Universidade do Estado do Rio de Janeiro - IME - Depto. de Análise

1ª PROVA DE CÁLCULO 4

Prof. Rogerio Oliveira Data: 09/05/2012

Questão 1 (1 ponto cada) Diga se as séries abaixo são divergentes, condicionalmente convergentes ou absolutamente convergentes, justificando sua resposta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Questão 2 (2 pontos) Uma sequência $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 1$. Mostre por indução que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente. Calcule, em seguida, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Questão 3 (2 pontos) Encontre a Série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ de $f(x) = \cos x$ e ache seu raio de convergência.

Questão 4 (3 pontos) Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário da E.D.O. $y'' - xy' - y = 0$ e ache uma solução em séries de potências x^n desta equação, mostrando quem são as soluções linearmente independentes.

BOA SORTE!

Gabarito.

(Q1)
(a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} \Big]_{x=2}^{x=t} =$

$= \displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{2}{3}(\ln t)^{3/2} - \frac{2}{3}(\ln 2)^{3/2} = +\infty \Rightarrow$ A série é divergente pelo Teste da Integral.

(b) Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 2^0 = 1$, temos que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n 2^{\frac{1}{n}}$ não existe. Logo a série diverge pelo teste da divergência.

(c) • $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{L'H.}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$

• $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$; $2x\sqrt{x} > 0$ para $x > 0$.

e $\ln x \geq 2$ para $x \geq 9 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{dx}\right) < 0$ para $x \geq 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$ é decrescente p/ $n \geq 9$.

Logo, pelo Teste de Leibniz, $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ é convergente.

Agora, como $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, para $n \geq 3$ e $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, pois é p-série com $p = \frac{1}{2} < 1$, temos que $\sum \left|\dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}\right|$ é divergente.

Portanto, $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ é condicionalmente convergente.

(Q2) - <u>Crescente</u>: $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$ ok. Supondo que $a_k < a_{k+1}$, p/ algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} <$ $< \sqrt{2+a_{k+1}} = a_{k+2}$. Logo, $\{a_n\}$ é crescente.

- <u>Limitada</u>: Considere $M = 10$. Temos que $a_1 = \sqrt{2} < 10$. Supondo que $a_k < 10$, p/ algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $a_{k+1} =$ $= \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+10} = \sqrt{12} < 10$. Logo, $a_n < 10$, $\forall n$.

Segue-se do Teorema da seq. monotônica limitada que $\{a_n\}$ é convergente. Seja $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Então

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2+L}$$

$\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow L = 2$ ou $L = -1$ (não serve pois $\{a_n\}$ é formada por n^{os} positivos). Logo, $L = 2$

VIRE →

(Q3)

$$\left.\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(0)}(0) = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) & \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Logo, $ST[\cos x] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$. Pelo Teste da Razão,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{x^{2n}} = x^2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$= 0 < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R = \infty.$

(Q4) $p = \frac{-x}{1}$ e $q = \frac{-1}{1}$ são polinômios, que são funções analíticas em toda parte. Logo, $x_0 = 0$ é pto ordinário da E.D.O.

Substituindo $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na eq., temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - a_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) a_n \right] x_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_0/2 \\ a_{n+2} = \dfrac{a_n}{n+2}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Logo, a_0 e a_1 são independentes e

$a_3 = \dfrac{a_1}{3}$ $\qquad a_5 = \dfrac{a_3}{5} = \dfrac{a_1}{3.5}$ $\qquad a_7 = \dfrac{a_5}{7} = \dfrac{a_1}{3.5.7}$

$a_4 = \dfrac{a_2}{4} = \dfrac{a_2}{2.4}$ $\qquad a_6 = \dfrac{a_4}{6} = \dfrac{a_0}{2.4.6}$ $\qquad$ etc

Então,

$$y(x) = \overbrace{a_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2.4\ldots(2n)} + \cdots\right)}^{y_1(x)} +$$

$$+ \underbrace{a_1\left(x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{1.3\ldots(2n+1)} + \cdots\right)}_{y_2(x)}.$$

—— " ——