

# マトロイドの定義の同値性など

2025 年 3 月 26 日 0 時 39 分更新

## 目 次

|     |                    |    |
|-----|--------------------|----|
| 1   | マトロイドの定義と性質        | 1  |
| 1.1 | 階数関数によるマトロイドの特徴づけ  | 8  |
| 1.2 | サーキットによるマトロイドの特徴づけ | 12 |
| 1.3 | フラットによるマトロイドの特徴づけ  | 14 |
| 1.4 | マトロイドの特徴付けのまとめ     | 19 |
| 2   | マトロイドのフラットの束       | 21 |
| 3   | マトロイドの同型           | 23 |
| 4   | 線形マトロイド            | 25 |
| 4.1 | マトロイドの実現可能性        | 25 |
| 4.2 | グラフ的マトロイド          | 28 |
| 5   | マトロイドの変形           | 35 |

## 1 マトロイドの定義と性質

マトロイドは「ベクトルの一次独立関係」を一般化して定義される。

**定義 1.1 ([Huh18, p.12, Def. 2.10])**  $E$  を有限集合とする。 $E$  上の**マトロイド**  $M$  とは  $E$  と,  $E$  の部分集合の族  $\mathcal{I}$  (マトロイド  $M$  の**独立集合**の族と呼ぶ) の対  $M = (E, \mathcal{I})$  であって, 次の三つの公理

(I1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$  である。

(I2) 任意の独立集合  $I \in \mathcal{I}$  について, その部分集合  $J \subseteq I$  も族  $\mathcal{I}$  に含まれる。

(I3) 任意の独立集合  $I, J \in \mathcal{I}$  について,  $\#I > \#J$  であるならば  $J \cup \{f\} \in \mathcal{I}$  となるような元  $f \in I \setminus J$  が取れる。

を満たすものをいう。集合  $E$  はマトロイド  $M$  の**底集合**と呼ばれる。

**例 1.2**  $E$  を任意の有限集合とし、 $\mathcal{I} = 2^E$  と置くと、 $M = (E, \mathcal{I})$  はマトロイドである。このようなマトロイドは**一様マトロイド**と呼ばれる。3 節で導入するマトロイドの同型により、一様マトロイドは台集合の元の個数に対して同型を除いて一意的に定まる (例 3.3 (i) を見よ)。

**命題 1.3** 体  $K$  を係数とする線形空間  $V$  の有限部分集合を底集合  $E$  とする。 $E$  の部分集合の族  $\mathcal{I}$  を、

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \text{ は一次独立な } E \text{ の部分集合である}\} \cup \{\emptyset\}$$

で定めると、対  $M = (E, \mathcal{I})$  はマトロイドである。このようなマトロイドは体  $K$  上の**線形マトロイド**と呼ばれる。

**証明** 公理 (I1) は定義から従い、公理 (I2) は容易に確かめられるので、ここでは公理 (I3) が満たされることを確かめよう。背理法による。 $\#I > \#J$  であって、すべてのベクトル  $f \in I$  に対して  $J \cup \{f\}$  が一次従属となるような一次独立ベクトル  $I, J \subseteq E$  が存在したとする。このとき、

- ♣ 包含  $I \subseteq \text{Span}_K(J)$  が成立する。実際、 $f \in I$  に対して  $J \cup \{f\}$  の非自明な一次関係を考えると、 $f$  の係数は零でない。ゆえに  $f \in \text{Span}_K(J)$  である。

よって  $\text{Span}_K(I) \subseteq \text{Span}_K(J)$  となるが、仮定より  $\dim_K(\text{Span}_K(I)) > \dim_K(\text{Span}_K(J))$  であるから矛盾が生じる。したがって公理 (I3) は満たされなければならない。 ■

底集合  $E$  上にマトロイドの構造が与えられると、線形空間と同様に従属集合や階数などの概念が定義できる。

**定義 1.4 ([MS15, p.162])**  $M = (E, \mathcal{I})$  をマトロイドとする。

- (i) 部分集合  $A \in 2^E$  が**従属集合**であるとは、 $A \notin \mathcal{I}$  となるとき、すなわち独立集合でないときをいう。従属集合全体の集合族を  $\mathcal{D}(M)$  あるいは単に  $\mathcal{D}$  で表す。
- (ii) 部分集合  $C \in 2^E$  が**サーキット**であるとは、従属集合の中で包含について極小であるときをいう。サーキット全体の集合族を  $\mathcal{C}(M)$  あるいは単に  $\mathcal{C}$  で表す。
- (iii) 部分集合  $A \in 2^E$  の**階数**とは整数  $\max\{\#I \mid I \text{ は } A \text{ に含まれる独立集合}\}$  のことをいい、 $\text{rk}_M(A)$  あるいは単に  $\text{rk}(A)$  で表す。また、台集合  $E$  の階数  $\text{rk}_M(E)$  をマトロイド  $M$  の**階数**といい  $\text{rk}(M)$  で表す。
- (iv) 部分集合  $F \in 2^E$  が**フラット**であるとは、任意の元  $e \in E \setminus F$  について、不等式  $\text{rk}(F) < \text{rk}(F \cup \{e\})$  が成り立つときをいう。フラット全体の集合族を  $\mathcal{F}(M)$  あるいは単に  $\mathcal{F}$  で表す。

(v) 半順序集合  $(\mathcal{F}(M), \subseteq)$  を  $\mathcal{L}$  で表す。この半順序集合を扱う文脈では、 $\mathcal{L}_M$  の台集合も記号  $\mathcal{L}_M$  と書く。つまり、集合として  $\mathcal{F}(M) = \mathcal{L}_M$  である。またフラットの束では、包含の記号  $\subseteq$  を通常の大関係の記号  $\leq$  で記すこともある。後の系 2.3 にて示すが、 $\mathcal{L}_M$  は束（定義 2.1 を見よ）であり、マトロイド  $M$  の**フラットの束**と呼ばれる。

これら概念の中でもフラットは定義が掴みづらいかもしれない。しかしながら、線形マトロイドにおいてフラットは部分空間に対応するものとして解釈できる（系 1.6）。

**命題 1.5**  $M$  を線形マトロイドとし、部分集合  $A \in 2^E$  を固定する。このとき部分集合  $F := \text{Span}_K(A) \cap E$  はマトロイド  $M$  のフラットである。ただし、 $A = \emptyset$  のときは  $\text{Span}_K(A) = \{0\}$  と約束する。

**証明** ベクトル  $e \in E \setminus F$  を取る。 $F$  の定め方から  $e \notin \text{Span}_K(A)$ 、すなわちベクトル  $e$  は  $\text{Span}_K(A)$  内のベクトルの線形和では表せない。特に、

♣  $I \subseteq F$  かつ  $\#I = \text{rk}(F)$  を満たす独立集合  $I$  に対して、 $I \cup \{e\}$  も独立集合である。

ゆえに不等式  $\text{rk}(F) = \#I < \#(I \cup \{e\}) \leq \text{rk}(F \cup \{e\})$  が得られる。これは  $F$  がフラットであることを意味している。 ■

**系 1.6** 命題 1.5 から、部分空間の族  $\tilde{\mathcal{F}} := \{\text{Span}_K(A) \mid A \in 2^E\}$  から  $M$  のフラット全体の集合族  $\mathcal{F}$  への写像  $\text{Span}_K(A) \cap E$  が定められる。このとき、 $\mathcal{F}$  から  $\tilde{\mathcal{F}}$  への写像  $F \mapsto \text{Span}_K(F)$  が逆写像である。

**証明**  $F \in \mathcal{F}$  を取り、 $\text{Span}_K(F) \cap E = F$  となることを示そう。包含  $F \subseteq \text{Span}_K(F) \cap E$  は直ちに従う。定義から、一般に  $A \in 2^E$  に対して  $\text{rk}(A) = \dim_K(\text{Span}_K(A))$  であるので、

♣  $f \in \text{Span}_K(F) \cap E$  に対して

$$\text{rk}(F \cup \{f\}) = \dim_K(\text{Span}_K(F \cup \{f\})) = \dim_K(\text{Span}_K(F)) = \text{rk}(F)$$

と計算できる。

$F$  はフラットであるから、♣ の計算は包含  $\text{Span}_K(F) \cap E \subseteq F$  が成り立つことを意味する。

ゆえに  $\text{Span}_K(F) \cap E = F$  である。

逆に、 $W \in \tilde{\mathcal{F}}$  を取り  $\text{Span}_K(W \cap E) = W$  となることを示そう。包含  $\text{Span}_K(W \cap E) \subseteq W$  は明らかである。逆の包含について、

♠  $W \in \tilde{\mathcal{F}}$  なので  $W = \text{Span}_K(A)$  となる  $A \subseteq E$  が取れるが、このとき  $A \subseteq W \cap E$  である。

ゆえに包含  $F = \text{Span}_K(A) \subseteq \text{Span}_K(W \cap E)$  が従う。

以上で題意は示された。 ■

ここから、マトロイドに関する一般論についていくつか触れておこう。

**命題 1.7 ([MS15, p.162, Def. 4.2.3])**  $M = (E, \mathcal{I})$  をマトロイドとする。このとき、 $A \mapsto \text{rk}(A)$  で定義される **階数関数**  $\text{rk}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が考えられるが、この関数は次の三つの性質

(R1) 任意の部分集合  $A \in 2^E$  に対して、 $\text{rk}(A) \leq \#A$  である。

(R2) 包含  $A \subseteq B$  のある任意の部分集合  $A, B \in 2^E$  に対して、 $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(B)$  である。

(R3) 任意の部分集合  $A, B \in 2^E$  に対して、**劣モジュラー不等式**

$$\text{rk}(A \cup B) + \text{rk}(A \cap B) \leq \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$$

が成り立つ。

を満たす。

**証明** 階数の定義を思い出すと、

$$\begin{aligned} \text{rk}(A) &= \max\{\#I \mid I \text{ は } A \text{ に含まれる } M \text{ の独立集合である}\} \\ &\leq \max\{\#I \mid I \text{ は } A \text{ に含まれる集合である}\} \\ &= \#A \end{aligned}$$

