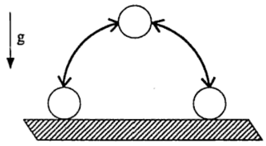
DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães

Avaliação de Época Especial - Gabarito

1- Considere uma bola de borracha de raio a. A bola quica no chão de forma elástica e sem deslizamento. Como você deve jogar a bola para que ela permaneça quicando como mostra a figura? (2.5)



Resposta - 1
Vamos supor que a bola inicia seu movimento no ponto mais alto indicado na figura com velocidade de translação horizontal v e de rotação ω (note que essas são as únicas quantidades relevantes para essa análise). Para que a bola permaneça no movimento indicado, depois de atingir o chão ela deve retornar ao ponto inicial com essas mesmas magnitudes de velocidades mas em direções opostas. Pois dessa forma ela poderá repetir seu movimento na outra direção, e depois de quicar do outro lado ela retornaria novamente ao mesmo ponto, com os mesmos valores de v e ω, reiniciando assim o movimento. Vamos analisar agora mais precisamente a condição para que isso aconteça.

Até atingir o chão a única força que age na bola é o peso, que é vertical e atua no centro de massa. Portanto a velocidade de translação horizontal será constante, assim como a velocidade angular (pois o torque é nulo).

Quando a bola atinge o chão ela recebe um impulso (devido a força de atrito) que modifica o seu momento linear e o momento angular.

Vamos definir os eixos tal que o eixo x está na direção horizontal e orientado para a direita, o eixo y na vertical orientado para cima e o eixo z apontando para fora da página. Se a bola começa se movendo para a direita, digamos, a variação do momento na direção horizontal, devido ao choque com o chão, será:

$$\Delta\vec{P} = mv_{final}\hat{x} - mv_{inicial}\hat{x} = -2mv\hat{x} \tag{1}$$

onde foi usado que $v = v_{inicial} = -v_{final}$, ou seja, o único efeito do choque é alterar o sinal da velocidade. Note que a bola deve estar inicialmente em rotação em torno do eixo z positivo ($\vec{\omega} = \omega\hat{z}$) para a bola quicar de volta depois de bater no chão a direita. Dessa forma, a variação do momento angular será

$$\Delta\vec{L} = I\omega_{final}\hat{z} - I\omega_{inicial}\hat{z} = -2I\omega\hat{z} \tag{2}$$

onde $\omega = \omega_{inicial} = -\omega_{final}$ e $I = \frac{2}{5}Ma^2$ é o momento de inércia em relação ao centro de massa da bola.

Ambas as variações são causadas pela força de atrito e estão portanto relacionadas:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{P} &= \int dt\vec{F}_{at} \\ \Delta\vec{L} &= \int dt\; \vec{r}\times\vec{F}_{at} = -a\hat{y}\times\int dt\vec{F}_{at} = -a\hat{y}\times\Delta\vec{P} \end{aligned} \tag{3}$$

Em módulo temos:

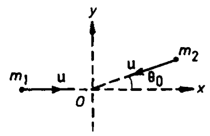
$$|\Delta\vec{L}| = a|\Delta\vec{P}|. \tag{4}$$

De onde obtemos:

$$I\omega = amv \Rightarrow v = \frac{2}{5}a\omega \tag{5}$$

Ou seja, se você jogar a bola de tal forma que essa relação entre as magnitudes das velocidades iniciais de translação horizontal v e de rotação ω seja satisfeita, então o movimento subsequente será o que está representado na figura.

2- Duas partículas idênticas de massa m e com a mesma energia colidem como mostra a figura abaixo (no referencial do laboratório).
a) Encontre a velocidade $\vec{V}$ do centro de massa. (1.0)
b) Qual é a razão entre a energia total no centro de massa e a energia total no referencial do laboratório? (1.5)



Resposta - 2
a) Pela figura, vemos que, no referencial do laboratório, a velocidade da partícula 1 é:

$$\vec{v}_1 = u\hat{x} \tag{6}$$

e a velocidade da partícula 2 é:

$$\vec{v}_2 = -u\cos\theta_0\hat{x} - u\sin\theta_0\hat{y} \tag{7}$$

A velocidade do centro de massa é portanto

$$\vec{V} = \frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{m+m} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} = \frac{u}{2}\left[(1-\cos\theta_0)\hat{x} - \sin\theta_0\hat{y}\right] \tag{8}$$

b) A energia total em relação ao laboratório é a soma das energias cinéticas em relação a este referencial:

$$E_{lab} = \frac{m\vec{v}_1^2}{2} + \frac{m\vec{v}_2^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mu^2 \tag{9}$$

As velocidades das partículas 1 e 2 em relação ao centro de massa são:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{u}{2}\left[(1+\cos\theta_0)\hat{x} + \sin\theta_0\hat{y}\right] \\ \vec{v}_2' &= \vec{v}_2 - \vec{V} = -\frac{u}{2}\left[(1+\cos\theta_0)\hat{x} + \sin\theta_0\hat{y}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

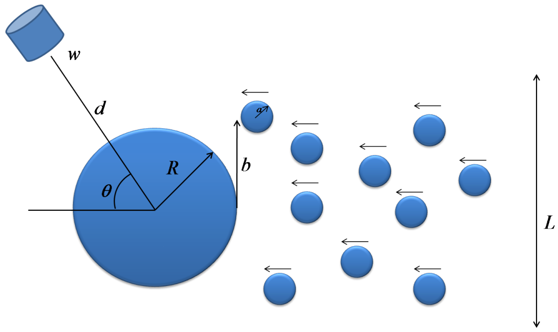
Note que $\vec{v}_1' = -\vec{v}_2'$ e a colisão é de frente, como deveria ser neste referencial. A energia total no referencial do centro de massa é a soma das energias cinéticas das partículas neste referencial:

$$E_{CM} = \frac{m\vec{v}_1'^2}{2} + \frac{m\vec{v}_2'^2}{2} = \frac{mu^2}{2}(1+\cos\theta_0) \tag{11}$$

