UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: Otimização Combinatória
Professor: Marcos Roboredo

2015 – 1
Lista de exercícios nº 2

1) Considere a seguinte desigualdade

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5$$

Mostre que multiplicar ambos os lados da desigualdade por -1 e então converter a desigualdade resultante em uma equação é o mesmo que primeiro convertê-la em uma equação e depois multiplicar ambos os lados por -1.

2) Mostre que a seguinte função objetivo pode ser representada em forma de equação:

   Minimizar $z = max\{|x_1 - x_2 + 3x_3|, |-x_1 + 3x_2 - x_3|\}$, onde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

3) Considere o seguinte PPL:

$$Maximizar\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} s.a.\quad & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Expresse o problema em forma de equação
   (b) Determine todas as soluções básicas do problema e classifique-as em viáveis ou inviáveis
   (c) Use a substituição direta na f.o. para determinar a solução básica viável ótima
   (d) Verifique graficamente que a solução obtida em (c) é realmente a solução ótima do PPL. Daí, conclua que a solução ótima pode ser determinada algebricamente considerando somente soluções básicas viáveis.
   (e) Mostre como as soluções básicas inviáveis são representadas graficamente na região de soluções.

4) Mostre algebricamente que todas as soluções básicas do seguinte PPL são inviáveis

$$Maximizar\ z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} s.a.\quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5) Considere o seguinte PPL:

$$Maximizar\ z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} s.a.\quad & -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \\ & x_2\ irrestrita \end{aligned}$$

A conversão na forma canônica consiste de utilizar a substituição $x_2 = x_2^- - x_2^+$. Mostre que a solução básica não pode incluir ambas, x_2^- e x_2^+ simultaneamente.

6) Considere o seguinte PPL

$$Maximizar\ z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} s.a.\quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1\ irrestrita \end{aligned}$$

(a) Determine todas as soluções básicas viáveis do problema
(b) Use substituição direta na f.o. para determinar a solução básica viável ótima
(c) Resolva o problema pelo método gráfico e verifique que a solução encontrada no item anterior é realmente a ótima.

7) Considere o seguinte conjunto de restrições:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 40 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{gathered}$$

Resolva o problema utilizando o método simplex para cada uma das f.o. abaixo:

(a) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$
(b) Maximizar $z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$
(c) Maximizar $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$
(d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$

8) A próxima tabela apresenta uma iteração no método simplex. Todas as variáveis são não negativas. A tabela não é ótima nem para um problema de maximização nem para um problema de minimização. Por isso, quando uma variável não básica entra na solução, ela pode aumentar ou reduzir z, ou deixa-lo inalterado, dependendo dos parâmetros da variável não básica que entrar.

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Solução
z	0	-5	0	4	-1	-10	0	0	620
x_8	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12
x_3	0	1	1	3	1	0	3	0	6
x_1	1	-1	0	0	6	4	0	0	0

(a) Categorize as variáveis como básicas ou não básicas e dê os valores atuais de todas as variáveis.
(b) Considerando que o problema é de maximização, identifique as variáveis não básicas que tem potencial de melhorar o valor de z. Se tal variável entrar na solução básica, determine a variável que sai, se houver, e a alteração em z.
(c) Repita o item (b) considerando o problema como minimização.
(d) Qual (Quais) variável(eis) não básica(s) não causará(ão) uma alteração no valor de z quando selecionada(s) para entrar na solução?

9) Considere o seguinte PPL:

$$Maximizar\ z = 16x_1 + 15x_2$$

$$
\begin{aligned}
s.a.\quad & 40x_1 + 31x_2 \leq 124 \\
& -1x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Resolva o problema pelo método simplex, no qual a variável que entra na base e a variável não básica que tem o coeficiente mais negativo na linha z.

(b) Resolva o problema pelo método simplex, no qual a variável que entra na base e a variável não básica que tem o coeficiente menos negativo na linha z.

(c) Compare o número de iterações em (a) e (b) e diga qual conclusão pode-se chegar.

(d) Suponha que o sentido de otimização seja mudado para minimização multiplicando z por -1. Como essa alteração afeta as iterações do método simplex?