であるから、性質 (R1) は満たされる。また、 $A \subseteq B$  なる部分集合  $A, B \in 2^E$  についても、包含

$$\{I \mid I \text{ は } A \text{ に含まれる集合である}\} \subseteq \{I \mid I \text{ は } B \text{ に含まれる集合である}\}$$

が成り立つので、 $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(B)$  が従う。よって性質 (R2) は満たされる。

性質 (R3) が満たされることを示そう。

♣  $I$  を  $A \cup B$  に含まれる  $M$  の独立集合で元の個数が最大なものの一つ、 $J$  を  $A \cap B$  に含まれる  $M$  の独立集合で元の個数が最大なものの一つとしよう。

もし  $\#I = \#J$  であれば、 $\text{rk}(A \cup B) = \text{rk}(A) = \text{rk}(B) = \text{rk}(A \cap B)$  となるので、性質 (R3) の不等式が直ちに従う。そうでない場合、つまり  $\#I > \#J$  の場合を考えよう。このときは、

♠ 公理 (I3) により、 $I \setminus J$  の元  $f_1, \dots, f_r$  を  $J$  に加えて  $J \cup \{f_1, \dots, f_r\}$  は  $M$  の独立集合で、かつ  $\#J + r = \#I$  となるようにできる。

元  $f_1, \dots, f_r$  を、 $\{f_1, \dots, f_q\} \subseteq A, \{f_{q+1}, \dots, f_r\} \subseteq B$  となるように並べ替えると、不等式

$$\text{rk}(A \cap B) + q \leq \text{rk}(A), \quad \text{rk}(A \cap B) + (r - q) \leq \text{rk}(B)$$

が得られる。ゆえに  $\text{rk}(A \cap B) + r \leq \text{rk}(A) + \text{rk}(B) - \text{rk}(A \cap B)$  である。したがって、

$$\begin{aligned}\text{rk}(A \cup B) &= \#J + r \\ &= \text{rk}(A \cap B) + r \\ &\leq \text{rk}(A) + \text{rk}(B) - \text{rk}(A \cap B)\end{aligned}$$

と計算でき、これは性質 (R3) の不等式である。 ■

性質 (R3) は劣モジュラー性と呼ばれる。(R3) はどちらかという抽象的な記述であり、もう少し具体的な記述も存在する。

**命題 1.8** 性質 (R1), (R2), (R3) を満たす非負整数値関数  $r: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  は、次の性質

(R3)' 任意の元  $e \in E$  と、包含  $X \subseteq Y$  のある任意の部分集合  $X, Y \in 2^E$  に対して、不等式

$$r(Y \cup \{e\}) - r(Y) \leq r(X \cup \{e\}) - r(X)$$

が成り立つ (この不等式も**劣モジュラー不等式**と呼ばれる)。

を満たす。また逆に、性質 (R1), (R2), (R3)' を満たす非負整数値関数  $r$  は性質 (R3) を満たす。

**証明** 性質 (R1), (R2), (R3) を満たす非負整数値関数  $r$  を考える。部分集合  $X, Y \in 2^E$  の間に包含  $X \subseteq Y$  があるとし、元  $e \in E$  を取る。 $e \in Y$  であれば、(R3)' の劣モジュラー不等式は、性質 (R2) から直ちに従う。

$e \notin Y$  である場合を考えよう。性質 (R3) の劣モジュラー不等式において  $A = Y, B = X \cup \{e\}$  と当てはめることで、性質 (R3)' の劣モジュラー不等式

$$r(Y \cup \{e\}) - r(Y) \leq r(X \cup \{e\}) - r(X)$$

が得られる。よって関数  $r$  は性質 (R3)' を満たす。

逆に、非負整数値関数  $r$  が性質 (R1), (R2), (R3)' を満たすときを考える。部分集合  $A, B \in 2^E$  を任意に取る。包含  $A \subseteq B$  が成り立つときは、性質 (R3) が満たされることは易しいので、 $A \not\subseteq B$  の場合を考えよう。 $A \setminus B \neq \emptyset$  であるから、 $A \setminus B = \{a_1, \dots, a_r\}$  と書くことにしよう。

♣  $X = A \cap B, Y = B, e = a_1$  として性質 (R3)' の劣モジュラー不等式に当てはめることで、不等式

$$(1.1) \quad r(B \cup \{a_1\}) - r(B) \leq r((A \cap B) \cup \{a_1\}) - r(A \cap B)$$

が得られる。続いて  $X = (A \cap B) \cup \{a_1\}$ ,  $Y = B \cup \{a_1\}$ ,  $e = a_2$  として性質 (R3)' に当てはめることで, 不等式

$$(1.2) \quad r(B \cup \{a_1, a_2\}) - r(B \cup \{a_1\}) \leq r((A \cap B) \cup \{a_1, a_2\}) - r((A \cap B) \cup \{a_1\})$$

が得られる。(1.1) と (1.2) を辺々足すことで,

$$r(B \cup \{a_1, a_2\}) - r(B) \leq r((A \cap B) \cup \{a_1, a_2\}) - r(A \cap B)$$

となる。

♣ の操作を繰り返すことで, 不等式

$$(1.3) \quad r(B \cup (A \setminus B)) - r(B) \leq r((A \cap B) \cup (A \setminus B)) - r(A \cap B)$$

が得られる。(1.3) について,  $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$ ,  $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$  であるから, 性質 (R3) の劣モジュラー不等式

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$$

が成立する。ゆえに性質 (R3) が満たされることが示された。 ■

**注意 1.9** 性質 (R3)' の観点からすると, 劣モジュラー関数は, 集合に元を足していくにつれ, 値の変化量は広義単調に減少していくような関数であるといえる。

**命題 1.10 ([MS15, p.162])**  $M = (E, \mathcal{I})$  をマトロイドとする。このとき, サークットの全体の集合族  $\mathcal{C}$  は次の三つの性質

(C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  である。

(C2) 任意のサーキット  $C \in \mathcal{C}$  について,  $C$  に真に含まれるようなサーキットは存在しない。

(C3) 任意の相異なるサーキット  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  と任意の元  $e \in C_1 \cap C_2$  について, 集合  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  は従属集合である。

を満たす。

**証明** 性質 (C1) については,  $\emptyset$  は独立集合なので, サークットではないことから従う。また性質 (C2) は, 従属集合の中で包含について極小なものとしてサーキットを定義していたので従う。

性質 (C3) が満たされることを示そう。 $C_1, C_2$  を,  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$  となる  $M$  の異なるサーキットとし, 元  $e \in C_1 \cap C_2$  を取る。このとき,

♣  $C_1 \setminus \{e\}, C_2 \setminus \{e\}, C_1 \cap C_2$  はいずれも独立集合である。したがって

$$\text{rk}(C_1) = \#C_1 - 1, \text{rk}(C_2) = \#C_2 - 1, \text{rk}(C_1 \cap C_2) = \#(C_1 \cap C_2)$$

となることが従う。

劣モジュラー不等式 (R3) より,

$$\text{rk}(C_1 \cup C_2) \leq \text{rk}(C_1) + \text{rk}(C_2) - \text{rk}(C_1 \cap C_2) = \#(C_1 \cup C_2) - 2$$

である。特に,  $\text{rk}((C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}) \leq \#((C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}) - 1$  であるから  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  は従属集合である。ゆえに性質 (C3) が満たされることが示された。 ■

**命題 1.11 ([Huh18, p.11, Def. 2.6])**  $M = (E, \mathcal{I})$  をマトロイドとする。このとき, フラット全体の集合族  $\mathcal{F}$  は次の三つの性質

(F1)  $E \in \mathcal{F}$  である。

(F2) 任意のフラット  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  に対して,  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  である。

(F3) 任意のフラット  $F$  と任意の補集合の元  $e \in E \setminus F$  に対して,  $e$  を含み, かつ  $F$  を被覆するようなフラット  $G \in \mathcal{F}$  が存在する。

を満たす。

また, これらの性質 (F1), (F2), (F3) は, 階数関数の性質 (R1), (R2), (R3) のみを用いて導くことができる。

**注意 1.12** フラット  $G$  がフラット  $F$  を被覆するとは  $F \subsetneq G$  であり, かつ  $F \subsetneq H \subsetneq G$  となるようなフラット  $H$  が存在しないことをいい  $F \triangleleft G$  と表す。

**証明** 性質 (F1) は,  $E \setminus E = \emptyset$  であることから, フラットであるための条件が空虚な真となり, 満たされる。

性質 (F2) が満たされることを示そう。二つの  $M$  のフラット  $F_1, F_2$  を考え, 元  $e \in E \setminus (F_1 \cap F_2) = (E \setminus F_1) \cup (E \setminus F_2)$  を任意に取る。  $e \notin F_1$  のとき,

♣  $A = F_1, B = (F_1 \cap F_2) \cup \{e\}$  として, 性質 (R3) の劣モジュラー不等式に当てはめて, 不等式

$$\text{rk}(F_1 \cap F_2) + \text{rk}(F_1 \cup \{e\}) - \text{rk}(F_1) \leq \text{rk}((F_1 \cap F_2) \cup \{e\})$$

が得られる。  $F_1$  はフラットなので  $\text{rk}(F_1) < \text{rk}(F_1 \cup \{e\})$  であるが, 上の劣モジュラー不等式と合わせて, 不等式

$$\text{rk}(F_1 \cap F_2) < \text{rk}((F_1 \cap F_2) \cup \{e\})$$

が得られる。

$e \notin F_2$  のときも ♣ と同様にして  $\text{rk}(F_1 \cap F_2) < \text{rk}((F_1 \cap F_2) \cup \{e\})$  となるので、 $F_1 \cap F_2$  は  $M$  のフラットであることが従う。ゆえに性質 (F2) が満たされる。

性質 (F3) が満たされることを示そう。まず、フラットに関する一般的な主張を見ておこう。

**主張 1.13**  $M$  のフラット  $F$  と元  $e \in E \setminus F$  に対して、階数についての等式

$$\text{rk}(F \cup \{e\}) = \text{rk}(F) + 1$$

が成り立つ。

**主張の証明**  $F$  はフラットであるから、定義より  $\text{rk}(F) < \text{rk}(F \cup \{e\})$  である。他方、 $A = F$ ,  $B = \{e\}$  として性質 (R3) の劣モジュラー不等式に当てはめることで

$$(1.4) \quad \text{rk}(F \cup \{e\}) + \text{rk}(\emptyset) \leq \text{rk}(F) + \text{rk}(\{e\})$$

