Índice

Capítulo 1 – Noções Básicas

Lista de Exercícios 1 - Página 21

1. Calcule:

a) $\dfrac{7!+5!}{5!}=\dfrac{7.6.5!+5!}{5!}=\dfrac{\cancel{5!}\left(7.6+1\right)}{\cancel{5!}}=\boxed{43}$

b) $\dfrac{7!}{3!4!}=\dfrac{7.6.5.\cancel{4!}}{3.2!\,\cancel{4!}}=\dfrac{210}{6}=\boxed{35}$

2. Simplifique:

a) $\dfrac{n!+\left(n+1\right)!}{n!}=\dfrac{n!+\left(n+1\right)n!}{n!}=\dfrac{\cancel{n!}\left(1+\left(n+1\right)\right)}{\cancel{n!}}=\boxed{n+2}$

b) $\dfrac{\left(n+2\right)!n!}{\left[\left(n+1\right)!\right]^2}=\dfrac{\left(n+2\right)\cancel{\left(n+1\right)}!n!}{\cancel{\left(n+1\right)}!\left(n+1\right)!}=\dfrac{\left(n+2\right)\cancel{n!}}{\left(n+1\right)\cancel{n!}}=\boxed{\dfrac{\left(n+2\right)}{\left(n+1\right)}}$

3. Obtenha n, tal que:

a)

b)

$n!+\left(n-1\right)!=6\left(n-1\right)!$

$\Rightarrow n\left(n-1\right)!+\left(n-1\right)!=6\left(n-1\right)!$

$\Rightarrow \cancel{\left(n-1\right)!}\left[n+1\right]=6\cancel{\left(n-1\right)!}$

$\Rightarrow n+1=6$

$\Rightarrow \boxed{n=5}$

$$\frac{(n+1)!}{n!}=10$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=10$$

$$\Rightarrow n+1=10$$

$$\Rightarrow \boxed{n=9}$$

4. Calcule $x \in ¥$ nas equações abaixo:

a)

$$\frac{x!+(x+1)!+(x-1)!}{x!+(x-1)!}=7$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-1)!+(x+1)x(x-1)!+(x-1)!}{x(x-1)!+(x-1)!}=7$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)!}\left[x+(x+1)x+1\right]}{\cancel{(x-1)!}\left[x+1\right]}=7$$

$$\Rightarrow x+x^2+x+1=7(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=7x+7$$

$$\Rightarrow x^2-5x-6=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-5)^2-4.1.(-6)$$

$$\Rightarrow \Delta=25+24$$

$$\Rightarrow \Delta=49$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\pm 7}{2} \Rightarrow x'=6 \text{ e } \cancel{x''=-1}$$

b)

$$\frac{20(x-1)!-(x+1)!}{x!}=0$$

$$\Rightarrow \frac{20(x-1)!-(x+1)x(x-1)!}{x(x-1)!}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)!}\left[20-(x+1)x\right]}{\cancel{(x-1)!}x}=0$$

$$\Rightarrow 20-\left(x^2+x\right)=0$$

$$\Rightarrow -x^2-x+20=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 20$$

$$\Rightarrow \Delta=81$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(-1)\pm 9}{-2} \Rightarrow x''=4 \text{ e } \cancel{x'=-5}$$

Lista de Exercícios 2 - Página 26

1. Expandir as seguintes somas:

a)

$$\sum_{i=1}^{6} 2i = 2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6$$
$$=2+4+6+8+10+12$$
$$=42$$

b) $\sum_{i=0}^{6} x^i = x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

2. Escreva as expressões abaixo, usando a notação de somatório:

a) $1+3+5+7+9=\sum_{i=1}^{5}(2i-1)$

b) $-1+4-9+16-25+36=\sum_{i=1}^{6}(-1)^i i^2$

3. Expandir os seguintes produtos:

a)

$$\prod_{j=2}^{n}(3j+7)=(3\cdot 2+7)\cdot(3\cdot 3+7)\cdot(3\cdot 4+7)\cdot(3\cdot 5+7)$$
$$=13\cdot 16\cdot 19\cdot 22...$$

b)

$$\prod_{i=1}^{4}\left(i^3-7i+3\right)=\left(1^3-7\cdot 1+3\right)\cdot\left(2^3-7\cdot 2+3\right)\cdot\left(3^3-7\cdot 3+3\right)\cdot\left(4^3-7\cdot 4+3\right)$$
$$=\left(-3\right)\cdot\left(-3\right)\cdot\left(9\right)\cdot\left(39\right)$$
$$=3159$$

4. Escreva as expressões abaixo usando a notação de produtório:

a) $1.3.5.7.9=\prod_{i=1}^{5}\left(2i-1\right)$

b) $p\left(p+1\right)\left(p+2\right)...\left(p+n\right)=\prod_{i=0}^{n}\left(p+i\right)$

Lista de Exercícios 3 - Página 33

Prove, utilizando o princípio da indução:

1. $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}, \quad n\geq 1$

Resolução:

1º Passo: $n=1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}=\frac{1.2.3}{6}=1 .\ \text{(Vale para } n=1\text{)}$$

2º Passo: Vamos supor que vale para $n=k$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k} i^2=\frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{6}.$$

3º Passo: Vamos provar para $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(2\left(k+1\right)+1\right)}{6}$$
$$=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(2k+3\right)}{6}.$$

Agora,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\left[2k^2+k+3k+3k+6\right]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\left[2k^2+4k+3(k+2)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2k(k+2)+3(k+2)\right]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)[2k+3]}{6}$$

que é a fórmula para $n = k+1$. Portanto, vale o resultado para qualquer $n \geq 1$.

2. $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$, $\quad n \geq 1$

Resolução:

1º Passo: $n = 1$

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2 = 1. \text{ (Vale para } n=1\text{)}$$

2º Passo: Vamos supor que vale para $n = k$, isto é,

$$\sum_{j=1}^{k}(2k-1) = k^2 .$$

3º Passo: Vamos provar para $n = k+1$

$$\sum_{j=1}^{k+1}\left(2(k+1)-1\right) = (k+1)^2 .$$

Agora,

$$\sum_{j=1}^{k+1}\left(2\left(k+1\right)-1\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(2k-1\right)+\left(2\left(k+1\right)-1\right)$$

$$=k^2+2k+2-1$$

$$=k^2+2k+1$$

$$=\left(k+1\right)^2$$

que é a fórmula para $n=k+1$. Portanto, vale o resultado para qualquer $n\geq 1$.

Capitulo 2 – Números Binomiais

Lista de Exercícios 1 - Página 40

1. Efetuar as expressões:

a)

$$C_{3,0}+C_{3,1}+C_{3,2}=\frac{3!}{0!\left(3-0\right)!}+\frac{3!}{1!\left(3-1\right)!}+\frac{3!}{2!\left(3-2\right)!}$$

$$=1+\frac{3!}{1!\ 2!}+\frac{3!}{2!\ 1!}$$

$$=1+3+3$$

$$=7$$

b)

$$C_{5,0}+C_{5,2}+C_{5,4}=\frac{5!}{0!\left(5-0\right)!}+\frac{5!}{2!\left(5-2\right)!}+\frac{5!}{4!\left(5-4\right)!}$$

$$=1+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{4!1!}$$

$$=1+10+5$$

$$=16$$

2. Determinar o valor de x em cada uma das seguintes expressões:

a) $C_{16,x+1} = C_{16,3x-1}$

Resolução:

$x+1=3x-1$ ou $(x+1)+(3x-1)=16$

$3x-x=1+1$ $\quad$ $x+1+3x-1=16$

$2x=2$ $\quad$ $4x=16$

$\boxed{x=1}$ $\quad$ $\boxed{x=4}$

b) $C_{10,x^2-5} = C_{10,-5x+1}$

Resolução:

$x^2-5=-5x+1$ ou $x^2-5+(-5x+1)=10$

$\Rightarrow x^2+5x-6=0$ $\quad$ $\Rightarrow x^2-5-5x+1=10$

$\Rightarrow \Delta = 25-4\cdot 1\cdot(-6)$ $\quad$ $\Rightarrow x^2-5x-14=0$

$\Rightarrow \Delta = 49$ $\quad$ $\Rightarrow \Delta = 25+56$

$\Rightarrow x = \dfrac{-5\pm 7}{2} \Rightarrow x' = 1$ e $\cancel{x''=-6}$ $\quad$ $\Rightarrow \Delta = 81$

$\Rightarrow x = \dfrac{5\pm 9}{2} \Rightarrow x' = 7$ e $\cancel{x''=-2}$

3. Obtenha n tal que:

a)

$C_{n,3} = 1$

$\Rightarrow C_{3,3} = 1$

$\Rightarrow n = 3$

b)

$$C_{n-1,2}=36$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!2!}=36$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}2!}=36$$

$$\Rightarrow n^2-3n+2=72$$

$$\Rightarrow n^2-3n-70=0$$

$$\Rightarrow \Delta=9-4\cdot 1\cdot(-70)$$

$$\Rightarrow \Delta=289$$

$$\Rightarrow n=\frac{3\pm 17}{2}\Rightarrow n'=10 \ \text{ e } \ \cancel{n''=-7}$$

4. Considere $A_{n,p}=\dfrac{n!}{(n-p)!}$. Obtenha x tal que:

a)

$$A_{x,2}-C_{x,2}=10-x$$

$$\Rightarrow \frac{x!}{(x-2)!}-\frac{x!}{(x-2)!\,2!}=10-x$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}-\frac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}\ 2!}=10-x$$

$$\Rightarrow 2x(x-1)-x(x-1)=20-2x$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-x^2+x=20-2x$$

$$\Rightarrow x^2-x=20-2x$$

$$\Rightarrow x^2+x-20=0$$

$$\Rightarrow \Delta=1-4\cdot 1\cdot(-20)$$

$$\Rightarrow \Delta=81$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm 9}{2}\Rightarrow x'=4 \ \text{ e } \ \cancel{x''=-5}$$

b)

$$A_{x+1,2} - C_{x-1,2} = 24$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)!}{(x+1-2)!} - \frac{(x-1)!}{(x-1-2)!\,2!} = 24$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)!}{(x-1)!} - \frac{(x-1)!}{(x-3)!\,2!} = 24$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)\,x\,\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}} - \frac{(x-1)(x-2)\,\cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}\;2!} = 24$$

$$\Rightarrow 2(x+1)\,x - (x-1)(x-2) = 48$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x^2 + 3x - 2 - 48 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-50)$$

$$\Rightarrow \Delta = 225$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm 15}{2} \Rightarrow x' = 5 \text{ e } \cancel{x'' = -10}$$

Lista de Exercícios 2 - Página 43

1. Complete:

$$C_{5,1} + C_{5,2} = C_{\boxed{6},2}$$

2. Resolva em x a equação:

$$C_{n,3} = x\, C_{n,4}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!\,3!} = x\left[\frac{n!}{(n-4)!\,4!}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{n\cancel{(n-1)(n-2)}\,\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}\ 3!} = x\left[\frac{n\cancel{(n-1)(n-2)}\,(n-3)\,\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}\ 4!}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3!} = x\left[\frac{(n-3)}{4!}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{4!}{3!} = x\left[(n-3)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = x(n-3)$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{(n-3)}$$

3. Obtenha x, tal que:

a) $C_{12,2x} = C_{12,x+9}$

Resolução:

$2x = x + 9$ ou $2x + x + 9 = 12$

$\boxed{x = 9}$

$3x = 3$

$\boxed{x = 1}$

4. Obtenha x e y, tal que:

$$C_{10,x} + C_{10,2x-5} = C_{11,y}$$

Resolução:

