Noções de Lógica

Com a mátemática do curso fundamental e médio, aprendemos a resolver alguns problemas, como resolução de algumas equações, cálculo de áreas de figuras simples como retângulos,trapézios,etc... Tais problemas correspondem aos conhecimentos da Matemática grega e dos séculos XVI e começo do XVII.

É claro, porém, que a Matemática não parou aí. As grandes navegações do século XVI, o surgimento da indústria, os interesses do grande comércio que surgia na época, exigiam conhecimentos novos.O estudo da Matemática passou para um nível menos elementar e para compreendermos os recursos que ela nos oferece, necessitamos da capacidade de clarificar conceitos e de argumentar, isto é, de adquirir (e transmitir) certezas a propósito da validade de certas afirmações, a partir do reconhecimento da validade de outras, normalmente mais simples. A esta capacidade de clarificar conceitos (apresentar definições) e de argumentar (exibir demonstrações), daremos o nome de raciocínio lógico, ou raciocínio matemático. Este raciocínio surgiu historicamente, de forma sistemática, há mais de dois mil anos com a Escola dos geómetras gregos e desenvolve-se gradualmente ao longo da vida de muitos de nós. No entanto, num número infelizmente grande de casos, constata-se o aparecimento de bloqueamentos que impedem muitas pessoas de raciocinar corretamente em termos lógicos, mesmo em situações por muitos consideradas como extremamente simples.

Se mesmo para um estudante que foi adquirindo de forma satisfatória a capacidade de raciocinar em termos matemáticos pode ser culturalmente interessante uma reflexão sobre o modo como o raciocínio se desenvolve, pensamos que uma tal reflexão, se feita de um modo equilibrado, pode contribuir para ajudar o estudante com dificuldades em pensar matematicamente.

Este texto, de caráter introdutório, visa estimular uma reflexão sobre as bases do Raciocínio Matemático, no qual, necessitamos conhecer algumas regras básicas da linguagem e da lógica matemática.

Proposição

Toda proposição é uma frase mas nem toda frase é uma proposição.

Uma frase é uma proposição apenas quando admite um dos valores lógicos:

Falso(F) ou **Verdadeiro(V)**.

Exemplos
Frases que não são proposições
1) Pare!
2) Quer uma xícara de café?
3) Eu não estou bem certo se esta cor me agrada.
4) O menor número primo maior que 1000.
5) A reta que passa pelo ponto P e é paralela à reta r.

Frases que são proposições
1) A lua é o único satélite do planeta Terra. (V)
2) A cidade de Salvador é a capital do estado do Amazonas. (F)
3) Todo número primo maior do que 2 é ímpar. (V)
4) Todo número ímpar é primo.(F)
5) Existe um número natural cujo dobro é 5. (F)

Composição de Proposições

É possível construir proposições a partir de proposições já existentes. Este processo é conhecido por Composição de Proposições. Suponha que tenhamos duas proposições,

A = "Maria tem 23 anos"
B = "Maria é menor"

Pela legislação corrente de um país fictício, uma pessoa é considerada de menor idade caso tenha menos que 18 anos, o que faz com que a proposição **B** seja **F**, na interpretação da proposição **A** ser **V**. Vamos a alguns exemplos:
"Maria não tem 23 anos" (não(**A**))
"Maria não é menor"(não(**B**))
"Maria tem 23 anos" e "Maria é menor" (**A** e **B**)
"Maria tem 23 anos" ou "Maria é menor" (**A** ou **B**)
"Maria não tem 23 anos" e "Maria é menor" (não(**A**) e **B**)
"Maria não tem 23 anos" ou "Maria é menor" (não(**A**) ou **B**)
"Maria tem 23 anos" ou "Maria não é menor" (**A** ou não(**B**))
"Maria tem 23 anos" e "Maria não é menor" (**A** e não(**B**))
Se "Maria tem 23 anos" então "Maria é menor" ($\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$)
Se "Maria não tem 23 anos" então "Maria é menor" (não($\mathbf{A}$) $\Rightarrow \mathbf{B}$)
"Maria tem 18 anos" é equivalente a "Maria não é menor" ($\mathbf{C} \Leftrightarrow$ não($\mathbf{B}$))

Note que, para compor proposições usamos: não (negação), e (conjunção), ou (disjunção), $\Rightarrow$ (implicação) e, finalmente, $\Leftrightarrow$ (equivalência). São os chamados **conectivos lógicos**. Note, também, que usou-se um símbolo para representar uma proposição: **C** representa a proposição Maria tem 18 anos. Assim, não(**B**) representa Maria não é menor, uma vez que **B** representa Maria é menor.

