PROJETO 2 - CMI042

Murilo Stellfeld de Oliveira Poloi - GRR20185705
UFPR - Matemática Industrial
murlo.poloi@gmail.com

1. Exercício 1:

O seguinte roteiro foi utilizado para aplicar SVD em imagens: https://www.frankcleary.com/svdimage/

1.1. a)

A matriz obtida a partir da imagem será omitida devido ao seu tamanho, porém, a mesma é obtida conforme o roteiro acima, assim como sua decomposição SVD.

1.2. b):

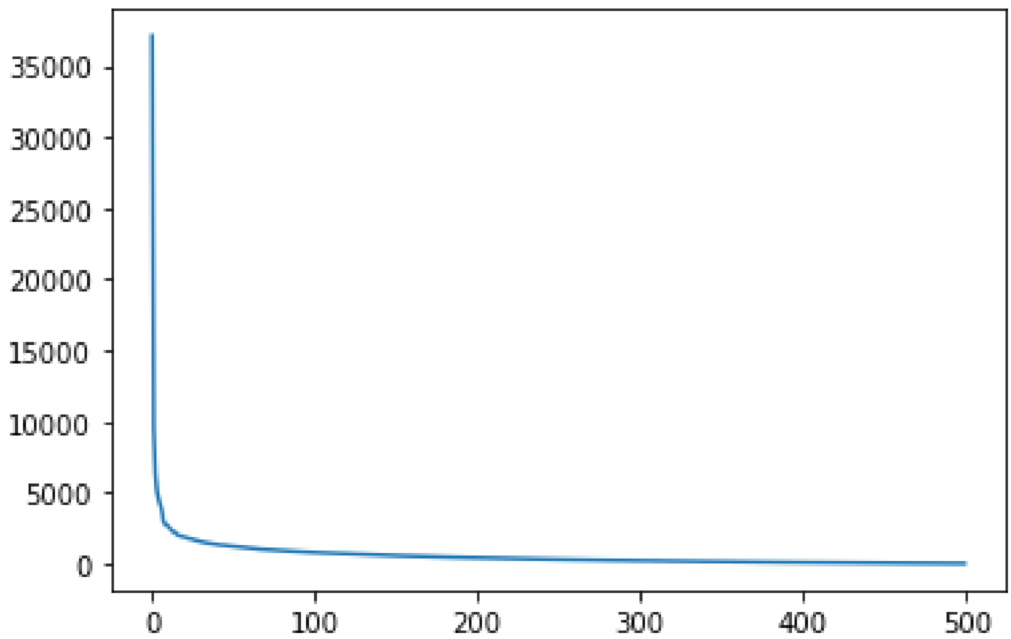

Figura 1: Representação gráfica dos valores singulares da imagem

1.3. c):

As fórmulas de fato usadas para calcular a taxa de compressão percentual e o erro médio quadrático foram usadas como $R = \frac{100k(m+n+1)}{mn}$ e $E_k = \frac{mn}{\|A - A_k\|}$ pois ao analisar os valores que resultavam delas, notou-se que haviam taxas de compressão percentual acima de 100% e os erros médios quadráticos estavam crescentes.

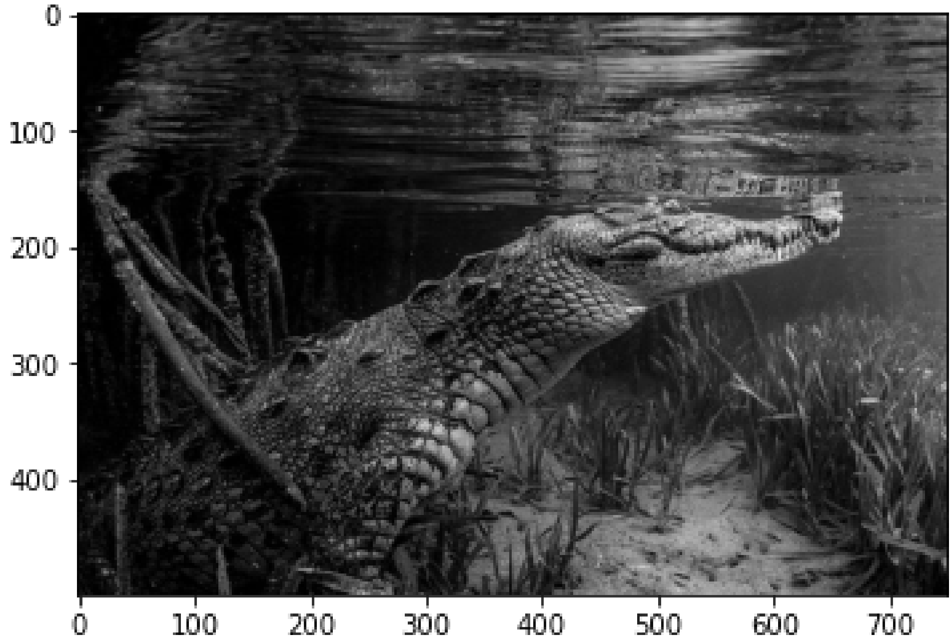

Figura 2: Imagem original.