Relação de Stifel

$\boxed{y = x+1}$

$2x - 5 = y$

$2x - 5 = x + 1$

$\boxed{x = 6}$

$\boxed{y = 7}$

Lista de Exercícios 3 - Página 54

1. Prove fazendo as contas

$$
\begin{aligned}
C_{n+2,\,p+2} &= C_{n,\,p} + 2\,C_{n,\,p+1} + C_{n,\,p+2} \\
&= C_{n,\,p} + 2C_{n,\,p+1} + 2\,C_{n,\,p+1} + C_{n,\,p+2} \\
&= C_{n,\,p} + C_{n,\,p+1} + C_{n,\,p+1} + C_{n,\,p+2} \qquad . \\
&= C_{n+1,\,p+1} + C_{n+1,\,p+2} \\
&= C_{n+2,\,p+2}
\end{aligned}
$$

2. Calcule $\sum_{i=0}^{n} (i+1)\, C_{n,i}$.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n} (i+1)\, C_{n,i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (i+1)\, \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i\, \frac{n!}{i!(n-i)!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \cancel{i}\, \frac{n!}{\cancel{i}\,(i-1)!(n-i)!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= n\, C_{n-1,i-1} + C_{n,i} \\
&= n\left(C_{n-1,0} + C_{n-1,1} + \ldots + C_{n-1,n-1} \right) + \left(C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} \right) \\
&= n\, 2^{n-1} + 2^{n} \\
&= \boxed{2^{n-1}(n+2)}
\end{aligned}
$$

3. Calcule o valor da soma

(a)

$$S=\sum_{i=15}^{75} i(i+1)$$
$$=\sum_{i=15}^{75} i^2+i$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{75} i^2+\sum_{i=1}^{75} i\right]-\left[\sum_{i=1}^{14} i^2+\sum_{i=1}^{14} i\right]$$
$$=\left[\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+75^2\right)+\left(1+2+3+\ldots+75\right)\right]-\left[\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+14^2\right)+\left(1+2+3+\ldots+14\right)\right]$$
$$=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]-\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$=\left[\frac{75(75+1)(2(75)+1)}{6}+\frac{75(75+1)}{2}\right]-\left[\frac{14(14+1)(2(14)+1)}{6}+\frac{14(14+1)}{2}\right]$$
$$=\left[\frac{75(76)(151)}{6}+\frac{75(76)}{2}\right]-\left[\frac{14(15)(29)}{6}+\frac{14(15)}{2}\right]$$
$$=[143450+2850]-[1015+105]$$
$$=[146300]-[1120]$$
$$=\boxed{145180}$$

(b)

$$S=\sum_{i=1}^{n} i(2i+1)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(2i^2+i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} 2i^2+\sum_{i=1}^{n} i$$
$$=2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)+\left(1+2+3+\ldots+n\right)$$
$$=2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{6}$$
$$=n(n+1)\left[\frac{4n+2+3}{6}\right]$$
$$=n(n+1)\left[\frac{(4n+5)}{6}\right]$$
$$=\boxed{\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}}$$

Lista de Exercícios 4 - Página 66

1. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de

(a)

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 \Rightarrow T_{i+1}=C_{6,i}\; x^{6-i}\left(\frac{1}{x}\right)^i$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{6,i}\; x^{6-i}\left(x^{-1}\right)^i$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{6,i}\; x^{6-i}x^{-i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{6,i}\; x^{6-2i} \qquad \rightarrow \quad 6-2i=0$$

$$\Rightarrow T_{3+1}=C_{6,3}\; x^{0} \qquad 6=2i$$

$$\Rightarrow T_4=C_{6,3} \qquad \boxed{i=3}$$

$$\Rightarrow T_4=\frac{6!}{3!3!}=20$$

(b)

$$\left(2x-\frac{1}{3x}\right)^8 \Rightarrow T_{i+1}=C_{8,i}\; 2x^{8-i}\left(-\frac{1}{3x}\right)^i$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{8,i}\; 2x^{8-i}\left(-\left(3x\right)^{-1}\right)^i$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{8,i}\; 2^{8-i}x^{8-i}\left(-3\right)^{-i}x^{-i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{8,i}\; 2^{8-i}\left(-3\right)^{-i}x^{8-2i} \qquad \rightarrow \quad 8-2i=0$$

$$\Rightarrow T_{4+1}=C_{8,4}\; 2^{4}\left(-1\right)^{-4}\left(3\right)^{-4}x^{0} \qquad 2i=8$$

$$\Rightarrow T_5=C_{8,4}2^4\left(3\right)^{-4} \qquad \boxed{i=4}$$

$$\Rightarrow T_5=\frac{8!}{4!4!}2^4\left(3\right)^{-4}$$

$$\Rightarrow T_5=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}4!}2^4\left(3\right)^{-4}$$

$$\Rightarrow T_5=\frac{1680}{24}\cdot 16\cdot\left(\frac{1}{3^4}\right)$$

$$\Rightarrow T_5=70\cdot 16\cdot\left(\frac{1}{3^4}\right)$$

$$\Rightarrow T_5=1120\cdot\left(\frac{1}{3^4}\right)$$

$$\Rightarrow T_5=\frac{1120}{81}$$

2. Calcule a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de

(a) $\left(x+y\right)^{10}=\sum_{i=0}^{n}C_{10,i}x^{10-i}y^{i}$

Resolução: Considerando $x=1$ e $y=1$

$$\left(1+1\right)^{10}=\sum_{i=0}^{n}C_{10,i}$$

$$2^{10}=\sum_{i=0}^{n}C_{10,i}$$

(b) $\left(x-1\right)^{8}=\sum_{i=0}^{n}C_{8,i}x^{8-i}\left(-1\right)^{i}$

Resolução: Considerando $x=1$

$$\left(1-1\right)^{8}=\left(-1\right)^{i}\sum_{i=0}^{n}C_{8,i}$$

$$0=\left(-1\right)^{i}\sum_{i=0}^{n}C_{10,i}$$

3. Calcule o termo central no desenvolvimento de

$$\left(x+\frac{1}{x^{2}}\right)^{12}$$

São 13 termos.

Termo central $=\dfrac{1+13}{2}=7$.

$T_{i+1}=C_{12,i}\ x^{12-i}x^{-2i}$

$\Rightarrow T_{6+1}=C_{12,6}\ x^{12-6}\ x^{-2\cdot 6}$

$\Rightarrow T_{6+1}=C_{12,6}\ x^{6}x^{-12}$

$\Rightarrow T_{7}=C_{12,6}\ x^{-6}$

$\Rightarrow T_{7}=\dfrac{12!}{6!6!}x^{-6}$

$\Rightarrow T_{7}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}x^{-6}$

$\Rightarrow T_{7}=\dfrac{665280}{720}x^{-6}$

$\Rightarrow T_{7}=924\,x^{-6}$

<u>Exercícios</u> <u>de</u> <u>Fixação</u>: <u>Capítulo</u> <u>I</u>

1. Calcule:

a) $$\frac{5!\,7!}{2!\,8!}=\frac{5!\,\cancel{7!}}{2!\,8.\cancel{7!}}=\frac{5.4.3.2}{2\,8}=\boxed{\frac{15}{2}};$$

b) $$\frac{3!}{5!\,2!}=\frac{\cancel{3!}}{5.4.\cancel{3!}\,2!}=\boxed{\frac{1}{40}}.$$

2. Simplifique:

a) $$\frac{n(n+1)!}{(n+2)!}=\frac{n\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cancel{(n+1)!}}=\boxed{\frac{n}{n+2}};$$

b) $$\frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=\frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}\cdot\frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}}=n(n+2)=\boxed{n^2+2n};$$

c) $$\frac{2(n+2)!}{n!}=\frac{2(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=2\left(n^2+3n+2\right)=\boxed{2n^2+6n+4};$$

d) $$\frac{n(n-1)!}{(n-2)!(n+1)!}=\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}(n+1)!}=\frac{\cancel{n(n-1)}}{(n+1)\cancel{n(n-1)}(n-2)!}=\boxed{\frac{1}{(n+1)(n-2)!}};$$

e) $$\frac{(n+1)!(n-1)!}{(n+2)!n!}=\frac{\cancel{(n+1)!}\cancel{(n-1)!}}{(n+2)\cancel{(n+1)!}n\cancel{(n-1)!}}=\frac{1}{(n+2)n}=\boxed{\frac{1}{n^2+2n}}.$$

3. Obtenha n, tal que:

a)

$$\frac{n(n-1)!}{(n-2)!} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)\,\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 6$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4.1.(-6)$$

$$\Rightarrow \Delta = 25$$

$$\Rightarrow n = \frac{(-1)^2 \pm \sqrt{25}}{2.1} \rightarrow \boxed{n' = 3} \text{ e } \cancel{n'' = -2}$$

b)

$$8n! = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow 8\cancel{(n+1)n!} = (n+2)\,\cancel{(n+1)n!} + \cancel{(n+1)n!}$$

$$\Rightarrow 8 = (n+2) + 1$$

$$\Rightarrow 8 = n + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 5}$$

4. Calcule $x \in$ ¥ nas equações abaixo:

a)

$$\frac{(x+1)!}{(x+1)! + (x-1)!} = 21$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)\,x\,\cancel{(x-1)!}}{(x+1)\,x\,\cancel{(x-1)!} + \cancel{(x-1)!}} = 21$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)\,x}{(x+1)\,x + 1} = 21$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 21\left(x^2 + x + 1\right)$$

$$\Rightarrow 20x^2 + 20x + 21 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (20)^2 - 4.20.21$$

$$\Rightarrow \Delta = 400 - 1680$$

$$\Rightarrow \Delta = -1280$$

$$\Rightarrow \boxed{x \notin \text{¥}}$$

b)

$$\frac{x! - (x-1)!}{x-1} = 6$$

$$\Rightarrow x! - (x-1)! = 6(x-1)$$

$$\Rightarrow x(x-1)! - (x-1)! = 6(x-1)$$

$$\Rightarrow (x-1)!\,\cancel{[x-1]} = 6\cancel{(x-1)}$$

$$\Rightarrow (x-1)! = 3!$$

$$\Rightarrow x - 1 = 3$$

$$\boxed{\Rightarrow x = 4}$$

c)

$$\frac{(x+1)!+x!}{x!-(x-1)!}=\frac{48}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)\,x(x-1)!+x(x-1)!}{x(x-1)!-(x-1)!}=\frac{48}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}}\left[\frac{(x+1)\,x+x}{x-1}\right]=\frac{48}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+x}{x-1}=\frac{48}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2+10x=48x-48$$

$$\Rightarrow 5x^2-38x+48=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-38)^2-4.5.48$$

$$\Rightarrow \Delta=1444-960$$

$$\Rightarrow \Delta=484$$

$$\Rightarrow x=\frac{38\pm\sqrt{484}}{10}$$

$$\Rightarrow x=\frac{38\pm 22}{10}\to \boxed{x'=6}\ \text{e}\ \cancel{x''=\frac{8}{5}}$$

d)

$$\frac{x!+(x+1)!}{(x+1)!}=\frac{12}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{x!+(x+1)\,x!}{(x+1)\,x!}=\frac{12}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x!}}{\cancel{x!}}\left[\frac{1+(x+1)}{(x+1)}\right]=\frac{12}{11}$$

$$\Rightarrow 11(x+2)=12(x+1)$$

$$\Rightarrow 11x+22=12x+12$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10}$$

e)

$$\frac{(x+2)!-x!}{(x-1)!}=29x$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)\,x(x-1)!-x(x-1)!}{(x-1)!}=29x$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}}\left[(x+2)(x+1)\,x-x\right]=29x$$

$$\Rightarrow (x^2+3x+2)\,x-x-29x=0$$

$$\Rightarrow x^3+3x^2+2x-30x=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+3x-28)=0 \qquad \cancel{x'=0}$$

$$\Rightarrow x^2+3x-28=0$$

$$\Rightarrow \Delta=9-4.1.(-28)$$

$$\Rightarrow \Delta=121$$

$$\Rightarrow x=\frac{-3\pm 11}{2}\to \boxed{x''=4}\ \text{e}\ \cancel{x'''=-7}$$

5. Prove que:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Resolução: Podemos escrever

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{(n+1)!}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$=\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{4}{4!}+...+\frac{(n+1)}{(n+1)!}-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$=1+\cancel{\frac{1}{2!}}+\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{4!}}+...+\frac{1}{n!}-\left(\cancel{\frac{1}{2!}}+\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{4!}}+...+\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$=\boxed{1-\frac{1}{(n+1)!}}$$

6. Que relação existe entre p e q, números naturais, uma vez que a equação $x^2-(p!)\,x+q!=0$ tem raízes reais.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(p!)^2-4\cdot 1\cdot q!\geq 0$$

Resposta: Para ter raízes reais é necessário que $\Delta\geq 0$, ou seja, $(p!)^2\geq 4q!$.