Os **conectivos** serão denotados da seguinte forma:

$\sim$	corresponde a	”não”
$\wedge$	corresponde a	”e”
$\vee$	corresponde a	”ou”
$\Rightarrow$	corresponde a	”então” ou ”implicação”
$\Leftrightarrow$	corresponde a	”se somente se” ou ”equivalência”

Exemplos
Proposição A: Todo número primo é ímpar.
Proposição B: O número 2 é par.

$\tilde{\text{A}}$: Existe um número primo que não é ímpar.
A $\wedge$ B: Todo número primo é ímpar e o número 2 é par.
A $\vee$ B: Todo número primo é ímpar ou o número 2 é par.
B $\Rightarrow$ $\tilde{\text{A}}$: Se o número 2 é par então existe um número primo que não é ímpar.
$\tilde{\text{A}}$ $\Leftrightarrow$ B: Existe um número primo que não é ímpar se e sómente se o número 2 é par.

Observações

I) Quando fazemos a negação de uma proposição é melhor escolhermos a que forma uma frase afirmativa. Por exemplo, a negação da proposição ”todo homem é mortal” é ”nem todo homem é mortal”, mas, em forma afirmativa temos ”existe um homem imortal”.

II) Uma propriedade muito simples da negação é a chamada **lei da dupla negação**: A negação da negação de uma proposição tem o mesmo valor lógico que a proposição original. Por exemplo, o valor lógico de A: $4 = 3$, cuja negação é $\tilde{\text{A}}$: $4 \neq 3$ tem o mesmo valor lógico da negação da negação $\tilde{\tilde{\text{A}}} = \text{A}$: $4 = 3$.

III) A conjunção aparece muitas vezes na linguagem corrente através da utilização da palavra ”e”, embora por vezes ela esteja disfarçada sob outras formas. Por exemplo:

a) A proposição A:($7 > 5$ e $5 > 3$), que é verdadeira, é a conjunção das duas proposições verdadeiras ($7 > 5$) e ($5 > 3$);

b) A proposição B: (quer 11, quer 111, são números primos) é a conjunção das proposições (11 é um número primo) e (111 é um número primo) , a primeira verdadeira e a segunda falsa, e portanto a proposição B é falsa;

c) A proposição C:(nem 5, nem 7, são números primos) é a conjunção das proposições falsas (5 não é um número primo) e (7 não é um número primo) e assim a proposição C é falsa.

IV) O valor lógico da **negação da disjunção** de duas proposições é o mesmo da **conjunção das negações** das duas proposições. Por exemplo, dizer que a proposição [não($\pi = 3 \vee \pi = 4$)] é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição $(\widetilde{\pi = 3}) \wedge (\widetilde{\pi = 4})$ a qual é escrita habitualmente na forma $\pi \neq 3$ e $\pi \neq 4$.

Por razões análogas se constata que o valor lógico da **negação da conjunção** de duas proposições é o mesmo da **disjunção das negações** das duas proposições. Por exemplo, dizer que é falsa a afirmação (9 é primo **e** ímpar) (ou seja, que a sua negação é verdadeira) é o mesmo que dizer que a afirmação [(9 não é primo) **ou** (9 não é ímpar)] é verdadeira.

É comum uma pessoa menos atenta cometer o erro de negar uma conjunção ou disjunção sem reparar que é necessário trocar o conectivo.

Exercício 1. Escreva cada uma das proposições seguintes de forma a tornar claro o modo como intervêm na sua formação os conectivos lógicos de negação, conjunção e disjunção.
a) 3 é um divisor comum de 9 e 12.
b) 9 não é primo nem par.
c) 5 divide pelo menos um dos números 7 e 10.

Exercício 2. Escreva a negação das seguintes proposições:
a) π^2é simultaneamente maior e menor que 10.
b) Vou ao cinema ou como pipocas.
c) O Carlos e o João gostam de nadar.
d) O Filipe não sabe ler ou está distraído.

Observações sobre Sentenças Condicionais

Uma sentença condicional é uma frase do tipo *Se A, então B*, onde usamos o conectivo lógico "então" ($\Rightarrow$) para compormos a proposição.

Na proposição P:(A $\Rightarrow$ B), a proposição A é chamada de **hipótese** da proposição P (ou antecedente) e a proposição B é chamada de **tese** da proposição P (ou consequente).

Exemplos

1) P_1: Se m e n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par.
hipótese: m e n são inteiros pares.
tese: o produto mn é um inteiro par.
2) P_2: Se m é um inteiro múltiplo de 3, então m é um inteiro múltiplo de 9.
hipótese: m é um inteiro múltiplo de 3.
tese: m é um inteiro múltiplo de 9.

