Tarefa Básica 10

Murilo Xavier Lucio

10 de julho de 2021

Olá professor!
Esta tarefa estará um pouquinho diferente das demais. Estou estudando LaTeX, e decidi cometer a loucura de escrever uma tarefa básica neste formato. Espero que goste! (Será um pouquinho difícil desenhar alguns cãozinhos aqui).

Questão 01 (VUNESP): Para ladrilhar uma sala, são necessárias exatamente 400 peças iguais de cerâmica na forma de um quadrado. Sabendo que a área da sala é de 36 m^2, determine:

(a) A área de cada peça, em metros quadrados (m^2);

(b) O perímetro de cada peça, em metros.

Solução:

(a): Para descobrir a área de cada peça, basta dividir os $36m^2$ por 400 peças. Desta forma:

$$A_{\text{peça}} = \frac{36}{400}m^2 = \frac{9}{100}m^2 = 0,09m^2$$

(b): Para descobrir o perímetro da peça, basta encontrar um dos seus lados e multiplicá-lo por quatro (4). Como é uma peça quadrada, sua área é dada pela multiplicação de lados iguais (ℓ^2).

$$A_{\text{peça}} = \ell^2 = 0,09m^2 = \frac{9}{100}m^2$$

Sabendo disto, basta encontrar um dos lados da peça.

$$\sqrt{\ell^2} = \sqrt{\frac{9}{100}}m = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}}m = \frac{3}{10}m = 0,3m$$

Uma vez que o lado da peça seja $0,3m$, basta multiplicá-lo por quatro para encontrar o perímetro.

$$2p = 4 \cdot 0,3m = 1,2m$$

Respostas: (a): $0,09m^2$; (b): $1,2m$.

Questão 02 (FGV): Tem-se um quadrado cujo lado tem medida x. Se aumentarmos suas dimensões até que a área do novo quadrado seja o dobro da área do original, obteremos um lado de medida y. Podemos afirmar que:

(a) $y = 2x$

(b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

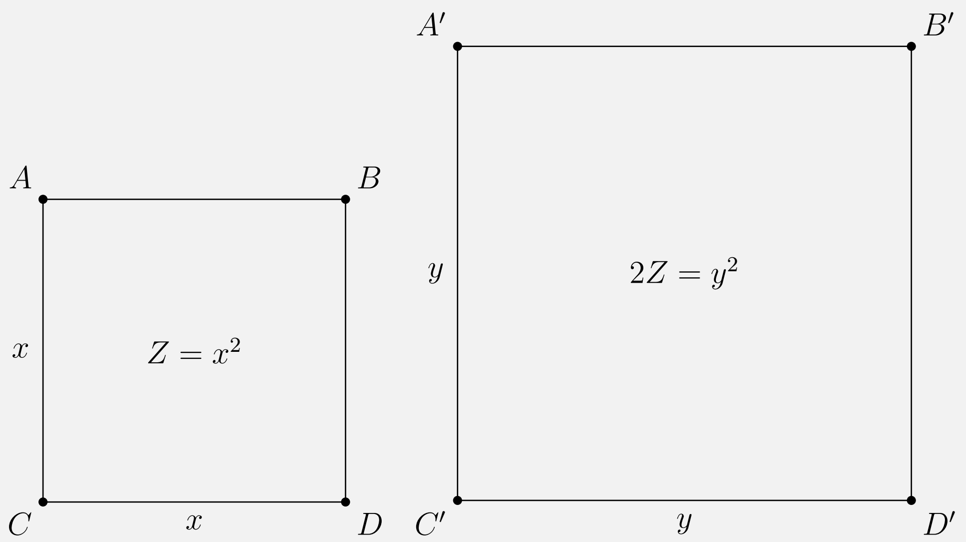
(c) $y = 1,5x$

(d) $y = \sqrt{2}x$

(e) $y = 1,33x$

Solução:

A partir das informações do enunciado, entende-se que um quadrado de lado x tem uma determinada área Z, e um outro quadrado de lado y possui o dobro da área do quadrado anterior ($2Z$). Portanto, considere os quadrados: $ABCD$, de lado x e área $Z = x^2$; e $A'B'C'D'$, de lado y e área $2Z = y^2$.



