Teoria dos Grafos

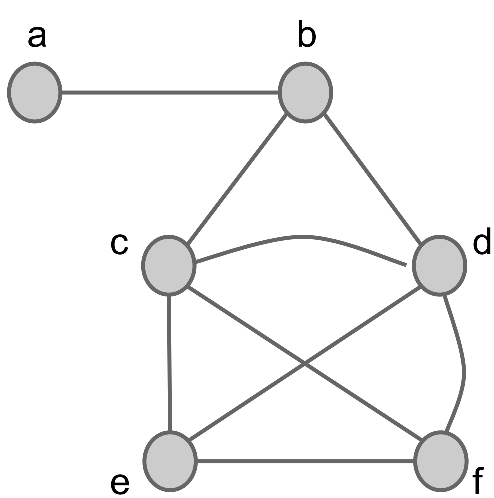
Conectividade

versão 1.3

Fabiano Oliveira
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

Conectividade

- **Def.:** $E \subseteq E(G)$ é um conjunto de ***arestas de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - E)$
- **Def.:** $E \subseteq E(G)$ é um ***corte de arestas*** se $G - E$ é desconexo.



Exemplos de cortes de arestas:

{ab}, {bc, bd},
{ce, cd, bd, cf}

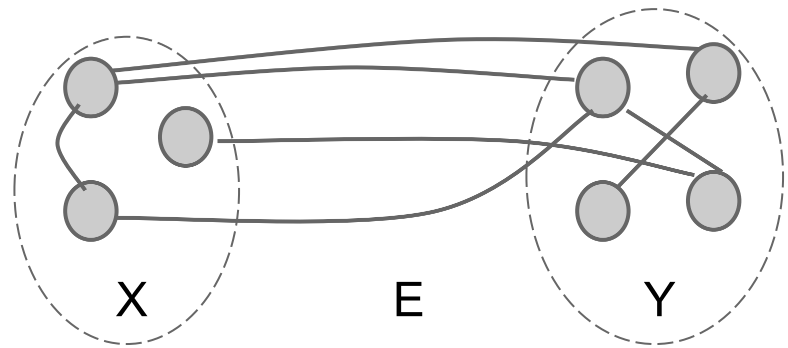
Exemplos que não o são:

{bc}, {bc, de, df}

Conectividade

- **Def.:** um ***corte*** de um grafo G é o conjunto das arestas de corte E definida por uma bipartição $X \cup Y$ de $V(G)$ tal que $uv \in E \Leftrightarrow u \in X, v \in Y$

G

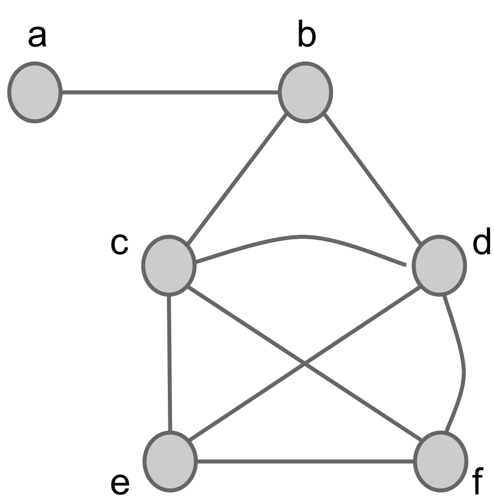


Para pensar

- Qual o tamanho de um corte mínimo e máximo de um P_n, C_n, K_n?

Conectividade

- **Def.:** $V \subseteq V(G)$ é um conjunto de ***vértices de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - V)$
- **Def.:** $V \subseteq V(G)$ é um ***corte de vértices*** se $G - V$ é desconexo.



Exemplos de cortes de vértices:

{b}, {c, d}

Exemplos que não o são:

{a}, {c, f}

Conectividade

- **Def.:** $V \subseteq V(G)$ é um conjunto de ***vértices de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - V)$
- **Def.:** $V \subseteq V(G)$ é um ***corte de vértices*** se $G - V$ é desconexo.