7. Para $n>1$, natural, $n!$ pode ser ímpar?

$$n=2\to 2!=2$$
$$n=3\to 3.2!=6$$
$$n=4\to 4.3.2!=24$$
$$n=5\to 5.4.3.2!=120$$
M

Resposta: $n!$ não pode ser ímpar, pois sempre é da forma $2k$.

8. Escreva as expressões abaixo, usando a notação de somatório:

a) $7+14+21+28+35+42=\sum_{i=1}^{6}7i$;

b) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{5.7}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{n(n+2)}$.

9. Expandir o seguinte produto:

$$\prod_{j=1}^{3} 6j^2 = 6(1)^2 .6(2)^2 .6(3)^2 .$$

10. Escreva a expressão abaixo usando a notação de produtório:

$$x^2 x^4 x^6 x^8 x^{10} = \prod_{i=1}^{5} x^{2i} .$$

11. Use o princípio de indução matemática para provar as seguintes identidades:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad n \geq 1;$

Resolução: 1º Passo: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1.2.3}{3} = 2 . \text{ (Vale para } n = 1\text{)}$$

2º Passo: Vamos supor que vale para $n = k$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} .$$

3º Passo: Vamos provar para $n = k + 1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} .$$

Agora,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{k} i(i+1) + (k+1)(k+2)\\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)\\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)[k+3]}{3}\end{aligned}$$

que é a fórmula para $n = k + 1$. Portanto, vale o resultado para qualquer $n \geq 1$.

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1;$

Resolução: 1º Passo: $n=1$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1=2\text{. (Vale para } n=1\text{)}$$

2º Passo: Vamos supor que vale para $n=t$, isto é,

$$\prod_{k=1}^{t}\left(1+\frac{1}{k}\right)=t+1\,.$$

3º Passo: Vamos provar para $n=t+1$

$$\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)=(t+1)+1=(t+2)\,.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)&=\prod_{k=1}^{t}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{t+1}\right)\\&=t+1\left(1+\frac{1}{t+1}\right)\\&=\cancel{(t+1)}\left(\frac{t+1+1}{\cancel{(t+1)}}\right)\\&=t+2\end{aligned}$$

que é a fórmula para $n=t+1$. Portanto, vale o resultado para qualquer $n\geq 1$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^2=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$;

Resolução: 1º Passo: $n=1$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^2=\frac{(-1)^{0}1(1+1)}{2}=1\text{. (Vale para } n=1\text{)}$$

2º Passo: Vamos supor que vale para $n=k$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}i^2=\frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}\,.$$

3º Passo: Vamos provar para $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}i^2 = \frac{(-1)^{(k+1)-1}(k+1)(k+1+1)}{2}$$
$$= \frac{(-1)^{k}(k+1)(k+2)}{2}.$$

Agora,

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}i^2 = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}i^2 + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}k(k+1) + 2(-1)^k(k+1)^2}{2}$$
$$= \frac{-\left[(-1)^k k(k+1)\right] + 2(-1)^k(k+1)^2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)\left[-(-1)^k k + 2(-1)^k(k+1)\right]}{2}$$
$$= (k+1)(-1)^k\left[\frac{-k+2(k+1)}{2}\right]$$
$$= \frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}$$

que é a fórmula para $n = k+1$. Portanto, vale o resultado para qualquer $n \geq 1$.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Resolução. 1º Passo: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = 0. \text{ (Vale para } n=1\text{)}$$

2º Passo: Vamos supor que vale para $n = k$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k} i(i-1) = \frac{(k-1)k(k+1)}{3}.$$

3º Passo: Vamos provar para $n = k + 1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i-1) = \frac{(k+1-1)(k+1)((k+1)+1)}{3}$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Agora,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i-1) = \sum_{i=1}^{k} i(i-1) + (k+1)(k+1-1)$$
$$= \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + (k+1)k$$
$$= \frac{(k-1)k(k+1) + 3(k+1)k}{3}$$
$$= (k+1)k\frac{[(k-1)+3]}{3}$$
$$= \frac{(k+1)k(k+2)}{3}$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

que é a fórmula para $n = k + 1$. Portanto, vale o resultado para qualquer $n \geq 1$.

Exercícios de Fixação: Capítulo II

12. Efetuar as expressões:

a) $0!+C_{2,1}+C_{2,2}=1+\dfrac{2!}{1!(2-1)!}+\dfrac{2!}{2!(2-2)!}=1+2+1=\boxed{4}$;

b) $C_{5,1}+C_{5,2}+C_{5,3}+C_{5,4}=\dfrac{5!}{1!(5-1)!}+\dfrac{5!}{2!(5-2)!}+\dfrac{5!}{3!(5-3)!}+\dfrac{5!}{4!(5-4)!}$

$$=5+10+10+5=\boxed{30}.$$

13. Determinar o valor de x na expressão:

$$C_{14,x+2}=C_{14,2x}.$$

Resolução:

$$x+2=2x \quad \text{ou} \quad x+2+2x=14$$

$$\boxed{x=2} \qquad\qquad 3x=12$$

$$\boxed{x=4}$$

14. Obtenha n tal que:

a) $\dfrac{A_{n,3}}{C_{n,4}}=12$.

Resolução:

$$\frac{A_{n,3}}{C_{n,4}}=12$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n!}{(n-3)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}}=12$$

$$\Rightarrow \frac{4!(n-4)!}{(n-3)!}=12$$

$$\Rightarrow \frac{4!\cancel{(n-4)!}}{(n-3)\cancel{(n-4)!}}=12$$

$$\Rightarrow 4!=12(n-3)$$

$$\Rightarrow 24=12n-36$$

$$\Rightarrow 12n=60$$

$$\Rightarrow \boxed{n=5}$$

b) $C_{n,3}=3A_{n,2}$, onde $A_{n,p}=\dfrac{n!}{(n-p)!}$, $p\le n$, $n,p\in ¥^*$.

Resolução:

$$C_{n,3} = 3\,A_{n,2}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 3\frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{3!\cancel{(n-3)!}} = \frac{3n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n^2-3n+2)}{6} = 3(n^2-n)$$

$$\Rightarrow n(n^2-3n+2) = 18n^2-18n$$

$$\Rightarrow n^3-3n^2+2n-18n^2+18n=0$$

$$\Rightarrow n^3-21n^2+20n=0$$

$$\Rightarrow n(n^2-21n+20)=0$$

$$\Rightarrow \cancel{n'=0}$$

$$\Rightarrow \Delta = (-21)^2 - 4.1.20$$

$$\Rightarrow \Delta = 441-80$$

$$\Rightarrow \Delta = 361$$

$$\Rightarrow n = \frac{21 \pm 19}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{n''=20} \text{ e } \boxed{n'''=1}$$

15. Obtenha x tal que:

a) $A_{x,5} = 180\,C_{x,3}$

Resolução:

$$A_{x,5} = 180\,C_{x,3}$$

$$\Rightarrow \frac{x!}{(x-5)!} = 180\left(\frac{x!}{3!(x-3)!}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x(x-1)(x-2)}(x-3)(x-4)\cancel{(x-5)!}}{\cancel{(x-5)!}} = 180\left(\frac{\cancel{x(x-1)(x-2)}\cancel{(x-3)!}}{3!\cancel{(x-3)!}}\right)$$

$$\Rightarrow x^2-7x+12=30$$

$$\Rightarrow x^2-7x-18=0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4.1.(-18)$$
$$\Rightarrow \Delta = 49 + 72$$
$$\Rightarrow \Delta = 121$$
$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm 11}{2} \rightarrow x' = 9 \text{ e } \cancel{x'' = -2}$$

b) $\dfrac{C_{x,2} - C_{x,3}}{C_{x,3} - C_{x,4}} = 4$, onde $A_{x,y}$ é como foi definido no exercício 14.

Resolução:

$$\frac{\dfrac{x!}{2!(x-2)!} - \dfrac{x!}{3!(x-3)!}}{\dfrac{x!}{3!(x-3)!} - \dfrac{x!}{4!(x-4)!}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{2!\cancel{(x-2)}!} - \dfrac{x(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{3!\cancel{(x-3)}!}}{\dfrac{x(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{3!\cancel{(x-3)}!} - \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)\cancel{(x-4)!}}{4!\cancel{(x-4)}!}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{3!x(x-1) - 2!x(x-1)(x-2)}{2!3!}}{\dfrac{4!x(x-1)(x-2) - 3!x(x-1)(x-2)(x-3)}{3!4!}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}!3!4!\,\cancel{x(x-1)} - 2!\cancel{3}!4!\,\cancel{x(x-1)}(x-2)}{2!\cancel{3}!4!\,\cancel{x(x-1)}(x-2) - 2!\cancel{3}!3!\,\cancel{x(x-1)}(x-2)(x-3)} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{3!4! - 2!4!(x-2)}{2!4!(x-2) - 2!3!(x-2)(x-3)} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{144 - 48(x-2)}{48(x-2) - 12(x^2 5x + 6)} = 4$$

$$\Rightarrow 48x^2 - 480x + 912 = 0 (:48)$$
$$\Rightarrow x^2 - 10x + 19 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta = 24$$
$$\Rightarrow x \notin ¥$$

16. Completar o índice na expressão abaixo:

$$C_{10,3} + C_{10,\ } = C_{\ ,4}\ .$$

Resolução: $C_{10,3} + C_{10,4} = C_{11,4}$ (aplicando a relação de Stifel)

17. Obtenha x, tal que:

$$C_{14,x} = C_{14,2x-1}\ .$$

Resolução:

$x = 2x - 1$ ou $x + 2x - 1 = 14$

$\boxed{x = 1}$ $3x = 15$

$\boxed{x = 5}$

18. Obtenha n, tal que:

$$C_{n,3} = C_{n-1,3} + C_{n-1,2}\ .$$

Resolução:

$n = 2 \rightarrow C_{2,3} = C_{1,3} + C_{1,2}$ $(3 > 2,\ 3 > 1 \text{ e } 2 > 1 \text{ não serve})$

$n = 3 \rightarrow C_{3,3} = C_{2,3} + C_{2,2}$ $(3 > 2 \text{ não serve})$

$n = 4 \rightarrow C_{4,3} = C_{3,3} + C_{3,2}$

Logo, $n \geq 4$.

