Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Domínio, curva de nível e gráfico
de função real de duas variáveis
Domínio e superfície de nível
de função real de três variáveis

LISTA 1 - 2007-2

Nos exercícios 1. a 8. descreva e esboce o domínio da função real de duas ou de três variáveis, isto é, descreva analiticamente e represente geometricamente o maior subconjunto do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$ que torna a expressão que define a função, verdadeira em $\mathbb{R}$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
2. $f(x,y) = \ln x + \ln y$
3. $f(x,y) = \sqrt{|x| - |y|}$
4. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
5. $f(x,y) = \ln(xy - 1)$
6. $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x - y)$
7. $f(x,y,z) = y + \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$
8. $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}}{\sqrt{1 - z^2}}$

9. Considere a função de duas variáveis

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) = x^2 + y^2 \end{array}$$

definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$. Faça um esboço do gráfico de f em cada um dos três casos abaixo.

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}$.

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$.

Aqui é só substituir o ponto na função para determinar o valor de C.

10. Considere a função

$$z = f(x,y) = \ln\left(e^{x+y} - 1\right).$$

(a) Escreva a equação da curva de nível de f que passa pelo ponto $(8,2)$ e da curva de nível que passa pelo ponto $(-2,3)$.

(b) Mais geralmente, escreva a equação da curva de nível de f que passa pelo ponto (a,b), com $b > -a$.

(c) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 2$ é constante, isto é, que $y = -x + 2$ é uma curva de nível de f.

(d) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 3$ é constante, isto é, que $y = -x + 3$ é uma curva de nível de f.

(e) Se, por um momento, f representasse um lucro e você fosse um empresário, sob qual reta você gostaria de estar: $y = -x + 2$ ou $y = -x + 3$? Justifique sua resposta.

Nos exercícios 11. a 18. esboce as curvas de nível e o gráfico da função dada.

11. $f(x,y) = 8 - 2x - y$
12. $f(x,y) = x^2 - y$
13. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$
14. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
15. $f(x,y) = e^{-x^2 - y^2}$
16. $f(x,y) = xy$
17. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$
18. $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$

19. Na figura (1) temos, respectivamente, o desenho das curvas de nível das seis funções a seguir. Faça a associação destas seis curvas de nível com cada um dos seis gráficos apresentados na figura (2).

    (a) $z = f_1(x, y) = \text{sen}\,(xy)/(xy)$,
    (b) $z = f_2(x, y) = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$,
    (c) $z = f_3(x, y) = 15\,x^2y^2e^{-x^2-y^2}/(x^2 + y^2)$,
    (d) $z = f_4(x, y) = (xy^3 - x^3y)/2$,
    (e) $z = f_5(x, y) = \text{sen}\,(\sqrt{x^2 + y^2})$,
    (f) $z = f_6(x, y) = (y^4 - 8\,y^2 - 4\,x^2)/21$.

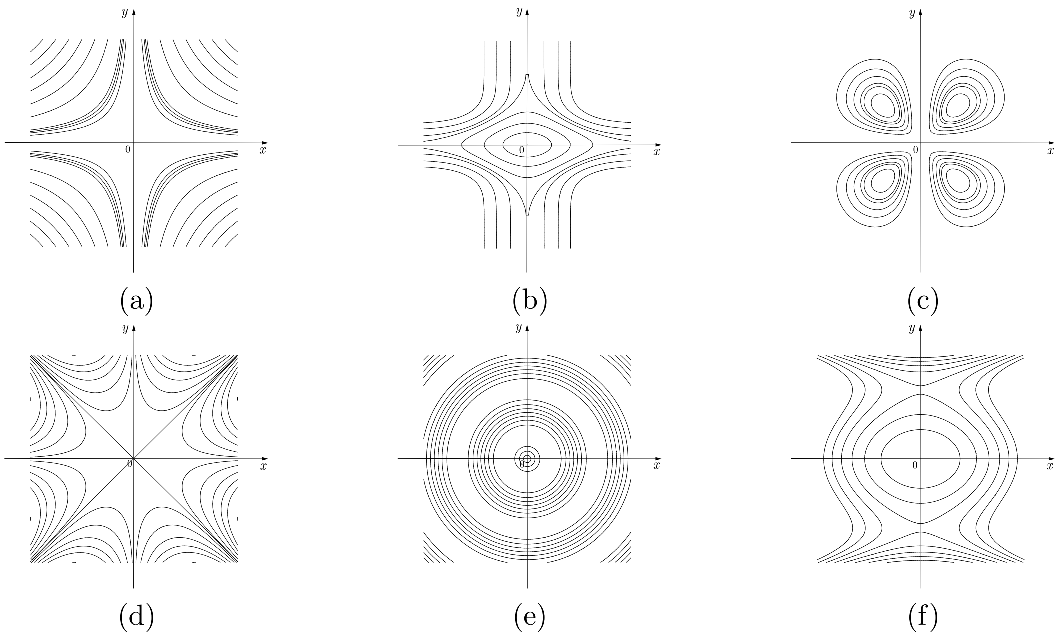


Figura 1: Curvas de nível de seis funções diferentes.