である。性質 (R1) により  $\text{rk}(\emptyset) = 0, \text{rk}(\{e\}) \leq 1$  であるから、(1.4) と合わせて不等式  $\text{rk}(F \cup \{e\}) \leq \text{rk}(F) + 1$  が得られる。不等式  $\text{rk}(F) < \text{rk}(F \cup \{e\})$  と合わせて、等式  $\text{rk}(F \cup \{e\}) = \text{rk}(F) + 1$  が従う。 ■

$M$  のフラット  $F$  と元  $e \in E \setminus F$  を固定しておく。 $G_0 := F \cup \{e\}$  と置こう。

♠  $\text{rk}(G_0 \cup \{\ell_1\}) = \text{rk}(G_0)$  となる元  $\ell_1 \in E \setminus G_0$  があれば、 $G_1 := G_0 \cup \{\ell_1\}$  と置く。この操作が続けられなくなるまで繰り返すことで、フラット  $G_m = G_{m-1} \cup \{\ell_m\}$  が得られる。

$G_m$  は  $F$  を被覆する。実際、 $F \subsetneq H \subsetneq G_m$  となる  $M$  のフラット  $H$  が存在したとすると、主張 1.13 より、 $\text{rk}(H) = \text{rk}(F) + 1 = \text{rk}(G_m)$  であるが、元  $h \in G_m \setminus H$  が存在するので  $\text{rk}(H) < \text{rk}(G_m)$  でもあり、矛盾が生じる。

以上から、 $G_m$  は  $e$  を含み、かつ  $F$  を被覆する。ゆえに性質 (F3) は満たされる。 ■

これまで階数関数、サーキット、フラットが満たす性質を述べてきたが、実はこれら性質を公理としてマトロイドを定義することもできる。次の三つの小節では、四つあるマトロイドの定義がすべて同値であることを見ていこう。

## 1.1 階数関数によるマトロイドの特徴づけ

階数関数を用いたマトロイドの定義は次の通りである。



**定義 1.14 ([MS15, p.162, Def. 4.2.3])**  $E$  を有限集合とする。 $E$  上の **マトロイド**  $M$  とは  $E$  と、関数  $\rho: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  の対  $M = (E, \rho)$  で次の三つの公理

- (R1) 任意の部分集合  $A \in 2^E$  に対して、 $\rho(A) \leq \#A$  である。
- (R2) 包含  $A \subseteq B$  のある任意の部分集合  $A, B \in 2^E$  に対して、 $\rho(A) \leq \rho(B)$  である。
- (R3) 任意の部分集合  $A, B \in 2^E$  に対して、劣モジュラー不等式

$$\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$$

が成り立つ。

を満たすものをいう。このとき、関数  $\rho$  は**階数関数**といい  $\text{rk}_M$  あるいは単に  $\text{rk}$  で表される。

**注意 1.15** 命題 1.8 より、階数関数は

- (R1) 任意の部分集合  $A \in 2^E$  に対して、 $\rho(A) \leq \#A$  である。
- (R2) 包含  $A \subseteq B$  のある任意の部分集合  $A, B \in 2^E$  に対して、 $\rho(A) \leq \rho(B)$  である。
- (R3)' 任意の元  $e \in E$  と、包含  $X \subseteq Y$  のある任意の部分集合  $X, Y \in 2^E$  に対して、不等式

$$\rho(Y \cup \{e\}) - \rho(Y) \leq \rho(X \cup \{e\}) - \rho(X)$$

を満たすものとして定義しても定義 1.14 と同値である。

命題 1.11 は、定義 1.1 の意味でのマトロイド  $M$  が、定義 1.14 の意味でのマトロイド  $(E, \text{rk}_M)$  を誘導することを示している。この逆を述べよう。

**命題 1.16**  $M = (E, \rho)$  を定義 1.14 の意味でのマトロイドとすると、**独立集合**の族  $\mathcal{I}$  を

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \text{ は } \text{rk}(I) = \#I \text{ となる } E \text{ の部分集合である}\}$$

で定めると、 $\mathcal{I}$  は定義 1.1 の公理 (I1), (I2), (I3) を満たす。したがって、対  $(E, \mathcal{I})$  は定義 1.1 の意味でのマトロイドである。

**証明** まず、公理 (R1) から  $0 \leq \text{rk}(\emptyset) \leq \#\emptyset = 0$  であるから、 $\text{rk}(\emptyset) = 0$  である。ゆえに  $\emptyset \in \mathcal{I}$  であり、 $\mathcal{I}$  は公理 (I1) を満たす。

公理 (I2) が満たされることを示そう。 $I$  を  $M$  の独立集合とし、その部分集合  $J$  を考える。公理 (R1) より、 $\text{rk}(J) \leq \#J$  であるので、逆の不等式が成立することを示す。

♣  $A = I \setminus J, B = J$  として劣モジュラー不等式 (R3) を適用すると、

$$(1.5) \quad \#I - \text{rk}(I \setminus J) \leq \text{rk}(J)$$

となる。

公理 (R2) より  $\text{rk}(I \setminus J) \leq \#(I \setminus J)$  であるから, (1.5) と合わせて,

$$\#J = \#I - \#(I \setminus J) \leq \text{rk}(J)$$

となる。ゆえに  $\text{rk}(J) = \#J$  となり,  $J$  は  $M$  の独立集合である。よって  $J$  は公理 (I2) を満たすことがわかる。

最後に, 公理 (I3) が満たされることを示そう。  $\#I > \#J$  となる  $M$  の独立集合  $I, J$  を考える。

♠  $I$  と  $J$  は  $\#I > \#J$  となる独立集合であるから,  $\text{rk}(I) > \text{rk}(J)$  である。よって公理 (R2) から  $\text{rk}(I \cup J) > \text{rk}(J)$  である。

$I \setminus J = \{f_1, \dots, f_m\}$  と書こう。

★ 劣モジュラー不等式 (R3)' より,

$$\text{rk}(I \cup J) \leq \text{rk}(\{f_2, \dots, f_m\} \cup J) + (\text{rk}(J \cup \{f_1\}) - \text{rk}(J))$$

である。

★ で行った操作を繰り返していくことで, 不等式

$$(1.6) \quad \text{rk}(I \cup J) \leq \text{rk}(J) + \sum_{i=1}^m (\text{rk}(J \cup \{f_i\}) - \text{rk}(J))$$

が得られる。 $\text{rk}(I \cup J) < \text{rk}(J)$  であつたので, (1.6) の右辺の第二項は 1 以上である。ゆえにある番号  $i$  があつて,  $\text{rk}(J \cup \{f_i\}) > \text{rk}(J) = \#J$  となる。他方, 公理 (R2) から  $\text{rk}(J \cup \{f_i\}) \leq \#J + 1$  なので,  $\text{rk}(J \cup \{f_i\}) = \#(J \cup \{f_i\})$  である。つまり,  $J \cup \{f_i\}$  は  $M$  の独立集合である。これは  $J$  が公理 (I3) を満たすことを意味する。 ■

ここまでで, 独立集合の族を与えれば階数関数が誘導でき, また逆に階数関数を与えれば独立集合の族を誘導できることがわかったので, これらの対応が互いに逆写像となることを示してこの小節を終えよう。

#### 定理 1.17 (マトロイドの定義の同値性 I)

- (1)  $M = (E, \mathcal{I})$  を定義 1.1 の意味でのマトロイド,  $M' = (E, \text{rk}_M)$  を  $M$  が誘導する定義 1.14 の意味でのマトロイドとすると,  $M = (E, \mathcal{I}(M'))$  である。
- (2)  $N = (E, \rho)$  を定義 1.14 の意味でのマトロイド,  $N' = (E, \mathcal{I}(N))$  を  $M$  が誘導する定義 1.1 の意味でのマトロイドとすると,  $N = (E, \text{rk}_{N'})$  である。

の二つが成り立つ。したがって、定義 1.1 の意味のマトロイド全体のクラスと、定義 1.14 の意味のマトロイド全体のクラスの間には自然な一対一対応がある。

**(1) の証明** マトロイド  $M'$  の独立集合の族は

$$\mathcal{I}(M') = \{I \mid I \text{ は } \text{rk}_M(I) = \#I \text{ となる } E \text{ の部分集合である}\}$$

として定められていたが、階数関数の構成より、 $\text{rk}_M(I) = \#I$  であるということは、 $I$  がマトロイド  $M$  の独立集合であることを意味しているので、 $\mathcal{I}(M') = \mathcal{I}$  が成り立つ。ゆえに  $M = (E, \mathcal{I}(M'))$  である。 ■

**(2) の証明** 関数の等式  $\rho = \text{rk}_{N'}$ 、つまり任意の部分集合  $A \in 2^E$  に対して、

$$\rho(A) = \text{rk}_{N'}(A) (\coloneqq \max\{\#I \mid I \text{ は } A \text{ に含まれる } N \text{ の独立集合である}\})$$

を示せば良い。 $n = \#A$  に関する帰納法で示す。 $n = 0$  のとき、すなわち  $A = \emptyset$  のときは、公理 (R1) から直ちに  $\rho(\emptyset) = 0 = \text{rk}_{N'}(\emptyset)$  が従う。

$n > 0$  とし、 $n$  未満の元の個数からなる  $E$  の部分集合  $A$  に対しては、 $\rho(A) = \text{rk}_{N'}(A)$  が成り立つとする。 $A$  が  $N$  の独立集合であるなら、定義から直ちに  $\rho(A) = \#A = \text{rk}_{N'}(A)$  となるので、 $A$  が  $N$  の独立集合でない場合を考える。

♣  $I$  を、 $A$  に含まれる  $N$  の独立集合のうち、元の個数が最大なものの一つとする。定義より、 $\text{rk}_{N'}(A) = \#I$  である。

