UFRRJ UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

Nome: ______________________ Curso: __________ Turma: __________

Gabarito da Prova 1 de Cálculo 1

1. Calcule os limites abaixo, justificando sua resposta.

$(a)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x-e^2}{x-2}\right)$ $\qquad$ $(b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-tg\ x}{x+tg\ x}\right)$

$(c)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$ $\qquad$ $(d)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-5x+2}\right)^{20}$

$(e)\ \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{3x^2+x}-2x)$ $\qquad$ $(f)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2+sen(cos\ x))}{x^2+1}$

Pontuação: 3,0 pontos (cada item vale 0,5 pontos).

Solução da Questão 1

(a) Fazendo $u = x-2$, temos

$$x\to 2 \Longleftrightarrow u\to 0,$$

Então

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x-e^2}{x-2}\right)=\lim_{u\to 0}\left(\frac{e^{u+2}-e^2}{u}\right)=\lim_{u\to 0}e^2\left(\frac{e^u-1}{u}\right)=e^2\cdot\lim_{u\to 0}\left(\frac{e^u-1}{u}\right)=e^2\cdot 1=e^2.$$

Resposta: e^2

(b) Como $tg\ x=\frac{sen\ x}{cos\ x}$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-tg\ x}{x+tg\ x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\frac{sen\ x}{cos\ x}}{x+\frac{sen\ x}{cos\ x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{sen\ x}{cos\ x}\right)\cdot cos\ x}{\left(x+\frac{sen\ x}{cos\ x}\right)\cdot cos\ x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ cos\ x-sen\ x}{x\ cos\ x+sen\ x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x\ cos\ x-sen\ x)/x}{(x\ cos\ x+sen\ x)/x}\\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\left(cos\ x-\frac{sen\ x}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(cos\ x+\frac{sen\ x}{x}\right)}=\frac{1-1}{1+1}=0
\end{aligned}$$

Resposta: 0.

(c) Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)^x \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x
\end{aligned}$$

Fazendo $u = x+1$, temos

$$x \to +\infty \Longleftrightarrow u \to +\infty.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x &= \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u-1} \\
&= \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u \cdot \left\{\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)\right\}^{-1} \\
&= e\cdot 1 = e.
\end{aligned}$$

Resposta: e.

(d) Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-5x+2}\right)^{20} &= \left\{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-5x+2}\right)\right\}^{20} \\
&= \left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+3x+1)/x^2}{(3x^2-5x+2)/x^2}\right\}^{20} \\
&= \left\{\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\right\}^{20} \\
&= \left(\tfrac{2+0+0}{3-0+0}\right)^{20} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{20}
\end{aligned}$$

Resposta: $(\frac{2}{3})^{20}$

(e) Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+x}-2x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{3x^2+x}-2x)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}{(\sqrt{3x^2+x}+2x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x-4x^2}{\sqrt{3x^2+x}+2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{\sqrt{3x^2+x}+2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-x^2)/x}{(\sqrt{3x^2+x}+2x)/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+2} = -\infty
\end{aligned}$$

Resposta: $-\infty$.

(f) Observe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2+sen(cos\ x))}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 0} sen(x^2+sen(cos\ x))}{\lim_{x\to 0}(x^2+1)} = \frac{sen(0+sen(cos 0))}{0+1} = sen(sen 1)$$

Resposta: $sen(sen1)$

2. Use o Teorema do Confronto para determinar o limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)^2 sen\dfrac{1}{x-1}\right]$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ se $|f(x)-3| \leq 2|x-1|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pontuação: 2,0 pontos (cada item vale 1,0 pontos).

Solução da Questão 2

(a) Observe que

$$0 \leq \left|(x-1)^2 sen\frac{1}{x-1}\right| \leq (x-1)^2,$$

pois a função seno é limitada. Como,

- $\lim\limits_{x\to 1} 0 = 0$; e
- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$

Segue pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2 sen\frac{1}{x-1}\right] = 0.$$

(b) Observe que

$$0 \leq |f(x)-3| \leq 2|x-1| (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Como,

- $\lim\limits_{x\to 1} 0 = 0$; e
- $\lim\limits_{x\to 1} 2|x-1| = 0$

Segue pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to 1}(f(x)-3) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

3. Considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x < -1, \\ Ax + B & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 5x + 7 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determine os valores de A e B, de tal forma que a função f seja contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Faça o esboço do gráfico.

