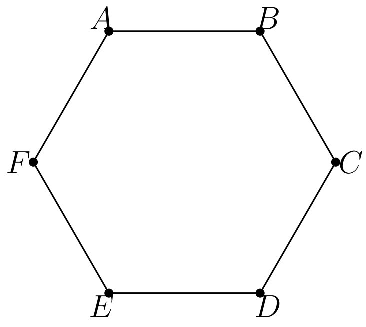
Tarefa Básica 11

Murilo Xavier Lucio

18 de julho de 2021

Questão 01 (UEL): O hexágono $ABCDEF$ da figura é equilátero com lados de $5cm$ e seus ângulos internos de vértice A, B, D e E medem 135° cada um.



A área desse hexágono, em centímetros quadrados, é igual a:

(a) $\frac{25(\sqrt{2}+1)}{2}$

(b) $\frac{75}{2}$

(c) 50

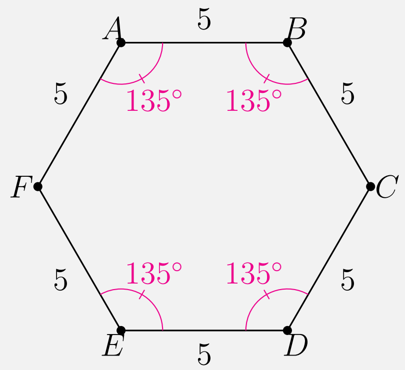
(d) $50\sqrt{2}$

(e) $25(\sqrt{2}+1)$

Solução:

Uma observação fundamental a ser notada neste exercício é que este polígono não é regular (visto que nem todos os vértices são equiângulos). Desta forma, algumas propriedades e conceitos se tornam complexos na sua aplicação.
Desta forma, uma estratégia de solução consiste em encontrar as áreas dos triângulos AFE e BCD, e somá-los com a área do retângulo $ABED$. Assim, é possível encontrar a área total do hexágono apresentado. Para tal, é fundamental descobrir as medidas dos ângulos dos vértices F e C.

Considere a seguinte figura e seus ângulos:



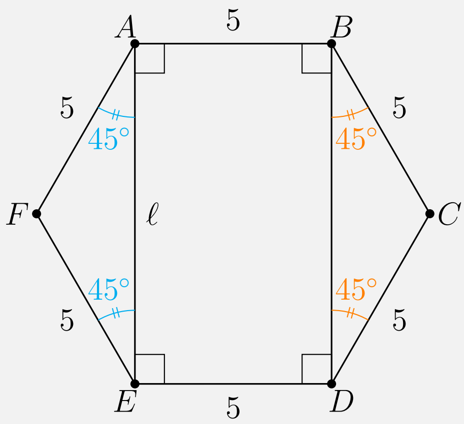
Como a figura se trata de um hexágono, é fundamental relembrar a soma de seus ângulos.

$$S_{\text{hexagono}} = (6-2) \cdot 180° = 720°$$

Sabendo que a soma dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$ é 540°, a soma dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$ é dada por:

$$\hat{C} + \hat{F} = 720° - 540° = 180°$$

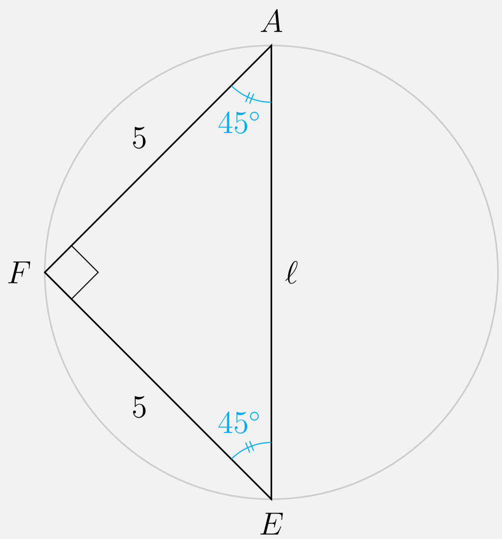
Sabendo a soma dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$, observe a seguinte figura.