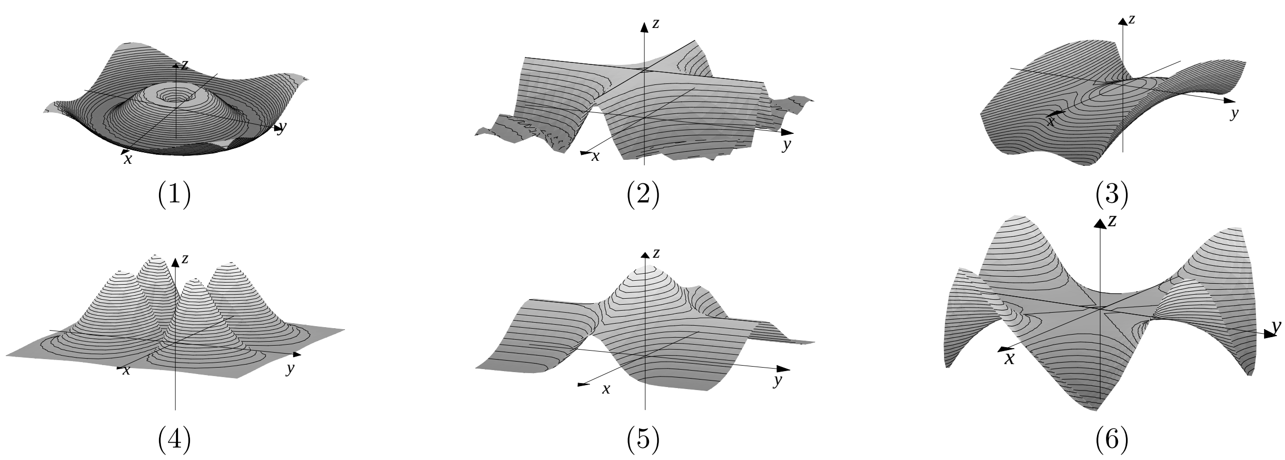


Figura 2: Gráfico de seis funções diferentes.

Nos exercícios 20. a 23. utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de cada uma das funções abaixo f associada ao nível $w = 0$. Se preciso, leia o comentário a seguir para resolver esses exercícios.

20. $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$

21. $w = f(x, y, z) = x^2 - y$

22. $w = f(x, y, z) = x^2 + 2 - z$

23. $w = f(x, y, z) = |y| - z$

Comentário: **(Superfícies cilíndricas)** Todas estas superfícies de nível têm algo em comum: apesar de f depender de três variáveis, apenas *duas* aparecem na expressão algébrica que define f. Mais especificamente, temos

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & w = f(x,y,z) = g(x,y) \end{array}, \qquad \text{onde} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

para o caso onde é a variável "z" que está faltando na definição de f. Como você deve ter percebido, para desenhar uma superfície de nível $w = k$ de uma função deste tipo, basta desenhar a curva de nível $g(x, y) = k$ de g no plano xy e então, sobre cada ponto desta curva, desenhar uma reta perpendicular ao plano xy (veja a figura abaixo). Os casos onde a variável "x" ou a variável "y" estão faltando são tratados de maneira análoga. Estas superfícies de nível são denominadas *superfícies cilíndricas*.

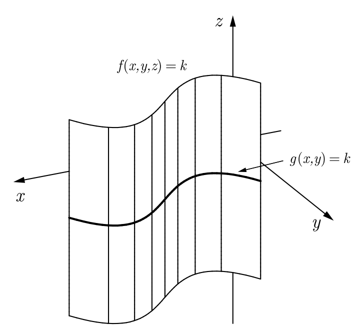


Figura 3: Uma superfície cilíndrica.

Em cada um dos exercícios 24. a 31. chame de n o nível da função dada e encontre todos os possíveis valores de n. Chame de $\mathcal{C}_n(f)$ o conjunto de nível n de f e descreva analiticamente todos os possíveis conjuntos de nível n da função dada e ainda, se for possível, represente-os geometricamente.

24. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(xy)$

25. $f(x, y) = x^2 + y^2 - z^2$

26. $f(x, y, z) = x + y + z$

27. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

28. $f(x, y) = x^2 + y^2$

29. $f(x, y) = \dfrac{x}{y - 1}$

30. $f(x, y, z, w) = \dfrac{\sqrt{x - y}}{z - w}$

31. $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$

32. $f(x, y) = \arctan\left(x^2 + y^2\right)$

33. O desenho de uma esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1 pode ser o gráfico de alguma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis? Justifique sua resposta.

34. As superfícies de nível da função $w = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ associadas aos níveis $w = -2$, $w = 0$ e $w = 2$ podem se cortar? Justifique sua resposta!

35. Resolva as questões abaixo.

    (a) Considere a função $w = f(x) = x^2$. Determine os conjuntos de nível de f e faça um esboço de seu gráfico.

    (b) Considere a função $w = g(x, y) = x^2$. Determine as curvas de nível de g e faça um esboço de seu gráfico.

    (c) Considere a função $w = h(x, y, z) = x^2$. Determine as superfícies de nível de h.

    (d) Suponha que você chegue em uma sala de aula onde a única sentença escrita no quadro é: *"Faça um esboço do gráfico da função $w = x^2$!"*. Que desenho você faria?

36. Resolva as questões abaixo.

    (a) Faça o gráfico da função $y = f(x) = x^2$. Escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f.

    (b) Mais geralmente, dada uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f. O que você pode dizer a respeito das curvas de nível de F para níveis diferentes de 0?

    (c) Seja $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f.

    (d) Mais geralmente, dada uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f. O que você pode dizer a respeito das superfícies de nível de F para níveis diferentes de 0?

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

37. Uma chapa plana de metal está situada no plano xy de modo que a temperatura T (em °C) no ponto (x, y) é inversamente proporcional à distância da origem $(0, 0)$.

    (a) Descreva as *isotérmicas*, isto é, as curvas de nível de T que representam pontos onde a temperatura é constante.

    (b) Se a temperatura no ponto $(4, 3)$ é 40°C, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20°C.

38. O potencial elétrico V no ponto (x, y, z) é dado por

$$V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}.$$

    (a) Descreva as *superfícies eqüipotenciais*, isto é, as superfícies de nível de V que representam pontos onde o potencial elétrico é constante.

    (b) Ache a equação da superfície eqüipotencial $V = 120$.

39. De acordo com a *lei de gravitação universal* de Newton, se uma partícula de massa m_0 está na origem $(0, 0, 0)$ de um sistema de coordenadas xyz, então o módulo F da força exercida sobre uma partícula de massa m situada no ponto (x, y, z) é dada por

$$F = G \cdot \frac{m_0 \cdot m}{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde G é a constante de gravitação universal. F depende de quantas variáveis? Se $m_0 = 1.99\,10^{30}$ kg e $m = 5.98\,10^{24}$ kg, descreva as superfícies de nível da função resultante. Qual é o significado físico dessas superfícies de nível?

40. De acordo com a *lei dos gases ideais*, a pressão P, o volume V e a temperatura T de um gás confinado estão relacionados pela equação

$$P \cdot V = k \cdot T,$$

para uma constante k. Expresse P como função de V e T e descreva as curvas de nível associadas a esta função. Qual é o significado físico dessas curvas de nível?

41. A pressão atmosférica nas proximidades do solo em uma certa região é dada por

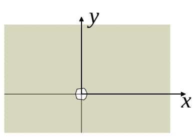
$$p(x,y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c,$$

com a, b e c constantes positivas. Descreva as isobáricas (curvas de nível de p) para pressões superiores a c.

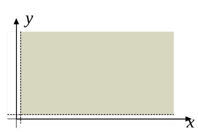
RESPOSTAS DA LISTA 1

1. $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ e } y > 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -|x| \le y \le |x|\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 1\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - 1 \le y \le x + 1\}$
7. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 25\}$
8. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ |x| \le 2,\ \ |y| \le 3,\ \ |z| < 1\}$

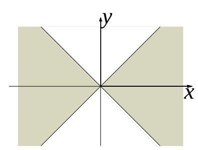
1.



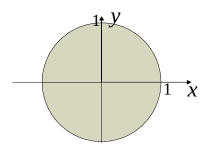
2.



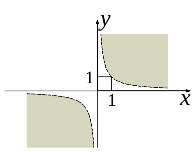
3.



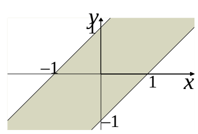
4.



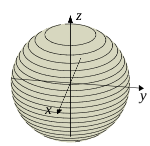
5.



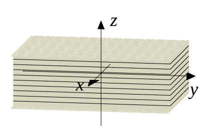
6.