19. Calcule

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} C_{n,i}\ .$$

Resolução:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} C_{n,i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i+1)!(n-i)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i+1)!((n+1)-(i+1))!} \frac{(n+1)}{(n+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n+1)(i+1)!((n+1)-(i+1))!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+1)} C_{n+1,i+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \left[C_{n+1,1} + C_{n+1,2} + \ldots + C_{n+1,i+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \left(2^n - 1 \right) = \boxed{\frac{2^n - 1}{(n+1)}}$$

20. Calcule o valor da soma

$$S=\sum_{i=1}^{n}(2i)^2(i+2)\ .$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{i=1}^{n}(2i)^2(i+2)=4i^2(i+2)\\
&=4i^3+8i^2=4\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)+8\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&=4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+8\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&=n^2(n+1)^2+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{3}\\
&=\frac{3n^2(n+1)^2+4n(n+1)(2n+1)}{3}\\
&=n(n+1)\left[\frac{3n(n+1)+4(2n+1)}{3}\right]\\
&=\boxed{n(n+1)\left[\frac{3n^2+11n+4}{3}\right]}
\end{aligned}$$

21. Determine o termo independente de x no desenvolvimento

a) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$.

Resolução:

$$T_{i+1}=C_{10,i}\left(x^2\right)^{10-i}\left(x^{-3}\right)^{i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{10,i}\,x^{20-2i}\,x^{-3i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{10,i}\,x^{20-5i} \qquad \to 20-5i=0$$

$$\Rightarrow T_{4+1}=C_{10,4}\,x^{20-5.4} \qquad 20=5i$$

$$\Rightarrow T_{4+1}=C_{10,4} \qquad i=4$$

$$\Rightarrow T_5=\frac{10!}{4!(10-4)!}=\frac{10.9.8.7.6!}{4!\,6!}=\frac{5040}{24}=\boxed{210}$$

b) $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{15}$

Resolução:

$$T_{i+1}=C_{15,i}\left(x^{-2}\right)^{15-i}\left(x^{1/2}\right)^{i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{15,i}\,x^{-30+2i}\,x^{i/2}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{15,i}\,x^{-30+5i/2} \qquad \rightarrow \qquad -30+\frac{5i}{2}=0$$

$$\Rightarrow T_{12+1}=C_{15,12} \qquad\qquad \frac{5i}{2}=30$$

$$\Rightarrow T_{13}=\frac{15!}{12!(15-12)!}=\frac{15.14.13.12!}{12!\,3!} \qquad\qquad i=12$$

$$\Rightarrow T_{13}=\frac{2730}{6}=\boxed{455}$$

22. Calcule a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(x-y)^8$.

$$(x-y)^8=\sum_{i=1}^{n}C_{8,i}x^{8-i}y^{i}$$

Resolução: Considerando $x=1$ e $y=1$, temos: $0=\sum_{i=1}^{n}C_{8,i}$.

23. Calcule o termo central no desenvolvimento de

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{12}.$$

Resolução:

São 13 termos.

Termo central $=\frac{13+1}{2}=7$

$\boxed{i=6}$

$$T_{i+1}=C_{12,i}\left(x^{1/2}\right)^{12-i}\left(x^{-1}\right)^{i}$$
$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{12,i}\,x^{6-i/2}\,x^{-i}$$
$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{12,i}\,x^{6-3i/2}$$
$$\Rightarrow T_{6+1}=C_{12,6}\,x^{6-3.6/2}$$
$$\Rightarrow T_{6+1}=C_{12,6}\,x^{-3}$$
$$\Rightarrow T_7=\frac{12!}{6!6!}x^{-3}=\frac{12.11.10.9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}\;6.5.4.3.2}$$
$$\Rightarrow \boxed{T_7=924x^{-3}}$$

24. Quanto vale $\sum_{i=1}^{n-1} C_{n,i}$, sendo $n\geq 2$?

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{n,i}=C_{n,1}+C_{n,2}+\ldots+C_{n,n-1}=\boxed{2^n-2}\,.$$

25. Calcule x e y sabendo que

$$\left(x+y\right)^3=64 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{5}\left(-1\right)^i C_{n,i}\,x^{n-i}y^i=32\,.$$

Resolução:

$\left(x+y\right)^3=64$	$\sum_{i=0}^{5}\left(-1\right)^i C_{n,i}\,x^{n-i}y^i=32$
$\left(x+y\right)^3=4^3$	$\left(x-y\right)^5=2^5$
$\left(x+y\right)=4$	$\left(x-y\right)=2$
$x=4-y$	$4-y-y=2$
$x=4-1$	$-2y=-2$
$\boxed{x=3}$	$\boxed{y=1}$

26. Determine o coeficiente de a^5 no desenvolvimento de

$$\left(2a^4 - \frac{1}{a}\right)^{10}.$$

Resolução:

$$T_{i+1} = C_{10,i}\left(2a^4\right)^{10-i}\left(-\frac{1}{a}\right)^i$$

$$T_{i+1} = C_{10,i}\,2^{10-i}\,a^{40-4i}\left(-a^{-1}\right)^i$$

$$T_{i+1} = C_{10,i}\,2^{10-i}\,a^{40-4i}\left(-1\right)^{-i}a^{-i}$$

$$T_{i+1} = C_{10,i}\,2^{10-i}\left(-1\right)^{-i}a^{40-5i} \qquad \rightarrow \quad 40-5i=5$$

$$T_{7+1} = C_{10,7}\,2^{10-7}\left(-1\right)^{-7}a^{40-5.7} \qquad -5i=-35$$

$$T_8 = C_{10,7}\,2^3\left(-1\right)a^5 \qquad \boxed{i=7}$$

$$T_8 = \frac{10!}{7!3!}\left(-8\right)a^5$$

$$T_8 = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}3.2}\left(-8\right)a^5$$

$$\boxed{T_8 = -960a^5}$$

27. Calcule o valor da soma

a)

$$S = \sum_{i=0}^{n} i\,C_{n,i}\,3^i$$

$$= 3^i i\frac{n!}{i\left(i-1\right)!\left(n-i\right)!}$$

$$= 3^i\frac{n\left(n-1\right)!}{\left(i-1\right)!\left(n-i\right)!}$$

$$= n\,3^i C_{n-1,i-1}$$

$$= 3n\left(1+3\right)^{n-1}$$

$$= \boxed{3n\,4^{n-1}}$$

b)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{20} \left(-\frac{1}{2} \right)^{i} C_{n,i} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{20} \\
&= \left(\frac{1}{2} \right)^{20} \\
&= \boxed{\frac{1}{2^{20}}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\, 2^{i}\, C_{n,i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\, 2^{i}\, \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \cancel{i(i-1)}\, 2^{i}\, \frac{n!}{\cancel{i(i-1)}\,(i-2)!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^{i}\, \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^{i}\, \frac{n(n-1)(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} n(n-1)\, 2^{i}\, C_{n-2,i-2} \\
&= \boxed{4n(n-1)\, 3^{n-2}}
\end{aligned}$$

d)

$$S=\sum_{i=0}^{n} i^2\,5^i\,C_{n,i}\;=\sum_{i=0}^{n} i\,\cancel{i}\,5^i\,\frac{n(n-1)!}{(n-i)!\,\cancel{i}\,(i-1)!}$$

$$=5n\sum_{i=1}^{n} i\;\;5^{i-1}C_{n-1,i-1}$$

$$=5n\sum_{i=2}^{n}\;\;5^{i-1}C_{n-1,i-1}\left(\,i-1+1\right)$$

$$=5n\sum_{i=2}^{n}\;C_{n-1,i-1}\,5^{i-1}\left(\,i-1\right)\;+5n\sum_{i=1}^{n}\;C_{n-1,i-1}\;5^{i-1}1^{n-1}$$

$$=5n\sum_{i=2}^{n}\;\;5^{i-1}\,\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\,i-1\right)\;+5n\sum_{i=1}^{n}\;C_{n-1,i-1}\;5^{i-1}1^{n-1}$$

$$=5n\sum_{i=2}^{n}\;\;5^{i-1}\,\frac{(n-1)(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!}\;+5n\sum_{i=1}^{n}\;C_{n-1,i-1}\;5^{i-1}1^{n-1}$$

$$=5n\sum_{i=2}^{n}\;\;5^{i-2}5(\,n-1)\;C_{n-2,i-2}\,1^{n-1}\;+5n\sum_{i=1}^{n}\;C_{n-1,i-1}\;5^{i-1}1^{n-1}$$

$$=25n(\,n-1)\,(1+5)^{n-2}\;+5n(\,1+5)^{n-1}$$

$$=25n(\,n-1)\;6^{n-2}\;+5n6^{n-1}$$

$$=5n6^{n-2}\left(\,5(\,n-1)\;+6\right)$$

$$=5n6^{n-2}\left(\,5n-5+6\right)$$

$$=\boxed{5n(\,5n+1)\;6^{n-2}}$$

28. Calcular

$$\sum_{i=1}^{n} i(\,i+1)\,(\,i+2)\;.$$

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n} i(\,i+1)\,(\,i+2)=\sum_{i=1}^{n}\left(\,i^2+i\right)(\,i+2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^3+3i^2+2i$$

$$=\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)+3\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+2\left(1+2+\ldots+n\right)$$

$$=\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}+\frac{2n(\,n+1)\,(\,2n+1)}{4}+\frac{4n(\,n+1)}{4}$$

$$=\frac{n(\,n+1)}{4}\left[n(\,n+1)+2(\,2n+1)+4\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

29. Determine o valor da expressão

$$(77)^5 + 5(77)^4 + 10(77)^3 + 10(77)^2 + 5(77) + 1.$$

Resposta: $(77+1)^5 = 78^5$.

30. Calcule o valor numérico do polinômio

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4,$$

para $x = \dfrac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}$ e $y = \dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}$.

Resolução:

$$(x-y)^4 = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}} - \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}\right)^4$$

$$(x-y)^4 = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)^4$$

$$\boxed{(x-y)^4 = \frac{16}{5}}$$

Tarefa 1 – Capítulo 1 e Capítulo 2

Resolver as seguintes questões:

1. Calcule:

a) $\dfrac{12!}{10!}=\dfrac{12.\,11.\,\cancel{10!}}{\cancel{10!}}=\boxed{132}$;

b) $\dfrac{8!-6!}{5!}=\dfrac{8.7.6.\cancel{5!}-6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}}=336-6=\boxed{330}$.

2. Simplifique:

a) $\dfrac{5M!-2\left(M-1\right)!}{M!}=\dfrac{5M\cancel{\left(M-1\right)!}-2\cancel{\left(M-1\right)!}}{M\cancel{\left(M-1\right)!}}=\boxed{\dfrac{5M-2}{M}}$;

b) $\dfrac{n!+\left(n+1\right)!}{n!}=\dfrac{n!+\left(n+1\right)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=1+\left(n+1\right)=\boxed{n+2}$.

3. Obtenha n, tal que:

$$\frac{\left(n+2\right)!-\left(n+1\right)!}{n!}=4$$

$$\Rightarrow \frac{\left(n+2\right)\left(n+1\right)n!-\left(n+1\right)n!}{n!}=4$$

$$\Rightarrow n^2+3n+2-\left(n+1\right)=4$$

$$\Rightarrow n^2+2n-3=0$$

$$\Rightarrow \Delta=\left(2\right)^2-4.1.\left(-3\right)$$

$$\Rightarrow \Delta=16$$

$$\Rightarrow n=\frac{\left(-2\right)\pm\sqrt{16}}{2.1}\rightarrow \boxed{n'=1} \text{ e } \cancel{n''=-3}$$

4. Calcule $x \in \mathbb{N}$ nas equações abaixo:

a)

$$\frac{(x+2)!+(x+1)!}{(x+3)!}=24$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)\cancel{(x+1)!}+\cancel{(x+1)!}}{(x+3)(x+2)\cancel{(x+1)!}}=24$$

$$\Rightarrow x+2+1=24\left(x^2+5x+6\right)$$

$$\Rightarrow 24x^2+119x+141=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(119)^2-4.24.141$$

$$\Rightarrow \Delta=14.161-13.536$$

$$\Rightarrow \Delta=625$$

$$\Rightarrow x=\frac{-119\pm\sqrt{625}}{2.24}\rightarrow \boxed{x\notin \mathbb{N}}$$

b)

$$\frac{(x+1)!+(x-1)!}{x!+(x-1)!}=\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)\,x\cancel{(x-1)!}+\cancel{(x-1)!}}{x\cancel{(x-1)!}+\cancel{(x-1)!}}=\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2+5x+5=21x+21$$

$$\Rightarrow 5x^2-16x-16=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-16)^2-4.5.(-16)$$

$$\Rightarrow \Delta=576$$

$$\Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{576}}{2.5}\rightarrow x'=4 \text{ e } \cancel{x''=-\frac{4}{5}}$$

5. Prove que:

a) $n!-(n-1)!=(n-1)(n-1)!$.

