Teoria dos Grafos

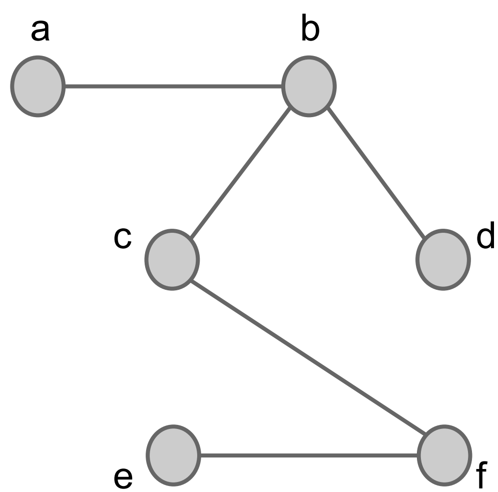
Árvores e Florestas

versão 1.15

Fabiano Oliveira
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

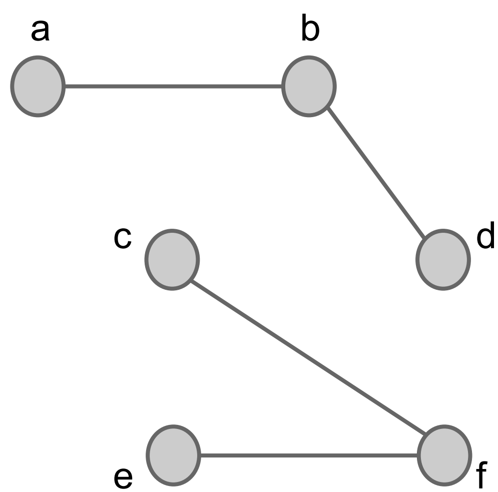
Árvores e Florestas

- **Def.:** Um grafo G é ***acíclico*** se G não possui ciclos.
  Def.: Um grafo T é uma ***árvore*** se T é conexo e acíclico.
- **Def.:** Uma ***folha*** de uma árvore é um vértice v tal que d(v) = 1.



Árvores e Florestas

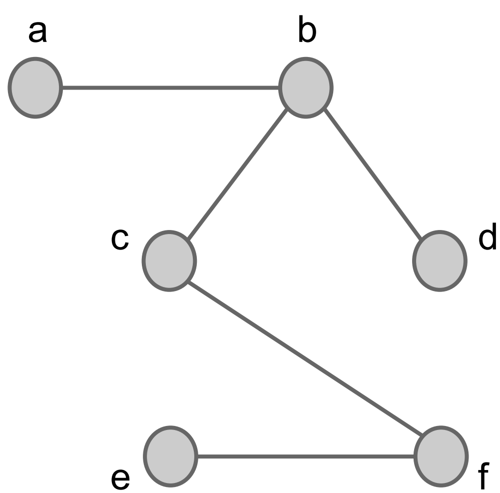
- **Def.:** Um grafo G é uma ***floresta*** se G é acíclico.



Árvores e Florestas

Árvores e Florestas

Teorema:
Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por um único caminho



a, f estão conectados pelo único caminho a,b,c,f

e, d estão conectados pelo único caminho e,f,c,b,d

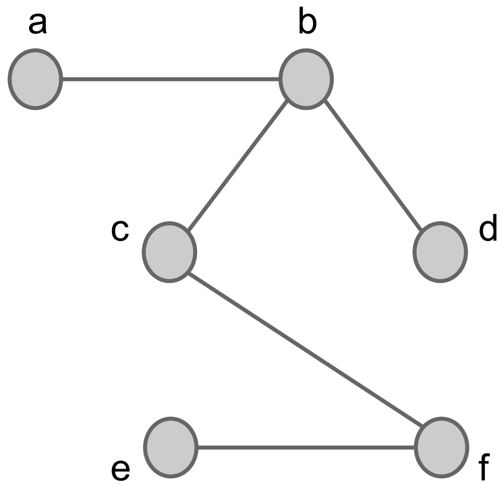
Árvores e Florestas

Prova:

- Por contradição, suponha que existam caminhos distintos P_1 e P_2 em uma árvore T conectando dois vértices.
- Seja uma aresta $xy \in P_1$ tal que $xy \notin P_2$.
- Seja $T' = T - \{xy\}$.
- Existe um caminho P entre x e y em T', que vai de y por P_1 até o primeiro vértice comum a P_2 e depois segue por P_2 até x
- Logo, P acrescido de xy é um ciclo em T, o que é um absurdo pois T é uma árvore.