$I \subsetneq A$  であるので、元  $a \in A \setminus I$  が取れる。このとき、

♠  $I$  は、 $A \setminus \{a\}$  に含まれる  $N$  の独立集合のうち元の個数が最大なものでもあるから、 $\text{rk}_{N'}(A \setminus \{a\}) = \#I$  である。

★  $I \cup \{a\}$  は  $N$  の従属集合であるから、 $\rho(I \cup \{a\}) = \rho(I)$  となる。劣モジュラ-不等式 (R3)' より、

$$\rho(A) - \rho(A \setminus \{a\}) \leq \rho(I \cup \{a\}) - \rho(I) = 0$$

であるから、公理 (R2) と合わせて、 $\rho(A) = \rho(A \setminus \{a\})$  となる。

帰納法の仮定と ♣, ♠, ★ の計算と合わせて、

$$\text{rk}_{N'}(A) \stackrel{\clubsuit}{=} \#I \stackrel{\spadesuit}{=} \text{rk}_{N'}(A \setminus \{a\}) \stackrel{\substack{\text{帰納法} \\ \text{の仮定}}}{=} \rho(A \setminus \{a\}) \stackrel{\star}{=} \rho(A)$$

となる。以上から、帰納法により任意の  $A \in 2^E$  に対して、 $\rho(A) = \text{rk}_{N'}(A)$  であることが示された。ゆえに  $N = (E, \text{rk}_{N'})$  である。 ■

## 1.2 サーキットによるマトロイドの特徴づけ

サーキットを用いたマトロイドの定義は次の通りである。

**定義 1.18**  $E$  を有限集合とする。 $E$  上のマトロイド  $M$  とは  $E$  と、 $E$  の部分集合の族  $\mathcal{C}$  の対  $M = (E, \mathcal{C})$  で次の三つの公理

- (C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  である。
- (C2) 任意の元  $C \in \mathcal{C}$  について、 $C$  に真に含まれるような  $\mathcal{C}$  の元は存在しない。
- (C3) 任意の相異なる二元  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  と任意の元  $e \in C_1 \cap C_2$  について、 $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  に含まれる  $\mathcal{C}$  の元が存在する。

を満たすものをいう。部分集合の族  $\mathcal{C}$  の元はマトロイド  $M$  の**サーキット**と呼ばれる。

定義 1.1 と定義 1.18 が同等な定義であることを示すことが目標である。まず、命題 1.10 によって、定義 1.1 の意味でのマトロイド  $M$  は定義 1.18 の意味でのマトロイド  $(E, \mathcal{C})$  を誘導することがわかる。その逆を述べよう。

**命題 1.19**  $M = (E, \mathcal{C})$  を定義 1.18 の意味でのマトロイドとすると、**独立集合**の族  $\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}$  を

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \text{ はどの } M \text{ のサーキットも含まない } E \text{ の部分集合である}\}$$

で定めると、 $\mathcal{I}$  は定義 1.1 の公理 (I1), (I2), (I3) を満たす。したがって、対  $(E, \mathcal{I})$  は定義 1.1 の意味でのマトロイドである。

**証明**  $\mathcal{I}$  が公理 (I1) を満たすことは、公理 (C1) より、つまりすべてのサーキットは空集合ではないことより従う。

公理 (I2) が満たされることを確かめよう。元  $I \in \mathcal{I}$  と、 $I$  に含まれる集合  $J$  を考える。 $J \notin \mathcal{I}$ 、つまり  $C \subseteq J$  となる  $M$  のサーキット  $C$  が存在したとすると、 $C \subseteq J \subseteq I$  であるから、矛盾が生じる。したがって  $J \in \mathcal{I}$  となり、 $\mathcal{I}$  は公理 (I2) を満たすことが示された。

最後に、 $\mathcal{I}$  が公理 (I3) を満たすことを示そう。 $n = \#(I \setminus J)$  に関する帰納法で示す。 $n = 1$  の場合、つまり  $\#I > \#J$  かつ  $I \setminus J = \{f\}$  となる  $I, J \in \mathcal{I}$  について考える。このとき、 $J \cup \{f\} = I$  であるから、特に  $J \cup \{f\} \in \mathcal{I}$  である。

$n > 1$  の場合を考える。この場合の証明は、背理法による。 $\#I > \#J$  かつ  $\#I \setminus J = n$  となる  $I, J \in \mathcal{I}$  を考える。 $I \setminus J = \{f_1, \dots, f_n\}$  と番号付けしよう。このとき、

- ♣ 各  $i \in \{1, \dots, n\}$  について、 $C_i \subseteq J \cup \{f_i\}$  となる  $M$  のサーキット  $C_i$  が存在する。 $C_i \not\subseteq J$  であることから、 $f_i \in C_i$  かつ  $C_i \setminus \{f_i\} \subseteq J$  となる。
- ♠ また、このような  $C_i$  は必ず二元以上からなる。一元であるなら、 $C_i = \{f_i\} \subseteq I$  とな

り,  $I \in \mathcal{I}$  であることに反するからである。

$e \in C_1 \setminus \{f_1\}$  を取り, 集合  $J' := (J \setminus \{e\}) \cup \{f_1\}$  を考える。このとき,  $J' \in \mathcal{I}$  である。実際,  $J' \notin \mathcal{I}$  であったとすると,  $D \subseteq J'$  となる  $M$  のサーキット  $D$  が存在するが,  $J'$  の構成から  $C_1 \neq D$  かつ  $f_1 \in C_1 \cap D$  である。よって公理 (C3) から  $J$  は  $M$  のサーキットを含むことになってしまう。これは  $J \in \mathcal{I}$  であることに反する。

★  $\#(I \setminus J') < n$  なので帰納法の仮定により,  $J' \cup \{f_1\} \in \mathcal{I}$  となる 2 以上の番号  $i$  が存在する。

$\mathcal{I}$  は公理 (I2) を満たすことは既に示していたので,  $(J' \cup \{f_1\}) \setminus \{f_1\} = (J \setminus \{e\}) \cup \{f_1\}$  は  $\mathcal{I}$  の元である。特に  $(J \setminus \{e\}) \cup \{f_1\}$  は  $C_i$  を含まない。ゆえに  $e \in C_i$  であり, 公理 (C3) によって  $(C_1 \cup C_i) \setminus \{e\}$  は,  $M$  のサーキットを含む。ところが,  $(C_1 \cup C_i) \setminus \{e\} \subseteq J' \cup \{f_1\}$  であるから  $J' \cup \{f_1\}$  も  $M$  のサーキットを含む。これは  $J' \cup \{f_1\} \in \mathcal{I}$  であることに矛盾している。

したがって帰納法により  $\mathcal{I}$  は公理 (I3) を満たすことが示された。 ■

ここまでで, 独立集合の族を与えればサーキットの族を誘導でき, また逆にサーキットの族を与えれば独立集合の族を誘導できることがわかった。この対応が互いに逆写像となることを確かめてこの節を終えよう。

#### 定理 1.20 (マトロイドの定義の同値性 II)

- (1)  $M = (E, \mathcal{I})$  を定義 1.1 の意味でのマトロイド,  $M' = (E, \mathcal{C}(M))$  を  $M$  が誘導する定義 1.18 の意味でのマトロイドとすると,  $M = (E, \mathcal{I}(M'))$  である。
- (2)  $N = (E, \mathcal{C})$  を定義 1.18 の意味でのマトロイド,  $N' = (E, \mathcal{I}(N))$  を  $N$  が誘導する定義 1.1 の意味でのマトロイドとすると,  $N = (E, \mathcal{C}(N'))$  である。

の二つが成り立つ。したがって, 定義 1.1 の意味のマトロイド全体のクラスと, 定義 1.18 の意味のマトロイド全体のクラスの間には自然な一対一対応がある。

**(1) の証明**  $M$  の独立集合の族と  $M'$  の独立集合の族が一致すること, つまり  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(M')$  が成り立つことを示せば良い。 $M$  の独立集合は  $M$  のどのサーキットも含まないので,  $M'$  の独立集合である。よって包含  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}(M')$  は成り立つ。

$\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{I}(M')$  であったと仮定しよう。すると, 元  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(M')$  を取ることができる。 $I \notin \mathcal{I}(M')$  なので,  $C \subseteq I$  なるサーキット  $C \in \mathcal{C}(M)$  が存在するが, 公理 (I2) により  $C$  は独立集合となる。これは矛盾である。よって  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(M')$  であることが示された。 ■

**(2) の証明** マトロイド  $N'$  の従属集合全体の集合族は

$$\mathcal{D}(N') = \{D \mid D \text{ はある } N \text{ のサーキットを含む } E \text{ の部分集合である}\}$$

で与えられ、 $\mathcal{C}(N')$  は  $\mathcal{D}(N')$  の極小元全体として定められているのであった。族  $\mathcal{C}$  は公理 (C2) により族  $\mathcal{D}(N')$  の極小元全体、つまり  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N')$  である。ゆえに  $N = (E, \mathcal{C}(N'))$  である。 ■

### 1.3 フラットによるマトロイドの特徴づけ

これまで、サーキットの族で定められるマトロイドや階数関数で定められるマトロイドが、独立集合の族で定められるマトロイドと同一なものであることを見てきた。もちろんフラットの族で定められるマトロイドも独立集合の族で定められるマトロイドと同一なものであるが、フラットは独立集合よりも階数関数との関係の方が明確であるので、階数関数で定められるマトロイドと比較することにしよう。

**定義 1.21**  $E$  を有限集合とする。 $E$  上の**マトロイド**とは  $E$  と、 $E$  の部分集合の族  $\mathcal{F}$  の対  $M = (E, \mathcal{F})$  で次の三つの公理

- (F1)  $E \in \mathcal{F}$  である。
- (F2) 任意の  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  に対して、 $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  である。
- (F3) 任意の  $F$  と任意の補集合の元  $e \in E \setminus F$  に対して、 $e$  を含み、かつ  $F$  を被覆するような  $G \in \mathcal{F}$  が存在する。

を満たすものをいう。このとき、部分集合の族  $\mathcal{F}$  の元はマトロイド  $M$  の**フラット**と呼ばれる。

**注意 1.22** 文献によっては、フラットの族の公理 (F3) において、元  $e \in E \setminus F$  を含み、かつ  $F$  を被覆するようなフラット  $G$  の存在性に一意性も課している場合がある。しかし、このようなフラット  $G$  の一意性は本論文で採用した公理 (F3) から導くことができる。

