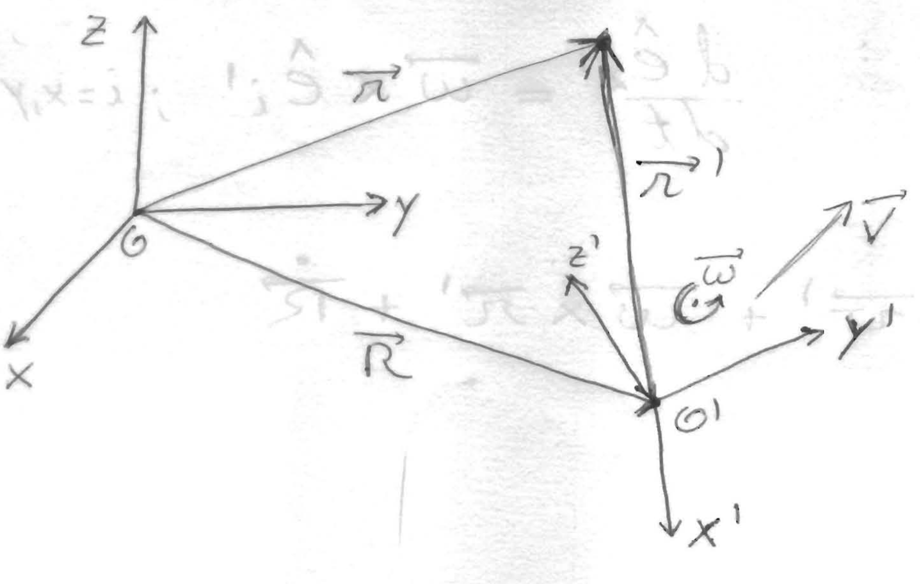
Referenciais não-inerciais

- Vimos que a 2ª lei de Newton tem sua formulação definida em referenciais inerciais. No entanto, em muitas situações pode ser conveniente descrever o sistema físico de interesse em relação a um referencial não-inercial. Tal referencial será um referencial acelerado com relação a um referencial inercial qualquer

- Podemos pensar em um sistema de coordenadas de um referencial qualquer como um corpo rígido. Sabemos que o movimento geral de um corpo rígido é uma composição de translação e rotação

- Considere um referencial inercial S e um referencial não-inercial S'. Temos



A origem O' do referencial S' se move com aceleração $\vec{A} = \ddot{\vec{R}}$ em relação à S e o sistema de eixos está em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$ em torno da origem O'.

– A posição de uma partícula no referencial S é dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$$

onde:

$$\vec{r} = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z$$

$$\vec{r}\,' = x'\,\hat{e}_{x'} + y'\,\hat{e}_{y'} + z'\,\hat{e}_{z'} = \text{posição da partícula em relação a S'}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}\,' + x'\frac{d\hat{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{e}_{z'}}{dt} + \dot{\vec{R}}$$

onde: $\vec{v}\,' = \dot{x}'\,\hat{e}_{x'} + \dot{y}'\,\hat{e}_{y'} + \dot{z}'\,\hat{e}_{z'}$

Note que: $$\frac{d\hat{e}_{i'}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_{i'} \quad ; \; i = x, y, z$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \dot{\vec{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \vec{a}\,' + \dot{x}'\frac{d\hat{e}_{x'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\hat{e}_{y'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\hat{e}_{z'}}{dt}$$

$$+ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \ddot{\vec{R}}$$

$$= \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

$$+ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \ddot{\vec{R}}$$

A 2ª lei de Newton é válida no referencial inercial S. Logo, se a partícula está sob a ação de uma força $\vec{F}$, temos:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

→ Se um observador no referencial não-inercial S' escrever uma expressão análoga usando a aceleração que ele observa, ele obterá:

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

$$- m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' - m\ddot{\vec{R}}$$

ou seja, para o observador em S' existem outras forças atuando na partícula.

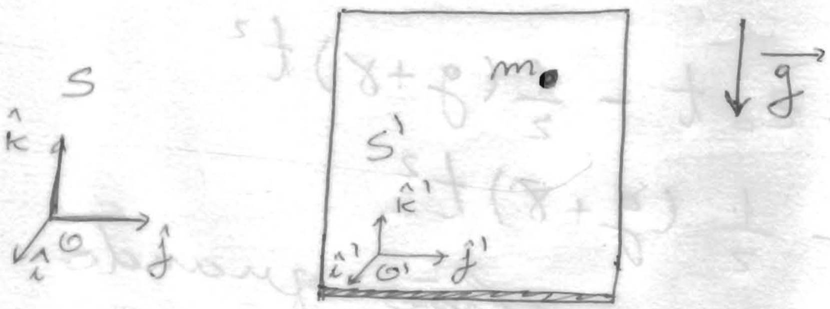
Essas forças fictícias são chamadas forças de inércia.

