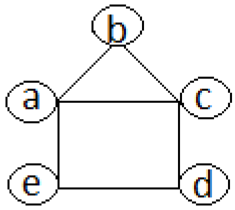
GRAFO: Um grafo <u>G=(V, E)</u> é um par, onde **V** é o conjunto de <u>vértices</u> finito e não-vazio e **E** é o conjunto de <u>arestas</u> formado por pares não ordenados de <u>distintos elementos</u> de V.

- *Representações de um grafo*:

1. ***Desenho***:



2. ***Definição:***

G=(V,E) , sendo V={a,b,c,d,e} e E={ab,ac,ae,bc,cd,de}

3. ***Matriz de Adjacência:***

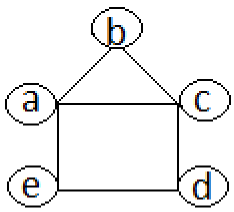
$m_{ij} \begin{cases} 0, \text{se ij} \notin \text{E} \\ 1, \text{se ij} \in \text{E} \end{cases}$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

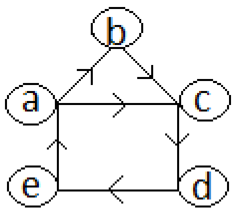
4. ***Lista de Adjacências:***
   - L(a) = (b, c, e)
   - L(b) = (a, c)
   - L(c) = {a, b, d}
   - L(d) = {c, e}
   - L(e) = {a, d}

ADJACÊNCIA E INCIDÊNCIA EM GRAFOS: Dado um grafo G=(V, E). Se uv, vw ∈ E dizemos que <u>u</u> é <u>adjacente</u> a <u>v</u>; que <u>uv</u> é <u>adjacente</u> a <u>vw</u>, que <u>u</u> é <u>incidente</u> a <u>uv</u>. Salvo menção em contrário n =|V| e m = |E|.

ORIENTAÇÃO DE GRAFOS: Dado um grafo G=(V, E) e uv uma aresta de E. Uma <u>orientação</u> de uv é uma $\underset{uv}{\rightarrow}$ ou (exclusivo) $\underset{vu}{\rightarrow}$ para dada uma ordem ao par (u, v). Um <u>grafo orientado</u> $\underset{G}{\rightarrow} = (V, \underset{E}{\rightarrow})$ é obtido a partir de G, onde os elementos de $\underset{E}{\rightarrow}$ consistem de uma orientação para cada elemento de E.

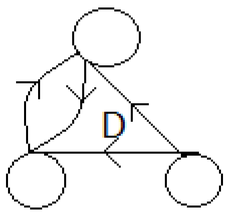


Grafo



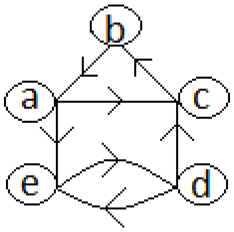
Grafo orientado

DIGRAFO: Um dígrafo D=(V, E) consiste de um par, onde V é finito e não vazio e E é um adjunto de par ordenado de distintos elementos de V.



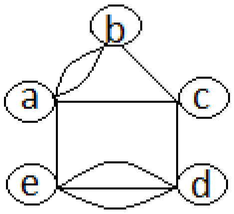
OBS.: Todo grafo orientado é um dígrafo, porém nem todo dígrafo é um grafo Orientado (com é o caso de D).

MULTIGRAFO: Um multigrafo é um par M=(V, E), onde V é um conjunto finito não vazio e E é um multiconjnto de pares não-ordenados de distintos elementos de V (um multiconjunto contém elementos não necessariamente distintos).



Digrafo D

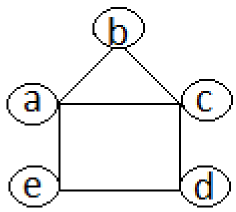
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ = Matriz de adjacências de D



Multigrafo M

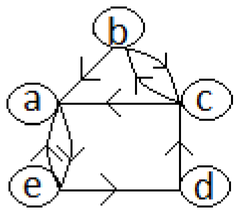
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ = Matriz de adjacências de M

GRAU DE UM GRAFO: Dado um grafo G=(V, E), o grau d(v) de v ∈ V é igual ao número de vértices de V que são adjacentes a v.



d(a) = 3
d(b) = 2
d(c) = 3
d(d) = 2
d(e) = 2

GRAU DE SAIDA E ENTRADA DE UM DIGRAFO: Dado um dígrafo D=(V, E), o grau de saída d^+(v) de v ∈ V é o número de vértices ao qual v é incidente e o grau de entrada d^-(v) é o número de vértices de V que incide em v.

