МАТЕМАТИК I тэмдэглэл

Б.Уранбилэг

Хичээлийн жил 2022-2022

Гарчиг

Бүлэг 1

Олонлог

1.1 Тодорхойлолт

Олонлог нь ялгаатай юмсын цуглуулга юм. Олонлогийг A, B, C, ..., X, Y, Z том үсгээр, бүрдүүлж байгаа элементийг a, b, c, ..., x, y, z жижиг үсгээр тэмдэглэнэ.

Тэмдэглэгээ 1. • $\forall$=*бүх*, $\exists$=*оршин байх*

- $\implies$ *"гэдгээс"*
- $\in$ *"ийн элемент мөн", $x \in E$*
- $\notin$ *"ийн элемент биш", $x \notin E$*
- $\subset$ **жинхэнэ дэд олонлог** *гэж тус тус уншина.*
- $\subseteq$ **дэд олонлог** *Хэрэв E -ийн элемент бүр нь мөн F -ийн элемент бол $E \subset F$. Өөрөөр хэлбэл:$\forall x \in E$ $(x \in F)$. Дараа нь бид E нь F -ийн дэд олонлог эсвэл F -ийн нэг олонлог гэж хэлдэг.*
- *Олонлогийн бүх элементийг жагсаан бичиж*

  $$A = \{1, 2, 3\}, B = \{\text{улаан, хар}\}$$

  Энэ нь төгсгөлөг тооны элементтэй олонлогийг өгөхөд илүү тохиромжтой.
- *эсвэл ерөнхий шинжээр $P = \{n\text{:}n \text{ анхны тоо}\} = \{n|n \text{ анхны тоо}\}$. Энэ арга нь төгсгөлөг ба төгсгөлгүй олон элементтэй олонлогийн алиныг нь ч өгөхөд тохирдог.*

  $$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}$$

Ажиглалт 1. • $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\}$,

- $\{1, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$,
- $E = \{1, 2, 3\}$ *дэд олонлогууд нь*

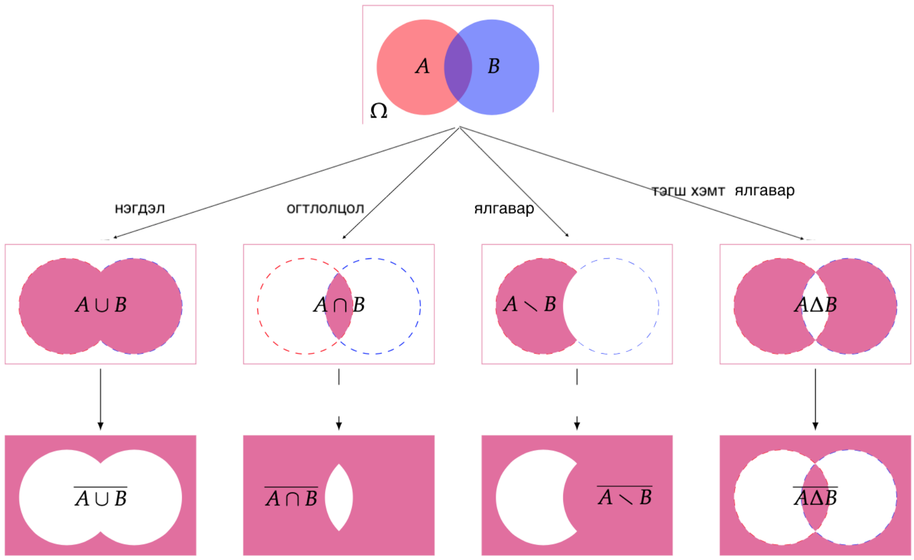
  $$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Жишээ 1. • $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 7, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, *байжээ.* $2 \in A$, $5 \notin B$, $A \subset C$, $A \notin C$, $A \notin A$.

- *Юм агуулахгүй олонлогийг* **хоосон олонлог** $\emptyset = \{\}$

Тодорхойлолт 1. • **тэнцүү:** $E = F \implies E \subset F$ *ба* $F \subset E$

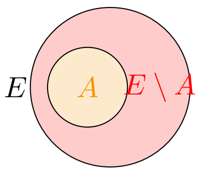
- *n элементтэй A олонлог* **бүх дэд олонлогийн тоо** *нь* 2^n *тэнцүү.*



Зураг 1.1: Олонлогийн үйлдэл

- *Заримдаа бидний авч үзэж байгаа, олонлогууд бүгдээрээ* **универсаль олонлог** *гэгдэх нэг том E олонлогийн Дэд олонлог болж байдаг. Энэ үед $A \subset E$-ын хувьд $E \setminus A$ нь A олонлогийн E хүртэлх гүйцээлт гээд $\overline{A}$ гэж тэмдэглэнэ.*

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



1.2 Олонлогийн үйлдэл

Одоо олонлогууд дээрх үйлдэл (олонлогуудаар шинэ олонлог байгуулах арга)-тэй танилцъя. A,B олонлогуудын хувьд тэдгээрийн аль алинд нь зэрэг харьяалагдах элементүүдийн олонлогийг A,B-ийн ***огтлолцол*** гээд

$$A \cup B = \{x | x \in A \,\text{эсвэл}\, x \in B\}$$

A,B олонлогуудын ядаж нэгд нь харъяалагдах элементүүдийн олонлогийг A,B-ийн ***нэгдэл*** гээд

$$A \cap B = \{x | x \in A \,\text{ба}\, x \in B\}$$

B олонлогт харъяалагддаггүй элементүүдээс тогтох олонлогийг A-олонлогоос B олонлогийг хассан ***ялгавар*** гээд

$$A \setminus B = \{x | x \in A \,\text{ба}\, x \notin B\}$$

бүх боломжит (a,b) гэсэн эрэмбэлэгдсэн хосуудын олонлогийг A,B олонлогуудын ***декарт үржвэр*** гээд

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \,\text{ба}\, b \in B\}$$

тэмдэглэнэ.

Ажиглалт 2.
- *$A \cup B = B \cup A$ ба $A \cap B = B \cap A$;*
- *Ерөнхийд нь $A \setminus B \neq B \setminus A$ ба $A \times B \neq B \times A$;*
- *A нь n элементтэй, B нь m элементтэй тул $A \times B$ нь $n \times m$, эсвэл $|A \times B| = nm$*

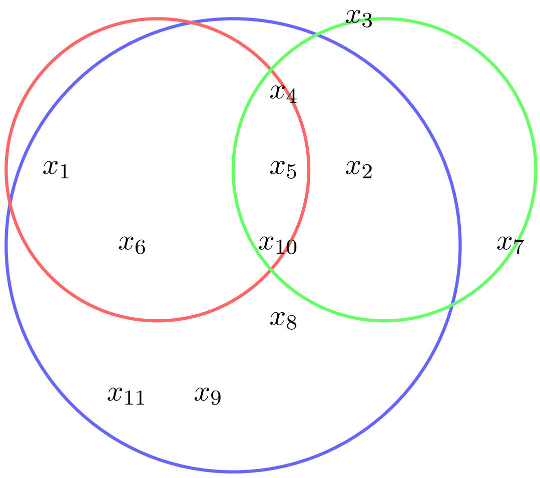
- $A^2 = A \times A$.

Жишээ 2.
- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 7, 8\}$ *бол* $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2\}$,
- $A \setminus B = \{1, 3\} = C$,
- $A \times C = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$ $3 \cdot 2 = 6$ *элементтэй.*
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \big\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\}$

1.3 Бодох дүрэм

Олонлогууд дээр тодорхойлсон эдгээр үйлдлийн хувьд дараах чанарууд хүчинтэй:

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
- $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



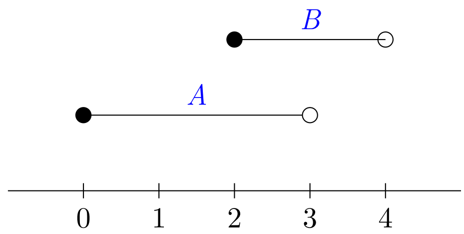
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B} \subset \overline{A}$

Тодорхойлолт 2. **интервалыг**

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\} = \textit{битүү интервал},\\
(a, b) &=]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} = \textit{задгай интервал},\\
[a, b) &= [a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\},\\
(a, b] &=]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\},\\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x \leqslant b\} = \textit{битүү интервал},\\
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < \infty\} = \textit{битүү интервал},\\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < b\} = \textit{задгай интервал},\\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < \infty\} = \textit{задгай интервал}.\\
(-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

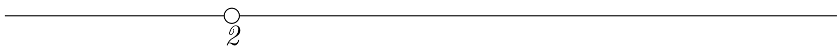
maruka@rocketmail.com

Жишээ 3. • $A = [0, 3), B = [2, 4)$

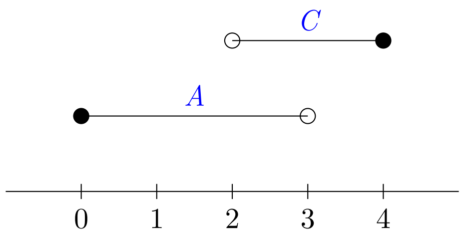


$$\begin{aligned} A \setminus B &= [0, 3) \setminus [2, 4) \\ &= [0, 2). \\ B \setminus A &= [2, 4) \setminus [0, 3) \\ &= [3, 4). \end{aligned}$$

- $\mathbb{R} \setminus 2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$



- $A = [0, 3), C = (2, 4]$



$$\begin{aligned} A \setminus C &= [0, 3) \setminus (2, 4] \\ &= [0, 2]. \\ C \setminus A &= (2, 4] \setminus [0, 3) \\ &= [3, 4]. \end{aligned}$$

1.4 Функц

Тодорхойлолт 3. *$A, B \neq \emptyset$ олонлогууд бол A -с B руу $\forall a \in A$ -ийн элемент бүр ганцхан $b \in B$ хэрэглэгддэг байвал*

$$f : A \to B, f(a) = b$$

функц гэнэ.

- A нь f тодорхойлогдох муж,
- B нь f утгын муж,
- $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ нь f дүр,
- $G(f) = \{(a, f(a)) | a \in A\} \subset A \times B$ нь f график.

Жишээ 4. *$x \in \mathbb{R}$-ийн* **абсолют утга** *тодорхойлъё.*

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

1.5 Факториал ба Бином коэффициент

Тодорхойлолт 4. $n \in \mathbb{N}$, **факториал функц** *гэдэг нь*

$$n! = \begin{cases} 1 & if\, n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n & if\, n > 0. \end{cases}$$

Жишээ 5. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Ажиглалт 3.

- *n!= n ялгаатай юмсын сэлгэмэлийн тоо. Ж.нь: a, b, c -аас 3!=6 сэлгэмэлтэй: abc, acb, bac, bca, cab, cba.*
- $n \geqslant 1$ *бол* $n! = n \cdot (n-1)!$.

Тодорхойлолт 5. **Бином коэффициент** $n, k \in \mathbb{N}$ *хос индекстэй* $n \geqslant k \geqslant 0$ *бичье.*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Жишээ 6.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6.$$

Ажиглалт 4. $n, k \in \mathbb{N}$ *нь* $n \geqslant k \geqslant 0$

- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$,
- *Бином коэффициент нь тухайн олонлогоос заасан тоотой дэд олонлогийг тоолно.*

Жишээ 7.

- $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ *-ийн*

$$\binom{10}{5} = 252$$

5 элементтэй дэд олонлогийн тоо.

- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k}$,
- $$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6.$$

1.6 Ньютон Биномын томъёо

Тодорхойлолт 6. **Ньютон Биномын томъёо** $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ *m-ээс n хүртэл* **индекстэй** *тоонууд байна.*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Жишээ 8.

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Өгүүлбэр 1. **Ньютон Биномын томъёо** $a, b \in \mathbb{R}$ *ба* $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

a=b=1 үеийн тэнцэтгэлийг бичнэ үү!

maruka@rocketmail.com

Бүлэг 2

Вектор

2.1 $\mathbb{R}^n$ Вектор

*Физикийн зарим хүч, хурд, хурдатгал зэрэг бусад хэмжигдэхүүн зөвхөн хэмжээгээрээ төдийгүй бас чиглэлээрээ тодорхойлогдоно. Векторийн эх, төгсгөл хоёрыг заасн**аар** **вектор** чиглэл тодорхойлогдоно.*

Жишээ 9.

- $A(3;-2;2), B(1;2;-1), C(-1;0;-3)$ *бол* $\vec{AB} = (-2,4,-3), \vec{BC} = (-2,-2,-2), |\vec{AB}| = \sqrt{29}$.
- $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$ $\mathbb{R}^3$*-ийн* **стандарт суурь вектор**
- $\vec{c} = (11,-6,5)$ *вектор* $\vec{c} = 11\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}, |\vec{c}| = \sqrt{182}$, $\vec{c}$ *чиглэлийн нэгж вектор нь*

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{11}{\sqrt{182}}, -\frac{6}{\sqrt{182}}, \frac{5}{\sqrt{182}}\right)$$

$$|\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}| = 1$$

Тодорхойлолт 7.

- *Хоёр векторийн* **нийлбэр**: $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$ *баганан вектор эсвэл* $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$ *мөрөн вектор*
- **Скаляраар** *векторийг үржүүлэх:* $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot u_n \end{pmatrix}$ *баганан вектор эсвэл* $u = (\lambda \cdot u_1, \dots, \lambda \cdot u_n)$
- **Тэг вектор**: $u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$*-ийн векторийг эсрэг вектор* $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$

2.2 2 Векторийн скаляр үржвэр

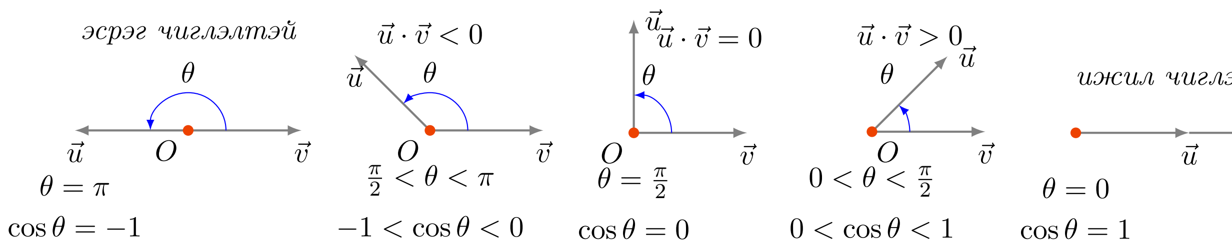
Тодорхойлолт 8. **2 Векторийн скаляр үржвэр**

$$u \cdot v = (u_1 \cdot v_1, \dots, u_n \cdot v_n)$$

Тодорхойлолт 9. **2 Векторийн хоорондох өнцөг**

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Ажиглалт 5.

- 

- *параллель нь* **коллиниартай** *ижил утгатай.*

Жишээ 10. $|\vec{a} = |3|, \vec{b} = |5|$. *$\alpha$-ийн ямар утганд $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ перпендикуляр байх вэ?*

- $(\vec{a} + \alpha\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \alpha\vec{b}) = 0$
-

$$\vec{a}^2 - \alpha^2\vec{b}^2 = 0$$
$$\alpha^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}$$
$$\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

Тодорхойлолт 10. **чиглэлийн косинус өнцөг** *Хавтгай дахь векторийн хувьд эерэг x тэнхлэгээс вектор хүртэлх чиглэлийг цагийн зүүний эсрэг хэмжсэн өнцгийн хувьд хэмжих нь тохиромжтой болохыг харсан. Огторгуйд тэг бус вектор ба $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ гэсэн* **гурван нэгж векторийн хоорондох өнцгийг** *хэмжих нь илүү тохиромжтой байдаг. α, β, γ өнцөг нь $\vec{v}$ ба $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ -ийн чиглэлийн өнцөг юм.*

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = |\vec{v}||\vec{i}|\cos\alpha$$
$$\vec{v}\cdot\vec{i} = (v_1, v_2, v_3)\cdot(1,0,0) = v_1$$
$$\implies \cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}$$
$$\cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$
$$\cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}$$

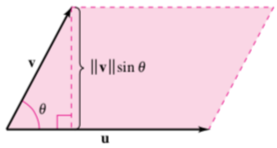
чиглэлийн нэгж вектор нь

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v_1}}{|\vec{v}|}\vec{i} + \frac{\vec{v_1}}{|\vec{v}|}\vec{j} + \frac{\vec{v_1}}{|\vec{v}|}\vec{k}$$
$$\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} = 1$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2.3 Вектор үржвэр

Тодорхойлолт 11. **Вектор үржвэр** *$u = u_1i + u_2j + u_3k, v = v_1i + v_2j + v_3k$ векторийн вектор үржвэр нь*

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)i - (u_1v_3 - u_3v_1)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k$$



2.3.1 Вектор үржвэр геометр чанар

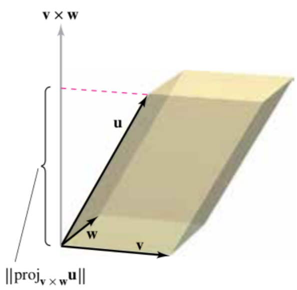
- *$u \times v$ нь u, v векторт* **ортогональ** *байна.*
- *$|u \times v| = |u||v|\sin\theta$ и ба v талуудтай* **параллельграммын талбай** *байна.*
- *$u \times v = 0 \iff u, v$ векторууд* **параллель**
- $u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$, $V = |u \cdot (v \times w)|$ *Холимог үржвэр бодох*

$$\begin{aligned}
|u||v|\sin\theta &= |u||v|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= |u||v|\sqrt{1-\frac{(u\cdot v)^2}{|u|^2|v|^2}} \\
&= \sqrt{|u|^2|v|^2-(u\cdot v)^2} \\
&= \sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2} \\
&= \sqrt{(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_1v_3-u_3v_1)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2} \\
&= |u\times v|
\end{aligned}$$

Тодорхойлолт 12. **Холимог үржвэр**

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k},\ \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$



Жишээ 11. $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$ *векторууд нэг хавтгай дээр орших уу?*

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

V=(өндөр)(суурийн талбай)

$$
\begin{aligned}
&= \|\mathrm{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| \\
&= \left|\frac{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}\right| \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| \\
&= |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|.
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} \\
&= 2\cdot -1\cdot -11 + 1\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot -1\cdot 9 - 1\cdot -1\cdot -1 - 2\cdot 3\cdot 9 - 3\cdot -11\cdot 1 \\
&= 22 + 9 - 9 - 1 - 54 + 33 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

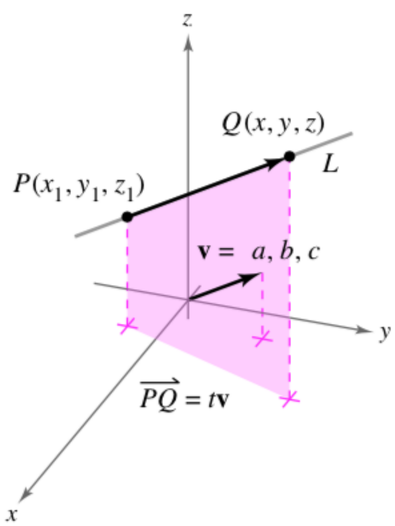
- *нэг хавтгай дээр оршино.*

Чанар 1. $i\ u\times v = -(v\times u)$

- $u\times(v\times w) = (u\times v) + (u\times w)$
- $\lambda(u\times v) = (\lambda u)\times v = u\times \lambda w$
- $u\times 0 = 0\times u$
- $u\times u = 0$
- $u\cdot(v\times w) = (u\times v)\cdot w$

2.4 Огторгуйн шулуун

Хавтгайд **өнцгийн коэффициент***оор шулууны тэгшитгэлийг олдог. Огторгуйд шулууны тэгшитгэлийг вектороор нь олдог.* $\vec{v} = (a,b,c)$*-тэй параллель* $P(x_1,y_1,z_1)$ *цэгийг дайрсан* L *шулуун юм.* L *бичихдээ* $Q(x,y,z)$ *гэсэн цэгүүдээс бүтдэг шулуун нь* $\vec{v}$ *тэй параллель тул* $\vec{PQ} = t\vec{v},\quad t\in\mathbb{R}$ *бичиж болно.* $\vec{PQ} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1) = (at, bt, ct) = tv\quad \vec{v} = (a,b,c)$*-тэй параллель* $P(x_1,y_1,z_1)$ *цэгийг дайрсан* L **шулууны**



параметр тэгшитгэл *нь*

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct,$$

тэгш хэмт тэгшитгэл

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Жишээ 12. $\vec{v} = (2, 4, -4)$-*тэй параллель* $P(1, -2, 4)$ *цэгийг дайрсан* L *шулууны параметр болон тэгш хэмт тэгшитгэлийг ол.*

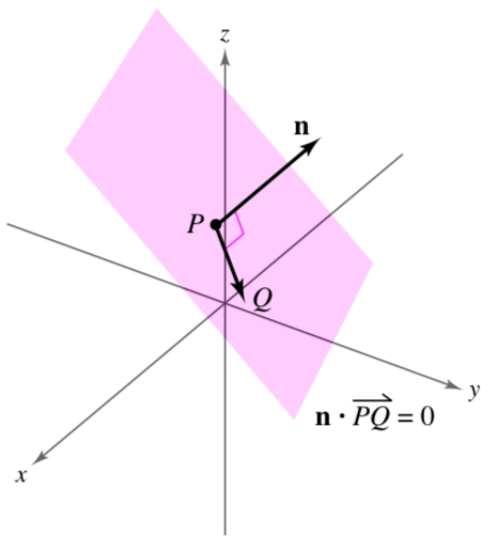
$$\text{чиглэлийг нь } a = 2, b = 4, c = -4$$
$$x_1 = 1, y_1 = -2, z_1 = 4$$
$$x = 1 + 2t, y = -2 + 4t, z = 4 - 4t \text{ параметр тэгшитгэл}$$
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-4} \text{ тэгш хэмт тэгшитгэл}$$

Жишээ 13.