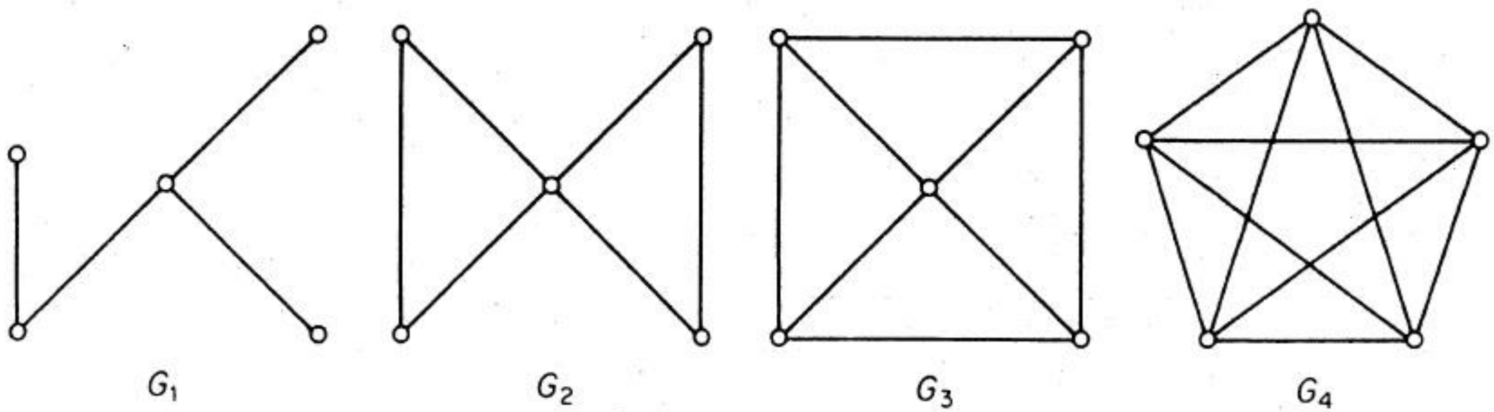
Para pensar:

- Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um C_n?

- Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um K_n?

Conectividade

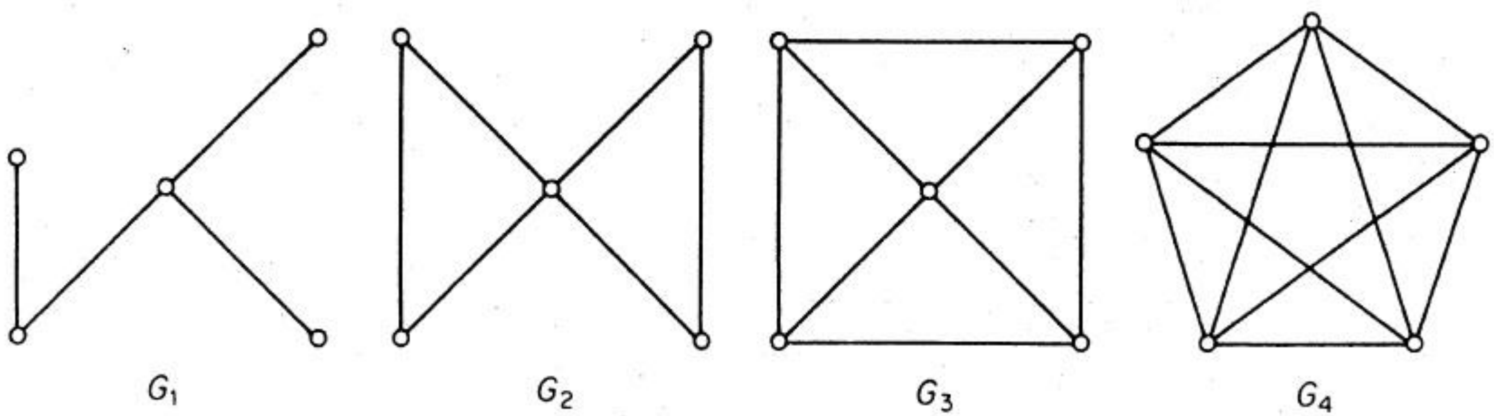
- Considere agora os seguintes grafos



Note que o grau de conectividade não é a mesmo para todos, embora todos sejam grafos conexos em 5 vértices.