Se um objeto matemático satisfaz a condição dada pela hipótese, dizemos simplesmente que o objeto *satisfaz a hipótese* da proposição. Analogamente, se um objeto matemático satisfaz a condição dada pela tese, dizemos simplesmente que o objeto *satisfaz a tese* da proposição.

Por exemplo, $m = 18$ satisfaz tanto a hipótese quanto a tese de P_2. Já $m = 6$ satisfaz a hipótese mas não satisfaz a tese de P_2.

Nosso objetivo principal é dar um significado preciso a afirmações como: ***A proposição*** $\boldsymbol{P_1}$ ***é verdadeira*** e ***A proposição*** $\boldsymbol{P_2}$ ***é falsa***. Para isso, enunciaremos os Dois Princípios da Lógica.

Dois Princípios de Lógica

Princípio da não Contradição

O princípio da não contradição afirma que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente. Em outras palavras, se uma proposição **A** for verdadeira, sua negação $\tilde{\mathbf{A}}$ não pode ser verdadeira.

Princípio do Terceiro Excluído

O chamado princípio do terceiro excluído afirma que qualquer proposição só pode ter dois valores lógicos, isto é, é verdadeira (V) ou falsa (F), não podendo ter outro valor. Em outras palavras , ou **A** é verdadeira, ou $\tilde{\mathbf{A}}$ é verdadeira, não sendo possível uma terceira alternativa.

Para podermos definir quando uma proposição *Se A, então B* possui o atributo *verdadeiro* (e, conseqüentemente, quando possui o atributo *falso*), necessitamos dos conceitos de exemplo e contra-exemplo para uma tal proposição:

Um exemplo para uma proposição do tipo "Se A, então B" é um objeto matemático que satisfaz a hipótese e a tese da proposição.

Um contra-exemplo para uma proposição do tipo "Se A, então B" é um objeto matemático que satisfaz a hipótese e **não** satisfaz a tese da proposição.

Se existe pelo menos um contra-exemplo para uma proposição,dizemos que a proposição admite contra-exemplos. Analogamente, com a frase: a proposição não admite contra-exemplos, estamos dizendo que nenhum objeto matemático é um contra-exemplo para a proposição.

Exemplos

1) A dupla de números $m = 4$ e $n = 6$ é um exemplo para a proposição P_1.
2) O número inteiro 18 é um exemplo para a proposição P_2.
3) O número inteiro 6 é um contra-exemplo para a proposição P_2.

É importante observar que se um objeto matemático não satisfaz a hipótese de uma proposição, então esse objeto não pode ser nem exemplo nem contra-exemplo para a proposição. A dupla de números, $m = 4$ e $n = 7$, não é contra-exemplo e nem exemplo da proposição P_1, pois não satisfaz a hipótese, embora satisfaça a tese.

Exercício 3. Para cada uma das expressões seguintes encontre, se possível, substituições de variáveis que as transformem em proposições verdadeiras e em proposições falsas. Considere que as variáveis x e y pertençam ao conjunto dos números reais.

a) $x^2 - 3x = 4$
b) $x^2 = xy$
c) $x + y < x$
d) $x^2 + 1 > 0$
e) $x + 1 = x - 1$

Vamos definir os critérios para decidirmos se uma sentença condicional é verdadeira ou falsa.

Primeiro: Uma proposição "Se A,então B" é verdadeira exatamente quando não admite contra-exemplos.

Em particular, uma proposição "Se A, então B" com a propriedade de que **em todas as situações nas quais a hipótese é satisfeita tem-se que a tese também é satisfeita,** é uma proposição verdadeira.

Uma proposição "Se A, então B" é falsa quando admite contra-exemplos.

Vimos que $m = 6$ é um contra exemplo para a proposição P_2, ou seja, P_2 admite um contra-exemplo e, portanto,P_2 é falsa.

Agora, consideremos a proposição: " Se n é um número inteiro tal que $n^2 = 2$, então $n = 0$". Como sabemos que , para qualquer número inteiro n, tem-se que $n^2 \neq 2$, temos que não existe nenhum objeto matemático que satisfaz a hipótese dessa proposição. Em particular , essa proposição não admite contra-exemplos sendo, assim, verdadeira. Uma proposição que não admite exemplos e nem contra-exemplos, é dita verdadeira por vacuidade.