- **ерөнхий тэгшитгэл** $ax + by + cz + d = 0$ *хэлбэртэй.* $a, b, c \in \mathbb{R}$
- **хэрчимт тэгшитгэл** $\frac{ax}{d} + \frac{by}{d} + \frac{cz}{d} + 1 = 0$ *хэлбэртэй.*
- **эгэл тэгшитгэл** $\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$ *хэлбэртэй.*

2.5 Огторгуйн хавтгайн тэгшитгэл

Шулууны **нормаль вектор** *нь шулууны чиглүүлэгчтэй тэгээс ялгаатай ортогональ вектор тул энэ шулууны дурын чиглүүлэгч рүү чиглүүлдэг. Шулуун дээрх цэг, шулуунтай параллель вектороос шулууны тэгшитгэл гардагийг харсан бол огторгуйн хавтгайн тэгшитгэл хавтгайн цэг, хавтгайтай перпендидуляр* $\vec{n} = (a, b, c)$ *нормаль вектороос гарахыг нь харуулъя. Тэгээс ялгаатай* $\vec{n}$ *нормаль вектор болон* $P(x_1, y_1, z_1)$ *цэгийг агуулсан хавтгай зурагт харуулав. Хавтгай* $Q(x, y, z)$ *гэсэн цэгүүд бий.* $\vec{PQ}$ *вектор нь* $\vec{n}$*-тэй* **ортогональ** *тул скаляр үржвэрээр нь*



$$n = (a, b, c)$$
$$n \cdot \vec{PQ} = 0$$
$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

Жишээ 14. *(2,1,1), (0,4,1), (-2,1,4) гэсэн цэгийг агуулсан хавтгайн тэгшитгэл бич. Нормаль векторийг 3 цэгээс 2 векторийнх нь вектор үржвэрээс нь олно.*

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (0-2, 4-1, 1-1) = (-2,3,0)\\ \vec{v} &= (-2-2, 1-1, 4-1) = (-4,0,3) \implies\\ \vec{n} &= \vec{u}\times\vec{v}\\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}\\ &= 9\vec{i}+6\vec{j}+12\vec{k}\\ &= (a,b,c)\end{aligned}$$

Чиглэлийг заагч $\vec{n}$, $(x_1,y_1,z_1) = (2,1,1)$ цэгээс хавтгайн тэгшитгэлийг бичье.

$$\begin{aligned}a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) &= 0\\ 9(x-2)+6(y-1)+12(z-1) &= 0\\ 9x+6y+12z-36 &= 0\\ 3x+2y+4z-12 &= 0\end{aligned}$$

Жишээ 15. *$P_1(4,3,-2)$ нь хавтгайн цэг, хавтгай нь (5,-4,6) вектортой перпендикуляр бол хавтгайн тэгшитгэлийг бич.* $5(x-4)-4(y-3)+6(z+2)=0 \implies 5x-4y+6z=-4$

Жишээ 16. *$M_1(2;-1;3), M_2(3;1;2)$ цэгүүдийг дайрсан $\vec{a}(3,-1,4)$ вектортой параллель бол энэхүү хавтгайн тэгшитгэлийг бич.*

- $M_1\vec{M}_2(1,2,-1)$
- $M_1\vec{M}_2\times\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix} = 7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k}$
- $\vec{n}(7,-7,-7)$
- $7(x-2)-7(y+1)-7(z-3)=0$
- $x-y-z=0$

2.6 Хоёр хавтгай хоорондох өнцөг

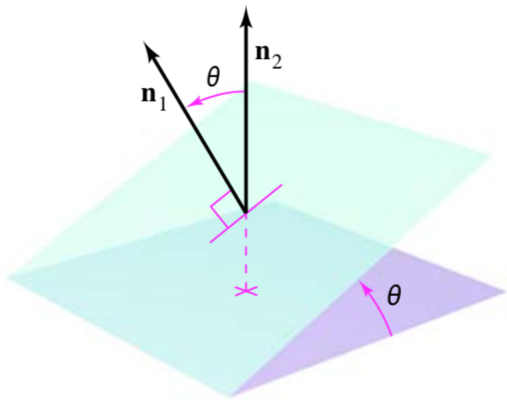
Математикт нормаль нь **ортогональтай** *ижил утгатай. $\vec{n}$ гэж тэмдэглэдэг 3 хэмжээст огторгуйд ялгаатай хоёр хавтгай огтлолцдог эсвэл параллель л байна. Огтлолцдог бол хоорондох өнцгийг нь нормаль векторийнх хоорондох өнцгөөс нь олно.*

Тодорхойлолт 13. **хоёр хавтгайн хоорондох өнцөг**

$$\cos\theta = \frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}$$

$$\cos\theta = \frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|} \implies n_1\cdot n_2 = 0 \iff n_1\perp n_2 n_1 = \lambda n_2 \iff n_1||n_2$$

maruka@rocketmail.com



Жишээ 17. *x-2y+z=0, 2x+3y-2z=0 хоёр хавтгайн хоорондох өнцгийг ол.*

$$
\begin{aligned}
n_1 &= (1, -2, 1) \\
n_2 &= (2, 3, -2) \\
\cos\theta &= \frac{|n_1 \cdot n_2|}{||n_1||||n_2||} \\
&= \frac{|-6|}{\sqrt{6}\sqrt{17}} \\
&= \frac{6}{102}
\end{aligned}
$$

Жишээ 18. *хоёр хавтгай огтлолцдог шулуун*

$$
\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \implies 7y - 4z = 0 \implies y = \frac{4z}{7}
$$

$$
x = t, y = 4t, z = 7t
$$

Ажиглалт 6. *хавтгайн l_1, l_2 шулууны хоорондох өнцөг нь*

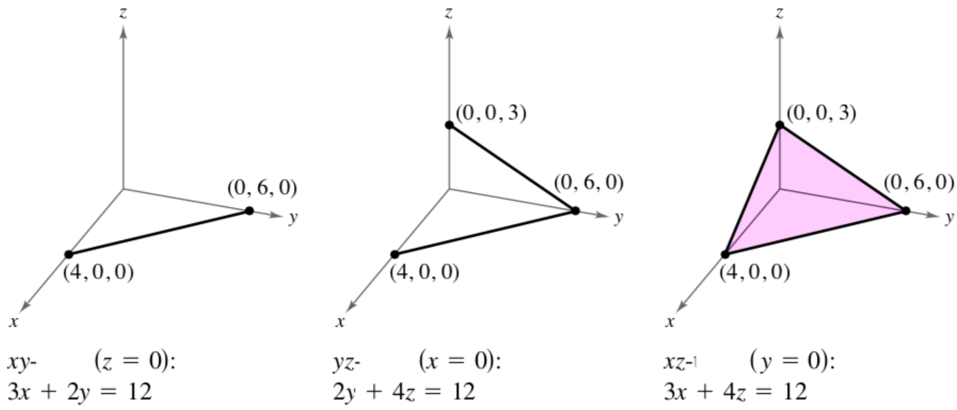
$$
\begin{aligned}
l_1 :& a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\
l_2 :& a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\
n_1 &= (a_1, b_1) \\
n_2 &= (a_2, b_2) \\
\cos\phi &= \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} \\
&= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}
\end{aligned}
$$

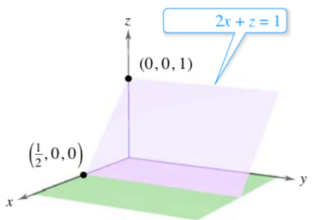
2.7 Зурах

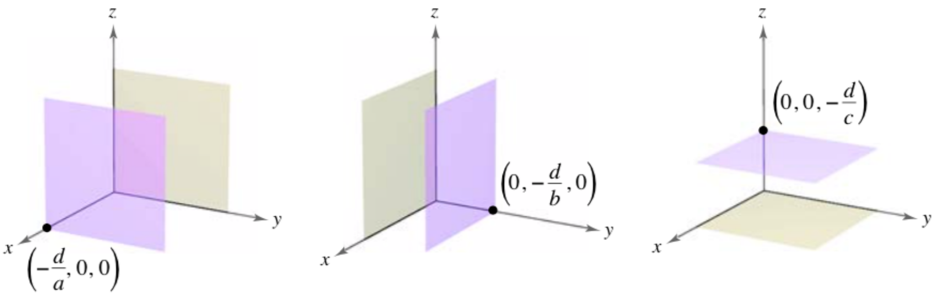
$3x + 2y + 4z = 12.$

$z = 0$

$3x + 2y = 12$ *xy мөр*







2.8 Огторгуйн цэг ба шулуун эсвэл хавтгай хоёрын хоорондох зай

Жишээ 19. *$Q(1,5,-4)$ цэг $3x-y+2z=6$ хавтгай хоёрын хоорондох зай*

$$
\begin{aligned}
n &= (3,-1,2)\\
y=0, z=0 \implies & P(2,0,0)\\
\vec{PQ} &= (1-2, 5-0, -4-0)\\
D &= \frac{\vec{PQ}\cdot n}{|n|}\\
&= \frac{|-1\cdot 3+5\cdot -1-4\cdot 2|}{\sqrt{9+1+4}}\\
&= \frac{16}{\sqrt{14}}
\end{aligned}
$$

Тодорхойлолт 14. Цэг, хавтгай хоёрын хоорондох зай

$$\begin{aligned} ax+by+cz+d=0 \\ y=0, z=0 \implies P(-\frac{d}{a},0,0) \text{ хавтгайн цэг} \\ =\frac{\vec{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|} \\ =\frac{(x_1+\frac{d}{a}, y_1-0, z_1-0)\cdot(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2} \\ =\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

maruka@rocketmail.com

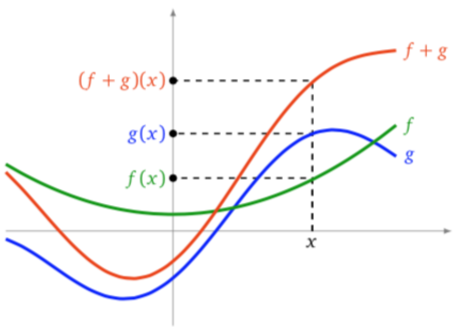
Бүлэг 3

Функц

3.1 Үйлдэл

Тодорхойлолт 15. **Үйлдэл** $f : X_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : X_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X = X_1 \cap X_2$

- $f + g : X \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\, \forall x \in X$;
- $f - g : X \to \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)\, \forall x \in X$;
- $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\, \forall x \in X$;
- $\frac{f}{g} : X_0 \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\, \forall x \in X_0 = \{z \in X : g(z) \neq 0\}$;



Тодорхойлолт 16 (***Нийлмэл функц***). $f : X \to Y$ $g : Y \to Z$ *нь*

$$g \circ f : X \to Z,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in X.$$

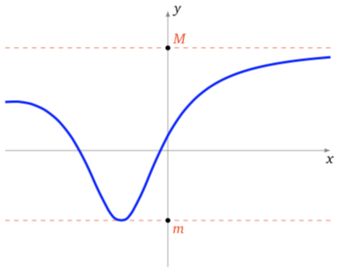
Жишээ 20. $f(x) = |x|$ $g(x) = \sin(x)$, $(g \circ f)(x) = \sin|x|$. $(f \circ g)(x) = |\sin x|$. $g \circ f \neq f \circ g$.

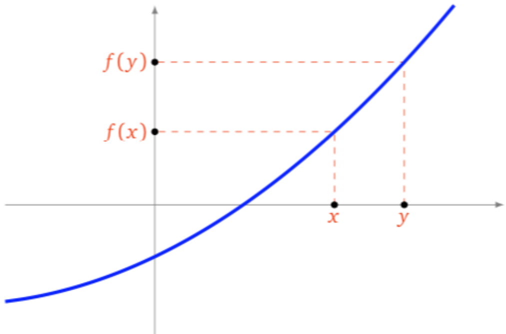
3.2 функцийн чанар

Тодорхойлолт 17. **Зааглагдсан функц** $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *-ийг*

- *дээрээсээ зааглагдсан функц гэж* $\exists \quad M \in \mathbb{R}$ *нь* $f(x) \leqslant M\, \forall x \in X$;
- *доороосоо зааглагдсан функц гэж* $\exists \quad m \in \mathbb{R}$ *нь* $m \leqslant f(x)\, \forall x \in X$;
- **зааглагдсан** *функц гэж* $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$, $m \leqslant f(x) \leqslant M\, \forall x \in X$;

Жишээ 21.
- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ *дээрээсээ зааглагдаагүй, доороосоо зааглагдсан;*





- $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ *заагдлагдаагүй;*
- $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *заагдагдсан.*

Тодорхойлолт 18. **Өсдөг, буурдаг функц** $X \subseteq \mathbb{R}, x_1, x_2 \in X$ $x_1 < x_2$. $f : X \to \mathbb{R}$*-ийг*

- *үл буурах функц гэж* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$*;*
- *Эрс өсөх функц гэж* $f(x_1) < f(x_2)$*;*
- *үл өсөх функц гэж* $f(x_1) \geqslant f(x_2)$*;*
- *эрс буурдагфункц гэж* $f(x_1) > f(x_2)$*.*
- *(эрс) монотон нь (эрс) өсдөг эсвэл (эрс) буурдаг.*

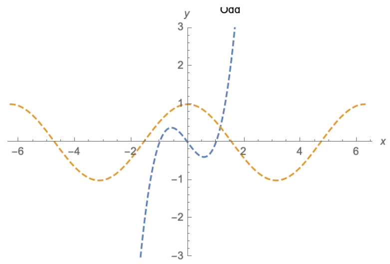
Жишээ 22.
- $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ *Эрс Өсдөг;*
- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ *монотон биш;*
- $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ *буурдаг.*

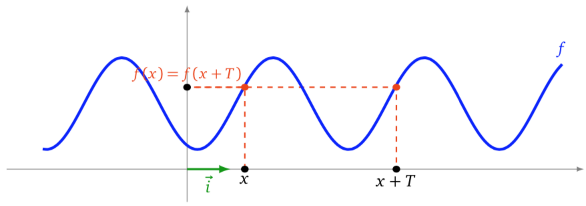
Тодорхойлолт 19. **Тэгш хэмт, үет функц** $X \subseteq \mathbb{R}$ *тодорхойлогдох муж* $x = 0(x \implies -x \in X)$. $f : X \to \mathbb{R}$ *-ийг*

- X *олонлог* **ординатын хувьд** *тэгш хэмтэй.* $f(-x) = f(x) \forall x \in X$ *тэнцэтгэл биелэж байвал функцийг* **тэгш** *функц гэнэ.*
- X *олонлог* **координатын эх***ийн хувьд тэгш хэмтэй.* $f(-x) = -f(x) \forall x \in X$ *тэнцэтгэл биелэж байвал функцийг* **сондгой функц** *гэнэ.*

Ажиглалт 7.
- f *тэгш* $\iff$ f*-ийн график нь y тэнхлэгээрээ тэгш хэмтэй;*
- f *сондгой* $\iff$ f *-ийн график нь координатын эхээрээ тэгш хэмтэй;*
-

$f_1 \cdot f_2$ *эсвэл* $\frac{f_1}{f_2}$	f_1=*тэгш*	=*сондгой*
f_2=*тэгш*	*тэгш*	*сондгой*
=*сондгой*	*сондгой*	*тэгш*





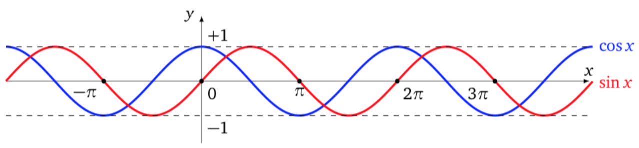
Жишээ 23. • $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ *тэгш,* $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ *сондгой.*

- $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$
  - *тэгш* $\iff$ n *тэгш,*
  - *сондгой* $\iff$ n *сондгой.*
- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ *тэгш,* $g(x) = -5x^3 - 2x$ *сондгой,* $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^4-2x^2+4}{-5x^3-2x}$ *сондгой.*

Тодорхойлолт 20. **Үет функц** $X \subseteq \mathbb{R}$, $T > 0$ *нь* $x + T \in X\, \forall x \in X$. $f : X \to \mathbb{R}$*-ийг үет* T, $T > 0$,

$$f(x + T) = f(x)\, \forall x \in X.$$

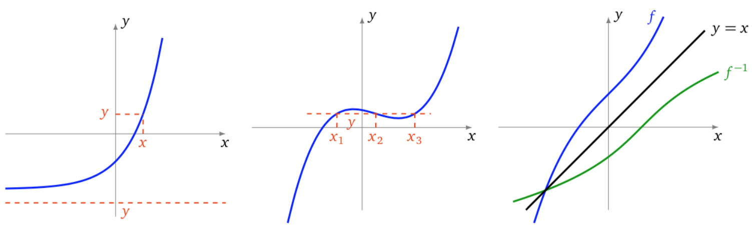
Жишээ 24. $f(x) = \sin(x)$ *үет* $T = 2\pi$. $f(x) = \cos(x)$ *үет* $T = 2\pi$.



Тодорхойлолт 21. **Урвуу функц**

$f : X \to Y$ *харилцан нэг утгатай, монотон* $\iff$ $\exists\, g : Y \to X$ *нь*

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x\, \forall x \in X$,
- $(f \circ g)(x) = f(g(y)) = y\, \forall y \in Y$. g *нь ганцхан ба* f*-ийн урвуу функц* $f^{-1} = g$.



