Primeiros Conceitos em Grafos

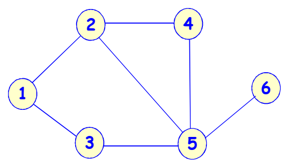
Notas de aula da disciplina IME 04-11311
Algoritmos em Grafos (Teoria dos Grafos)

Paulo Eustáquio Duarte Pinto
(pauloedp at ime.uerj.br)

abril/2018

Grafos – Primeiros conceitos: Grafo Simples: G(V, E)

V: conjunto finito e não vazio de nós
E: conjunto finito de arestas
aresta: par não ordenado de vértices

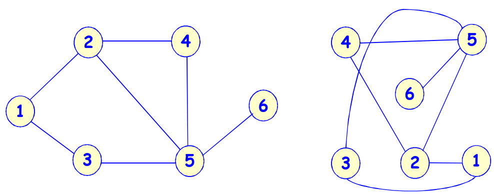


n = |V|
m = |E|

V={1, 2, 3, 4, 5, 6}
E= { (1, 2), (1, 3), (2, 5), (2, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6) }
n = 6
m = 7

Grafos – Primeiros conceitos: representação de um grafo

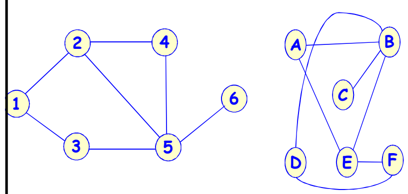
Um grafo pode ser desenhado no plano, com os vértices sendo pontos arbitrários e as arestas linhas arbitrárias ligando os pontos correspondentes.



Duas representações geométricas do mesmo grafo.

Grafos – Primeiros conceitos: isomorfismo de grafos

Dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ são isomorfos entre si, se existir uma função unívoca f: $V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(v, w) \in E_1$ sse $(f(v), f(w)) \in E_2$, para todo v, w $\in V_1$.



G_1 G_2

f
1 → F
2 → E
3 → D
4 → A
5 → B
6 → C

G1 e G2 são isomorfos conforme f mostra.

Grafos – Primeiros conceitos:

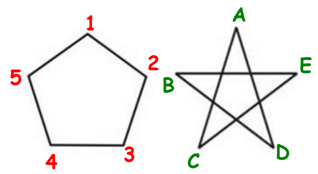
EXS1

1. Desenhar todos os grafos simples distintos com os vértices 1, 2 e 3.
2. Desenhar todos os grafos simples não isomorfos com os vértices 1, 2 e 3.
3. Quantos grafos simples distintos com n vértices existem?

Grafos – Primeiros conceitos:

EXS2

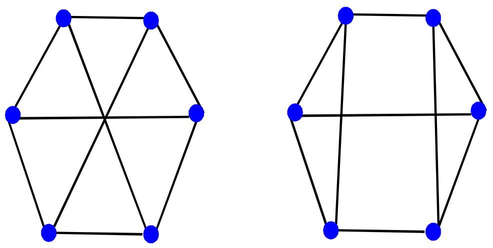
Mostrar que os grafos abaixo são isomorfos.



Grafos – Primeiros conceitos:

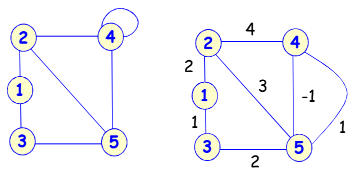
EXS3

Mostrar que os grafos abaixo não são isomorfos.



Grafos – Primeiros conceitos: extensões da definição

Grafos com laços: onde existem arestas do tipo (v, v).
Multigrafo: mais de uma aresta entre dois vértices.
Digrafo: arestas com direção.
Grafo ponderado: com pesos nas arestas.



Grafo com laço — Multigrafo ponderado — Digrafo

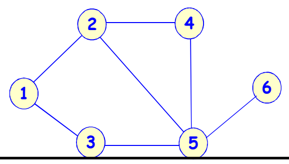
Grafos – Primeiros conceitos: Grau e Adjacência

Dois vértices são adjacentes (vizinhos) quando existe aresta comum.

