PROJETO 1 - CMI042

Murilo Stellfeld de Oliveira Poloi - GRR20185705
UFPR - Matemática Industrial
murlo.poloi@gmail.com

1. Exercício 1:

1.1. a)

1.1.1. n = 4:

O palpite inicial para todos os métodos de resolução é:
$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.882 & 0.216 & 0.731 & 0.817 \end{bmatrix}^T$, e ainda, maxiter = 100 e $\omega = 1.22$.

- Para a fatoração LU temos x^* :
$x^* = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \end{bmatrix}$, com erro relativo $1.04\text{x}10^{-13}$ e resíduo 0;
- Para a decomposição de Cholesky temos x^* :
$x^* = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \end{bmatrix}$, com erro relativo $2.03\text{x}10^{-13}$ e resíduo 0;
- Para o Método de Jacobi, com $maxiter$, temos x^* :
$x^* = \begin{bmatrix} 1.073\text{x}10^{40} \\ 2.147\text{x}10^{40} \\ 2.742\text{x}10^{40} \\ 3.130\text{x}10^{40} \end{bmatrix}$, com erro relativo 1 e resíduo $5.27\text{x}10^{40}$;
- Para o Método de Gauss Seidel, com 12 iterações, temos x^* :
$x^* = \begin{bmatrix} 1.013 \\ 0.941 \\ 1.054 \\ 0.993 \end{bmatrix}$, com erro relativo 0.0406 e resíduo 0.00124;
- Para o Método SOR, com 71 iterações, temos x^* :
$x^* = \begin{bmatrix} 1.002 \\ 0.981 \\ 1.0396 \\ 0.975 \end{bmatrix}$, com erro relativo 0.025 e resíduo $2.626\text{x}10^{-5}$.

1.1.2. n = 10:

O palpite inicial para todos os métodos de resolução é:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.642 \\ 0.898 \\ 0.676 \\ 0.102 \\ 0.787 \\ 0.551 \\ 0.647 \\ 0.214 \\ 0.179 \\ 0.444 \end{bmatrix}$$, e ainda, maxiter $=$ 100 e $\omega = 1.22$.

- Para a fatoração LU temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$, com erro relativo 0.00024 e resíduo $7.2\text{x}10^{-16}$;

- Para a decomposição de Cholesky temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 0.999 \end{bmatrix}$$, com erro relativo $6.17\text{x}10^{-5}$ e resíduo $5.98\text{x}10^{-16}$;

- Para o Método de Jacobi, com $maxiter$, temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.880\text{x}10^{87} \\ 4.400\text{x}10^{87} \\ 6.159\text{x}10^{87} \\ 7.494\text{x}10^{87} \\ 8.554\text{x}10^{87} \\ 9.420\text{x}10^{87} \\ 1.014\text{x}10^{88} \\ 1.075\text{x}10^{88} \\ 1.128\text{x}10^{88} \\ 1.174\text{x}10^{88} \end{bmatrix}$$, com erro relativo 1 e resíduo $3.033\text{x}10^{88}$;

- Para o Método de Gauss Seidel, com 74 iterações, temos x^*:

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 0.941 \\ 1.028 \\ 0.639 \\ 1.402 \\ 1.184 \\ 1.265 \\ 0.801 \\ 0.730 \\ 0.955 \end{bmatrix}$$, com erro relativo 0.222 e resíduo 0.001;

- Para o Método SOR, com $maxiter$, temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.001 \\ 1.036 \\ 0.981 \\ 0.583 \\ 1.367 \\ 1.171 \\ 1.271 \\ 0.820 \\ 0.757 \\ 0.988 \end{bmatrix}$$, com erro relativo 0.219 e resíduo 0.0004.

1.1.3. $n = 20$:

O palpite inicial para todos os métodos de resolução é:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.994 \\ 0.155 \\ 0.173 \\ 0.562 \\ 0.549 \\ 0.522 \\ 0.595 \\ 0.816 \\ 0.991 \\ 0.768 \\ 0.206 \\ 0.271 \\ 0.467 \\ 0.642 \\ 0.233 \\ 0.959 \\ 0.612 \\ 0.326 \\ 0.990 \\ 0.367 \end{bmatrix}$$, e ainda, maxiter $= 100$ e $\omega = 1.22$.