Resolução: Podemos escrever

$$\begin{aligned} n!-(n-1)! &= n(n-1)!-(n-1)! \\ &= (n-1)![n-1] \\ &= \boxed{(n-1)(n-1)!} \end{aligned}$$

b) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{n}{(n+1)!}$.

Resolução: Podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!} &= \frac{(n+1)!-n!}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)\cancel{n!}-\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} \\ &= \boxed{\frac{n}{(n+1)!}} \end{aligned}$$

6. Expandir as seguinte somas:

a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{6}\frac{j(j-1)(j-2)}{6}=\boxed{0+1+4+10+20}$.

b) $\displaystyle\sum_{i=5}^{10}(3i+2)=\boxed{17+20+23+26+29+32}$.

7. Expandir o seguinte produto:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{j^2}\right)=\boxed{2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+1}{n^2}}.$$

8. Expandir e simplificar:

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{i=p+1}^{n-1} i\prod_{k=1}^{p} k}&=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(p+1)(p+2)\cdots(n-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot p}\\ &=\frac{n!}{(n-1)!}\\ &=\frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}\\ &=\boxed{n}\end{aligned}$$

.

9. Escreva a expressão abaixo usando a notação de produtório:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}=\boxed{\prod_{i=1}^{6}\frac{n}{(n+1)}}.$$

10. Use o princípio de indução matemática para provar a seguinte identidade:

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},\quad n\geq 1;$$

Resolução: 1º Passo: $n=1$

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}=1. \text{ (Vale para } n=1\text{)}$$

2º Passo: Vamos supor que vale para $n = k$, isto é,

$$\sum_{j=1}^{k}(2j-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

3º Passo: Vamos provar para $n = k+1$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)^2 &= \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}\end{aligned}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)^2 &= \sum_{j=1}^{k}(2j-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)(2k+1)}{3} \\ &= \frac{(2k+1)\left[k(2k-1)+3(2k+1)\right]}{3} \\ &= \frac{(2k+1)\left[2k^2-k+6k+3\right]}{3} \\ &= \frac{(2k+1)\left[2k^2+5k+3\right]}{3} \\ &= \frac{(2k+1)\left[2k^2+2k+3k+3\right]}{3} \\ &= \frac{(2k+1)\left[2k(k+1)+3(k+1)\right]}{3} \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}\end{aligned}$$

que é a fórmula para $n = k+1$. Portanto, vale o resultado para qualquer $n \geq 1$.

11. Determine o valor de x na seguinte expressão:

$$C_{14,x^2-2} = C_{14,2x+1}.$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 = 2x + 1$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3)$$
$$\Rightarrow \Delta = 16$$
$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2.1} \to x' = 3 \text{ e } \cancel{x'' = -1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 + 2x + 1 = 14$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4.1.(-15)$$
$$\Rightarrow \Delta = 64$$
$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2.1} \to x' = 3 \text{ e } \cancel{x'' = -5}$$

12. Obtenha n tal que:

$$5C_{n,n-1} + C_{n,n-3} = A_{n,3}.$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{n!}{(\cancel{n} - (\cancel{n} - 1))!(n-1)!}\right) + \left(\frac{n!}{(\cancel{n} - (\cancel{n} - 3))!(n-3)!}\right) = \frac{n!}{(n-3)!}$$
$$\Rightarrow 5\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) + \left(\frac{n!}{3!(n-3)!}\right) = \frac{n!}{(n-3)!}$$
$$\Rightarrow 5\left(\frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}\right) + \left(\frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{3!\cancel{(n-3)!}}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}}$$
$$\Rightarrow 30n + n(n^2 - 3n + 2) = 6n(n^2 - 3n + 2) \qquad (\div n)$$
$$\Rightarrow 30 + n^2 - 3n + 2 = 6(n^2 - 3n + 2)$$
$$\Rightarrow n^2 - 3n + 32 = 6n^2 - 18n + 12$$
$$\Rightarrow 5n^2 - 15n - 20 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta = (-15)^2 - 4.5.(-20)$$
$$\Rightarrow \Delta = 625$$
$$\Rightarrow n = \frac{-(-15) \pm \sqrt{625}}{2.5} \to n' = 4 \text{ e } \cancel{n'' = -1}$$

13. Obtenha x tal que:

$$A_{x,2} - C_{2,x} = 30$$

Resolução: Temos que para satisfazer a condição $C_{2,x}$, x só pode ser 0, 1 e 2. Mas para satisfazer $A_{x,2}$ e satisfazer $C_{2,x}$ ao mesmo tempo $x = 2$. Porém $x = 2$ não satisfaz a condição $A_{x,2} - C_{2,x} = 30$.

Portanto, não tem x que satisfaz.

14. Obtenha x, tal que:

$$C_{x+1,2} = C_{x,1} + C_{4,2}\,.$$

Resolução: Pela relação de Stifel, temos $x = 4$.
Portanto, $C_{5,2} = C_{4,1} + C_{4,2}$.

15. Calcule

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 C_{n,i}\,.$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i^2 C_{n,i} &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \cancel{i}\,\frac{n(n-1)!}{(n-i)!\,\cancel{i}\,(i-1)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} n\,C_{n-i,i-1}(i-1+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} n\,C_{n-i,i-1}(i-1) + \sum_{i=0}^{n} n\,C_{n-i,i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} n\,\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}(i-1) + \sum_{i=0}^{n} n\,C_{n-i,i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} n\,\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-i)!\,\cancel{(i-1)}\,(i-2)!}\,\cancel{(i-1)} + \sum_{i=0}^{n} n\,C_{n-i,i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} n(n-1)\,C_{n-2,i-2} + \sum_{i=0}^{n} n\,C_{n-i,i-1} \\
&= n(n-1)\,2^{n-2} + n\,2^{n-1} \\
&= n\,2^{n-2}(n-1+2) \\
&= n(n+1)\,2^{n-2}.
\end{aligned}$$

16. Calcule o valor da soma $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_{n,i} \qquad 0 \le p \le n$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_{n,i} &= C_{n,o} - C_{n,1} + C_{n,2} - C_{n,3} + \ldots + (-1)^p C_{n,p} \\
&= \cancel{C_{n-1,0}} - \left(\cancel{C_{n-1,0}} + \cancel{C_{n-1,1}}\right) + \left(\cancel{C_{n-1,1}} + \cancel{C_{n-1,2}}\right) + \ldots + (-1)^p\left(\cancel{C_{n-1,p-1}} + C_{n-1,p}\right) \\
&= (-1)^p\,C_{n-1,p}
\end{aligned}$$

17. Determine o termo independente de x no desenvolvimento:

a)

$$\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt[4]{x}\right)^{18} \Rightarrow T_{i+1}=C_{18,i}\left(x^{-2}\right)^{18-i}\left(x^{1/4}\right)^{i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{18,i}x^{-36+2i}x^{i/4}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{18,i}x^{-36+\frac{9i}{4}} \qquad -36+\frac{9i}{4}=0$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{18,i} \qquad \frac{9i}{4}=36$$

$$\Rightarrow T_{16+1}=C_{18,16} \qquad 9i=144$$

$$\Rightarrow T_{17}=153 \qquad i=16$$

b)

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{12} \Rightarrow T_{i+1}=C_{12,i}\left(x^{1/2}\right)^{12-i}\left(x^{-1}\right)^{i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{12,i}x^{6-\frac{i}{2}}x^{-i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{12,i}x^{6-\frac{3i}{2}} \qquad 6-\frac{3i}{2}=0$$

$$\Rightarrow T_{4+1}=C_{12,4} \qquad \frac{3i}{2}=6$$

$$\Rightarrow T_{5}=495 \qquad 3i=12$$

$$i=4$$

18. Calcule o termo central no desenvolvimento

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{10}.$$

Resolução:

São 11 termos.

Termo central = $\frac{11+1}{2}=6$. $i=5$

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{10} \Rightarrow T_{i+1}=C_{10,i}\,x^{10-i}\left(-x^{-2}\right)^{i}$$

$$\Rightarrow T_{i+1}=C_{10,i}\left(-1\right)^{i}x^{10-3i}$$

$$\Rightarrow T_{5+1}=C_{10,5}\left(-1\right)^{5}x^{10-3i}$$

$$\Rightarrow T_{5+1}=-C_{10,5}\,x^{-5}$$

$$\Rightarrow T_{7}=-252x^{-5}$$

$$\Rightarrow T_{7}=-\frac{252}{x^5}.$$

19. Quanto vale $\sum_{i=0}^{n} C_{n,i}$?

Resolução:

$$\sum_{i=0}^{n} C_{n,i} = C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} = 2^n.$$

20. Calcule o valor da expressão:

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{i=1}^{n} C_{n,i} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-i} \left(\frac{3}{4}\right)^i .$$

Resolução:

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{i=1}^{n} C_{n,i} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-i} \left(\frac{3}{4}\right)^i &= 1 + \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^n - \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^n} \\ &= 1 + \left(\frac{4}{4}\right)^n \\ &= 1 + 1^n \\ &= 2. \end{aligned}$$

21. Qual é o maior dos números

$$a = 101^{50} \qquad \text{ou} \qquad b = 100^{50} + 99^{50} ?$$

Resolução:

$$a = (100+1)^{50} = C_{50,0}100^{50} + C_{50,1}100^{49} + C_{50,2}100^{48} + \ldots + C_{50,49}100 + C_{50,50}$$

$$b = 100^{50} + (100-1)^{50} = C_{50,0}100^{50} - C_{50,1}100^{49} + C_{50,2}100^{48} - \ldots - C_{50,49}100 + C_{50,50} + 100^{50}$$

$$\begin{aligned} (a-b) &= 2C_{50,1}100^{49} + 2C_{50,3}100^{47} + \ldots + 2C_{50,49}100 - 100^{50} \\ &= 2C_{50,3}100^{47} + \ldots + 2C_{50,49}100 > 0 \end{aligned}$$

Logo, $a > b$.

22. Calcular n sabendo que

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{n,i} = 254 .$$

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{n,i} = 254$$

$$\Rightarrow 2^n - 2 = 254$$

$$\Rightarrow 2^n = 254 + 2$$

$$\Rightarrow 2^n = 256$$

$$\Rightarrow 2^n = 2^8$$

$$\Rightarrow n = 8.$$

23. Sabendo que

$$\sum_{i=0}^{5} C_{n,i} a^{n-i} b^i = 1024 .$$

Calcule o valor de $\left(a+b\right)^2$.