Árvores e Florestas

Teorema:
Em uma árvore, $m = n - 1$



$m = 5$

$n = 6$

Árvores e Florestas

Prova: (1 de 2)

- Seja T uma árvore.
- Por indução em n.
- **Base**: $n = 1 \Rightarrow m = 0$ (OK)
- **Hipótese de Indução (H.I.)**: Seja $n > 1$ e suponha que a proposição seja verdade para todas as árvores com menos que n vértices.

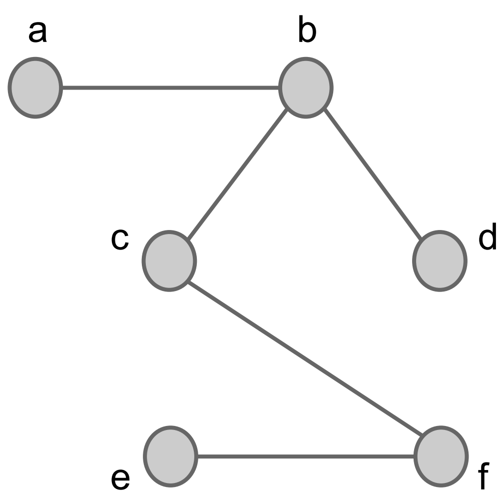
Árvores e Florestas

Prova (2 de 2):

- **Passo de indução**:
  - Seja $xy \in E(T)$.
  - Seja $T' = T - \{ xy \}$
  - Como o único caminho entre x e y é $P = x,y$ (Teorema anterior), então não há caminho entre x e y em T'.
  - Logo, T' é desconexo e sejam T_1 e T_2 os dois componentes conexos de T'.
  - Sejam $m_i = |E(T_i)|$, $n_i = |V(T_i)|$, para $i = 1,2$
  - Naturalmente, T_1 e T_2 são acíclicos e, portanto, árvores, e $n_1 < n$ e $n_2 < n$.
  - Por H.I., $m_1 = n_1 - 1$ e $m_2 = n_2 - 1$
  - Logo, $m = m_1+m_2+1 = (n_1-1)+(n_2-1)+1 = n_1+n_2-1 =$
    $= n - 1$

Árvores e Florestas

Teorema:
Em uma árvore com $n \geq 2$, há pelo menos dois vértices de grau 1



$$d(a) = d(d) = d(e) = 1$$

Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

- É muito comum usarmos resultados anteriores já demonstrados para construir novos resultados. (Análogo ao processo de desenvolvimento de algoritmos, onde algoritmos novos são criados a partir dos previamente existentes.)

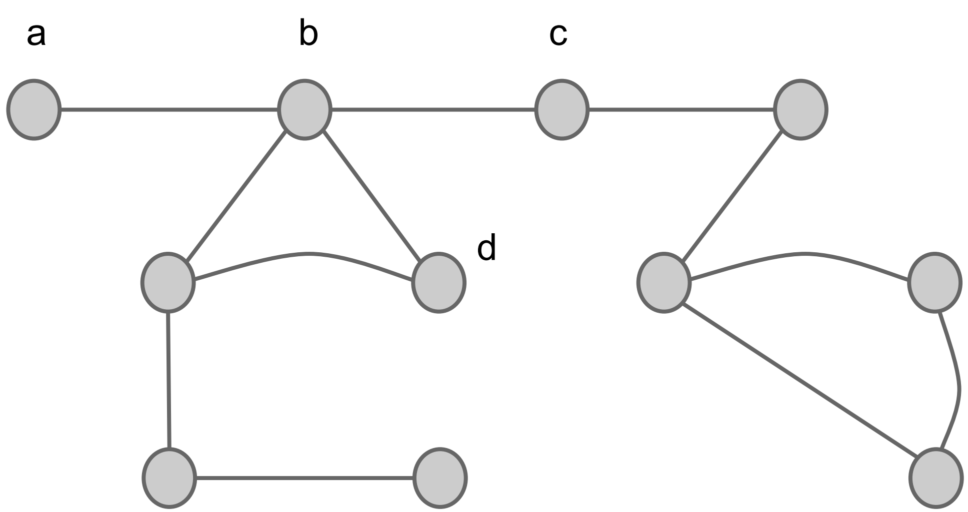
Árvores e Florestas

Prova:

- Seja T uma árvore.
- Em um grafo geral, $\sum \{ d(v) : v \in V(G) \} = 2m$.
- Para T, portanto, $\sum \{ d(v) : v \in V(G) \} = 2(n - 1)$.
- Por absurdo, suponha que exista $X \subset V(T)$, com $n - 1$ elementos todos possuindo grau maior que 1.
- Então: $\sum \{ d(v) : v \in V(T) \} =$
  $= \sum \{ d(v) : v \in X \} + d(y)$, onde y é o elemento em $V(T) - X$
  $\geq 2(n-1) + 1$, o que é absurdo com conclusão anterior.

Árvores e Florestas

- **Def.:** Uma aresta $e \in E(G)$ é uma ***ponte*** se $\omega(G) < \omega(G - \{e\})$

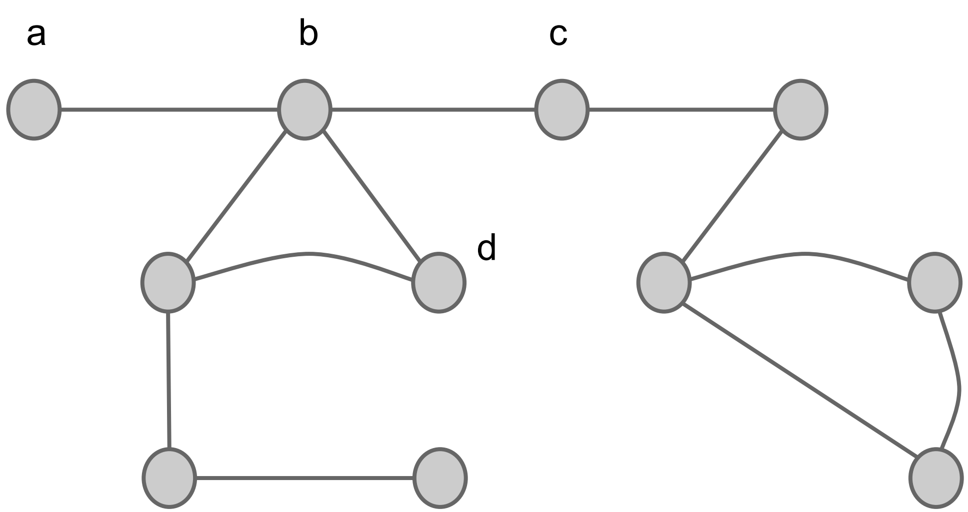


ab e bc são pontes

bd não é ponte

Árvores e Florestas

Teorema:
$e \in E(G)$ é uma ponte $\Leftrightarrow$ e não pertence a nenhum ciclo



De fato, ab e bc não pertencem a nenhum ciclo, já bd pertence a um ciclo

Árvores e Florestas

Prova (⇒) :

- Seja $e = xy \in E(G)$ uma ponte.
- Como xy é uma ponte, $\omega(G) < \omega(G - e)$.
- Logo, existe um único caminho que conecta x e y, que é a aresta xy.
- Por contradição, suponha que xy esteja num ciclo C.
- Seja P o caminho formado pela remoção de xy de C
- Logo, P é um caminho entre x e y em $G - \{xy\}$, um absurdo.

