



# Teoria dos Grafos

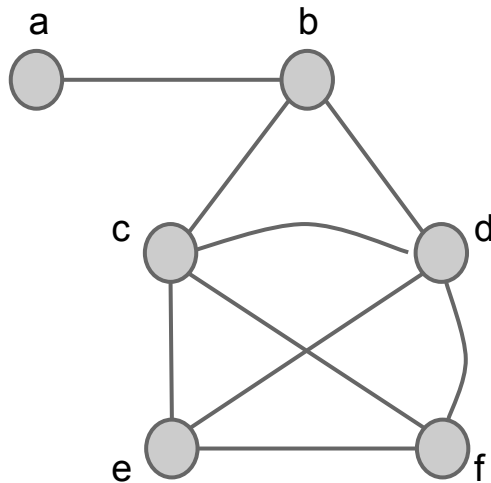
## Conectividade

versão 1.3

Prof. DSc. Fabiano Oliveira  
[fabiano.oliveira@ime.uerj.br](mailto:fabiano.oliveira@ime.uerj.br)

# Conectividade

- **Def.:**  $E \subseteq E(G)$  é um conjunto de **arestas de corte** se  $\omega(G) < \omega(G - E)$
- **Def.:**  $E \subseteq E(G)$  é um **corte de arestas** se  $G - E$  é desconexo.



Exemplos de cortes de arestas:

$\{ab\}$ ,  $\{bc, bd\}$ ,  
 $\{ce, cd, bd, cf\}$

Exemplos que não o são:

$\{bc\}$ ,  $\{bc, de, df\}$

# Conectividade

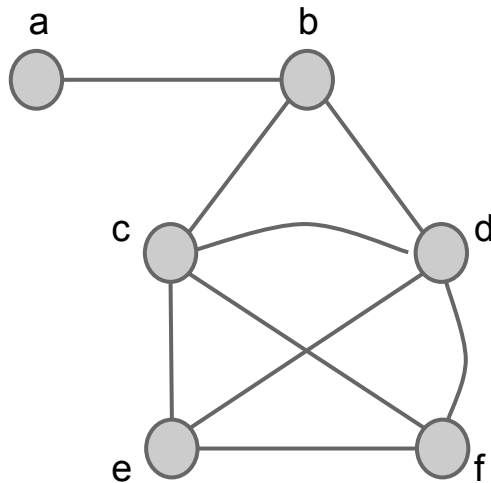
- **Def.:**  $E \subseteq E(G)$  é um conjunto de **arestas de corte** se  $\omega(G) < \omega(G - E)$
- **Def.:**  $E \subseteq E(G)$  é um **corte de arestas** se  $G - E$  é desconexo.

## Exercícios:

- Qual o tamanho de um corte de arestas mínimo de um  $K_n$ ? e de um corte minimal máximo?
- Qual o tamanho de um corte de arestas mínimo de um  $C_n$ ? e de um corte de arestas minimal máximo de um  $C_n$ ?

# Conectividade

- **Def.:**  $V \subseteq V(G)$  é um conjunto de **vértices de corte** se  $\omega(G) < \omega(G - V)$
- **Def.:**  $V \subseteq V(G)$  é um **corte de vértices** se  $G - V$  é desconexo.



Exemplos de cortes de vértices:

$\{b\}$ ,  $\{c, d\}$

Exemplos que não o são:

$\{a\}$ ,  $\{c, f\}$

# Conectividade

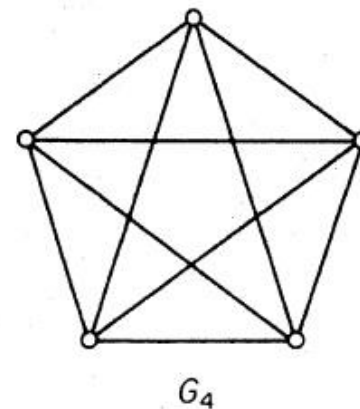
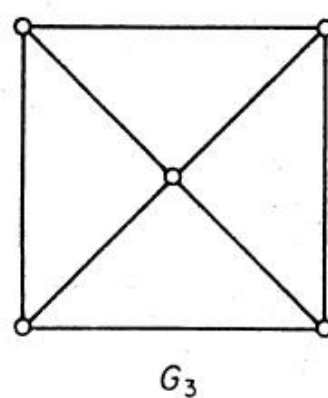
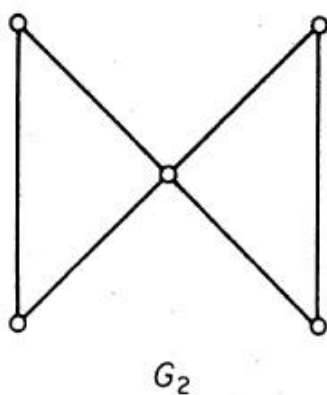
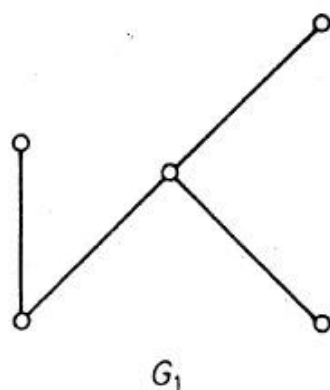
- **Def.:**  $V \subseteq V(G)$  é um conjunto de ***vértices de corte*** se  $\omega(G) < \omega(G - V)$
- **Def.:**  $V \subseteq V(G)$  é um ***corte de vértices*** se  $G - V$  é desconexo.

