UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
CENTRO POLITÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

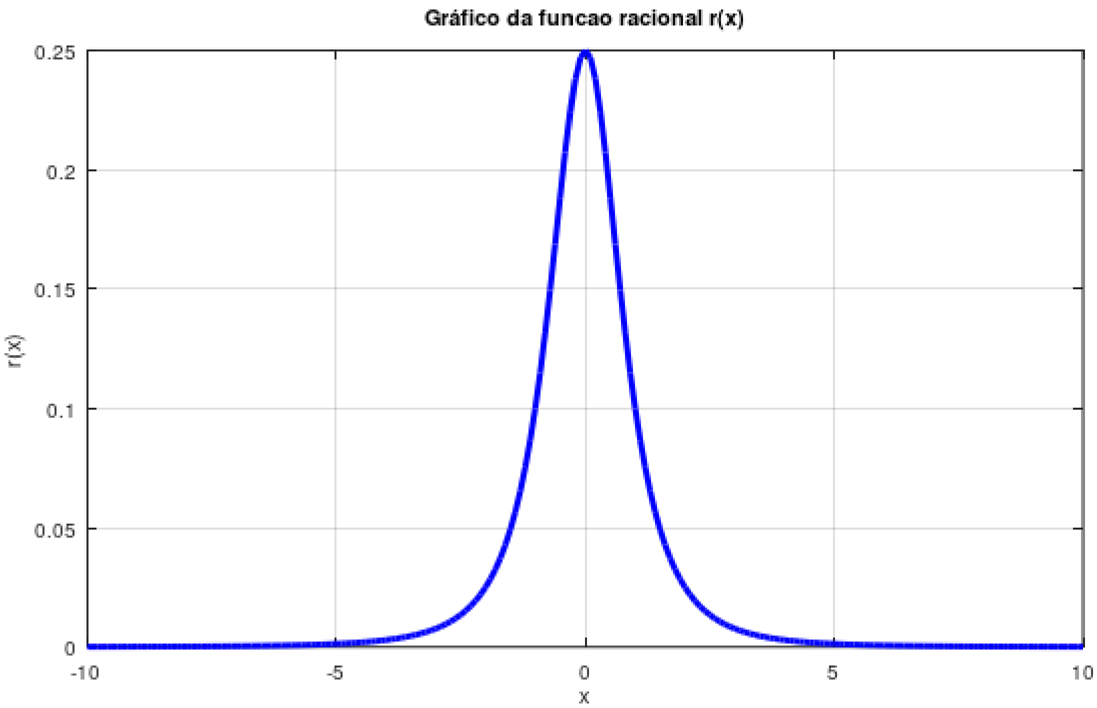
Disciplina: Métodos de Matemática Aplicada **Código:** CMI071 **Semestre letivo:** 2022/1
Professor: Ailín Ruiz de Zárate
Aluna/o: Murilo Stellfeld de Oliveira Poloi

Projeto 1

Aviso: Sei que a notação para a Transformada de Fourier é $\hat{R}(\xi)$, mas, como não consegui escrever nas informações dos plots do octave $\hat{R}$ decidi denotar a função racional por $r(x)$ e a Transformada de Fourier por $R(\xi)$. Os códigos desenvolvidos para gerar as imagens estarão no fim do documento.

1. Sobre a função racional sorteada em sala faça os seguintes exercícios:

   (a) Grafique a função racional em um intervalo simétrico [-R, R] com R > 0 suficientemente grande para mostrar o decaimento da função no infinito.
   Resposta: Escolhendo $R = 10 > 0$ temos que o gráfico no intervalo simétrico $[-10, 10]$ da função racional $r(x) = ((x^2+1)(x^2+4))^{-1}$ é dado por:



Disciplina: Métodos de Matemática Aplicada **Código:** CMI071 **Semestre letivo:** 2022/1
Professor: Ailín Ruiz de Zárate
Aluna/o: Murilo Stellfeld de Oliveira Poloi

(b) Calcule a expressão da Transformada de Fourier de dita função racional para frequências negativas e grafique o resultado em um intervalo [-L,L], L > 0 suficientemente grande para mostrar seu comportamento.