Obtemos finalmente a razão:

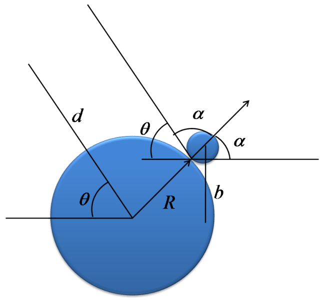
$$\frac{E_{CM}}{E_{lab}} = \frac{(1+\cos\theta_0)}{2} \tag{12}$$

3- Considere um conjunto de discos de raio a sendo espalhados elasticamente por um cilindro sólido e imóvel de raio R. O fluxo de discos está uniformemente distribuído ao longo de um comprimento L e o número total de discos N é muito grande. Um alvo de largura w é colocado a uma distância d do cilindro. Suponha $d \gg R$, $d \gg a$ e $w \gg a$
a) Qual é a relação entre o parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ de um disco? (0.5)
b) Encontre a expressão da seção de choque bidimensional $\sigma(\theta)$ definida de tal forma que o número total de discos espalhados em um ângulo $d\theta$ seja dado por $\frac{N}{L}\sigma(\theta)d\theta$. (1.0)
c) Do total dos N discos, quantos atingem o cilindro? E quantos atingem o alvo? (1.0)



Resposta -3

a) Em um espalhamento elástico, o ângulo de incidência α é igual ao ângulo de reflexão.



Pela geometria da figura, temos que $\theta + 2\alpha = \pi$ e $\sin\alpha = \frac{b}{a+R}$ Logo:

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{a+R} \tag{13}$$

e portanto:

$$b = (a+R)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{14}$$

b) Como o fluxo é uniforme, o número n de partículas espalhadas em um ângulo $d\theta$ é proporcional ao intervalo db correspondente.

$$n = \frac{N}{L}db \tag{15}$$

Com a expressão para b obtida na questão anterior, temos

$$n = \frac{N}{L}db = \frac{N}{L}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\theta = \frac{N}{L}\frac{(R+a)}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta = \frac{N}{L}\sigma(\theta)d\theta \tag{16}$$

o módulo acima vem do fato que $\frac{db}{d\theta} < 0$ mas $n > 0$, pois n é o número de partículas. Obtemos portanto diretamente a expressão para a seção de choque:

$$\sigma(\theta) = \frac{(R+a)}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \tag{17}$$

c) O número de discos que atingem o cilindro é o número total de discos espalhados e pode portanto ser obtido integrando-se sobre todos os possíveis valores do ângulo de espalhamento θ. Temos

$$N_{espalhados} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{N}{L}\sigma(\theta)d\theta = \frac{N}{L}\frac{(R+a)}{2}2\int_{0}^{\pi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2\frac{N}{L}(R+a) \tag{18}$$

outra forma equivalente de calcular seria integrar nos valores dos possíveis parâmetros de impacto:

$$N_{espalhados} = \int_{-(a+R)}^{(a+R)}\frac{N}{L}db = 2\frac{N}{L}(R+a) \tag{19}$$

O número de discos que atingem o alvo pode ser obtido notando que os discos que chegam ao alvo são aqueles contidos no intervalo angular $d\theta \approx \frac{w}{d}$, logo:

$$N_{alvo} = \frac{N}{L}\sigma(\theta)d\theta = \frac{N}{L}\frac{w}{d}\frac{(R+a)}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{20}$$

4- O capitão de um navio de massa M que está na região equatorial da terra (a terra possui velocidade angular ω_0), decide levantar a âncora de massa m, que está no chão do navio, até o topo do mastro, cuja altura é h.
a) Por que o navio irá se mover? (0.5)
b) Em qual direção o navio irá se mover? (0.5)
c) Qual é a velocidade com que o navio irá se mover. (1.5)

Resposta - 4
a) O navio irá se mover devido a força de Coriolis $-2m\vec{\omega}_0 \times \vec{v}$. Onde $\vec{v}$ é a velocidade com que a âncora sobe até o topo do mastro.
b) Como o navio está no equador a velocidade $\vec{v}$ aponta para fora da terra e é perpendicular a $\vec{\omega}_0$ (que aponta para o norte). Consequentemente, a força de Coriolis apontará para o oeste fazendo com que o navio se mova nessa direção.
c) O momento angular do sistema navio + âncora em relação ao centro da terra é conservado, com respeito a um referencial inercial. Temos assim:

$$(M+m)R^2\omega_0 = \left[MR^2 + m(R+h)^2\right]\omega \tag{21}$$

onde no lado esquerdo, temos o momento angular inicial (situação em que âncora e navio estão se movendo juntos com a terra, com a mesma velocidade de rotação ω_0) e R é a distância do navio e da âncora até o centro da terra. No lado direito, o navio e a âncora agora se movem com velocidade angular ω e a âncora agora dista $R+h$ do centro da terra. Segue dessa equação que o navio se moverá com velocidade (em relação ao referencial inercial):

$$V = R\omega = \frac{(M+m)R^3\omega_0}{[MR^2 + m(R+h)^2]} \tag{22}$$

Uma informação mais útil seria a velocidade do navio em relação ao mar, ou seja, no referencial da terra. A velocidade relativa será:

$$V' = R(\omega - \omega_0) = -\frac{MRh\omega_0(2R+h)}{[MR^2 + m(R+h)^2]} \tag{23}$$

O sinal negativo confirma que o movimento é de fato para o oeste.