## Exercícios:

- Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um  $C_n$ ?
- Qual o tamanho de um corte de vértices mínimo de um  $K_n$ ?

# Conectividade

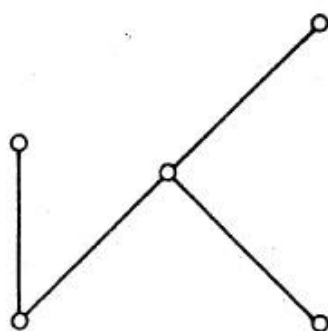
- Considere agora os seguintes grafos



Note que o grau de conectividade não é a mesmo para todos, embora todos sejam grafos conexos em 5 vértices.

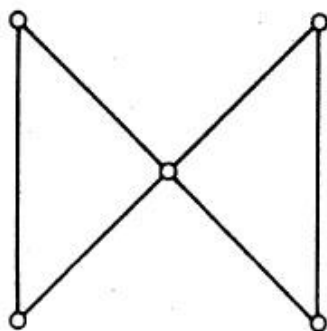
# Conectividade

- **Def.:** A **conectividade** de um grafo  $G$  (denotado por  $\kappa(G)$ ) é igual ao tamanho do corte de vértices mínimo ou, na inexistência de corte de vértices, definido como  $n-1$ .



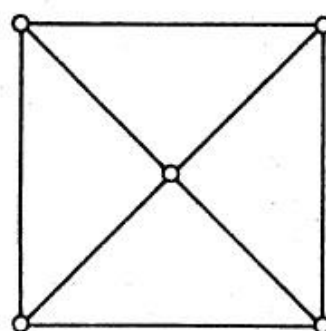
$G_1$

$$\kappa(G_1) = 1$$



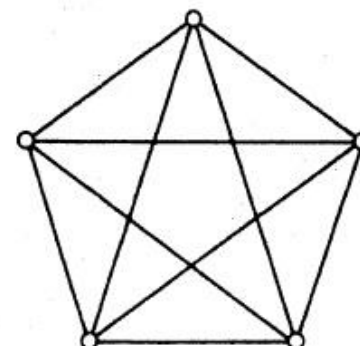
$G_2$

$$\kappa(G_2) = 1$$



$G_3$

$$\kappa(G_3) = 3$$

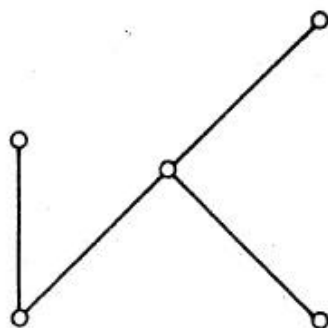


$G_4$

$$\kappa(G_4) = 4$$

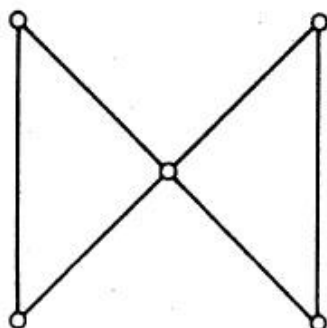
# Conectividade

- **Def.:** Um grafo  $G$  é dito ***k-conexo*** se  $\kappa(G) \geq k$ .