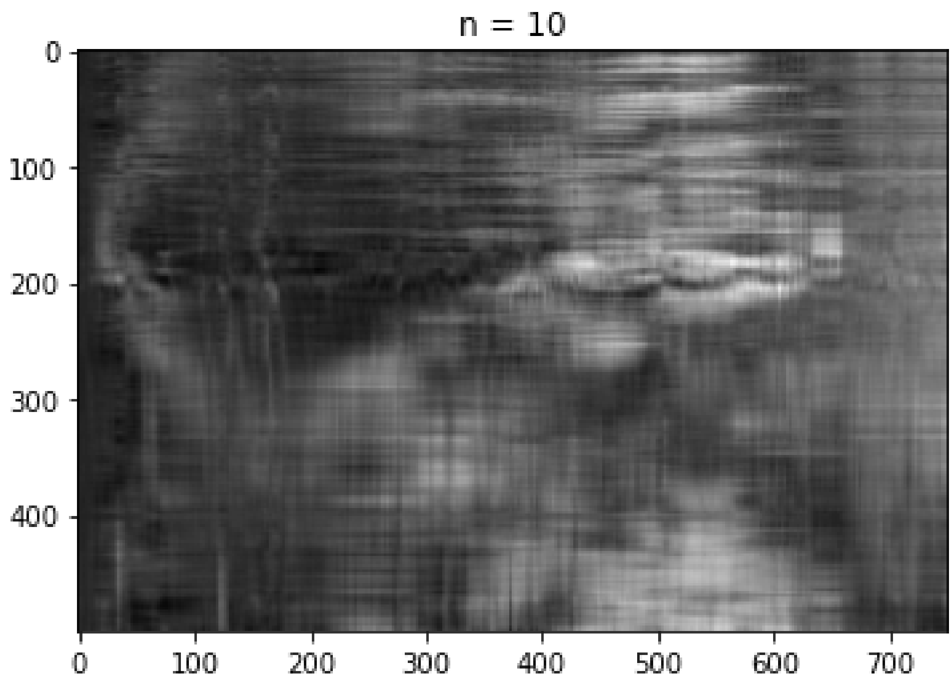

Figura 3: Reconstrução da imagem com modo 10.

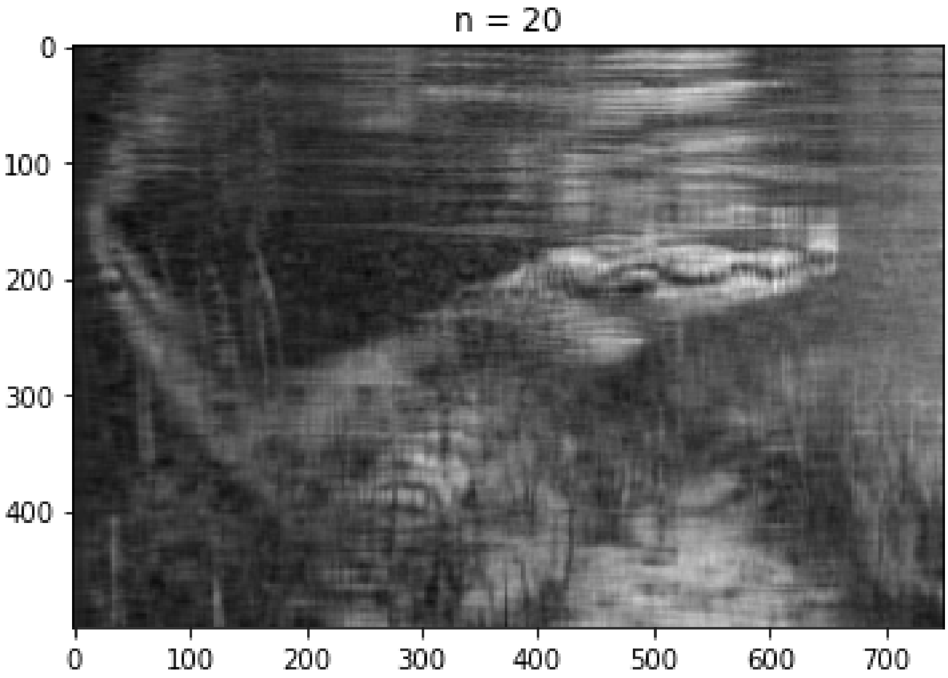

Figura 4: Reconstrução da imagem com modo 20.