A aresta comum é incidente a cada um deles. Arestas adjacentes são as que têm um vértice comum.

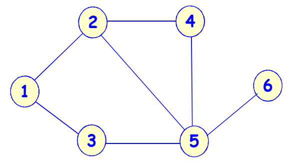
O grau de um vértice v, D(v), é o número de vizinhos do mesmo.

Um grafo é regular quando todos os vértices têm o mesmo grau.



Grafos – Primeiros conceitos: Grau e Adjacência

Dois vértices são adjacentes (vizinhos) quando existe aresta comum.
A aresta comum é incidente a cada um deles. Arestas adjacentes são as que têm um vértice comum.
O grau de um vértice v, d(v), é o número de vizinhos do mesmo.



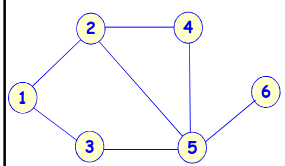
Os vértices 1 e 2 são adjacentes
A aresta (2, 4) é incidente aos vértices 2 e 4.
(1,3) é adjacente a (5,3)
Os vértices 2 e 4 são os extremos da aresta (2,4)
d(1) = 2; d(5) = 4

Grafos – Primeiros conceitos: Grau e Adjacência

Teorema 1: Para todo grafo *G*,

$$\Sigma_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

Prova: cada uma das m arestas do grafo contribui com duas unidades na soma dos graus. Logo, a fórmula é verdadeira.



m = 7,
$\Sigma_{v \in V(G)} d(v)$
= 2+3+2+2+4+1= 14
= 2 . 7

Corolário: O número de vértices de grau ímpar em um grafo *G* é par.

Grafos – Primeiros conceitos:

EXS4

a) É possível existir grafos simples com as seguintes sequências de graus?
- a.1) 1 1 3 3
- a.2) 1 1 3 3 4 5 6 6
- a.3) 1 1 3 3 4 4 5 5

b) Certo ou errado?
Todo grafo simples com sequências de graus:
- b.1) 3 3 3 3 3 3
- b.2) 1 1 2 2 2 2

são isomorfos.

Grafos – Primeiros conceitos: Caminhos, trajetos, ciclos

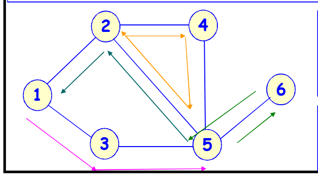
Caminho: sequencia de vértices $v_1, v_2, ..., v_k$ onde vértices consecutivos v_j, v_{j+1} são tais que $(v_j, v_{j+1}) \in E$.

Caminho simples: caminho com todos os vértices distintos

Trajeto: caminho com todas as arestas distintas

Ciclo: caminho com mais de três vértices onde os vértices iniciais e finais se repetem

Ciclo simples: ciclo onde apenas o primeiro e último vértice se repetem.



Caminho: 5, 6,5,2,1
Caminho Simples: 1, 3,5
Ciclo: 2, 4,5,2
Trajeto: 1, 2, 4, 5, 2

Obs: em geral chamaremos caminho simples de caminho e ciclo simples de ciclo.

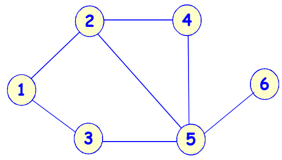
Grafos – Primeiros conceitos: Caminhos, trajetos, ciclos

Caminho euleriano: caminho que contenha cada aresta uma única vez.

Caminho hamiltoniano: caminho que contenha cada vértice uma única vez.

Grafo euleriano ou hamiltoniano: que contém um caminho euleriano ou hamiltoniano, respectivamente.

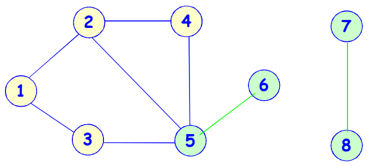
Ciclo euleriano ou hamiltoniano: definidos de forma análoga.



