/ /

Murilo S. de O. Paola ; GRR20185705 (1)

LISTA 2 - CM1052

(1) Determine x_3 pelo método da Bisseção para $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ em $[0, 1]$, em que x_k é o ponto gerado pela iteração k do método da bisseção. Estime o número de iterações necessárias para determinar uma raiz de f com precisão $\varepsilon = 10^{-4}$.

R:

I_1: $x_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(0) \cdot f(1/2) > 0$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$
(<0, <0)

I_2: $x_2 = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = 3/4$

$f(3/4) \cdot f(1) > 0$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 3/4$
(>0, >0)

I_3: $x_3 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

Fazendo $k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$

$\Rightarrow k > \frac{\ln(1-0) - \ln(10^{-4})}{\ln(2)}$

$\Rightarrow k > -\frac{(-4) * \ln(10)}{\ln(2)}$

$\Rightarrow k > 4 \times 3{,}322 = 13{,}288$

Ou seja, o número mínimo de iterações é $k = 14$.

---

(4) A função $f(x) = \tan(\pi x) - 6$ tem um zero em $\frac{1}{\pi}\arctan 6$. Considere $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.48$ e use 10 iterações para cada um dos seguintes métodos para calcular um valor aproximado desse zero. Qual dos métodos foi mais sucedido? Por quê?

R:

a) A última iteração do algoritmo da bisseção utilizando $a = 0$ e $b = 0.96$ resultou em:

$x_{10} \approx 0{,}4471875$;

$f(x_{10}) \approx -0{,}0282374$;

erro absoluto $\approx 0{,}0009643$;

/ /

Murilo S. de O. Pala ; GRR20185705

(2)

Continuação (4)

b) A última iteração do algoritmo da falsa posição com $a=0$ e $b=1,483$ resultou em:

$x_{10} \approx 0,4457591$;

$f(x_{10}) \approx -0,1665258$;

Erro absoluto $\approx 0,0028723$;

c) A última iteração do algoritmo de Newton com valor inicial $x_0 = 0,48$

$x_{10} \approx 0,4474315$;

$f(x_{10}) \approx -5,3290705 \cdot 10^{-15}$,

Erro absoluto $\approx 1,2406624 \cdot 10^{-16}$

d) A última iteração do método da secante com $x_0=0$ e $x_1=0,48$ resultou em:

$x_{10} \approx -2956,366$;

~~f(x10)~~ $f(x_{10}) \approx -8,2480141$,

Erro absoluto $\approx 0,9337381$;

(e) Considerando proximidade da solução numérica, o método de Newton foi o melhor. O método convergiu para uma solução adequada na sua quinta iteração.

(5) O montante acumulado em uma conta de poupança baseada em depósitos pode ser determinado a partir da equação de anuidade devida:

$$A = P/i\,[(1+i)^n - 1]$$

Nesta equação, A é o montante da conta, P é o valor regularmente depositado e i é taxa de juros por período, para n períodos em que →

Murilo S. de V. Polai; GRR20185705 (3)

continuação (5)

... os depósitos foram efetuados. Um indivíduo gostaria de ter em sua conta um total de R$750.000,00 para efetuar retirada após 20 anos, e pode dispor de R$1500,00 por mês para atingir essa meta. Qual a taxa de juros mínima a que esse valor deve ser investido, assumindo que o período de capitalização é mensal?

R: Como $A = 750000$, $P = 1500$, $n = 240$ meses, temos:

$$750000 = \frac{1500}{i}\left((1+i)^{240} - 1\right) \Rightarrow \frac{750000\, i}{1500} = (1+i)^{240} - 1$$

$$\Rightarrow 500 i = (1+i)^{240} - 1 \Rightarrow (1+i)^{240} - 500 i - 1 = 0.$$

Utilizando o método da bisseção, falsa posição e/ou secante com valores iniciais $a = x_1 = 0{,}004$ e $b = x_0 = 0{,}006$ (palpites dados após observar o gráfico), obtemos que a solução é $\{i \approx 0{,}00555\}$.

O método de Newton não convergiu.