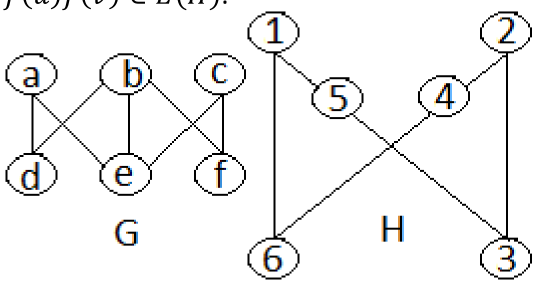


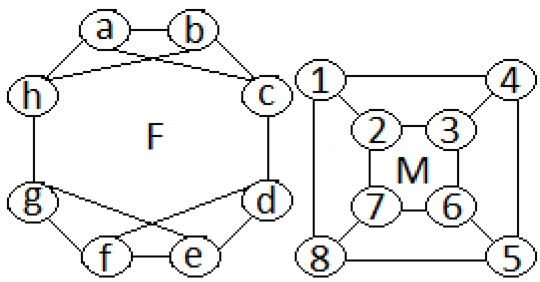
d^+(a) = 1	d^-(a) = 3
d^+(b) = 2	d^-(b) = 1
d^+(c) = 2	d^-(c) = 2
d^+(d) = 1	d^-(d) = 1
d^+(e) = 2	d^-(e) = 1

SUMIDOURO DE UM DIGRAFO: Dado um dígrafo D=(V, E), se d^+(v) = 0 então v é um sumidouro.

FONTE DE UM DIGRAFO: Dado um dígrafo D=(V, E), se d^-(v) = 0 então v é um sumidouro.

GRAFOS ISOMÓRFICOS: Dizemos que dois grafos G e H são isomorfos se existe $f: V(G) \xrightarrow{bijetiva} V(H)$ uma função bijetiva do conjunto de vértices V(G) de G no conjunto V(H) de vértices de H tal que uv ∈ E(G) se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(H)$.





- **G é isomorfo a H?** Sim.

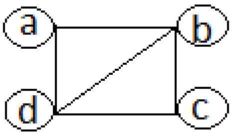
  - f(a) = 6
  - f(b) = 2
  - f(c) = 5
  - f(d) = 3
  - f(e) = 1
  - f(f) = 4

  { ae = 61; af = 64; bd = 23; be = 21; bf = 24; cd = 53; ce = 51}

- **F é isomorfo a M?** Não.

TEOREMA: Dado um grafo G=(V, E); $\sum_{v \in V} d(v)$ = 2m. Ou seja, o somatório dos graus é igual ao dobro do número de arestas.

- **PROVA:** Note que dada M (matriz de adjacência), $\sum_{v \in V} d(v)$ é o número de 1's em M. Cada aresta de E corresponde a exatamente dois 1's de M.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d(a) = 2
d(b) = 3
d(c) = 2
d(d) = 3
TOTAL: 10

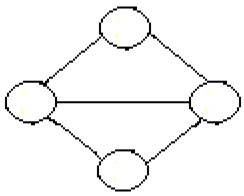
COROLÁRIO: Dado um grafo G=(V, E), o número de vértices de grau ímpar é par.

- **PROVA:** Considere o teorema prévio:

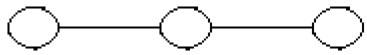
  2m = $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{d(v)=2q}^{v \in V} d(v) + \sum_{d(v)=2k+1}^{v \in V} d(v)$

  Daí, $\sum_{d(v)=2k+1}^{v \in V} d(v)$ = 2m - $\sum_{d(v)=2q}^{v \in V} d(v)$ = 2t, t ∈ ℕ

  Temos que o somatório de números ímpares é par. E, portanto, numero de parcelas (número de vértices de impar é par).