- Para a fatoração LU temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 1.002 \\ 0.956 \\ 1.328 \\ -0.295 \\ 3.258 \\ 2.069 \\ -9.399 \\ 9.212 \\ 27.984 \\ -65.193 \\ 57.459 \\ -22.078 \\ 18.626 \\ 1.545 \\ -58.107 \\ 85.201 \\ -46.519 \\ 10.948 \end{bmatrix}$$, com erro relativo 0.9995 e resíduo $2.45 \text{x} 10^{-15}$;

- Para a decomposição de Cholesky temos que a matriz de Hilbert 20x20 não é definida positiva, portanto o método não funciona;

- Para o Método de Jacobi, com $maxiter$, temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 2.086\text{x}10^{119} \\ 5.309\text{x}10^{119} \\ 7.847\text{x}10^{119} \\ 9.950\text{x}10^{119} \\ 1.173\text{x}10^{120} \\ 1.328\text{x}10^{120} \\ 1.465\text{x}10^{120} \\ 1.585\text{x}10^{120} \\ 1.693\text{x}10^{120} \\ 1.791\text{x}10^{120} \\ 1.879\text{x}10^{120} \\ 1.960\text{x}10^{120} \\ 2.034\text{x}10^{120} \\ 2.102\text{x}10^{120} \\ 2.165\text{x}10^{120} \\ 2.223\text{x}10^{120} \\ 2.277\text{x}10^{120} \\ 2.328\text{x}10^{120} \\ 2.375\text{x}10^{120} \\ 2.419\text{x}10^{120} \end{bmatrix}$$, com erro relativo 1 e resíduo $8.74\text{x}10^{120}$;

- Para o Método de Gauss Seidel, com 63 iterações, temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.974 \\ 1.254 \\ 0.658 \\ 0.928 \\ 0.924 \\ 0.932 \\ 1.038 \\ 1.281 \\ 1.469 \\ 1.248 \\ 0.683 \\ 0.740 \\ 0.925 \\ 1.086 \\ 0.662 \\ 1.372 \\ 1.008 \\ 0.706 \\ 1.354 \\ 0.714 \end{bmatrix}$$, com erro relativo 0.2462 e resíduo 0.001;

- Para o Método SOR, com $maxiter$, temos x^* :

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.969 \\ 1.220 \\ 0.759 \\ 0.958 \\ 0.907 \\ 0.895 \\ 0.997 \\ 1.245 \\ 1.440 \\ 1.228 \\ 0.671 \\ 0.736 \\ 0.927 \\ 1.093 \\ 0.674 \\ 1.387 \\ 1.027 \\ 0.727 \\ 1.377 \\ 0.738 \end{bmatrix}$$, com erro relativo 0.235 e resíduo 0.0004.

1.2. b):

- $\mathrm{cond}(H_{4x4}) = 15513.73$
- $\mathrm{cond}(H_{10x10}) = 1.602x10^{13}$
- $\mathrm{cond}(H_{20x20}) = 1.314x10^{18}$

Concluí-se que matriz de Hilbert para $n > 2$ é mal condicionada.

1.3. c):

Para matrizes de Hilbert, os métodos de fatoração LU e decomposição de Cholesky se apresentam mais confiáveis. Considerando as matrizes em estudo, o número de condicionamento delas explode conforme n aumenta, ou seja, em geral são matrizes mal condicionadas.

2. Exercício 2:

2.1. a):

2.1.1. Método de Jacobi:

- Para M_1 , com $maxiter$: $x^* = \begin{bmatrix} 10064.44 \\ 33805.36 \\ -23249.73 \end{bmatrix}$, com resíduo 172622.94;
- Para M_2 , com 32 iterações: $x^* = \begin{bmatrix} -0.040 \\ -0.044 \\ -0.368 \end{bmatrix}$, com resíduo 0.0004628;
- Para M_3 , com 11 iterações: $x^* = \begin{bmatrix} 0.254 \\ 0.056 \\ -0.075 \end{bmatrix}$, com resíduo 0.0004512;
- Para M_4 , com 18 iterações: $x^* = \begin{bmatrix} 0.073 \\ -0.010 \\ 0.060 \end{bmatrix}$, com resíduo 0.0006527;