Resolução:

$$\sum_{i=0}^{5} C_{n,i} a^{n-i} b^i = 1024$$

$$\Rightarrow \left(a+b\right)^5 = 1024$$

$$\Rightarrow \left(a+b\right)^5 = 2^{10}$$

$$\Rightarrow a+b = \sqrt[5]{2^{10}}$$

$$\Rightarrow a+b = 2^2$$

$$\Rightarrow \left(a+b\right)^2 = \left(2^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(a+b\right)^2 = 16.$$

24. Calcule o valor da expressão $\left(1-\sqrt{3}\right)^5 - \left(1+\sqrt{3}\right)^5$.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
\left(1-\sqrt{3}\right)^5-\left(1+\sqrt{3}\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5} C_{5,k}1^{5-k}\left(-\sqrt{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{5} C_{5,k}1^{5-k}\left(\sqrt{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{5}\left[C_{5,k}1^{5-k}\left(-\sqrt{3}\right)^k-C_{5,k}1^{5-k}\left(\sqrt{3}\right)^k\right] \\
&= -2C_{5,1}\sqrt{3}-2C_{5,3}3\sqrt{3}-2C_{5,5}9\sqrt{3} \\
&= -2\cdot 5\sqrt{3}-2\cdot 10\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 1\cdot 9\sqrt{3} \\
&= -10\sqrt{3}-60\sqrt{3}-18\sqrt{3} \\
&= -88\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

25. Calcule o valor da soma

$$S=\sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\,2^i\,3^{n-i}\ .$$

Resolução:

Usando o Teorema do Binômio de Newton, temos:

$$\left(3+2\right)^n=5^n\ .$$

Capítulo 3 – Análise Combinatória: Permutação e Combinação

Lista de Exercícios 1 – Página 75

1) Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece 8 pratos distintos de carne e 5 pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

Resolução: Temos 8 tipos de carnes e 5 tipos de sobremesa, $8 \times 5 = 40$.

Portanto, o homem tem 40 formas para fazer sua refeição.

2) Numa festa existem 80 homens e 90 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados?

Resolução: Temos 80 homens e 90 mulheres, $80 \times 90 = 7.200$.

Portanto, podem ser formados 7.200 casais diferentes.

3) Um edifico tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifico e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

Resolução: Temos 8 portas num edifício, sendo que não pode usar a porta que entrou para sair, $8 \times 7 = 56$ formas.

Portanto, uma pessoa tem 56 formas para entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar.

4) Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 sapatos. De quantas formas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?

Resolução: Temos 10 ternos, 12 camisas e 5 sapatos, $10 \times 12 \times 5 = 600$.

Portanto, ele tem 600 formas de vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos.

5) De quantas formas podemos responder a 12 perguntas de um questionário, cujas respostas para cada pergunta são sim ou não?

Resolução: $2 \times 2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^{12} = 4.096$ possibilidades.

Portanto, existem 4.096 formas para responder a 12 perguntas de um questionário com apenas 2 respostas.

6) Uma prova consta de 20 testes tipo verdadeiro ou falso. De quantas formas uma pessoa poderá responder aos 20 testes?

Resolução: $2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^{20} = 1.048.576$.

Portanto, uma pessoa poderá responder aos 20 testes de 1.048.576 formas.

7) Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os digito 1, 2 , 3 , 7 , 8 ?

Resolução: $5 \times 5 \times 5 = 125$ números.

Portanto, podemos formar 125 números de 3 algarismos com os dígitos 1,2,3,7,8.

8) Quantos números telefônicos com 7 digito podem ser formados, se usarmos os digito de 0 a 9 ?

Resolução: $10^7 = 10.000.000$.

Portanto, podem ser formados 10.000.000 números telefônicos com 7 dígitos, usando os dígitos de 0 a 9.

Lista de Exercícios 2 – Página 79

1) Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

Resolução:A primeira letra da palavra pode ser escolhida de 26 modos, a segunda, de 25modos; e a terceira, de 24 modos;

Logo teremos $26 \times 25 \times 24 = 15.600$ palavras contendo 3 letras diferentes.

2) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha com cinco alternativas por questão?

Resolução:A primeira pergunta pode ser respondida de 5 modos, a segunda, de 5 modos , etc.

Logo teremos $5 \times 5 \times ... \times 5 = 5^{10} = 9.765.625$.

3) De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?

Resolução:Há 12 modos de escolher o presidente e, depois disso, há 11 modos de escolher o secretário.

Portanto, $12 \times 11 = 132$ modos diferentes.

4) De quantos modos 3 pessoas podem sentar - se em 5 cadeiras em fila?

Resolução:A primeira pessoa tem 5 escolhas, a segunda 4, a terceira 3.

Portanto, temos $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos.

5) Quantos números de quatro digito são maiores que 2400 e:

a) Têm todos digito diferentes.

Resolução: a) Se o número não começar pelo algarismo 2, há 7 modos de selecionar o primeiro algarismo, 9 de selecionar o segundo, 8 o terceiro e 7 o quarto.

Portanto, temos $7 \times 9 \times 8 \times 7 = 3.528$ números não começados por 2.

Se o número começar por 2, há 1 modo de escolher o primeiro dígito, 6 de escolher o segundo (deve ser maior que ou igual a 4), 8 o terceiro e 7 o quarto.

Portanto, temos $1 \times 6 \times 8 \times 7 = 336$ números começados por 2.

Total é 3.528 + 336 = 3.864.

b) Não têm digito iguais a 3, 5 ou 6.

Resolução: b) Se o número não começar pelo algarismo 2, há 4 modos de selecionar o primeiro algarismo (4, 7, 8 ou 9), 7 de selecionar o segundo, 7 o terceiro e 7 o quarto.

Portanto, temos $4 \times 7 \times 7 \times 7 = 1.372$ números não começados por 2.

Se o número começar por 2, o segundo algarismo deve ser igual a ou maior que 4 -entretanto, se o segundo algarismo for 4 , não podem ser simultaneamente iguais a 0 os dois últimos algarismos.

Há, portanto, 1 modo de escolher o primeiro dígito, 4 de escolher o segundo (4, 7, 8 ou 9), 7 o terceiro e 7 o quarto.

Portanto, temos $1 \times 4 \times 7 \times 7 = 196$ números começados por 2, ai incluído, indevidamente, o número 2.400.

Total é 1.372 + 195 = 1.567.

c) Têm as propriedades a) e b) simultaneamente.

Resolução: c) Se o número não começar pelo algarismo 2, há 4 modos de selecionar o primeiro algarismo (4, 7, 8 ou 9), 6 de selecionar o segundo, 5 o terceiro e 4 o quarto.

Portanto, temos $4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$ números não começados por 2.

Se o número começar por 2, há 1 modo de escolher o primeiro dígito, 4 de escolher o segundo (4, 7, 8 ou 9), 5 o terceiro e 4 o quarto.

Portanto, temos $1 \times 4 \times 5 \times 4 = 80$ números começados por 2.

Total é 480 + 80 = 560.

6) Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais.

Resolução: Temos $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9.000$ números naturais de 4 algarismos e $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4.536$ naturais de 4 algarismos diferentes.

Portanto, temos 9.000 – 4.536 = 4.464 números naturais que possuem pelo menos dois dígitos iguais.

7) Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

Resolução: Temos que decidir quantos exemplares de cada revista devem ser postos na coleção. Há 6 possibilidades para a revista A (0, 1, 2 , 3, 4 ou 5 exemplares), 7 para a revista B e 11 para a revista C.

Portanto, temos $6 \times 7 \times 11 = 462$, e o número de coleções não-vazias é 461.

8) Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) dos números 1, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 9?

Resolução: Note que inicialmente, podemos imaginar o fator 1 presente em todos os produtos. Devemos escolher quantos fatores 5 serão usados no produto (0 ou 1), quantos fatores 6 (0 ou 1), quantos fatores 7 (0, 1 ou 2) e quantos fatores 9 (0,1, 2, ou 3).

Portanto, temos $2\times2\times3\times4=48$

9) Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências.

Resolução: O número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de frente é $5\times4\times3\times2=120$; o número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de costas é $5\times4\times3=60$; o número de modos de acomodar os demais passageiros é $3\times2\times1=6$.

Portanto, temos $120\times60\times6=43.200$.

10) Fichas podem ser azuis, vermelhas ou amarelas; circulares, retangulares ou triangulares, finas ou grossas. Quantos tipos de fichas existem?

Resolução: Existem 3 possibilidades para a cor, 3 para a forma e 2 para a espessura.

Portanto, temos $3\times3\times2=18$ tipos de fichas.

Lista de Exercícios 3 – Página 87

1. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

a) Que começam por consoante e terminam com vogal?

Resolução: Existem 4 modos de selecionar a consoante que será a primeira letra do anagrama e 4 modos de selecionar a vogal que será a última letra do anagrama. Depois disso, existe 6! modos de arrumar as demais letras entre a primeira e a última.

Portanto, temos $4 \times 4 \times 6! = 4 \times 4 \times 720 = 11.520$

b) Que têm as letras C,A,P juntas nessa ordem?

Resolução: Considere CAP como se fosse uma única letra. Devemos, portanto, arrumar em fila 6 objetos CAP,I,T,U,L,O.

Portanto, temos 6! = 720.

c) Que têm as letras C,A,P juntas em qualquer ordem?

Resolução: Primeiramente, devemos escolher a ordem em que as letras C,A,P aparecerão. Existe 3! modos. Depois arrumar em fila 6 objetos: o bloco das letras C,A,P e as 5 letras I,T,U,L,O. Existe 6! modos.

Portanto, temos $3! \times 6! = 6 \times 720 = 4.320$

d) Que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

Resolução: As vogais e consoantes podem aparecer na ordem CV CV CV CV ou na ordem VC VC VC VC. No primeiro caso, devemos colocar as 4 vogais nos 4 lugares de ordem par (4! modos) e as 4 consoantes nos 4 lugares de ordem impar (4! modos).

Existem $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ anagramas do primeiro tipo.

Analogamente, há 576 anagramas do segundo tipo.

Portanto, temos 576 + 576 = 1.152

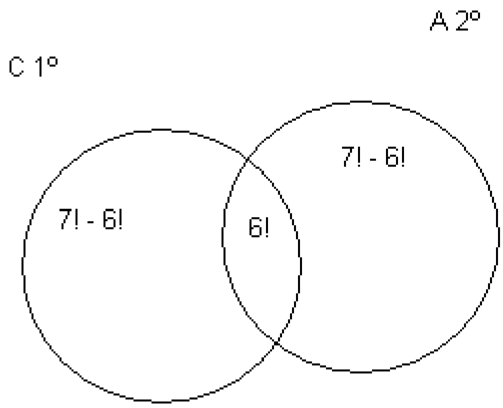
e) Que têm a letra C no 1º lugar e a letra A no 2º lugar?

Resolução: Basta arrumar em fila, depois do CA, as restantes 6 letras.

Portanto, temos 6! = 720

f) Que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar?

Resolução: Vamos fazer um diagrama de conjuntos:



X é o conjunto dos anagramas que têm C em primeiro lugar (7!elementos).

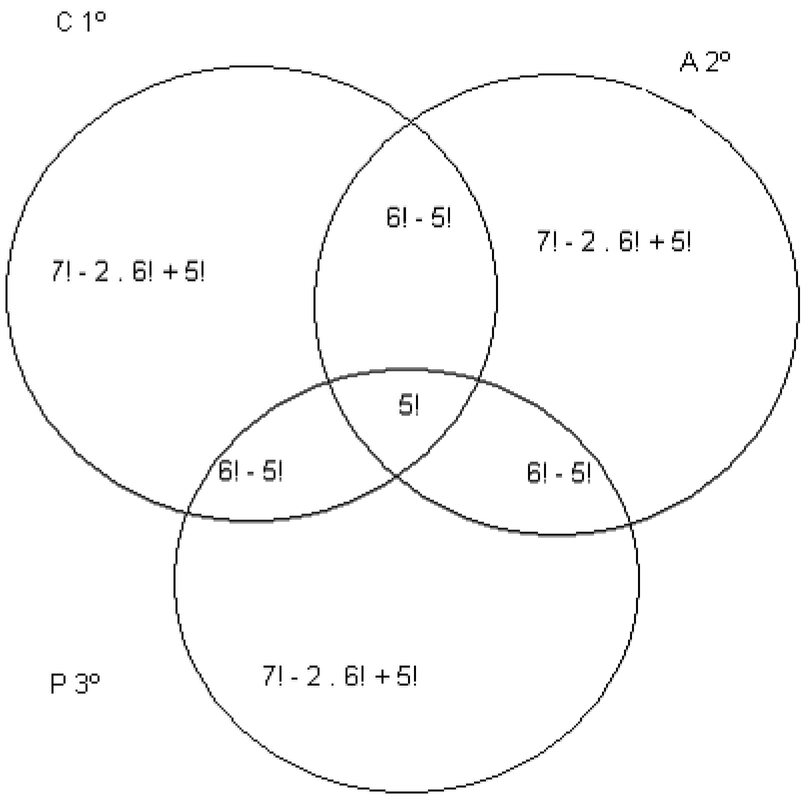
Y é o conjunto dos anagramas que têm A em segundo lugar.

