UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - UERJ
PROFESSOR: ALEXANDRE ASSEMANY

CURSO: GEOMETRIA ANALÍTICA COM CÁLCULO VETORIAL – $1^{\underline{a}}$ LISTA

1. Supondo $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=3$ e $\theta=ang(\vec{a},\vec{b})=30°$, calcule:

a) $\|\vec{a}+\vec{b}\|$
b) $\|\vec{a}-\vec{b}\|$
c) $\|3\vec{a}-2\vec{b}\|$

2. Dados os pontos A = (2,2,-1) e B = (3,-2,6), determine:

a) O versor de $\overrightarrow{AB}$
b) Um vetor paralelo, mas de sentido contrário a $\overrightarrow{AB}$

3. Dados $\vec{v}_1=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{v}_2=2\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{v}_3=\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, determine o vetor unitário de sentido oposto ao vetor $\vec{v}=2\vec{v}_1-\vec{v}_2+\vec{v}_3$.

4. Verifique, justificando, se os vetores abaixo são colineares:

a) $\vec{v}=(-2,4,1),\vec{u}=(4,-8,-2)$
b) $\vec{v}=(-7,2,3),\vec{u}=(14,4,6)$
c) $\vec{v}=(4,3,1),\vec{u}=(8,5,-2)$

5. Determine os vetores de norma 14 e paralelos ao vetor resultante da adição de $\vec{v}_1=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ e $\vec{v}_2=4\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.

6. Dadas as duas coordenadas x = 4 e y = -12 de um vetor $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, calcule a terceira coordenada z de modo que $\|\vec{a}\|=13$.

7. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares e tem norma 5 e 12, respectivamente, calcule:

a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$
b) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

Explique o fenômeno que ocorre em a) e b).

8. Dados os vetores $\vec{u}=(3,4)$ e $\vec{v}=(-1,0)$, encontre as coordenadas do vetor $\vec{w}=(2,-5)$, escrito na base $\{\vec{u},\vec{v}\}$.

9. Dados os vetores $\vec{u}=(3,2)$, $\vec{v}=(2,4)$ e $\vec{w}=(1,3)$, exprimir $\vec{w}$ como a combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

10. Dados os vetores $\vec{a}=(3,-2,1),\vec{b}=(-1,1,-2),\vec{c}=(2,1,-3)$, determine as coordenas do vetor $\vec{w}=(11,-6,5)$ na base $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

11. Responda e justifique, conhecendo A = (3,-1,2), B = (1,2,-1), C = (-1,1,-3) e D = (3,-5,3):

a) ABCD pode ser um trapézio retângulo?
b) ABCD pode ser um trapézio isósceles?
c) ABCD pode ser um triângulo equilátero?
d) ABCD pode ser uma figura espacial? Caso afirmativo, qual é a figura?

12. No triângulo ABC, os vértices são A = (1,2), B = (-2,3) e C = (0,5). Responda:

a) Qual é a natureza do triângulo quanto aos seus lados?
b) Qual é a natureza do triângulo quanto aos seus ângulos?
c) Qual é o comprimento da altura deste triângulo? E da mediana?
d) Quais são as coordenadas do pontos médios dos lados $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$?

13. No triângulo PQR, encontre o ângulo interno do vértice P e diga porque P, Q e R podem ser vértices de um triângulo, sendo P = (1,1,1), Q = (0,-2,0) e R = (1,-1,3).

14. Qual é a condição para que um ponto P (x,y) esteja equidistante dos pontos A = (1,1) e B = (3,4)?

15. Dados $\vec{u}=(1,-1,0), \vec{v}=(3,-1,1), \vec{w}=(2,2,1), \vec{z}=(4,-3,1)$, determine o vetor $\vec{a}$, tal que $(\vec{a}+\vec{u})\ //\ \vec{v}$ e $(\vec{a}+\vec{w})\ //\ \vec{z}$.