Resumindo:

- Para provarmos que uma proposição é falsa, basta exibirmos um contra-exemplo.
- A apresentação de exemplos, mesmo que muitos, para uma proposição **não** é suficiente para provar que a mesma é verdadeira.(Podemos exibir muitos exemplos para P_2 e no entanto sabemos que P_2 é falsa).
- Para provarmos que uma proposição é verdadeira, devemos mostrar que **em toda situação em que sua hipótese é satisfeita tem-se que sua tese também é satisfeita**, ou seja, devemos provar que a proposição não admite contra-exemplos.
- Se uma proposição "Se A, então B" é verdadeira, sabemos que **todo objeto matemático que satisfaz a condição A** também **satisfaz a condição B**.
- Se uma implicação $A \Rightarrow B$ é verdadeira por vacuidade, essa proposição não tem nenhuma utilidade para provarmos que algum objeto satisfaz a condição B.
- Observamos que afirmar que a negação de uma implicação $A \Rightarrow B$ é verdadeira é o mesmo que afirmar que a hipótese A é verdadeira e a tese B é falsa ou seja, dito de outro modo, que o antecedente e a negação do consequente são ambos verdadeiros.
  Regra da negação de uma implicação: O valor de verdade da negação de uma implicação é o mesmo que o da conjunção entre o antecedente e a negação do consequente.

Exercício 4. Dê exemplos e contra-exemplos (se existirem) para as proposições abaixo:
a) Se $x \leq \dfrac{1}{5}$ então $-1 < x < 3$.
b) Se $\dfrac{3x-4}{x+2} < 1$ então $x < 0$.
c) Se $|x-1| < 2$ então $x \geq 0$.
d) Se $x < 2$ então $x \leq 5$.

Exercício 5. Utilize a regra da negação de uma implicação para encontrar proposicões, cujo valor de verdade seja o da negação de cada uma das seguintes:
a) Se choveu então fui ao cinema.
b) Se alguém não quer ser lobo então não lhe veste a pele.
c) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$.

Para analisarmos as proposições que utilizam o conectivo "se e somente se" precisamos entender o que ocorre com a recíproca de "Se A, então B".

A recíproca de "Se A, então B"

A partir da proposição P: Se A, então B, podemos construir uma nova proposição do mesmo tipo, Q: Se B, então A, que é chamada a recíproca de P. Claramente a recíproca de Q é P, daí dizermos que P e Q são proposições recíprocas.

Exemplos
1) A recíproca de
P_1: Se m e n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par,
é a proposição
Q_1: Se o produto mn é um inteiro par, então m e n são inteiros pares.
2) A recíproca de
P_2: Se m é um inteiro múltiplo de 3, então m é um inteiro múltiplo de 9,
é a proposição
Q_2: Se m é um inteiro múltiplo de 9, então m é um inteiro múltiplo de 3.

Exercício 6. Para cada uma das seguintes proposições encontre formulações para as respectivas recíprocas.
a) $xy = x \Rightarrow y = 1$.
b) Quem muito fala pouco acerta.

Exercício 7. Considere a proposição: $-2 < x \leq 3 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < x < 3$.
a) $x = -1$ é um contra-exemplo para a proposição?
b) $x = 3$ é um exemplo para a proposição?
c) $x = 0$ é um exemplo para a proposição?
d) A proposição é verdadeira ou falsa?
e) Enuncie a recíproca da proposição.

Exercício 8. Considere a proposição: $\dfrac{2}{x+1} < 1 \Rightarrow x > 1$.
a) $x = 0$ é um contra-exemplo para a proposição?
b) $x = -2$ é um contra-exemplo para a proposição?
c) A proposição é verdadeira ou falsa?
d) Enuncie a recíproca da proposição.

Exercício 9. Considere a proposição: $|x| > 1 \Rightarrow x > 1$.
a) $x = 0$ é um exemplo para a proposição?
b) $x = 0$ é um contra-exemplo para a proposição?
c) $x = -2$ é um contra-exemplo para a proposição?
d) A proposição é verdadeira ou falsa?
e) Enuncie a recíproca da proposição.

Exercício 10. Considere a proposição: $\dfrac{x+17}{2x+1} < 3 - x \Rightarrow -1 < x < \dfrac{1}{2}$.
a) $x = 0$ é um exemplo para a proposição?
b) $x = -2$ é um contra-exemplo para a proposição?
c) $x = -4$ é um contra-exemplo para a proposição?
d) A proposição é verdadeira ou falsa?
e) Enuncie a recíproca da proposição.

Exercício 11. Considere a proposição: $8x^7 - 4x^5 + x^4 - 2x + 1 < 5 \Rightarrow x < -\dfrac{1}{2}$.
a) $x = -1$ é um exemplo para a proposição?
b) $x = 0$ é um contra-exemplo para a proposição?
c) $x = 1$ é um contra-exemplo para a proposição?
d) A proposição é verdadeira ou falsa?
e) Enuncie a recíproca da proposição.

É importante observarmos que os atributos de uma proposição e sua recíproca são independentes.

