Teoria da Computação

Conjuntos, Relações, Funções e Enumeração

versão 1.1

Prof. DSc. Fabiano Oliveira
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

Enumeração

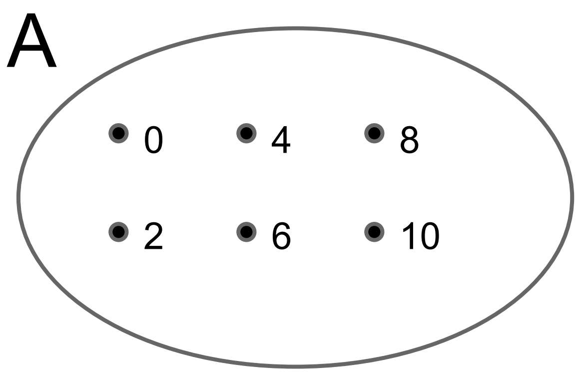
- Uma ***família*** é uma reunião de objetos definidos. Tais objetos são chamados de ***elementos***.

- Um ***conjunto*** é uma família com elementos distintos.

Enumeração

- Como expressar conjuntos?
  - Diagrama (oval com bolinhas dentro representando os elementos)
  - A = {<elemento1>, <elemento2>, …}
  - A = {<domínio de x> | <restrição sobre x> }
  - A = {<fórmula(x)> : <domínio de x> | <restrição sobre x> }

Enumeração

- Exemplos:
  - 

  - A = { 0, 2, 4, 6, 8, 10 }
  - $A = \{ 2i : i \in \mathbb{N} \mid i \leq 5 \}$
  - $A = \{ i : i \in \mathbb{N} \mid i \leq 10$, i é par }, ou, simplesmente, $A = \{ i \in \mathbb{N} \mid i \leq 10$, i é par}

Enumeração

- ***Cardinalidade*** de um conjunto X, denotado por |X|, é o seu número de elementos.

- O conjunto ***universo*** de um conjunto X é o conjunto de todos os possíveis elementos que são permitidos pertencer a X.

Enumeração

- Operações sobre um conjunto:
  - ***União***: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$
  - ***Interseção***: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$
  - ***Diferença***: $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B$
  - ***Complemento***: $x \in A^C \Leftrightarrow x \in U \setminus A$
    (onde U é o universo de A)

Enumeração

- Dois conjuntos A e B são ***disjuntos*** se $A \cap B = \varnothing$

- **Relação Útil**: Note que $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Enumeração

- O conjunto ***potência*** de um conjunto A, denotado por P(A), é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

  Determine:

  - $P(\{1, 2\})$
  - $|P(\{1, 2, 3\})|$
  - $|P(\{ N \in \mathbb{N} \mid N \leq 340 \})|$

Enumeração

- **Útil**: $|P(A)| = 2^{|A|}$

Enumeração

- Uma ***tupla*** é um conjunto ordenado de elementos, denotado por $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ (onde a ordenação é dada pela ordem dos elementos na tupla)

  Exemplo:

  - (100, Fabiano, Rua 35, 30000-021)
    pode representar um endereço
  - (2, 3, 2, 5, 5)
    pode representar o resultado de 5 lançamentos sucessivo de um dado
- **Aplicação**: modelagem de registro de banco de dados

Enumeração

- O ***produto cartesiano*** de A_1 por A_2 por … por A_N, denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$, é $\{(a_1, a_2, \ldots, a_N) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_N \in A_N\}$.
  Determine:
  - $\{1, 2\} \times \{3, 4\}$
  - $\{1, 2\} \times \varnothing$
  - $\{a, b, c\} \times \{c, d\} \times \{e\}$
  - $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N|$

Enumeração

- Um ***conjunto A a uma potência k*** é $A \times A \times \ldots \times A$ (k vezes)

Determine:

- $\{cara, coroa\}^3$
- $\{abc, d\}^2$
- $\{a, b, c\}^1$
- $\{a, b, c\}^0$

Enumeração

- Uma ***relação*** é um subconjunto de um produto cartesiano.

Determine:

- $\{ (x, y) \in \{1, 2\} \times \{3, 4\} \mid x+y \text{ é par } \}$
- $\{ (x, y) \in \{abc, d\}^2 \mid x$ concatenado com y tem comprimento $\geq 4\}$

Aplicação: Consulta em Banco de Dados

Enumeração

- Uma relação é dita ser ***n-ária*** se for subconjunto de um produto cartesiano envolvendo n conjuntos.
  (Logo, se n=1 a relação é unária, se n=2 é binária, se n=3 é ternária, e assim por diante.)