16. Seja ABCD um paralelogramo, em que I é o encontro das diagonais. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações, justificando:

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
b) $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{CD}\|$
c) $\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{AC}\|$
d) $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{AC}\|$
e) $\|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\|=2\|\overrightarrow{IC}\|$
f) $\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\|=0$

17. Se ABCDEF é um hexágono regular de lado R e centro em (0,0), responda:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$?
b) $\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|+\|\overrightarrow{OD}\|=3\mathrm{R}$?
c) $\|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\|=R$?
d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$?
e) Quais são as coordenadas dos vértices, sabendo que um deles é o ponto A = (-2,0)?
f) A partir da informação da letra e), descubra qual é a medida de R.

18. Mostre no $\mathbb{R}^2$, que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$.

19. Mostre no $\mathbb{R}^2$, que $detA=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sen(\theta)$, em que A é a matriz cujos elemento são as coordenadas de $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.

20. Mostre que, se $\vec{u}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, então $\vec{u}$ é unitário e tem a mesma direção e sentido que $\vec{v}$.

21. Se $\overrightarrow{AC}=(-1,5,0)$ e $\overrightarrow{BD}=(-3,3,2)$ são as diagonais de um paralelogramo ABCD, calcule a área do mesmo.

22. Encontre $\|proj_{w}^{t}\|$, sabendo que $\vec{w}=(2,-3,-6)$ e $\vec{t}=3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$.

23. Dados os vetores $\vec{u}=(2,1,3)$, $\vec{v}=(-4,0,-6)$ e $\vec{w}=(4,-1,2)$, encontre $\vec{y}$ perpendicular a $\vec{u}\, e\, \vec{v}$, tal que $\vec{y}\cdot\vec{w}=8$.

24. Seja $\vec{n}$ ortogonal ao eixo OX e $\vec{d}=(3,0,-1)$. Encontre as coordenadas de $\vec{n}$ sabendo que $\|\vec{d}\times\vec{n}\|=6\sqrt{14}$ e $\vec{d}\cdot\vec{n}=-4$.

25. Qual é o valor de x de modo que o volume do paralelepípedo gerado por $\vec{t}=3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{w}=x$ seja unitário?

26. Dado o quadrilátero de vértices A = (-2,6), B = (4,4), C = (6,-6) e D = (2,-8):

a) Mostre que o segmento que une os pontos médios de lados adjacentes do quadrilátero formam um paralelogramo
b) Mostre que o segmento que une os pontos médios de $\overrightarrow{AD}\, e\, \overrightarrow{BC}$ corta o segmento que une os pontos médios de $\overrightarrow{AB}\, e\, \overrightarrow{CD}$

27. O segmento que une A = (-2,-1) e B = (3,3) é prolongado até C, sendo $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AB}$. Determine as coordenadas de C.

28. Sejam $\vec{u}=\left(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right), \vec{v}=\left(\frac{-4}{5},0,\frac{3}{5}\right), \vec{w}=(0,-1,0)$:

a) Mostre que $\vec{u},\vec{v}\, e\, \vec{w}$ formam uma base ortonormal
b) Calcule as coordenadas dos vetores da base canônica em relação à base $\beta=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

29. Usando o produto vetorial, encontre t de modo que (2, 0, t) e (t, 0, 2) sejam paralelos.

30. Encontre $\alpha\in\mathbb{R}$ para que a projeção de (1, α) sobre (2, -1) seja unitária.

31. Obtenha o ponto simétrico do ponto P = (2, 1, 0) em relação ao ponto M = (0, 1, 2).

32. Determine os vértices de um triângulo, sendo conhecidos o baricentro $G=\left(4,\frac{1}{3},2\right)$, e os pontos médios de dois lados, $M=\left(3,1,\frac{1}{2}\right)$ e N = (0,-1,2).

33. Dois vetores $\vec{a}=(2,-3,6)$ e $\vec{b}=(-1,2,-2)$ tem a mesma origem. Calcule as coordenadas do vetor $\vec{c}$ sobre a bissetriz do ângulo formado pelos vetores $\vec{a}\, e\, \vec{b}$, sabendo que $\|\vec{c}\|=3\sqrt{42}$.