Embora não seja a situação mais comum, muitas proposições verdadeiras possuem recíprocas verdadeiras, daí a conveniência de podermos expressar de uma forma compacta uma proposição e sua recíproca utilizando o conectivo "se e somente se", ou seja

Uma proposição do tipo "A se, e somente se B", é verdadeira quando "Se A, então B" e sua recíproca , "Se B, então A", saõ ambas verdadeiras.

Exemplo
m é um inteiro e m^2 é par se, e somente se, m é um inteiro par.

Exercício 12. Escreva cada uma das proposições seguintes de forma a tornar claro o modo como intervêm na sua formação os conectivos lógicos.

a) Ou $x^2 + y^2 > 0$, ou tem-se simultaneamente $x = 0$ e $y = 0$.

b) Ou $n = 1$, ou n não é divisor de 9 , ou n não é divisor de 10.

c) O número x é maior que pelo menos um dos números y e z.

d) Os números x e $-x$ são ambos menores que y.

e) n é múltiplo de 5 e de 7.

f) Nem x nem y são números positivos.

g) Se $x \neq y$ e x não é menor que y, então y é menor que x.

h) Se $xy = 1$ e $x \neq y$, então $x < 1$ ou $y < 1$.

i) $3x = 6$ quando $2x = 4$.

j) $x^2 = 4$ se, e só se $x = 2$.

l) Quer no caso em que $x < 0$, quer naquele em que $x > 0$, tem-se $x^2 > 0$.

m) É condição necessária e suficiente para que $xy < xz$ que seja $x < 0$ e $y < z$.

n) Se x é simultaneamente maior e menor que 0, então x^2 é menor que 0.

Tabela Verdade

A tabela-verdade, como se sabe, é um instrumento eficiente para a especificação do valor lógico de uma composição de proposições. Abaixo segue a tabela-verdade dos conectivos aqui tratados,

A	B	Negação $\tilde{A}$	Conjunção $A \wedge B$	Disjunção $A \vee B$	Implicação $A \Rightarrow B$	Equivalência $A \Leftrightarrow B$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

Exemplos

Determinar se a sentença: $(A \wedge B) \Rightarrow P$, é verdadeira ou falsa, sabendo que a proposição A é V, a proposição B é V e a proposição P é F.

Solução:

A	B	P	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow P$
V	V	F	V	F

Exercício 13. Determinar se a sentença: $[A \wedge (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow [\tilde{A} \wedge (B \vee C)]$, é verdadeira ou falsa, sabendo que a proposição A é V, a proposição B é F e a proposição C é V.

Exercício 14. Determinar se a sentença: $A \Rightarrow [(\tilde{B} \Leftrightarrow C) \wedge (C \vee D)]$, é verdadeira ou falsa, sabendo que a proposição A é V, a proposição B é F , a proposição C é F e a proposição D é V.

Exercício 15. Existem valores verdade de p e q que tornem a sentença $(p \wedge q) \Leftrightarrow [\tilde{q} \Rightarrow (q \vee p)]$ verdadeira? Justifique.

Exercício 16. Admitindo-se falso o condicional $p \Rightarrow q$, dê o valor lógico da sentença $[\sim (p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow p \wedge q$. Justifique.

Tautologia

As tautologias são verdades lógicas: são proposições tais que, independentemente do valor lógico atribuido às suas componentes, recebem o valor lógico verdadeiro. Uma maneira muito natural de determinar se uma proposição é uma tautologia é utilizando tabelas verdade, pois possui apenas o valor V.

Exemplo
Verifique que a sentença: $p \vee \tilde{p}$ é uma tautologia.

p	$\tilde{p}$	$p \vee \tilde{p}$
V	F	V
F	V	V

Contradição

As contradições são falsidades lógicas: são proposições tais que, independentemente do valor lógico atribuído às suas componentes, recebem o valor lógico falso. Sua tabela verdade possui apenas o valor F.

Exemplo
Verifique que a sentença: $p \wedge \tilde{p}$ é uma contradição.

p	$\tilde{p}$	$p \wedge \tilde{p}$
V	F	F
F	V	F

Exercício 17. Usando tabelas verdade verifique se as seguintes proposições são tautologias ou contradições:

(a) $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \Rightarrow \mathrm{Q}$.

(b) $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\tilde{\mathrm{B}} \Rightarrow \tilde{\mathrm{A}})$.

(c) $\tilde{\mathrm{A}} \wedge [\sim (\tilde{\mathrm{A}} \Rightarrow \mathrm{B})]$.

(d) $(\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{P})) \Leftrightarrow ((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{P}))$.

(e) $(\mathrm{P} \Rightarrow (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})) \Rightarrow (\sim(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \Rightarrow \tilde{\mathrm{P}})$.