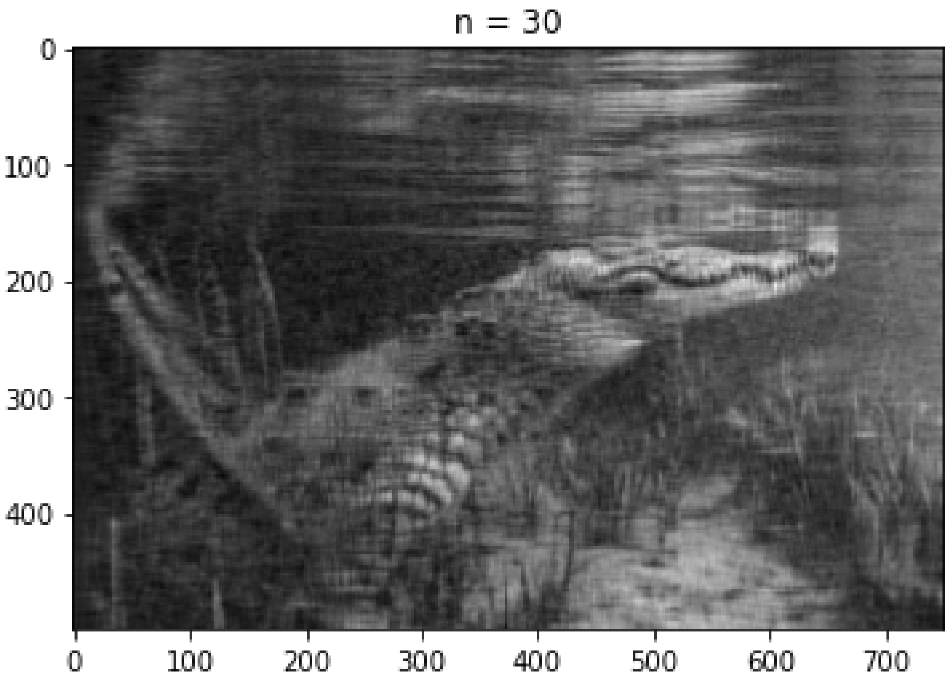

Figura 5: Reconstrução da imagem com modo 30.

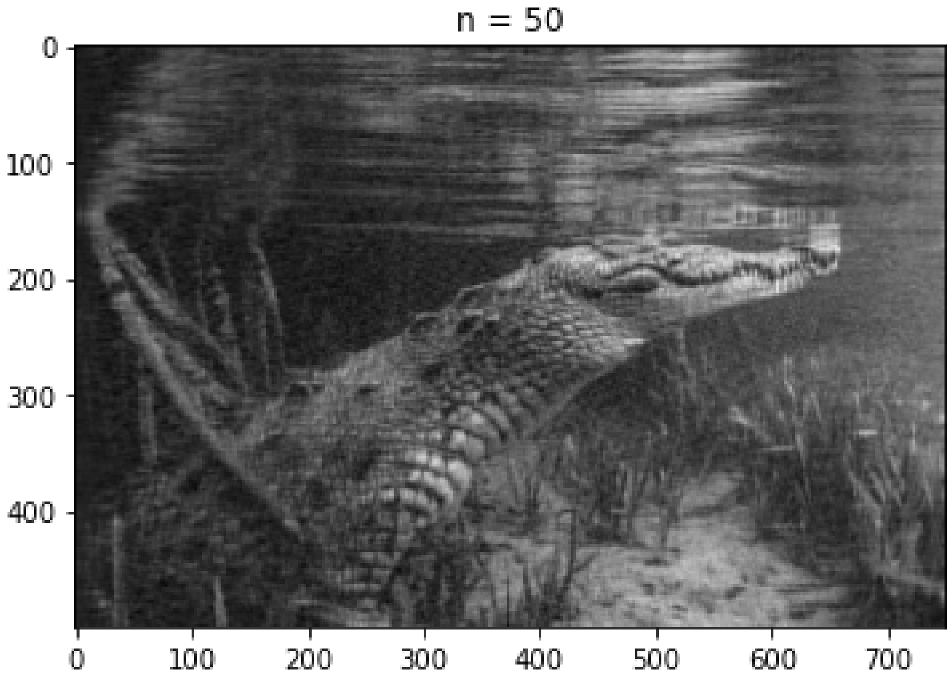

Figura 6: Reconstrução da imagem com modo 50.