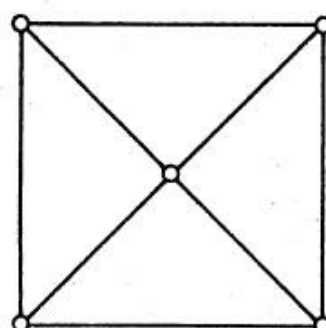
$G_1$

0- e 1-conexo



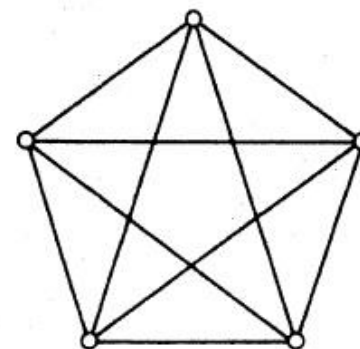
$G_2$

0- e 1-conexo



$G_3$

0-, 1-, 2- e 3-  
conexo



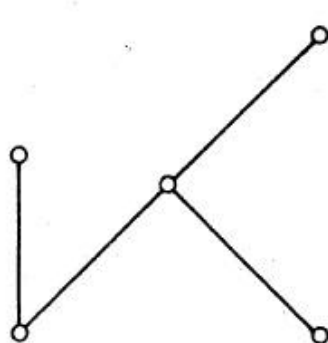
$G_4$

0-, 1-, 2-, 3- e  
4-conexo



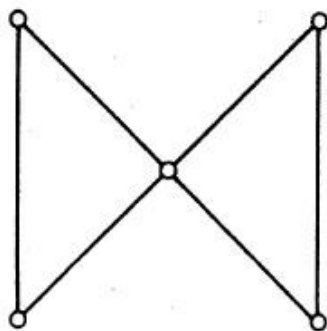
# Conectividade

- **Def.:** A **conectividade em arestas** de um grafo  $G$  (denotado por  $\kappa'(G)$ ) é definido como zero para grafos triviais ou, caso contrário, igual ao tamanho do corte de arestas mínimo.



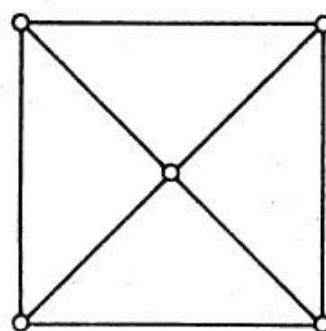
$G_1$

$$\kappa'(G_1) = 1$$



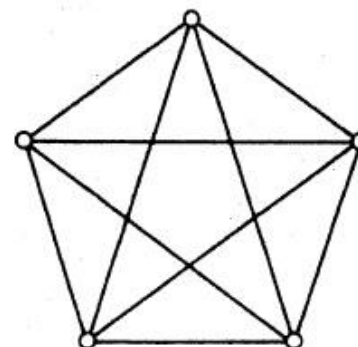
$G_2$

$$\kappa'(G_2) = 2$$



$G_3$

$$\kappa'(G_3) = 3$$

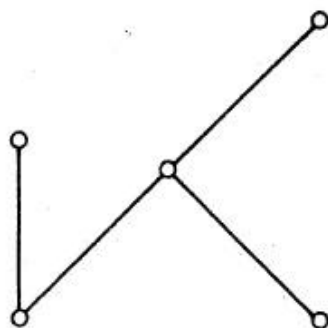


$G_4$

$$\kappa'(G_4) = 4$$

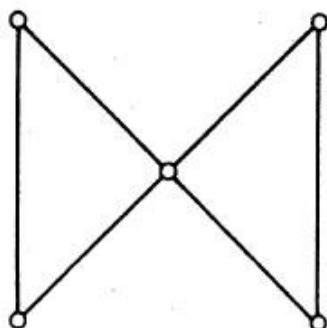
# Conectividade

- **Def.:** Um grafo  $G$  é dito ***k-conexo em arestas*** se  $\kappa'(G) \geq k$ .



