基底族が定めるマトロイドについて

2025 年 10 月 6 日 2 時 11 分更新

定義 1　E を有限集合，E の部分集合族の一つを $\mathfrak{B}$ とし，$(E, \mathfrak{B})$ を M と置くことにする。M が次の二条件 (B1) と (B2) を満たすとき，M を E 上の**マトロイド**，$\mathfrak{B}$ の元をその**基底**と呼ぶ。

(B1) $\mathfrak{B} \neq \varnothing$ である。

(B2) $\mathfrak{B}$ の元 σ_1，σ_2 と $\sigma_1 \setminus \sigma_2$ の元 i に対して，$(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathfrak{B}$ なる $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ の元 j が存在する。

次の性質は定義から容易に従う。

命題 2　マトロイド M に対して次が成り立つ。

(1) M の基底 σ_1 と σ_2 に対し，$\sigma_1 \subset \sigma_2$ ならば $\sigma_1 = \sigma_2$ である。

(2) M の基底 σ_1 と σ_2 に対し，$|\sigma_1| = |\sigma_2|$ である。特に $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| = |\sigma_2 \setminus \sigma_1|$ である。

(1) の証明　$\sigma_1 \neq \sigma_2$ だったとすると，$\sigma_2 \setminus \sigma_1 \neq \varnothing$ であるから，(B2) より $\sigma_1 \setminus \sigma_2 \neq \varnothing$ となるので，$\sigma_1 \subset \sigma_2$ であることに矛盾する。　証明終

(2) の証明　$\sigma_1 = \sigma_2$ なら明らかであるから，$\sigma_1 \neq \sigma_2$ の場合を考える。この場合は，後に述べる手順により σ_1 の元を一つづつ取り替えて σ_2 にできるので，元の個数が等しいことを示せる。すると後半については $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| = |\sigma_1| - |\sigma_1 \cap \sigma_2| = |\sigma_2| - |\sigma_1 \cap \sigma_2| = |\sigma_2 \setminus \sigma_1|$ と計算できる。

　$\boxed{\text{基底を取り替える手順}}$　(1) より $\sigma_1 \not\subset \sigma_2$（かつ $\sigma_2 \not\subset \sigma_1$）であるので，$\sigma_1 \setminus \sigma_2$ の元 i を取れ，(B2) を用いて $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ が基底となるように $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ の元 j を取れる。必要なら $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ を σ_1' と置いて，σ_1' と σ_2 に対して同様の議論をすることで $\sigma_1'' \coloneqq (\sigma \setminus \{i, i'\}) \cup \{j, j'\}$（$i' \in \sigma_1 \setminus \{i\}$，$j' \in \sigma_2 \setminus \{j\}$）が基底になる。この操作を続けて元の個数が等しい基底の列 $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_1'', \dots, \sigma_2$ が得られる。　証明終

　相異なる二つの基底があるときに双方の元を一つづつ交換して片方を新たな基底にできるというのが (B2) であるが，実は両方が新たな基底になるように元を交換できる。

命題 3　M をマトロイド，$\mathfrak{B}$ をその基底族とする。このとき

(B2′) $\mathfrak{B}$ の元 σ_1，σ_2 と $\sigma_1 \setminus \sigma_2$ の元 i に対して，$(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathfrak{B}$ かつ $(\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathfrak{B}$ なる $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ の元 j が存在する。

を M は満足する。

証明　$|\sigma_1 \setminus \sigma_2| (= |\sigma_2 \setminus \sigma_1|)$ に関する帰納法で示す。$|\sigma_1 \setminus \sigma_2| = 1$ のとき $\sigma_1 = (\sigma_1 \cap \sigma_2) \sqcup \{i\}$，$\sigma_2 = (\sigma_1 \cap \sigma_2) \sqcup \{j\}$ と表せ，$\sigma_1 \setminus \sigma_2 = \{i\}$，$\sigma_2 \setminus \sigma_1 = \{j\}$ であり，$(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\} = \sigma_2$，

$(\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i\} = \sigma_1$ となり共に基底である。次に $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| > 1$ のときを考える。$\sigma_1 \setminus \sigma_2$ の元 i を一つ取って固定しておく。(B2) を用いて $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ が基底になるように $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ の元 j を取る。再び (B2) を用いて $(\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i'\}$ が基底になるように $\sigma_1 \setminus \sigma_2$ の元 i' を取る。$i' = i$ であれば j が目的の元であるので，$i' \neq i$ の場合を考える。このとき $|\sigma_1 \setminus \big((\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i'\}\big)| < |\sigma_1 \setminus \sigma_2|$ であるから，帰納法の仮定から (B2$'$) を用いて $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j'\}$ と $(\sigma_2 \setminus \{j, j'\}) \cup \{i, i'\}$ が共に基底になるように $\sigma_2 \setminus (\sigma_1 \cup \{j\})$ の元 j' を取れる。後者の $(\sigma_2 \setminus \{j, j'\}) \cup \{i, i'\}$ を σ_3 と置き，$\sigma_3 \setminus \sigma_2$ の元 i' について (B2) を用いると，$\sigma_2 \setminus \sigma_3 = \{j, j'\}$ なので，$(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j\}$ か $(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j'\}$ のいずれかが基底でなければならない。$(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j\}$ が基底の場合，$(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j\} = (\sigma_2 \setminus \{j'\}) \cup \{i\}$ であるので j' が目的の元である。$(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j'\}$ が基底の場合は j が目的の元である。以上によって M が (B2$'$) を満足する。　　証明終