**命題 1.23** 定義 1.21 の意味のマトロイド  $M = (E, \mathcal{F})$  を考える。このとき、 $M$  のフラット  $F$  と元  $e \in E \setminus F$  に対して、 $e$  を含み、かつ  $F$  を被覆するような  $M$  のフラットは一意的に存在する。

**証明**  $G$  と  $G'$  が  $e$  を含み、かつ  $F$  を被覆するような  $M$  のフラットだとすると、 $F \subsetneq G \cap G' \subseteq G$  となるので、被覆性より  $G = G \cap G'$  となる。同様にして  $G' = G \cap G'$  も成り立つので  $G = G'$  であることが従う。 ■

命題 1.11 は、定義 1.14 の意味のマトロイド  $M = (E, \rho)$  が、定義 1.21 の意味のマトロイド  $(E, \mathcal{F}(M))$  を誘導することを示している。この逆を主張したい。そのために、いくつか準備をしよう。

**定義 1.24** 対  $M = (E, \mathcal{F})$  を定義 1.21 の意味のマトロイドとする。

(i) 部分集合  $A \in 2^E$  に対して, その**閉包**とはフラットの共通部分

$$\bigcap \{F \mid F \text{ は } A \text{ を含む } M \text{ のフラットである}\}$$

のことをいい  $\text{cl}_M(A)$  あるいは単に  $\text{cl}(A)$  で表す。閉包は公理 (F2) からフラットであることに注意する。

(ii) フラット  $F \in \mathcal{F}$  に対して, その**階数**とは非負整数

$$\min \{\#A \mid A \text{ は } \text{cl}(A) = F \text{ となる } E \text{ の部分集合である}\}$$

のことをいい, 記号  $\text{rk}_M(F)$  あるいは単に  $\text{rk}(F)$  で表す。

(iii) 部分集合  $A \in 2^E$  に対して, その**階数**を整数  $\text{rk}_M(\text{cl}(A))$  で定め, 記号  $\text{rk}_M(A)$  あるいは単に  $\text{rk}(A)$  で表す。 $A$  がフラットのときは,  $\text{cl}(A) = A$  であるから, (ii) の意味の階数と (iii) の意味の階数は一致する。

**補題 1.25**  $M = (E, \mathcal{F})$  を定義 1.21 の意味のマトロイドとする。 $E$  の部分集合  $A, B$  について  $\#B < \#A$  かつ  $\text{cl}_M(B) = \text{cl}_M(A)$  が成り立つとする。このとき  $\text{cl}_M(A \setminus \{a\}) = \text{cl}_M(A)$  となる元  $a \in A$  が存在する。

**証明**  $C$  を  $\text{cl}_M(C) = \text{cl}_M(A)$  を満たす部分集合の中で  $\#C$  が最小であるようなものとする。仮定より  $\#C < \#A$  である。 $C \subseteq A$  であれば元  $a \in A \setminus C$  を取れば

$$\text{cl}_M(A) = \text{cl}_M(C) \subseteq \text{cl}_M(A \setminus \{a\})$$

となるので,  $a$  が目的の性質を満たす  $A$  の元である。

$C \not\subseteq A$  のときを考える。元  $c \in C \setminus A$  を一つとると  $\#C$  の最小性より

$$\text{cl}_M(C \setminus \{c\}) \subsetneq \text{cl}_M(C) = \text{cl}_M(A)$$

であり特に  $A \not\subseteq \text{cl}_M(C \setminus \{c\})$  であるから元  $d \in A \setminus \text{cl}_M(C \setminus \{c\})$  を取ることができる。すると  $\text{cl}_M((C \setminus \{c\}) \cup \{d\}) = \text{cl}_M(A)$  であり  $C$  を  $(C \setminus \{c\}) \cup \{d\}$  に置き換えて同様の議論を繰り返していくことで  $C \subseteq A$  の場合に帰着する。 ■

**補題 1.26**  $M = (E, \mathcal{F})$  を定義 1.21 の意味のマトロイドとする。 $M$  のフラット  $F, G$  について,  $G$  が  $F$  を被覆するとき,  $\text{rk}(F) + 1 = \text{rk}(G)$  が成り立つ。

**証明**  $A$  を, 閉包が  $F$  となる  $E$  の部分集合の中で元の個数が最小のものの一つとする。 $F \subsetneq G$  であるから, 元  $b \in G \setminus F$  を取ることができる。 $G$  は  $F$  を被覆するので,  $G = \text{cl}(A \cup \{b\})$  が成立する。

♣  $A \cup \{b\}$  は、閉包が  $G$  となる  $E$  の部分集合の中で元の個数が最小のものである。そうでなかったとすると補題 1.25 より  $\text{cl}((A \cup \{b\}) \setminus \{a\}) = G$  となる  $a \in A$  が存在する。 $A$  の取り方から  $\text{cl}(A \setminus \{a\}) \subsetneq F \subsetneq G$  であるが、他方  $\text{cl}(A \setminus \{a\}) \leq \text{cl}((A \setminus \{a\}) \cup \{b\}) = G$  となるので、矛盾が生じる。

したがって、 $M$  の階数関数の定義より  $\text{rk}(G) = \#A + 1 = \text{rk}(F) + 1$  が成り立つ。 ■

この節の目的からは外れるが、この補題によりフラットの束やマトロイドが誘導する扇を調べる際に重要になる系が得られる。

**系 1.27**  $M$  をマトロイド（今の文脈では、定義 1.21 の意味のマトロイドと考える）とする。このとき、 $F \subsetneq G$  を満たすフラット  $F, G \in \mathcal{F}(M)$  に対して、次が成り立つ。二つのフラットの列

$$\mathcal{S}_1 = (F = F_0 \leq F_1 \leq \cdots \leq F_r = G),$$

$$\mathcal{S}_2 = (F = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_s = G)$$

を取ると、必ず  $r = s$  となる（記号  $\leq$  は被覆を表すことに注意する（定義 1.21 (F3) 参照））。

**証明** 主張にあるようなフラットの列  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  を取る。フラットの列  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  に対して、補題 1.26 を逐次的に用いることで、それぞれ

$$\text{rk}(G) = \text{rk}(F) + r, \quad \text{rk}(G) = \text{rk}(F) + s$$

と計算でき、 $r = s$  でなければならない。 ■

本題に戻ろう。ここまでの準備で、次の命題が示せる。

**命題 1.28**  $M = (E, \mathcal{F})$  を、定義 1.21 の意味のマトロイドとする。このとき、定義 1.24 で定めた階数関数  $\text{rk}$  は、定義 1.14 の公理 (R1), (R2), (R3) を満たす。したがって、対  $(E, \text{rk})$  は定義 1.14 の意味のマトロイドである。

**証明** まずはじめに、 $\text{rk}$  の定義より、任意の  $E$  の部分集合  $A$  について

$$\begin{aligned} \text{rk}(A) &\stackrel{\text{定義}}{=} \min\{\#B \mid B \text{ は } \text{cl}(B) = \text{cl}(A) \text{ となる } E \text{ の部分集合である}\} \\ &\leq \#A \end{aligned}$$

となるので、 $\text{rk}$  は公理 (R1) を満たす。

公理 (R2) について考える。 $A \subseteq B$  を満たす部分集合  $A, B \in 2^E$  を取る。閉包の定義から直ちに  $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$  となる。もし  $\text{cl}(A) = \text{cl}(B)$  なら、 $\text{rk}(A) = \text{rk}(\text{cl}(A)) = \text{rk}(\text{cl}(B)) = \text{rk}(B)$  と計算できるので、この場合については公理 (R2) は満たされる。 $\text{cl}(A) \subsetneq \text{cl}(B)$  の場合を考えよう。



♣ 公理 (F3) を逐次的に用いることで、フラットの列

$$\text{cl}(A) \leq F_1 \leq \cdots \leq F_{r-1} \leq F_r = \text{cl}(B)$$

が得られる。

補題 1.26 により  $\text{rk}(\text{cl}(B)) = \text{cl}(A) + r$  となる。ゆえに  $\text{rk}(A) < \text{rk}(B)$  である。したがって、 $\text{rk}$  は公理 (R2) を満たす。

公理 (R3) について考える。注意 1.15 から、公理 (R3)' が満たされること、すなわち任意の元  $e \in E$  と、包含  $X \subseteq Y$  のある任意の部分集合  $X, Y$  に対して劣モジュラー不等式

$$\text{rk}(Y \cup \{e\}) - \text{rk}(Y) \leq \text{rk}(X \cup \{e\}) - \text{rk}(X)$$

が成立することを確かめればよい。 $X \subseteq Y$  となる  $X, Y \in 2^E$  と  $e \in E$  を取る。

♠  $\text{cl}(X \cup \{e\}) \neq \text{cl}(X)$  となるのは、 $\text{cl}(X \cup \{e\})$  が  $\text{cl}(X)$  を被覆するとき、かつそのときに限るので、補題 1.26 より

$$\text{rk}(X \cup \{e\}) - \text{rk}(X) = \begin{cases} 1, & (\text{cl}(X \cup \{e\}) \neq \text{cl}(X) \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{cl}(X \cup \{e\}) = \text{cl}(X) \text{ のとき}) \end{cases}$$

また、 $X$  を  $Y$  に置き換えても同様のことが成り立つ。

$\text{rk}(Y \cup \{e\}) - \text{rk}(Y) \leq 1$  は常に成立するので、♠ より  $\text{cl}(X \cup \{e\}) \neq \text{cl}(X)$  の場合は劣モジュラー不等式は成立する。 $\text{cl}(X \cup \{e\}) = \text{cl}(X)$  のとき、 $e \in \text{cl}(X)$  であるから  $e \in \text{cl}(Y)$  でもあるので、 $\text{cl}(Y \cup \{e\}) = \text{cl}(Y)$  となる。ゆえに  $\text{rk}(Y \cup \{e\}) - \text{rk}(Y) = 0$  であり、この場合も劣モジュラー不等式は成立する。したがって、 $\text{rk}$  は公理 (R3)' を満たす。 ■