$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$, f*-ийн график* $G(f)$, f^{-1}*-ийн график* $G(f^{-1})$ *нь* $y = x$*-ээрээ тэгш хэмтэй.* **Урвуу функцийг дараах дүрм***ийг баримтлан олно.*

- *Өгөгдсөн функцийн утгын мужийг олно*
- *Аргументын ялгаатай утга бүрт функцийн ялгаатай утга харгалзаж буйг тогтооно.*
- $y = f(x)$*-ээс* x*-ийг* y*-ээр илэрхийлнэ.*
- x*-ийг* y*-ээр,* y*-ийг* x*-ээр солино.*

3.3 Хялбар функц

Тодорхойлолт 22. **Олон гишүүнт** $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \; x \in \mathbb{R}$$

-ийг Олон гишүүнт. $a_n \neq 0$*,* p*-ийн* n *зэрэг .*

Жишээ 25.
- $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1, \quad n = 3.$ *эрэмбийн олон гишүүнт. (бүхэл рациональ)*
- $n = \frac{2}{3} \quad p(x) = a\sqrt[3]{x^2} \quad \frac{2}{3}$ *эрэмбийн олон гишүүнт. (иррациональ)*

Тодорхойлолт 23. **Рационал функц** $p, q \neq 0$*,* n *болон* m *эрэмбийн олон гишүүнт*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

-ийг $n - m$ *зэргийн Рационал функц. Тодорхойлогдох муж* X $X = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

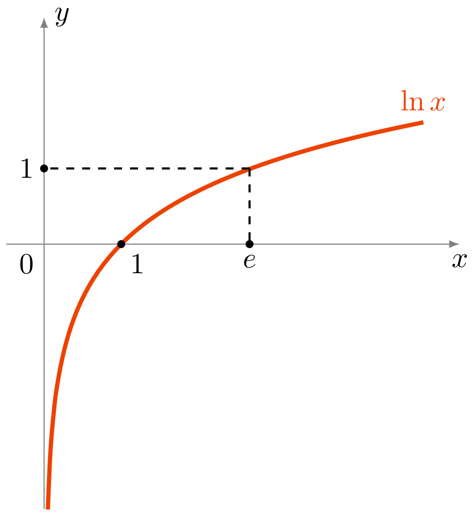
Жишээ 26. $r(x) = \frac{2x^2-1}{2x^5-10x^3+8x}$ $2 - 5 = -3$ *зэргийн Рационал функц.* $X = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Тодорхойлолт 24. **Логарифм**

$$ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \qquad \text{ба} \qquad \ln(1) = 0$$

Чанар 2.
1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$



Тэмдэглэгээ 2.
- $\ln x$ **натурал логарифм** *гэж нэрлэдэг.*

$\ln(e) = 1$

- *a* **суурьтай логарифм** $\boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}}$ *тодорхойлдог.*

  $\log_a(a) = 1$
- $a = 10$, lg

$$\lg(10) = 1 \quad \textit{ба} \quad \lg(10^n) = n$$

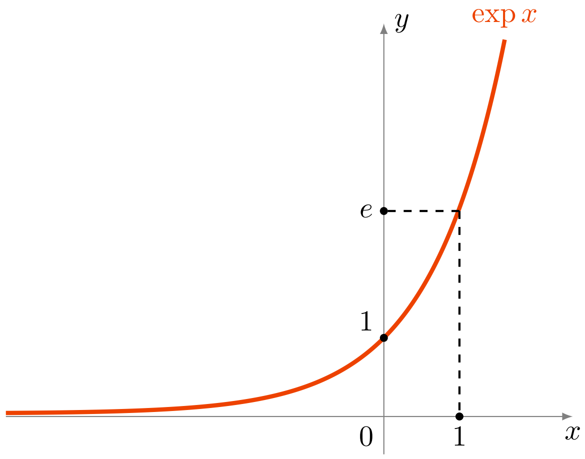
$\boxed{x{=}10^y \iff y = \lg(x)}$

- 2 *суурьтай логарифм :* $\log_2(2^n) = n$

Тодорхойлолт 25. **Экспонциаль**

$$exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

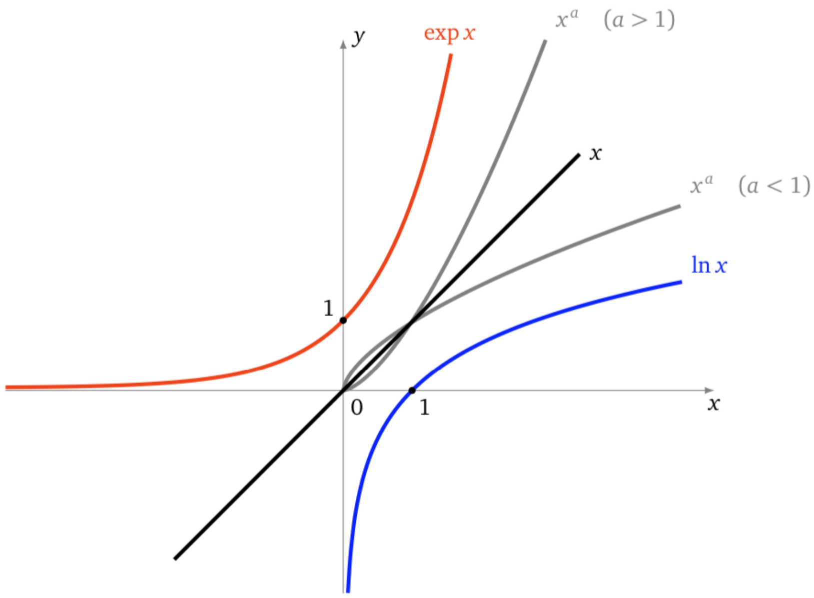
- $\boxed{\exp(\ln x) = x \quad \forall x > 0}$ *ба* $\boxed{\ln(\exp x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $(\exp x)^n = \exp(nx)$



Тодорхойлолт 26. **Зэрэгт функц** *тодорхой бодит тоо байх үед бодит тоо бүхэнд цор ганц бодит тоо харгалзуулдаг функцийг зэрэгт функц гэнэ.*

$x, y > 0 \quad a, b \in \mathbb{R}.$

- $\boxed{x^{a+b} = x^a x^b}$
- $\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}}$
- $\boxed{(xy)^a = x^a y^a}$
- $\boxed{(x^a)^b = x^{ab}}$
- $\boxed{\ln(x^a) = a \ln x}$



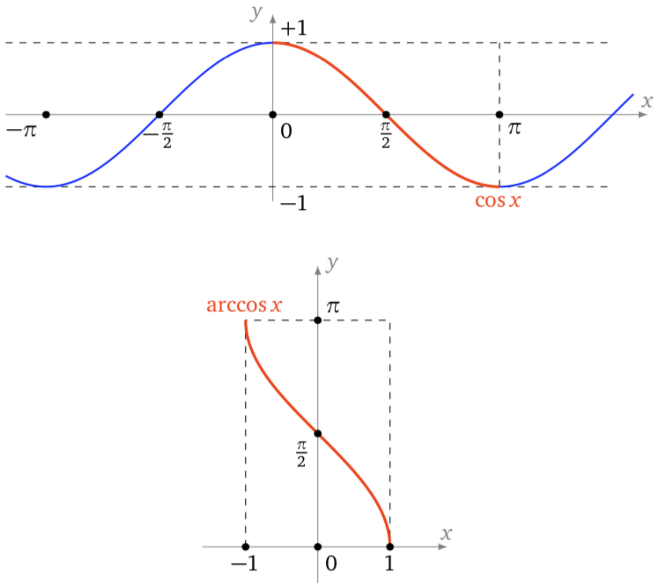
Зураг 3.1: Зэрэгт функц Чанар

Тодорхойлолт 27. **Тригонометрийн урвуу функц** *Йнхүү:*

$$\cos_| : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

arccosinus :

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

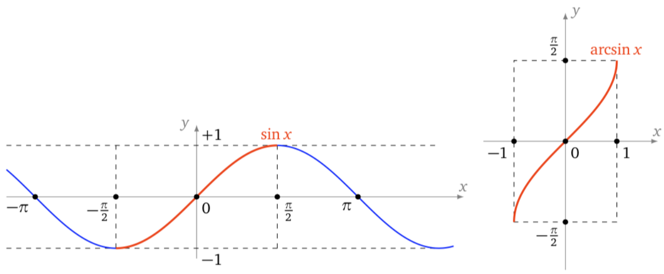


Зураг 3.2: arccos x

$$\sin_| : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

arcsinus :

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$

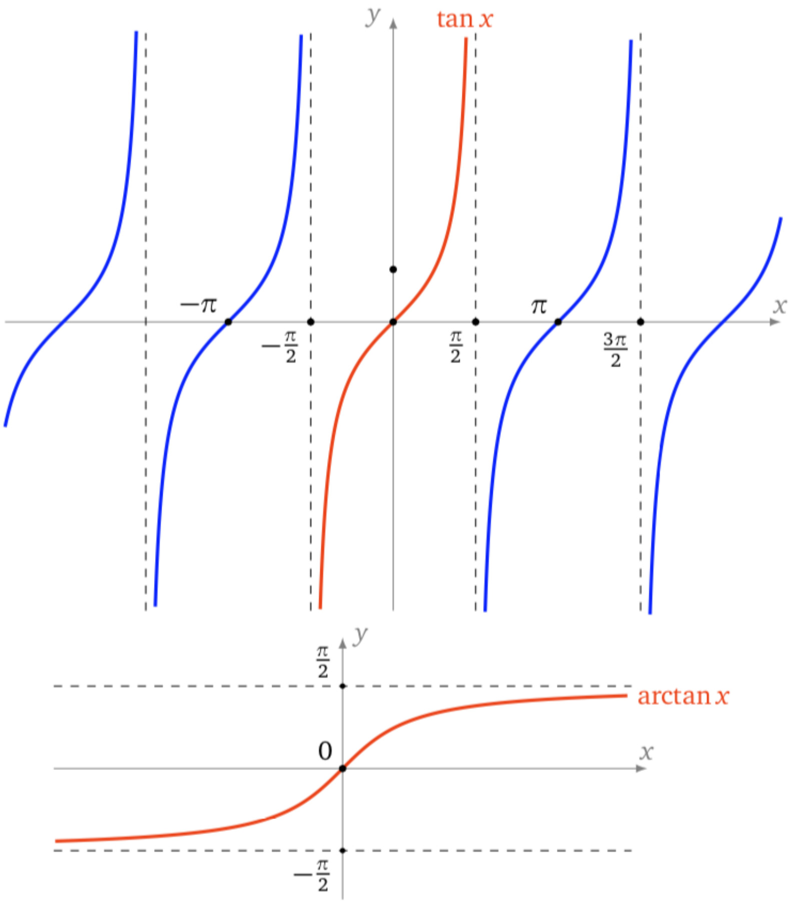


Зураг 3.3: arcsin x

$$\tan_{|} :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

. ***arctangent*** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$



Зураг 3.4: arctg x

Бүлэг 4

Хязгаар

Тоон дараалал

- *Тоон дарааллыг судлах зорилго нь тоонуудын дараалал (бодит, нарийн төвөгтэй ...) -ийн хувьслыг ойлгох явдал юм. Энэ нь өдөр тутмын амьдралын олон үзэгдлийг загварчлах боломжийг олгодог. Жишээлбэл, бид жилийн 10%-ийн хүүтэй S хөрөнгө оруулалт хийлээ гэж бодъё.*

- *Хэрэв S_n нь n жилийн дараа бидний олж авах нийлбэр*

- $S_0 = S \quad S_1 = S \times 1,1 \quad \ldots \quad S_n = S \times (1,1)^n$

- *10 жилийн эцэст бидэнд $n = 10$*
  $S_{10} = S_n = S \times (1,1)^{10} \approx S \times 2,59$

4.1 Тодорхойлолт

Тодорхойлолт 28. • **Тоон дараалал** $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *нь хэрэглээ юм.*

- $n \in \mathbb{N}$ *-ийн u_n-ийг $u(n)$ тэмдэглэх ба тоон дарааллын* **ерөнхий гишүүн** *гэж нэрлэдэг.*

Жишээ 27. • $(\sqrt{n})_{n \geqslant 0} \qquad 0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}, \ldots$

- $((-1)^n)_{n \geqslant 0} \qquad +1,\ -1,\ +1,\ -1, \ldots$

-
  - $(F_n)_{n \geqslant 0}$*-ийн* $F_0 = 1,\ F_1 = 1$ *тодорхойлогдсон.*
  - $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *энд* $n \in \mathbb{N}$
  - $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$

- $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geqslant 1} \qquad 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \ldots$

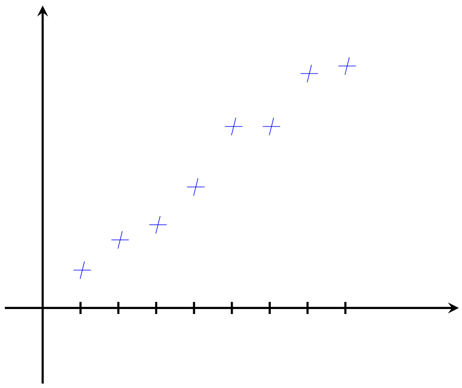
4.2 өсөх дараалал, буурах дараалал

Тодорхойлолт 29. • *Тоон дараалал* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *нь* **өсөх дараалал** *хэрэв* $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *нь* **эрс өсөх дараалал** *хэрэв* $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$

- **буурах дараалал**, *(***эрс буурах дараалал** *)* $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *нь* **монотон дараалал** *хэрэв дараалал өсдөг эсвэл буурдаг байхыг хэлнэ.*



Жишээ 28. • *Тоон дараалал* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *тодорхойлогдохдоо* $S_n = S \times (1,1)^n$ *нь эрс өсөх дараалал учир нь* $S_{n+1}/S_n = 1,1 > 1$

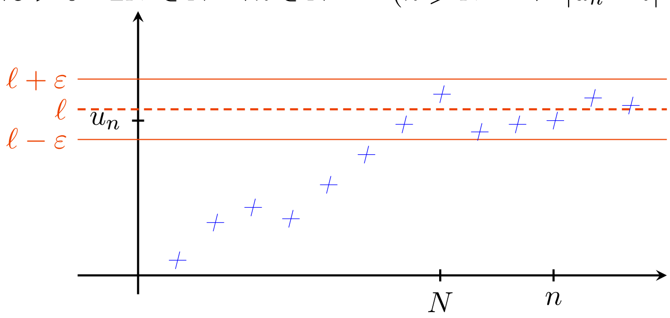
- *Тоон дараалал* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *тодорхойлогдохдоо* $u_n = (-1)^n/n$ *нь өсөх дараалал ч биш, буурах дараалал ч биш*
- *Тоон дараалал* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ *нь эрс буурах дараалал*

4.3 Төгсгөлөг хязгаар, хязгааргүй хязгаар

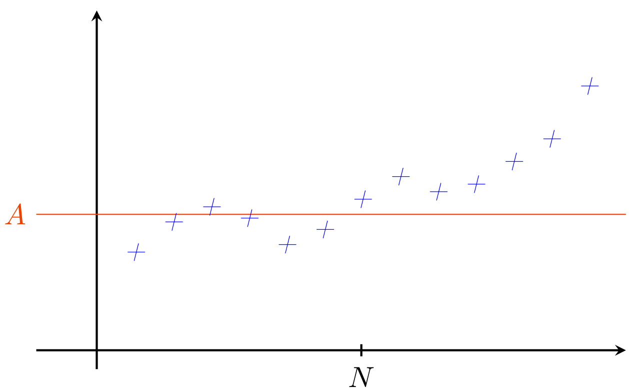
Тодорхойлолт 30. *Тоон дараалал* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **лимит** $\ell \in \mathbb{R}$ *si :*
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *эсвэл* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$
- $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$



Тодорхойлолт 31. *Тоон дараалал* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $+\infty$ **тэмүүлэхэд** *:* $\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n \geqslant A)$
Тоон дараалал $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $-\infty$ **Тоон дараалал** $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $+\infty$ *Тоон дараалал*



Тодорхойлолт 32. *Тоон дараалал* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **нийлдэг** *бол* **төгсгөлөг** *лимиттэй.*
Сарнидаг дараалал *бол өөрөөр хэлбэл хязгаар нь (* $\pm\infty$*)*

Чанар 3. *Тоон дараалал нийлдэг дараалал бол цор ганц лимиттэй.*

4.4 Лимитийн чанар

Чанар 4. **Төгсгөлөг лимит дээрх үйлдэл**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ба* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *нийлдэг дарааллууд гэе.*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell,\ \ell\in\mathbb{R}\ \lambda\in\mathbb{R}\ \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell',\ \ell,\ell'\in\mathbb{R},$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = \ell+\ell' \quad \text{ба} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n) = \ell\times\ell'}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *эсвэл* $\ell\in\mathbb{R}^*\ u_n\neq 0\ n$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$

Жишээ 29. $u_n\to\ell\ \ell\neq\pm1,$

$$u_n(1-3u_n)-\frac{1}{u_n^2-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell(1-3\ell)-\frac{1}{\ell^2-1}$$

Чанар 5. **Хязгааргүй лимит дээрх үйлдэл**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *ба* $u_n > 0\ n\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ба* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *нь доороосоо зааглагдсан дараалал* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ба* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *нь доороосоо зааглагдсан* $\lambda > 0$ *байвал*
   $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n) = +\infty$

Жишээ 30.

- $$\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2-2n+3}{-3n^2+n-1}.$$

$$\frac{7n^2-2n+3}{-3n^2+n-1}=\frac{n^2\cdot\overbrace{(7-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}^{\to7-2\cdot0+3\cdot0^2=7}}{n^2\cdot\underbrace{(-3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}_{\to-3+0-0^2=-3}}\to-\frac{7}{3}$$

- $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n}.$$

$$\begin{aligned}
(a-b)\cdot(a+b)&=a^2-b^2\\
\sqrt{n+3}-\sqrt{n}&=\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\\
&=\frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\\
&=\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\to\frac{3}{+\infty}\\
&=0.
\end{aligned}$$

Хэрэв хязгаарт дараах **тодорхой хэлбэр***үүдийн аль нэгийг авсан бол хязгаарыг тооцоолох дүрмийг ердийн чанар ашиглан бодож болно:* $a \in \mathbb{R}$*,*

$$(\pm\infty) + a = (\pm\infty)$$
$$(\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} (\pm\infty) & a > 0, \\ (\mp\infty) & a < 0 \end{cases}$$
$$\frac{a}{(\pm\infty)} = 0$$
$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$$
$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = (+\infty)$$
$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = (-\infty)$$
$$q^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & if\, q > 1 \\ 0 & if\, 0 < q < 1 \end{cases}$$
$$q^{-\infty} = \begin{cases} 0 & if\, q > 1 \\ +\infty & if\, 0 < q < 1 \\ q^0 = 1\, if\, q > 0 & \end{cases}$$

4.5 Тодорхойгүй хэлбэр

Тодорхой нөхцөл байдалд хязгаарын талаар юу ч хэлж чадахгүй үед тохиолдол бүрээр шинжлэх шаардлагатай байдаг.

Тодорхойгүй хэлбэрийг бий болгодог

1. $+\infty - \infty$

   хэрэв u_n+ *ба* v_n *байвал* $lim(u_n+v_n)$*-ийг тодорхойлохын тулд дараалал тус бүрийн дагуу судалгаа хийх шаардлагатай гэсэн үг юм. дараах жишээнүүдээр харуулъя.*

$$\lim_{n\to+\infty} (e^n - \ln n) = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} (n - n^2) = -\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(n + \frac{1}{n}\right) - n\right) = 0$$

2. $0 \times \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \times e^n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \ln n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = 1$$

3. $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, ...