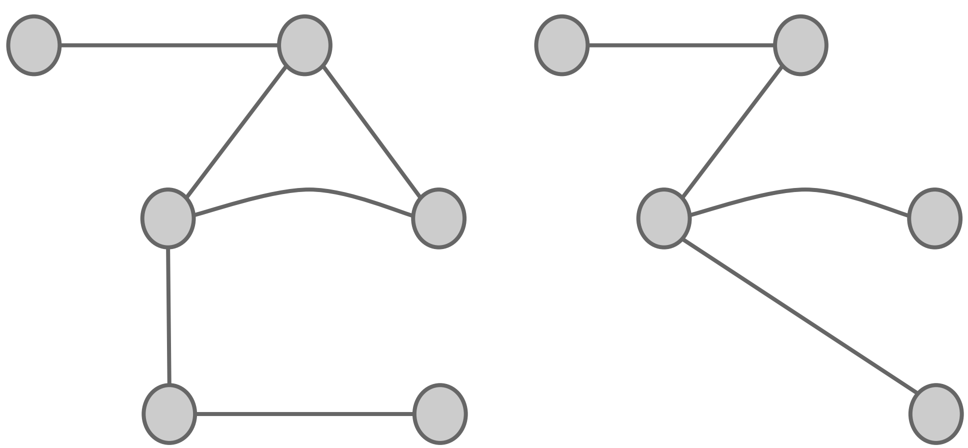
Árvores e Florestas

Prova ($\Leftarrow$) :

- Seja $xy \in E(G)$ tal que xy não pertence a nenhum ciclo.
- Seja P um caminho de x a y em G.
- Ou $P = x,y$, ou P é um caminho tal que $xy \notin P$.
- Se P é um caminho tal que $xy \notin P$, então P acrescido de xy é um ciclo, o que não é possível.
- Logo, o único caminho P de x a y possível é $P = x,y$
- Portanto, x e y estarão em componentes conexos distintos em $G - \{xy\}$, e estavam no mesmo componente conexo em G.
- Consequentemente, $\omega(G) < \omega(G - \{xy\})$ e concluimos que xy é uma ponte.

Árvores e Florestas

Teorema:
Um grafo G é uma árvore ⇔ G é conexo e toda aresta de G é uma ponte



O grafo da esquerda possui arestas que não são pontes, logo não é uma árvore

Todas as arestas do grafo da direita são pontes, logo é uma árvore

Árvores e Florestas

Prova ($\Rightarrow$) :

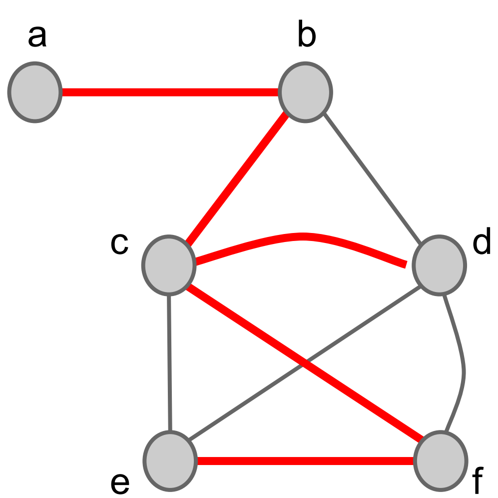
- Seja G uma árvore.
- Por definição, G é conexo e acíclico.
- Portanto, não existe nenhuma aresta de G em um ciclo.
- Usando o Teorema anterior, toda aresta de G é uma ponte.

Prova ($\Leftarrow$) :

- Seja G um grafo conexo tal que toda aresta é uma ponte.
- Usando o Teorema anterior, então toda aresta está fora de ciclos.
- Logo, G não possui ciclos.
- Como G é conexo e acíclico, G é uma árvore.

Árvores e Florestas

- **Def.:** Uma ***árvore geradora*** de um grafo G é uma subgrafo gerador T de G tal que T é uma árvore



As arestas em vermelho do grafo ao lado induzem uma árvore geradora do grafo.

Árvores e Florestas

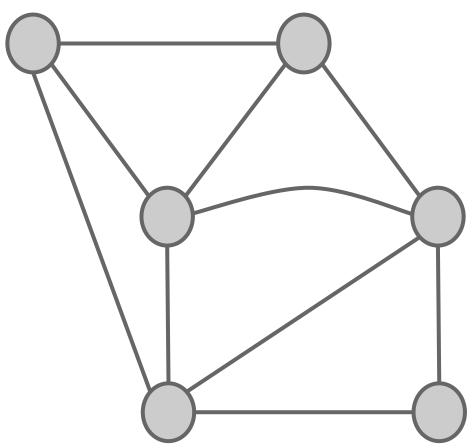
Linguagem das Provas:

- Uso da expressão "**Seja G' um subgrafo minimal de G com propriedade P**", com o seguinte significado: G' possui a propriedade P e nenhum subgrafo de G' satisfaz a propriedade P.