以上で、フラットの族を与えれば階数関数が誘導でき、また逆に階数関数を与えればフラットの族を誘導できることがわかったので、これらの対応が互いに逆写像となることを示そう。

**定理 1.29 (マトロイドの定義の同値性 III)** (1)  $M = (E, \mathcal{F})$  を定義 1.21 の意味でのマトロイド、 $M' = (E, \text{rk}_M)$  を  $M$  が誘導する定義 1.14 の意味でのマトロイドとすると、 $M = (E, \mathcal{F}(M'))$  である。

(2)  $N = (E, \rho)$  を定義 1.14 の意味でのマトロイド、 $N' = (E, \mathcal{F}(N))$  を  $N$  が誘導する定義 1.21 の意味でのマトロイドとすると、 $N = (E, \text{rk}_{N'})$  である。

の二つが成り立つ。したがって、定義 1.21 の意味のマトロイド全体のクラスと、定義 1.14 の意味のマトロイド全体のクラスの間には自然な一対一対応がある。

(1) の証明 マトロイド  $M'$  のフラットの族は

$$\mathcal{F}(M') = \left\{ F \mid \begin{array}{l} F \text{ は } E \text{ の部分集合で, 任意の } e \in E \setminus F \text{ に対して,} \\ \text{rk}_M(F) < \text{rk}_M(F \cup \{e\}) \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

で与えられていたが, 不等式  $\text{rk}_M(F) < \text{rk}_M(F \cup \{e\})$  が成り立つことは, 包含  $\text{cl}_M(F) \subsetneq \text{cl}_M(F \cup \{e\})$  が成り立つことと同値である。後者の包含が任意の元  $e \in E \setminus F$  に対して成り立つということは,  $E \setminus F \subseteq E \setminus \text{cl}_M(F)$  が成り立つこと, すなわち  $F = \text{cl}_M(F)$  であることと同値であり, したがって, 等式  $\mathcal{F}(M') = \mathcal{F}$  が成り立つことが従う。ゆえに  $M = (E, \mathcal{F}(M'))$  である。 ■

(2) の証明 任意の部分集合  $A \in 2^E$  に対して,  $\rho(A) = \text{rk}_{N'}(A)$  となることを示せば良い。部分集合  $A \in 2^E$  に対して,  $\text{rk}_{N'}(A) = \text{rk}_{N'}(\text{cl}_N(A))$  と定義していたことを思い出す。階数関数  $\rho$  についても, 同様の等式が成立することをみよう。

**主張 1.30** 任意の部分集合  $A \in 2^E$  に対して 等式

$$\rho(A) = \rho(\text{cl}_N(A))$$

が成り立つ。

**主張の証明**  $\text{cl}_N(A) = A$  ならこの等式は自明であるため,  $\text{cl}_N(A) \neq A$  とし,  $\text{cl}(A) \setminus A = \{a_1, \dots, a_m\}$  と書こう。

- ♣  $A$  は  $N$  のフラットではないので,  $\rho(A \cup \{a\}) = \rho(A)$  となる  $a \in E \setminus A$  が存在する。
- ♠ この  $a$  は  $\text{cl}(A)$  に含まれる。そうでなければ, 公理 (R3)' の劣モジュラー不等式より

$$\rho(\text{cl}(A) \cup \{a\}) - \rho(\text{cl}(A)) \leq \rho(A \cup \{a\}) - \rho(A) = 0$$

であるから, 公理 (R1) と合わせて  $\rho(\text{cl}(A) \cup \{a\}) = \rho(\text{cl}(A))$  である。これは  $\text{cl}(A)$  が  $N$  のフラットであることに矛盾する。必要なら番号を並べ変えて,  $a = a_1$  としてよい。

$A \cup \{a_1\}$  も  $N$  のフラットではないので, ♣, ♠ の議論を繰り返し行うことができ,

$$\rho(A) = \rho(A \cup \{a_1, \dots, a_m\}) = \rho(\text{cl}(A))$$

となる。 ■

本題の証明に戻ろう。

- ♣  $N$  における閉包が  $\text{cl}_N(A)$  となる  $E$  の部分集合の中で, 元の個数が最小であるものを一つ取り,  $B$  で表すことにすると,  $\text{rk}_{N'}$  の定義より  $\text{rk}_{N'}(A) = \#B$  である。

主張 1.30 より,

$$\rho(A) = \rho(\text{cl}_N(B)) = \rho(B) \leq \#B = \text{rk}_{N'}(A)$$

となる。他方, 定理 1.17 から,  $\rho(I) = \#I$  となる  $A$  の部分集合  $I$  を用いて  $\rho(A) = \#I$  とできる。このとき,

♠  $\text{cl}_N(I) = \text{cl}_N(A)$  である。そうでなければ, 補題 1.26 から  $\rho(A) > \rho(I) = \#I$  となり, 矛盾が生じる。

ゆえに,  $\rho(A) = \#I \geq \text{rk}_{N'}(A)$  であり,  $\rho(A) = \text{rk}_{N'}(A)$  が成立する。以上から,  $N = (E, \text{rk}_{N'})$  であることが示された。 ■

## 1.4 マトロイドの特徴付けのまとめ

マトロイドの同値性 I, II, III より,

- 一次独立集合を用いたマトロイドの定義 (定義 1.1)
- 階数関数を用いたマトロイドの定義 (定義 1.14)
- サークットを用いたマトロイドの定義 (定義 1.18)
- フラットを用いたマトロイドの定義 (定義 1.21)

がすべて同値なマトロイドの特徴づけであることがわかった。以降の文脈では, 有限集合  $E$  上のマトロイド  $M$  とは, これら定義のいずれかの意味でのマトロイドであることとし, 区別しないことにする。

ここで, 階数関数やサーキットなどの特徴付けについてまとめておこう。

### 階数関数の特徴付け

**命題 1.31 (階数関数の独立集合による特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき任意の  $A \in 2^E$  について,  $\text{rk}(A) = \max\{\#I \mid I \text{ は } A \text{ に含まれる } M \text{ の独立集合である}\}$  である。

**証明** これは定義 1.4 (iii) である。 ■

**命題 1.32 (階数関数のフラットの鎖による特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき任意の  $A \in 2^E$  について,  $\text{cl}(A)$  と最小のフラット  $\text{cl}(\emptyset)$  の間のフラットの極大鎖  $\text{cl}(\emptyset) = F_0 \triangleleft F_1 \triangleleft \cdots \triangleleft F_r = \text{cl}(A)$  を取ると,  $\text{rk}(A) = r$  である。

**証明** 補題 1.26 から従う。 ■

## 独立集合の特徴付け

**命題 1.33 (独立集合のサーキットによる特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき  $I \in 2^E$  が  $M$  の独立集合となるのは、 $I$  がどの  $M$  のサーキットも含まないとき、かつそのときに限る。

**証明** サーキットは従属集合のうち包含について極小なものとして定義していた (1.4 (ii)) ので主張は従う。 ■

**命題 1.34 (独立集合の階数関数による特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき  $I \in 2^E$  が  $M$  の独立集合となるのは、 $\text{rk}(I) = \#I$  であるとき、かつそのときに限る。

**証明** 部分集合  $A$  の階数は、 $A$  に含まれる独立集合のうち元の個数が最大なものの元の個数として定義していた (定義 1.4 (iii)) ので主張は従う。 ■

## サーキットの特徴付け

**命題 1.35 (サーキットの独立集合による特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき  $C \in 2^E$  がサーキットであるのは、 $C$  が独立集合でなく、かつ  $C$  のどの真部分集合も独立集合であるとき、かつそのときに限る。

**証明** 定義 1.4 (ii) を言い換えただけである。 ■

**命題 1.36 (サーキットの階数関数による特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき  $C \in 2^E$  がサーキットであるのは、任意の  $e \in C$  に対して  $\text{rk}(C \setminus \{e\}) = \#C - 1$  となるとき、かつそのときに限る。

**証明** サーキットは従属集合の族の中で包含について極小なものとして定義していたことと、命題 1.34 から従う。 ■

## フラットの特徴付け

**命題 1.37 (フラットの階数関数による特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき  $F \in 2^E$  がフラットであるのは、任意の  $e \in E \setminus F$  について  $\text{rk}(F) < \text{rk}(F \cup \{e\})$  となるとき、かつそのときに限る。

**証明** これは定義 1.4 (iv) である。 ■

**命題 1.38 (フラットのサーキットによる特徴付け)**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。このとき部分集合  $F$  が  $M$  のフラットであるのは、任意のサーキットに対して  $\#(C \setminus F) \neq 1$  となるとき、かつそのときに限る。

**証明** あるサーキットに対して、 $\#(C \setminus F) = 1$  となる、すなわち  $C \setminus F = \{e\}$  となる場合を考えよう。このとき、 $C \setminus \{e\} \subseteq F$  であるから劣モジュラー不等式 (R3)' より

$$\text{rk}(F \cup \{e\}) - \text{rk}(F) \leq \text{rk}(C) - \text{rk}(C \setminus \{e\}) = 0$$

となるので、等式  $\text{rk}(F \cup \{e\}) = \text{rk}(F)$  が成り立つ。これは  $F$  がフラットでないことを意味する。

逆に  $F$  がフラットではなかったとすると、 $\text{rk}(F \cup \{e\}) = \text{rk}(F)$  となる元  $e \in E \setminus F$  が存在する。 $\#I = \text{rk}(F)$  となる独立集合  $I \subseteq F$  に対して、 $I \cup \{e\}$  は従属集合となるので、 $C \subseteq I \cup \{e\}$  となるサーキット  $C$  が存在する。このようなサーキットは元  $e$  を含まなければならぬので、 $C \setminus F = \{e\}$  となる。したがって同値性が示された。 ■

## 2 マトロイドのフラットの束

定義 1.4 において、フラット全体の族  $\mathcal{F}(M)$  が誘導する半順序集合  $\mathcal{L}_M = (\mathcal{F}(M), \subseteq)$  が、束であることを主張していた。この節では、この主張を示そう。まず、束の定義について思い出しておこう。