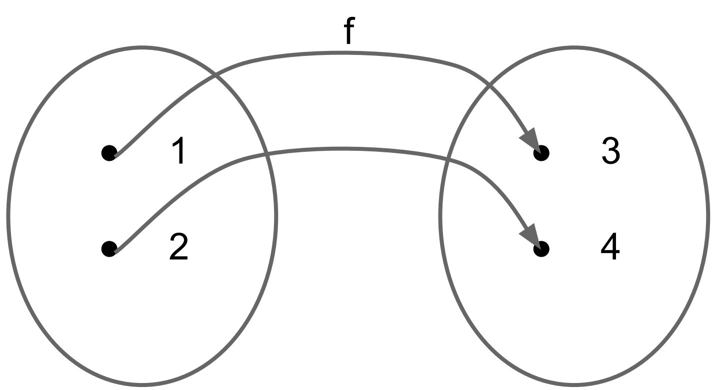
Enumeração

- Uma ***função*** é uma relação binária f tal que se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, então $y = z$

  Ex.: $f = \{ (x, y) \in \{1, 2\} \times \{3, 4\} \mid x+y \text{ é par } \}$

  $f = \{ (1, 3), (2, 4) \}$

  ou, em notação que já conhecem,



Enumeração

- (continuação) ou ainda:

  f: $\{1, 2\} \rightarrow \{3, 4\}$ tal que:
  $f(1) = 3$

  $f(2) = 4$

Aplicação: Computação define uma função

Enumeração

- Se f é tal que f(x) não possui imagem, dizemos que f é ***indefinida no ponto x***.

  Exemplo:

  f(x) = sqrt(x) / x

  Em que pontos f é indefinida para $x \in \mathbb{R}$?

Enumeração

- ***Domínio*** / ***Contradomínio*** / ***Imagem***:

  $f: A \to B$ denota que para todo $x \in A$, f é definida em x e se $f(x) = y$, então $y \in B$

  A: domínio de f

  B: contradomínio de f

  $\{ f(x) : x \in A \}$: Imagem de f

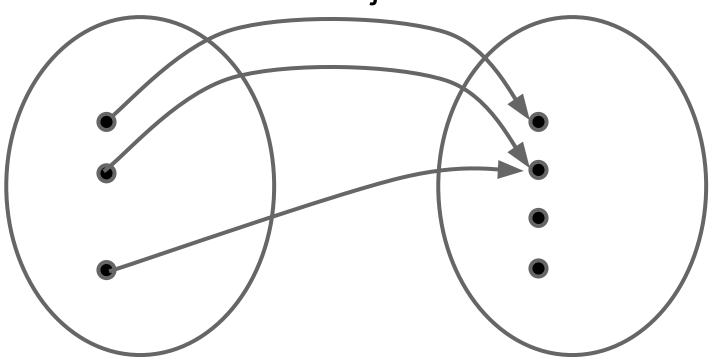
  Determine domínio/contradomínio/imagem:

  - f do slide anterior
  - $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = sqrt(x)$

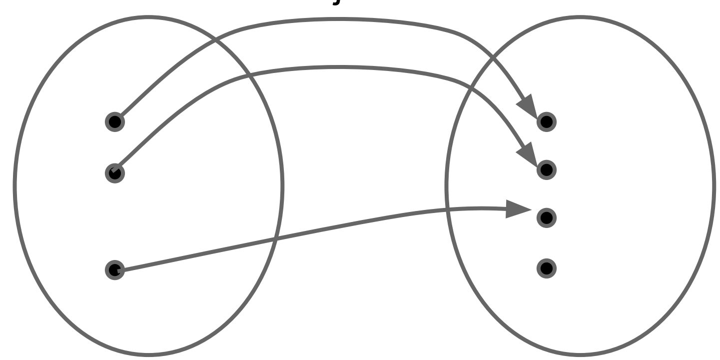
Enumeração

- Seja $f: A \rightarrow B$. Se $f(x) \neq f(y)$ para todo $x \neq y$, então f é ***injetiva***
(para cada $y \in B$, existe no máximo um $x \in A$ tal que $f(x) = y$)

não-injetiva



injetiva



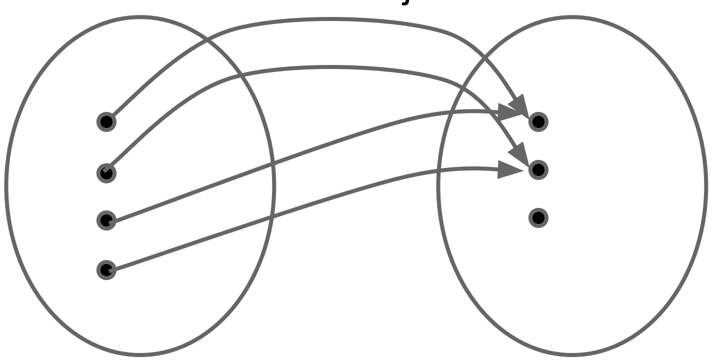
Determine se são injeções:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x) = \mathrm{sqrt}(x)$