Quantificadores

Consideremos, por exemplo, a proposição "O quadrado de qualquer número real é maior ou igual a 0". Trata-se de uma expressão da linguagem matemática onde constata-se que não são os conectivos que contribuem para essa formação. Esta proposição corresponde a afirmar que a proposição $x^2 \geq 0$ é sempre verdadeira. Dizemos que a proposição é obtida a partir de $x^2 \geq 0$ utilizando o quantificador universal.
O **quantificador universal** é um instrumento lógico utilizado em proposições que são verdadeiras para qualquer valor de suas variáveis. Ele aparece na linguagem corrente associado com frequência a palavras como "qualquer que seja" ou "para todo".
Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador universal, enunciamo-la antecedendo a expressão do símbolo $\forall$.

Exemplos
1) O quadrado de qualquer número real é maior ou igual a 0; $\forall x, x^2 \geq 0$. (V)
2) O quadrado de qualquer número real é maior que 2 ou menor que 2;
$\forall x, x^2 > 2 \vee x^2 < 2$. (F)

O segundo quantificador que vamos examinar é o quantificador existencial.
O **quantificador existencial** é um instrumento lógico que transforma uma expressão com uma variável numa proposição verdadeira se houver pelo menos uma substituição da variável que conduza a uma proposição verdadeira e numa proposição falsa caso contrário, isto é, se qualquer substituição conduzir a uma proposição falsa.
O quantificador existencial aparece na liguagem corrente associado com frequência a palavras como "existe" ou "há".
Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador existencial, enunciamo-la antecedendo a expressão do símbolo $\exists$.

Exemplos
1) Há um número real cujo cubo é 8; $\exists x$ tal que $x^3 = 8$. (V)
2) Existe x tal que $x^2 < x$; $\exists x$ tal que $x^2 < x$. (V)
3) Há um número natural cujo quadrado é 5 ou cujo cubo é 7;
$\exists n$ tal que $n^2 = 5 \vee n^3 = 7$. (F)

Exercício 18. Usando quantificadores, transforme as seguintes expressões em proposições verdadeiras:

(a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

(b) $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$

(c) $\sqrt{x^2} = x$

(d) $5k + 4 \leq 11$

(e) $\sqrt{m^2} + 9 \neq |m| + 3$

(f) $(y+2)^2 = y^2 + 4y + 4$

Exercício 19. Escreva cada uma das expressões seguintes utilizando os quantificadores e os conectivos lógicos. Considere que x, y e z são variáveis pertencentes ao conjunto dos números reais e que m, n e p são variáveis pertencentes ao conjunto dos números naturais.
a) Nem todos os números naturais são pares.
b) A equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem solução.
c) Há números naturais que não são pares nem primos.

d) Há pelo menos um número real que é maior que todos os números reais.
e) Para cada número real, existe um número real maior que ele.
f) As equações $x^2 - 1 = 0$ e $x^2 + 2x + 1 = 0$ têm uma solução comum.
g) Todos os números primos são ímpares ou iguais a 2.
h) Há pelo menos um número natural sem nenhum divisor, além de 1 e 7.
i) Todos os números reais, com a possível exceção de 0, têm um quadrado maior que 0.

Reparemos que, de acordo com a interpretação que demos do quantificador existencial, dizer que uma proposição obtida a partir desse quantificador é falsa é o mesmo que dizer que, se substituirmos a variável por um termo arbitrário, obtemos uma proposição falsa, o que é o mesmo que dizer que a negação da proposição é sempre verdadeira. Concluímos assim que:

Dizer que a negação de uma proposição obtida através da aplicação do quantificador existencial a uma expressão é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o quantificador universal à negação da expressão.

Por exemplo, dizer que "não é verdade que existam números naturais cujo dobro é 5" é o mesmo que dizer que "o dobro de qualquer número natural é diferente de 5".

Analogamente,

Dizer que a negação de uma proposição obtida através da aplicação do quantificador universal a uma expressão é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o quantificador existencial à negação da expressão.

Por exemplo, dizer que "não é verdade que todos os homens são mortais" é o mesmo que dizer que "existe um homem que não é mortal".

Exercício 20. Escreva a negação de cada proposição abaixo:
a) Todos os homens são vaidosos.
b) Há números naturais cujo quadrado é ímpar.
c) Existe um número real que é maior que o seu quadrado.
d) Todo número inteiro primo é ímpar.

Exercício 21.

Considere a afirmação " Dado N positivo, existe δ também positivo tal que $f(x)$ é maior que N sempre que $|x - a|$ é positivo e menor que δ ".

(a) Escreva a afirmação de forma abreviada usando quantificadores.

(b) Escreva a negação da afirmação anterior na forma quantificada sem utilizar o símbolo de negação.