**定義 2.1 ([Jac85, p.457])**  $(S, \leq)$  を半順序集合とする。

- (i) 部分集合  $A \subseteq S$  の**上界**とは、すべての元  $a \in A$  に対して  $u \geq a$  となるような元  $u \in S$  のことをいう。
- (ii) 部分集合  $A \subseteq S$  の**最小上界**とは、部分集合  $A$  の上界の中で最小な元のことをいう。  
半順序  $\leq$  の反対称律から、最小上界は存在すれば、ただ一つである。
- (iii) 部分集合  $A \subseteq S$  の**下界**とは、すべての元  $a \in S$  に対して  $u \leq a$  となるような元  $u \in S$  のことをいう。
- (iv) 部分集合  $A \subseteq S$  の**最大下界**とは、部分集合  $A$  の下界の中で最大な元のことをいう。  
半順序  $\leq$  の反対称律から、最小上界は存在すれば、ただ一つである。
- (v) 半順序集合  $(S, \leq)$  が**束**であるとは、任意の 2 元部分集合  $\{a, b\} \subseteq S$  が最小上界と最大下界をもつときをいう。

束  $(S, \leq)$  の二つの元  $a, b \in S$  に対して、最小上界のことを**結び**と呼び、記号  $a \vee b$  で表す。また、最大下界のことを**交わり**と呼び、記号  $a \wedge b$  で表す。

束を構成する 1 つの方法は、集合  $S$  の部分集合族  $\mathcal{S} \subseteq 2^E$  が誘導する半順序集合  $(S, \subseteq)$  が束となるように  $\mathcal{S}$  を設定することが挙げられるだろう。次の命題は、この半順序集合が束となるための十分条件を与えている。

**命題 2.2**  $S$  を集合とする。 $S$  の部分集合からなる族  $\mathcal{S} \subseteq 2^S$  を考える。 $\mathcal{S}$  に属するような任意の部分集合の族  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$  について、 $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{S}$  が成り立てば、半順序集合  $(S, \subseteq)$  は束である。

**証明** 二つの元  $A, B \in \mathcal{S}$  を固定する。すると集合  $S$  に課した性質から  $A \cap B \in \mathcal{S}$  であり、これが集合  $\{A, B\} \subseteq \mathcal{S}$  の最大下界であることを確かめるのは易しい。次に、 $A \cup B$  の閉包

$$\text{cl}(A \cup B) := \bigcap \{C \in \mathcal{S} \mid A \cup B \subseteq C\}$$

を考える。 $S$  に課した性質から  $\text{cl}(A \cup B) \in \mathcal{S}$  であり、その構成の仕方から集合  $\{A, B\}$  の上界であり、これが最小上界となる。実際、 $D \in \mathcal{S}$  を  $\{A, B\}$  の上界とすると、 $D \in \{C \in \mathcal{S} \mid A \cup B \subseteq C\}$  であるから、 $\text{cl}(A \cup B) \subseteq D$  である。したがって、半順序集合  $(S, \subseteq)$  が束であることが示された。 ■

**系 2.3** マトロイド  $M$  のフラット全体の族が定める半順序集合  $\mathcal{L}_M$  は束である。

**証明** フラットの公理 (F2) は、 $\mathcal{L}_M$  が命題 2.2 の仮定を満たすことを保証するので、 $\mathcal{L}_M$  は束である。 ■

この命題を踏まえていくつか具体例をみていこう。

**例 2.4** (i) 有限集合  $L = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  に対して、半順序  $\leq$  を

$$\{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_5), (a_1, a_4), (a_4, a_5)\}$$

で生成されるものとする、 $(L, \leq)$  は束である。有限半順序集合が与えられたとき、**ハッセ図**と呼ばれる図を用いて図示することがある。ハッセ図は頂点と辺からなる。頂点は台集合の元に対応し、元  $y$  が元  $x$  を被覆するときに、 $y$  に対応する頂点が  $x$  に対応する頂点よりも上になるように配置し、2 頂点を辺で繋げる。例えば、(i) の例におけるハッセ図は図 1 のようになる。

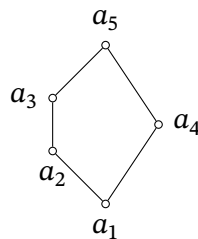


図 1 束  $(L, \leq)$  のハッセ図

- (ii)  $S$  を集合とする。このとき命題 2.2 より半順序集合  $(2^S, \subseteq)$  は束である。
- (iii) 群  $G$  に対して、 $\mathcal{g}$  を  $G$  の部分群全体からなる集合とする。このとき命題 2.2 より半順序集合  $(\mathcal{g}, \subseteq)$  は束である。
- (iv) 系 2.3 よりマトロイド  $M$  に対して半順序集合  $\mathcal{L}_M$  は束であることがわかったが、より具体的にマトロイドを与え、そのフラットの束のハッセ図を描いてみよう。体  $K$  を任意に固定し、線形空間  $K^3$  の四つのベクトル  $f_1, f_2, f_3, f_4$  を

$$f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1), f_4 = (1, 1, 0)$$

として体  $K$  上の線形マトロイド  $M$  を与えると、そのフラットの束  $\mathcal{L}_M$  のハッセ図は図 2 は次のようになる。

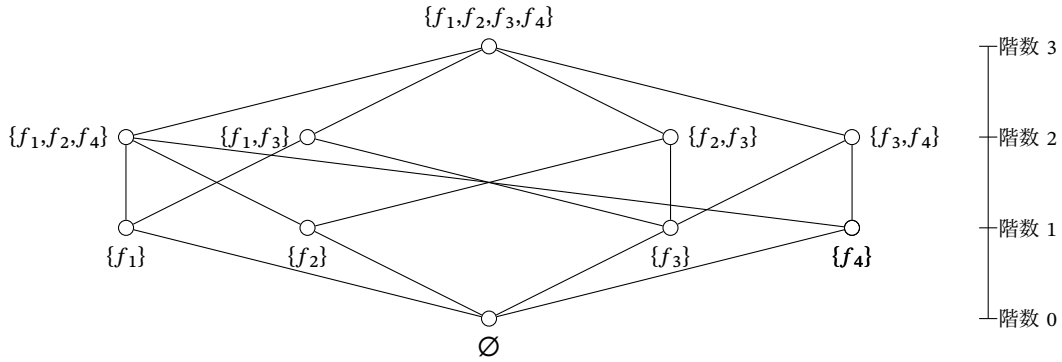


図 2 フラットの束  $\mathcal{L}_M$  のハッセ図

ハッセ図 2 にも書き加えたように、フラットには階数が定義されており、系 1.27 からフラットの極大列の長さが一定であるので、階数を用いて束を次数付けすることができる。他方、(i) で考えた束では、 $a_1$  と  $a_5$  の間の極大列が  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_5$  と  $a_1 \leq a_4 \leq a_5$  の二つがあり、それぞれ長さが 3, 2 となっているのでこのような次数付けはできない。

**注意 2.5** 例 2.4 の (ii) において、 $S$  が有限集合の場合を考えると、対  $(S, 2^S)$  は明らかにフラットの族で定義されるマトロイドであり、一様マトロイドと呼ばれるのであった。また、例 2.4 の (iii) の場合についても、 $G$  が有限群のときには対  $(G, \mathcal{g})$  はフラットの族で定義されるマトロイドである。

### 3 マトロイドの同型

マトロイドは有限集合に構造を与えることで定義していたので、もちろん集合として異なる有限集合上のマトロイドを考えれば、マトロイド全体のクラス内では異なる対象である。また、同じ底集合上のマトロイドであっても、添え字付けの仕方の違いから、構造は

ほとんど同じであっても異なる対象となる場合がある。この節では、マトロイドの間の同型の概念を導入することで、この形式的な差異を解消しよう。

**定義 3.1**  $M_1$  を有限集合  $E_1$  上のマトロイド、 $M_2$  を有限集合  $E_2$  上のマトロイドとする。 $M_1$  から  $M_2$  への**同型射**とは、全単射  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  であって、自然な全単射  $2^\varphi: 2^{E_1} \rightarrow 2^{E_2}$  が一次独立集合の族の間の全単射  $\mathcal{I}(M_1) \rightarrow \mathcal{I}(M_2)$  を誘導するものをいう。また、同型射が  $M_1$  と  $M_2$  の間に存在するとき、 $M_1$  と  $M_2$  は**同型**であるという。

**注意 3.2** 同型射の定義を、全単射  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  であって誘導する全単射  $2^\varphi: 2^{E_1} \rightarrow 2^{E_2}$  が

- (i) サーキットの族の間の全単射  $\mathcal{C}(M_1) \rightarrow \mathcal{C}(M_2)$  を誘導する、
- (ii) フラットの族の間の全単射  $\mathcal{F}(M_1) \rightarrow \mathcal{F}(M_2)$  を誘導する、
- (iii) 関数の等式  $\text{rk}_{M_1} = \text{rk}_{M_2} \circ 2^\varphi$

のいずれかを満たすものとしても同値である。すなわち、定義 1.1 の意味のマトロイド全体がなす圏（射は定義 3.1 の同型射のみとする）と、定義 1.18 の意味のマトロイド全体がなす圏、定義 1.14 の意味のマトロイド全体がなす圏、定義 1.21 の意味のマトロイド全体がなす圏はすべて圏同型である。

同型射の例を見ていこう。

### 例 3.3

- (i)  $\#E_1 = \#E_2$  なる有限集合  $E_1, E_2$  を考える。このとき、任意の全単射  $E_1 \rightarrow E_2$  は一様マトロイドの同型射  $(E_1 \text{ 上の一様マトロイド}) \rightarrow (E_2 \text{ 上の一様マトロイド})$  を誘導する。
- (ii)  $M$  を例 2.4 (iv) の線形マトロイドとする。このとき、全単射  $\varphi: f_i \mapsto i$  は  $\{1, 2, 3, 4\}$  上のマトロイド  $M'$  を誘導する（一次独立集合の族を  $2^\varphi(\mathcal{I}(M))$  で与える）。構成から、 $M$  と  $M'$  は同型である。同様に、全単射  $\varphi: f_1 \mapsto 2, f_2 \mapsto 3, f_3 \mapsto 4, f_4 \mapsto 1$  は  $\{1, 2, 3, 4\}$  上のマトロイド  $M''$  を誘導する。したがって、 $M'$  と  $M''$  は同型なマトロイドであるが、フラットの束は次のようになる（図 3、図 4）。

