Instituto de Computação - Universidade Federal Fluminense
Teoria dos Grafos - Lista de exercícios

1 Conceitos

1. Prove o Teorema da Amizade: em qualquer festa com pelo menos seis pessoas, ou três se conhecem mutuamente, ou três não se conhecem mutuamente.

2. Prove ou refute: se G é um grafo conexo, então dois caminhos de comprimento máximo de G possuem necessariamente pelo menos um vértice em comum.

3. Prove ou refute: se G é um grafo contendo exatamente dois vértices de grau ímpar, então existe necessariamente um caminho ligando estes dois vértices em G.

4. Mostre que em uma festa com n ($n \geq 2$) pessoas, existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.

5. Um grafo k-partido é tal que seus vértices podem ser particionados em k conjuntos $V_1, V_2, .., V_k$, de tal maneira que dois vértices pertencentes um mesmo subconjunto V_i são sempre não adjacentes. Um grafo k-partido completo é aquele em que todo par de vértices pertencentes a partes distintas é adjacente. Um grafo k-partido completo em que cada parte possua $\lfloor n/k \rfloor$ ou $\lceil n/k \rceil$ vértices é denominado *grafo de Turán* e denotado por $T_{k,n}$.

   (i) Determinar o número de arestas de $T_{k,n}$

   (ii) Mostrar que se G é um grafo k-partido completo então $|E(G)| \leq |T_{k,n}|$.

6. Prove que para todo grafo G vale $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.

7. Se G possui vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, a seqüência $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ é denominada *seqüência de graus* de G.

   (i) Existe um multigrafo com a seguinte seqüência de graus: (3,3,3,3,5,6,6,6,6)?

(ii) Existe um multigrafo com a seguinte seqüência de graus: (1,1,3,3,3,3,5,6,8,9)?

(iii) Existe um grafo (simples) com a seqüência de graus do ítem anterior?

(iv) Demonstre que a seqüência $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de inteiros não negativos é uma seqüência de graus de algum multigrafo se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

8. Um grafo (simples) é *auto-complementar* se $G \cong \overline{G}$.

   (i) Dê dois exemplos de pares de grafos auto-complementares.

   (ii) Prove que um grafo auto-complementar tem $4k$ ou $4k+1$ vértices, para k um inteiro não negativo.

2 Árvores

9. Mostre que se G é uma árvore com $\Delta(G) \geq k$, então G contém pelo menos k folhas.

10. Desenhe todas as árvores não isomorfas com 7 vértices.

11. Prove que um grafo é uma floresta se e somente se o seu número de arestas é igual ao seu número de vértices menos o seu número de componentes conexas.

12. Seja G um grafo conexo e e uma aresta de G. Mostre que e está em toda árvore geradora de G se e somente se e é uma ponte de G.

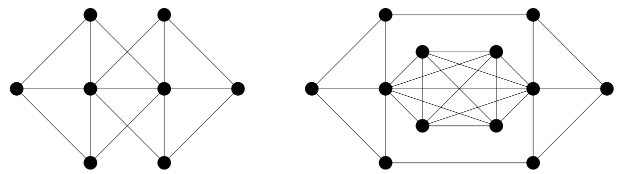
13. Mostre que se G tem exatamente uma árvore geradora T então $G = T$.

14. Mostre que qualquer grafo $G = (V, E)$ contém pelo menos, $m - n + w$ ciclos distintos, onde $|V| = n$, $|E| = m$, e w é o número de componentes conexas de G.

15. A cintura de um grafo G é o comprimento de seu menor ciclo. Se G for acíclico, sua cintura é infinita. Mostre que um grafo k-regular de cintura 4 possui pelo menos $2k$ vértices.

3 Conectividade

16. Determine $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$ para os grafos abaixo. Para cada p, que grafos são p-conexos em vértices? Que grafos são p-conexos em arestas?



17. Prove: qualquer conjunto de 7 arestas no grafo $K_{3,3}$ é um conjunto desconectante, mas não um corte.

18. Prove que se G é 3-regular, então $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

19. Prove que o grafo de Petersen é 3-conexo em vértices.

20. Um cacto é um grafo conexo no qual todo bloco é uma aresta ou um ciclo. Prove que o número máximo de arestas num cacto com n vértices é $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$. Dica: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

4 Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

21. Existe algum grafo euleriano com n par e m ímpar? Em caso positivo, descreva-o. Caso negativo, justificar a não existência.

22. Se G é um grafo euleriano com arestas e_1 e e_2 que têm um vértice em comum, então G tem um circuito euleriano no qual e_1 e e_2 aparecem consecutivamente? Prove, se for verdadeiro. Caso contrário justifique convenientemente.