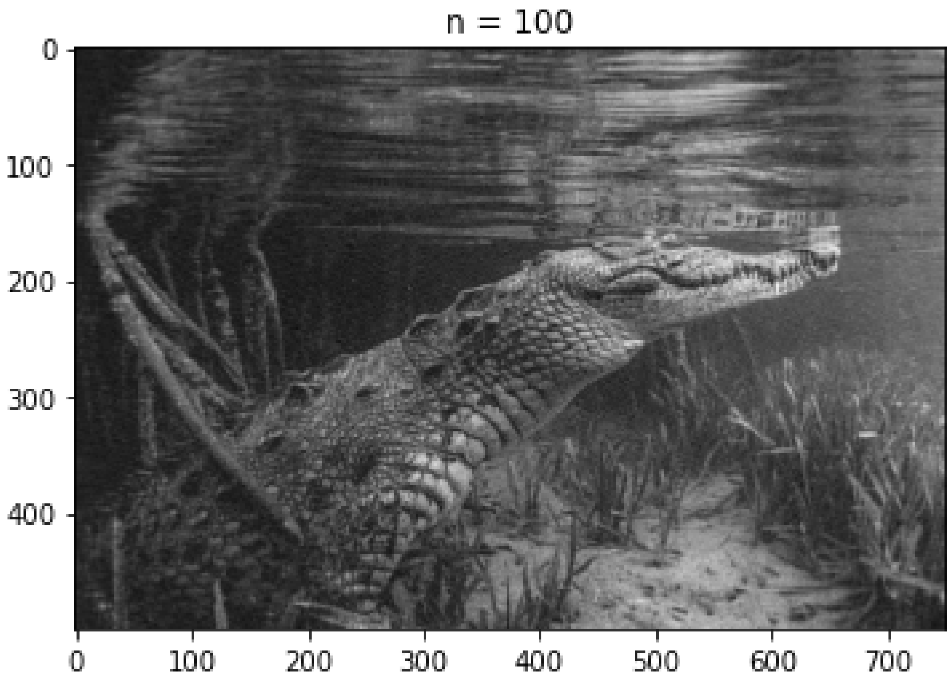

Figura 7: Reconstrução da imagem com modo 100.

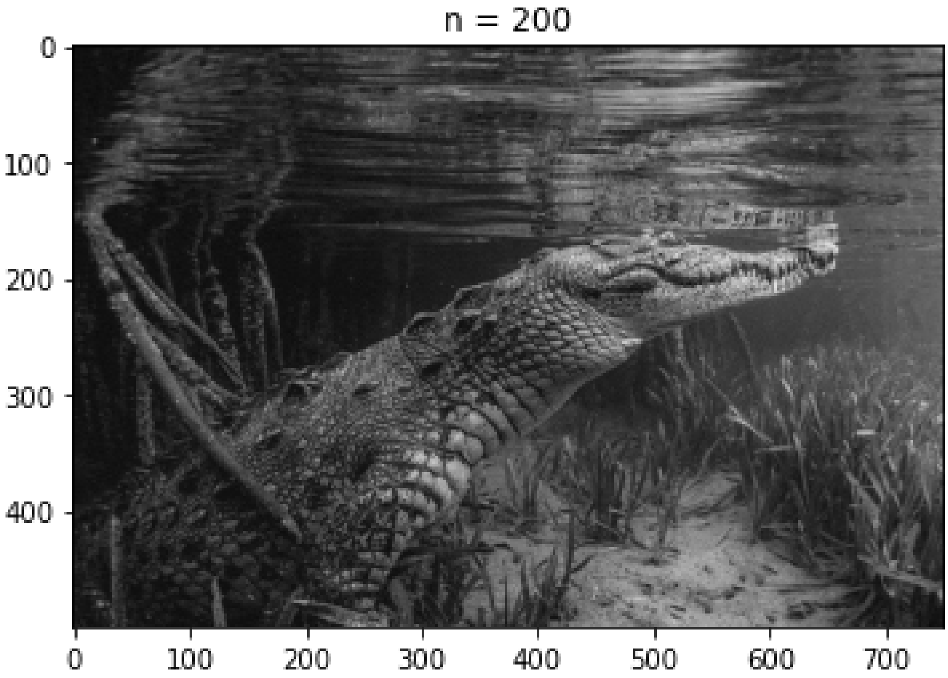

Figura 8: Reconstrução da imagem com modo 200.