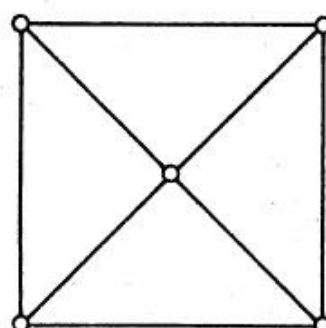
$G_1$

0- e 1-conexo  
em arestas



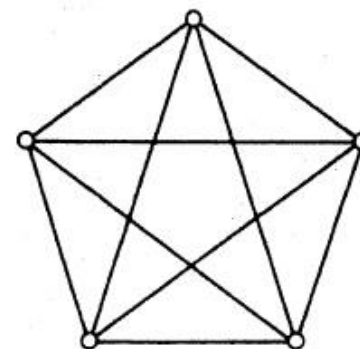
$G_2$

0-, 1- e 2-  
conexo em  
arestas



$G_3$

0-, 1-, 2- e 3-  
conexo em  
arestas



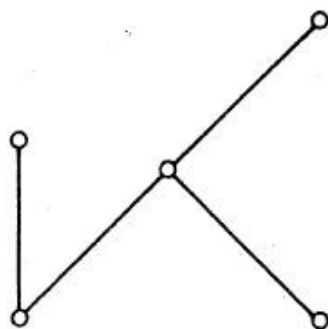
$G_4$

0-, 1-, 2-, 3- e  
4-conexo em  
arestas

# Conectividade

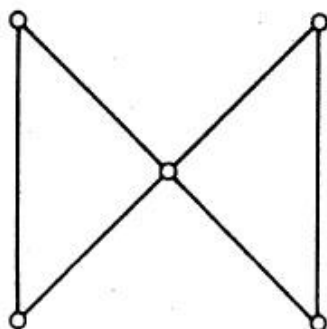
## Teorema:

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$



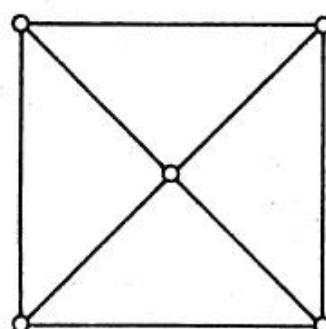
$G_1$

$$\begin{aligned}\kappa(G) &= 1 \\ \kappa'(G) &= 1 \\ \delta(G) &= 1\end{aligned}$$



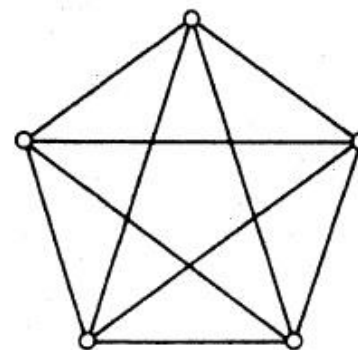
$G_2$

$$\begin{aligned}\kappa(G) &= 1 \\ \kappa'(G) &= 2 \\ \delta(G) &= 2\end{aligned}$$



$G_3$

$$\begin{aligned}\kappa(G) &= 3 \\ \kappa'(G) &= 3 \\ \delta(G) &= 3\end{aligned}$$



$G_4$

$$\begin{aligned}\kappa(G) &= 4 \\ \kappa'(G) &= 4 \\ \delta(G) &= 4\end{aligned}$$

# Conectividade

## Prova $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ :

- Se  $G$  é trivial, então  $\kappa'(G) = 0 \leq \delta(G)$ . Caso contrário, se  $v$  é o vértice de menor grau de  $G$ , as arestas incidentes a  $v$  são um corte de arestas de  $G$  de tamanho  $\delta(G)$  e, portanto,  $\kappa'(G) \leq \delta(G)$

# Conectividade

## Prova $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ :

- Por indução em  $\kappa'(G)$ .

Base:

- Se  $\kappa'(G) = 0$ , então  $G$  é trivial ou desconexo. Em ambos os casos,  $\kappa(G) = 0$ .

H.I.:

- Suponha que  $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$  se verifica para todo grafo com  $\kappa'(G) < k$ , com  $k \geq 1$ .

Passo de Indução:

- Seja  $\kappa'(G) = k$  e seja  $xy$  uma aresta do corte de arestas mínimo  $C$  de  $G$

# Conectividade

## Prova $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ :

(continuação)

- Seja  $H = G - \{xy\}$
- $C - \{xy\}$  é um corte de arestas mínimo de  $H$ , e portanto,  $\kappa'(H) = k - 1$ .
- Pela hipótese de indução,  $\kappa(H) \leq k - 1$ . Seja  $S$  um corte de vértices mínimo de  $H$ . Logo,  $|S| \leq k - 1$ .
- Se  $S$  é um corte de vértices para  $G$ , então  $\kappa(G) \leq |S| \leq k - 1 < \kappa'(G)$ .
- Caso contrário,  $xy$  é uma ponte de  $G - S$ . Basta continuarmos analisando dois casos: (i)  $x$  ou  $y$  é articulação; ou (ii)  $|V(G - S)| = 2$