23. Uma *grade de dimensão* $p \times q$ (p, q inteiros) é um grafo G em que $V(G)$ é o subconjunto dos pontos de coordenadas inteiras (x, y), $1 \leq x \leq p$ e $1 \leq y \leq q$, e tal que se dois vértices são adjacentes então a distância entre os pontos respectivos é um. Uma *grade completa* contém todas as arestas possíveis.

    Mostre que uma grade completa é um grafo hamiltoniano se e somente se $p.q$ for par.

24. Um grafo G é *hipo-hamiltoniano* quando $G - v$ é hamiltoniano para todo vértice v, mas G não o é. Justificar porque o grafo de Petersen é hipo-hamiltoniano.

5 Emparelhamentos

25. Determine condições necessárias e suficientes para que uma árvore possua um emparelhamento perfeito.

26. Duas pessoas disputam um jogo sobre um grafo G escolhendo alternadamente vértices distintos $v_1, v_2, \ldots$ formando um caminho. Ganha quem for a última a conseguir escolher um vértice.

    (a) Mostre que quem começa o jogo tem um estratégia vencedora caso G não tenha emparelhamento perfeito.

    (b) Mostre que a segunda a jogar tem uma estratégia vencedora caso G tenha um emparelhamento perfeito.

27. Um *k-fator* de G é um subgrafo gerador k-regular de G. Um grafo é *k-fatorável* se existirem k-fatores disjuntos em arestas $H_1, H_2, ..., H_p$, tal que $G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_p$. Responda, justificando

    (i) $K_{n,n}$ é 1-fatorável?

    (ii) $K_{4,4}$ é 2-fatorável?

28. Seja um tabuleiro de xadrez de dimensão 8×8, em que dois cantos opostos (isto é, os extremos 1×1 de uma mesma diagonal) foram retirados. Moste que é impossível cobrir este tabuleiro com retângulos de dimensão 1×2.

6 Coloração de arestas

29. Pinte as arestas de $K_{m,n}$ com Δ cores.

30. Prove que se um grafo G tem $2k+1$ vértices e mais do que $k.\Delta$ arestas, então $\chi'(G) = \Delta + 1$.

31. Seja G um grafo cúbico hamiltoniano. Mostre que $\chi'(G) = 3$.

32. Mostre que se G é um grafo não vazio, regular e tal que $|V(G)|$ é ímpar então $\chi'(G) = \Delta + 1$.

33. Descrever um método algorítmico para colorir as arestas de um grafo bipartido com Δ cores.

7 Coloração de vértices

34. Suponha que quaisquer dois ciclos ímpares de um grafo G possuem pelo menos um vértice em comum. Mostre que $\chi(G) \leq 5$.

35. Prove: se toda aresta de G ocorre no máximo em um ciclo, então $\chi(G) \leq 3$.

36. Mostre que existe uma ordenação dos vértices de G tal que o método guloso de coloração aplicado a esta ordenação usa $\chi(G)$ cores.

37. Sejam $G_3, G_4, \ldots$ os grafos obtidos de $G_2 = K_2$, usando a construção de Mycielski. Mostre que cada G_k é k-crítico.

38. Um grafo G é *unicamente k-colorível* se quaisquer duas k-colorações de G induzem a mesma partição de V (isto é, coincidem a menos de uma permutação de cores). Mostre que nenhum corte de vértices de um grafo k-crítico induz um subgrafo unicamente $(k-1)$-colorível.

8 Planaridade

39. Mostre que todo grafo planar é 6-colorível em vértices.

40. Mostre que se G é um grafo conexo planar com cintura $k \geq 3$, então $m \leq \frac{k(n-2)}{k-2}$. (Obs: A cintura de um grafo G é o comprimento de seu menor ciclo.) Use este fato para mostrar que o Grafo de Petersen não é planar.

41. Construa um grafo planar auto-complementar com oito vértices.

42. Seja T uma árvore geradora de uma representação plana G de um grafo planar conexo, G^* seu grafo dual, e seja $E^* = \{e^* \in E(G^*) | e \notin E(T)\}$. Mostre que $T^* = G^*[E^*]$ é uma árvore geradora de G^*.

9 Digrafos

43. Mostre que se um digrafo é acíclico então ele possui pelo menos uma fonte e pelo menos um sumidouro.

44. Mostre que todo torneio que não possui vértice com grau de entrada 0 tem pelo menos dois reis.

45. Mostre que se D é um digrafo (simples) então D contém um caminho direcionado de tamanho pelo menos $\max\{\delta^+, \delta^-\}$.