Conectividade

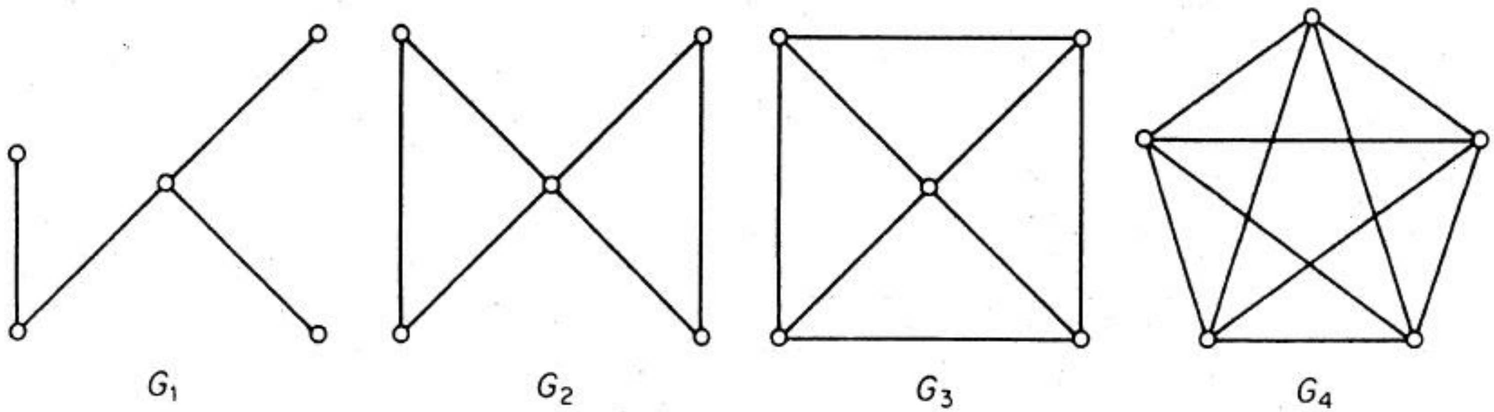
- **Def.:** A ***conectividade*** de um grafo G (denotado por κ (G)) é igual ao tamanho do corte de vértices mínimo ou, na inexistência de corte de vértices, definido como n-1.



$\kappa(G_1) = 1$ $\kappa(G_2) = 1$ $\kappa(G_3) = 3$ $\kappa(G_4) = 4$

Conectividade

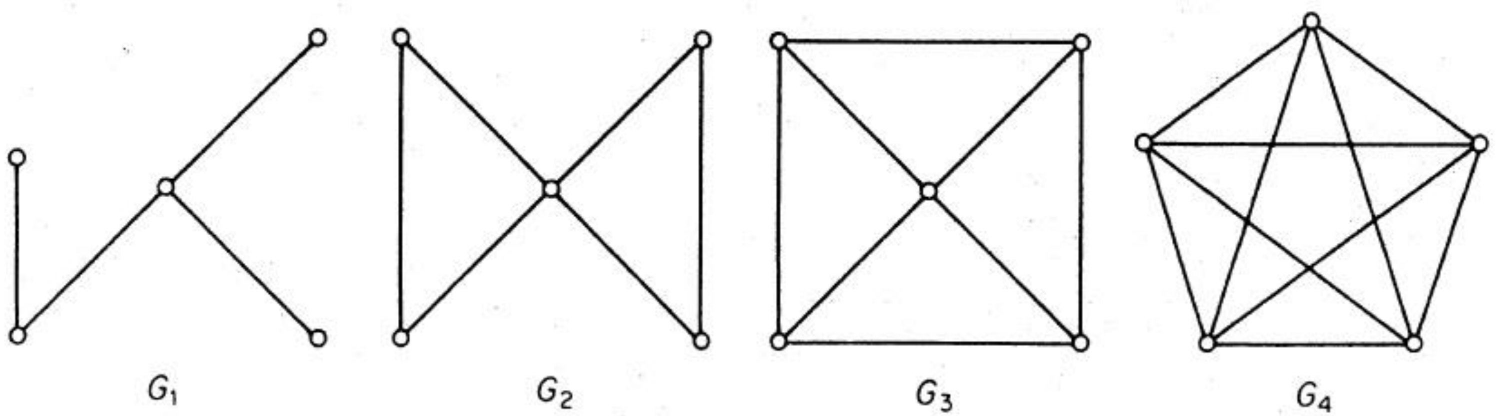
- **Def.:** Um grafo G é dito ***k-conexo*** se κ(G) ≥ k.



