Universidade do Estado do Rio de Janeiro - IME - Depto. de Análise

SEGUNDA PROVA DE CÁLCULO 4 - (turma 01)

Prof. Rogerio Oliveira Data: 21/01/15

Questão 1 Ache uma série de Fourier em senos para a função $g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

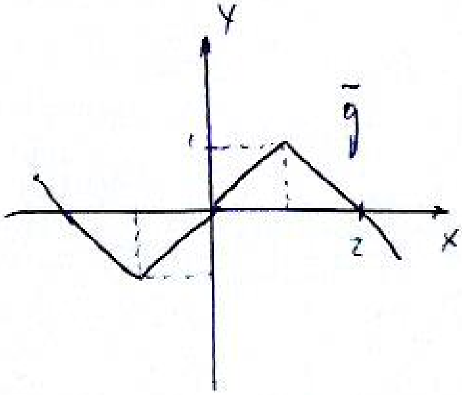
Não esqueça de justificar a convergência

Questão 2 Uma corda elástica com $a^2 = 1$ é colocada em movimento a partir da posição inicial $f(x) = 0$ e velocidade inicial $g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ Ache a solução $u(x,t)$ que modela a posição da corda. Suas extremidades são mantidas fixas na posição horizontal.

BOA SORTE!

Gabarito

(Q1) Note que a extensão ímpar $\tilde{g}$ de g é periódica, de período 4, contínua em $]-2;2]$, com g' cont. por partes. Logo, pelo Teo. de Conv. de Fourier, temos que $SF[g](x) = \tilde{g}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Agora,



$a_n = 0, \forall n \geq 0$

$$b_n = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 x \,\text{sem}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 (2-x)\,\text{sem}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx\right]$$

$$\int_0^1 x\,\text{sem}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{-2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\,\text{sem}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{4}{n^2\pi^2}\,\text{sem}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\int_1^2 2\,\text{sem}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 = \cancel{\frac{-4}{n\pi}\cos(n\pi)} + \frac{4}{n\pi}\cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$\int_1^2 -x\,\text{sem}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 - \frac{4}{n^2\pi^2}\,\text{sem}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \cancel{\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi)} - \frac{2}{n\pi}\cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{4}{n^2\pi^2}\,\text{sem}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{8}{\quad}\,\text{sem}(n\pi), \ \forall n \geq 1.$$

Assim, p/ $0 \leq x \leq 2$,

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{m^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

(Q2) $$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(2,t), & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & \forall \ 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

$u_{xx} = u_{tt} \Rightarrow F''(x)\,G(t) = F(x)\,G''(t) \Rightarrow \dfrac{F''(x)}{F(x)} = \dfrac{G''(t)}{G(t)} = \lambda$, λ cte $\Rightarrow$

$\Rightarrow F''(x) - \lambda F(x) = 0$ e $G''(t) - \lambda G(t) = 0$.

$u(0,t) = 0 \Rightarrow F(0).\,G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$

$u(2,t) = 0 \Rightarrow F(2)\,G(t) = 0 \Rightarrow F(2) = 0$

$u(x,0) = 0 \Rightarrow F(x)\,G(0) = 0 \Rightarrow G(0) = 0$

(a) $\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ F(0) = 0 = F(2) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} G''(t) - \lambda G(t) = 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$

Problema (a).

1º caso) $\lambda > 0$

$r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$F(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow F(x) = 2A \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}x)$

$F(2) = 0 \Rightarrow 2A \operatorname{senh}(\underbrace{\sqrt{\lambda}.2}_{>0}) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F \equiv 0$ Não serve!!

2º caso) $\lambda = 0$

$F(x) = Ax + B$

$F(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow F(x) = Ax$

$F(2) = 0 \Rightarrow A.2 = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F \equiv 0$ Não serve!!

3º caso) $\lambda < 0$, i.e., $\lambda = -\sigma^2$ com $\sigma > 0$.

$r^2 = -\sigma^2 \Rightarrow r = \pm\sigma i \Rightarrow F(x) = A\cos(\sigma x) + B\operatorname{sen}(\sigma x)$

$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F(x) = B\operatorname{sen}(\sigma x)$

$F(2) = 0 \Rightarrow B\operatorname{sen}(\sigma.2) = 0 \Rightarrow \sigma.2 = m\pi \Rightarrow \sigma = \dfrac{m\pi}{2}$ e $\lambda_m = -\dfrac{m^2\pi^2}{4}$

com $F_m(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi x}{2}\right)$

Problema (b):

$$r^2+\frac{n^2\pi^2}{4}=0 \Rightarrow r=\pm\frac{n\pi}{2}i \Rightarrow G(t)=A\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)+B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

$$G(0)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow G_n(t)=\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Assim,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Dado inicial sobre a veloc.:

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\frac{n\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \Rightarrow$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\frac{n\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

(a1)

$$\Rightarrow c_n=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{8}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{16}{n^3\pi^3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ \forall\, n\geq 1.$$

—— // ——