2.1.2. Método de Gauss Seidel:

- Para M_1 , com $maxiter$: $x^* = \begin{bmatrix} 8.55\text{x}10^{18} \\ -1.17\text{x}10^{19} \\ 1.01\text{x}10^{19} \end{bmatrix}$, com resíduo 7.4x1019;
- Para M_2 , com $maxiter$: $x^* = \begin{bmatrix} -6359.55 \\ -0.444 \\ -3533.43 \end{bmatrix}$, com resíduo 67128.2;
- Para M_3 , com 3 iterações: $x^* = \begin{bmatrix} 0.254 \\ 0.056 \\ -0.075 \end{bmatrix}$, com resíduo 0.0003429;
- Para M_4 , com 31 iterações: $x^* = \begin{bmatrix} 0.073 \\ -0.010 \\ 0.060 \end{bmatrix}$, com resíduo 0.0002134;

2.2. b):

2.2.1. Método de Jacobi:

- $\rho(M_1) = 1.125$
- $\rho(M_2) = 0.813$
- $\rho(M_3) = 0.443$
- $\rho(M_4) = 0.641$

2.2.2. Método de Gauss Seidel:

- $\rho(M_1) = 1.583$
- $\rho(M_2) = 1.111$
- $\rho(M_3) = 0.018$
- $\rho(M_4) = 0.774$

2.3. c):

Para as matrizes M_3 e M_4 ambos os métodos con- vergem, dado que o raio espectral de suas ma- trizes de iteração (T_j e T_g) são menores que 1.

2.4. d):

Ocorre apenas para M_2.

2.5. e):

Para nenhuma das matrizes M_i, $i = 1 : 4$, o método de Gauss Seidel converge enquanto o de Jacobi diverge.

2.6. f):

Comparando somente o número de iterações entre M_3 e M_4 entre os dois métodos, para M_3 têm-se que o método de Gauss Seidel converge mais rápido, mas para M_4 o contrário ocorre.

Utilizando somente as quatro amostras de raio es- pectral, concluí-se que, quanto menor for o raio espectral da matriz de iteração do método iterati- vo, menos iterações serão necessárias para atingir a convergência, neste caso considerada como $\|x^{k+1} - x^k\|$. Veja ainda:

	iter(T_j)	$\rho(T_j)$	iter(T_g)	$\rho(T_g)$
M_3	11	0.443	03	0.018
M_4	18	0.641	31	0.774

3. Exercício 3:

3.1. a):

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & R_5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$$

e

$$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2. b):

Não. Note que na primeira linha, temos que $|10| < |(0+0+100+0+0)|$. Portanto a matriz dos coeficientes não é estritamente diagonalmente dominante, mesmo sujeita a qualquer permutação de linhas.

3.3. c):

Permutando linhas de modo que a matriz D da fatoração LDU tenha inversa, ou seja, $\det(D) \neq 0$, teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & -100 & 100 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 10 & -100 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Para o método de Jacobi, com $maxiter$, temos:

$$x^* : \begin{bmatrix} -1.592\text{x}10^7 \\ 1.096\text{x}10^7 \\ 1.350\text{x}10^7 \\ -313328.587 \\ -1.449\text{x}10^7 \\ -1.104\text{x}10^7 \end{bmatrix}$$

- Para o método de Gauss Seidel, com $maxiter$, temos:

$$x^* : \begin{bmatrix} -0.228 \\ 0.074 \\ 0.125 \\ 0.177 \\ 0.051 \\ 0.303 \end{bmatrix}$$

- Para o método SOR, com $maxiter$, temos:

$$x^* : \begin{bmatrix} -3.192\text{x}10^9 \\ -1.599\text{x}10^9 \\ 2.267\text{x}10^9 \\ 3.192\text{x}10^8 \\ -1.279\text{x}10^9 \\ -4.791\text{x}10^9 \end{bmatrix}$$

3.4. d):

Não. O que chegou mais perto de convergir foi o método de Gauss Seidel, como pode se observar através dos resíduos:

- Método de Jacobi: $2.712\text{x}10^9$;
- Método de Gauss Seidel: 0.0471;
- Método SOR: 6.703x^{10}.