Pontuação: 2,0 pontos (o esboço do gráfico vale 0,5 pontos).

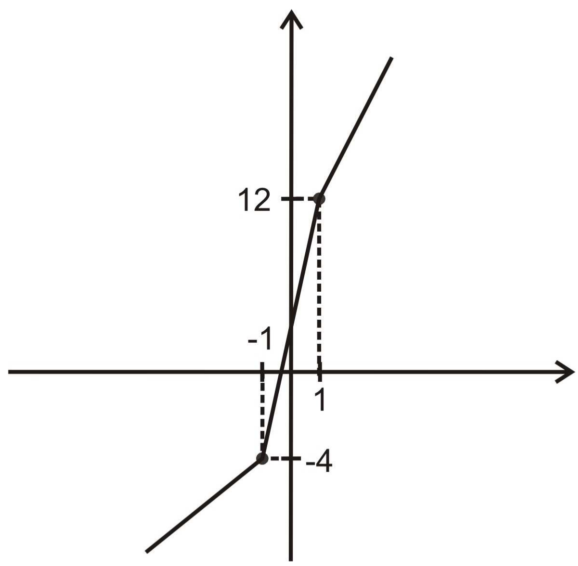
Solução da Questão 2

Como queremos que f seja contínua, devemos ter:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -1-}(2x-2) = 2(-1) - 2 = -4 \\ &\lim_{x\to -1+}(Ax+B) = -A + B \end{aligned}\right\} \Rightarrow -A + B = -4 \qquad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1-}(Ax+B) = A + B \\ &\lim_{x\to 1+}(5x+7) = 5\cdot 1 + 7 = 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A + B = 12 \qquad (2).$$

Resolvendo o sistema de equações (1) e (2), encontramos para $A = 8$ e $B = 4$.



4. (a) Enuncie e faça a interpretação geométrica do Teorema do Valor Intermédiario.

(b) A equação $x^3 - 4x + x - 1 = 0$ possue raiz em $[1, 2]$?

(c) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = x^2 + sen\ x$ e $g(x) = x^2 + x - 1$. Prove que os gráficos de f e g se interceptam em pelo menos um ponto. (DICA: Use a parte (a))

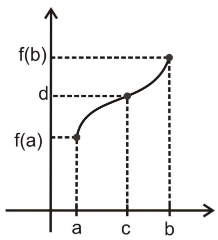
Pontuação: 3,0 pontos (cada item vale 1,0 pontos).

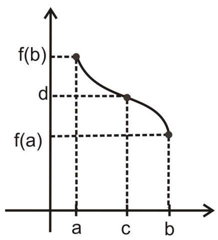
Solução da Questão 4

(a) (Parte 1) Enunciado do Teorema:

Teorema do Valor Intermediário:
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, ou $f(b) < d < f(a)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$.

(Parte 2) Interpretação Geometrica do Teorema:





Observando os gráficos acima vemos que se f é continua em $[a, b]$, então f assume todos os valores intermediários entre $f(a)$ e $f(b)$, enquanto x assumirá todos os valores entre a e b.

(b) Considere a função auxiliar

$$f(x) = x^3 - 4x + x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Note que:

(i) f é uma função continua em $[1, 2]$, pois f é uma função polinomial e foi visto em Aula que Toda função polinomial é uma função continua em $\mathbb{R}$.

(ii) $-3 = f(1) < 0 < f(2) = 1$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe $c \in]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$.

Nota do Professor: Nesta questão houve um erro de digitação na função $f(x)$; por essa razão, as provas foram avaliadas de acordo com a função considerada em cada turma.

(c) Considere a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x), x \in \mathbb{R}.$$

Note que:

(i) $h(x) = sen(x) - x + 1$, e é uma função continua em $[-\pi, \pi]$, pois f é uma soma de funções contínuas.

(ii) $-\pi + 1 = h(\pi) < 0 < h(-\pi) = \pi + 1$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe $c \in]-\pi, \pi[$ tal que $h(c) = 0$,ou seja, $f(c) = g(c)$.

Boa Prova!