4.6 геометр дараалал

Чанар 6 (Геометр дараалал). *a гэсэн бодит тоо байг.* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *дарааллын ерөнхий гишүүн нь :* $u_n = a^n$

1. *хэрэв* $a = 1$, $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n = 1$
2. *хэрэв* $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. *хэрэв* $-1 < a < 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

maruka@rocketmail.com

4. *хэрэв* $a \leqslant -1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *сарнина.*

Баталгаа. 2. • $a = 1 + b$ энд $b > 0$

- $a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}b^k + \cdots + b^n$
- a : $a^n \geqslant 1 + nb$
- $\lim_{n \to +\infty}(1 + nb) = +\infty$ $b > 0$
- $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ □

4.7 Функцээр тодорхойлогддог давтагдах дараалал

давтагдах рекуррент дараалал

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *функц. Дахин давтагдах дарааллыг эхний гишүүнээр нь тодорхойлж, үе шаттайгаар дараагийн гишүүдийг тооцоолох боломжийг олгодог:*
- $u_0 \in \mathbb{R}$
- $u_{n+1} = f(u_n)$ $n \geqslant 0$

$$u_0 \quad u_1 = f(u_0) \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) \quad u_3 = f(u_2) = f(f(f(u_0)))\ldots$$

$\boxed{u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{ба} \quad u_{n+1} = f(u_n) \ \geqslant 0}$

Жишээ 31. • $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

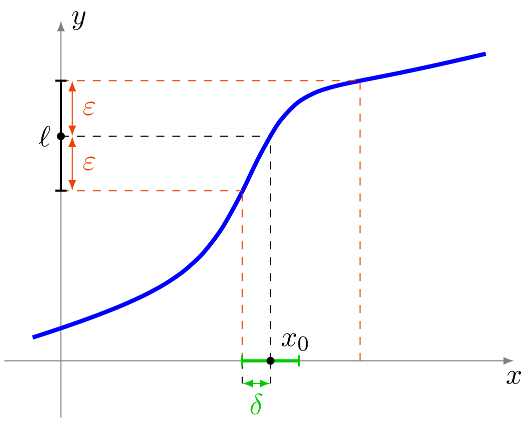
- $u_0 = 2$ *дарааллын эхний гишүүн*
- $u_{n+1} = f(u_n)$ $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$, $n \geqslant 0$

$$2 \quad 1+\sqrt{2} \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}\ldots$$

4.8 Функцийн цэг дээрх хязгаар

I нь интервал ба x_0 *байг.*

Тодорхойлолт 33. $\ell \in \mathbb{R}$. $f : I \to \mathbb{R}$ **x_0 цэг дээр ℓ хязгаартай** $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$



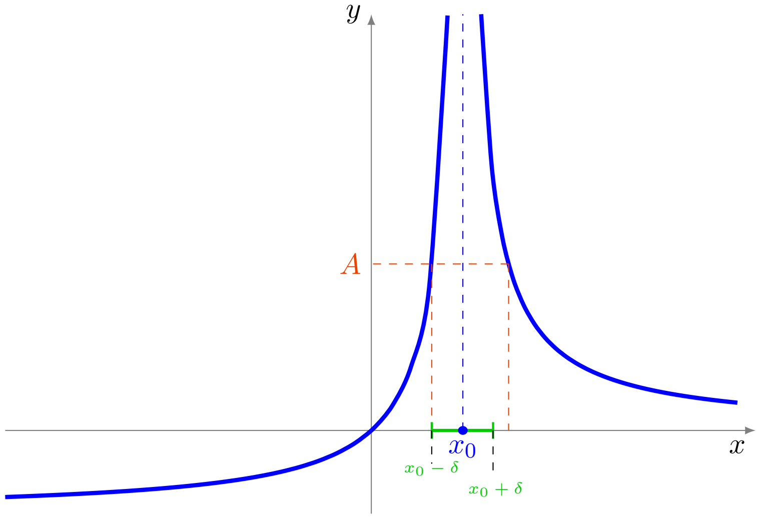
Тодорхойлолт 34. **x_0 цэг дээр f нь $+\infty$ хязгаартай** , $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *тэмдэглэх ба*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

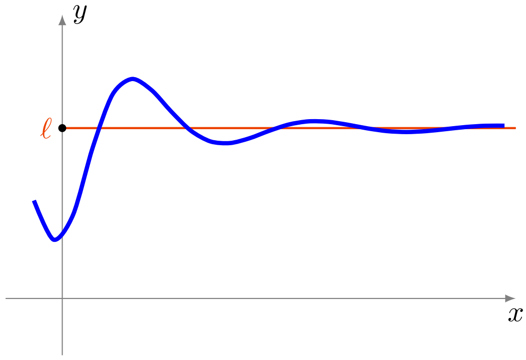
x_0 цэг дээр f нь $-\infty$ хязгаартай *si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

 maruka@rocketmail.com



Зураг 4.1: x_0 цэг дээр f нь $+\infty$ хязгаартай



Зураг 4.2: $+\infty$ дээрх f функцийн хязгаар нь ℓ

4.9 Хязгааргүй дээрх хязгаар

$f : I \to \mathbb{R}$, ба $I =]a, +\infty[$ байг.

Тодорхойлолт 35. *$\ell \in \mathbb{R}$ өгөгдсөн.* **$+\infty$ дээрх f функцийн хязгаар нь ℓ** *бол*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Тодорхойлолт 36. **$+\infty$ дээрх f функцийн хязгаар нь $+\infty$** *si*

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

Жишээ 32.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *ба* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \textit{хэрэв } n \textit{ тэгш} \\ -\infty & \textit{хэрэв } n \textit{ сондгой} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n} \right) = 0$ *ба* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n} \right) = 0$

Жишээ 33. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ *энд* $a_n, \; b_m > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \textit{хэрэв } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \textit{хэрэв } n = m \\ 0 & \textit{хэрэв } n < m \end{cases}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots \right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots \right)}$$

4.10 Функцийн хязгаарын чанар

f, g хоёр функц өгөгдсөн ба $x_0 \in \mathbb{R}$ эсвэл $x_0 = \pm\infty$ гэе.

Чанар 7. *хэрэв $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ ба $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$ байвал*

- $\lim\limits_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = \ell \times \ell'$
- *хэрэв $\ell \neq 0$ байвал $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$*
- *хэрэв $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ (эсвэл $-\infty$) байвал $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$*

Тодорхой бус хэлбэр

$$\text{хэрэв} \quad f \to +\infty \quad \text{ба} \quad g \to -\infty \quad \text{байвал } f + g \to \quad ?$$

Тодорхойгүй хэлбэрүүд: тохиолдол тус бүрээр бодох хэрэгтэй болдог.

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^0$$

4.11 Гайхамшигт хязгаар

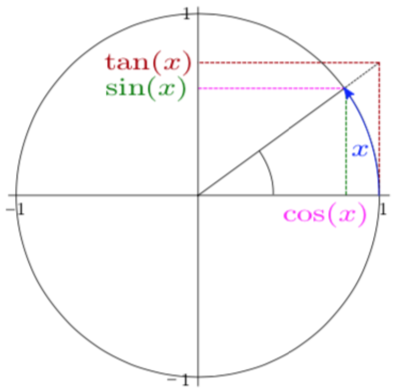
- $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

  Баталгаа.

  $$0 < \sin x \leqslant x \leqslant \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
  $$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$$
  $$\underbrace{1}_{\to 1} \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \underbrace{\cos x}_{\to 1} \quad \text{as } x \to 0^+.$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \square$$

  $\square$

- $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$



Баталгаа.

$$\begin{aligned}
&\text{For } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\
\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{x^2 \cdot (1+\cos x)} \\
&= \underbrace{\left(\frac{\sin x}{\underbrace{x}_{\to 1}}\right)^2}_{\to 1^2=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\cos x}_{\to 1}}}_{\to \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ as } x \to 0. \quad \square
\end{aligned}$$

□

- $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

- $$\boxed{\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e}$$

- $$\boxed{\lim_{x\to\infty} (1+\frac{t}{x})^x = e^t}$$

- $$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Жишээ 34. •

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}}$$

$$\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} = \frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{x-4} \to \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{x-4} \cdot \frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}} &= \frac{(4-x)(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})} \\
&= -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \to -\frac{1+1}{3+3} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{2n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n^2+n+1)}\right)^{-(n^2+n+1)\cdot\frac{2n^2}{-(n^2+n+1)}}\\ &= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{-(n^2+n+1)}}\\ &= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{-n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}\\ &= e^{-2}\end{aligned}$$

- $$\lim_{x\to -1}\frac{tg\pi x}{1+x} =$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{tg\pi x}{1+x} &\overbrace{=}^{\frac{0}{0}}\\ \lim_{x+1\to 0}\frac{tg\pi x}{1+x} &= \quad y=x+1 \quad x\to -1 \; y\to 0\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{tg\pi(y-1)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{tg\pi y - tg\pi}{1+tg\pi y tg\pi}}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{tg\pi y - tg\pi}{y(1+tg\pi y tg\pi)}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{tg\pi y}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{\pi y}\cdot\frac{\pi}{\cos\pi y} = 1\cdot\frac{\pi}{1}\\ &= \pi\end{aligned}$$

4.12 Тасралтгүй функц

x_0 цэгийн орчинд тодорхойлогдсон функцийн хувьд $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ нөхцөл биелэж байвал уул функцийг x_0 цэг дээр тасралтгүй функц гэдэг. Энэ тодорхойлолт дараах тодорхойлолттой эквивалент.

Тодорхойлолт 37. • *$f : I \to \mathbb{R}$ est* $x_0 \in I$ **цэг дээр тасралтгүй** *хэрэв*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in I \quad |x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

x x_0 рүү тэмүүлэхэд $f(x)$ утга нь $f(x_0)$ утга руу дөхнө.

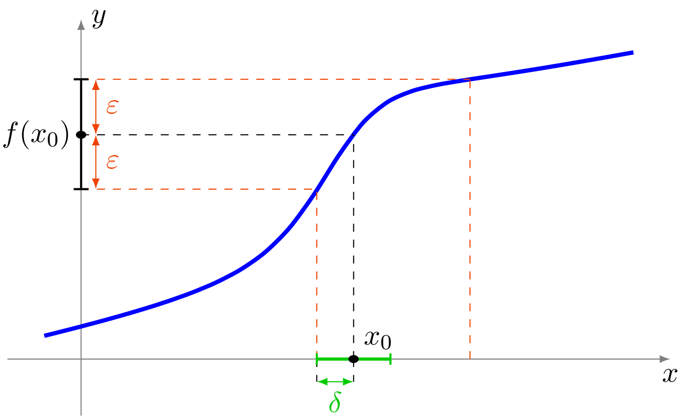
- *f-ийг* I **интервал дээр тасралтгүй** *гэдэг нь f нь I интервалын бүх цэг дээр тасралтгүй.*

*x_0 цэг дээр***тасралттай** *функцүүд*

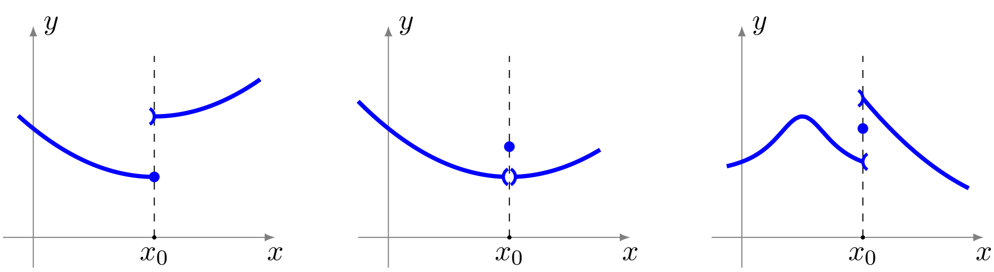
зурагт харуулав

Жишээ 35. • *тасралтгүй функцууд нь*

- *интервал дээрх тогтмол функц*
- $[0,+\infty[$ *тодорхойлогдсон* $x\mapsto\sqrt{x}$
- $\mathbb{R}$ *тодорхойлогдсон* sin *ба* cos
- $\mathbb{R}$ *тодорхойлогдсон* $x\mapsto|x|$
- $\mathbb{R}$ *тодорхойлогдсон*exp *ба* $]0,+\infty[$ *тодорхойлогдсон* ln



Зураг 4.3: Caption



Зураг 4.4: тасралттай функцүүд

Бүлэг 5

Уламжлал

- $\sqrt{1,01}$
- $1,01 \approx 1$ $\sqrt{1,01} \approx \sqrt{1}$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- x x_0 $\implies$ $f(x)$ $f(x_0)$
- $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y = (x-1)\frac{1}{2} + 1$
- x 1 $f(x) \approx (x-1)\frac{1}{2} + 1$
- $x = 1,01 \implies f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) = 1 + \frac{0,01}{2} = 1,005$
- $\sqrt{1,01} = 1,00498\ldots$

5.1 цэг дээрх уламжлал

$f : I \to \mathbb{R}$

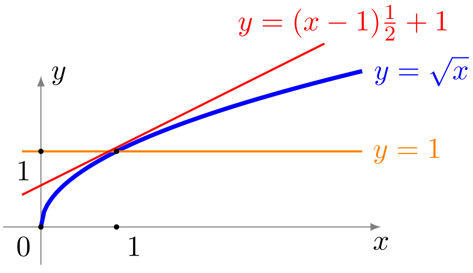
Тодорхойлолт 38. • f x_0 **цэг дээрх уламжлал** *гэдэг нь* **өсөлтийн хурд** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ x x_0 *рүү тэмүүлэхэд хязгаартай байдаг.*

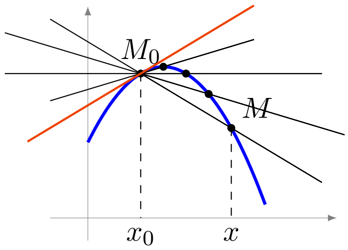
- f x_0 $f'(x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Тодорхойлолт 39. • f I **дээр уламжлалтай** f $\forall x_0 \in I$

- $x \mapsto f'(x)$ **дифференциалчлагддаг функц** f





Зураг 5.1: Шүргэгч шулууны тэгшитгэл

- f' *эсвэл* $\frac{df}{dx}$

Жишээ 36.

- $f(x) = x^2$ *бүх цэг дээрээ дифференциалчлагддаг* $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \dfrac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0$
- f x_0 $2x_0$: $f'(x) = 2x$

Жишээ 37. $f(x) = \sin x$. $f'(x) = \cos x$

1. $x_0 = 0$
   - $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$
   - $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \to 1$
   - f $x_0 = 0$ *ба* $f'(0) = 1$
2. x_0 *дурын*
   - $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$
   - $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}$
   - $\cos \frac{x + x_0}{2} \to \cos x_0$ $x \to x_0$
   - $u = \frac{x - x_0}{2}$ *alors* $\frac{\sin u}{u} \to 1$ $u \to 0$
   - $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \cos x_0$
   - $f'(x) = \cos x$

5.2 Шүргэгч шулууны тэгшитгэл

Тодорхойлолт 40. $(x_0, f(x_0))$ *цэг дээр* **Шүргэгч** *шулууны тэгшитгэл* $\boxed{y = (x\text{-}x_0)f'(x_0) + f(x_0)}$

Огтлогч шулуун $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$ *чиглүүлэх коэффициенттэй* $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

5.3 Нийлбэр, үржвэр, ...

Чанар 8. $f, g : I \to \mathbb{R}$ I *дифференциалчлагддаг* . $\forall x \in I$:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ $\lambda \in \mathbb{R}$
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

 maruka@rocketmail.com

- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(* $f(x) \neq 0$*)*
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(*$g(x) \neq 0$*)*

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f'(f \times g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Баталгаа. $(f \times g)' = f'g + fg'$
$x_0 \in I$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0)$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \quad f'(x_0)\ g(x_0) \quad + \quad g'(x_0)\ f(x_0)$$

$f \times g$ I дифференциалчлагддаг $f'g + fg'$ □

5.3.1 Таблиц

Функц	***Уламжлал***
x^n	nx^{n-1} *(*$n \in \mathbb{Z}$*)*
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ *(*$\alpha \in \mathbb{R}$*)*
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

5.4 Давхар функцийн уламжлал

Чанар 9. *f x ба g $f(x)$ байвал $g \circ f$ x нь*

$$\boxed{\big(\ g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Жишээ 38. $\ln(1 + x^2)$

- $f(x) = 1 + x^2$ $f'(x) = 2x$
- $g(x) = \ln(x)$ $g'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$
- $\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = g'\big(1 + x^2\big) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$

5.4.1 Таблиц

Функц	*Уламжлал*
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

5.5 Урвуу функцийн уламжлал

$f : I \to J$

$f^{-1} : J \to I$

$f' \neq 0$ I *байвал* $\exists f^{-1}$

$\forall x \in J$ $\boxed{(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$

$g = f^{-1}$

$$f\big(g(x)\big) = x$$

$$\implies f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 1$$

$$\implies (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

5.6 Лейбницийн томъёо

Чанар 10. $\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} \cdots + f \cdot g^{(n)}}$

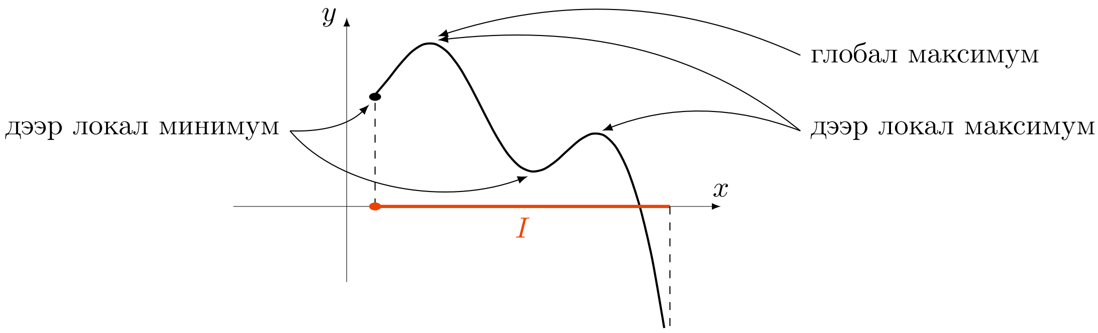
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

- $n = 1 \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $n = 2 \quad (f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

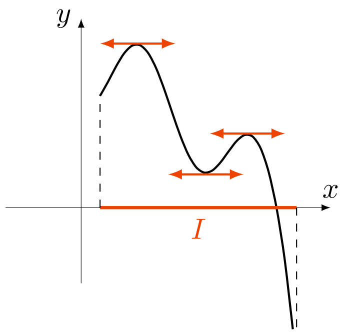
5.7 Экстремумууд

$f : I \to \mathbb{R}$

Тодорхойлолт 41.
- $f'(x_0) = 0$ *байх* f x_0 **сэжигтэй цэг**
- f x_0 **дээр локал максимум** *тулд* $x \in I \cap J \quad f(x) \leqslant f(x_0)$



Зураг 5.2: Caption



Зураг 5.3: extremum

- ... x_0 **дээр локал минимум** ... $f(x) \geqslant f(x_0)$
- f x_0 **локал экстремум** *гэдэг нь* f *нь* x_0 *дээр локал минимум эсвэл локал максимум байхыг хэлнэ.*
- x_0 **глобал максимум** *тулд* $x \in I$ $f(x) \leqslant f(x_0)$

