G) + 1\}$ com $\Delta(G) + 1$ elementos. Tome cada vértice $v \in V$. Se v ou algum vizinho de v não estiver colorido, sempre existirá uma cor do conjunto C ainda não usada e aplicável ao vértice não colorido, pois $N(v) \le \Delta(G)$. Serão usadas $\Delta(G) + 1$ cores, no máximo.

Grafos – Coloração de Vértices

EXS11

1. Desenhar um grafo não completo cujo número cromático seja $\chi(G)$ = tamanho da clique máxima.

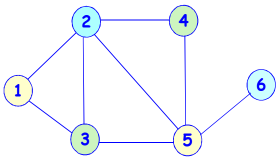
2. Desenhar um grafo não completo cujo número cromático seja $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

3. Desenhar um grafo cujo número cromático satisfaça a
   tamanho da clique máxima $< \chi(G) < \Delta(G) + 1$.

Grafos – Coloração de Vértices – Coloração aproximada

Encontrar o número cromático de um grafo é um problema NP-completo, mas há bons algoritmos para fazer uma coloração aproximada.

A idéia do algoritmo a ser apresentado é ordenar os vértices por grau, de forma não crescente e, gulosamente, colorir os vértices, usando a menor cor não presente na vizinhança do vértice considerado.

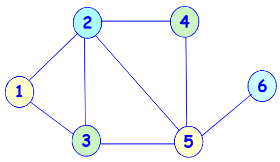


Grafos – Coloração de Vértices – Coloração aproximada

```
Coloração aproximada()
#dados G(V,E)
    ordenar V em ordem não crescente de graus
    para i ← 1 até n incl.:
        cor[i] ← 0;   f[i] ← 0;
    para i ← 1 até n incl.:
        para j ← 1 até n incl.:
            se (E[V[i], j]=1) e (cor[j] ≠ 0):
                f[cor[j]] ← i;
        r ← 1;
        enquanto (cor[V[i]] = 0):
            se (f[r]≠ i):
                cor[V[i]] ← r;
            senão:
                r ← r+1;
```

Grafos – Coloração de Vértices – Coloração aproximada

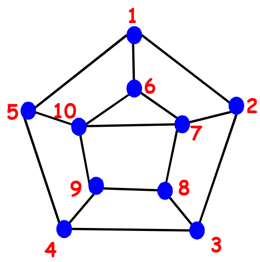
Exemplo de aplicação do algoritmo.



V	C			F			
		1	2	3	4	5	6
5	1	0	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0	0
3	3	3	3	0	0	0	0
1	1	3	4	4	0	0	0
4	3	5	5	4	0	0	0
6	2	6	5	4	0	0	0

Grafos – Coloração de Vértices – Coloração aproximada

EXS12 - Aplicar o algoritmo de coloração aproximada ao grafo abaixo.

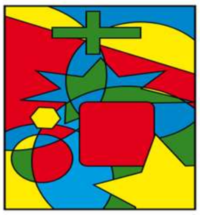


Grafos – Coloração de Vértices

Teorema 9: Um grafo é bicolorível sse for bipartido.

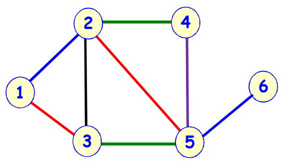
Teorema 10 (Headwood, 1890): Todo grafo planar é 5-colorível.

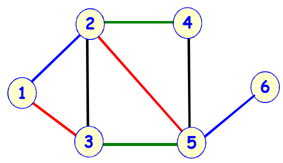
Teorema 11 (Appel e Hacken, 1976): Todo grafo planar é 4-colorível.



Grafos – Coloração de Arestas

Uma coloração própria de arestas de um grafo *G* é uma atribuição de uma cor do conjunto *C* = {c_i} para cada aresta de *G* tal que arestas adjacentes não tenham a mesma cor. Uma k-coloração própria é aquela que utiliza k cores. O índice cromático $\chi'(G)$ é o menor valor de k para o qual existe uma k-coloração própria.

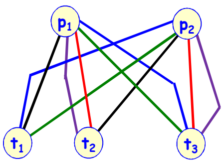




Uma 5-coloração e uma 4-coloração para *G*. O índice cromático de *G* é 4 (porque?).

Grafos – Coloração de Arestas

Ex: Planejamento de horário
Existem 3 turmas e 2 professores. O professor 1 deve dar uma aula para a turma 1, 2 para as outras duas turmas. O professor 2 uma aula para a turma 2 e duas aulas para as outras duas turmas. Em quantos tempos de aula consegue-se organizar os horários?
A solução é criar um grafo e colorir arestas com o menor número de cores.



	t_1	t_2	t_3
h_1	p_1	p_2	-
h_2	p_2	-	p_1
h_3	p_2	-	p_1
h_4	-	p_1	p_2
h_5	-	p_1	p_2

Consegue-se planejar os horários em 5 tempos.

Grafos – Coloração de Arestas

Teorema 12: Seja G um grafo simples bipartido. Então o índice cromático de G é $x'(G) = \Delta(G)$.

Teorema 13 (Vizing): Seja G um grafo simples. Então o índice cromático de G é

$$\Delta(G) \leq x'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

O problema de determinar se $x'(G) = \Delta(G)$ ou $x'(G) = \Delta(G) + 1$ é um problema NP-completo.

Grafos – Coloração de Arestas

EXS13

1. Desenhar um grafo cujo índice cromático seja
   $x'(G) = \Delta(G)$.

2. Desenhar um grafo cujo índice cromático seja
   $x'(G) = \Delta(G) + 1$.

3. Determinar:
   $x'(K_n) =$
   $x'(P_n) =$
   $x'(C_n) =$

Coloração em Grafos

FIM