DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães
Lista 3

1. Resolva a equação da órbita para o caso em que a força é nula $F = 0$. Mostre que sua solução está de acordo com a primeira lei de Newton.

2. Uma partícula se move em uma órbita circular sob a influência da força central atrativa $F(r) = -\frac{k}{r^2}$. Mostre que se k decresce repentinamente para a metade de seu valor original, a órbita da partícula se torna parabólica.

3. Encontre a frequência das pequenas oscilações em torno de um movimento circular de uma partícula sob a influência de uma força atrativa proporcional ao quadrado da distância e mostre que essa frequência é igual a frequência de revolução do sistema.

4. Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força cuja energia potencial é $\frac{1}{2}kr^2$. Inicialmente a partícula se move em um círculo de raio a. Encontre a velocidade orbital v.
   A partícula então recebe um impulso mv em uma direção fazendo um ângulo α com a direção de sua velocidade inicial. Use as leis de conservação para determinar as distâncias mínima e máxima, com relação à origem, durante o movimento subsequente. Explique fisicamente seus resultados para os casos limites $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$.

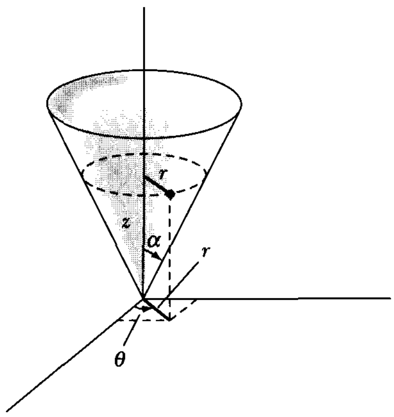
5. Escreva a equação da órbita para um oscilador harmônico isotrópico de massa m. Resolva a equação e verifique que a trajetória é uma elipse com centro na origem. Verifique ainda que o período do movimento é dado por:
   $$\tau = \frac{2mA}{L}$$
   onde A é a área da elipse e L é o momento angular.
   Discuta qualitativamente, usando o potencial efetivo, o que ocorreria com as órbitas se o potencial fosse repulsivo, ou seja, $\frac{1}{2}kr^2$, com $k < 0$. Como a equação da órbita mudaria nesse caso? Qual a forma da órbita?

6. De acordo com a teoria de Yukawa das forças nucleares, a força atrativa entre um proton e um neutron pode ser modelada pelo potencial

$$V(r) = \frac{Ke^{-\alpha r}}{r}; \quad K < 0$$

a) Encontre a força e compare-a com a força inversamente proporcional ao quadrado da distância.
b) Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer se uma partícula de massa m se move sob a ação de tal força.
c) Discuta como os movimentos irão diferir dos movimentos correspondentes no caso de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância.
d) Encontre o momento angular e a energia mecânica para o movimento em um círculo de raio a.
e) Encontre o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais.
f) Mostre que órbitas aproximadamente circulares são quase fechadas quando a é muito pequeno.

7. Considere uma partícula de massa m vinculada a se mover na superfície de um cone e sob a ação da gravidade ($\vec{g} = -g\hat{z}$), como na figura abaixo.



Mostre que o potencial efetivo é dado por

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha$$

onde r é a distância da partícula ao eixo z.
Mostre que os pontos de retorno do movimento podem ser obtidos de uma equação cúbica em r. Mostre ainda que somente duas raízes fazem sentido fisicamente de forma que o movimento está confinado entre dois planos horizontais que cortam o cone.

8. Uma partícula se move em uma órbita elíptica sob a ação de uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem. Se a razão entre a velocidade angular máxima e a velocidade angular mínima da partícula em sua órbita é n, mostre que a excentricidade da órbita é

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$$

9. Usando conservação de energia E e momento angular L, mostre que a trajetória $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ de uma partícula potencial central $V(r)$ satisfaz:

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 + V\left(\frac{1}{u}\right) = E$$

Usando esse resultado, mostre que o ângulo de espalhamento Θ pode ser escrito como:

$$\Theta = |\pi - 2b\int_0^{u_0} du \frac{1}{\sqrt{1 - b^2u^2 - \frac{V(\frac{1}{u})}{\frac{1}{2}mv_0^2}}}|$$

onde b é o parâmetro de impacto, v_0 é a velocidade da partícula muito antes do espalhamento (no infinito) e u_0 é o valor no qual a quantidade dentro da raiz se anula.

10. Use o resultado da questão acima para obter a seção de choque de Rutherford.

11. Discuta o movimento de uma partícula sob a ação de uma força central atrativa da forma $F(r) = -\frac{k}{r^3}$. Esboce algumas órbitas para diferentes valores da energia mecânica. É possível existir uma órbita circular estável neste cenário?
Para $k > 0$, mostre que a seção de choque para o espalhamento de uma partícula de massa m e com velocidade inicial v_0 por essa força, em um ângulo entre Θ e $\Theta + d\Theta$, é

$$d\sigma = \frac{2\pi^3 k}{mv_0^2}\frac{\pi - \Theta}{\Theta^2(2\pi - \Theta)^2}d\Theta$$