

é válida. Se tanto P como Q forem verdadeiras para todos os elementos do domínio, então P será verdadeira para todos os elementos e Q será verdadeira para todos os elementos e vice-versa.

- d A wff $P(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow P(x)]$ é válida, apesar de conter uma variável livre. Para comprovarmos isto, consideremos qualquer interpretação, e seja x qualquer membro do domínio. Então x tem ou não tem a propriedade P . Se x não a tiver, então $P(x)$ será falsa; como $P(x)$ é o antecedente da implicação, esta será verdadeira. Se, por outro lado, x tiver a propriedade P , então $P(x)$ é verdadeira e, a despeito do valor-verdade de $Q(x)$, a implicação $Q(x) \rightarrow P(x)$ será verdadeira, e a implicação principal também será verdadeira. •

EXEMPLO 12 A wff $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$ não é válida. Por exemplo, na interpretação onde o domínio consista em inteiros e $P(x)$ signifique que x é par, é verdade que existe um inteiro par, mas é falso que todo inteiro seja par. O antecedente da implicação é verdadeiro e o conseqüente é falso, e portanto o valor da implicação é falso. •

Naturalmente não somos obrigados a usar um contexto matemático para construir uma interpretação na qual uma wff seja falsa, mas freqüentemente é mais simples fazê-lo pelo fato de as relações entre os objetos serem mais claras.

PRÁTICA 13 A wff

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

é válida ou inválida? Justifique. •

Revisão da Seção 12

Técnicas

- Determinação do valor-verdade de uma wff predicativa em uma dada interpretação
- Tradução de sentenças na língua portuguesa para wffs e vice-versa
- Reconhecimento de uma wff válida e a justificação
- Reconhecimento de wffs não-válidas e a construção de uma interpretação na qual ela seja falsa ou não tenha valor-verdade

Idéias Principais

O valor-verdade de wffs predicativas depende da interpretação considerada.

Wffs válidas são wffs predicativas que são verdadeiras para qualquer interpretação e, portanto, a validade é uma propriedade inerente à forma da wff propriamente dita.

Exercícios 1.2

- Qual o valor-verdade de cada uma das wffs a seguir na interpretação onde o domínio consiste em inteiros, $O(x)$ é " x é ímpar", $L(x)$ é " $x < 10$ " e $G(x)$ é " $x > 9$ "?
 - $(\exists x)O(x)$
 - $(\forall x)[L(x) \rightarrow O(x)]$
 - $(\exists x)[L(x) \wedge G(x)]$
 - $(\forall x)[L(x) \vee G(x)]$
- Qual o valor-verdade de cada uma das wffs na interpretação onde o domínio consiste nos números inteiros?

★a. $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$	★b. $(\exists y)(\forall x)(x + y = x)$
★c. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$	★d. $(\exists y)(\forall x)(x + y = 0)$
e. $(\forall x)(\forall y)(x < y \vee y < x)$	f. $(\forall x)[x < 0 \rightarrow (\exists y)(y > 0 \wedge x + y = 0)]$
g. $(\exists x)(\exists y)(x^2 = y)$	h. $(\forall x)(x^2 > 0)$
- Indique o valor-verdade de cada uma das wffs a seguir na interpretação onde o domínio consiste nos estados do Brasil, $Q(x, y)$ é " x é ao norte de y ", $P(x)$ é " x começa com a letra P" e a é "Paraná".
 - $(\forall x)P(x)$
 - $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[Q(x, y) \wedge Q(y, z) \rightarrow Q(x, z)]$
 - $(\exists y)(\exists x)Q(y, x)$
 - $(\forall x)(\exists y)[P(y) \wedge Q(x, y)]$
 - $(\exists y)Q(a, y)$

4. Para as wffs a seguir, ache uma interpretação na qual sejam verdadeiras e outra na qual sejam falsas.

- ★a. $(\forall x)([A(x) \vee B(x)] \wedge [A(x) \wedge B(x)])'$ b. $(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow P(y, x)]$
 c. $(\forall x)[P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x, y)]$ d. $(\exists x)[A(x) \wedge (\forall y)B(x, y)]$
 e. $[(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)] \rightarrow (\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$

5. Identifique o escopo de cada um dos quantificadores nas wffs a seguir e indique quaisquer variáveis livres.

- a. $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(y)]$ b. $(\exists x)[A(x) \wedge (\forall y)B(y)]$
 c. $(\exists x)(\forall y)[P(x, y) \wedge Q(x, y)]$ d. $(\exists x)(\exists y)[A(x, y) \wedge B(y, z) \rightarrow A(a, z)]$

6. Com o uso de símbolos predicados mostrados e os quantificadores apropriados, escreva cada sentença na língua portuguesa como uma wff predicativa. (O domínio é todo o mundo.)

$D(x)$ é "x é um dia."
 $S(x)$ é "x é ensolarado."
 $R(x)$ é "x é chuvoso."

S é "segunda-feira."
 T é "terça-feira."

- ★a. Todos os dias são ensolarados.
 ★b. Alguns dias não são chuvosos.
 ★c. Todo dia que é ensolarado não é chuvoso.
 d. Alguns dias são ensolarados e chuvosos.
 e. Nenhum dia é ensolarado e chuvoso.
 f. Sempre é dia ensolarado se, e somente se, é um dia chuvoso.
 g. Nenhum dia é ensolarado.
 h. Segunda-feira foi ensolarada, portanto todo dia será ensolarado.
 i. Tanto segunda-feira quanto terça-feira foram chuvosos.
 j. Se algum dia for chuvoso, então todos os dias serão ensolarados.