0- e 1-conexo | 0- e 1-conexo | 0-, 1-, 2- e 3-conexo | 0-, 1-, 2-, 3- e 4-conexo

Conectividade

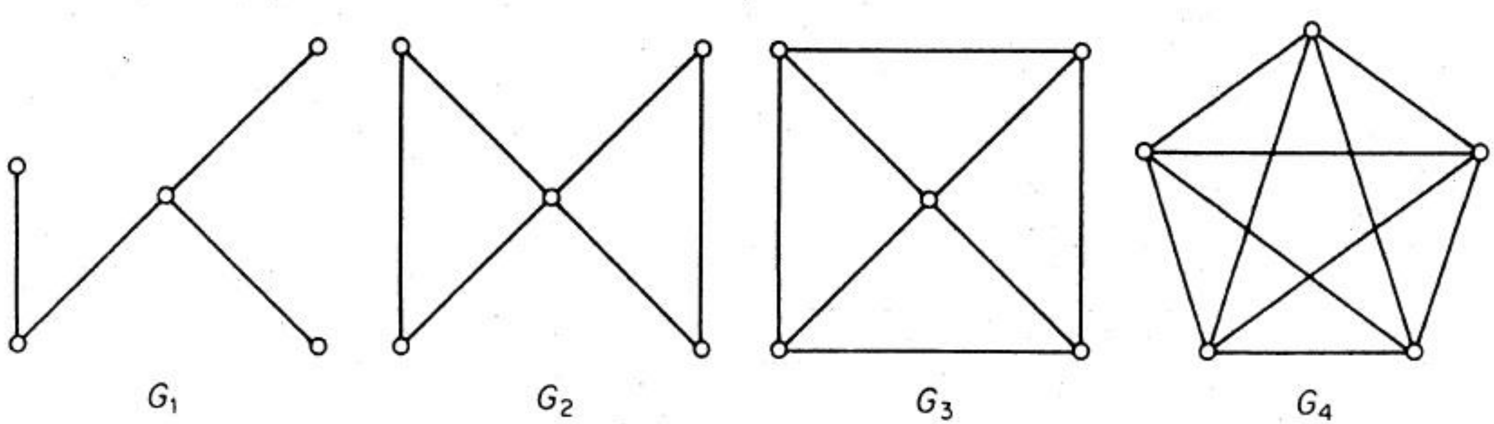
- **Def.:** A ***conectividade em arestas*** de um grafo G (denotado por κ'(G)) é definido como zero para grafos triviais ou, caso contrário, igual ao tamanho do corte de arestas mínimo.



$\kappa'(G_1) = 1$ $\kappa'(G_2) = 2$ $\kappa'(G_3) = 3$ $\kappa'(G_4) = 4$

Conectividade

- **Def.:** Um grafo G é dito ***k-conexo em arestas*** se $\kappa'(G) \geq k$.