Exercício 22. Nos livros de cálculo aparece a seguinte afirmação: O limite de uma função $f(x)$ quando x cresce arbitrariamente é um número L quando a seguinte condição se verifica:

"Dado $\epsilon > 0$, existe um número N_o positivo tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x > N_o$".

(a) Escreva a afirmação de forma abreviada usando quantificadores.

(b) Escreva a negação da afirmação anterior na forma quantificada sem utilizar o símbolo de negação.

Axiomas

A linguagem matemática deve ter regras básicas e rígidas. Essa regras são os axiomas, ou seja, axiomas são premissas evidentes que se admitem como universalmente verdadeiras sem exigência de demonstração.Deles se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

Teoremas

Teorema é uma proposição verdadeira do tipo "Se A, então B". Num teorema , a hipótese A é uma condição suficiente para que B seja verdadeira, e a tese B é uma condição necessária de A, quer dizer, valendo B, é necessário valer A. Um teorema sempre gera novos resultados matemáticos.

Técnicas de Prova

Uma demonstração em Matemática é a apresentação de argumentos que, usando resultados (isto é, proposições ou axiomas) que já sabemos serem verdadeiros e respeitando as regras da lógica matemática, nos permite concluir que uma determinada proposição (aquela que estamos demonstrando) possui o atributo verdadeira.

A demonstração direta

Uma demonstração direta de uma proposição é aquela em que mostramos diretamente que a proposição não admite contra-exemplos, mostrando que em todas situações nas quais a hipótese é satisfeita tem-se que a tese também é satisfeita.

Para exemplificar o processo de demonstração que descrevemos acima, vamos demonstrar a proposição P_1. Lembramos que:

P_1: Se m e n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par.

Primeiro, consideramos uma dupla de inteiros pares, m e n, isto é, o objeto matemático que satisfaz a hipótese de P_1. A partir daí, construímos a implicação

$$m \text{ e } n \text{ são inteiros pares} \Rightarrow m = 2k \text{ e } n = 2p \text{ com } k \text{ e } p \text{ sendo inteiros} \qquad (1)$$

que é verdadeira pela definição de número par. Logo, podemos concluir que a dupla m e n que satisfaz a hipótese de P_1 também satisfaz a tese de (1). A partir dessa informação, construímos a implicação

$$m = 2k \text{ e } n = 2p \text{ com } k \text{ e } p \text{ sendo inteiros} \Rightarrow mn = 2q \text{ com } q \text{ sendo inteiro} \qquad (2)$$

que é verdadeira pois:

$$mn = (2k)(2p) = 2(2kp)$$

Assim, podemos concluir que nossa dupla m e n tem que satisfazer a tese de (2), pois já sabemos que ela satisfaz a hipótese de (2). Finalmente, construímos a implicação

$$mn = 2q \quad \text{com} \quad q \quad \text{sendo inteiro} \Rightarrow mn \quad \text{é inteiro par} \qquad (3)$$

que é verdadeira pela definição de número par. Ou seja, podemos concluir que nossa dupla m e n também tem que satisfazer a tese de (3) (que é a tese de P_1).

Demonstração por Contraposição

Observe que um teorema "$A \Rightarrow B$" não é equivalente e nem implica "$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$". Por exemplo, o teorema "Se x é um número real, então $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$ " é verdadeiro, mas não implica nem é equivalente a "$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0$ ".

Todavia, é verdade que "$A \Rightarrow B$" é equivalente a "$\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$". Esta última proposição é chamada a **contraposição** ou **proposição contraposta** à proposição "$A \Rightarrow B$".

Exemplos

1) Se choveu, então fui ao cinema, a implicação contra-recíproca é: se não fui ao cinema então não choveu.

2) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, a implicação contra-recíproca é: $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$.

A implicação contra-recíproca é especialmente importante pelo fato de que possui o mesmo valor lógico da implicação inicial. Isto é, se A e B são duas proposições, então, ("$A \Rightarrow B$") se , e somente se ($\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$)

Pois:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \Rightarrow B$ é verdade, isto é , se A é V, B também é V.

Queremos provar que $\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$, ou seja, se $\tilde{B}$ é V, $\tilde{A}$ também é V.

Supondo que $\tilde{B}$ é V, caso $\tilde{A}$ fosse F teríamos que A seria V e pela hipótese implicaria que B também seria V, mas isto não pode acontecer pois estamos supondo que $\tilde{B}$ é V, logo não podemos aceitar que $\tilde{A}$ é F e portanto teremos $\tilde{A}$ V e concluímos que $\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$.

($\Leftarrow$) A demonstração da volta é análoga ■

Para exemplificar o processo de demonstração por contraposição, vamos inicialmente demonstrar diretamente a proposição

P: O quadrado de um número par também é par

Temos que, se n é um número par, então n é da forma $n = 2k$, onde k é um inteiro. Então $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, que é da forma $2p$, onde p é o inteiro $2k^2$. Isto completa a demonstração direta do teorema.