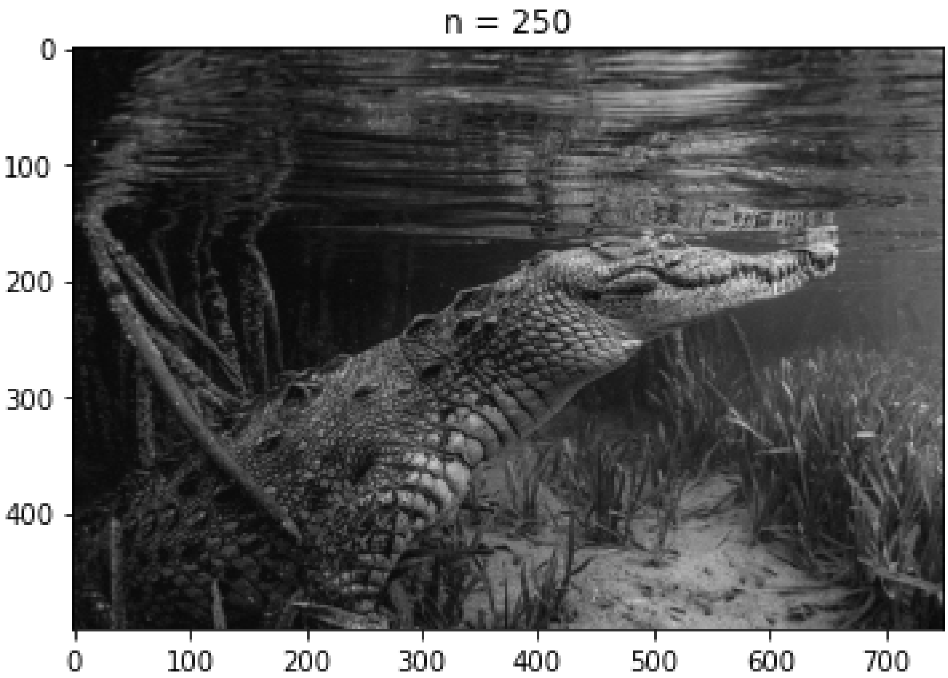

Figura 9: Reconstrução da imagem com modo 250.

Modos	Tx. de compressão %	Erro médio quadrático
10	3.336	10.852
20	6.672	3.840
30	10.008	2.251
50	16.68	1.226
100	33.36	0.587
200	66.72	0.315
250	83.4	0.270

2. Exercício 2:

2.1. a):

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0e-10 & 1.0e-20 & 1.0e-30 & 1.0e-40 & 1.0e-50 \\ 1.0 & 1.0e-9 & 1.0e-18 & 1.0e-27 & 1.0e-36 & 1.0e-45 \\ 1.0 & 1.0e-8 & 1.0e-16 & 1.0e-24 & 1.0e-32 & 1.0e-40 \\ 1.0 & 1.0e-7 & 1.0e-14 & 1.0e-21 & 1.0e-28 & 1.0e-35 \\ 1.0 & 1.0e-6 & 1.0e-12 & 1.0e-18 & 1.0e-24 & 1.0e-30 \\ 1.0 & 1.0e-5 & 1.0e-10 & 1.0e-15 & 1.0e-20 & 1.0e-25 \\ 1.0 & 0.0001 & 1.0e-8 & 1.0e-12 & 1.0e-16 & 1.0e-20 \\ 1.0 & 0.001 & 1.0e-6 & 1.0e-9 & 1.0e-12 & 1.0e-15 \\ 1.0 & 0.01 & 0.0001 & 1.0e-6 & 1.0e-8 & 1.0e-10 \\ 1.0 & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 1.0e-5 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Note que A é uma matriz 11x6 e portanto não admite inversa, portanto usamos sua pseudo-inversa, A^+.

$\mathtt{cond}(A) = \|A\|\|A^+\| = 7.3\text{x}10^{10}$.

Novamente usamos a pseudo-inversa de ${}^TA$ pois a matriz original tem $\det(A^TA) = 0$, ou seja, não possui inversa.