Considerando a razão de semelhança entre áreas, temos que:

$$k^2 = \frac{\text{Área final}}{\text{Área inicial}} = \frac{2Z}{Z} = 2$$

Sabendo que $k^2 = 2$, é possível reaplicar a mesma relação anterior substituindo Z por x^2 e $2Z$ por y^2. Desta forma, é possível encontrar o valor de y.

$$2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2 \cdot x^2 = y^2$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$$

$$\sqrt{2} \cdot x = y$$

Resposta: Alternativa (d): $y = \sqrt{2}x$.

Questão 03 (MACK): Num triângulo retângulo de área 15 e hipotenusa 10, a altura relativa à hipotenusa mede:

(a) 4

(b) $3,5$

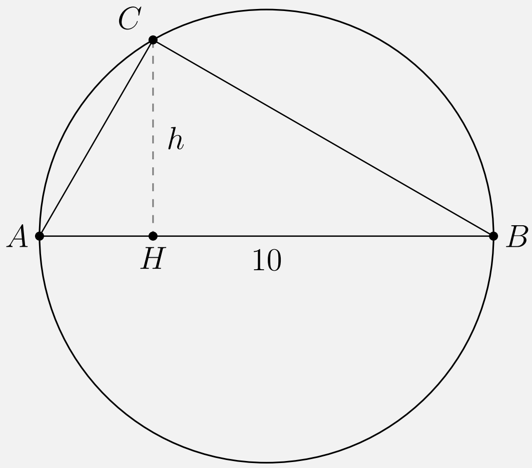
(c) 2

(d) 3

(e) $4,5$

Solução:

Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de diâmetro 10, como o apresentado na figura abaixo.



Observando a figura, fica fácil compreender que a base do triângulo equivale à hipotenusa (10), e sua altura é h. Sabendo que a área tem tamanho 15, basta substituir as informações no cálculo de área do triângulo.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

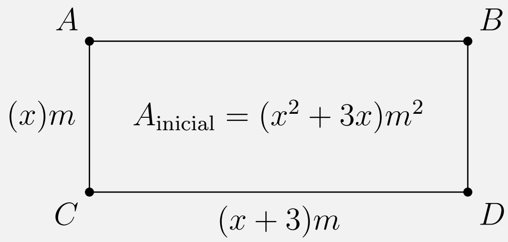
$$15 = \frac{10 \cdot h}{2}$$
$$15 \cdot 2 = 10 \cdot h$$
$$30 = 10 \cdot h$$
$$\frac{30}{10} = h$$
$$3 = h$$

Resposta: Alternativa (d): 3.

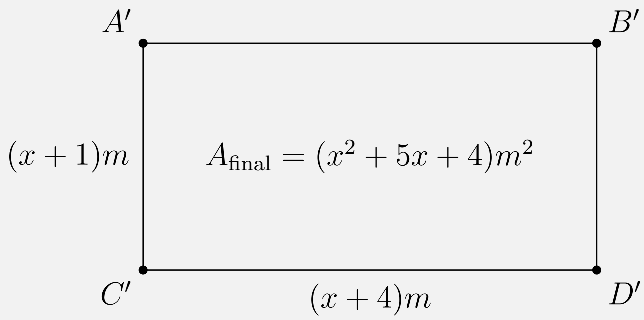
Questão 04 (UFU): Um jardim com formato retangular possui lados cujos comprimentos diferem em 3 metros. Suponha que tenha sido executada uma ampliação do jardim, com o aumento de 1 metro no comprimento de cada um dos seus lados. Sabendo que essa ampliação fez com que a área do jardim aumentasse em $16m^2$, determine a área total do jardim ampliado.