Dois vértices de grau ímpar e dois de grau par



Dois vértices de grau ímpar e um de grau par

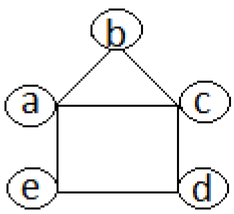
PASSEIO: Dado um grafo G=(V, E) e S=$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ uma sequência de vértices de V, dizemos que S é um passeio se $v_i v_{i+1} \in \{1,2,3, \dots, k-1\}$. Dizemos que S é fechado se $v_1 = v_k$.

TRILHA: Dado um grafo G=(V, E) e um passeio S, dizemos que S é uma trilha se $v_i v_{i+1} \neq v_j v_{j+1}$ para todo i ≠ j.

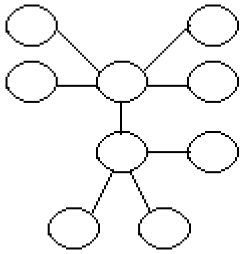
CICLO: Dado um grafo G=(V, E) e uma trilha fechada S, dizemos que S é um ciclo quando o único par idêntico de vértices é $v_1 = v_k$.

CAMINHO: Dado um grafo G=(V, E) e um passeio S, dizemos que S é um caminho $quando$ $\forall i, j \in \{1,2,3, \dots, k\}, i \neq j$, então $v_1 \neq v_k$.

COMPRIMENTO: Dado um grafo G=(V, E) e S=$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ uma sequência de vértices de V, temos o comprimento de S igual a k-1 (o número de suas arestas com ou sem repetição).

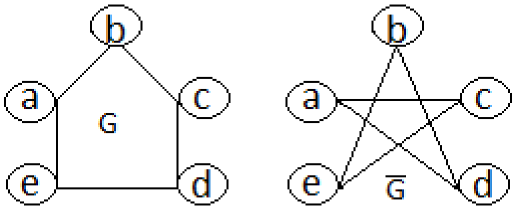


- *Passeio que não é uma trilha:* (a,c,a,b)
- *Trilha que não é um caminho:* (a, c, d, e, a, b)
- *Ciclos:* (a, b, c, a); (a, c, d, e, a); (a, b, c, d, e, a)
- *Caminhos:* (a, b); (a, c); (a, e); (b, c), (c, d); (a, b, c, d, e); (b, c, d, e, d)



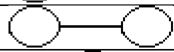
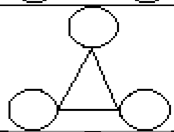
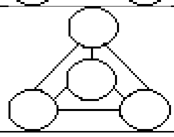
GRAFO ACÍCLICO: Um grafo G=(V, E) é dito ser acíclico quando G não contém ciclos.

COMPLEMENTO DE UM GRAFO: Dado um grafo G=(V, E), seu complemento $\overline{G} = (V, \overline{E})$ satisfaz que e ∈ E se, e somente se, e ∉ $\overline{E}$.



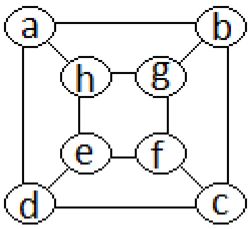
- ## CLASSES DE GRAFOS

GRAFO COMPLETO: Dado n ∈ ℕ*, um grafo completo kn = (V, E) satisfaz que $\forall\, u, v \in V, uv \in E$.

n	kn	m
1		0
2		1
3		3
4		6
...	...	...
n		(n(n-1))/2 = $\binom{n}{2}$

CONJUNTO INDEPENDETE: Dado um grafo G=(V, E), um conjunto independente S ⊂ V satisfaz que ∀ u,v ∈ S, uv ∉ E.

CLIQUE: Dado um grafo G=(V, E), um conjunto independente S ⊂ V satisfaz que ∀ u,v ∈ S, uv ∈ E.



- {a, b} é uma clique máxima de G que é também maximal (não existe outra clique que contenha {a, b} propriamente)
- {a, g, c} é um conjunto independente não maximal porque está contido em {a, g, c, e} que também é independente e maximal.
- {a, f} é um conjunto independente maximal e não é máximo.

PARTIÇÃO: Uma partição $(V_1, V_2, V_3, \dots, V_k)$ de um conjunto V satisfaz que $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_k = V$ e que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$; $\forall i, j \in \{1,2,3,\dots,k\}$ com i ≠ j.