Resposta: Primeiramente calculamos a Transformada de Fourier da função $R(x)$ para frequências negativas $\xi < 0$:

i. Polos:

Os polos de $r(z)e^{-i\xi z}$ são $i, -i, 2i, -2i$, porém, somente i e $2i$ estão no semiplano superior.

ii. Resíduos:

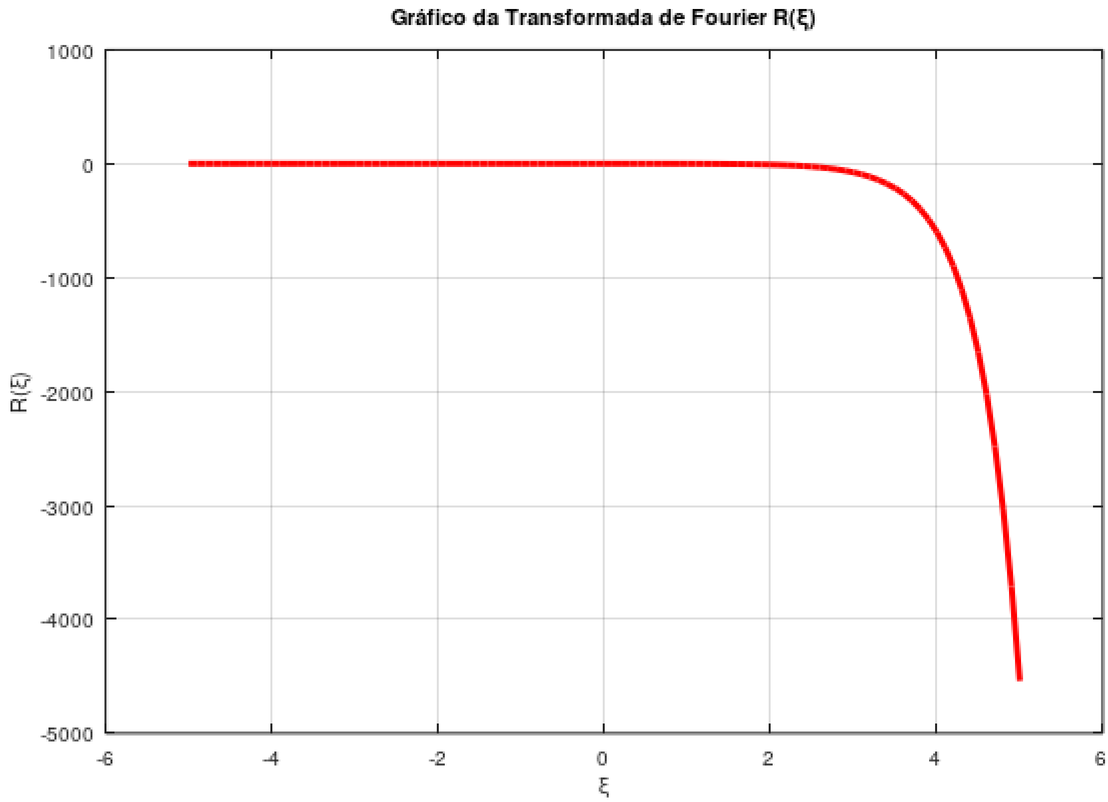
$Res(\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i}\frac{e^{-i\xi z}}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{e^{-i^2\xi}}{6i} = \frac{-ie^{\xi}}{6}$;

$Res(\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{e^{-2i^2\xi}}{-12i} = \frac{ie^{2\xi}}{12}$.

iii. Transformada para $\xi < 0$:

$R(\xi) = i\sqrt{2\pi}\sum_{k=1}^{2} Res(\frac{e^{-i\xi z}}{(z^2+1)(z^2+4)}, ki) = i\sqrt{2\pi}(\frac{-ie^{\xi}}{6} + \frac{ie^{2\xi}}{12}) = \frac{-\sqrt{2\pi}(e^{2\xi} - 2e^{\xi})}{12}$.