Este grafo é euleriano, mas não hamiltoniano.

Grafos – Primeiros conceitos: Subgrafos e Conectividade

Um grafo é conexo se há caminho entre todo par de vértices

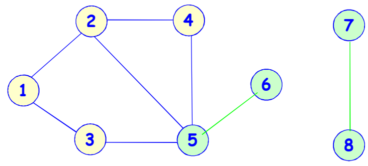


O grafo acima é desconexo, pois não há caminho entre os vértices 1 e 7, por exemplo.

Grafos – Primeiros conceitos: Subgrafos e Conectividade

Um grafo $G_2(V_2, E_2)$ é um subgrafo de $G_1(V_1, E_1)$, se $V_2 \subseteq V_1$ e $E_2 \subseteq E_1$.

Se, além disso, G_2 possuir toda aresta (v, w) de G_1, tal que ambos v e w estejam em V_2, então G_2 é o subgrafo induzido por V_2.



Subgrafo G2 = ({2, 3, 4, 5},{(2,4), (4,5),(5, 3)}) – não induzido
Subgrafo G3 = ({2, 3, 4, 5},{(2,4), (4,5),(2,5),(5, 3)}) – induzido
Subgrafo G4 = ({5, 6, 7, 8}, {(5, 6),(7, 8)}) – não conexo, induzido

Grafos - Primeiros conceitos: Subgrafos e Conectividade

Dado um conjunto S e uma propriedade P, diz-se que o conjunto $S' \subseteq S$ é maximal em relação à propriedade P, quando S' satisfaz a propriedade e não existe conjunto S'', com $S' \subset S'' \subseteq S$, que também satisfaz.
Um conjunto maximal é máximo se tiver o maior número de elementos possível

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Seja P a propriedade: a soma dos elementos do conjunto é menor o igual a 14 e todos os elementos são pares.

S não satisfaz a P

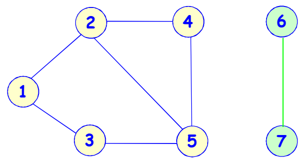
S' = {6, 8} é maximal em relação a P

S' = {2, 4, 6} é maximal e é máximo.

Obs: nem todo conjunto maximal é máximo.

Grafos - Primeiros conceitos: Subgrafos e Conectividade

Dado um grafo G, denominam-se componentes conexas de G aos seus subgrafos maximais conexos.



As componentes conexas de G são os subgrafos:

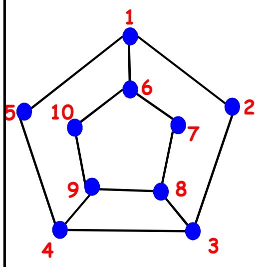
({1, 2, 3, 4, 56}, {(1,2),(1,3),(2,4),(2,5),(4,5),(5,2)}) e

({6,7}, {(6,7)}).

Grafos – Primeiros conceitos:

EXS5

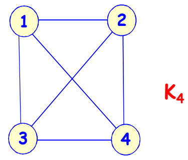
Dado o grafo:



a) Mostrar, se houver, ciclos de tamanhos 3 ,4,,,10
b) Mostrar, se houver, caminhos de tamanhos 3,4,...10
c) Desenhar um grafo induzido com 6 vértices
d) Mostrar um subgrafo maximal induzido cuja soma dos graus seja ≤ 14
e) Mostrar um subgrafo máximo induzido cuja soma dos graus seja ≤ 14
f) Qual a maior clique do grafo?
g) Qual o maior conjunto independente?
h) O grafo é euleriano?
i) O grafo é hamiltoniano?

Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais

Grafo completo: todo par de vértices é interligado por uma aresta.
Denominamos este tipo de grafo por Kn

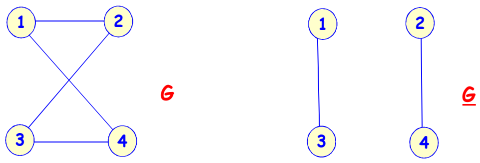


Número de arestas: $C(n,2) = n(n-1)/2$.