0- e 1-conexo em arestas

0-, 1- e 2-conexo em arestas

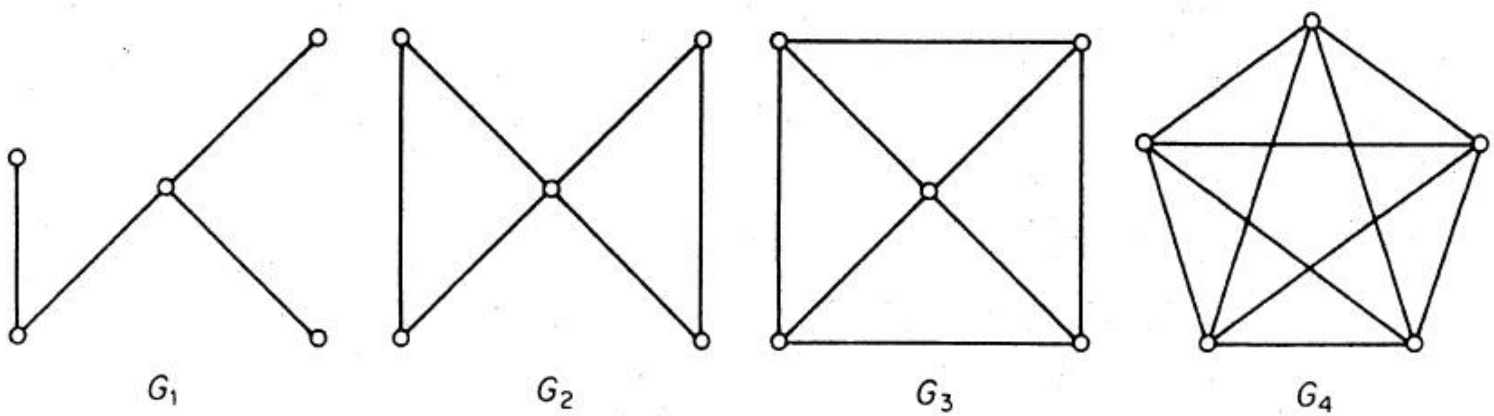
0-, 1-, 2- e 3-conexo em arestas

0-, 1-, 2-, 3- e 4-conexo em arestas

Conectividade

Teorema:

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$



$\kappa(G) = 1$	$\kappa(G) = 1$	$\kappa(G) = 3$	$\kappa(G) = 4$
$\kappa'(G) = 1$	$\kappa'(G) = 2$	$\kappa'(G) = 3$	$\kappa'(G) = 4$
$\delta(G) = 1$	$\delta(G) = 2$	$\delta(G) = 3$	$\delta(G) = 4$

Conectividade

Prova $\kappa'(G) \leq \delta(G)$:

- Se G é trivial, então $\kappa'(G) = 0 \leq \delta(G)$. Caso contrário, se v é o vértice de menor grau de G, as arestas incidentes a v são um corte de arestas de G de tamanho $\delta(G)$ e, portanto, $\kappa'(G) \leq \delta(G)$

Conectividade

Prova $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$:

- Por indução em $\kappa'(G)$.

Base:

- Se $\kappa'(G) = 0$, então G é trivial ou desconexo. Em ambos os casos, $\kappa(G) = 0$.

H.I.:

- Suponha que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ se verifica para todo grafo com $\kappa'(G) < k$, com $k \geq 1$.

Passo de Indução:

- Seja $\kappa'(G) = k$ e seja xy uma aresta do corte de arestas mínimo C de G

Conectividade

Prova κ(G) ≤ κ'(G):

(continuação)

- Seja H = G - {xy}
- C - {xy} é um corte de arestas mínimo de H, e portanto, κ'(H) = k - 1.
- Pela hipótese de indução, κ(H) ≤ k - 1. Seja S um corte de vértices mínimo de H. Logo, |S| ≤ k - 1.
- Se S é um corte de vértices para G, então k(G) ≤ |S| ≤ k - 1 < κ'(G).
- Caso contrário, xy é uma ponte de G - S. Basta continuarmos analisando dois casos: (i) x ou y é articulação; ou (ii) |V(G - S)| = 2

Conectividade

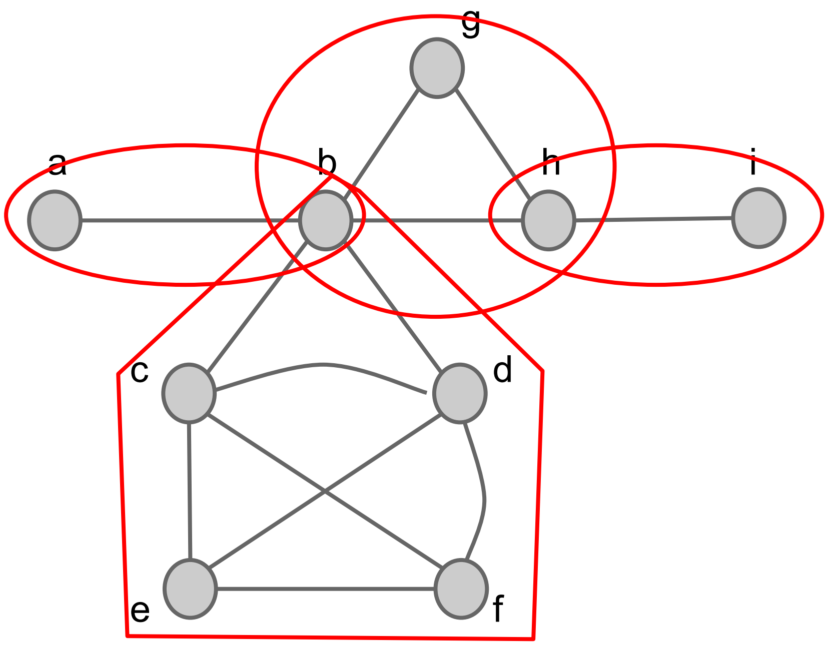
Prova $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$:

(continuação)

- Caso (i): Então $S \cup \{x\}$ ou $S \cup \{y\}$ é um corte de vértices de G de tamanho k.
- Logo, $k(G) \leq k = \kappa'(G)$.
- Caso (ii): Então $\kappa(G) \leq n - 1 = \kappa(H) + 1 \leq k = \kappa'(G)$

Conectividade

- **Def.:** Um grafo é dito ser um ***bloco*** se não possui um vértice de corte.
- **Def.:** Um ***bloco de um grafo*** é um subgrafo induzido maximal deste grafo que é um bloco.



Conectividade

Teorema:

Um grafo G com $n \geq 3$ é 2-conexo $\Leftrightarrow$ quaisquer dois vértices de G estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos

Conectividade

Prova (⇐) :

- Como quaisquer dois vértices de G estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos, então G não possui uma articulação
- Portanto, $\kappa(G) \geq 2$ e, portanto, o grafo é 2-conexo.

Conectividade

Prova (⇒) :

- Seja G um grafo 2-conexo.
- Sejam u, v ∈ V(G) distintos.
- Por indução em d(u, v), vamos mostrar que u e v estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos.
- Se d(u, v) = 1, então uv ∈ E(G) e uv não pode ser uma ponte. Caso contrário, ou (x ou y seria uma articulação) contradizendo G ser 2-conexo, ou n = 2 contradizendo n ≥ 3. Logo, por Teorema anterior, xy está num ciclo e portanto há dois caminhos de u a v. (Base)
- Suponha que o resultado vale para todo par de vértices u e v com d(u, v) < k (H.I.), e considere d(u, v) = k (Passo de Indução).

Conectividade

Prova (⇒) : (continuação)

- Seja W o menor caminho de u até v e seja w o vértice que antecede v em W.
- Como $d(u, w) = k - 1$, então por H.I. existem dois caminhos P e Q de u a w que não compartilham vértices internos.
- Como G é 2-conexo, existe um caminho P' de u até v em $G - w$.
- Seja x o último vértice comum a P' e a $P \cup Q$. Sem perda de generalidade, considere que $x \in P$.
- Logo, existem dois caminhos disjuntos internamente de u a v: aquele que começa em u, vai por P até x, depois segue até v por P', e Q acrescido de wv.

Exercícios

Conectividade

1. Mostre um exemplo que se P é um caminho de u até v num grafo 2-conexo G, então não existe necessariamente um caminho Q de u até v com todos os vértices internos a Q distintos daqueles de P.

2. Mostre que se G não tem ciclos pares, então cada bloco de G é ou um K_1, ou um K_2, ou um ciclo de comprimento ímpar.

3. Prove ou refute:
   a. se o grau de todo vértice em G é par, então todo corte de G possui cardinalidade par.
   b. se o grau de todo vértice em G é ímpar, então todo corte de G possui cardinalidade ímpar.

4. Dados grafo G e corte C definido pela bipartição $X \cup Y$ de V(G), mostre que: $\sum \{ d(v) : v \in V(G[X]) \} = 2|E(G[X])| + |C|$

Conectividade

5. Mostre que para qualquer G, existe um corte de G com pelo menos m/2 arestas.

6. Mostre que para qualquer G, existe um subgrafo gerador bipartido H de G tal que $d_H(v) \geq d_G(v)/2$, onde $d_X(v)$ representa o grau do vértice v no grafo X.

7. Determine o corte máximo no grafo de Petersen (ver exercício 15 [Grafos e Subgrafos]).