$\mathtt{cond}(A^TA) = \|A^TA\|\|(A^TA)^+\| = 2.83\text{x}10^{13}$.

2.2. b):

Para resolver o problema no sentido dos quadrados minímos com equações normais, basta resolver o sitema $(A^TA)\bar{a} = (A^T\tilde{b})$

Note que não conseguimos resolver o sistema via equações normais devido a singularidade de A^TA.

2.3. c):

O $\tilde{b}$ obtido foi:

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1.000000000319151 \\ 1.0000000010940948 \\ 1.0000000100438697 \\ 1.0000001000518761 \\ 1.000001000272732 \\ 1.0000100000700827 \\ 1.0001000096769226 \\ 1.0010010006549706 \\ 1.0101010100019265 \\ 1.1111100001486796 \\ 5.999999999962692 \end{bmatrix}$$

Utilizando alguma função pronta para obter U, S, V da decomposição SVD, podemos resolver o sistema fazendo $\hat{x} = VS^{-1}U^T\tilde{b}$, ou seja,

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1.0000000001192366 \\ 0.9999949719524042 \\ 1.0050638281037132 \\ 0.494040471784181 \\ 6.009054742040767 \\ -3.5081554863265048 \end{bmatrix}$$

ou ainda, resolvendo via $\hat{x} = A^{+}\tilde{b}$, temos que:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1.0000000001192364 \\ 0.9999949719523978 \\ 1.0050638299677228 \\ 0.4940403525748913 \\ 6.009056651252046 \\ -3.508155486328322 \end{bmatrix}$$

2.4. d):

Para a letra c), obtemos para o primeiro método e resolução: $\mathtt{Erro}_a = 6.758$, e para o segundo, $\mathtt{Erro}_a = 6.758$.

Usando como critério o erro calculado e considerando todas as casas decimais possíveis, têm-se que o primeiro método utilizado para a resolução forneceu um erro menor para este caso.

2.5. e):

As quatro primeiras colunas de δb são:

$$\delta b_1 = \begin{bmatrix} -0.0061288 & -0.00061288 & -6.1288\text{x}10^{-5} & -6.1288\text{x}10^{-6} \\ 0.166411 & 0.0166411 & 0.00166411 & 0.000166411 \\ 0.0564344 & 0.00564344 & 0.000564344 & 5.64344\text{x}10^{-5} \\ 0.151056 & 0.0151056 & 0.00151056 & 0.000151056 \\ 0.012015 & 0.0012015 & 0.00012015 & 1.2015\text{x}10^{-5} \\ 0.0887275 & 0.00887275 & 0.000887275 & 8.87275\text{x}10^{-5} \\ -0.0580855 & -0.00580855 & -0.000580855 & -5.80855\text{x}10^{-5} \\ 0.0417439 & 0.00417439 & 0.000417439 & 4.17439\text{x}10^{-5} \\ -0.00243264 & -0.000243264 & -2.43264\text{x}10^{-5} & -2.43264\text{x}10^{-6} \\ -0.121766 & -0.0121766 & -0.00121766 & -0.000121766 \\ 0.148113 & 0.0148113 & 0.00148113 & 0.000148113 \end{bmatrix}$$

As quatro seguintes colunas de δb são:

$$\delta b_2 = \begin{bmatrix} -6.1288\text{x}10^{-7} & -6.1288\text{x}10^{-8} & -6.1288\text{x}10^{-9} & -6.1288\text{x}10^{-10} \\ 1.66411\text{x}10^{-5} & 1.66411\text{x}10^{-6} & 1.66411\text{x}10^{-7} & 1.66411\text{x}10^{-8} \\ 5.64344\text{x}10^{-6} & 5.64344\text{x}10^{-7} & 5.64344\text{x}10^{-8} & 5.64344\text{x}10^{-9} \\ 1.51056\text{x}10^{-5} & 1.51056\text{x}10^{-6} & 1.51056\text{x}10^{-7} & 1.51056\text{x}10^{-8} \\ 1.2015\text{x}10^{-6} & 1.2015\text{x}10^{-7} & 1.2015\text{x}10^{-8} & 1.2015\text{x}10^{-9} \\ 8.87275\text{x}10^{-6} & 8.87275\text{x}10^{-7} & 8.87275\text{x}10^{-8} & 8.87275\text{x}10^{-9} \\ -5.80855\text{x}10^{-6} & -5.80855\text{x}10^{-7} & -5.80855\text{x}10^{-8} & -5.80855\text{x}10^{-9} \\ 4.17439\text{x}10^{-6} & 4.17439\text{x}10^{-7} & 4.17439\text{x}10^{-8} & 4.17439\text{x}10^{-9} \\ -2.43264\text{x}10^{-7} & -2.43264\text{x}10^{-8} & -2.43264\text{x}10^{-9} & -2.43264\text{x}10^{-10} \\ -1.21766\text{x}10^{-5} & -1.21766\text{x}10^{-6} & -1.21766\text{x}10^{-7} & -1.21766\text{x}10^{-8} \\ 1.48113\text{x}10^{-5} & 1.48113\text{x}10^{-6} & 1.48113\text{x}10^{-7} & 1.48113\text{x}10^{-8} \end{bmatrix}$$