Чанар 11. *I задгай интервал $f : I \to \mathbb{R}$ дифференциалчлагддаг*
f нь x_0 дээр локал максимум (локал минимум)

$$f'(x_0) = 0$$

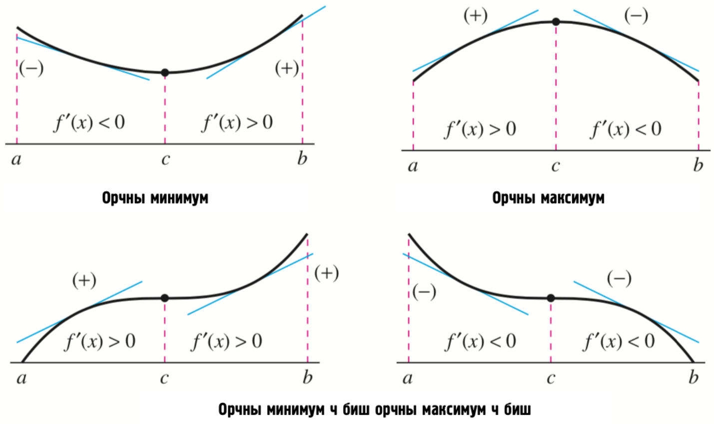
Чанар 12. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $[a,b]$ тасралтгүй, $]a,b[$ дифференциалчлагддаг*

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *өсдөг*
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *буурдаг*
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *тогтмол*
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *эрс өсдөг*
5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *эрс буурдаг*

5.7.1 I эрэмбийн уламжлалын тест

Тодорхойлолт 42. *$c \in I$ задгай интервал дээр тасралтгүй f функцийн сэжигтэй цэг нь c байг. f нь интервал (c дээр дифференциалчлагдахгүй байж болно) дээрээ дифференциалчлагддаг бол $f(c)$-ийг ангилахдаа*

1. *$f'(x)$ нь c дээр тэмдгээ - аас + болгодог $(c, f(c))$ дээрээ f локал минимум байна.*
2. *$f'(x)$ нь c дээр тэмдгээ + ээс - болгодог $(c, f(c))$ дээрээ f локал максимум байна.*
3. *$f'(x)$ нь c-ийн 2 талд тэмдэг өөрчлөгдөхгүй байвал локал минимум ч биш, локал максимум ч биш.*



Жишээ 39.

$$
\begin{aligned}
y &= x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1 \textit{ экстремумыг ол.} \\
y' &= 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 \\
f'(x) &= 0 \\
& 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \\
& x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3 \\
& \forall x \in]-\infty, 0[\;\; f'(x) > 0 \implies f \textit{ эрс өсдөг} \\
& \forall x \in]0, 1[\;\; f'(x) > 0 \implies f \textit{ эрс өсдөг} \\
& \forall x \in]1, 3[\;\; f'(x) < 0 \implies f \textit{ эрс буурдаг} \\
& \forall x \in]3, \infty[\;\; f'(x) > 0 \implies f \textit{ эрс өсдөг} \\
& x^* = 1 \implies f(x^*) = 0 \\
& x^* = 3 \implies f(x^*) = -28
\end{aligned}
$$

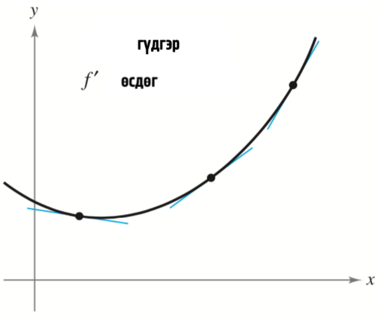
5.7.2 Хотгор, гүдгэр ба II эрэмбийн уламжлалын тест

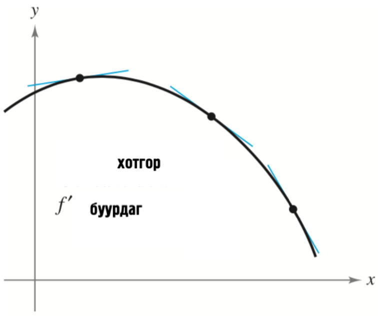
Тодорхойлолт 43. *Хотгор, гүдгэр I задгай интервал дээр f дифференциалчлагддаг. I дээр f график нь гүдгэр гэдэг нь интервал дээрээ f' нь өсдөг, I дээр f график хотгор гэдэг нь интервал дээрээ f' нь буурдаг.*

Тодорхойлолт 44. **Хотгор, гүдгэрийн тест** *I задгай интервал дээр f функцийн II эрэмбийн уламжлал оршин байдаг бол*

1. *$\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ бол I дээр f график нь гүдгэр.*
2. *$\forall x \in I$, $f''(x) < 0$ бол I дээр f график нь хотгор.*

Жишээ 40. *f графикийн нугаралтын цэг $(c, f(c))$ бол $f''(c) = 0$ эсвэл $x = c$ цэг дээрх f'' оршин байхгүй.*





5.7.3 II эрэмбийн уламжлалын тест

*f нь $f'(c) = 0$ ба задгай интертал*д *агуулагдах c цэг дээрээ f-ийн II эрэмбийн уламжлалтай*

1. $f''(c) > 0$ *бол* $(c, f(c))$ *дээрээ* f *нь локал минимумтэй.*
2. $f''(c) < 0$ *бол* $(c, f(c))$ *дээрээ* f *нь локал максимумтай.*

5.8 l'Hospital дүрэм

Чанар 13. **l'Hospital дүрэм** $f, g : I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ *дифференциалчлагддаг*

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \qquad \text{бол} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Жишээ 41. 1 *цэг дээрх* $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$ *хязгаар нь*

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$
- $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, *гэдгээс* g' $I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 3$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 3$$

Бүлэг 6

Интеграл

6.1 Интегралчлагддаг функц

$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{(i-1)/n}$

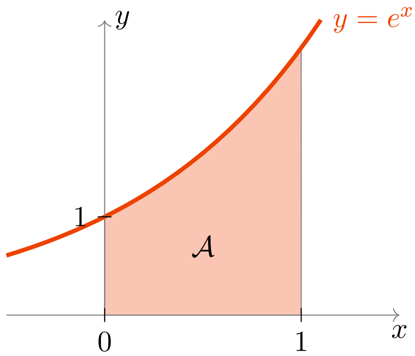
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times e^{\frac{i-1}{n}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1\end{aligned}$$

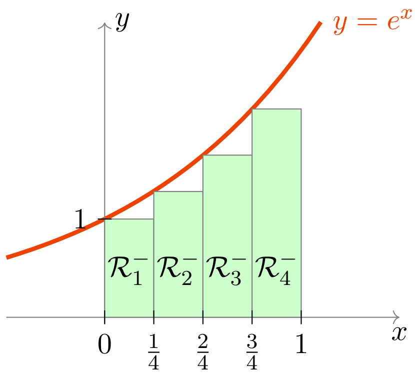
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e-1$$

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
  $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$
  $c_1, \ldots, c_n$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$
- **Интегралчлагддаг функц** : $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})}$

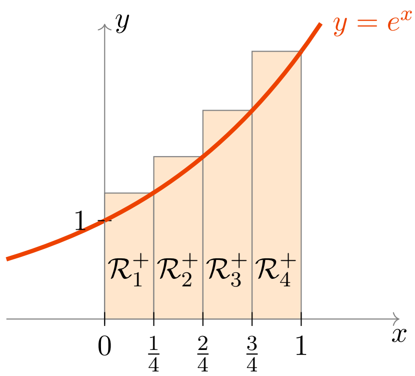
6.2 Чанарууд

Чанар 14. a, b, c $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx}$

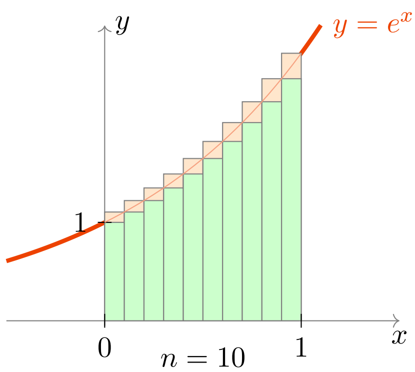




y
$y = e^x$
1
$\mathcal{R}_1^-$ $\mathcal{R}_2^-$ $\mathcal{R}_3^-$ $\mathcal{R}_4^-$
0 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ 1
x



y
$y = e^x$
1
$\mathcal{R}_1^+$ $\mathcal{R}_2^+$ $\mathcal{R}_3^+$ $\mathcal{R}_4^+$
0 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ 1
x



y
$y = e^x$
1
0 1
x
$n = 10$

- $a < c < b$ *бол* $[a, c]$ *болон* $[c, b]$ *дээр* f*-ийг интегралчлана гэдэг нь* f*-ийг* $[a, b]$ *интегралчлана.*
- $a < b \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Чанар 15.

- $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
- $\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx}$
- $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \big(\int_a^b f(x)\,dx\big)\big(\int_a^b g(x)\,dx\big)$

Жишээ 42. $\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \quad - \quad \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \quad - \quad (e-1) = \frac{10}{3} - e$

6.3 Эх функц

Тодорхойлолт 45. $f : I \to \mathbb{R}$
$F : I \to \mathbb{R}$*-ийг* f*-ийн* **эх функц** *гэнэ.*
$F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$
$G = F + c \quad c \in \mathbb{R}$

$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$]0, +\infty[$ *эсвэл* $]-\infty, 0[$
$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c \quad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$	$]-1, 1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} argshx + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} argchx + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$	$x \in]1, +\infty[$

maruka@rocketmail.com

6.4 Эх функц-Интеграл

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *тасралтгүй бол* $F:I\to\mathbb{R}$ $\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$

f-ийн **эх функц**, *F-ийн уламжлал* $F'(x)=f(x)$

F гэсэн эх функцийн f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)}$$

6.5 Интеграл бодох аргууд

Тодорхойлолт 46. **Хэсэглэн бодох арга** $\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx}$

$$\int u(x)v'(x)\,dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Тодорхойлолт 47. **Орлуулга хийх арга** $f:I\to\mathbb{R}$ $\varphi:J\to I$

$\forall a,b\in J$

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

Тодорхойлолт 48. **Рациональ бутархайг интеграчлах арга**

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$$

- ax^2+bx+c *нь* $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-x_1|+B\ln|x-x_2|+c$$

- ax^2+bx+c *2 шийд нь* $x_0\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}=\frac{A}{(x-x_0)^2}+\frac{B}{x-x_0}$$

$$\int f(x)\,dx = -\frac{A}{x-x_0}+B\ln|x-x_0|+c$$

- ax^2+bx+c *бодит шийдгүй.*

Тодорхойлолт 49. **Рациональ бутархайг интеграчлах арга** $\frac{P(x)}{Q(x)}$

- $$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$$

  1. $k=1 \implies \int\frac{\gamma\,dx}{x-x_0}=\gamma\ln|x-x_0|+c$
  2. $k\geqslant 2$, $\int\frac{\gamma\,dx}{(x-x_0)^k}=\gamma\int(x-x_0)^{-k}\,dx=\frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1}+c$

- $$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}=\gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}+\delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

maruka@rocketmail.com

1. $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}\,dx = \frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1} + c = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1} + c$
2. $k = 1$, $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$. $u = px + q$ $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c$
3. $k \geqslant 2$, $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$. $I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k}$.

Тодорхойлолт 50. **Тригонометрийн функцүүдийн илэрхийллийг интеграчлах**

$$\int P(\cos x, \sin x)\,dx \qquad \int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx$$

1.
   - $\omega(x) = f(x)\,dx$
   - $\omega(-x) = -f(-x)\,dx$
   - $\omega(\pi - x) = -f(\pi - x)\,dx$

   - $\omega(-x) = \omega(x) \implies u = \cos x$
   - $\omega(\pi - x) = \omega(x) \implies u = \sin x$
   - $\omega(\pi + x) = \omega(x) \implies u = tgx$

2. $t = tg\frac{x}{2}$ $\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad tgx = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}}$

maruka@rocketmail.com

Бүлэг 7

Матриц

7.1 Тодорхойлолт

Тодорхойлолт 51.

- *матриц A нь элементүүдийн тэгш өнцөгт хүснэгт юм.*
- *A Хүснэгтэнд n мөр, p багана байвал $n \times p$* **хэмжээтэй** *гэж хэлнэ.*
- *Хүснэгтэнд байгаа тоонуудыг A* **коэффициент** *гэж нэрлэдэг.*
- *$a_{i,j}$ коэффициент нь i-р мөр(эгнээ) j-р баганад байрлах коэффициентийг тэмдэглэв.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \text{эсвэл} \qquad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Жишээ 43.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- *матриц 2×3*
- *$a_{1,1} = 1$ ба $a_{2,3} = 7$*

Тодорхойлолт 52. **тэнцүү матриц**

- *Хоёр матриц ижил хэмжээтэй, харгалзах коэффициентүүд тэнцүү байвал тэнцүү байна.*

7.2 Чухал матриц

- *$n = p$: (баганатай ижил тооны мөр) байвал матрицыг* **квадрат матриц** *гэнэ. $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$.*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ нь матрицын **гол диагонал***ийг бүрдүүлдэг.*

- *$n = 1$: Зөвхөн нэг мөртэй матрицыг мөрийн матриц эсвэл* **мөрийн вектор** *гэж нэрлэдэг. Бид үүнийг*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}$$

  тэмдэглэж байна

- *Үүнтэй адил зөвхөн нэг багана $p = 1$:-тай матрицыг баганан матриц эсвэл баганан вектор гэж нэрлэдэг. Бид үүнийг* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$ *тэмдэглэж байна.*

- **тэг матриц** $0_{n,p}$ *коэффициентүүд нь тэг тэг матриц гэж нэрлэдэг Матрицын тооцоолол тэг матриц нь бодит тоонуудын хувьд 0 тооны үүргийг гүйцэтгэдэг.*

Тодорхойлолт 53. **Хөрвөсөн матриц** $A^T = (a_{ji})_{nxm}$***мөн тэгш өнцөгт матрицыг***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{nxm}$$

Жишээ 44.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Чанар 16.

$$(A^T)^T = A$$

$$A^T = A, \ A \text{ тэгш хэмт матриц}$$

$$A^T = -A, \ A \text{ эсрэг тэгш хэмт матриц},$$

Тодорхойлолт 54. **Доод гурвалжин матриц**

$$A = (a_{ij}) \text{ -ийн } a_{ij} = 0 \text{ for } i < j$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Тодорхойлолт 55. **Дээд гурвалжин матриц**

$$A = (a_{ij}) \text{ -ийн } a_{ij} = 0 \text{ for } i > j$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Тодорхойлолт 56. **Диагональ матриц**

$$D = (d_{ij}), \text{ -ийн } d_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j$$

$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Тодорхойлолт 57. **Гурамсан диагональт матриц**

$$A = (a_{ij}), \text{ -ийн } a_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j+1 \\ 0, & i < j-1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3 матрицыг нэмэх

A, B -ийг ижил хэмжээтэй $n \times p$ хэмжээтэй хоёр матриц гэж үзье.

Тодорхойлолт 58 (***Хоёр матрицын нийлбэр***)**.** **нийлбэр** *$C = A + B$ нь*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

коэффициентийг коэффициентээр нэгтгэдэг.

Жишээ 45. •

$$\text{Хэрэв} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{ба} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{байвал} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Нөгөө талаас хэрэв} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{байвал} \quad A + B' \quad \text{тодорхойлогдоогүй болно.}$$

Тодорхойлолт 59 (***Скаляраар үржүүлэх***)**.** *матрицын үржвэр нь $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}$ -ийн коэффициент бүрийг $\alpha \in \mathbb{R}$-ээр үржүүлэх замаар үүссэн матриц юм. Үүнийг $\alpha \Delta A$ (эсвэл зүгээр л $\alpha A \alpha A$).*

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})$$

Жишээ 46.

$$\text{Хэрэв} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ба} \quad \alpha = 2 \quad \text{байвал} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $-A = (-1)A$ *нь A-ийн* **эсрэг матриц**
- **ялгавар** $A - B$ *нь* $A + (-B)$ *байдлаар тодорхойлно.*

Жишээ 47.

$$\text{Хэрэв} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ба} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{байвал} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A, B, C \in M_{n \times p}$ *ба* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Чанар 17. *1.* $A + B = B + A$ *:*

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *:*

3. $A + 0 = A$ *:*

4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

maruka@rocketmail.com

7.4 Матрицын үржвэр

A ба B хоёр матрицын AB үржвэрийг A баганын тоо нь B мөрийн тоотой тэнцүү тохиолдолд л тодорхойлно.

Тодорхойлолт 60 (***Хоёр матрицын үржвэр***). *$A = (a_{ij})$ матриц $n \times p$ ба $B = (b_{ij})$ матриц $p \times q$ матриц байвал үржвэр нь $C = AB$ матриц $n \times q$ матриц бөгөөд коэффициентийг дараах байдлаар тодорхойлно.*

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

$$c_i j = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ik} b_{kj} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

Тооцооллыг дараах байдлаар зохион байгуулах нь тохиромжтой.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Энэхүү зохицуулалтаар бид тооцоолохыг хүсч буй коэффициентийн зүүн талд байрлах A матрицын мөрийг (A -д $\times$ -ээр илэрхийлсэн мөр), мөн тооцоолохыг хүсч буй коэффициентийн дээгүүр байрлах B матрицын баганыг авч үзье. (Б -д $\times$ -ээр дүрслэгдсэн багана). Бид эгнээний эхний коэффициентийн үр дүнг баганын эхний коэффициентээр ($a_{i1} \times b_{1j}$) тооцоолж, баганын хоёр дахь коэффициент ($a_i 2 \times b_2 j$)...

7.5 Жишээ

Жишээ 48.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Чанар 18. *1.* $A(BC) = (AB)C$

2. $A(B + C) = AB + AC$ *ба* $(B + C)A = BA + CA$

3. $A \cdot 0 = 0$ *ба* $0 \cdot A = 0$

7.6 Нэгж матриц

Дараах квадрат матрицыг **Нэгж матриц** *гэж нэрлэдэг бөгөөд үүнийг I_n эсвэл I эсвэл E эсвэл E_n гэж тэмдэглэв.*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

7.7 Зэрэгт матриц

$M_{n\times n}$:

$$\text{хэрэв } A, B \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{байвал } A \times B$$

- *Тухайлбал* : $A^2 = A \times A,\ \ A^3 = A \times A \times A,\ \dots$
- $A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p}$
- $A^0 = I_n$

Жишээ 49. *A^p Тооцоолъё* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- A^2 *тооцоолно,* A^3 *ба* A^4 : $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

- *Бид томъёог* таамаглан *онцолж байна.* $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$

7.8 урвуу матриц

Тодорхойлолт 61. *$A \in M_n$ $B \in M_n$ оршин байхын тулд*

$$AB = I_n \qquad \text{ба} \qquad BA = I_n$$

байвал A-г **урвуутай**. *B-г* **A-ийн урвуу**, *A^{-1} тэмдэглэдэг.*

Жишээ 50. • $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

- $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ $AB = I_2$ *et* $BA = I_2$
- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$
- $AB = I_2 \iff \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$
- *цор ганц шийд нь* $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- $B = A^{-1}$, *Бид* $BA = I_2$ *тэнцүү байдлыг харуулах ёстой.*
- *A матриц нь* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

maruka@rocketmail.com

7.9 Матрицыг хувиргах

- *Нэгж матрицийг энгийн хувиргалтаар хувиргая.*
- $I_{L_2 \leftarrow 3L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $I_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $I_{L_2 \leftrightarrow L_4} = I_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.10 Гаусс арга-Системийн тэгшитгэл дээрх үйлдлүүд

Бид үндсэн гурван үйлдлийг ашиглах болно.