Note que, pelos critérios de congruência de triângulos, identifica-se que o triângulo AFB é congruente a BCD. Note também que dois de seus lados são iguais (de tamanho 5), o que configura um triângulo isóceles.
Sabendo que os triângulos são congruentes, os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$ também possuem mesma medida. Desta forma, se a soma destes ângulos dá 180 graus e ambos são iguais, cada um só pode ter a medida de 90°.

$$\hat{C} = \hat{F} = \frac{180°}{2} = 90°$$

Agora, considere apenas o triângulo AFE. Suas medidas angulares e dois de seus lados já são conhecidos.



Por ser um triângulo retângulo, é possível calcular sua área tomando seus catetos como base e altura.

$$S_{\text{AFE}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} cm^2$$

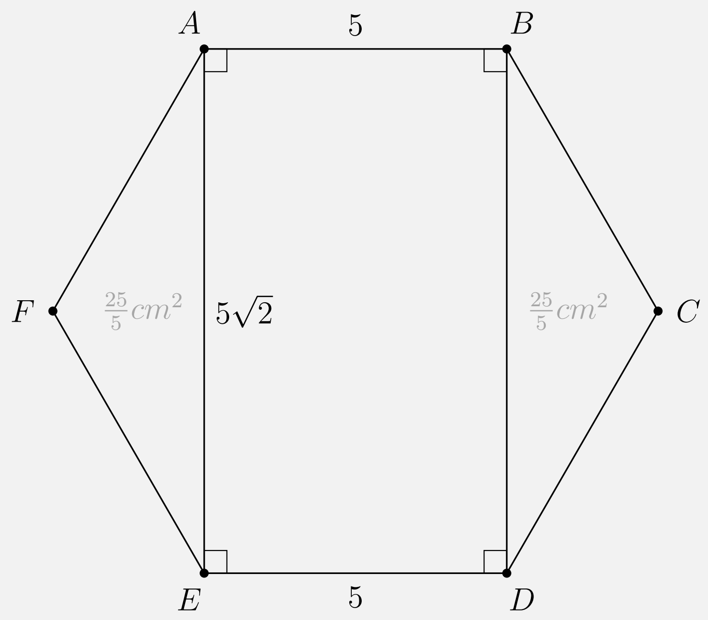
Não esqueça que $S_{\text{AFE}} = S_{\text{BCD}}$.
Para calcular a área do retângulo $ABED$, é necessário encontrar um de seus lados, que também é o lado ℓ do triângulo retângulo na figura apresentada. Aplicar a relação pitagórica é o suficiente para encontrá-lo.

$$\ell^2 = 5^2 + 5^2$$

$$\ell^2 = 50$$

$$\ell = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}cm$$

Agora, observe novamente a figura do hexágono, centrando principalmente nas informações e no retângulo $ABED$.



Para calcular a área do retângulo $ABED$, tem-se:

$$S_{\text{ABED}} = 5 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}cm^2$$

Neste ponto, temos as áreas dos triângulos AFE e BCD, e a área do retângulo $ABED$. Com isto, pode-se calcular a área do hexágono somando estas áreas.

$$S_{\text{hexagono}} = S_{\text{ABED}} + S_{\text{AFE}} + S_{\text{BCD}}$$

$$S_{\text{hexagono}} = 25\sqrt{2} + \frac{25}{2} + \frac{25}{2}$$

$$S_{\text{hexagono}} = 25\sqrt{2} + 25$$

Note aqui que é possível isolar um termo da somatória (o número 25 no caso). Com isto, tem-se que:

$$S_{\text{hexagono}} = 25 \cdot (\sqrt{2} + 1)$$

Resposta: Alternativa (e): $25 \cdot (\sqrt{2} + 1)$

Questão 02 (FATEC): A altura de um triângulo equilátero e a diagonal de um quadrado tem medidas iguais. Se a área do triângulo equilátero é $16 \cdot \sqrt{3} m^2$, então a área do quadrado, em metros quadrados é:

(a) 6

(b) 24

(c) 54

(d) 96

(e) 150

Solução:

A estratégia de solução deste exercício consiste em encontrar o lado ℓ do triângulo equilátero, encontrar sua altura, e em seguida calcular a área do quadrado a partir de sua diagonal.
O exercício fornece uma informação fundamental:

$$h_{\text{equilatero}} = d_{\text{quadrado}}$$

Tomando nota de que a área do triângulo equilátero é de $16\sqrt{3}$ metros quadrados, é possível encontrar seu lado utilizando a fórmula de cálculo de área de um triângulo equilátero. Com isto, tem-se:

$$\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16 \cdot \sqrt{3}$$

$$\ell^2 \cdot \sqrt{3} = 64 \cdot \sqrt{3}$$

$$\ell^2 = \frac{64 \cdot \cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 64$$

$$\ell = \sqrt{64} = 8m$$

Sabendo que os lados de um triângulo equilátero tem medida $8m$, basta encontrar sua altura.

$$h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3} m$$

A altura do triângulo equilátero tem medida $4 \cdot \sqrt{3} m$. Desta forma, a diagonal do quadrado possui mesma medida.
Para calcular a área do quadrado, também é de fundamental importância descobrir um de seus lados. Em termos gerais, a diagonal de um quadrado também é dada por:

$$\ell \cdot \sqrt{2}$$

Construindo uma relação de igualdade com os valores conhecidos, tem-se que:

$$\ell \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

Basta encontrar o lado do quadrado.

$$\ell = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{2} = 2 \cdot \sqrt{6} m$$

A área de um quadrado é dada por ℓ^2. Com isto:

$$\ell^2 = (2 \cdot \sqrt{6})^2 = 4 \cdot 6 = 24m^2$$

Resposta: Alternativa (b): $24m^2$.

Questão 03 (UFSCAR): Seja um triângulo ABC equilátero de lado 2. No interior desse triângulo, cuja área é $\sqrt{3}$, foi escolhido arbitrariamente um ponto P. A soma das distâncias de P a cada um dos lados do triângulo vale:

(a) $\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3}$

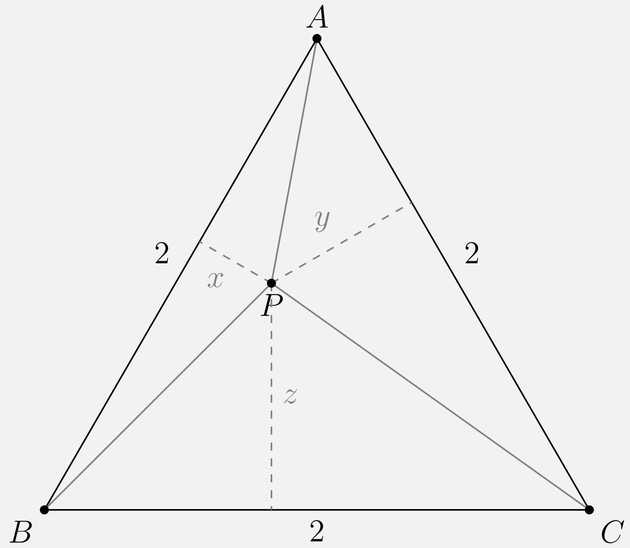
(c) 2

(d) 3

(e) $2\sqrt{3}$

Solução:

Considere a seguinte figura, com um ponto P arbitrariamente selecionado para fins de ilustração.