Solução:

Sabendo que o jardim, antes de sua expansão, possuía um de seus lados $3m$ maior que o outro, e possui formato retangular, considere a seguinte figura:



Observação: A área da figura é o produto entre seus lados. Ou seja, $x \cdot (x+3) = x^2+3x$. O enunciado informa que, com um aumento de $16m^2$ de área, os lados deste mesmo jardim aumentaram em 1 (um) metro. Desta forma, a figura que representa o jardim ficará:



Com as informações das figuras, de suas áreas, e do enunciado, é possível estabelecer a seguinte relação entre as áreas:

$$A_{\text{inicial}} + 16m^2 = A_{\text{final}}$$

Substituindo os valores das áreas pelas equações (apresentadas nas figuras), temos que:

$$x^2 + 3x + 16 = x^2 + 5x + 4$$

Basta resolver a equação para encontrar o valor de x.

$$\cancel{x^2} + 3x + 16 = \cancel{x^2} + 5x + 4$$

$$16 - 4 = 5x - 3x$$

$$12 = 2x$$

$$6 = x$$

Sabendo que $x = 6m$, basta substituí-lo na equação da segunda figura. Assim, obteremos a área do jardim ampliado.

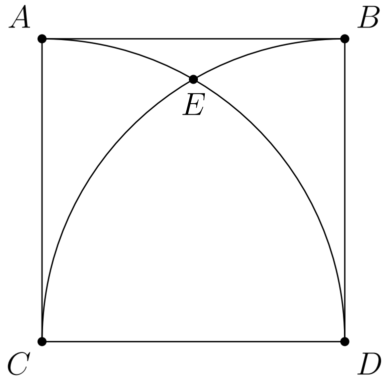
$$A_{\text{final}} = (x^2 + 5x + 4)m^2$$

$$A_{\text{final}} = (6^2 + 5 \cdot 6 + 4)m^2$$

$$A_{\text{final}} = 36 + 30 + 4 = 70m^2$$

Resposta: $70m^2$.

Questão 05 (MACK): Na figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e as curvas são arcos de circunferências com centros em D e em C.



A área do triângulo DCE tem o valor de:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt{3}$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

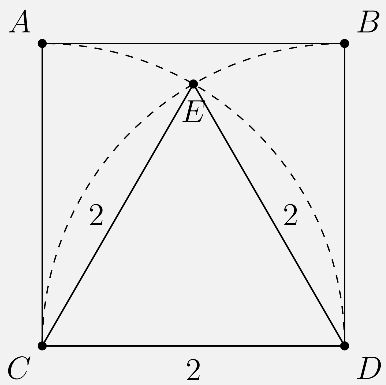
(e) $4\sqrt{3}$

Solução:

Analisando a figura e as informações dadas pelo enunciado, é possível estabelecer algumas conclusões:

- Os lados do quadrado tem medida 2, e o centro dos arcos são os vértices (C, D) da figura;
- Os raios dos arcos têm medida 2, já que encontram os demais ângulos do quadrado;
- O ponto E é a intersecção dos dois arcos;
- A distância de E para os vértices C e D é a mesma, e tem valor 2 (considerando o raio dos arcos).

A partir disto, considere a figura a seguir.



Pela figura e as informações dadas, é possível identificar um triângulo equilátero. Com isso, basta calcular sua área.

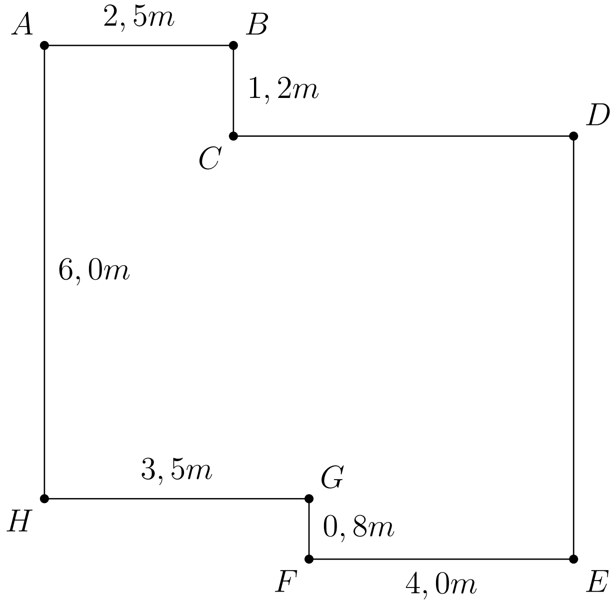
$$A_{\text{equilatero}} = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{equilatero}} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$A_{\text{equilatero}} = \sqrt{3}$$

Resposta: Alternativa (b): $\sqrt{3}$.