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *энд* $\lambda \neq 0$ *:*

   L_i *тэгшитгэлд өөр* L_j *тэгшитгэлийн үржвэрийг нэмж болно*

2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *энд* $\lambda \in \mathbb{R}$ $(j \neq i)$ *:*

3. $L_i \leftrightarrow L_j$ *: хоёр тэгшитгэлийг сольж болно*

Эдгээр энгийн үйлдлүүд нь шугаман системийг эквивалент шугаман систем болгон хувиргадаг.

Жишээ 51.

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & -3y & -9z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & -3y & -9z & = & -3 \\ & -2y & -2z & = & -6 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & z & = & -1 & L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(2, 4, -1)\}$$

maruka@rocketmail.com

Бүлэг 8

Тодорхойлогч

8.1 Тодорхойлогч

$\mathbb{R}$

Матриц 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Матриц 3×3

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$

- **Саррусын дүрэм**

- 3×3

Тодорхойлолт 62. *Геометр утга*

- $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$

- v_1, v_2 *векторууд өгөгдөв.*

Өгүүлбэр 2. *Параллелограмын талбай нь тодорхойлогчийн абсолют утгатай тэнцүү байна.*

$$\mathcal{A} = \Big| \det(v_1, v_2) \Big| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |ad - bc|$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Өгүүлбэр 3. *Параллелепипедийн эзлэхүүн нь тодорхойлогчийн абсолют утгатай тэнцүү байна.*

$$\mathcal{V} = \Big| \det(v_1, v_2, v_3) \Big| = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|$$

Тодорхойлолт 63. Тодорхойлогч

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(i) тодорхойлогч нь нэг баганан векторийн хувьд шугаман байна, бусад нь хэвэндээ.

(ii) хэрэв A хоёр ижил баганатай бол тодорхойлогч нь тэг болно.

(iii) $|I_n|=1$

- $A = (a_{ij})$

$$\det A \qquad \text{эсвэл} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{эсвэл} \qquad |A|$$

- *A-ийн i-р баганыг C_i гэж тэмдэглэвэл*

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

- *нөхцөл (i)*

$$\det(C_1, \ldots, \lambda C_j + \mu C'_j, \ldots, C_n)$$
$$= \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C'_j, \ldots, C_n)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} + \mu a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} + \mu a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} + \mu a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Жишээ 52.

- *II багана 5-р*

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

- *Гурав дахь баганад шугаман байдлаар*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

8.2 Чухал чанар

бид энэ хоёр матрицын тодорхойлогчийг

- $\det 0_n = 0$ *(нөхцөл (ii))*
- $\det I_n = 1$ *(нөхцөл (iii))*

maruka@rocketmail.com

Чанар 19. $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \in M_n(\mathbb{R})$

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *энд* $\lambda \neq 0$. $A' \in M_n(\mathbb{R})$*-ыг* A *баганыг тэг бус скаляраар үржүүлэх замаар олж авна.* $\det A' = \lambda \det A$.

2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *энд* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(* $j \neq i$*).* A *үржүүлэгчийн баганад* A *-ийн өөр нэг баганыг нэмж оруулснаар* $A' \in M_n(\mathbb{R})$*-ыг олж авна.* $A' \in M_n(\mathbb{R})$*-ыг* $\det A' = \det A$

3. $C_i \leftrightarrow C_j$. $A' \in M_n(\mathbb{R})$*-ыг* A *-ийн хоёр ялгаатай баганыг солих замаар олж авна.* $\det A' = -\det A$

$$C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j C_j$$

2. $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$

- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ A *хувирна.*
$$A' = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i + \lambda C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$
- i *баганын хувьд*
$$\det A' = \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$
- *матрицын* i*,* j *багана*
$$\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$
тодорхойлогч нь тэг юм.
- $\det A' = \det A$ $\square$

$\square$

8.3 Онцгой матрицын тодорхойлогчийг

Чанар 20. *Дээд (эсвэл доод) гурвалжин матрицын тодорхойлогч диагоналийн үржвэртэй тэнцүү байна.*

Өөрөөр хэлбэл гурвалжин матрицын хувьд $A = (a_{ij})$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- *Бид Гаусс ашиглая.*

Эхний баганын хувьд шугаман байдлаар

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $j \geqslant 2$, $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$
- *Хоёрдахь баганын хувьд шугаман байдлаар*

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

- $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \cdot \det I_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$

Жишээ 53. $\det A \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A & \\ &= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad C_1 \leftrightarrow C_2 \qquad\qquad\qquad C_1 \leftarrow \tfrac{1}{3}C_1 \\ &= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{pmatrix} \\ &\quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \qquad\qquad\qquad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2 \\ &= (-1) \times 3 \times (-55) \\ &= 165 \end{aligned}$$

Чанар 21.
- $\det(A \times B) = \det A \times \det B$
- *Квадрат матриц A урвуутай $\iff$ тодорхойлогч нь тэг биш .*
- $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$
- $\det\left(A^{T}\right) = \det A$

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *энд* $\lambda \neq 0$: λ
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *энд* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(* $j \neq i$ *) :*
3. $L_i \leftrightarrow L_j$ *:*

8.4 Мөр эсвэл баганаар

Тодорхойлогчийг тооцоолох хамгийн ашигтай аргуудын нэг бол мөр (эсвэл багана) дээр өргөжүүлэх явдал юм.

Тодорхойлолт 64. $A \in M_n(\mathbb{R})$ *нь квадрат матриц.*

- *A -аас i мөр ба j баганыг устгаснаар олж авсан матрицыг A_{ij} гэж тэмдэглэв.*
- *$\det A_{ij}$ тоо нь A матрицын n - 1 эрэмбийн* **минор** *юм.*
- *$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ тоо нь коэффициентийн* **кофактор/алгебрийн гүйцээлт**.

Тодорхойлолт 65 (***Мөр эсвэл баганаар***). *i Мөрөөр задлах*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

j баганаар задлах

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Жишээ 54. *Эхний мөрөөр задлая. Саррусын дүрмээр танилцчихсан 3 x3 тодорхойлогчийн томъёог дахин үзъе.*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}
\end{aligned}$$

Жишээ 55. *Бид хоёр дахь баганаар задлахаар сонгож байна. (учир нь энд хамгийн их тэг байна.):*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= 0C_{12} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} \quad C2 \\
&= +2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 3\times 3 \\
&= 2\left(+4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) \quad C1 \\
&\quad -3\left(-4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \quad L2 \\
&= 2\big(4\times 5 + 1\times(-4)\big) - 3\big(-4\times 7 + 1\times 11\big) \;=\; 83
\end{aligned}$$

Тодорхойлолт 66. **Урвуу матриц**

$A \in M_n(\mathbb{R})$ квадрат матриц гэж үзье. Бид C матрицийг **алгебрийн гүйцээлт матриц/comatrice** *C гэж нэрлэдэг.*

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Чанар 22. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^T$

Жишээ 56. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\det A = 2 \implies \exists A^{-1}$
- *C-ийг 2×2 хэмжээтэй 9 тодорхойлогчийг тооцоолох замаар олж авна. ($+/-$)тэмдгийг мартахгүй*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8.5 Крамерын арга

Крамерын дүрэм нь шугаман тэгшитгэлийн системийн шийдийн тодорхой томъёог өгдөг. Дараах n тэгшитгэл ба n үл мэдэгдэх шугаман тэгшитгэлийн системийг авч үзье.

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

- *Энэ системийг $AX = B$ матриц хэлбэрээр бичиж болно.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- *$A_j \in M_n(\mathbb{R})$ Матрицыг тодорхойльё.*

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Өөрөөр хэлбэл, A_j нь j-р баганыг хоёр дахь гишүүн B-ээр сольж олж авсан матриц юм. Крамерийн дүрэм нь A ба A_j матрицын тодорхойлогчдын дагуу $\det A \neq 0$ байгаа тохиолдолд системийн шийдийг тооцоолох боломжийг бидэнд олгоно.

Тодорхойлолт 67. **Крамерын арга** *n тэгшитгэл n үл мэдэгдэгч*

$$AX = B$$

систем, $\det A \neq 0$ байвал $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ганц шийдтэй.

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Жишээ 57.

Дараах системийг бодъё. $$\begin{cases} x_1 & & + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 & + 4x_2 & + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 & - 2x_2 & + 3x_3 &= 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 44 \qquad \det A_1 = -40 \qquad \det A_2 = 72 \qquad \det A_3 = 152$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{10}{11} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{18}{11} \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{38}{11}$$

Крамерын арга нь системийг шийдвэрлэх хамгийн үр дүнтэй арга биш ч параметр агуулдаг систем бодоход тустай.

Бүлэг 9

Шугаман тэгшитгэлийн систем

9.1 Матриц ба шугаман систем

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2p}\,x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{np}\,x_p = b_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Тодорхойлолт 68. **өргөтгөсөн матриц**

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} & b_n \end{array}\right)}_{A|b}$$

Өгүүлбэр 4. *Шугаман тэгшитгэлийн систем* **шийдгүй, эсвэл ганц шийдтэй, эсвэл хязгааргүй шийдтэй**.

9.2 Матрицын урвуугаар систем шийдийг олох

Тэгшитгэлийн тоо нь үл мэдэгдэгчийн тоотой тэнцүү тохиолдолд:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Чанар 23. *Хэрэв A матрицийн урвууг олох боломжтой бол системийн шийд $AX = B$* **цор ганц** *ба :* $\boxed{X = A^{-1}B}$

Баталгаа. $AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff IX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$ □

9.3 ранг

- $\{v_1, \dots, v_p\}$ *векторууд*
- $Vect(v_1, \dots, v_p)$ *хэмжээс*

Тодорхойлолт 69. **ранг** *нь*
$\boxed{rg(v_1, \dots, v_p) = \dim Vect(v_1, \dots, v_p)}$

Чанар 24. 1. $0 \leqslant rg(v_1, \dots, v_p) \leqslant p$

2. $rg(v_1, \dots, v_p) \leqslant \dim \mathbb{R}^n$

Жишээ 58. $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\mathbb{R}^4$ *ранг нь хэд вэ ?*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

- $\mathbb{R}^4$ $\quad rg(v_1, v_2, v_3) \leqslant 4$
- 3 *вектор* $rg(v_1, v_2, v_3) \leqslant 3$
- $v_1 \neq 0 \quad rg(v_1, v_2, v_3) \geqslant 1$
- $rg(v_1, v_2, v_3) \geqslant rg(v_1, v_2) = 2$ *сar* v_1 *ба* v_2 *коллинеар биш*

9.4 Матрицийн ранг

Тодорхойлолт 70. **Матриц ран**г *нь түүний баганан векторуудын ранг юм.*

Матрицын хувьд тодорхойлогч нь тэгээс ялгаатай байх миноруудын хамгийн их эрэмбийн минорын эрэмбийг уг матрицын ранг гэж хэлж болно.

Жишээ 59. *Матрицын рангийг тооцоолох*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0\end{pmatrix} \in M_{2\times 4}$$

- $\mathbb{R}^2$ *Энэ бол векторуудын ранг юм.* $\left\{v_1 = \binom{1}{2}, v_2 = \binom{2}{4}, v_3 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}, v_4 = \binom{0}{0}\right.$
- *Эдгээр бүх векторууд нь* v_1*-тэй коллинеар юм.*
- $rg\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 1$
- $rg\, A = 1$

9.5 Ранг хадгалагдах үйлдэл

Чанар 25. *Матрицын рангийг дараах үндсэн үйлдлүүдээр хадгална.* $C_1, C_2, \dots, C_p$ *:*

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *энд* $\lambda \neq 0$ *: бид баганыг тэг биш скаляраар үржүүлдэг.*
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *энд* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(* $j \neq i$ *) :* C_i *баганад өөр баганыг* C_j *тоогоор үржүүлээд нэмдэг.*
3. $C_i \leftrightarrow C_j$ *: хоёр баганыг солино.*

Ерөнхийдөө $C_i \leftarrow C_i + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_p C_p$
Аргачлал *Матрицын рангийг хэрхэн тооцоолох вэ?*

- *A Матрицын баганууд дээрх Гауссын арга*
-
  - $C_i \leftarrow \lambda C_i$
  - $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$
  - $C_i \leftrightarrow C_j$
- *матрицыг шаталсан матриц болгон хувиргах*
- *Матрицын ранг нь тэг биш баганын тоо юм*

9.6 жишээ

Жишээ 60. $\mathbb{R}^4$ *Дараах 5 векторийн ранг хэд вэ? ?*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\-3\end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix}3\\5\\0\\-1\end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix}3\\8\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 3 & 3\\1 & 2 & 2 & 5 & 8\\1 & 0 & -1 & 0 & 1\\1 & 1 & -3 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 3 & -1 & 2 & 5\\1 & 1 & -4 & -3 & -2\\1 & 2 & -6 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1,\ C_5 \leftarrow C_5 - 3C_1$
$C_2 \leftrightarrow C_3$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 3 & -1 & 2 & 5\\1 & 1 & -4 & -3 & -2\\1 & 2 & -6 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 3 & 2 & 5\\1 & -4 & 1 & -3 & -2\\1 & -6 & 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2,\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$ *ба* $C_5 \leftarrow C_5 + 5C_2$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0 & 0\\1 & -4 & -11 & -11 & -22\\1 & -6 & -16 & -16 & -32\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0 & 0\\1 & -4 & -11 & 0 & 0\\1 & -6 & -16 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ *ба* $C_5 \leftarrow C_5 - 2C_3$

- $rg\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 3$
- $Vect(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-11\\-16\end{pmatrix}\right)$

9.7 Кронеккер - Капелли теорем

Кронеккер - Капелли теорем

Өгүүлбэр 5. *Үл мэдэгдэх p, n тэгшитгэлийн шугаман систем нь зөвхөн коэффициент матриц ба* ***өргөтгөсөн/нэмэгдсэн*** *матриц нь системийн ранг гэж нэрлэгддэг ижил ранг байвал нийцтэй байдаг.*

- $\boxed{rg(A) = rg(A|b) = p}$ *байвал систем* **ганц шийдтэй**.
- *rg(A)=rg(A/b)<p байвал систем p-rg(A) чөлөөт хувьсагчтай* **хязгааргүй шийдтэй**.
- *rg(A)<rg(A/b) байвал систем* **нийцгүй**.

maruka@rocketmail.com

Бүлэг 10

Шугаман програмчлал

10.1 Шугаман програмчлал

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}, \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C}$$

Тодорхойлолт 71 (Үндсэн бодлого)**.**

$$Z = CX \to max(min)$$

-ийг **зорилгын функц**.

$$\begin{cases} AX = B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

-ийг **заагллалт, хязгаарлалтын систем**. *заагллалт, хязгаарлалтын системээс олдох X-ийг* **боломжит шийд**. *Боломжит шийдүүдээс Z-ийг* **оптимум утга***тай Z^* болгодог X^*-ийг* **оновчтой шийд**.

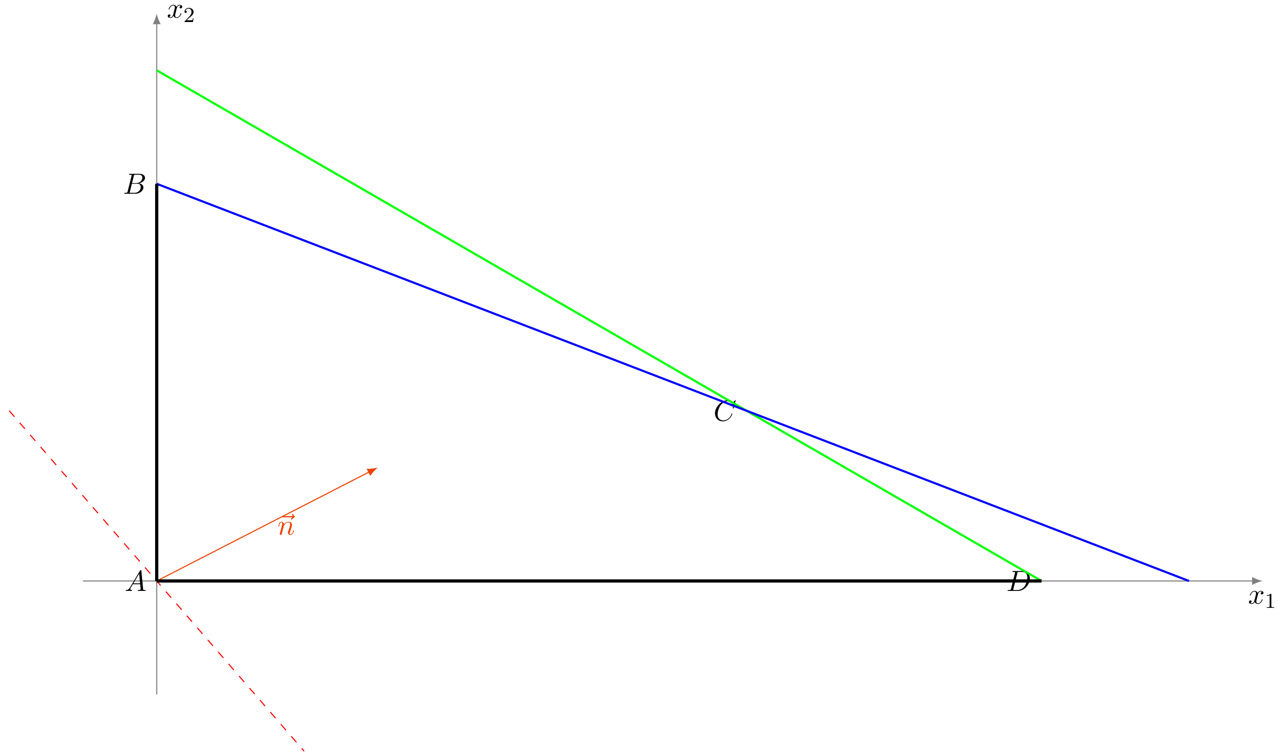
Үндсэн бодлогын заагллалтыг Гаусс, Крамерын аргаар бодож олно.

Ажиглалт 8. *Холимог заагллалтын систем*

- $$\begin{cases} AX \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} AX \geqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} AX \geqslant B & 1 \leqslant j \leqslant k \\ AX \leqslant B & k+1 \leqslant j \leqslant l \\ AX = B & l+1 \leqslant j \leqslant n \\ X \geqslant 0 & 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

Өгүүлбэр 6.

- *Холимог заагллалтын систем дэхь тэнцэтгэл бишийг тэнцэтгэл руу хувиргахдаа хувьсагч нэмж оруулснаар үндсэн хэлбэрт шилжүүлээд Кронеккер - Капелли теорем ашиглан бодож болно.*
- *$X \in \mathbb{R}^{\not\models}$ ба холимог системтэй бол гүдгэр олон өнцөгт байгуулагддаг.*
- *Шугаман програмчлалын бодлого шийдтэй бол зорилгын функц оптимум утгаа шийдийн олон талстын өнцгийн цэг дээр авна.*



- *Математик загварыг зохиох ерөнхий арга байхгүй. Зарим бодлогын загварыг яаж зохиосныг handbook-ээс харна уу.*

Жишээ 61.

$$Z = 18x_1 + 12x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leqslant 140 \\ 6x_1 + 8x_2 \leqslant 72 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Боломжит шийдүүд ABCD гүдгэр дөрвөн өнцөгтөд харъяалагдана.

$$18x_1 + 12x_2 = 0$$

түвшний шулууныг $\vec{n} = (18, 12) = 6 \cdot (3, 2)$ *чиглэлээр параллель зөөлөө. Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хамгийн сүүлд хүрэх D(12,0) орой (максимумчилж байгаа тул) оновчтой шийд болж оптимум утга нь:* $Z^* = 18 \cdot 12 + 12 \cdot 0 = 216$.