As últimas três colunas de δb são:

$$\delta b_3 = \begin{bmatrix} -6.1288\text{x}10^{-11} & -6.1288\text{x}10^{-12} & -6.1288\text{x}10^{-13} \\ 1.66411\text{x}10^{-9} & 1.66411\text{x}10^{-10} & 1.66411\text{x}10^{-11} \\ 5.64344\text{x}10^{-10} & 5.64344\text{x}10^{-11} & 5.64344\text{x}10^{-12} \\ 1.51056\text{x}10^{-9} & 1.51056\text{x}10^{-10} & 1.51056\text{x}10^{-11} \\ 1.2015\text{x}10^{-10} & 1.2015\text{x}10^{-11} & 1.2015\text{x}10^{-12} \\ 8.87275\text{x}10^{-10} & 8.87275\text{x}10^{-11} & 8.87275\text{x}10^{-12} \\ -5.80855\text{x}10^{-10} & -5.80855\text{x}10^{-11} & -5.80855\text{x}10^{-12} \\ 4.17439\text{x}10^{-10} & 4.17439\text{x}10^{-11} & 4.17439\text{x}10^{-12} \\ -2.43264\text{x}10^{-11} & -2.43264\text{x}10^{-12} & -2.43264\text{x}10^{-13} \\ -1.21766\text{x}10^{-9} & -1.21766\text{x}10^{-10} & -1.21766\text{x}10^{-11} \\ 1.48113\text{x}10^{-9} & 1.48113\text{x}10^{-10} & 1.48113\text{x}10^{-11} \end{bmatrix}$$

que nos forneceu as seguines soluções para cada respectivo δb:

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.06096 & 1.0061 & 1.00061 & 1.00006 \\ -348.244 & -33.9244 & -2.49244 & 0.650756 \\ 3.16851\text{x}10^{5} & 31686.0 & 3169.5 & 317.85 \\ -3.11491\text{x}10^{7} & -3.11491\text{x}10^{6} & -3.1149\text{x}10^{5} & -31148.1 \\ 2.77074\text{x}10^{8} & 2.77074\text{x}10^{7} & 2.77074\text{x}10^{6} & 2.77075\text{x}10^{5} \\ 3.0818\text{x}10^{7} & 3.0818\text{x}10^{6} & 3.0818\text{x}10^{5} & 30818.1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 1.00001 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.965076 & 0.996508 & 0.999651 & 0.999965 \\ 32.685 & 4.1685 & 1.31685 & 1.03169 \\ -3113.91 & -310.492 & -30.1501 & -2.11589 \\ 27708.5 & 2771.84 & 278.172 & 28.8051 \\ 3081.92 & 308.301 & 30.9388 & 3.20263 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.999997 & 1.0 & 1.0 \\ 1.00317 & 1.00032 & 1.00003 \\ 0.687523 & 0.967866 & 0.9959 \\ 3.86842 & 1.37475 & 1.12538 \\ 0.429013 & 0.151651 & 0.123915 \end{bmatrix}$$

2.6. f):

$$\mathtt{Erro}_a = \begin{bmatrix} 2.8051781524286914\text{x}10^{8} \\ 2.8051781524288066\text{x}10^{7} \\ 2.8051781524267476\text{x}10^{6} \\ 280517.8152430002 \\ 28051.781538019328 \\ 2805.178291137437 \\ 280.51920778846653 \\ 28.06572632535562 \\ 2.9413427562552807 \\ 0.9279903713583947 \\ 0.8850209635039678 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{Erro}_b = \begin{bmatrix} 0.32192622721071773 \\ 0.03219262272107177 \\ 0.003219262272107177 \\ 0.00032192622721071774 \\ 3.219262272107177\text{x}10^{-5} \\ 3.219262272107177\text{x}10^{-6} \\ 3.2192622721071765\text{x}10^{-7} \\ 3.219262272107177\text{x}10^{-8} \\ 3.2192622721071776\text{x}10^{-9} \\ 3.2192622721071766\text{x}10^{-10} \\ 3.219262272107177\text{x}10^{-11} \end{bmatrix}$$