Questão 06 (VUNESP): A figura mostra a planta baixa da sala de estar de um apartamento. Sabe-se que duas paredes contíguas quaisquer incidem uma na outra perpendicularmente, e que $\overline{AB} = 2,5m$, $\overline{BC} = 1,2m$, $\overline{EF} = 4,0m$, $\overline{FG} = 0,8m$, $\overline{HG} = 3,5m$ e $\overline{AH} = 6,0m$.



Qual a área dessa sala em metros quadrados?

(a) $37,2$

(b) $38,2$

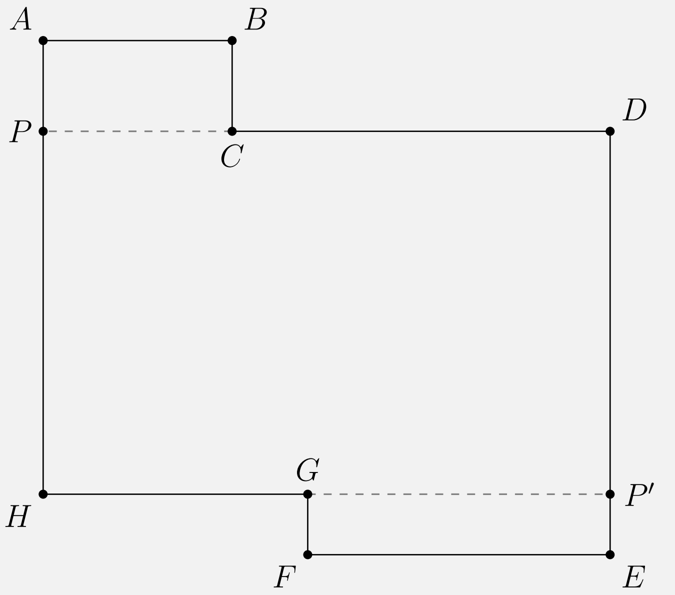
(c) $40,2$

(d) $41,2$

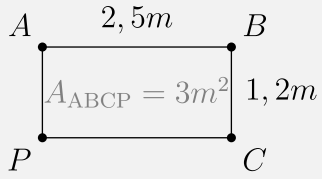
(e) $42,2$

Solução:

Analisando a figura, podemos concluir que para calcular a área total da sala, basta dividi-la em três diferentes figuras retangulares representadas a seguir:

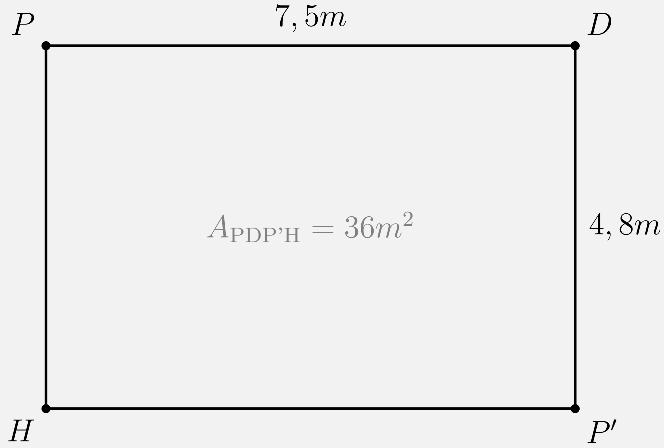


Com isso, basta calcular a área de cada retângulo e, após, somar todas as áreas encontradas para encontrar a área total. Portanto, na primeira figura tem-se:



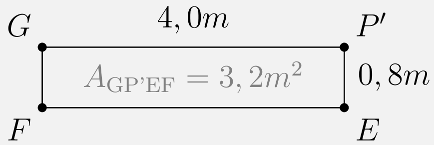
$$A_{\text{ABCP}} = 2,5 \cdot 1,2 = 3m^2$$

Na segunda figura, tem-se:



$$A_{\text{PDP'H}} = 7,5m \cdot 4,8m = 36m^2$$

Na terceira figura, tem-se:



$$A_{\text{GP'EF}} = 4,0m \cdot 0,8m = 3,2m^2$$

A área total da sala é dada pela soma das áreas dos retângulos. Assim:

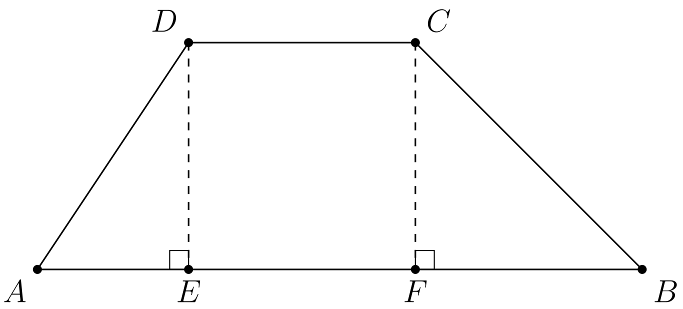
$$A_{\text{sala}} = A_{\text{ABCP}} + A_{\text{PDP'H}} + A_{\text{GP'EF}}$$

Substituindo os valores:

$$A_{\text{sala}} = 3 + 36 + 3,2 = 42,2m^2$$

Resposta: Alternativa (e): $42,2m^2$.

Questão 07 (UEL): Na figura abaixo, tem-se o trapézio $ABCD$, de área $36cm^2$, tal que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$.



A área do retângulo $CDEF$, em centímetros quadrados, é:

(a) 14

(b) 16

(c) 18

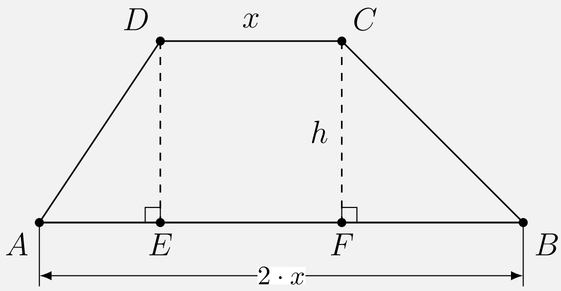
(d) 20

(e) 24

Solução:

Considere $\overline{CD} = x$.
Considere $A_{\text{CDEF}} = x \cdot h$.

Sabendo que $\overline{AB} = 2 \cdot x$, considere a seguinte figura e suas marcações:



Sabendo que a área do trapézio é igual a $36cm^2$, e dadas as informações apresentadas no enunciado e na figura, basta substituí-las no cálculo de área do trapézio.

$$A_{\text{trapezio}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$2 \cdot 36 = (2 \cdot x + x) \cdot h$$

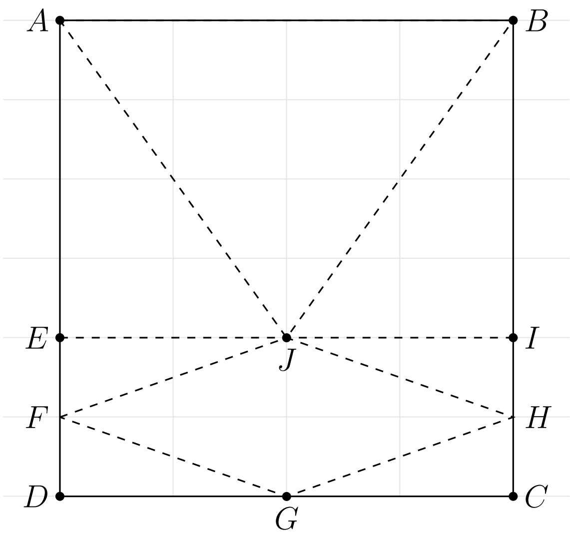
$$72 = 3 \cdot x \cdot h$$

$$\frac{72}{3} = x \cdot h$$

$$x \cdot h = A_{\text{CDEF}} = 24cm^2$$

Resposta: Alternativa (e): $24cm^2$.

