DFT - IF - UERJ
Mecânica Geral
Prof: Marcelo Santos Guimarães
Prova Final - Gabarito

1- Considere uma partícula de massa m se movendo sob a influência de uma força central $\vec{F}(r) = F(r)\hat{r}$.
a) Escreva as equações de movimento (segunda lei de Newton) em coordenadas polares. (1.0)
b) Mostre que a equação para a trajetória, com $r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}$, é: (1,0)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \tag{1}$$

onde $L = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular.
c) Qual é o potencial associado a trajetória $r\theta = C$ onde C é uma constante? (0.5)

Resposta - 1
a) Temos

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) = F(r)\hat{r} \tag{2}$$

observando que, com $\vec{r} = r\hat{r}$:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}.\end{aligned} \tag{3}$$

Obtemos portanto, em termos das componentes em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= F(r)\\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} &= 0\end{aligned} \tag{4}$$

b) A segunda equação em (4) expressa simplesmente a conservação do momento angular $L = mr^2\dot{\theta}$:

$$\frac{dL}{dt} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow L = constante \tag{5}$$

Usando que $r = r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}$, temos

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta} \tag{6}$$

que implica em

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{7}$$

E a segunda equação em (4) fornece

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \Rightarrow & m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}\\ &\Rightarrow -\frac{L^2u^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2u^3}{m}\end{aligned} \tag{8}$$

Ou

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \tag{9}$$

c) Temos que $r\theta = C \Rightarrow u = \frac{\theta}{C}$, e vemos que $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$. Pela eq.(9), obtemos portanto:

$$0 = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{L^2u^3}{m} \tag{10}$$

ou, em termos de r:

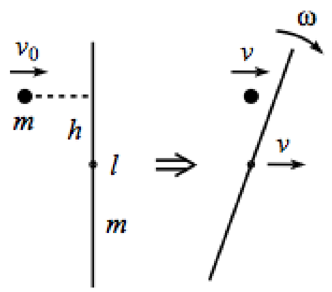
$$F(r) = -\frac{L^2}{mr^3} \tag{11}$$

Essa força está associada ao potencial:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} dr' F(r') = -\frac{L^2}{2mr^2} \tag{12}$$

onde o zero do potencial foi adotado no infinito.

2- Uma partícula de massa m colide perpendicularmente com um palito de mesma massa m, densidade linear de massa uniforme e comprimento l inicialmente em repouso. A colisão é elástica.
a) Mostre que o momento de inércia do palito em relação ao seu centro de massa (localizado no centro do palito) é $I = \frac{1}{12}ml^2$. (0.5)
b) Use as leis de conservação para encontrar a distância h (veja a figura), em relação ao centro de massa do palito, onde a partícula precisa colidir tal que a velocidade da partícula e do centro de massa do palito após a colisão sejam iguais. (2.0)



Resposta - 2
a) O momento de inércia em relação ao centro do palito é dado por

$$I = 2\int_0^{\frac{l}{2}} dx\, \lambda x^2 = 2\frac{m}{l}\frac{l^3}{24} = \frac{1}{12}ml^2 \tag{13}$$

onde x é uma coordenada ao longo do palito e foi usado que a densidade linear de massa é constante: $\lambda = \frac{m}{l}$.
b) Para encontrar h, usamos as leis de conservação. Como só atuam forças internas e a colisão é elástica, o momento linear, o momento angular e a energia se conservam:

- Conservação do momento linear:

$$mv_0 = mv + mv \Rightarrow v = \frac{v_0}{2} \tag{14}$$

- Conservação da energia:

$$\begin{aligned}\frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \\ &= m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega^2\end{aligned}$$

$$(15)$$

de onde obtemos:

$$\omega = \frac{\sqrt{6}v_0}{l} \tag{16}$$

- Conservação do momento angular:

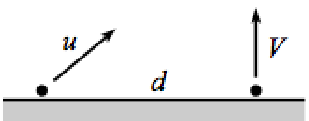
  Definindo a origem do sistema de coordenadas em qualquer ponto, em repouso, ao longo da horizontal que passa pelo centro do palito, temos:

  $$mv_0h = mvh + I\omega \tag{17}$$

  onde apenas as contribuições do momento angular da partícula e do momento angular associado a rotação do palito em torno do centro de massa entram na equação. O momento angular associado ao movimento do centro de massa do palito é nulo, pois a velocidade do centro de massa é paralela ao seu vetor posição em relação ao referencial escolhido.
  Usando os valores de ω e v obtidos anteriormente, temos:

  $$\begin{aligned} mv_0h &= m\frac{v_0}{2}h + \frac{1}{12}ml^2\frac{\sqrt{6}v_0}{l} \\ \Rightarrow h &= \frac{l}{\sqrt{6}} \end{aligned} \tag{18}$$