O diagrama foi preenchido, evidentemente, de dentro para fora.

Portanto, temos $7! - 6! + 6! + 7! - 6! = 2 \times 7! - 6! = 9.360$

g) Que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º ou a letra P no 3º lugar?

Resolução: Vamos fazer um diagrama de conjuntos:



Os anagramas que têm C em primeiro lugar, ou A em segundo, ou P em terceiro, são os anagramas que pertencem á união dos três conjuntos.

Portanto, temos $3.(7! - 2.6! + 5!) + 3.(6! - 5!) + 5! = 3.7! - 3.6! + 5! = 15.120 + 2.160 + 120 = 13.080$.

2. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1,2,4,6,7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

a) Que lugar ocupa o número 62.417?

Resolução: Para determinar o lugar ocupado pelo número 62.417, devemos contar quantos números estão antes dele. Antes dele estão os números começados por:

1	(4! = 24 números)
2	(4! = 24 números)
4	(4! = 24 números)
61	(3! = 6 números)
621	(2! = 2 números)

Portanto, temos 24 + 24 + 24 + 6 + 2 = 80 números antes do 62.417.

Logo, o número 62.417 ocupa o 81º lugar.

b) Qual é o número que ocupa o 66º lugar?

Resolução: Existem 4! = 24 números começados por 1,

4! = 24 números começados por 2,

3! = 6 números começados por 41,

3! = 6 números começados por 42,

3! = 6 números começados por 42,

3! = 6 números começados por 46.

Portanto, o 66º números escrito é o último dos números começados por 46, ou seja, 46.721.

c) Qual é o 200º algarismo escrito?

Resolução: Como há 5 algarismos em cada número, o 200º algarismo escrito é o último algarismo do 40º número.

Como há 4! = 24 números começados por 1,

3! = 6 números começados por 21,

3! = 6 números começados por 24.

O 37º números escrito é o primeiro dos números começados por 26 ou seja, 26.147.

O 38º número escrito é o número seguinte, 26.174.

O 39º é 26.417 e o 40º é 26.471.

Portanto, o 200º algarismo escrito é o número 1.

d) Qual é a soma dos números assim formados?

Resolução: Nas casas das unidades desses números, aparecem apenas os algarismos 1, 2, 4, 6, 7, cada um deles 4! = 24 vezes. A soma das unidades desses números é, portanto, (1 + 2 + 4 + 6 + 7).24 = 480 unidades, ou seja 480. A soma das dezenas é, analogamente, igual a 480 dezenas, ou seja, 4.800. A soma das centenas é igual a 480 centenas, ou seja, 48.000. A soma das unidades de milhar é igual a 480 unidades de milhar, ou seja, 480.000. Finalmente, a soma das dezenas de milhar é igual a 480 dezenas de milhar, ou seja, 4.800.000.

Portanto, temos 480 + 4.800 + 48.000 + 480.000 + 4.800.000 = 5.333.280.

3. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessa 7 não finquem juntas?

Resolução: O número total de modos de sentar 7 pessoas em 7 cadeiras é o número de modos de arrumar 7 pessoas em fila, que é igual a 7!.

O número de modos de arrumar 7 pessoas em fila de modo que duas pessoas, A e B, fiquem juntas é 2 x 6!, pois, para formar uma tal fila, devemos inicialmente decidir em que ordem se colocarão A e B (AB ou BA), e, em seguida, formar uma fila de 6 objetos: o bloco das pessoas A e B; as demais 5 pessoas.

Portanto, temos 7! – $(2\times 6!)$ = 5.040 – 1.440 = 3.600

4. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de mesmo assunto permaneçam juntos?

Resolução: Devemos inicialmente escolher a ordem das matérias, o que pode ser feito de 3! modos. Depois, devemos, em cada matéria, escolher a ordem em que se apresentarão os livros, 5!3!2!.

Portanto, temos 3!5!3!2! = $6\times 120\times 6\times 2$ = 8.640.

5. Quantos são as permutações dos números (1,2,...,10) nas quais o 5 está situado à direita do 2 a à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

Resolução:Há 10! Permutações, que se dividem em 3! = 6 classes conforme a ordem em que se apresentam os algarismos 2, 3 e 5, uma das quais é a classe correspondente à ordem desejada, 253. Como as classes são de igual tamanho, há em cada uma delas, $\frac{1}{6}$ do total de permutações.

Portanto, temos $\frac{10!}{6} = 604.800$.

6. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

a) Em dois grupos de 6?

Resolução: Forme uma fila com 12 pessoas. Isso automaticamente as divide em dois grupos de 6: as seis primeiras formam um grupo e as seis últimas, outro. Há 12! modos de formar a fila. Entretanto, uma mesma divisão em grupos correspondente a várias filas diferentes, o que faz com que no resultado 12! cada divisão tenha sido contada várias vezes. Devemos corrigir nossa contagem dividindo o resultado pelo número de vezes que cada divisão foi contada. Uma divisão como *abcdef* em um grupo e *ghijkl* em outro foi contada cada vez que formamos uma fila com *abcdef* ocupando, em qualquer ordem, os seis primeiros lugares e ghijkl, os seis últimos (6!6! modos de formar uma tal fila) ou vice-versa (6!6! modos).

Portanto, temos $\frac{12!}{6!6!2} = 462.$

b) Em três grupos de 4?

Resolução: Forme uma fila com 12 elementos e tome como grupos os formados pelos quatro primeiro elementos, pelos quatro seguintes e pelos quatro últimos. O número de filas é 12!, mas cada divisão em grupos corresponde a várias filas, obtidas trocando os grupos entre si (3! modos) ou trocando a posição dos elementos em cada um dos três grupos ($4!^3$ modos).

Portanto, temos $\frac{12!}{3!.(4!)^3} = 5.775$

c) Em um grupo de 5 e um grupo de 7?

Resolução: Forme uma fila com doze elementos e tome como grupos os formados pelos cinco primeiros elementos e pelos sete últimos. O número de filas é 12!, mas cada divisão em grupos corresponde a várias fila, obtidas trocando a posição dos elementos em cada um dois grupos (5! 7! modos).

Portanto, temos $\dfrac{12!}{5!7!} = 792$.

d) Em seis grupos de 2?

Resolução: Forme uma fila com 12 elementos e tome como grupo os formados pelos 2 primeiros elementos, pelos 2 seguintes, ... e pelos 2 últimos. O número de filas é 12!, mas cada divisão em grupos corresponde a várias filas, obtidas trocando os grupos entre si (6! modos) ou trocando a posição dos elementos em cada um dos três grupos ($2!^6$ modos).

Portanto, temos $\dfrac{12!}{6!.(2!)^6} = 10.395$.

e) Em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

Resolução: Forme uma fila com 12 elementos e tome como grupos os formados pelos 4 primeiros elementos, pelos 4 seguintes, pelos 2seguintes e pelos2 últimos. O número de filas é 12!, mas cada divisão em grupos corresponde a várias filas, obtidas trocando os grupos de 4 entre si (2! modos), ou trocando os grupos de 2 si (2! modos), ou trocando a posição dos elementos em cada um dos 4 grupos ($4!^2.2!^2$ modos).

Portanto, temos $\dfrac{12!}{2!.2!.(4!)^2.(2!)^2} = 51.975$

7. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

Resolução: Para arrumar os delegados com o brasileiro e o português juntos, devemos, primeiramente, escolher a ordem em que esses dois delegados sentar-se-ão (2 possibilidades). Depois disso, devemos arrumar em fila 9 objetos: o bloco luso-brasileiro e os delegados dos outros 8 paises, o que pode ser feio de 9! modos. Devemos agora subtrair as arrumações em que, além do brasileiro estar ao lado do português, estiverem juntos o americano e o iraquiano, que foram incluídas individualmente. Estas são em número de 2 x 2 x 8!, pois há 2 modos de escolher a ordem em que aparecerão o brasileiro e o português, 2 modos de escolher a ordem em que aparecerão o americano e o iraquiano e 8! modos de arrumar em fila o bloco luso-brasileiro, o bloco formado pelos delegados iraquiano e americano, e os demais seis delegados.

Portanto, temos 2 x 9! – 2 x 2 x 8! = 564.480.

8. Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

Resolução: Devemos colocar seis números em seis lugares.

Portanto, temos $P_6 = 6! = 720$.

9. Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6000000, podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8?

Resolução: Existem $P_6^{2,2,1,1} = \dfrac{6!}{2!2!1!1!} = 180$ números começados por 6.

$$P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!1!1!1!} = 120 \text{ números começados por 8.}$$

Portanto, temos $180 + 120 = 300$.

10. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

Resolução: Há $(PC)_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos 5 lugares entre as meninas, o que pode ser feito de 5! modos.

Portanto, temos $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2.880$.

Lista de Exercícios 4 – Página 98

1. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

a) Quantas comissões podem ser formadas?

Resolução: Para formar uma comissão devemos selecionar 3 homens, o que pode ser feito de $C_8^3 = 56$ modos, e 3 mulheres, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos.

Portanto, temos $56 \times 10 = 560$.

b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar de uma comissão, se nela estivesse uma determinada mulher?

Resolução:O total de comissões, já temos no item a), é 560. Basta dele subtrair o número de comissões das quais o homem e a mulher participam, $C_7^2.C_4^2 = 21 \times 6 = 126$.

Portanto, temos 560 – 126 = 434.

2. Para seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

Resolução:O goleiro poder ser selecionado de 2 modos; os zagueiros, de $C_6^4 = 15$ modos; os meios-de-campo, de $C_7^4 = 35$ modos e os atacantes, de $C_4^2 = 6$ modos.

Portanto, temos $2 \times 15 \times 35 \times 6 = 6.300$.

3. Em um torneio no qual cada participantes enfrenta todos os demais uma única vez, 780 partidas são realizadas. Quantos são os participantes?

Resolução: Com n participantes, são jogadas $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ partidas. Portanto, $\frac{n(n-1)}{2} = 780$, ou seja, $n(n-1) = 1.560$. Observe que n deverá ser inteiro e positivo.

$$n(n-1)=1.560$$
$$n^2-n-1.560=0$$
$$\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4.1.(-1.560)}}{2.1}=$$
$$\frac{1\pm\sqrt{1+6240}}{2}=$$
$$\frac{1\pm\sqrt{6241}}{2}=$$
$$\frac{1\pm 79}{2}=$$
$$n'=\frac{80}{2}=40$$
$$ou$$
$$n''=-\frac{78}{2}=-39$$

Como n é inteiro e positivo, a resposta é $n=40$

4. Um homem tem 5 amigas e 7 amigos. Sua esposa tem 7 amigas e 5 amigos. De quantos modos eles podem convidar 6 amigos e 6 amigas, se cada um deve convidar 6 pessoas?