Questão 08 (FATEC ♡): Na figura abaixo, os lados do quadrado $ABCD$ medem $6cm$ e os lados AD e BC estão divididos em 6 partes iguais.



Se os pontos G e J são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EI}$, então a razão entre as áreas do losango $FGHJ$ e do triângulo ABJ, nessa ordem, é:

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{5}$

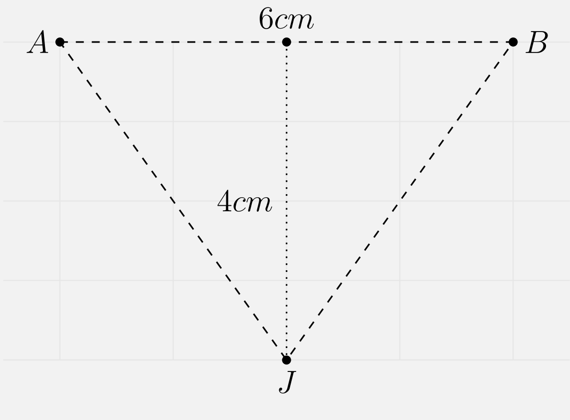
(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{2}$

(e) $\frac{2}{5}$

Solução:

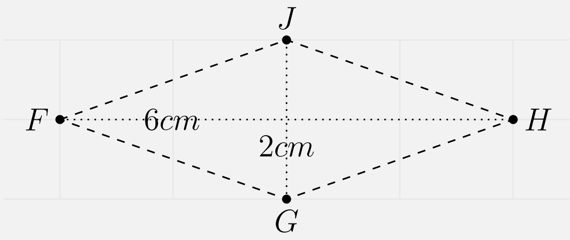
Analisando a figura, e sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lados de medida $6cm$, é possível extrair as seguintes informações do triângulo ABJ:



Sua área, portanto, é dada por:

$$A_{\text{triangulo}} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12cm^2$$

Para o losango, considere a seguinte figura:



Para calcular a área do losango, basta substituir os valores na seguinte fórmula:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Então, tem-se que:

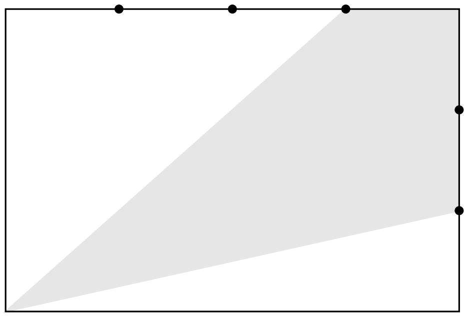
$$A_{\text{losango}} = \frac{6 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 6cm^2$$

Para encontrar a razão (x) entre as áreas do losango e do triângulo, respectivamente, tem-se:

$$x = \frac{A_{\text{losango}}}{A_{\text{triangulo}}} = \frac{6cm^2}{12cm^2} = \frac{1}{2}$$

Resposta: Alternativa (d): $\frac{1}{2}$.

Questão 09 (MACK): Os lados do retângulo da figura, de área 48, foram divididos em partes iguais pelos pontos assinalados.