Observe que os segmentos de retas x, y e z são as distâncias do ponto P aos lados do triângulo, e os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CP}$ são segmentos de retas que vão do ponto P aos vértices do triângulo. Repare que, independente do ponto selecionado dentro do retângulo, é possível encontrar a soma das distâncias dos lados (x, y e z) a partir da soma das áreas dos triângulos APB, APC e BPC formados. Lembre-se que a área do triângulo é dada por:

$$\frac{base \cdot altura}{2}$$

Com isto, temos que:

$$S_{\text{ABC}} = S_{\text{APB}} + S_{\text{APC}} + S_{\text{BPC}} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{ABC}} = \frac{\cancel{2} \cdot x}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2} \cdot y}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2} \cdot z}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

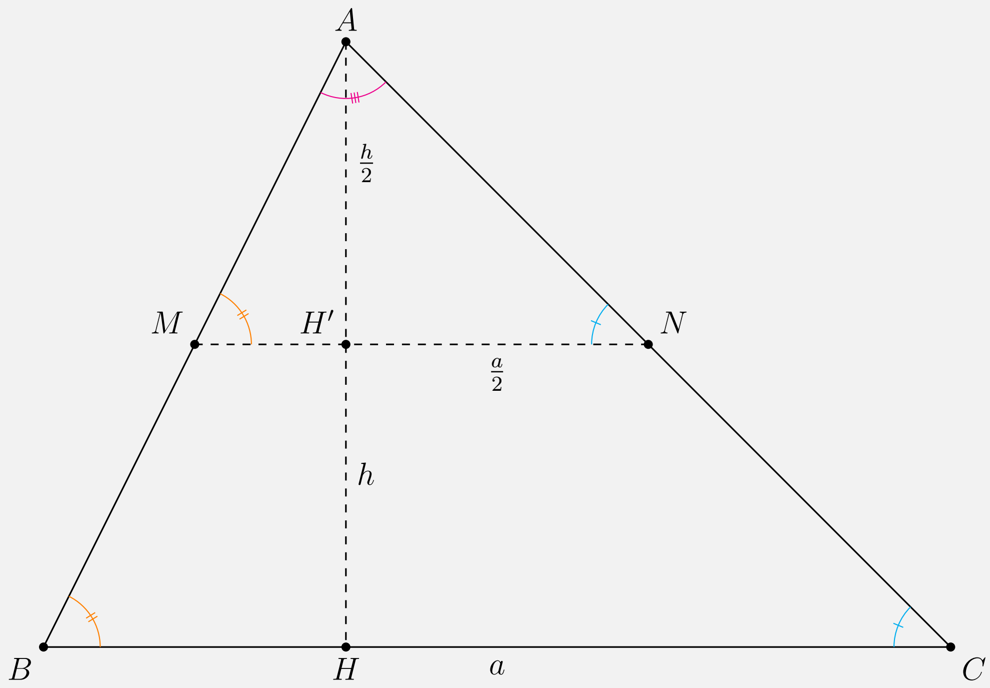
$$x + y + z = \sqrt{3}$$

Resposta: Alternativa (b): $\sqrt{3}$.

Questão 04 (UNICAMP): Um triângulo escaleno ABC tem área igual a $96m^2$. Sejam M e N os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, faça uma figura e calcule a área do quadrilátero $BMNC$.

Solução:

Considere a figura a seguir.



Considere que a razão de semelhança entre os vértices do triângulo AMN para o triângulo ABC é de $\frac{1}{2}$. Desta forma, observe que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AH}$ medem, respectivamente, a e h, e, os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{AH'}$ medem $\frac{a}{2}$ e $\frac{h}{2}$
Sabe-se que a área do triângulo ABC mede $96m^2$. Desta forma, temos:

$$S_{\text{ABC}} = \frac{a \cdot h}{2} = 96m^2$$

$$2 \cdot S_{\text{ABC}} = a \cdot h$$

Agora, considere o cálculo da área do triângulo AMN. Temos que:

$$S_{\text{AMN}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2}$$

Desenvolvendo a igualdade, temos que:

$$S_{\text{AMN}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{\text{AMN}} = \frac{a \cdot h}{8}$$

$$8 \cdot S_{\text{AMN}} = a \cdot h$$

Ora, $a \cdot h$ é também igual a S_{ABC}. Desta forma:

$$a \cdot h = a \cdot h$$

$$2 \cdot S_{\text{ABC}} = 8 \cdot S_{\text{AMN}}$$

$$S_{\text{ABC}} = 4 \cdot S_{\text{AMN}}$$

Sabe-se que a área do triângulo ABC é igual a quatro vezes a área do triângulo AMN. Assim, a área de AMN é:

$$96 = 4 \cdot S_{\text{AMN}}$$

$$S_{\text{AMN}} = \frac{96}{4} = 24m^2$$

Uma vez que a área de AMN seja $24m^2$, basta subtraí-la de ABC para encontrar a área do quadrilátero $BMNC$.

$$S_{\text{BMNC}} = S_{\text{ABC}} - S_{\text{AMN}}$$

$$S_{\text{BMNC}} = 96 - 24 = 72m^2$$

Resposta: $72m^2$.

Questão 05 (FUVEST): O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio $5cm$. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda $\overline{BC}$ mede $6cm$. Então a área do triângulo ABC, em cm^2, vale:

(a) 24

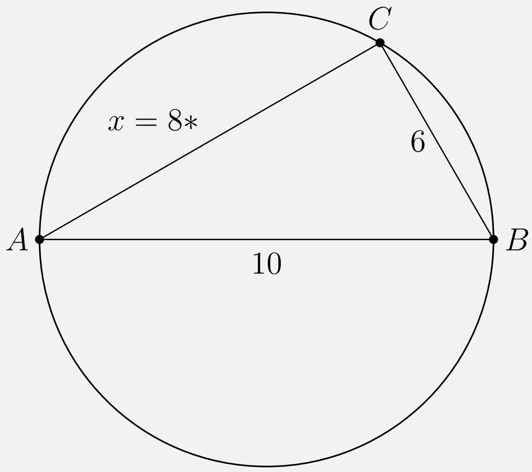
(b) 12

(c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(d) $6\sqrt{2}$

(e) $2\sqrt{3}$

De acordo com o enunciado, temos a figura à seguir. Como o raio mede $5cm$, o diâmetro mede o dobro, ou seja, $10cm$.



* Este é um triângulo retângulo comumente visto em exercícios de vestibulares. Se trata de um triângulo de medidas 3,4,5 (que multiplicado por 2, torna-se um triângulo 6,**8**,10). A partir disto, a corda $\overline{AC}$ tem medida 8.
Sabendo a medida dos lados do triângulo e o raio da circunferência circunscrita, podemos encontrar a área do triângulo.

$$S_{\text{ABC}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

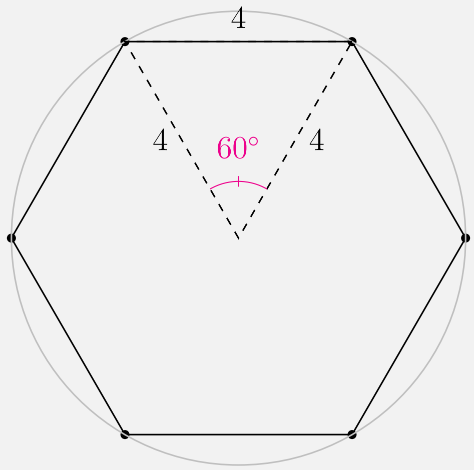
$$S_{\text{ABC}} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{480}{20} = 24cm^2$$

Resposta: Alternativa (a): $24cm^2$.

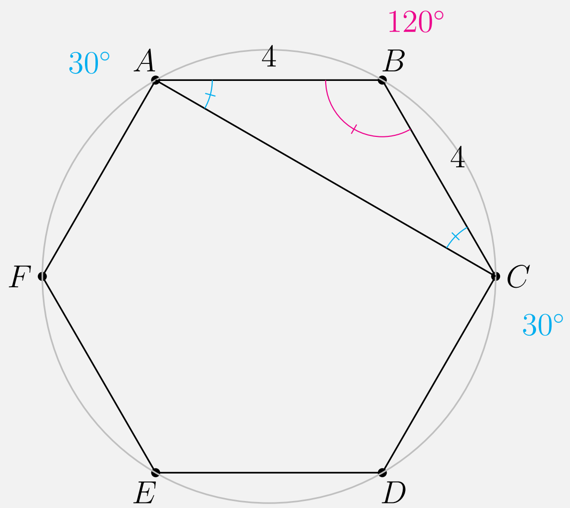
Questão 06 (UFMS): Considere um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 4cm. Calcular o quadrado da área de um dos triângulos determinados por três vértices consecutivos do hexágono.