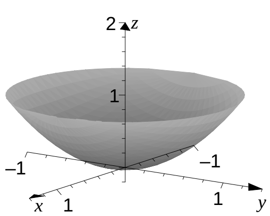
7.



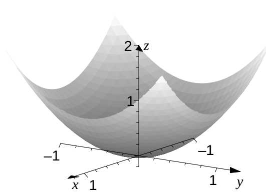
8.



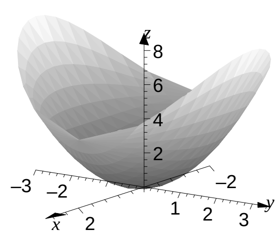
9.



(a)



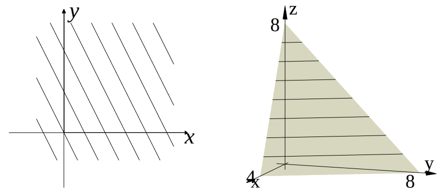
(b)



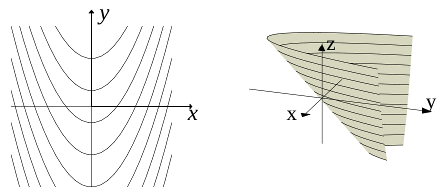
(c)

10. (a) pelo ponto $(8,2)$, reta $x + y = 10$, pelo ponto $(-2,3)$, reta $x + y = 1$
    (b) $x + y = a + b$
    (c) $y = 2 - x \Rightarrow f(x,y) = f(x, 2-x) = \ln\left(e^{x+2-x} - 1\right) = \ln\left(e^2 - 1\right) = \text{constante}$
    (d) $y = 3 - x \Rightarrow f(x,y) = f(x, 2-x) = \ln\left(e^{x+3-x} - 1\right) = \ln\left(e^3 - 1\right) = \text{constante}$
    (e) $y = -x + 3$. Podemos afirmar que $\ln\left(e^3 - 1\right) > \ln\left(e^2 - 1\right)$ pois as funções $F(t) = e^t$ e $G(t) = \ln t$ são estritamente crescentes.

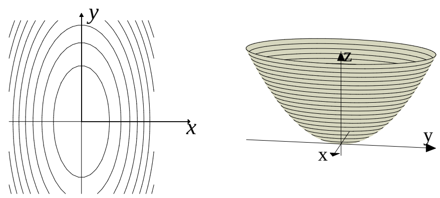
11.



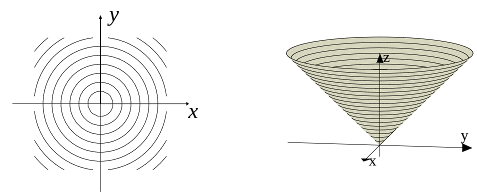
12.



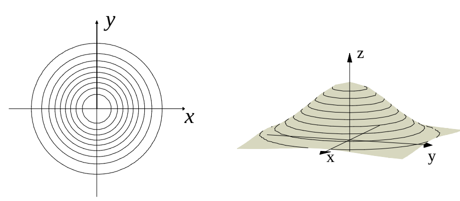
13.



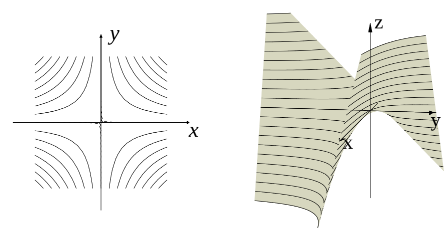
14.



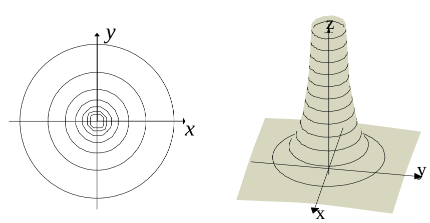
15.



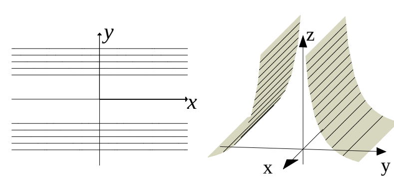
16.



17.

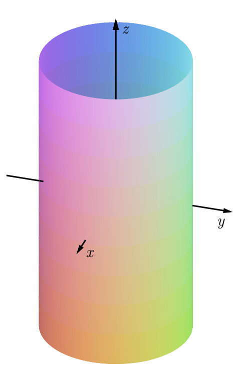


18.