→ Note que todas as forças inerciais são proporcionais à massa inercial da partícula.

→ O termo $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$ é denominado força de Coriolis e o termo $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ é denominado força centrífuga. Os outros termos não possuem nomes especiais.

ex: Elevador

Considere uma partícula dentro de um elevador, ambos em um campo gravitacional uniforme



Suponha que o elevador se mova com aceleração vertical $\vec{\gamma}$ com relação ao referencial inercial S.

A partícula está inicialmente presa ao elevador e é solta em $t=0$. Quanto tempo a partícula leva para chegar ao chão do elevador?

→ No referencial S:

$$m\vec{a}_P = \vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \quad z_P(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

e

$$a_E = \gamma \hat{k} \Longrightarrow z_E(t) = 0 + V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

a partícula chega ao chão quando

$$z_P = z_E \Longrightarrow V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t = h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g+\gamma}}$$

No referencial S':

$$m\vec{a}_p' = m\vec{g} - m\vec{\gamma} = -mg\hat{k} - m\gamma\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \quad z_p' = z_0' + \dot{z}_0' t - \frac{1}{2}(g+\gamma)t^2$$

$$= h - \frac{1}{2}(g+\gamma)t^2$$

a partícula chega ao chão quando

$$z_p' = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g+\gamma}}$$

O que acontece se $\gamma = -g$? Neste caso partícula e elevador estão em queda livre e a partícula nunca atinge o chão. Note que no referencial S' a partícula permanece em repouso → a força gravitacional é "cancelada".

⇒ Princípio da equivalência: as leis da física em um campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ são as mesmas que seriam ~~na~~ ausência de um campo gravitacional mas em um referencial uniformemente acelerado com aceleração $-\vec{g}$

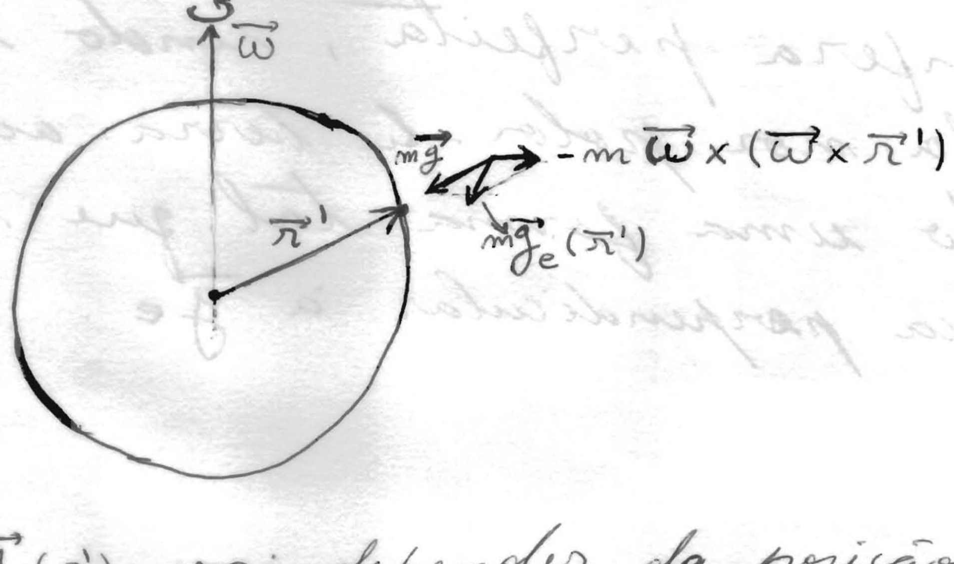
→ mais geral: Em um pequeno laboratório em queda livre, as leis da física são as mesmas que as leis da teoria especial da relatividade sem nenhum campo gravitacional

Referencial girante

→ Para estudar os efeitos da rotação da terra, podemos considerá-la como um referencial não-inercial com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante. Neste referencial, temos para uma partícula de massa m:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

ex: Considere uma partícula na superfície da terra, de forma que $\vec{F} = m\vec{g}(r)$



Em geral, $\vec{g}(\vec{r})$ vai depender da posição da partícula na superfície, mas além disso, mesmo considerando a partícula em repouso em relação à terra, a partícula estará sob a ação da força centrífuga.