A área do quadrilátero destacado vale:

(a) 32

(b) 24

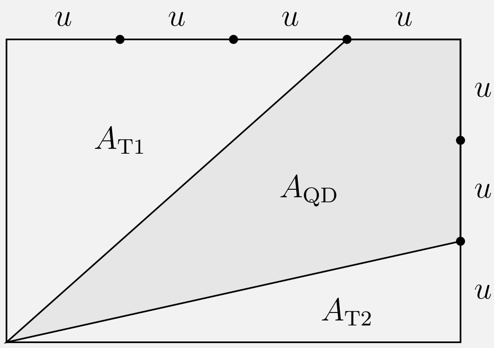
(c) 20

(d) 16

(e) 22

Solução:

Analisando a figura e as informações do enunciado, conclui-se que 4 (u) vezes 3 (u) partes iguais origina em uma área de tamanho 48 (u^2). A partir disto, considere a seguinte imagem:



Para calcular a área do quadrilátero destacado, basta subtrair as áreas dos triângulos A_{T1} e A_{T2} da área total (48). Para tal, é fundamental encontrar o valor de u antes.

$$A = b \cdot h$$

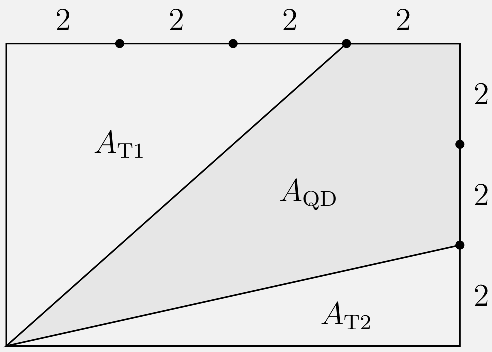
$$48 = 4u \cdot 3u$$

$$48 = 12u^2$$

$$4 = u^2$$

$$u = 2$$

Com isto, a figura fica:



Sabendo que $u = 2$, basta encontrar as áreas A_{T1} e A_{T2}.

$$A_{\mathrm{T1}} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

$$A_{\mathrm{T2}} = \frac{8 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 8$$

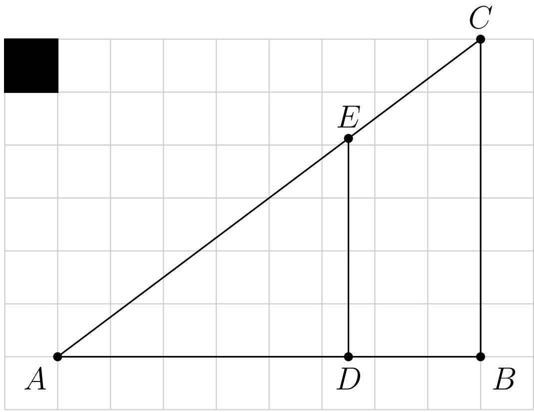
E, então, basta subtrair as áreas encontradas do retângulo (de área 48).

$$A_{\mathrm{QD}} = A_{\mathrm{total}} - A_{\mathrm{T1}} - A_{\mathrm{T2}}$$

$$A_{\mathrm{QD}} = 48 - 18 - 8 = 22$$

Resposta: Alternativa (e): 22.

Questão 10 (FUVEST): No papel quadriculado da figura abaixo, adota-se como unidade de comprimento o lado do quadrado hachurado. $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.



Para que a área do triângulo ADE seja a metade da área do triângulo ABC, a medida de $\overline{AD}$, na unidade adotada, é:

(a) $4\sqrt{2}$

(b) 4

(c) $3\sqrt{3}$

(d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

(e) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

Solução:

Considere $\overline{AB} = 8$ e $\overline{BC} = 6$.
Calculando a área do triângulo ABC, tem-se:

$$A_{\text{ABC}} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24(u^2)$$

A área do triângulo ADE é a metade da área do triângulo ABC. Portanto, sua área tem valor $12(u^2)$.
Sabendo o valor das duas áreas, é possível estabelecer a razão de semelhanças entre áreas, dada por k^2. A relação é a razão da área final pela inicial.

$$k^2 = \frac{A_{\text{ADE}}}{A_{\text{ABC}}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Sabendo que $k^2 = \frac{1}{2}$, podemos encontrar o valor de k.

