Instituto de Matemática e Estatística-UERJ
Departamento de Informática e Ciência da Computação

1^a Lista de Algoritmos
Professor: Luerbio Faria
Data: **18/05/2013**

1. Um grafo G é *autocomplementar*, se G e seu complemento são isomorfos. Mostre que se G é autocomplementar, então $|V| = 4k$ ou $|V| = 4k+1$ para algum k inteiro não negativo.

   Prova:
   Pela definição de $\overline{G}$ $|E(G)| + |E(\overline{G})| = \frac{n(n-1)}{2}$. Como G é isomorfo a $\overline{G}$, temos que $|E(G)| = |E(\overline{G})|$. Dessa forma, $2|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2}$. E assim, $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$. Como um de n ou $n-1$ é ímpar, ocorre que ou n ou $n-1$ é um múltiplo de 4. Dessa forma, temos que $4k = n$ ou $4k = n-1$. ♣

2. Mostre que dois caminhos máximos em um grafo conexo **SEMPRE** possuem pelo menos um vértice em comum.

   Prova: Sejam $P_1 = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k)$ e $P_2 = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$ dois caminhos máximos. Se P_1 e P_2 não compartilham algum vértices, então existe um caminho $P = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_t)$, com pelo menos uma aresta, formado por vértices de $V \setminus (P_1 \cup P_2)$ que liga algum vértice u_i até algum vértice v_j. Assumindo $i \geq \frac{k}{2}$ e $j \geq \frac{k}{2}$ temos que o caminho $Q = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_i, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_t, v_j, v_{j-1}, v_{j-2}, \ldots, v_1)$ é um caminho maior que $\frac{k}{2} + \frac{k}{2} + 1 = k+1$, uma contradição.♣

3. Prove ou disprove que o seguinte par de grafos é isomorfo:

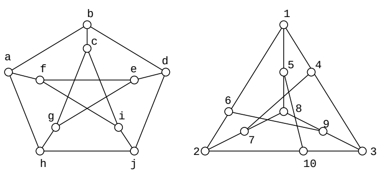

Figure 1:

   Prova: São isomorfos, encontre um isomorfismo!

4. Dado um grafo $G = (V, E)$ a *conectividade* $c_v(G)$ de *vértices* de G é o menor inteiro não negativo tal que existe um conjunto com $c_v(G)$ vértices cuja remoção produz um grafo desconexo ou não trivial. Assim, G é desconexo ou trivial se e somente se $c_v(G) = 0$. A *conectividade* $c_e(G)$ de *arestas* de G é o menor inteiro não negativo tal que existe um conjunto com $c_e(G)$ arestas cuja remoção produz um grafo desconexo ou não trivial. Assim, G é desconexo ou trivial se e somente se $c_e(G) = 0$.

   Justifique e dê os valores de $cv(G)$ e de $ce(G)$:

   a) $cv(K_n) = ce(K_n) = n-1$

   b) $cv(K_{n,m}) = ce(K_{n,m}) = \min n, m$. c) $cv(C_n) = ce(C_n) = 2$.

   d) $cv(Q_n) = ce(C_n) = n$. e) $cv($ Petersen $) = ce($ Petersen $) = 3$. f) $cv($ árvore $) = ce($ árvore $) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1 \\ 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$ – Justifique!

   g) Determine um grafo G com o menor n tal que:

$cv(G)$	$ce(G)$	(O grau mínimo)δ
1	3	3
1	2	3
1	3	4
2	3	4
3	3	3

   Com vocês!

5. V ou F, respectivemente, com justificativa e contra-exemplos:

   (a) G e seu complemento não podem ser ambos desconexos. V - Justificativa com vocês

   (b) Se G é um grafo bipartido d-regular e (X, Y) consiste em uma partição em conjuntos independentes para V, então $|X| = |Y|$ – V - Justificativa com vocês

   (c) substitua "grafo bipartido d-regular" por "grafo bipartido completo d-regular". Muda alguma coisa? – V - Justificativa com vocês

   (d) Se G é um grafo com $\delta \geq 4$, então existe um ciclo de comprimento maior – V - Justificativa com vocês ou igual a 5.