34. Os vetores $\vec{a}\,e\,\vec{b}$ formam um Ângulo $\theta=\frac{\pi}{6}$. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, sabendo que $\|\vec{a}\|=\sqrt{3}$ e $\|\vec{b}\|=1$.

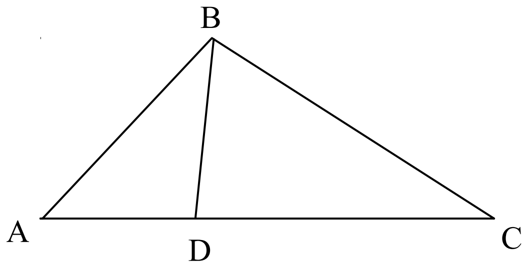
35. Num paralelogramo ABCD sabe-se que A = (1,3,–2) e que as diagonais são $\overrightarrow{AC}=(1,2,-3)$ e $\overrightarrow{BD}=(-2,0,1)$. Calcule as coordenadas dos outros três vértices.

36. Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2\ e\ \vec{v}_3$ são ortogonais dois a dois. Sabe-se que $\|\vec{v}_1\|=\|\vec{v}_2\|=1$ e que $\|\vec{v}_3\|=\sqrt{2}$. Calcule a norma do vetor $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$.

37. A área de um triângulo ABC é igual a $\sqrt{6}$. Sabe-se que A = (2, 1, 0), B = (-1, 2, 1) e que o vértice C pertence ao eixo OY. Calcule as coordenadas de C.

38. Determine sobre o eixo OX um ponto P, tal que o volume do tetraedro PABC seja o dobro do volume do tetraedro POBC. Dados: O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0,0,1).

39. Na figura abaixo $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AD}$. Exprima $\overrightarrow{BD}$ em função de $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.



40. Dados os vetores $\vec{e}_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},0\right)$ e $\vec{e}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ determine uma base ortonormal $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$

RESPOSTAS

1) a) $\sqrt{13+6\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{13-6\sqrt{3}}$ c) $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$

2) a) $\frac{1}{\sqrt{66}}(1,-4,7)$ b) k(1,-4,7), $k\in\mathbb{R}_-$ **3)** $\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

4) a) Sim b) Não c) Não **5)** $\pm$ (12,-4,6) **6)** $\pm$ 6 **7)** a) 13 b) 13

8) $\vec{w}=\frac{-5}{4}\vec{u}-\frac{23}{4}\vec{v}$ **9)** $\vec{w}=\frac{-1}{4}\vec{u}+\frac{7}{8}\vec{v}$ **10)** $\vec{w}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

11) a) Não. Pode ser trapézio, mas não retângulo b)Não c) Não d) Não

12) a) Isósceles b) Acutângulo c) $h=2\sqrt{2}$ = mediana

d) $N=\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$, M = (-1,4), $P=\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ **13)** $\arccos\left(\frac{\sqrt{22}}{11}\right)$ **14)** 4x + 6y = 23

15) (-10,4,-3) **16)** a) F b) V c) F d) V e) V f) V

17) a) F b) V c) V d) V e) (2,0), (-1, $-\sqrt{3}$), (1, $-\sqrt{3}$), (1, $\sqrt{3}$), (-1, $\sqrt{3}$)

f) 2 u.c. **21)** $\sqrt{62}\,u.a.$ **22)** 6 u.c. **23)** (3,0,-2) **24)** (0, $\pm$ 6,4) **25)** -3 ou -5

27) (18,15) **28)** b) $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right)$, (0,0,-1), $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$ **29)** $\pm$ 2

30) $\frac{2\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$ ou $\frac{2\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}$ **31)** (-2,1,4) **32)** A = (12,3,2), B = (-6,-1,-1), C = (6,-1,5)

33) $\pm$ (-3,15,12) **34)** $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ **35)** A = (5,5,-5), B = (4,4,-4), C = (2,4,-3) **36)** 2

37) (0,3,0) ou (0, $\frac{1}{5}$,0) **38)** (-1,0,0) ou ($\frac{1}{3}$,0,0) **39)** $\overrightarrow{BD}=\frac{\overrightarrow{BC}}{3}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

40) $\vec{e}_3=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$