Quantos ciclos e quantos subgrafos de Kn existem?

Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais

Grafo complemento: o complemento de um grafo G é o grafo $\underline{G}$ com os mesmos vértices e, para todo par de vértices v, w, a aresta (v, w) $\in E(\underline{G})$ sse (v, w) $\notin E(G)$.

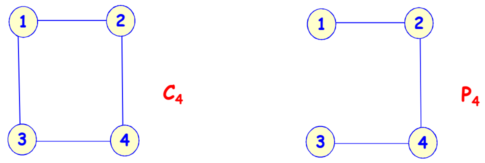


Número de arestas: $n(n-1)/2 - m$.

Podem G e $\underline{G}$ serem ambos conexos?

Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais

Grafo Ciclo: é um grafo conexo, regular de grau 2.
Grafo Caminho: é um grafo ciclo do qual foi retirada uma aresta.



Número de arestas de C_n: n.
Número de arestas de P_n: n-1.

Grafos – Primeiros conceitos:

Define-se grafo auto-complementar um grafo que é isomorfo ao seu complemento.

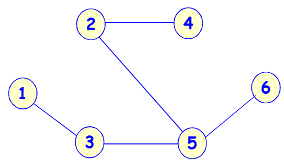
EXS6

a) Mostre que, se G é auto-complementar, $n = 4k$ ou $n = 4k+1$ para algum inteiro k.

b) Desenhe um grafo auto-complementar de cada tipo.

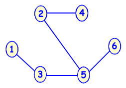
Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais

Árvore: é um grafo conexo e acíclico.



Número de arestas de T(n): n-1.

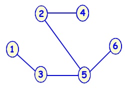
Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais



Teorema 2: Um grafo G é uma árvore sse existir um único caminho entre cada par de vértices.

Prova: Seja G uma árvore. Então G é conexo e existe pelo menos um caminho entre cada par de vértices v, w. Suponha que existam dois caminhos distintos vP_1w e vP_2w, entre v e w. vP_1wP_2v é um ciclo, contrariando G ser acíclico. Reciprocamente, se existe um único caminho entre cada par de vértices, então o grafo é conexo e, além disso, não pode conter ciclos. Logo G é uma árvore.

Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais



Teorema 3: Seja $G(V, E)$ um grafo. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:

(i) G é uma árvore
(ii) G é conexo e $|E|$ é mínimo.
(iii) G é conexo e $|E| = |V|-1$.
(iv) G é acíclico e $|E| = |V|-1$.
(v) G é acíclico e, para cada v, w, $\in V$, (v, w) $\notin E$, a adição da aresta (v, w) produz um único ciclo.

A prova fica como exercício.

Grafos – Primeiros conceitos:

EXS7

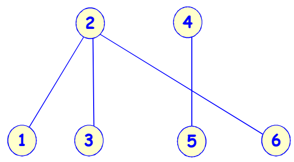
Dada uma árvore com n vértices, sabendo-se que o vértice de maior grau tem grau 5, determinar o número máximo possível de folhas da árvore, para:

a) n=21

b) $n \geq 10$ qualquer

Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais

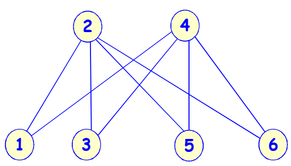
Bipartido: um grafo G é bipartido quando V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2. Denota-se normalmente $G(V_1 \cup V_2, E)$.



Número máximo de arestas de G: $|V_1|.|V_2|$

Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais

Bipartido completo: um grafo G bipartido é bipartido completo quando existir aresta para cada par de vértices v_1, v_2, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Denota-se por $K_{n1,n2}$.



$K_{2,3}$

Número de arestas de G: $|V_1|.|V_2|$

Grafos - Primeiros conceitos: Classes Especiais

Teorema 4: Um grafo $G(V,E)$ é bipartido sse todo ciclo de G possui comprimento par.