(6) a) Utilizando o método de Newton, mostre que a raiz $\sqrt[p]{a}$ com $a > 0$ e p um inteiro positivo, pode ser calculada, para todo $x_0 > 0$, pela fórmula de recorrência

$$x_{k+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right)$$

R: Considere $f(x) = x^p - a$, cuja solução é $x = \sqrt[p]{a}$.

Utilizando o método de Newton temos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^p - a)}{p x_k^{p-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^p}{p x_k^{p-1}} + \frac{a}{p x_k^{p-1}} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{x_k \cdot p x_k^{p-1} - x_k^p}{p x_k^{p-1}} + \frac{a}{p x_k^{p-1}}$$

→ B

Murilo S. de O. Paiva; GRR20185305

(4)

Continuação (6)a)

$$x_{k+1} = \frac{p x_k^p - x_k^p}{p x_k^{p-1}} + \frac{a}{p x_k^{p-1}} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{x_k^p(p-1)}{p\, x_k^{p-1}} + \frac{a}{p x_k^{p-1}}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = \frac{(p-1)x_k}{p} + \frac{a}{p x_k^{p-1}} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right)$$

b) Faça $x_0 = 1$ e aproxime $\sqrt{3}$ fazendo 4 iterações pela fórmula de recorrência. Compare com o exercício 3 item (a).

R: Como $p=2$ e $a=3$ para $\sqrt{3}$, temos que $f(x) = x^2 - \sqrt{3}$.

I_1: $x_1 = 1/2\,((2-1)x_0 + 3/x_0^{2-1})$

$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + 3/x_0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = \frac{4}{2} = 2$

I_2: $x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4}$

I_3: $x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{7/4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{97}{28} = \frac{97}{56} \approx 1{,}73214$

Comparando com o item (a) do exercício, no qual na terceira iteração se obteve $x_3 = 1{,}6875$ apenas confirma que o método de Newton converge com maior velocidade para a solução.

(7) Considere a função $v(t) = 2e^{-t} - 2{,}5e^{-2t}$, para $t \geq 0$.

a) Resolva algebricamente a equação $v(t) = 0$ para ~~determinar~~ determinar um zero de v. Use inspeção gráfica para se convencer que existe um único zero para v no intervalo $[0, \infty)$.

→

Murilo S. de O. Polai; GRR20185705

(9)

continuação (7) a)

R: $s(t) = 0 \iff 2e^{-t} - 2.5\,e^{-2t} = 0$

$\Rightarrow 2e^{-t} = 2,5\,e^{-2t} \Rightarrow e^{-t}/e^{-2t} = 1,25$

$\Rightarrow e^{t} = 1,25 \Rightarrow \ln(e^{t}) = \ln(1,25)$

$\Rightarrow t = \ln(1,25)$

b) Determine um intervalo que contenha o zero de s que você encontrou no item (a).

R: Sabemos que $\ln(1) = 0$ e $\ln(e) = 1$, ainda:

$1 < 1,25 < e \Rightarrow \ln(1) < \ln(1,25) < \ln(e)$, ou seja, um possível intervalo é $[\ln(1) = 0;\ \ln(e) = 1]$.

c) Utilize os 4 métodos estudados para determinar uma aproximação para o zero de s no intervalo que você definiu no item (b), e use a precisão de parada $\varepsilon = 10^{-4}$.

R:

	nº de iterações	X obtido
Bisseção	16	0,22313
Falsa posição	10	0,22315
Newton	5	0,22314
Secante	11	0,22314

Considerando mais casas decimais, o método de Newton foi o que mais se aproximou de $\ln(1,25)$.

Murilo S. de O. Poloi; GRR20185705 (6)

Continuação (2)

d) O método de Newton deve falhar se for iniciado em qualquer ponto $x_0 \geq 3$. Explique porquê.

R: Por ser um método que depende de um palpite decente do ponto inicial para convergir, vemos que para $x_0 \geq 3$ ele não converge para a solução positiva, diverge.

e) O que acontece com o método de Newton se for iniciado em $x_0 = 0{,}9163$?

R: Veja que $f'(x_0 = 0{,}9163)$ nos dá um valor muito próximo de zero, que causa o método a falhar.

(4) Resolução feita computacionalmente disponível em: https://github.com/muriopoloi/CMI052