   (e) Se H é subgrafo de G, então $ce(G) \geq ce(H)$ – F - Contra-exemplo com vocês.

   (f) Se H é subgrafo de G, então $ce(G) \leq ce(H)$. – F - Contra-exemplo com vocês.

   (g) Em todo grafo o número de vértices de grau ímpar é par. – V - Justificativa com vocês.

   (h) Em todo grafo o número de vértices de grau par é ímpar. – F - Contra-exemplo com vocês.

   (i) Se G possui uma ponte, então G possui uma articulação. – V - Justificativa com vocês.

   (j) Se G possui uma articulação, então G possui uma ponte. – F - Contra-exemplo com vocês.

6. Desenhe todas as árvores não isomorfas com 7 vértices.

   Resposta: Faça! São 08 árvores. Classifique-as pelo seu diâmetro.

7. Prove ou refute: Não existe grafo Euleriano conexo simples com número par de vértices e número ímpar de arestas.

   Resposta: Refuto, considere $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $E = \{ab, bc, cd, da, ae, ef, fa\}$.

8. Um grafo é semi-euleriano se existe um passeio não fechado contendo todas as arestas de G. Prove que dado $G = (V, E)$ um grafo conexo, então: G é semieuleriano se e somente se G possui exatamente 2 vértices de grau ímpar.

   Com vocês.

9. Para cada grafo a seguir diga para quais valores de m e n o grafo é hamiltoniano, euleriano e dê o número cromático com a justificativa.

GRAFO	HAMILTON.	EULER.	χ
$K_{m,n}$	$m = n \geq 2$	m e n pares	2
K_n	$\forall n \geq 3$	$n \geq 4, n$ par	n
Q_n	$\forall n \geq 2$	$n \geq 2, n$ par	2
S_n	não é	não é	2
P_n	não é	não é	2
C_n	$\forall n \geq 3$	$\forall n \geq 3$	$\begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$
PETERSEN	não é	não é	3

10. Prove que se G é um grafo Euleriano e e, f são duas arestas de G com um extremo comum, então G tem uma trilha Euleriana fechada no qual e, f aparecem consecutivamente.

    Dica: Use a questão 8.

11. Prove que todo grafo acíclico orientado tem pelo menos uma fonte e pelo menos um sumidouro.

    Prova: Suponha por um momento que não. Então, construa a sequência $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$, onde $v_i v_{i+1} \in E$ porque v_i não é fonte e $v_j v_i \notin E, i < j$, porque G é acíclico. Como G é finito a sequência tem fim ou com um ciclo ou com um sumidouro. ♣

12. Mostre que se um grafo $G = (V, E)$ é hamiltoniano, então $L(G)$ é hamiltoniano.

    Com vocês.

13. Mostre que se um grafo $G = (V, E)$ é eulerianiano, então $L(G)$ é euleriano.

    Com vocês.

14. Dado um grafo $G = (V, E)$ e $\omega(G)$ o tamanho do maior completo subgrafo de G, mostre que $\omega(G) \leq \chi \leq \Delta + 1$. Dê duas classes de grafos nas quais $\chi = \Delta + 1$.

    Prova: Você precisa de pelo menos ω cores para colorir o maior completo. Assim, $\omega(G) \leq \chi$. Você consegue colorir qualquer grafo com $\Delta + 1$ cores, onde Δ é o grau máximo, usando o algoritmo para cada vértice v de G colora v com a menor cor em $\{1, 2, 3, \ldots, \Delta, \Delta + 1\}$ que não estiver presente na vizinhança de v.♣

15. Mostre o teorema das 6 cores, isto é se G é planar, então G é 6-colorível.

    Com vocês.

16. Mostre que em todo grafo $G = (V, E)$ colorido com $\chi(G)$ cores satisfaz que para cada cor $c \in \{1, 2, 3, \ldots \chi\}$ existe um vértice $v \in V$ tal que para toda cor c diferente da cor $c(v)$ de v existe um vizinho de v com a cor c.

    Prova: Se não for verdade, você consegue colorir o grafo G com menos cores que χ, uma contradição. ♣