# Conectividade

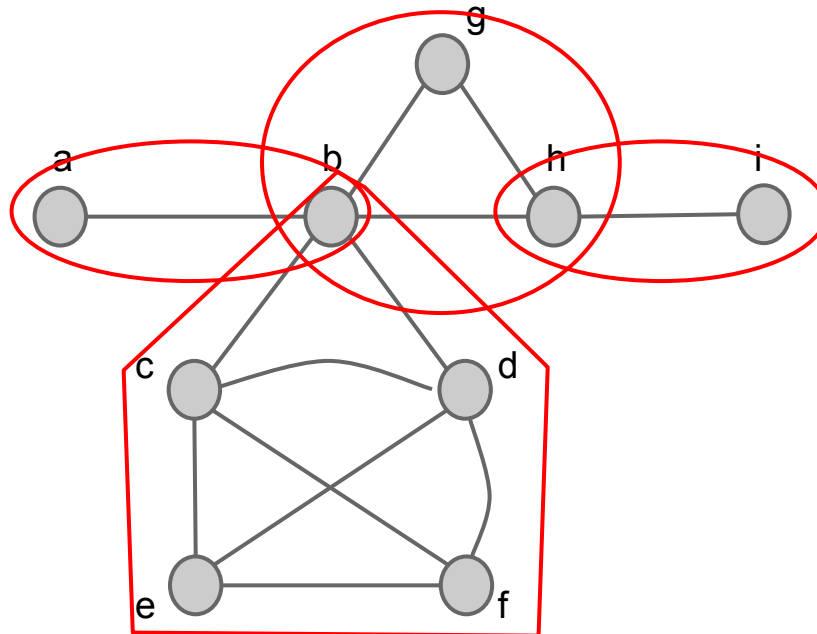
## Prova $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ :

(continuação)

- Caso (i): Então  $S \cup \{x\}$  ou  $S \cup \{y\}$  é um corte de vértices de  $G$  de tamanho  $k$ .
- Logo,  $\kappa(G) \leq k = \kappa'(G)$ .
- Caso (ii): Então  $\kappa(G) \leq n - 1 = \kappa(H) + 1 \leq k = \kappa'(G)$

# Conectividade

- **Def.:** Um grafo é dito ser um ***bloco*** se não possui um vértice de corte.
- **Def.:** Um ***bloco de um grafo*** é um subgrafo deste grafo que é um bloco maximal.





# Conectividade

## Teorema:

Um grafo  $G$  com  $n \geq 3$  é 2-conexo  $\Leftrightarrow$  quaisquer dois vértices de  $G$  estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos

# Conectividade

## Prova ( $\Leftarrow$ ) :

- Como quaisquer dois vértices de  $G$  estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos, então  $G$  não possui uma articulação
- Portanto,  $\kappa(G) \geq 2$  e, portanto, o grafo é 2-conexo.

# Conectividade

## Prova ( $\Rightarrow$ ) :

- Seja  $G$  um grafo 2-conexo.
- Seja  $u, v \in V(G)$  distintos.
- Por indução em  $d(u, v)$ , vamos mostrar que  $u$  e  $v$  estão conectados por dois caminhos que não compartilham vértices internos.
- Se  $d(u, v) = 1$ , então  $uv \in E(G)$  e  $uv$  não pode ser uma ponte. Caso contrário,  $u$  ou  $v$  seria uma articulação contradizendo  $G$  ser 2-conexo, ou  $n = 2$  contradizendo  $n \geq 3$ . Logo, por Teorema anterior,  $uv$  está num ciclo e portanto há dois caminhos de  $u$  a  $v$ . (Base)
- Suponha que o resultado vale para todo par de vértices  $u$  e  $v$  com  $d(u, v) < k$  (H.I.), e considere  $d(u, v) = k$  (Passo de Indução).

# Conectividade

## Prova ( $\Rightarrow$ ) : (continuação)

- Seja  $W$  o menor caminho de  $u$  até  $v$  e seja  $w$  o vértice que antecede  $v$  em  $W$ .
- Como  $d(u, w) = k - 1$ , então por H.I. existem dois caminhos  $P$  e  $Q$  de  $u$  a  $w$  que não compartilham vértices internos.
- Como  $G$  é 2-conexo, existe um caminho  $P'$  de  $u$  até  $v$  em  $G - w$ .
- Seja  $x$  o último vértice comum a  $P'$  e a  $P \cup Q$ . Sem perda de generalidade, considere que  $x \in P$ .
- Logo, existem dois caminhos disjuntos internamente de  $u$  a  $v$ : aquele que começa em  $u$ , vai por  $P$  até  $x$ , depois segue até  $v$  por  $P'$ , e  $Q$  acrescido de  $wv$ .

# **Exercícios**

# Conectividade

1. Mostre um exemplo que se  $P$  é um caminho de  $u$  até  $v$  num grafo 2-conexo  $G$ , então não existe necessariamente um caminho  $Q$  de  $u$  até  $v$  com todos os vértices internos a  $Q$  distintos daqueles de  $P$ .
2. Mostre que se  $G$  não tem ciclos pares, então cada bloco de  $G$  é ou um  $K_1$ , ou um  $K_2$ , ou um ciclo ímpar.