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A razão de semelhança entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ é dada por $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sabendo que $\overline{AB} = 8$ e considerando $\overline{AD} = x$, tem-se:

$$k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

Substituindo os valores, encontra-se o valor de x:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{8}$$

$$8\sqrt{2} = 2x$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{2} = x$$

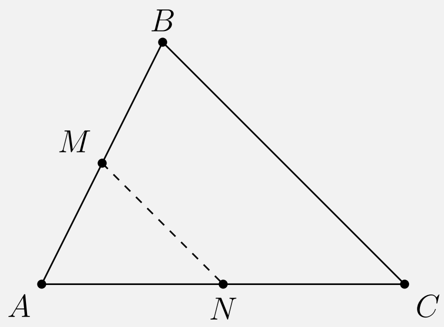
$$4\sqrt{2} = x = \overline{AD}$$

Resposta: Alternativa (a): $4\sqrt{2}$.

Questão 11 (UNICAMP ♡): Um triângulo escaleno ABC tem área igual a $96m^2$. Sejam M e N os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Desenhe uma figura e calcule a área do quadrilátero $BMNC$.

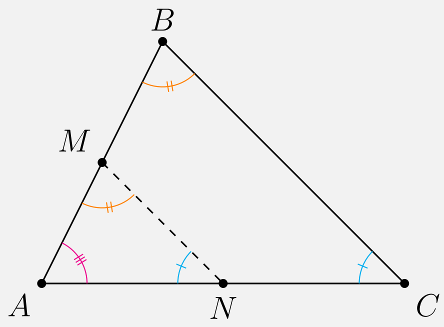
Solução:

Dadas as informações do enunciado, considere o seguinte triângulo:

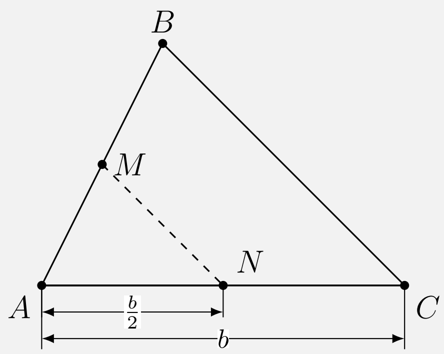


Para resolver este exercício, uma estratégia de solução é subtrair a área do triângulo AMN do triângulo ABC. Desta forma, encontra-se a área do quadrilátero $BMNC$.

Observe que, dadas as relações dos ângulos nos triângulos ABC e AMN, pode-se concluir que são triângulos semelhantes. Portanto, é possível aplicar a razão de semelhança.



Agora, considere os tamanhos de cada segmento dos triângulos. Sabendo que o ponto médio divide um segmento em dois segmentos congruentes, temos a seguinte figura:



Exemplificando: se b é o comprimento do segmento $\overline{AC}$, o comprimento de $\overline{AN}$ é $\frac{b}{2}$.

Aplicando a razão de semelhança entre um dos segmentos dos triângulos ABC e AMN, tem-se:

$$k = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{b}{2}}{b} = \frac{\cancel{b}}{2 \cdot \cancel{b}} = \frac{1}{2}$$

Sabendo que a razão de semelhança (k) é igual a $\frac{1}{2}$, é possível descobrir a razão de semelhança entre áreas. Para isso, basta elevar k ao quadrado.

$$k^2 = k \cdot k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

É preciso da razão de semelhança entre áreas (k^2) para, somente então, encontrar a área do triângulo AMN.

Sabe-se que a razão de semelhança entre áreas de AMN para ABC é $\frac{1}{4}$. Logo, a área de AMN equivale a $\frac{1}{4}$ da área de ABC.

$$A_{\text{AMN}} = \frac{1}{4} \cdot A_{\text{ABC}}$$

Substituindo os valores, tem-se:

$$A_{\text{AMN}} = \frac{1}{4} \cdot 96 = \frac{96}{4} = 24m^2$$

Sabe-se o valor da área do triângulo AMN. Basta subtrair a área de AMN da área de ABC para encontrar a área de $BMNC$.

$$A_{\text{BMNC}} = A_{\text{ABC}} - A_{\text{AMN}}$$

$$A_{\text{BMNC}} = 96m^2 - 24m^2$$

$$A_{\text{BMNC}} = 72m^2$$

Resposta: $72m^2$.