10.1.1 Тээврийн бодлого

m агуулахаас бараа авч, n чиглэлд хамгийн бага зардлаар тээвэрлэх оновчтой арга замыг тодорхойлох явдал юм. Бүх агуулахын бүх барааг янз бүрийн чиглэлд хүргэх ёстой гэж үзье.

Жишээ 62.

	1		2		3		4		s
1	3	x_{11}	4	x_{12}	2	x_{13}	5	x_{14}	25
2	2	x_{21}	1	x_{22}	5	x_{23}	4	x_{24}	40
3	1	x_{31}	2	x_{32}	4	x_{33}	3	x_{34}	50
d	20		30		30		35		

$\sum s_i = \sum d_j = 115$ *загвар битүү.*

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + x_{22} + 5x_{23} + 4x_{24} \\ &= +x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34} \end{aligned}$$

Тодорхойлолт 72 (***Тээврийн бодлогод ашиглах алгоритм***). • *Суурь боломжит шийд*

1. *Диагоналийн арга*
2. *Хамгийн бага элементийн арга*

- *Оновчтой шийдийг Потенциалын аргаар*

Тодорхойлолт 73 (**Диагоналийн арга**). *1.* $x_{11} = \min\{s_1, d_1\}$ *хуваарил.*

2. (a) *Харгалзах мөрийн нөөц, баганын хэрэгцээнээс хуваарилсан утгаа хас.*
   (b) $s_i = 0$ *бол* $x_{i+1\,j}$ *нүд рүү шилжинэ.*
   (c) $d_j = 0$ *бол* $x_{i\,j+1}$ *нүд рүү шилжинэ.*
   (d) $s_i = 0, d_i = 0$ *бол дараагийн диагональ руу шилжинэ.*

3. *Нөөц, хэрэгцээ 0 болтол дээрх алхамыг давтана.*

Жишээ 63. x_{ij}*-р* i *агуулахаас* j *хэрэглэгчид хуваарилах ачааны хэмжээ.*

	1	2	3	4	Нөөц
1	3 x_{11}	4 x_{12}	2 x_{13}	5 x_{14}	25
2	2 x_{21}	1 x_{22}	5 x_{23}	4 x_{24}	40
3	1 x_{31}	2 x_{32}	4 x_{33}	3 x_{34}	50
Хэрэгцээ	20	30	30	35	

$$
\begin{aligned}
\min f &= 3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + x_{22} + 5x_{23} + 4x_{24} \\
&= +x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 25 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} = 35 \\
x_{ij} \geqslant 0; i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}
\end{cases}
$$

Диагоналийн арга

 maruka@rocketmail.com

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	25
	?				
2	2	1	5	4	40
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	20	30	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	~~25~~ 5
	20				
2	2	1	5	4	40
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	~~20~~	30	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	~~25~~ 5
	20	?			
2	2	1	5	4	40
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	~~20~~	30	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3 / 20	4 / 5	2	5	~~25~~ 5
2	2	1	5	4	40
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~ 25	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3 / 20	4 / 5	2	5	~~25~~ 5
2	2	1 / ?	5	4	40
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~ 25	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3 / 20	4 / 5	2	5	~~25~~ 5
2	2	1 / 25	5	4	~~40~~ 15
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~ ~~25~~	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	~~25~~ 5
	20	5			
2	2	1	5	4	~~40~~ 15
		25	?		
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~ ~~25~~	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	~~25~~ ~~5~~
	20	5			
2	2	1	5	4	~~40~~ ~~15~~
		25	15		
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~ ~~25~~	~~30~~ 15	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	~~25~~ ~~5~~
	20	5			
2	2	1	5	4	~~40~~ ~~15~~
		25	15		
3	1	2	4	3	50
			?	35	
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~ ~~25~~	~~30~~ 15		

maruka@rocketmail.com

	1	2	3	4	Нөөц
1	3 / 20	4 / 5	2	5	25
2	2	1 / 25	5 / 15	4	40
3	1	2	4 / 15	3 / 35	50
Хэрэгцээ	20	30	30	35	

$$f = 345$$

Тодорхойлолт 74 (***Хамгийн бага элементийн арга***). *1. c_{ij} хамгийн бага зардалтай нүдийг сонгож $\min\{s_i, d_j\}$ хуваарил.*

2. (a) s_i d_j хуваарилсан утгаа хас.

(b) $s_i = 0, d_j = 0$ болго.

(c) min зардалтай нүд цор ганц биш бол аль их ачаа хуваарилж болох нүдийг сонго

3. Үлдсэн нөөц, хэрэгцээ 0 болтол дээрх алхамыг давтана.

Жишээ 64.

Хамгийн бага зардлын арга

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	25
2	2	1 / ?	5	4	40
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	20	30	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	25
2	2	1 30	5	4	~~40~~ 10
3	1	2	4	3	50
Хэрэгцээ	20	~~30~~	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	25
2	2	1 30	5	4	~~40~~ 10
3	1 ?	2	4	3	50
Хэрэгцээ	20	~~30~~	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2	5	25
2	2	1 30	5	4	~~40~~ 10
3	1 20	2	4	3	~~50~~ 30
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2 ?	5	25
2	2	1 30	5	4	~~40~~ 10
3	1 20	2	4	3	~~50~~ 30
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	30	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2 25	5	~~25~~
2	2	1 30	5	4	~~40~~ 10
3	1 20	2	4	3	~~50~~ 30
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	~~30~~ 5	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2 25	5	~~25~~
2	2	1 30	5	4	~~40~~ 10
3	1 20	2	4	3 ?	~~50~~ 30
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	~~30~~ 5	35	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2 25	5	~~25~~
2	2	1 30	5	4	~~40~~ 10
3	1 20	2	4	3 30	~~50~~ ~~30~~
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	~~30~~ 5	~~35~~ 5	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2 25	5	~~25~~
2	2	1 30	5	4 ?	~~40~~ 10
3	1 20	2	4	3 30	~~50~~ ~~30~~
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	~~30~~ 5	~~35~~ 5	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2 25	5	~~25~~
2	2	1 30	5	4 5	~~40~~ ~~10~~ 5
3	1 20	2	4	3 30	~~50~~ ~~30~~
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	~~30~~ 5	~~35~~ ~~5~~	

	1	2	3	4	Нөөц
1	3	4	2 25	5	~~25~~
2	2	1 30	5 5	4 5	~~40~~ ~~10~~ ~~5~~
3	1 20	2	4	3 30	~~50~~ ~~30~~
Хэрэгцээ	~~20~~	~~30~~	~~30~~ ~~5~~	~~35~~ ~~5~~	

Мөрүүдийн ачааны нийлбэр харгалзах нөөцтэй, багана бүрийн ачааны нийлбэр харгалзах хэрэгцээтэй тэнцүү байгаагаас гадна ачаалагдсан нүдний тоо $n + m - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ байгаа нь үнэхээр анхны тулгуур шийд олдсоныг харуулж байна.

$$f = 235$$

Тодорхойлолт 75 (**Потенциалын арга**). *1. Суурь боломжит шийдийг өмнөх аргуудаар олно.*

2. *Мөрийн α_i,баганын β_j олохдоо*

   (a) *Хуваарилалтын тоо хамгийн их мөр α_i эсвэл баганын β_j 0 гэсэн утга өгнө.*

   (b) *Ачаалагдсан нүднүүдийн $c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ ол.*

3. *Ачаагүй нүднүүдийн $d_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$ ол.*

4. *d_{ij} тэмдгийг харна.*

   (a) *$d_{ij} > 0$ бол одоогийн суурь боломжит шийд оновчтой, STOP*

   (b) *$d_{ij} = 0$ бол ижилхэн тээврийн зардалтай ч өөр хуваарлалттай шийд оршин байдаг, STOP*

   (c) *$d_{ij} < 0$ шийд оновчтой биш тул сайжруул.*

- ***5*** *d_{ij} Сөрөг утгуудаас хамгийн бага утгатай ачаалагдаагүй нүдийг сонго.*
- ***6*** *Битүү циклийг сонгосон ачаалагдаагүй нүднээс эхлүүлж ачаатай нүднүүдтэй холбоно. Мөн ачаалагдаагүй нүднээс эхлэж + тэмдгээр тэмдэглэж, +,- тэмдгийг сөөлжилж нүдэн дээр тэмдэглэ.*
- ***7***

   1. *Битүү циклээс - тэмдэгтэй нүдний хамгийн бага утгатайг сонгоно.*
   2. *Уг утгыг ачаалагдаагүй нүдэнд өгнө.*
   3. *Мөн энэ утгыг нөгөө + тэмдэгтэй нүдэн дээр нэмнэ.*
   4. *Мөн энэ утгыг нөгөө - тэмдэгтэй нүднээс хасна.*

- ***8.*** *Алхам 2-7 оновчтой шийд олтол давтана. $d_{ij} > 0$ зогсоно.*

Жишээ 65. *x_{ij}-р i агуулахаас j хэрэглэгчид хуваарилах ачааны хэмжээ.*

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Нөөц*
1	*2* x_{11}	*5* x_{12}	*2* x_{13}	*4* x_{14}	*3* x_{15}	*1* x_{16}	a_1
2	*3* x_{21}	*1* x_{22}	*3* x_{23}	*5* x_{24}	*2* x_{25}	*6* x_{26}	a_2
3	*2* x_{31}	*4* x_{32}	*6* x_{33}	*1* x_{34}	*6* x_{35}	*3* x_{36}	a_3
Хэрэгцээ	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	

$$\begin{aligned}\min Z = {} & 2x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 3x_{15} + x_{16} + 3x_{21} + x_{22} \\ & + 3x_{23} + 5x_{24} + 2x_{25} + 6x_{26} + 2x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + x_{34} + 6x_{35} + 3x_{36}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 70 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 90 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 90 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 35 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 50 \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} = 60 \\ x_{ij} \geqslant 0; i = \overline{1,3}; j = \overline{1,6} \end{cases}$$

- ***Диагоналийн арга***

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Нөөц*
1	*2* *30*	*5* *30*	*2* *10*	*4*	*3*	*1*	*70*
2	*3*	*1* *0*	*3* *35*	*5* *35*	*2* *20*	*6*	*90*
3	*2*	*4*	*6*	*1*	*6* *30*	*3* *60*	*90*
Хэрэгцээ	*30*	*30*	*45*	*35*	*50*	*60*	

$$f = 910$$

- ***Хамгийн бага зардлын арга***

maruka@rocketmail.com

	1	2	3	4	5	6	Нөөц
1	2	5	2 10	4	3	1 60	70
2	3	1 30	3 10	5	2 50	6	90
3	2 30	4	6 25	1 35	6	3	90
Хэрэгцээ	30	30	45	35	50	60	

$$f = 485$$

- ***Потенциалын арга***
  Тээврийн бодлого бодох аль ч арга нь тухайн бодлогын ямар нэг тулгуур шийд байгуулаад түүнийхээ оновчтой эсэхийг шалгаж, оновчтой биш бол цааш сайжруулсаар оновчтой шийдэд хүргэдэг. Тулгуур шийдийг хамгийн бага зардлын аргаар олсон шийдээр сонгоцгооё.

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	Нөөц
α_1	2	5	2 10	4	3	1 60	70
α_2	3	1 30	3 10	5	2 50	6	90
α_3	2 30	4	6 25	1 35	6	3	90
Хэрэгцээ	30	30	45	35	50	60	

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 = 2 \\ \alpha_1 + \beta_6 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 3 \\ \alpha_2 + \beta_5 = 2 \\ \alpha_3 + \beta_1 = 2 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 6 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 & \beta_2 = 1 \\ & \beta_3 = 3 \\ & \beta_5 = 2 \\ \alpha_1 = -1 & \beta_6 = 2 \\ \alpha_3 = 3 & \beta_1 = -1 \\ & \beta_4 = -2 \end{cases}$$

1.

	$\beta_1=-1$	$\beta_2=1$	$\beta_3=3$	$\beta_4=-2$	$\beta_5=2$	$\beta_6=2$	Нөөц
$\alpha_1=-1$	2	5	2 / 10	4	3	1 / 60	70
$\alpha_2=0$	3	1 / 30	3 / 10	5	2 / 50	6	90
$\alpha_3=3$	2 / 30	4	6 / 25	1 / 35	6	3	90
Хэрэгцээ	30	30	45	35	50	60	

$$s_{ij}=c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)$$

2.

	$\beta_1=-1$	$\beta_2=1$	$\beta_3=3$	$\beta_4=-2$	$\beta_5=2$	$\beta_6=2$	Нөөц
$\alpha_1=-1$	2 / [4]	5 / [5]	2 / 10	4 / [7]	3 / [2]	1 / 60	70
$\alpha_2=0$	3 / [4]	1 / 30	3 / 10	5 / [7]	2 / 50	6 / [4]	90
$\alpha_3=3$	2 / 30	4 / [0]	6 / 25	1 / 35	6 / [1]	3 / [-2]	90
Хэрэгцээ	30	30	45	35	50	60	

$\Longrightarrow$ s_{36} сөрөг байгаа тул анхны тулгуур шийд оновчтой биш байна. Битүү цикл нь $a_3b_6 \to a_3b_3 \to a_1b_3 \to a_1b_6$

3.

	$\beta_1=-1$	$\beta_2=1$	$\beta_3=3$	$\beta_4=-2$	$\beta_5=2$	$\beta_6=2$	Нөөц
$\alpha_1=-1$	2 / [4]	5 / [5]	2 / 10(+)	4 / [7]	3 / [2]	1 / 60(-)	70
$\alpha_2=0$	3 / [4]	1 / 30	3 / 10	5 / [7]	2 / 50	6 / [4]	90
$\alpha_3=3$	2 / 30	4 / [0]	6 / 25(-)	1 / 35	6 / [1]	3 / [-2](+)	90
Хэрэгцээ	30	30	45	35	50	60	

maruka@rocketmail.com

4.

	$\beta_1=-1$	$\beta_2=1$	$\beta_3=3$	$\beta_4=-2$	$\beta_5=2$	$\beta_6=2$	*Нөөц*
$\alpha_1=-1$	*2*	*5*	*2* / *35*	*4*	*3*	*1* / *35*	*70*
$\alpha_2=0$	*3*	*1* / *30*	*3* / *10*	*5*	*2* / *50*	*6*	*90*
$\alpha_3=3$	*2* / *30*	*4*	*6*	*1* / *35*	*6*	*3* / *25*	*90*
Хэрэгцээ	*30*	*30*	*45*	*35*	*50*	*60*	

5. ***(a)-(d) алхам оновчтой шийд олох хүртэл давтагдана.*** *Итераци 2 хийгдсэний дараах үр дүнг доор харагдаж байна.*

	$\beta_1=1$	$\beta_2=1$	$\beta_3=3$	$\beta_4=0$	$\beta_5=2$	$\beta_6=2$	*Нөөц*
$\alpha_1=-1$	*2* / *[2]*	*5* / *[5]*	*2* / *35*	*4* / *[5]*	*3* / *[2]*	*1* / *35*	*70*
$\alpha_2=0$	*3* / *[2]*	*1* / *30*	*3* / *10*	*5* / *[5]*	*2* / *50*	*6* / *[4]*	*90*
$\alpha_3=1$	*2* / *30*	*4* / *[2]*	*6* / *[2]*	*1* / *35*	*6* / *[3]*	*3* / *25*	*90*
Хэрэгцээ	*30*	*30*	*45*	*35*	*50*	*60*	

$$s_{ij} \geqslant 0$$

тул оновчтой шийдэнд хүрч чадлаа.

$$f^* = 435$$

	β_1	β_2	β_3	β_4	*Нөөц*
α_1	*1*	*2* / *60*	*3*	*4*	*60*
α_2	*4*	*3*	*2* / *20*	*0* / *60*	*80*
α_3	*0* / *40*	*2*	*2* / *60*	*1*	*100*
Хэрэгцээ	*40*	*60*	*80*	*60*	

Аль нэг суурь аргаар олсон энэ шийдийн хувьд ачаалагдсан нүдний тоо $5 < m+n-1 = 6$ *байна. Ийм шийд бөхөх шийд тул цааш нь сайжруулахын тулд ачаатай нүдний тоог заавал* $m+n-1$ *хүргэнэ. Энэ* *зорилгоор зарим сул нүдийг* ***тэг*** *ачаатай гэж үзнэ. Бөхөх шийдийн онцлог нь мөр, баганaнд зэрэг ганц нүд ачаалагдсан байдаг. Дээрх хүснэгтэнд (1,2) нүд мөрдөө ч баганадаа ч ганцаараа ачаалагджээ. Ийм нүдний мөр, баганын хамгийн бага зардалтай нүдэнд тэг ачаа байрлуулах замаар ачаатай нүдний тоог* $m+n-1$ *хүргэнэ.*

	β_1	β_2	β_3	β_4	Нөөц
α_1	1 / 0	2 / 60	3	4	60
α_2	4	3	2 / 20	0 / 60	80
α_3	0 / 40	2	2 / 60	1	100
Хэрэгцээ	40	60	80	60	

- $$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1} \quad \text{функцийн экстремумыг ол.}$$
  $$f'=0 \implies x_1=\boxed{a}, x_2=\boxed{b}$$
  $$f''(\boxed{a})=-2<0 \quad x_1 \text{ максимумын цэг } f(x_1)=-2$$
  $$f''(\boxed{b})=2>0 \quad x_2 \text{ минимумын цэг } f(x_2)=\boxed{c}$$

- *Дуу бичлэгийн компани шинэ CD гаргажээ. Борлуулалтын ажил эхлүүлэхийн өмнө маркетингийн судалгааны алба хамгийн их ашигтай байх ажлын үргэлжлэх хугацааг тодорхойлно. Эмпирик өгөгдлөөс үзэхэд 50000 зорилтот бүлэгт ТВ сурталчилгаа хийснээс хойш* t *хоногийн дараа CD худалдан авах хувь* $1-e^{-0.06t}$ *байна гэж тооцоолсон. CD тус бүрээ 20 доллараар борлуулах бөгөөд сурталчилгааны зардал нь* $C(t)=200000+12000t$ *байвал ашгаа максимумчилахын тулд хэдэн өдрийн телевизийн сурталчилгааг ашиглах ёстой вэ?*

Сурталчилгааны t *өдрийн дараах орлого нь (доллараар) :*

$$R(t)=20\cdot 50000\cdot(1-e^{-0.06t})$$

ашиг нь :

$$P(t)=\boxed{a}(1-e^{-0.06t})-200000-12000t$$
$$P'(t)=\boxed{c}e^{-0.06t}-12000$$
$$t=\frac{\ln\boxed{d}}{-0.06}$$

	$(0, \frac{\ln\boxed{d}}{-0.06})$	$(\frac{\ln\boxed{d}}{-0.06}, +\infty)$
P'	+	-

t *бүхэл тоо байх учраас* $t_1=\boxed{e}$, $t_2=\boxed{f}$

	t_1	t_2
P	277864	278101

Хамгийн их ашиг олохын тулд $\boxed{f}$ *хоногийн телевизийн сурталчилгааг ашиглах ёстой;*

maruka@rocketmail.com

Let A be a set of natural numbers divisible by 2 or 3 or 5. If 70 elements of A divisible by 2, 60 elements divisible by 3, 80 elements divisible by 5, 32 elements divisible by 6, 35 elements divisible by 10, 38 elements divisible by 15, 20 elements divisible by 30, then what is number of elements in A?