Consideremos agora o teorema

T: Se o quadrado de um inteiro n for ímpar, então n também será ímpar

Poderíamos demonstrar este teorema diretamente, mas isto é desnecessário; basta observar que ele é o contraposto da proposição anterior, já que as proposições " n é par " e " n é ímpar " são a negação uma da outra.

Demonstração por Absurdo

Esse tipo de demonstração se processa da seguinte maneira: suponhamos que queremos provar que uma proposição $P : A \Rightarrow B$ é verdadeira. Começamos supondo que $\tilde{P} : A \wedge \tilde{B}$ é verdadeira, esta é a chamada " hipótese do raciocínio por absurdo ", a partir daí, procedemos exatamente como na demonstração direta, isto é, construímos implicações que provamos serem verdadeiras até chegarmos a uma contradição, um absurdo. Somos então forçados a remover a hipótese do raciocínio por absurdo e concluir que B é verdadeira.

Como aplicação, vamos demonstrar o teorema

T: Num plano, por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma perpendicular à reta dada.

Hipótese: Num plano é dada uma reta r e um ponto $\mathrm{P} \notin r$.
Tese: No plano dado não existe mais que uma reta s perpendicular a r, tal que $\mathrm{P} \in s$.

A negação da tese é que existe mais que uma perpendicular, para isto, basta supor que existam duas, assim:

$\widetilde{\text{Tese}}$: No plano dado existem duas retas distintas, s e t, perpendicular a r, tais que $\mathrm{P} \in s$ e $\mathrm{P} \in t$.

Supondo que $\widetilde{\text{Tese}}$ é verdadeira, sejam S e T os pontos de interseção das retas s e t com a reta r, como mostra a figura

esses pontos são distintos, pois s e t são distintas. Ora, os ângulos em S e T são de 90^0; mas isto é uma absurdo pois a soma dos ângulos internos do triângulo PST é maior que 180^0. Concluímos que a $\widetilde{\text{Tese}}$ é falsa e portanto que a tese é verdadeira.

Exercício 23. Em cada item abaixo, decida se a proposição é falsa ou é verdadeira, justificando sua resposta:

1. Se a e b são inteiros pares, então a soma $a + b$ é um inteiro par.
2. Se m e n são inteiros ímpares, entãoo produto mn é um inteiro ímpar.
3. Se o produto de dois inteiros m e né ímpar, então m e n são inteiros ímpares.
4. Se m é um múltiplo de 5, então m é um múltiplo de 25.
5. Se $2 < x < 5$, então $-1 < x < 6$.
6. Se $x > -6$, então $-3 < x < 5$.
7. Se x é um número real tal que $4 \leq x \leq 9$,então x pertence ao intervalo $[2, 3]$.
8. Se x e y são números reais tais que $x > 100$ e $y > 2$, então $\dfrac{x}{y} > 50$.
9. Se x e y são números reais tais que $x < y$, então $ax < ay$ para qualquer real a.
10. Se x e y são números reais tais que $x < y < 0$, então $x^2 > y^2$.

Indução Matemática

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

(1) Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes.

(2) Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.

(3) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

(1), (2) e (3) são chamados os axiomas de Peano. O axioma (3) é conhecido como o **Princípio da Indução**. Este princípio serve de base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais, conhecido como o **Método de Indução** (ou recorrência), o qual funciona assim: " Se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número n daí resultar que P é válida também para seu sucessor $n+1$, então P é válida para todos os números naturais ".

Exemplo

Usando indução, prove que: $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Demonstração:

1^0) Para $n=1$ temos que $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{1.2}{2} = 1$ é verdade.

2^0) Supomos verdade para n, isto é, $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Provemos para n+1, ou seja, provemos que $1+2+3+...+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Temos:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} =$$
$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad \blacksquare$$

Exercício 24. Usando indução, prove que:

1. $1+3+5+...+(2n-1) = n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$
2. $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$
3. $2+4+6+...+2n = n(n+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$
4. $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$
5. $\dfrac{1}{1.5}+\dfrac{1}{5.9}+\dfrac{1}{9.13}+...+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Exercício 25. Mostre, por indução, que se $a \geq -1$, então $(1+a)^n \geq 1+na, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Exercício 26. Prove que, se n for um inteiro positivo, então $7^n - 1$ é divisível por 6.

Exercício 27. Prove que $a^m a^n = a^{m+n}$ para todos os inteiros $m, n \geq 0$.

Exercício 28. Prove que $3^n > n$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Exercício 29. Prove que $n! > 2^n$ para todo inteiro $n \geq 4$.

Exercício 30. Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.