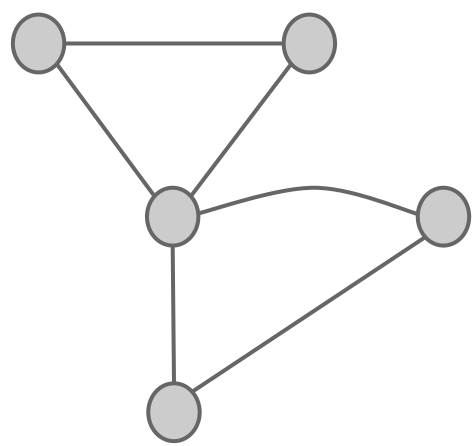
Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

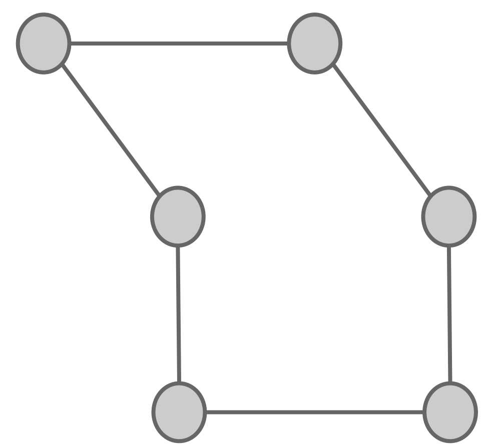
- **Exemplo:** Seja H um subgrafo minimal de G com **$\delta(H) \geq 2$ e mais da metade dos vértices de G**



G



um minimal



outro minimal

Árvores e Florestas

Teorema:
Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Árvores e Florestas

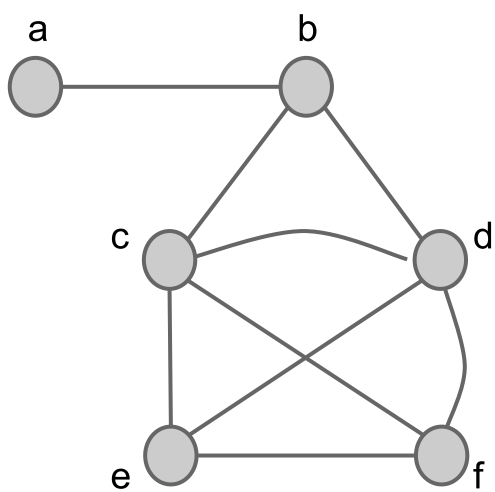
Prova:

- Seja G um grafo conexo.
- Seja T um subgrafo minimal que é gerador e conexo. Vamos mostrar que T é uma árvore.
- Por absurdo, suponha que T possua um ciclo C.
- Seja $xy \in E(T)$ uma aresta de C.
- Note que todo caminho em T entre dois vértices que contenha xy, pode ser alterado para usar as outras arestas de C que não seja xy.
- Logo, T-{xy} é conexo, o que é absurdo, pois T é subgrafo gerador conexo minimal.
- Portanto, T não tem ciclos. Como é conexo, T é árvore.

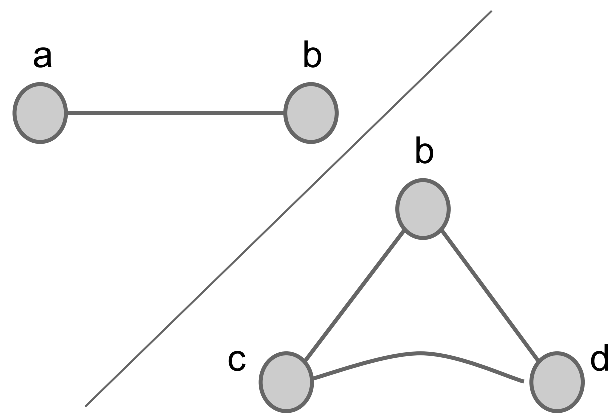
Árvores e Florestas

Linguagem das Provas:

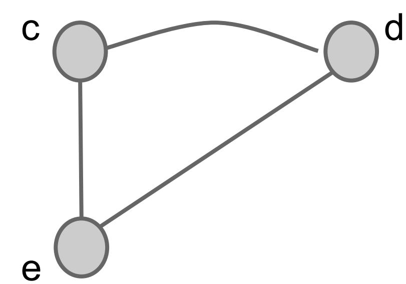
- Analogamente, "**Seja G' um subgrafo maximal de G com propriedade P**", com o seguinte significado: G' possui a propriedade P e nenhum supergrafo de G' satisfaz a propriedade P.



G



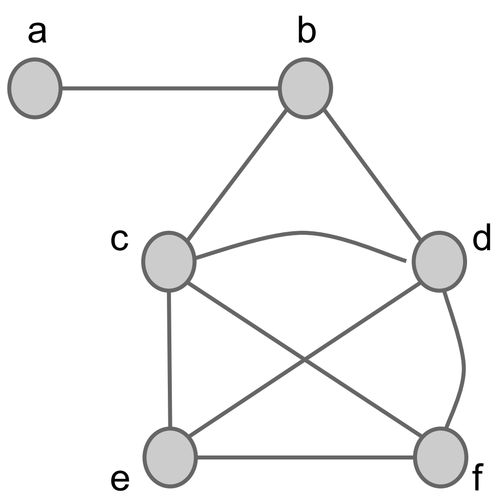
subgrafos de G completos maximais



não é subgrafo de G completo maximal

Árvores e Florestas

- **Def.:** $E \subseteq E(G)$ é um conjunto de ***arestas de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - E)$



Exemplos de arestas de corte:

{ab}, {bc, bd},
{ce, cd, bd, cf}

Exemplos que não o são:

{bc}, {bc, de, df}

Árvores e Florestas

- **Def.:** $E \subseteq E(G)$ é um conjunto de ***arestas de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - E)$

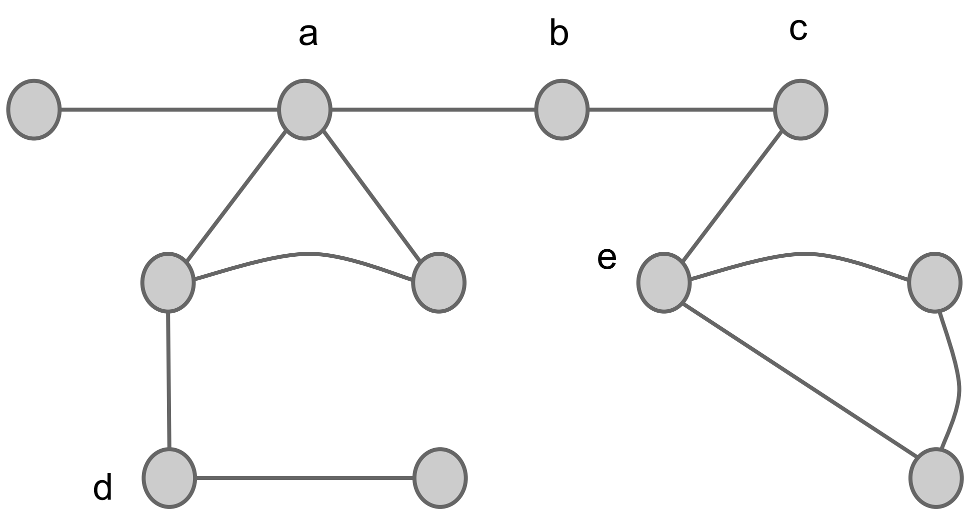
  Exercícios:

  - Qual o tamanho mínimo de um conjunto de arestas de corte de um C_n?

  - Qual o tamanho mínimo de um conjunto de arestas de corte de um K_n?

