



Disciplina: Métodos de Matemática Aplicada **Código:** CMI071 **Semestre letivo:** 2022/1

Professor: Ailín Ruiz de Zárate

Aluna/o: Murilo Stellfeld de Oliveira Poloi

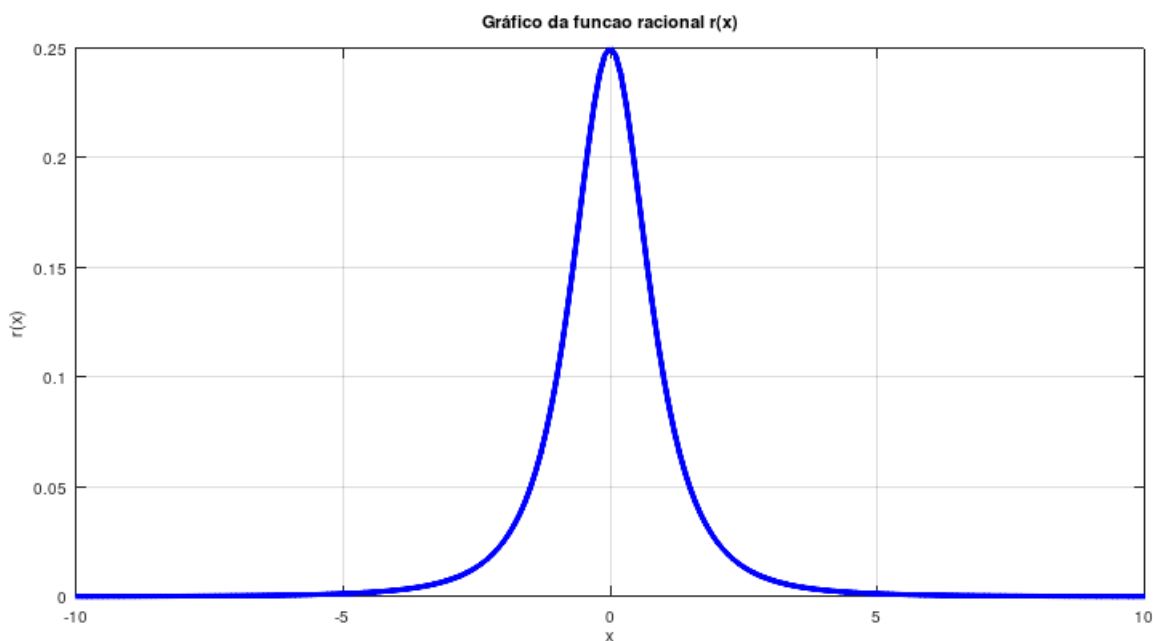
Projeto 1

Aviso: Sei que a notação para a Transformada de Fourier é $\hat{R}(\xi)$, mas, como não consegui escrever nas informações dos plots do octave \hat{R} decidi denotar a função racional por $r(x)$ e a Transformada de Fourier por $R(\xi)$. Os códigos desenvolvidos para gerar as imagens estarão no fim do documento.

1. Sobre a função racional sorteada em sala faça os seguintes exercícios:

- (a) Grafique a função racional em um intervalo simétrico $[-R, R]$ com $R > 0$ suficientemente grande para mostrar o decaimento da função no infinito.

Resposta: Escolhendo $R = 10 > 0$ temos que o gráfico no intervalo simétrico $[-10, 10]$ da função racional $r(x) = ((x^2 + 1)(x^2 + 4))^{-1}$ é dado por:



- (b) Calcule a expressão da Transformada de Fourier de dita função racional para frequências negativas e grafique o resultado em um intervalo $[-L, L]$, $L > 0$ suficientemente grande para mostrar seu comportamento.

Resposta: Primeiramente calculamos a Transformada de Fourier da função $R(x)$ para frequências negativas $\xi < 0$:

i. Polos:

Os polos de $r(z)e^{-i\xi z}$ são $i, -i, 2i, -2i$, porém, somente i e $2i$ estão no semiplano superior.

ii. Resíduos:

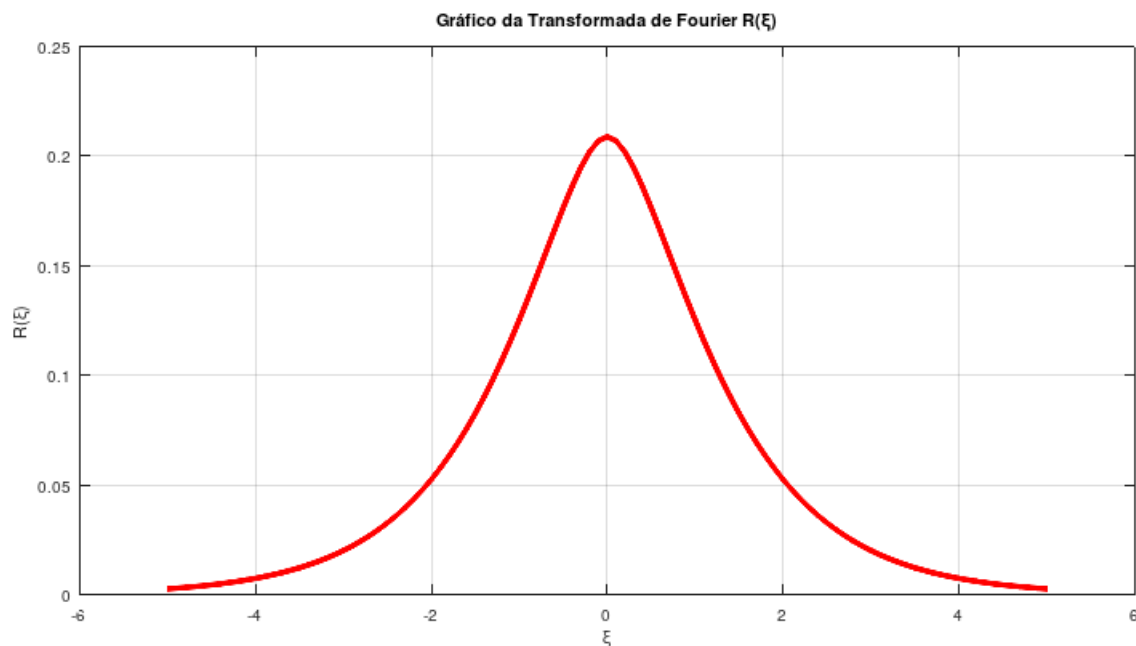
$$\text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{-i\xi z}}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{e^{-i^2\xi}}{6i} = \frac{-ie^\xi}{6};$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i) \frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{e^{-2i^2\xi}}{-12i} = \frac{ie^{2\xi}}{12}.$$

iii. Transformada para $\xi < 0$:

$$R(\xi) = i\sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^2 \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, ki\right) = i\sqrt{2\pi} \left(\frac{-ie^\xi}{6} + \frac{ie^{2\xi}}{12} \right) = \frac{-\sqrt{2\pi}(e^{2\xi} - 2e^\xi)}{12}.$$

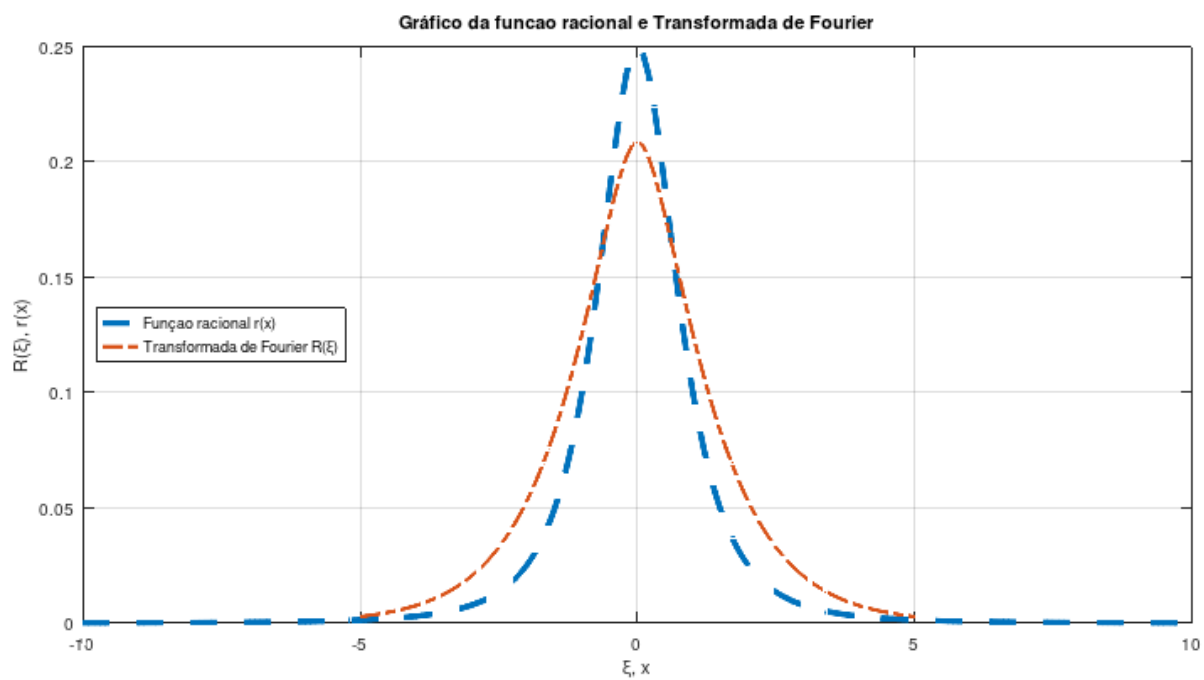
Agora, considere $L = 5 > 0$, daí temos o intervalo $[-5, 5]$ que nos fornece o seguinte gráfico da Transformada de Fourier obtida acima:



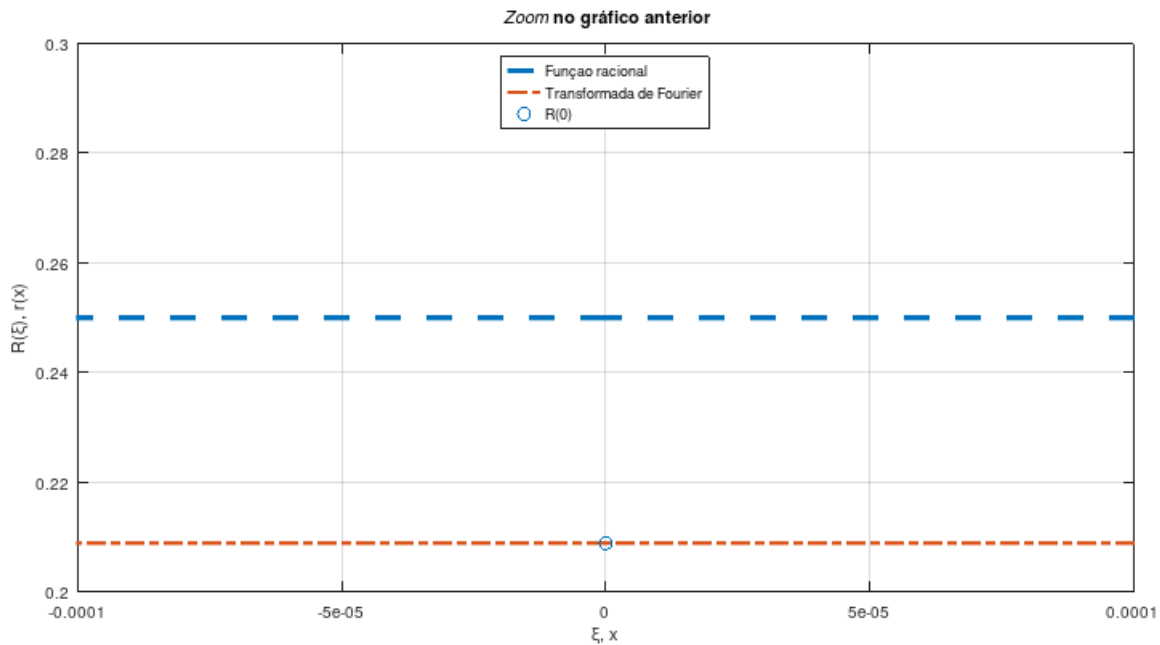
- (c) Com ajuda do gráfico indique se existem os limites laterais da Transformada de Fourier na frequência nula e em caso afirmativo qual (quais) são seu (seus) valores.

Resposta:

Primeiramente, o gráfico das duas curvas em estudo sobre o mesmo plano é:



e o gráfico com um *zoom* em um intervalo bem próximo da origem e sua imagem é:



É fácil ver que os limites laterais tendendo a 0 da Transformada de Fourier convergem para o mesmo ponto, neste caso, aproximadamente 0.21, mas, resolvendo algebricamente, obtemos que $R(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{12} \approx 0.2089$.

- (d) Relate brevemente qual *software* ou aplicativo foi utilizado para fazer os gráficos solicitados.

Resposta: O *software* utilizado para fazer os gráficos foi o Octave versão 7.1.0.

Para escrever o projeto utilizei o *website* Overleaf e os códigos usados para gerar os gráficos podem ser encontrados em <https://github.com/murlopoloi/CMI071>.

Código desenvolvido para gerar as imagens:

```
%funcao racional, TF e intervalos das funções
r = @(x) 1/((x^2 + 1)*(x^2 + 4));
R = @(x) -sqrt(2*pi)*(exp(-abs(2*x)) - 2*exp(-abs(x)))/12;
xr = -10:0.1:10;
xR = -5:0.1:5;
```

```
%cria vetores vazios e armazena
%as imagens das funções r e R neles
img_r = [];
img_R = [];
siz1 = length(xr);
siz2 = length(xR);
for i = 1:siz1
    img_r = [img_r r(xr(i))];
endfor
for i = 1:siz2
    img_R = [img_R R(xR(i))];
endfor

close all

%img1
plot(xr, img_r, 'b', 'Linewidth', 3);
title('Gráfico da funcao racional r(x)')
xlabel('x')
ylabel('r(x)')
grid on; pause;

%img2
plot(xR, img_R, 'r', 'Linewidth', 3);
title('Gráfico da Transformada de Fourier R(\xi)');
xlabel('\xi'); ylabel('R(\xi)');
grid on; pause;

%img3
plot(xr, img_r, '--', 'Linewidth', 3, xR, img_R, '-.', 'Linewidth', 2)
legend('Funcao racional r(x)', 'Transformada de Fourier R(\xi)', 'location', 'west')
title('Gráfico da funcao racional e Transformada de Fourier')
xlabel('\xi, x'); ylabel('R(\xi), r(x)')
grid on; pause;

%img4
hold on; scatter(0, R(0));
legend('Funcao racional', 'Transformada de Fourier', 'R(0)', 'location', 'north')
xlim([-0.0001 0.0001]); ylim([0.2 0.3]);
title('{\it Zoom} no gráfico anterior')
```