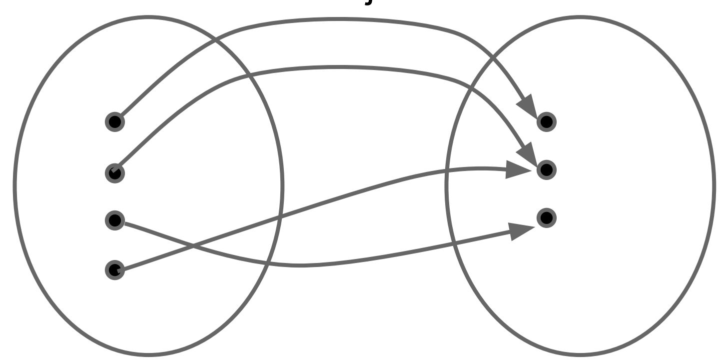
Enumeração

- Seja f: A → B. Se para todo y ∈ B existe x ∈ A tal que f(x) = y, então f é ***sobrejetiva*** (para cada y ∈ B, existe no mínimo um x ∈ A tal que f(x) = y)

não-sobrejetiva



sobrejetiva



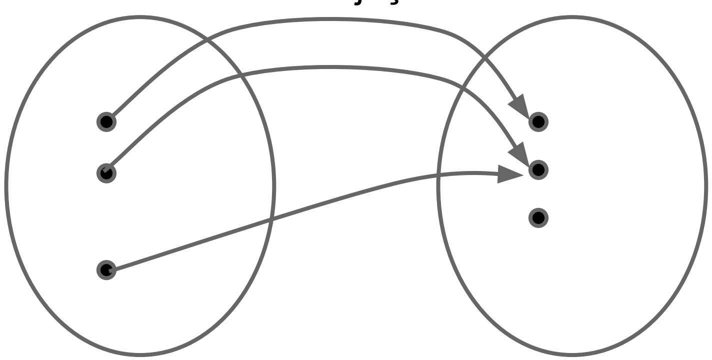
Determine se são sobrejeções:

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$;   g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = \mathrm{sqrt}(x)$

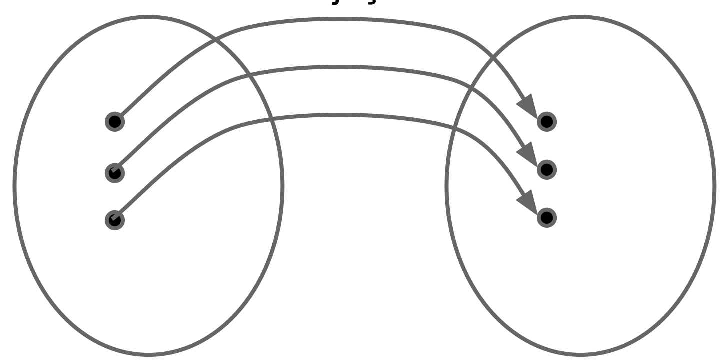
Enumeração

- Se f: $A \rightarrow B$ é injetiva e sobrejetiva, então f é ***bijetiva***
  (para cada $y \in B$, existe <u>exatamente</u> um $x \in A$ tal que $f(x) = y$)

não-bijeção



bijeção



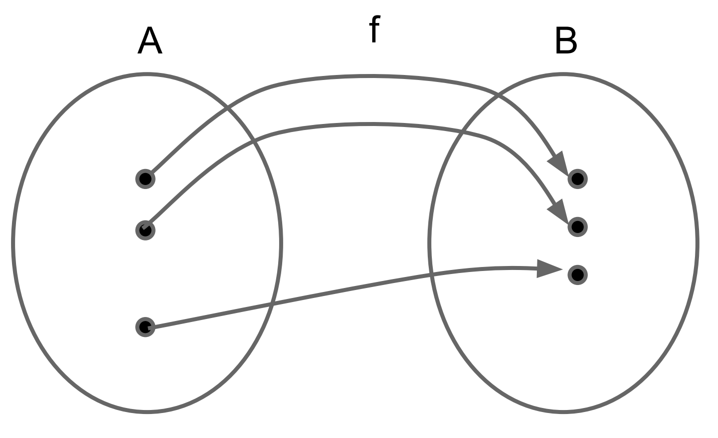
Determine se são bijeções:

f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$; g: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x) = \mathrm{sqrt}(x)$