Árvores e Florestas

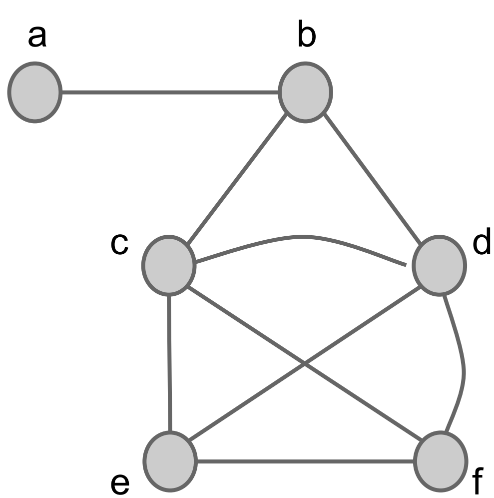
- **Def.:** Um vértice $v \in V(G)$ é uma ***articulação*** se $\omega(G) < \omega(G - \{v\})$



a, b, c, d, e são as únicas articulações

Árvores e Florestas

- **Def.:** V ⊆ V(G) é um conjunto de ***vértices de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - V)$



Exemplos de vértices de corte:

{b}, {c, d}

Exemplos que não o são:

{a}, {c, f}

Árvores e Florestas

- **Def.:** $V \subseteq V(G)$ é um conjunto de ***vértices de corte*** se $\omega(G) < \omega(G - V)$

Exercícios:

Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um C_n?

Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um K_n?

Exercícios

Árvores e Florestas

1. Quantas árvores geradoras distintas possuem os seguintes grafos:
   a. Um grafo conexo e acíclico
   b. Um grafo acíclico
   c. Um C_n

2. Quantos vértices possui um grafo acíclico com m arestas e ω componentes conexas?

3. Dê todas as árvores não-isomorfas com 8 vértices.

4. Para que valores de n e de m, os grafos $K_{m,n}$, K_n, C_n, P_n e Q_n (n-cubo) são:
   a. bipartidos?
   b. árvores?

5. Mostre que se $m > n$, então $\Delta(G) \geq 3$.

Árvores e Florestas

6. O diâmetro de um grafo é o comprimento do maior caminho deste grafo. Quantos vértices possui uma árvore:
   a. com 21 folhas e diâmetro 2?
   b. com 11 folhas e diâmetro 3?

7. Mostre que se entre quaisquer dois vértices de um grafo G só existe um caminho, e G não possui laços, então G é uma árvore.

8. Mostre que uma árvore que possui exatamente dois vértices de grau 1 é, em particular, um caminho.

9. Mostre que se T é uma árvore geradora de G e $xy \in E(G)$ mas $xy \notin E(T)$, então T acrescido da aresta xy possui um único ciclo.

10. ---

Árvores e Florestas

11. Seja $v_1,v_2,...,v_n$ uma sequência de elementos distintos. Seja f(i) uma função que mapeia cada valor $2 \leq i \leq n$ num elemento do conjunto {1, 2, …, i-1}. Mostre que o grafo $(\{v_1,v_2,...,v_n\}, \{v_2v_{f(2)}, v_3v_{f(3)}, \ldots, v_nv_{f(n)}\})$ é uma árvore.

12. ---

13. Seja G um grafo tal que $n \geq 3$. Mostre que:
    a. se G tem uma ponte, então G tem uma articulação
    b. se G tem uma articulação, não necessariamente G tem uma ponte

14. Mostre que se G é conexo, então $m \geq n - 1$.

15. Mostre que se $m < n$, então G possui pelo menos um vértice de grau 0 ou pelo menos dois vértices de grau 1.

Árvores e Florestas

16. Seja T uma árvore com V(T) = {1,..., n} tal que os graus dos vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6 são 7, 6, 5, 4, 3, 2 respectivamente e que os vértices 7, …, n são folhas. Determine n.

17. Seja T uma árvore com p + q vértices tal que p dos vértices têm grau 4 e q são folhas. Mostre que q = 2p + 2.

18. Seja T uma árvore com pelo menos três vértices. É verdade que T^C é conexo a menos que T seja um estrela?

19. Mostre que toda floresta é planar, isto é, pode ser desenhada sem que haja cruzamento entre arestas e que nenhuma aresta atravesse um vértice.

Árvores e Florestas

20. Seja G um grafo bipartido r-regular, com r > 1. Mostre que G não tem pontes.