Resulta que a partícula estará sob a influência de uma aceleração da gravidade efetiva:

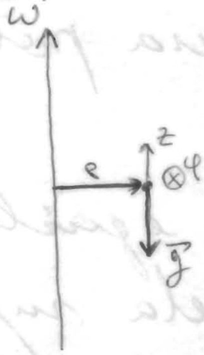
$$\vec{g}_e(\vec{r}') = \vec{g}(\vec{r}') - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$\Longrightarrow m\vec{a}' = m\vec{g}_e(\vec{r}') - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

→ A contribuição da força centrífuga faz com que a terra não seja uma esfera perfeita, sendo mais achatada nos polos. A terra acaba assumindo uma forma tal que sua superfície fica perpendicular à $\vec{g}_e$.

Ex: superfície de um líquido girando

$$-m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = -m\left(\vec{\omega}\,(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,') - \vec{r}\,'\omega^2\right)$$



$$\vec{\omega}\times\left(\rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}\right)$$

$$= \omega\rho\,\hat{\varphi}$$

$$-m\,\vec{\omega}\times\omega\rho\,\hat{\varphi} = m\,\omega^2\rho\,\hat{\rho}$$

Essa força é conservativa:

$$\vec{F}_{centrifuga} = -\nabla\left(-\frac{1}{2}m\,\omega^2\rho^2\right)$$

$$\nabla = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

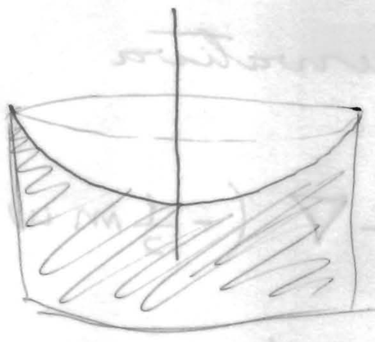
Considere uma partícula na superfície de um líquido dentro de um recipiente girando com velocidade angular $\vec{\omega}$

(4.a)

A partícula na superfície do líquido estará sob a ação de "forças" caso esteja em uma região de energia potencial não constante.

Portanto, um líquido em equilíbrio terá sua superfície definida pela superfície equipotencial, neste caso:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{potencial} \\ \text{gravitacional}}}{gz} - \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{(x^2+y^2)}_{\rho^2} = \text{constante}$$



equação de uma superfície de revolução, mais precisamente, um parabolóide

Se $\omega = 0 \Rightarrow gz = \text{constante}$

Pêndulo de Foucault

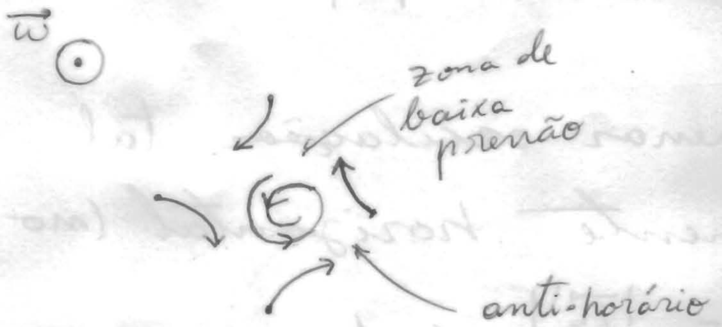
→ A força de Coriolis tem efeitos interessantes na dinâmica de corpos na superfície da terra

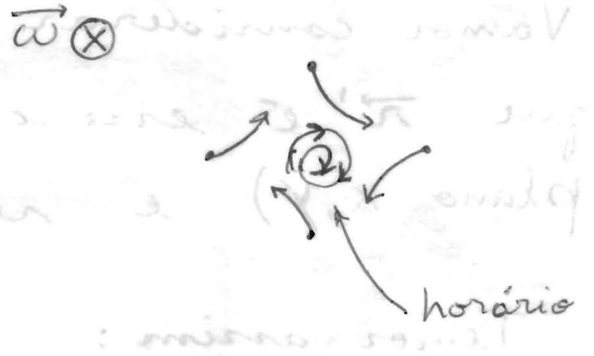
Por exemplo, a direção com que o ar circula em um ciclone é diferente no hemisfério norte e no hemisfério sul:

Norte

$$\vec{F}_c = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

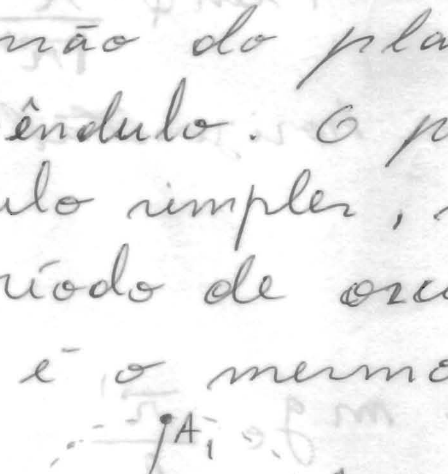
Sul





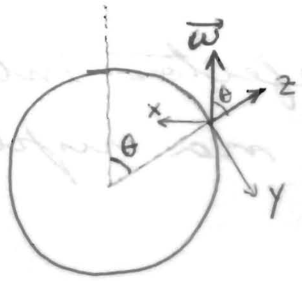
→ Outro exemplo interessante é o fenômeno da precessão do plano de oscilação de um pêndulo. O pêndulo de Foucault é um pêndulo simples, suporto ideal e tal que o período de oscilação em todas as direções é o mesmo. Teremos:

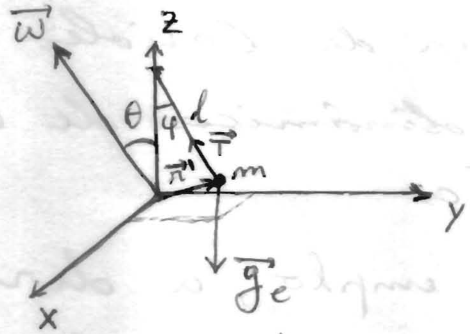
Norte :



Plano de oscilação precessa

Vamos estudar com mais detalhes:





aproximadamente constante

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = m\vec{g}_e - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{T}$$

Vamos considerar pequenas oscilações tal que $\vec{r}\,'$ é essencialmente horizontal (no plano x,y) e $\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{r}\,'|}{l} \ll 1$.

Temos assim:

$$\vec{T} = T\cos\varphi\,\hat{e}_z - T\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$$

Como o movimento é horizontal, temos

$$T\cos\varphi = m g_e$$

$$\Longrightarrow \quad T\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|} = m g_e\,\frac{\vec{r}\,'}{l}$$

$$\Longrightarrow \quad m\ddot{\vec{r}}\,' = -\frac{m g_e}{l}\vec{r}\,' - 2m\omega\cos\theta\,\hat{e}_z \times \dot{\vec{r}}\,'$$

estamos desprezando a componente vertical da força de Coriolis, que vai apenas fornecer uma correção para g_e com o sinal alternando a cada período

$$\Longrightarrow \quad \ddot{X} = -\frac{g_e}{l}X + 2\omega\cos\theta\,\dot{Y}$$

$$\ddot{Y} = -\frac{g_e}{l}Y - 2\omega\cos\theta\,\dot{X}$$

Podemos resolver essas equações, definindo:

$$Z = X + iY \quad ; \quad \dot{Z} = \dot{X} + i\dot{Y}$$

$$\Rightarrow \quad i\dot{Z} = i\dot{X} - \dot{Y}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Z} = -\omega_0^2 Z - 2\Omega i \dot{Z}$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g_e}{l}}$ e $\Omega = \omega\cos\theta$

Supondo : $z = A e^{pt}$; $A, P \in \mathbb{C}$

$$\Longrightarrow \quad P^2 + 2\Omega i P + \omega_0^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad P = \frac{-2\Omega i \pm \sqrt{-4\Omega^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$= -i\Omega \pm i\omega_1 \quad ; \quad \omega_1 = \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$$

A solução geral será :

$$z(t) = A_1 e^{-i(\Omega+\omega_1)t} + A_2 e^{-i(\Omega-\omega_1)t}$$

Para estudar o movimento vamos considerar as condições iniciais $x = a$, $y = 0$ e $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -\Omega a$

$$z(0) = a = A_1 + A_2$$

$$\dot{z}(0) = \cancel{-i\Omega a} = -i(\Omega+\omega_1)A_1 - i(\Omega - \omega_1)A_2$$

$$= \cancel{-i\Omega(A_1+A_2)} - i\omega_1(A_1 - A_2)$$

$$\Longrightarrow \quad A_1 - A_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad A_1 = A_2 = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = \frac{a}{2} e^{-i\Omega t} \left(e^{-i\omega_1 t} + e^{i\omega_1 t} \right)$$

$$= a e^{-i\Omega t} \cos \omega_1 t$$

ou:

$$x(t) = a \cos \Omega t \cos \omega_1 t$$

$$y(t) = -a \sin \Omega t \cos \omega_1 t$$

Em geral $\Omega = \omega \cos\theta << \omega_0 \Rightarrow \omega_1 \simeq \omega_0$ e o pêndulo oscila entre $\pm a(\cos\Omega t, \sin\Omega t)$.

O movimento do pêndulo é portanto uma oscilação com amplitude $\underline{a}$ em um plano que está girando com velocidade angular $-\Omega$. Note que no polo norte ($\theta = 0$) o plano gira com velocidade $-\omega$