Prova: Seja $v_1, v_2...v_kv_1$ um ciclo de G de comprimento k. Temos $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, ... Como $(v_k,v_1) \in E$, então $v_k \in V_2$. Logo, k é par.
A prova de suficiência consiste em exibir os subconjuntos V_1, V_2 que particionam V, onde todos os ciclos têm tamanho par. Escolha $v_1 \in V$ arbitrariamente e defina V_1 como o conjunto que contém v_1 e todos os vértices que se encontram a distância par de v_1. Defina $V_2 = V-V_1$. Suponha que exista uma aresta (a, b) entre dois vértices a, b $\in V_1$. Então os caminhos mais curtos de v_1 para a e b adicionados à aresta (a, b) formam um ciclo de tamanho ímpar, uma contradição. Os demais casos são tratados de forma análoga.

Grafos – Primeiros conceitos:

EXS8

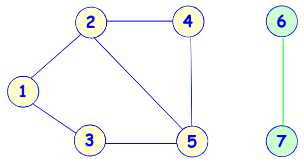
1.Ddo um grafo bipartido $G(V_1 \cup V_2, E)$, determinar:

a) O tamanho do maior ciclo possível em G.
b) O tamanho do maior caminho possível em G.
c) O maior grau possível de algum vértice de G.

2.Provar que uma árvore é um grafo bipartido.

Grafos - Primeiros conceitos: Cliques e Conjuntos Independentes

Dado um grafo G, denomina-se clique de G a um subgrafo de G que seja completo. Cama-se conjunto independente a um subgrafo induzido de G que seja totalmente desconexo.

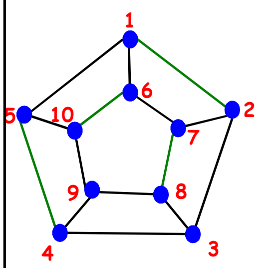


K({2,4,5},{(2,4),(2,5),(4,5)}) é uma clique do grafo acima.

I({1, 5, 6},{}) é um conjunto independente.

Grafos - Primeiros conceitos: Emparelhamento

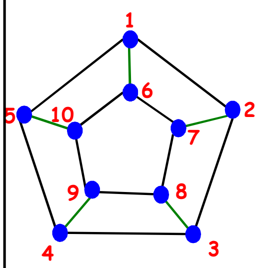
Um emparelhamento de um grafo simples G é um conjunto $M \subseteq E(G)$ tal que cada par de arestas de M não compartilha vértices.



{(1,2),(4,5),(6,10),(7,8)} é um emparelhamento maximal

Grafos - Primeiros conceitos: Emparelhamento

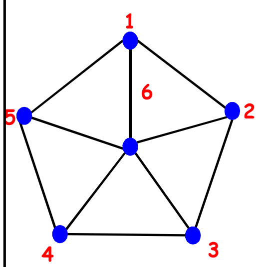
Um emparelhamento de um grafo simples G é um conjunto $M \subseteq E(G)$ tal que cada par de arestas de M não compartilha vértices.



{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)} é um emparelhamento MÁXIMO

Grafos - Primeiros conceitos: Cobertura de vértices

Uma cobertura de vértices de um grafo simples G é um conjunto $K \subseteq V(G)$ tal que cada aresta de G é incidente a um vértice de K.



{1, 2, 3, 4, 5} é uma cobertura minimal

{1, 3, 4, 6} é uma cobertura MÍNIMA

Grafos - Primeiros conceitos: Parâmetros de grafos

$n = |V|$ = número de vértices.
$m = |E|$ = número de arestas.
$N(v)$ = conjunto formado p/ vizinhança de $v \in V(G)$.
$d(v)$ = grau de $v \in V(G)$.
$\delta(G)$ = grau mínimo de G.
$\Delta(G)$ = grau máximo de G.
$w(G)$ = número de componentes conexas de G.
$\chi(G)$ = número cromático de G.
$\chi'(G)$ = índice cromático de G.
$\kappa(G)$ = conectividade de vértices de G.
$\kappa'(G)$ = conectividade de arestas de G.

Primeiros Conceitos em Grafos

FIM