Enumeração

1. Mostre que são enumeráveis os seguintes conjuntos:
   a. $\{ 2i+1 : i \in \mathbb{N} \}$
   b. $\mathbb{Q}$
   c. Qualquer subconjunto de um conjunto enumerável
   d. O produto cartesiano A × B, se A e B são enumeráveis
   e. A ∪ B, se A e B são enumeráveis
   f. A ∩ B, se A e B são enumeráveis
   g. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. Mostre que se A é um conjunto enumerável infinito, então P(A) não é enumerável.

Linguagens

3. Sejam dois conjuntos complementares A e B. Mostre que ou A e B são ambos recursivos ou nenhum dos dois é recursivo.

4. Classifique as linguagems abaixo dizendo se são ou não recursivamente enumerável e recursiva:
   a. $\{ a^i b^j \mid i \text{ e } j \text{ são pares} \}$
   b. $\{ a^m b^n c^n d^m \mid m, n \geq 0 \}$

5. Mostre que a concatenação de linguagens é associativa, ou seja, que, dadas três linguagens L1, L2, L3 em um alfabeto Σ, L1 • (L2 • L3) = (L1 • L2) • L3. (Sugestão: Considere o fato de que a concatenação de cadeias é associativa.)

6. Prove ou refute: A concatenação de dois conjuntos recursivamente enumeráveis é recursivamente enumerável.

7. Prove ou refute: Os conjuntos recursivos são fechados para a operação de complemento.

8. Mostre que, para qualquer linguagem L, $(L^*)^* = L^*$.

9. Mostre que, para quaisquer i, j naturais, e para qualquer linguagem L, $L^i \bullet L^j = L^{i+j}$

Gramáticas

10. Mostre que a linguagem $L = \{ a^m b^n \mid m \neq n \}$:

   a. é livre de contexto;
   b. não é regular.

11. Mostre que a linguagem { $a^n b^{2n} d^n$ | n ≥ 0 } é sensível ao contexto.

12. Classifique as linguagens abaixo, dizendo se são ou não do tipo 0, tipo 1, tipo 2 e tipo 3:
    a. { $a^i b^j$ | i e j são pares }
    b. { $a^m b^n c^n d^m$ | m, n ≥ 0 }

13. Mostre que a classe das linguagens sensíveis ao contexto é fechada para a união, i.e., se L e M são sensíveis ao contexto, L ∪ M também é.

14. Seja L uma linguagem sobre o alfabeto Σ. Mostre que L^R é regular se e somente se L é regular. Nota: Definimos L^R da seguinte maneira: L^R = { x^R : x ∈ L }, onde x^R representa da reversão da cadeia x.

15. Mostre que as linguagens a seguir são livres de contexto. Quais dessas linguagens são regulares?
    a. { x c y : x, y ∈ {a, b}* | |x| > |y| } (alfabeto Σ={a, b, c})
    b. { $a^n b^n$ | n ≥0 }
    c. { $a^m b^m c^n d^n$ | m,n ≥0 }
    d. { $a^m b^n c^n d^m$ | m,n ≥0 }
    e. { x y x : x, y ∈ { a, b }* }

16. Considere a gsc G com não-terminais S e T, terminais a, b e c, símbolo inicial S e regras:
    S → aSa | bSb | T
    T → cT | c
    (Note que G é também uma glc.)
    Seja x = aabbb. Utilize o algoritmo apresentado na demonstração de que toda lsc é um conjunto recursivo para determinar se x ∈ L(G)

17. Mostre que as linguagens a seguir são regulares.
    a. ∅
    b. { ε }
    c. { 0 } (∑ = {0, 1})
    d. { x ∈ { a, b }* | |x| é par }
    e. { x ∈ { a, b }* | |x| é ímpar }
    f. { $a^i a^i$ | i > 0 }
    g. { $a^i b^j$ | i ≤ 3, j ≤ 2 }
    h. { 000x : x ∈ {0, 1}* | |x| é múltiplo de 3 }
    i. { x ∈ {0, 1}* | x não possui nem 0's nem 1's isolados }

j. { $x \in \{0, 1\}^*$ | símbolo inicial e final de x são distintos }
k. { $x \in \{0, 1\}^*$ | x começa com um número par de 0's e termina com um número ímpar de 1's }
l. { $x \in \{0, 1\}^*$ | x possui exatamente três 1's }
m. { $x \in \{0, 1\}^*$ | x possui exatamente três 1's e não consecutivos}
n. { xyz : $x, z \in \{a,b\}^*$, $y \in \{aaa, bb\}$ }
o. { $x\, y\, x^R$: $x, y \in \{ a, b \}^*$ }, onde x^R representa da reversão da cadeia x.

18. Mostre que a linguagem $\{ a^n b^n c^n d^n \mid n > 0 \}$ é sensível ao contexto, mas não é livre de contexto. Suponha que já foi demonstrado que $\{ a^n b^n c^n \mid n>0 \}$ não é livre de contexto.

19. Seja L a linguagem da gramática: $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid a$. Mostre que todas as cadeias de L tem comprimento ímpar. (Sugestão: use indução no número de regras aplicadas na derivação.)

20. Mostre que a linguagem { x c y : $x, y \in \{a, b\}^*$ e $|x| > |y|$ } sobre o alfabeto {a, b, c} é livre de contexto.

Expressões Regulares

21. Crie expressões regulares que reconheça as linguagens do Exercício 17.

22. Seja o alfabeto $\Sigma = \{ a, b \}$. Prove ou refute: As expressões regulares $a(ba)^*b$ e $(ab)^*$ no alfabeto Σ são equivalentes, ou seja, denotam a mesma linguagem.

23. Mostre que a união de linguagens regulares é regular mostrando como construir uma gramática regular para a linguagem $L \cup M$ a partir de gramáticas regulares das linguagens L e M.

24. Mostre que dada uma expressão regular α, sempre existe uma expressão regular β equivalente a α tal que $\beta = \varnothing$ ou β não contém o símbolo $\varnothing$. (Sugestão: considere as equivalências: $\varnothing \vee \alpha \equiv \alpha \vee \varnothing \equiv \alpha$; $\varnothing \bullet \alpha \equiv \alpha \bullet \varnothing \equiv \alpha$; $\varnothing^* \equiv \varepsilon$)

Autômatos Finitos

25. Crie expressões regulares que reconheça as linguagens do Exercício 17.

26. Mostre um afd que aceite a linguagem denotada pela expressão regular $(aa \vee bb)^*$.

27. Construa um afd que aceite a linguagem denotada pela expressão regular (a v bb)* • (aa v b)*.

28. Construa um afd que aceite a linguagem denotada pela expressão regular (1v000)*. Considere que o alfabeto é Σ = { 0, 1, 2 }.