Agora, considere $L = 5 > 0$, daí temos o intervalo $[-5,5]$ que nos fornece o seguinte gráfico da Transformada de Fourier obtida acima:

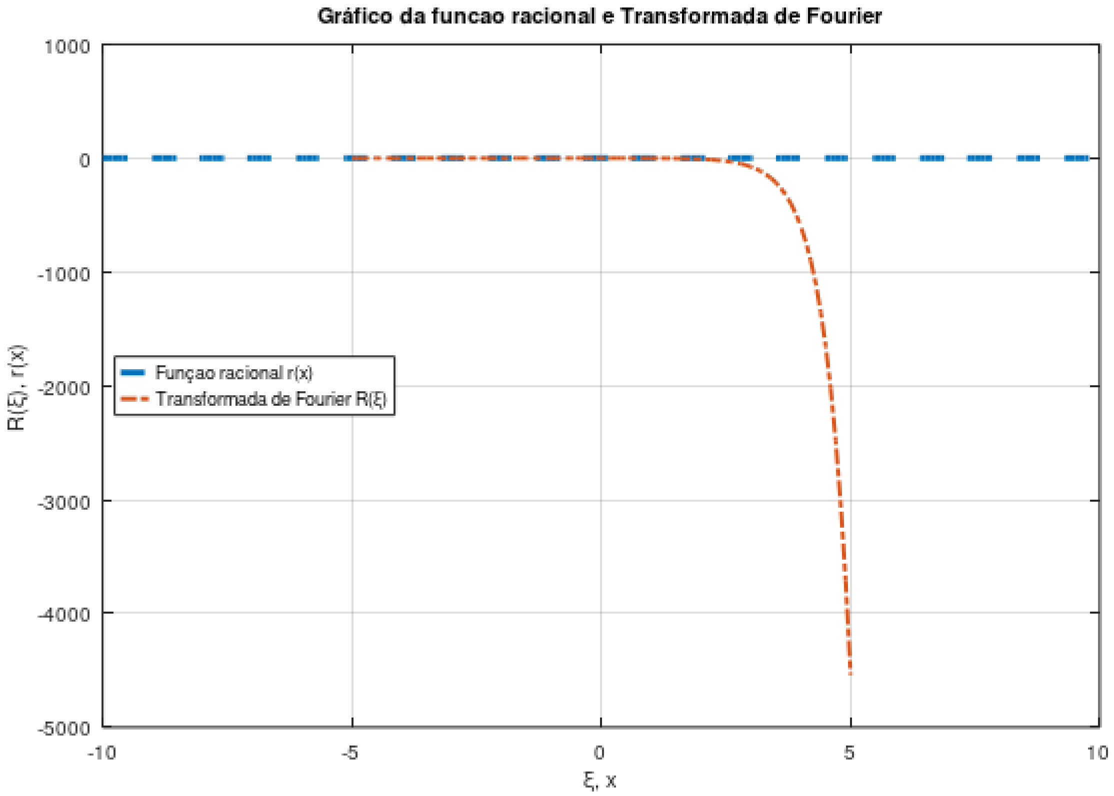


Disciplina: Métodos de Matemática Aplicada **Código:** CMI071 **Semestre letivo:** 2022/1
Professor: Ailín Ruiz de Zárate
Aluna/o: Murilo Stellfeld de Oliveira Poloi