Resolução: Há seis casos a considerar:

i) o homem convida 1 homem e 5 mulheres, a mulher convida 5 homem e 1 mulher; isso pode ser feito de $C_7^1.C_5^5.C_5^5.C_7^1=[C_7^1.C_5^5]^2=\left(7\times 1\right)^2=49$ modos;

ii) o homem convida 2 homens e 4 mulheres, a mulher convida 4 homens e 2 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^2.C_5^4.C_5^4.C_7^2=[C_7^2.C_5^4]^2=\left(21\times 5\right)^2=11.025$ modos;

iii) o homem convida 3 homens e 3 mulheres, a mulher convida 3 homens e 3 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^3.C_5^3.C_5^3.C_7^3=[C_7^3.C_5^3]^2=\left(35\times 10\right)^2=122.500$ modos;

iv) o homem convida 4 homens e 2 mulheres, a mulher convida 2 homens e 4 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^4.C_5^2.C_5^2.C_7^4=[C_7^4.C_5^2]^2=\left(35\times 10\right)^2=122.500$ modos;

v) o homem convida 5 homens e 1 mulheres, a mulher convida 1 homens e 5 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^5.C_5^1.C_5^1.C_7^5=[C_7^5.C_5^1]^2=\left(21\times 5\right)^2=11.025$ modos;

vi) o homem convida 6 homens e a mulher convida 6 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^6.C_7^6=[C_7^6]^2=\left(7\right)^2=49$ modos.

Portanto, temos $49+11.025+122.500+122.500+11.025+49=267.148$.

5. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

Resolução: Vamos esquecer a primeira casa do número não pode ser iguala zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente.

Há C_7^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo digito 4; depois disso, há C_4^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo digito 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).

A "resposta" seria $C_7^3\times C_4^2\times 8\times 8=35\times 6\times 64=13.440$.

Devemos subtrair os números começados por 0. Se o número começa por 0, há C_6^3 modos de escolher as casa que serão ocupadas pelo digito 4; depois disso. Há C_3^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo digito 8; finalmente, a casa restantes pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessa casa os dígitos 4 e 8). Há $C_6^3\times C_3^2\times 8=20\times 3\times 8=480$ números começados por 0.

Portanto, temos 13.440 – 480 = 12.960.

6. Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

Resolução: Escolhida a ordem de cada casal, o que pode ser feito de 2^6 modos temos que arrumar em fila 8 espaços vazios e 6 casais, o que pode ser feito de C_{14}^8 modos (escolha dos espaços vazios) vezes 6! (colocação dos 6 casais nos 6 lugares restantes).

Portanto, temos $2^6\times C_{14}^8\times 6!=138.378.240$.

7. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w=3$?

Resolução: $CR_4^3=C_{4+3-1}^3=C_6^3=20$

8. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w<6$?

Resolução:A introdução da variável de folga (diferença entre o valor máximo que $x+y+z+w$ poderia ter e o valor que $x+y+z+w$ efetivamente tem) transforma a inequação na equação $x+y+z+w+t=5$.

Portanto, temos $CR_5^5 = C_9^5 = 126$.

9. Quantos são as soluções inteiras positivas de $x+y+z+w=10$?

Resolução: Fazendo

$x=1+a$,

$y=1+b$,

$z=1+c$,

a equação se transforma em $a+b+c=7; a,b,c$ não negativos.

Portanto, temos $CR_3^7 = C_9^7 = 36$.

10. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x+y+z+w<10$?

Resolução: Fazendo

$x=1+a$,

$y=1+b$,

$z=1+c$,

a inequação se transforma em $a+b+c<7; a,b,c$ não negativos. Introduzindo a variável de folga, obtemos $a+b+c+f=6$.

Portanto, temos $CR_4^6 = C_9^6 = 84$.

Capítulo 4 – Elementos de Probabilidade

Lista de Exercícios – Página 126

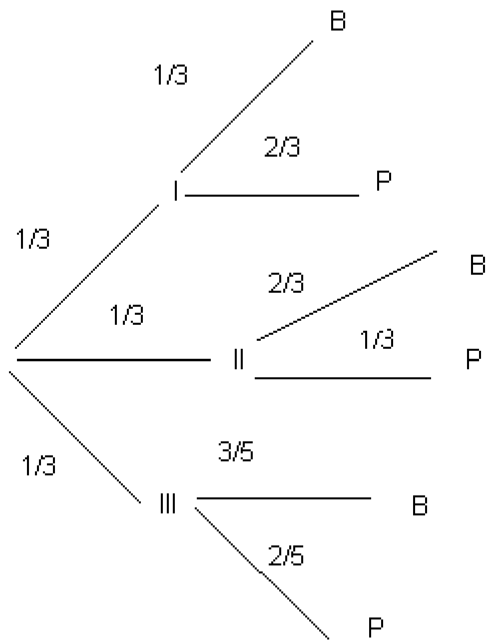
1. Três urnas I, II e III contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a II?

Resolução:

$$P(II/branca)=\frac{P(IIebranca)}{P(branca)}=$$

$$=\frac{P(II).P(branca/II)}{P(I)P(branca/II)+P(II).P(branca/II)+P(III).P(branca/II)}=$$

$$=\frac{(1/3).(2/3)}{(1/3).(1/3)+(1/3).(2/3)+(1/3).(3/5)}=\frac{5}{12}$$



2. Uma moeda é jogada 4 vezes. Sabendo que o primeiro resultado foi cara, calcular a probabilidade condicional de obter pelo menos 2 caras.

Resolução: Nos 3 lançamentos seguintes, deve ocorrer pelo menos uma cara. A probabilidade de três coroas é $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ e a probabilidade de pelo menos uma cara é $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

3. A probabilidade de um homem ser canhoto é $\frac{1}{10}$. Qual é a probabilidade de, em um grupo de 10homens, haver pelo menos um canhoto?

Resolução: A probabilidade de não haver nenhum canhoto é $0,9^{10}$. A probabilidade da haver pelo menos um canhoto é $1 - 0,9^{10} = 0,6513$.

4. Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $\frac{4}{10}$. O fluminense ganha um jogo em um dia com chuva com probabilidade $\frac{6}{10}$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $\frac{4}{10}$. Sabendo-se que o fluminense ganhou o jogo naquele dia de agosto, qual a probabilidade de que choveu neste dia?

Resolução:

$$P[choveu/ganhou] =$$

$$= \frac{P[choveu]P[choveu/ganhou]}{P[choveu]P[ganhou/choveu] + P[não-choveu]P[ganhou/não-choveu]}$$

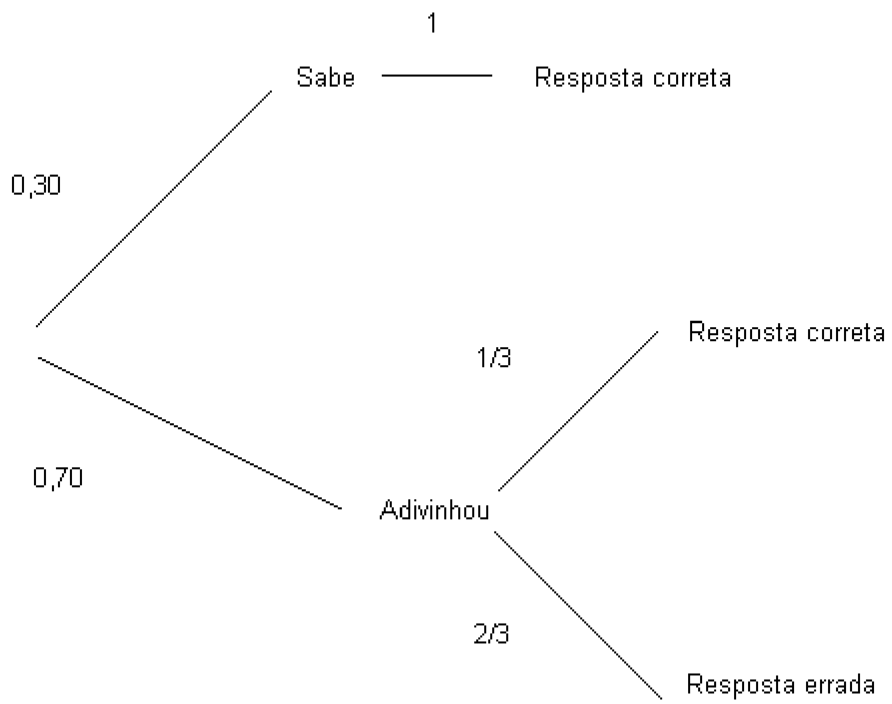
$$= \frac{\frac{4}{6}.\frac{6}{10}}{\frac{4}{10}.\frac{6}{10} + \frac{6}{10}.\frac{4}{10}} = \frac{1}{2}.$$

5. Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas 1 delas é certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade de $\frac{1}{3}$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando e 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das respostas do exame. Se ela deu a resposta correta a uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou?

Resolução:

$$P[adivinhou / resposta - correta] = \frac{0,70 \times \frac{1}{3}}{0,70 \times \frac{1}{3} + 0,30 \times 1} = \frac{7}{16}.$$

A árvore correspondente segue abaixo:



6. Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento "o às de copas está entre 13 cartas" e B o evento "as 13 copas são do mesmo naipe". Provar que A e B são independentes.

Resolução:

$$P(A)=\frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}}=\frac{51!13!39!}{12!39!52!}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4};$$

$$P(B)=\frac{4}{\binom{52}{13}};$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{\binom{52}{13}}$$

Portanto $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ou seja A e B são eventos independentes.

7. Joguei um dado duas vezes. Calcule a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7.

Resolução: Sejam X e Y os resultados do primeiro e segundo lançamentos, respectivamente.

$$P\left(X=3/X+Y=7\right)=$$
$$=\frac{P\left(X=3,X+Y=7\right)}{P\left(X+Y=7\right)}=\frac{1/6\cdot 1/6}{6/36}=\frac{1}{6}.$$

8. Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade $\frac{1}{3}$. Suponha que A faz uma afirmação e que D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual a probabilidade de A ter falado a verdade?

Resolução: Considere os eventos:

A = {A falou a verdade};

B = {B disse que A falou a verdade};

C = {C disse que B disse que A falou a verdade};

D = {D disse que C disse que B disse que A falou a verdade}.

Vamos aliviar a notação escrevendo XY para representar X$\cap$Y.

Queremos calcular $P\left(A|D\right)=\dfrac{P\left(AD\right)}{P\left(D\right)}$.

$$P(AD) = P(ABCD) + P(A\bar{B}CD) + P(AB\bar{C}D) + P(ABC\bar{D}) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{13}{81}$$

$$P(\bar{A}D) = P(\bar{A}BCD) + P(\overline{AB}CD) + P(\bar{A}B\bar{C}D) + P(A\overline{BC}D) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{28}{81}.$$

$$P(D) = P(AD) + P(\bar{A}D) = \frac{13}{81} + \frac{28}{81} = \frac{41}{81}.$$

A resposta é $P(A|D) = \dfrac{P(AD)}{P(D)} = \dfrac{13/81}{41/81} = \dfrac{13}{41}.$

9. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 7 brancas. A e B sacam alternadamente, sem reposição, bolas dessa urna até uma bola vermelha seja retirada. A saca a 1ª bola. Qual a probabilidade de A sacar a bola vermelha?

Resolução: A probabilidade de A sacar uma bola vermelha em sua primeira jogada é $\dfrac{3}{10}$.

Para A sacar uma bola vermelha em sua segunda jogada, as bolas sacadas devem ser branca-branca-vermelha.

A probabilidade de isso ocorrer é $\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{40}$.

Para A sacar uma bola vermelha em sua terceira jogada, as bolas sacadas devem ser branca-branca-branca-branca-vermelha.

A probabilidade de isso ocorrer é $\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{12}$.

Para A sacar uma bola vermelha em sua quarta jogada, as bolas sacadas devem ser branca-branca-branca-branca-branca-branca-vermelha.

A probabilidade de isso ocorrer é $\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{40}$.

A resposta é $\dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{40} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{40} = \dfrac{7}{12}$.