3- Duas partículas, inicialmente separadas por uma distância d, são lançadas simultaneamente do solo, conforme mostra a figura. A partícula da direita possui velocidade inicial V na direção vertical.
a) Qual deve ser a velocidade inicial $\vec{u}$ (componentes vertical e horizontal) da partícula da esquerda para que ela colida com a partícula da direita quando ambas atingirem suas alturas máximas? (1.5)
b) Qual deve ser o valor de V para que u (o módulo de $\vec{u}$) seja mínimo? (1.0)



Resposta - 3
a) A única força que atua nas partículas é a força peso (exceto na colisão). Portanto é imediato escrever os vetores posição das partículas. Adotando a origem do sistema de coordenadas no solo, na posição inicial da partícula da esquerda, temos para o vetor posição da partícula da esquerda:

$$\begin{aligned} \vec{r}_e(t) &= x_e(t)\hat{e}_x + y_e(t)\hat{e}_y \\ &= u_xt\hat{e}_x + (u_yt - \frac{1}{2}gt^2)\hat{e}_y \end{aligned} \tag{19}$$

e para o vetor posição da partícula da direita temos

$$\begin{aligned} \vec{r}_d(t) &= x_d(t)\hat{e}_x + y_d(t)\hat{e}_y \\ &= d\hat{e}_x + (Vt - \frac{1}{2}gt^2)\hat{e}_y \end{aligned} \tag{20}$$

As velocidades em qualquer instante são obtidas derivando essas expressões.
Como as partículas colidem na altura máxima, esta será a mesma para ambas. Na altura máxima a velocidade vertical se anula e portanto, neste instante, devemos ter para a partícula da direita:

$$V = gt_{max} \tag{21}$$

Da mesma forma, a velocidade vertical da partícula da esquerda será nula em $t = t_{max}$ e portanto:

$$u_y = gt_{max} = V \tag{22}$$

Para que ocorra a colisão, a posição horizontal das partículas tem que ser a mesma em $t = t_{max}$, logo:

$$u_x t_{max} = d \Rightarrow u_x = \frac{dg}{V} \tag{23}$$

Portanto, para que ocorra a colisão, a velocidade inicial da partícula da esquerda tem que ser:

$$\vec{u} = \frac{dg}{V}\hat{e}_x + V\hat{e}_y \tag{24}$$

b) Temos que expressar u como função de V:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\frac{d^2g^2}{V^2} + V^2} \tag{25}$$

Para que u seja mínimo como função de V devemos ter $\frac{du}{dV} = 0$ e $\frac{d^2u}{dV^2} > 0$.

$$\frac{du}{dV} = \frac{V - \frac{d^2g^2}{V^3}}{\sqrt{\frac{d^2g^2}{V^2} + V^2}} = 0 \Rightarrow V = \sqrt{dg} \tag{26}$$

e de fato

$$\left.\frac{d^2u}{dV^2}\right|_{V=\sqrt{dg}} = 2\sqrt{\frac{2}{dg}} > 0 \tag{27}$$

4- Considere uma partícula de massa m se movendo no plano sob a influência do potencial:

$$U(x,y) = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right) - \alpha xy \tag{28}$$

onde k e α são constantes reais positivas e $k > \alpha$.
a) Encontre a força que age na partícula e escreva a equação de movimento. (1.0)
b) Quais são as frequências dos modos normais de oscilação? (1.5)

Resposta - 4
a) A força que age na partícula é dada por:

$$\vec{F} = -\nabla U(x,y) = (-kx + \alpha y)\hat{e}_x + (-ky + \alpha x)\hat{e}_y \tag{29}$$

e portanto as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + \alpha y \\ m\ddot{y} &= -ky + \alpha x \end{aligned} \tag{30}$$

b) Os modos normais podem ser identificados imediatamente como a combinação linear que diagonaliza as equações acopladas acima: $q_1 = x + y$ e $q_2 = x - y$. Em termos de q_1 e q_2 as equações ficam:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -(k-\alpha)q_1 \\ m\ddot{q}_2 &= -(k+\alpha)q_2 \end{aligned} \tag{31}$$

Vemos que o modo q_1 oscila com frequência $\omega_1 = \sqrt{\frac{(k-\alpha)}{m}}$ e o modo q_2 oscila com frequência $\omega_2 = \sqrt{\frac{(k+\alpha)}{m}}$.