Enumeração

- Seja f: A → B bijetiva. A função f^{-1}: B → A tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ é chamada de ***inversa*** de f

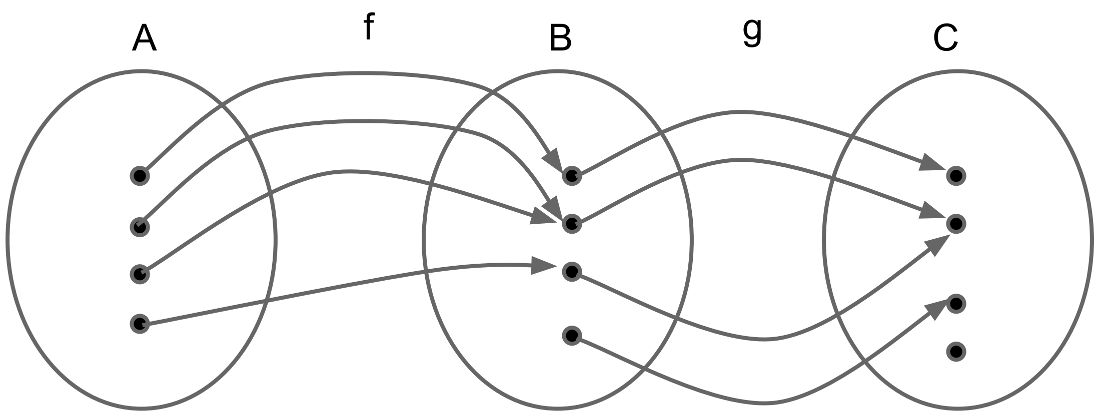
Determine a função f^{-1}:



Enumeração

- Seja f: A → B e g: B → C. A função h: A → C definida por h(x) = g(f(x)) é chamada de ***composta***, denotada por f o g

  Determine a função f o g: A → C:



Enumeração

- Se R é uma relação binária, podemos escrever $(x, y) \in R$ ou, simplesmente, $x\ R\ y$

  Exemplo:

  Seja $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a relação dos pares de números naturais onde o primeiro é menor que o segundo. Podemos escrever, portanto, que:
  $(3, 4) \in <$, ou que
  $3 < 4$

Enumeração

- Seja R uma relação binária de A × A. A ***potência k*** de R é a relação composta R o R o … o R (k vezes)

  Exemplo: Seja ESTRADA a relação de pares de cidades num país que possuem um trecho de estrada ligando-as diretamente. Determine o que representam:

  - a relação $ESTRADA^2$
  - a relação $ESTRADA^k$
  - o mínimo k para o qual $(x, y) \in ESTRADA^k$

Enumeração

- Seja R uma relação binária de A × A. O ***fechamento reflexivo-transitivo*** $x\ R^*\ y$ é uma relação de A × A tal que
  $x\ R^*\ y \Leftrightarrow x\ R^k\ y$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$

  Exemplo: Seja ESTRADA a relação do slide anterior. O que representa a relação ESTRADA^* ?

Enumeração

- Um conjunto A é ***enumerável*** se é vazio ou se existe uma função sobrejetora $f\colon \mathbb{N} \to A$

- Perguntas:
  - $\mathbb{N}$ é enumerável?
  - $\mathbb{Z}$ é enumerável?
  - $\mathbb{Q}$ é enumerável?
  - $\mathbb{R}$ é enumerável?

Enumeração

Teorema:
Se A é um conjunto finito, então A é enumerável.

- Dem.: Se $A = \varnothing$, então vale o teorema. Caso contrário, dê uma ordem qualquer aos elementos de A. Para todo $x \in A$, defina $f(i-1) = x$ onde i é a posição de x na ordem. Em seguida, para todo $i > |A|$, defina $f(i-1) = y$, onde y é o primeiro elemento da ordem. Note que $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ é uma sobrejeção, logo A é enumerável.

Enumeração

Teorema:
Um conjunto infinito A é enumerável $\Leftrightarrow$ existe uma função injetora $g: A \rightarrow \mathbb{N}$.

Enumeração

- Dem.: Seja A um conjunto infinito.

(⇒) Suponha A enumerável, e portanto existe f: $\mathbb{N} \rightarrow A$. Crie g: $A \rightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo $y \in A$, $g(y) = \min \{ x \in \mathbb{N} \mid f(x) = y \}$. Note que g é definida em todos os pontos pois f é sobrejetora. Além disso, g é injetora, pois caso contrário, existiriam $y_1 \neq y_2$ tais que $g(y_1) = g(y_2)$ e isto não é possível, pois implicaria $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ para algum $x \in \mathbb{N}$, contradizendo f ser função.