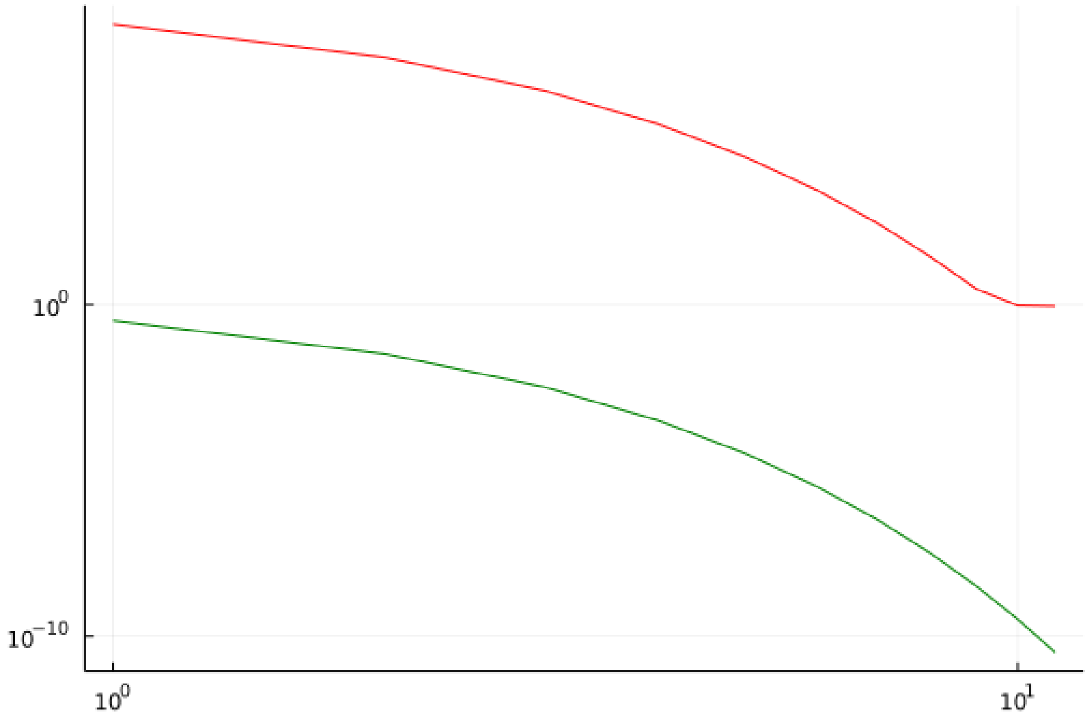

Figura 10: Representação em escala logarítmica de $\mathtt{erro}_a \mathtt{x} \mathtt{erro}_b$

2.7. g):

Sendo os elementos da diagonal da matriz S, da decomposição SVD:

$$\begin{bmatrix} 3.4315598794145354 \\ 2.056162079008163 \\ 0.08243666808507952 \\ 0.0007244300719504885 \\ 6.640573520304083\text{x}10^{-7} \\ 5.4804937345545984\text{x}10^{-11} \end{bmatrix}$$

Nota-se que há três valores singulares próximos de zero (para uma tolerância de 10^{-3}). Levando-se em consideração também o número de condição da matriz, espera-se que as soluções não sejam boas soluções.

3. Exercício 3:

3.1. a):

A implementação pode ser acessada em `https://github.com/murlopoloi/CMI042murlo`

3.2. b):

Para a matriz A: O autovalor dominante da matriz A é 8.5844. O método das potências implementado encontrou o valor aproximado do autovalor dominante como sendo 8.4 em três iterações, para dado cri- tério de convergência.

Para a matriz B: O autovalor dominante da matriz B é 6. O método das potências implementado encontrou o valor aproximado do autovalor dominante como sendo 5.2727 em três iterações, para dado cri- tério de convergência.

Para o critério de convergência estabelecido no enunciado, o método conver- giu no mesmo número de iterações para ambas matrizes A e B. Porém, a matriz que se aproximou melhor da solução foi a matriz A.