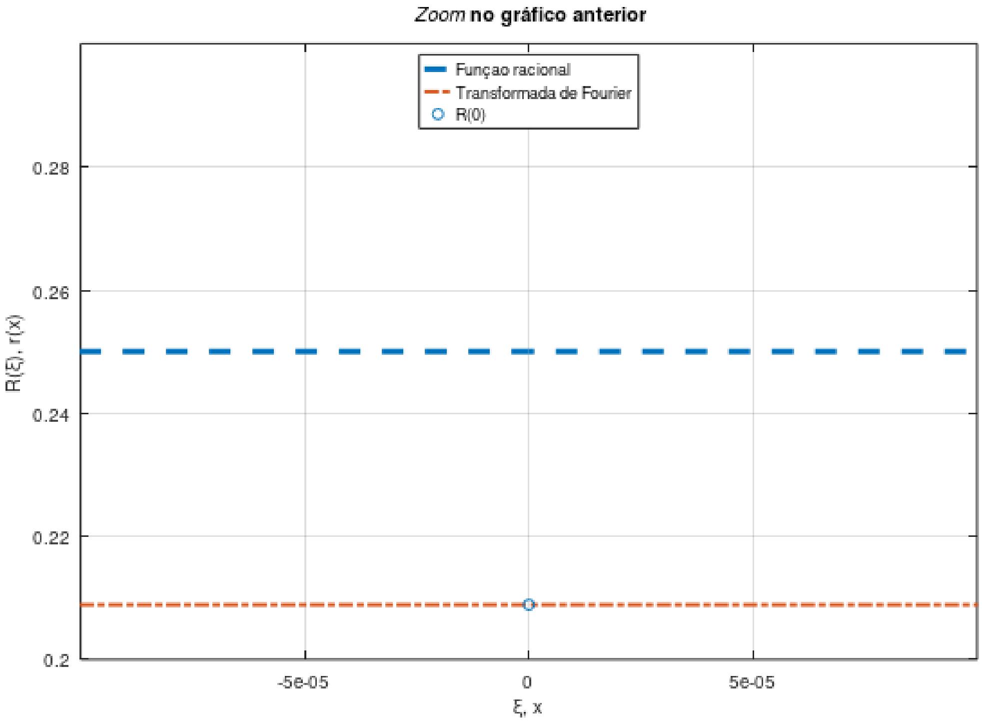
(c) Com ajuda do gráfico indique se existem os limites laterais da Transformada de Fourier na frequência nula e em caso afirmativo qual (quais) são seu (seus) valores.

Resposta:

Primeiramente, o gráfico das duas curvas em estudo sobre o mesmo plano é:



e o gráfico com um *zoom* em um intervalo bem próximo da origem e sua imagem é:



É fácil ver que os limites laterais tendendo a 0 da Transformada de Fourier convergem para o mesmo ponto, neste caso, aproximadamente 0.21, mas, resolvendo algebricamente, obtemos que $R(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{12} \approx 0.2089$.

(d) Relate brevemente qual *software* ou aplicativo foi utilizado para fazer os gráficos solicitados.

Resposta: O *software* utilizado para fazer os gráficos foi o Octave versão 7.1.0.

Para escrever o projeto utilizei o *website* Overleaf e os códigos usados para gerar os gráficos podem ser encontrados em `https://github.com/murlopoloi/CMI071`.

Algoritmo desenvolvido para gerar as imagens:

```
    %funcao racional, TF e intervalos das funções
r = @(x) 1/((x^2 + 1)*(x^2 + 4));
R = @(x) -sqrt(2*pi)*(exp(2*x) - 2*exp(x))/12;
xr = -10:0.1:10;
xR = -5:0.1:5;

%cria vetores vazios e armazena
%as imagens das funções r e R neles
img_r = [];
img_R = [];
siz1 = length(xr);
siz2 = length(xR);
for i = 1:siz1
```

```
  img_r = [img_r r(xr(i))];
endfor
for i = 1:siz2
  img_R = [img_R R(xR(i))];
endfor

close all

%img1
plot(xr, img_r, 'b', 'Linewidth', 3);
title('Gráfico da funcao racional r(x)')
xlabel('x')
ylabel('r(x)')
grid on; pause;

%img2
plot(xR, img_R, 'r', 'Linewidth', 3);
title('Gráfico da Transformada de Fourier R(\xi)');
xlabel('\xi'); ylabel('R(\xi)');
grid on; pause;

%img3
plot(xr, img_r, '--', 'Linewidth', 3, xR, img_R, '-.', 'Linewidth', 2)
legend('Funçao racional r(x)','Transformada de Fourier R(\xi)', 'location','west')
title('Gráfico da funcao racional e Transformada de Fourier')
xlabel('\xi, x'); ylabel('R(\xi), r(x)')
grid on; pause;

%img4
hold on; scatter(0,R(0));
legend('Funçao racional','Transformada de Fourier','R(0)', 'location','north')
xlim([-0.0001 0.0001]);  ylim([0.2 0.3]);
title('{\it Zoom} no gráfico anterior')
```