uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 2 - 2007-2
Limite e continuidade de
de função real de várias variáveis

Em cada exercício de 1. a 15. calcule L, o limite, quando existir. Caso contrário, justifique.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x}{x+y}$
4. $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y+z^2}{x^4+y^2+z^3}$
6. $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(1,1)} \frac{u^2-2u+1}{u^2-v^2-2u+2v}$
7. $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s^3-t^3}{s^2+t^2}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1}{x^2+y-1}$
9. $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}$
11. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2z}{x^2+y^2+z^2}$
12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2-y^2\right)}{x+y}$
13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2\right)$
14. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(x+1)+(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$
15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$

Nos exercícios 16. a 20. obtenha o "maior" subconjunto do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, no qual a função é contínua.

16. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$
17. $f(x,y) = x^3+y^2+xy$
18. $f(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)+\cos(xy)}{x^2+y^2+z^2-4}$
19. $f(x,y,z) = \sqrt{2-x^2-y^2-z^2}$
20. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

21. Considere a função $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot y^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$
    (a) Mostre que $f_1(t) = f(t,p)$ e $f_2(t) = f(p,t)$ são funções contínuas em t para cada valor de p fixo.
    (b) Mostre que f, por sua vez, não é contínua em $(0,0)$.

22. A função f tal que $f(x,y) = \dfrac{1}{|x+y-1|}$ é contínua?

23. Dê três exemplos de funções contínuas e três exemplos de funções descontínuas definidas em $\mathbb{R}^2$.

RESPOSTAS DA LISTA 2 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $L = 0$. (Podem ser aplicadas as propriedades algébricas de limite).
2. $L = 0$. (O numerador e denominador podem ser multiplicados por y, depois separa-se como produto de dois limites. Para calcular um desses limites, toma-se $u = xy$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \to (0, 0)$ com $u \to 0$, e aplica-se o limite trigonométrico fundamental).
3. $\nexists\, L$, pois tendendo-se pelas curvas $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t), t > 0$, os limites são diferentes.
4. $\nexists\, L$, idem ao 3.
5. $\nexists\, L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (t, 0, 0), t > 0$, o limite tende a $+\infty$ (ou $t < 0$, tende a $-\infty$).
6. $\nexists\, L$, pois tendendo-se pela curvas $\gamma_1(t) = (t+1, 1)$ e $\gamma_2(t) = (1, t+1), t > 0$, os limites são diferentes. $u = x(y-2)$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \to (1, 2)$ com $u \to 0$, e calcula-se um limite trigonométrico).
7. $L = 0$. (Escrevendo como diferença de limites, em cada um pode ser aplicado o teorema do anulamento).
8. $\nexists\, L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (0, t + 1), t > 0$, o limite tende $+\infty$ (ou $t < 0$, tende a $-\infty$).
9. $\nexists\, L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (0, t)$, esse limite não existe.
10. $L = 0$. (Pode ser aplicado o teorema do anulamento).
11. $L = 0$. (Pode ser aplicado o teorema do anulamento).
12. $L = 0$. (O numerador e denominador podem ser multiplicados por $x - y$, depois separa-se como produto de dois limites. Para calcular um desses limites, toma-se $u = x^2 - y^2$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \to (0, 0)$ com $u \to 0$, e aplica-se o limite trigonométrico fundamental).
13. $\nexists\, L, L \to +\infty$, toma-se $u = x^2 + y^2$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \to (0, 0)$ com $u \to 0$, e aplica-se a regra de L'Hôpital.
14. $L = 1$. (A função pode ser escrita como soma de duas funções, uma delas é simplificada e igual a 1. Para calcular o limite da outra função pode ser aplicado o teorema do anulamento).
15. $\nexists\, L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (t, 0)$, esse limite não existe.
16. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq y\}$
17. $\mathbb{R}^2$
18. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 4\}$
19. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$
20. $\mathbb{R}^2$
21. (a) Para $p = 0$ tem-se $f_1(0) = f(0, 0) = 0$ e para $t \neq 0$, $f_1(t) = f(t, 0) = \dfrac{t \cdot 0}{t^2 + 0} = 0$, logo $f_1(t) = 0, \forall t$, donde conclui-se que $f_1(t)$ é contínua (função constante nula é contínua).

    Para $p \neq 0$ tem-se $f_1(t) = f(t, p) = \dfrac{t \cdot p^2}{t^2 + p^4}$ e como $t^2 + p^4 \neq 0, \forall t$ conclui-se que $f_1(t)$ é contínua pois é quociente de funções polinomiais em t, que são contínuas.

    Analogamente, $f_2(t)$ é contínua.

    (b) $\nexists\, L$, pois tendendo-se pelas curvas $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (t^2, t)$, os limites são diferentes. Se não existe o limite em $(0, 0)$ então f não é contínua em $(0, 0)$.
22. Sim. É quociente de contínuas (a função do numerador é contínua porque é constante e a função do denominador é contínua porque é composta de contínuas).