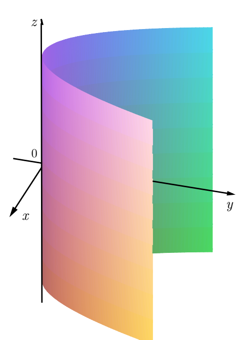


19. (1)$-$(e) (2)$-$(a) (3)$-$(f) (4)$-$(c) (5)$-$(b) (6)$-$(d)

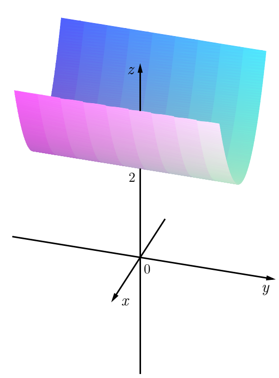
20.



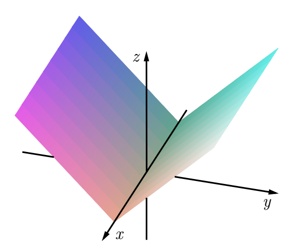
21.



22.



23.



24. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq xy \leq 1 \text{ e } xy = \operatorname{sen} n\right\}, \ -\dfrac{\pi}{2} \leq n \leq \dfrac{\pi}{2}$, $n = 0$: retas $x = 0$ e $y = 0$; $n > 0$: hipérboles com vértices na reta $y = x$; $n < 0$: hipérboles com vértices na reta $y = -x$.

25. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2 + n\right\}, \ \forall n \in \mathbb{R}$, $n = 0$: cone de duas folhas, $n > 0$: hiperbolóide de uma folha, $n < 0$: hiperbolóide de duas folhas.

26. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = n\right\}, \ \forall n \in \mathbb{R}$, planos paralelos.

27. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2 + n\right\}, \ \forall n \in \mathbb{R}$, parabolóides com vértices no eixo z.

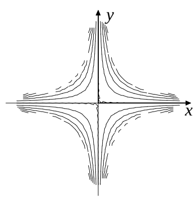
28. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 1 \text{ e } x = n(y-1)\right\}, \ \forall n \in \mathbb{R}$, retas furadas e concorrentes em $(0,1)$.

29. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; x \geq y, \ z \neq w \text{ e } x - y = n^2(z-w)^2\right\} \quad \forall n \in \mathbb{R}$, não existe representação geométrica.

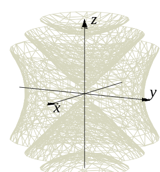
30. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \operatorname{sen} x = n\right\}, n \in \mathbb{R}, n = 0$: retas $y = 0$, $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}; n \neq 0$: gráfico de $y = n \csc x$.

31. $\mathcal{C}_n(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = \tan n\right\}, 0 \leq n < \pi/2$, $n = 0$: $(0,0)$, $n > 0$: circunferências de centro $(0,0)$.

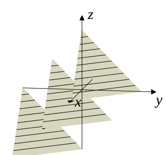
24.



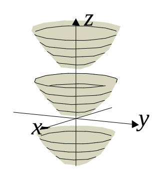
25.



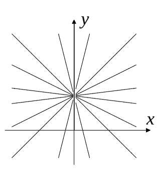
26.



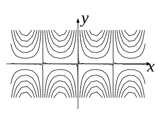
27.



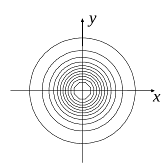
28.



30.



31.



36. (a) Circunferências de centro na origem
    (b) Circunferência de raio 10 com centro na origem

37. (a) As superfícies eqüipotenciais, de potências $k > 0$, são elipsóides de semi-eixos $a = \dfrac{6}{k}$, $b = \dfrac{3}{k}$ e $c = \dfrac{4}{k}$, nos eixos x, y e z, respectivamente.
    (b) $400x^2 + 1600y^2 + 3600z^2 = 1$

38. Depende de 4 variáveis, a saber, as coordenadas x, y e z do ponto onde está localizada a partícula e a sua massa m. As equações das superfícies de nível com força escalar constante e igual a k são esferas de centro na origem e raios $\dfrac{1}{k}(1.99)(5.98)10^{54}$.

39. As curvas de nível são semi-retas no sistema VOT, concorrentes na origem O, mas sem conter a origem $(V > 0)$. As curvas de nível representam gases com mesma pressão e diz que quando os gases estão confinados sob pressão constante, o volume varia linearmente com a temperatura.

40. As isobáricas de pressão $k > c$ são elipses com centro na origem do sistema de eixos no plano e cujos semi-eixos são $a = \sqrt{\dfrac{k-c}{a}}$ e $b = \sqrt{\dfrac{k-c}{b}}$, sobre os eixos x e y, respectivamente.