7. Com o uso de símbolos predicados mostrados e os quantificadores apropriados, escreva cada sentença da língua portuguesa como uma wff predicativa. (O domínio é todo o mundo.)

$J(x)$ é "x é um juiz."
 $A(x)$ é "x é um advogado."
 $M(x)$ é "x é uma mulher."

$Q(x)$ é "x é um químico."
 $A(x, y)$ é "x admira y."

- a. Existem algumas mulheres advogadas que são químicas.
 b. Nenhuma mulher é advogada e química.
 ★c. Alguns advogados só admiram juizes.
 d. Todos os juizes admiram apenas juizes.
 e. Apenas juizes admiram juizes.
 f. Todas as mulheres advogadas admiram algum juiz.
 g. Algumas mulheres não admiram advogados.

8. Usando os símbolos predicados mostrados e os quantificadores apropriados, escreva as sentenças na língua portuguesa como wffs predicativas. (O domínio é todo o mundo.)

$C(x)$ é "x é uma Corvette."
 $F(x)$ é "x é uma Ferrari."

$P(x)$ é "x é um Porsche."
 $L(x, y)$ é "x é mais lento que y."

- ★a. Nada é, ao mesmo tempo, uma Corvette e uma Ferrari.
 ★b. Alguns Porsches são apenas mais lentos que as Ferraris.
 c. Apenas Corvettes são mais lentas que Porsches.
 d. Todas as Ferraris são mais lentas que alguma Corvette.
 e. Nenhum Porsche é mais lento que a Corvette.
 f. Se existir uma Corvette que seja mais lenta que uma Ferrari, então todas as Corvettes serão mais lentas que todas as Ferraris.

9. Usando os símbolos predicados mostrados e os quantificadores apropriados, escreva as sentenças na língua portuguesa como wffs predicativas. (O domínio é todo o mundo.)

$A(x)$ é "x é uma abelha."
 $F(x)$ é "x é uma flor."
 $G(x)$ é "x gosta de y."

- | | |
|--|---|
| a. Todas as abelhas gostam de todas as flores. | b. Algumas abelhas gostam de todas as flores. |
| c. Todas as abelhas gostam de algumas flores | d. Toda abelha só odeia flores. |
| e. Apenas abelhas gostam de flores. | f. Toda abelha só gosta de flores. |
| g. Nenhuma abelha gosta só de flores. | h. Algumas abelhas gostam de algumas flores. |
| i. Algumas abelhas gostam apenas de flores. | j. Toda abelha odeia algumas flores. |
| k. Toda abelha odeia todas as flores. | l. Nenhuma abelha odeia todas as flores. |

10. Se

$B(x)$ for "x é bonito."
 $E(x)$ for "x é elegante."
 $G(x, y)$ for "x gosta de y."
 $H(x)$ for "x é um homem."
 $M(x)$ for "x é uma mulher."
 j for "John."
 k for "Kathy."

dê as traduções para a língua portuguesa das wffs a seguir:

- ★a. $E(j) \wedge G(k, j)$
 ★b. $(\forall x)[H(x) \rightarrow E(x)]$
 c. $(\forall x)(M(x) \rightarrow (\forall y)[G(x, y) \rightarrow H(y) \wedge E(y)])$
 d. $(\exists x)[H(x) \wedge E(x) \wedge G(x, k)]$
 e. $(\exists x)(M(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[G(x, y) \rightarrow E(y) \wedge H(y)])$
 f. $(\forall x)[M(x) \wedge B(x) \rightarrow G(j, x)]$

11. Diversas formas de negação são apresentadas para cada uma das sentenças a seguir. Qual é a correta?

- a. Algumas pessoas gostam de Matemática.
 1. Algumas pessoas não gostam de Matemática.
 2. Todo o mundo não gosta de Matemática.
 3. Todo o mundo gosta de Matemática.
 b. Todo o mundo gosta de sorvete.
 1. Ninguém gosta de sorvete.
 2. Todo o mundo não gosta de sorvete.
 3. Alguém não gosta de sorvete.
 c. Todo o mundo é alto e magro.
 1. Alguém é baixo e gordo.
 2. Ninguém é alto e magro.
 3. Alguém é baixo ou gordo.
 d. Alguns retratos estão velhos ou apagados.
 1. Nenhum retrato está velho ou apagado.
 2. Alguns retratos não estão velhos ou apagados.
 3. Todos os retratos não estão velhos ou não estão apagados.

12. Explique por que as wffs são válidas.

- a. $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x, y)$
 b. $(\exists x)(\exists y)A(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x, y)$
 c. $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$
 d. $A(a) \rightarrow (\exists x)A(x)$
 e. $(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)]$

13. Forneça interpretações que provem que as wffs a seguir não são válidas:

- ★a. $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \rightarrow (\exists x)[A(x) \wedge B(x)]$
 b. $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$
 c. $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)]$
 d. $(\forall x)[A(x)]' \leftrightarrow [(\forall x)A(x)]'$

14. Determine quais wffs são válidas ou inválidas. Justifique sua resposta.

- a. $(\exists x)A(x) \leftrightarrow ((\forall x)[A(x)]')'$
 b. $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
 c. $(\forall x)A(x) \leftrightarrow ((\exists x)[A(x)]')'$
 d. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$