Solução:

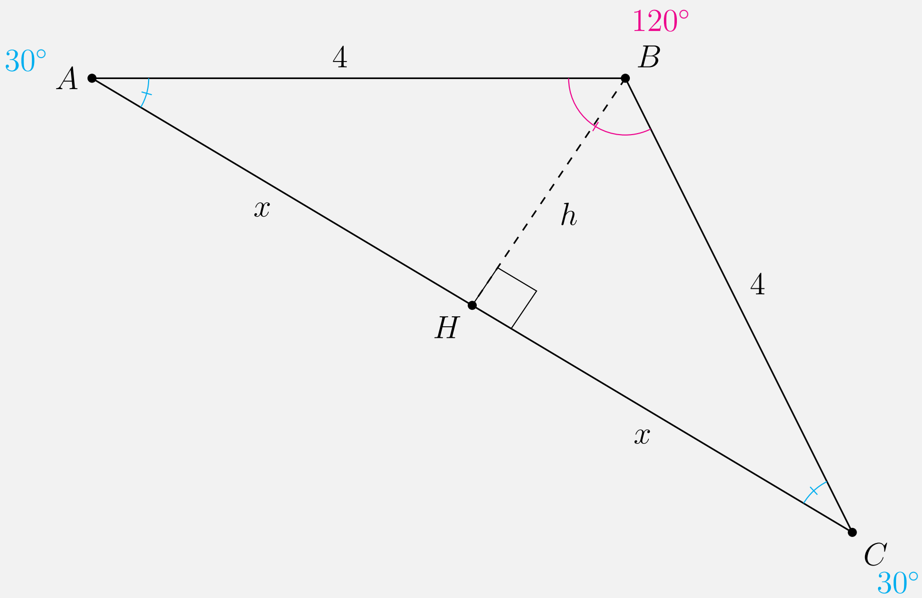
Considere a seguinte figura:



Como se trata de uma figura regular e seu raio circunscrito tem medida $4cm$, é possível identificar que os ládos do hexágono também medem $4cm$, a partir dos triângulos equiláteros que são formados em seu interior.
Sabendo que seus lados medem $4cm$, e que cada ângulo interior dos vértices do hexágono mede $120°(\frac{720}{6} = 120°)$, considere a seguinte figura:



Observe o triângulo ABC. Para calcular sua área, temos de encontrar sua base e sua altura. Para tal considere também a próxima figura.



Observe na figura o ângulo $\hat{C}$, que tem medida 30°. Sabendo que o triângulo BHC é retângulo, podemos utilizar a trigonometria para encontrar os lados x e h utilizando, respectivamente, o cosseno e seno do ângulo $\hat{C}$.

$$x = cos30° \cdot 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2 \cdot \sqrt{3}cm$$

$$h = sen30° \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2cm$$

Com isto, é possível afirmar que a base do triângulo ABC é $4\sqrt{3}cm$, uma vez que a base seja igual a $2x$ (como apresentado na figura), e sua altura tem medida 2cm.
Com estas informações, basta calcular sua área.

$$S_{\text{ABC}} = \frac{2 \cdot x \cdot h}{2}$$

$$S_{\text{ABC}} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 4\sqrt{3}cm^2$$

O enunciado pede o quadrado da área deste triângulo. Desta forma, tem-se:

$$S_{\text{ABC}}^2 = (4\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48cm^2$$

Resposta: $48cm^2$.