A нь 2 эсвэл 3 эсвэл 5-д хуваагддаг натурал тооны олонлог байг. A олонлогийн 70 элемент 2-т хуваагддаг , 3-т хуваагддаг 60 элемент, 5-д хуваагддаг 80 элемент, 6-д хуваагддаг 32 элемент, 10-д хуваагддаг 35 элемент, 15-д хуваагддаг 38 элемент, 30-д хуваагдах 30 элементтэй бол A олонлог хэдэн элементтэй вэ? X,Y,Z-ээр тус тус 2, 3, 5-д хуваагддаг олонлогийг тус тус тэмдэглэе.

$$|X| = 70$$
$$|Y| = 60$$
$$|Z| = 80$$
$$|X \cap Y| = \boxed{a}$$
$$|X \cap Z| = \boxed{b}$$
$$|Y \cap Z| = 38$$
$$|X \cap Y \cap Z| = 30$$
$$|X \cup Y \cup Z| = \boxed{c}$$

Хязгаарыг ол.

$$\lim_{x\to 12} \frac{5-\sqrt{13+x}}{1-\sqrt{13-x}} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}}$$

$$\frac{5-\sqrt{13+x}}{1-\sqrt{13-x}} \cdot \frac{\boxed{a}+\sqrt{13-x}}{\boxed{a}+\sqrt{13-x}} = \frac{(5-\sqrt{13+x})(\boxed{a}+\sqrt{13-x})}{x+\boxed{b}} \to \frac{0}{0}$$

$$\frac{(5-\sqrt{13+x})(\boxed{a}+\sqrt{13-x})}{x+\boxed{b}} \cdot \frac{\boxed{c}+\sqrt{13+x}}{\boxed{c}+\sqrt{13+x}} = \frac{(\boxed{d}-x)(\boxed{a}+\sqrt{13-x})}{(x+\boxed{b})(\boxed{c}+\sqrt{13+x})}$$

$$= \boxed{e}\frac{\boxed{a}+\sqrt{13-x}}{\boxed{c}+\sqrt{13+x}} \to -\frac{1}{\boxed{f}}, \quad x \to 12 \text{ үед}$$

Хязгаарыг ол.

$$\lim_{x\to 24} \frac{7-\sqrt{25+x}}{1-\sqrt{25-x}} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}}$$

$$\frac{7-\sqrt{25+x}}{1-\sqrt{25-x}} \cdot \frac{\boxed{a}+\sqrt{25-x}}{\boxed{a}+\sqrt{25-x}} = \frac{(7-\sqrt{25+x})(\boxed{a}+\sqrt{25-x})}{x+\boxed{b}} \to \frac{0}{0}$$

$$\frac{(7-\sqrt{25+x})(\boxed{a}+\sqrt{25-x})}{x+\boxed{b}} \cdot \frac{\boxed{c}+\sqrt{25+x}}{\boxed{c}+\sqrt{25+x}} = \frac{(\boxed{d}-x)(\boxed{a}+\sqrt{25-x})}{(x+\boxed{b})(\boxed{c}+\sqrt{25+x})}$$

$$= \boxed{e}\frac{\boxed{a}+\sqrt{25-x}}{\boxed{c}+\sqrt{25+x}} \to -\frac{1}{\boxed{f}}, \quad x \to 24 \text{ үед}$$

Хязгаарыг ол.

$$\lim_{x\to 6} \frac{4-\sqrt{10+x}}{2-\sqrt{10-x}} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}}$$

$$\frac{4-\sqrt{10+x}}{2-\sqrt{10-x}} \cdot \frac{\boxed{a}+\sqrt{10-x}}{\boxed{a}+\sqrt{10-x}} = \frac{(4-\sqrt{10+x})(\boxed{a}+\sqrt{10-x})}{x+\boxed{b}} \to \frac{0}{0}$$

$$\frac{(4-\sqrt{10+x})(\boxed{a}+\sqrt{10-x})}{x+\boxed{b}} \cdot \frac{\boxed{c}+\sqrt{10+x}}{\boxed{c}+\sqrt{10+x}} = \frac{(\boxed{d}-x)(\boxed{a}+\sqrt{10-x})}{(x+\boxed{b})(\boxed{c}+\sqrt{10+x})}$$

$$= \boxed{e}\frac{\boxed{a}+\sqrt{10-x}}{\boxed{c}+\sqrt{10+x}} \to -\frac{1}{\boxed{f}}, \quad x \to 6 \text{ үед}$$

Хязгаарыг ол.

$$\lim_{x\to 16}\frac{6-\sqrt{20+x}}{2-\sqrt{20-x}}\overbrace{=}^{\frac{0}{0}}$$
$$\frac{6-\sqrt{20+x}}{2-\sqrt{20-x}}\cdot\frac{\boxed{a}+\sqrt{20-x}}{\boxed{a}+\sqrt{20-x}}=\frac{(6-\sqrt{20+x})(\boxed{a}+\sqrt{20-x})}{x+\boxed{b}}\to\frac{0}{0}$$
$$\frac{(6-\sqrt{20+x})(\boxed{a}+\sqrt{20-x})}{x+\boxed{b}}\cdot\frac{\boxed{c}+\sqrt{20+x}}{\boxed{c}+\sqrt{20+x}}=\frac{(\boxed{d}-x)(\boxed{a}+\sqrt{20-x})}{(x+\boxed{b})(\boxed{c}+\sqrt{20+x})}$$
$$=\boxed{e}\frac{\boxed{a}+\sqrt{20-x}}{\boxed{c}+\sqrt{20+x}}\to-\frac{1}{\boxed{f}},\quad x\to 16 \text{ үед}$$

Экстремумыг ол.

$$f(x,y)=x^2+y^2+2x-6y+6$$
$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0\implies x_0=\boxed{a}, y_0=\boxed{b}$$
$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\boxed{c} & \boxed{d}\\ \boxed{d} & \boxed{e}\end{vmatrix}>0\implies f_{min}=\boxed{f}$$

Экстремумыг ол.

$$f(x,y)=3x^2+2y^2-6x-4y+16$$
$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0\implies x_0=\boxed{a}, y_0=\boxed{b}$$
$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\boxed{c} & \boxed{d}\\ \boxed{d} & \boxed{e}\end{vmatrix}>0\implies f_{min}=\boxed{f}$$

Экстремумыг ол.

$$f(x,y)=-x^2-5y^2+10x-10y-28$$
$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0\implies x_0=\boxed{a}, y_0=\boxed{b}$$
$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\boxed{c} & \boxed{d}\\ \boxed{d} & \boxed{e}\end{vmatrix}>0\implies f_{max}=\boxed{f}$$

Экстремумыг ол.

$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-3)^2$$
$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0\implies x_0=\boxed{a}, y_0=\boxed{b}$$
$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\boxed{c} & \boxed{d}\\ \boxed{d} & \boxed{e}\end{vmatrix}>0\implies f_{min}=\boxed{f}$$

maruka@rocketmail.com

Бүлэг 11

Хавсралт

11.1 Грек цагаан толгой

Α α	альфа	а	a
Β β	бета	б	b
Γ γ	гамма	г	g
Δ δ	дельта	д	d
Ε ε	эпсилон	э	e
Ζ ζ	дзэта	дэ	z
Η η	эта	э	ē
Θ θ ϑ	тхэта	тх	th
Ι ι	йота	и	i
Κ κ	каппа	к	c
Λ λ	ламбда	л	l
Μ μ	мю	м	m
Ν ν	ню	н	n
Ξ ξ	кси	кс	x
Ο ο	омикрон	о	o
Π π	пи	п	p
Ρ ρ	ро	р	r
Σ σ ς	сигма	с	s
Τ τ	тау	т	t
Υ υ	ипсилон	ю	y
Φ ϕ φ	фи	ф	ph
Χ χ	хи	х	ch
Ψ ψ	пси	пс	ps
Ω ω	омега	о	ō

11.2 тригонометр томъёо, адилтгал

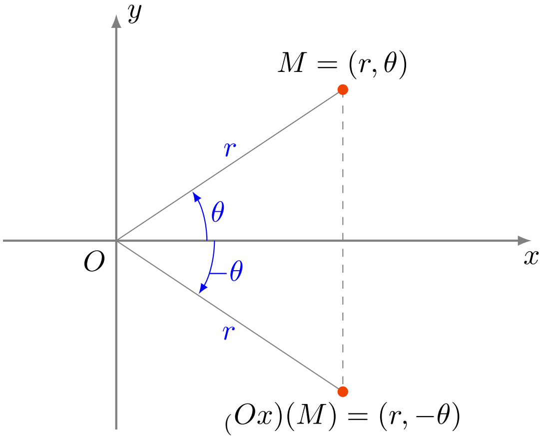
$$
\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \\
\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \\
\sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \\
\sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]
\end{aligned}
$$

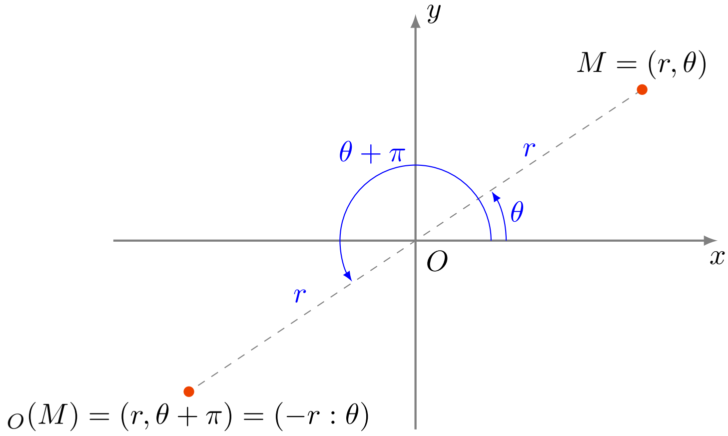
$$
\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}
\end{aligned}
$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$
\begin{aligned}
\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 a \\
&= \cos^2 a - \sin^2 a \\
\sin 2a &= 2\sin a \cdot \cos a \\
\tan 2a &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}
\end{aligned}
$$

11.2.1 Туйлын координат





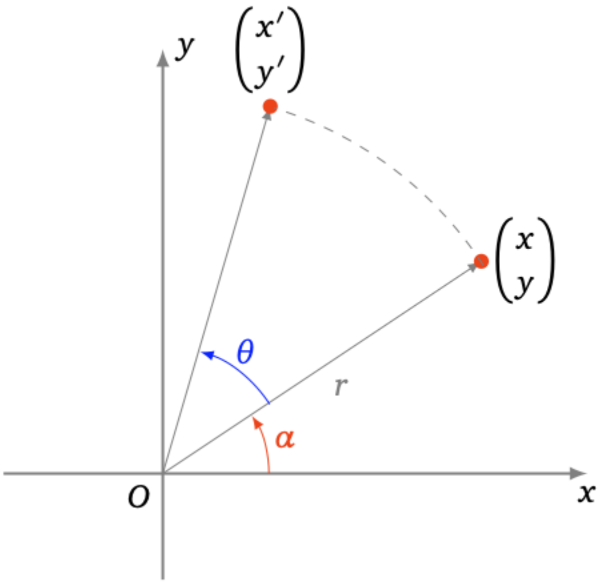
maruka@rocketmail.com

Туйлын координат*аас харгалзах* **Декартын координат***ууд рүү шилжүүлэх*

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$tg\theta = \frac{y}{x}$$

11.3 Координатыг өнцгөөр эргүүлэх

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *координатын эхээс* θ *өнцгөөр эргүүлэхэд* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *вектор нь хэвтээ тэнхлэгтэй* α *өнцөг үүсгэж,*



Зураг 11.1: θ өнцгөөр эргүүлэх

цэг хүртэл координатын эхээс r *зайд байвал*

$$\begin{cases} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *нь* θ *өнцгөөр* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*-ийг эргүүлсэний дараа*

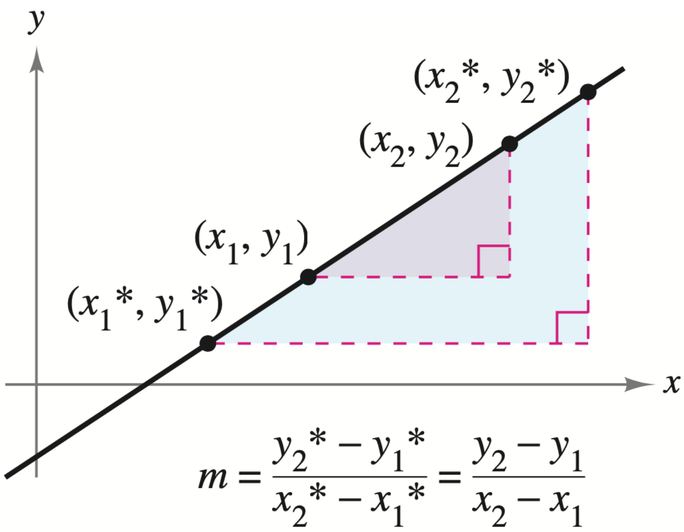
$$\begin{cases} x' &= r\cos(\alpha+\theta) \\ y' &= r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ y' &= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \end{cases}$$

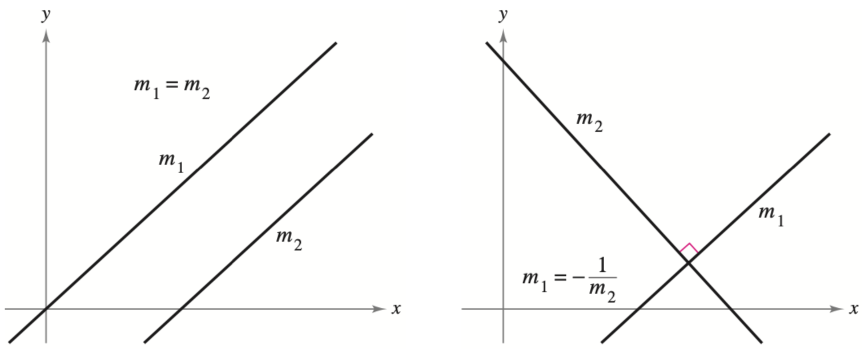
$$\begin{cases} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

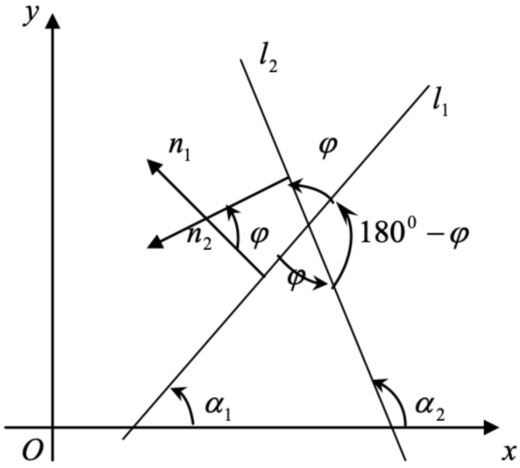
11.4 2 шулууны хоорондох өнцөг



Зураг 11.2: Шулууны өнцгийн коэффициент



Зураг 11.3: Параллель болон перпендикуляр шулууны өнцгийн коэффициентийн хамаарал



Зураг 11.4: 2 шулууны хоорондох өнцөг

$$
\begin{aligned}
l_1 :& y = m_1 x + c_1 \\
l_2 :& y = m_2 x + c_2 \\
tg\phi &= tg(\alpha_2 - \alpha_1) \\
&= \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} \\
tg\alpha_1 &= m_1 \\
tg\alpha_2 &= m_2 \\
tg\phi &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}
\end{aligned}
$$

11.5 Матриц 3×3 тодорхойлогч бодох

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

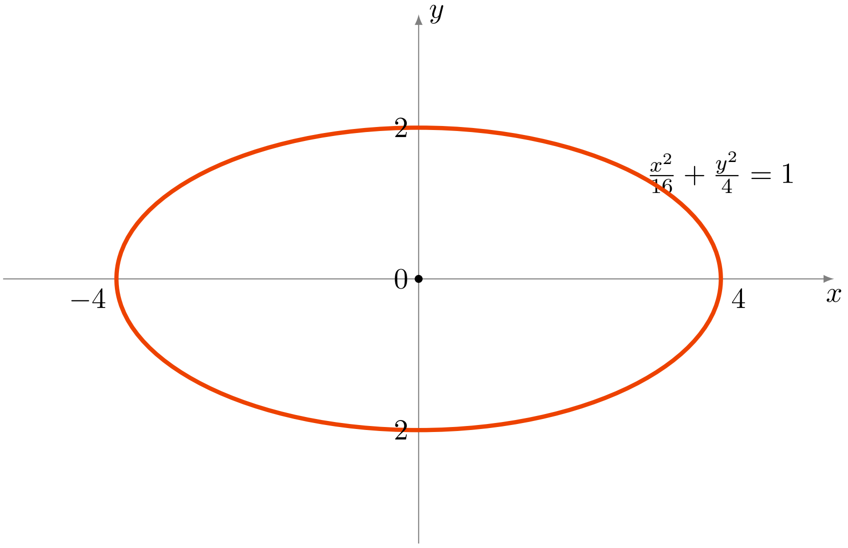
- *3x3* **Саррусын дүрэм**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

11.6 II эрэмбийн хялбар муруй

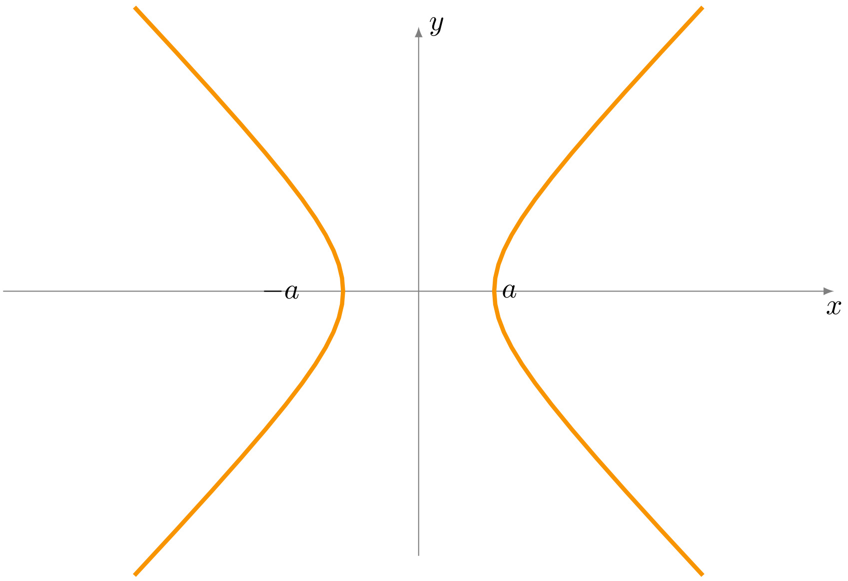
1. *эллипс*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



2. *гипербол*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



Α α	альфа	а	a
Β β	бета	б	b
Γ γ	гамма	г	g
Δ δ	дельта	д	d
Ε ε	эпсилон	э	e
Ζ ζ	дзэта	дэ	z
Η η	эта	э	ē
Θ θ ϑ	тхэта	тх	th
Ι ι	йота	и	i
Κ κ	каппа	к	c
Λ λ	ламбда	л	l
Μ μ	мю	м	m
Ν ν	ню	н	n
Ξ ξ	кси	кс	x
Ο ο	омикрон	о	o
Π π	пи	п	p
Ρ ρ	ро	р	r
Σ σ ς	сигма	с	s
Τ τ	тау	т	t
Υ υ	ипсилон	ю	y
Φ ϕ φ	фи	ф	ph
Χ χ	хи	х	ch
Ψ ψ	пси	пс	ps
Ω ω	омега	о	ō

11.7 Грек цагаан толгой

11.8 тригонометр томъёо, адилтгал

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$
$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$$
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

maruka@rocketmail.com

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= 2\ \cos^2 a - 1 \\
&= 1 - 2\ \sin^2 a \\
&= \cos^2 a - \sin^2 a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 2a &= 2\ \sin a \cdot \cos a \\
\tan 2a &= \frac{2\ \tan a}{1 - \tan^2 a}
\end{aligned}$$

Index