Enumeração

- Dem.: (continuação)

($\Leftarrow$) Suponha que existe uma função injetora g: A $\rightarrow \mathbb{N}$. Crie f: $\mathbb{N} \rightarrow$ A tal que, para todo x $\in \mathbb{N}$, se existe y $\in$ A tal que g(y) = x, então defina f(x) = y. Caso contrário, defina f (x) igual a um elemento arbitrário de A. Note que f é sobrejetora pois A é o domínio de g. Além disso, f está definida em todos os pontos.

Enumeração

Teorema:
Um conjunto infinito A é enumerável $\Leftrightarrow$ existe uma bijeção $f: A \rightarrow \mathbb{N}$.

Enumeração

- Dem.: Seja A um conjunto infinito.

(⇐): Suponha que existe uma bijeção f: $A \to \mathbb{N}$. Logo, a bijeção f^{-1}: $\mathbb{N} \to A$ mostra que A é enumerável.

(⇒) Suponha A enumerável, e portanto existe f: $\mathbb{N} \to A$. Crie g: $A \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $y \in A$, $g(y) = \min \{ x \in \mathbb{N} \mid f(x) = y \}$. Como visto em teorema anterior, g é injetora. Defina g': $A \to \mathbb{N}$ tal que $g'(y) = i$, então y é elemento que possui a (i+1)-ésima menor imagem em g. Logo, g' é definida em todos os pontos e é bijetora.

Enumeração

- **Exemplo**: $\mathbb{Z}$ é enumerável.

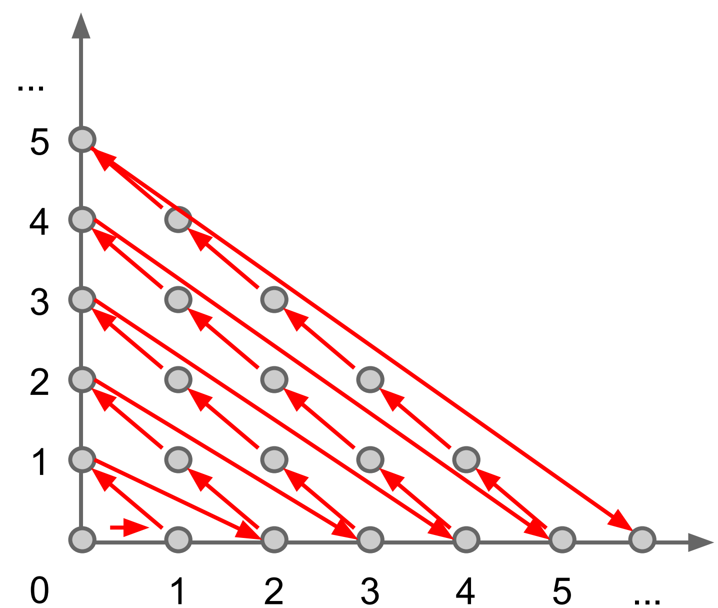
Seja f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -x/2$, se x é par, e $f(x) = (x+1)/2$, se x for ímpar. Logo, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -2$, $f(5) = 3$, $f(6) = -3$, etc. Claramente, f é uma sobrejeção e definida em todos os pontos. Logo, $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Enumeração

- **Exemplo**: ℕ × ℕ é enumerável.

Defina sobrejeção f: ℕ → ℕ × ℕ com o seguinte algoritmo:

procedimento Enumera()
  n ← 0
  para i ← 0 **até** ∞ **faça**
    para j ← 0 **até** i **faça**
      defina f(n) = (i - j, j)
      n ← n + 1
    fim-para
  fim-para
fim-procedimento



Enumeração

- **Exercício**: $\mathbb{Q}$ é enumerável.
  (Use como base o exemplo anterior.)

Enumeração

Teorema:

$P(\mathbb{N})$ não é enumerável.

Enumeração

- Dem.: **DIAGONALIZAÇÃO**:

Por absurdo, suponha que existe sobrejeção f: $\mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$. Seja $X = \{ j \in \mathbb{N} \mid j \notin f(j) \}$. Por definição, $X \in P(\mathbb{N})$. Note que para todo $k \in \mathbb{N}$, ou:

- $k \in f(k)$ e, portanto, $k \notin X$, ou
- $k \notin f(k)$ e, portanto, $k \in X$

Logo, f(k) sempre difere de X em ao menos um elemento. Portanto, X não pertence a imagem de f, o que é absurdo.