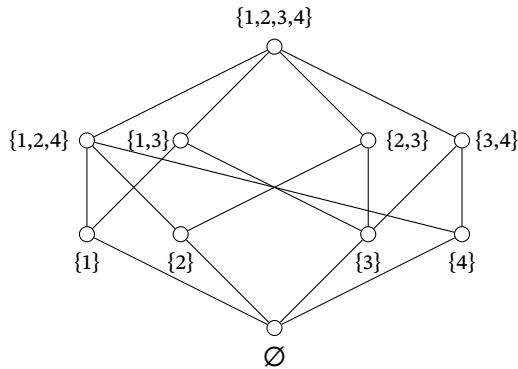


図 3 フラットの束  $\mathcal{L}_{M'}$  のハッセ図

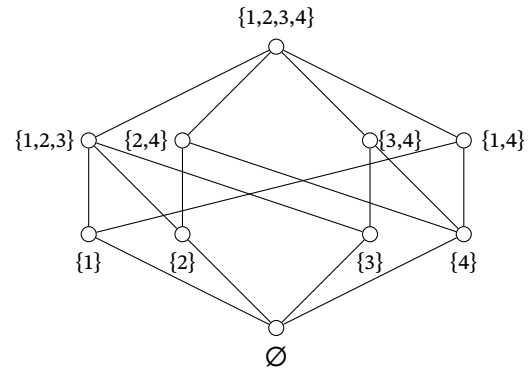


図 4 フラットの束  $\mathcal{L}_{M''}$  のハッセ図



一般に、集合の間の全単射  $f: A \rightarrow B$  が自然に誘導する全単射  $2^f: 2^A \rightarrow 2^B$  は半順序集合の同型  $2^f: (2^A, \subseteq) \xrightarrow{\sim} (2^B, \subseteq)$  であるので、上の状況における  $\mathcal{L}_{M'}$  と  $\mathcal{L}_{M''}$  は束として同型である。

**定義 3.4** 例 3.3 より、 $n$  元集合上の一様マトロイドは同型を除いて一意に定まる。このことを踏まえ、 $n$  元集合上の一様マトロイドを  $\mathbb{U}_n$  で表すこととする。

## 4 線形マトロイド

線形マトロイドとはベクトル  $E$  に対して、その独立関係を用いて定められるマトロイドのことをいうのであった（命題 1.3 を見よ）。ここで今一度線形代数の概念とマトロイドの概念の対応を見ておこう。

**命題 4.1**  $E$  を  $K$  上の線形空間  $V$  の有限集合とし、 $M$  をその線形マトロイドとする。

- (1)  $M$  の独立集合とは、一次独立な部分集合のことである。ただし、空集合も一次独立と考える。
- (2)  $M$  のサーキットとは、一次従属かつどの真部分集合も一次独立となるような部分集合のことである。すなわち、サーキット  $C \in 2^E$  に対して、非自明な一次関係が存在し、かつ一次関係  $\sum_{v \in C} \lambda_v v = 0$  が非自明であれば、すべての係数  $\lambda_v$  は非零となる。
- (3)  $M$  の階数関数とは、 $2^E$  上の関数  $A \mapsto \dim_K(\text{Span}_K(A))$  のことである。
- (4)  $M$  のフラットとは、 $\text{Span}_K(E)$  の部分空間と  $E$  との共通部分のことである。

**証明** (1) は線形マトロイドの定義そのものであり、(2), (3) はそれぞれサーキットの定義、階数関数の定義（あるいは、命題 1.35, 命題 1.31）から直ちに従う。(4) は系 1.6 である。

■

このように、線形マトロイドは抽象度の高いマトロイドに対して自然な解釈をもたらすもので、マトロイド理論において最も重要な概念である。

### 4.1 マトロイドの実現可能性

前節にて線形マトロイドが重要であると述べたが、線形マトロイドと同型なマトロイドも非常に重要な対象であり、これから本論文でも中心的に扱っていくものとなる。このような対象の正確な特徴づけは次の通りである。

**定義 4.2** マトロイドが体  $K$  上**実現可能**であるとは、体  $K$  上の線形空間  $V$  とその有限部分集合  $E$  があって、その線形マトロイドと同型となることをいう。

これまでに見たマトロイドで、実現可能なものを述べておこう。

### 例 4.3

- (i) 例 3.3 (ii) のマトロイド  $M'$  は任意の体  $K$  上で実現可能である。
- (ii) 一様マトロイド  $U_n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  は任意の体上実現可能である。実際,  $n = 0$  の場合は  $U_0$  は空集合上の唯一のマトロイドであるが, これはベクトルを与えない線形マトロイドと等しい。 $n > 0$  の場合は,  $K$  を任意の体とするとき  $K^n$  の標準基底  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  で与えられる線形マトロイドが一様マトロイドであるから, 特に  $K$  上実現可能である。

実現可能性は, 体の標数に強く影響を受ける。有名な例は, 次に述べるファノ (Fano) 平面であろう。

**定義 4.4 (ファノ平面, [MS15, p.169, Exa. 4.2.15])**  $\mathbb{F}_2$  を 2 元体とする。 $(\mathbb{F}_2)^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  は**ファノ平面**と呼ばれる。七元集合  $E = \{0, 1, \dots, 6\}$  に対して, ファノ平面のベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= (1, 0, 0), \mathbf{b}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{b}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (0, 1, 1), \\ \mathbf{b}_4 &= (0, 0, 1), \mathbf{b}_5 = (1, 0, 1), \mathbf{b}_6 = (1, 1, 1) \in (\mathbb{F}_2)^3 \end{aligned}$$

で定まる線形マトロイドを用いてマトロイドの構造を入れる。この  $E$  上のマトロイドは**ファノマトロイド**と呼ばれる。ファノマトロイドは 14 個のサーキットをもつ。

- 七個の三元サーキット:  
 $\{0, 1, 2\}, \{0, 3, 6\}, \{0, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 5, 6\}$
- 七個の四元サーキット:  
 $\{0, 1, 3, 4\}, \{0, 1, 5, 6\}, \{0, 2, 3, 5\}, \{0, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}$

特に, 三元のサーキットはファノ平面上の直線を表し, 図 5 のように, 三点を結ぶ六つの直線と三点を結ぶ一つの円として図示されることがある。

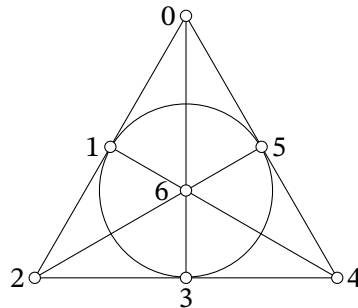


図 5 ファノ平面上の七つ直線

**命題 4.5** ファノマトロイドは標数 2 の体上実現可能であるが、それ以外の標数の体上では実現可能ではない。

**証明** 構成よりファノマトロイドは  $\mathbb{F}_2$  上実現可能なので、標数 2 の任意の体上実現可能である。

ファノマトロイドを実現するような体は標数が 2 であることを示そう。体  $K$  上の線形空間  $V$  のベクトル  $f_0, f_1, \dots, f_6$  が定める線形マトロイドがファノマトロイドと同型だとしよう。 $\{0, 2, 4\}$  はファノマトロイドの極大な独立集合であるから、 $f_0, f_2, f_4$  は  $\text{Span}_K(\{f_0, \dots, f_6\})$  の基底である。よって

- ♣  $V = K^3$ ,  $f_0 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$ ,  $f_4 = (0, 0, 1)$  としてよい。 $\{0, 1, 2\}$  がサーキットであることから、 $f_1 = (1, a_1, 0)$ ,  $a_1 \in K^*$  としてよい。同様に、 $\{2, 3, 4\}, \{0, 4, 5\}$  がサーキットであることから、 $f_3 = (0, 1, a_3)$ ,  $f_5 = (1, 0, a_5)$ ,  $a_3, a_5 \in K^*$  としてよい。 $\{2, 5, 6\}$  がサーキットであることから、 $f_6 = (1, b, a_5)$ ,  $b \in K^*$  としてよい。
- ♠  $\{1, 4, 6\}$  がサーキットであることから、 $f_6 = (1, a_1, a_5)$  となることがわかる。さらに  $\{0, 3, 6\}$  がサーキットであることから、 $a_5 = a_1 a_3$  である。

以上のことをまとめると、

$$\begin{aligned} f_0 &= (1, 0, 0), f_1 = (1, a_1, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 1, a_3), f_4 = (0, 0, 1) \\ f_5 &= (1, 0, a_1 a_3), f_6 = (1, a_1, a_1 a_3), a_1, a_3 \in K^* \end{aligned}$$

が定める線形マトロイドはファノマトロイドと同型である。さて、 $\{1, 3, 5\}$  はサーキットであるから、非自明な一次関係

$$\lambda_1(1, a_1, 0) + \lambda_3(0, 1, a_3) + \lambda_5(1, 0, a_1 a_3) = \mathbf{0}, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_5 \in K^*$$

が存在する。これより、 $2\lambda_1 = 0$  となるが、 $\lambda_1 \neq 0$  であるから  $2 = 0$  でなければならない。つまり、体  $K$  の標数は 2 である。 ■

線形マトロイドを考える際、台集合とするベクトルの中に零ベクトルが含まれていてもよいのであった。零ベクトルはマトロイド理論においてはループと呼ばれる概念に相当するものである。

**定義 4.6**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。元  $e \in E$  がループであるとは、 $\{e\}$  が  $M$  のサーキットであるようなときをいう。

**命題 4.7**  $V$  を  $K$  上の線形空間とし、 $M$  を有限集合  $E \subseteq V$  で定まる線形マトロイドとする。このとき、 $f \in E$  がループとなるのは、 $f = 0$  であるとき、かつそのときに限る。

**証明**  $\{f\}$  がサーキットであるということは、ある係数  $\lambda \in K^*$  があって  $\lambda \cdot f = 0$  となることと同値である。後者は  $f = 0$  であることと同値である。 ■

**系 4.8** マトロイドがループを二つ以上もつなら、それはいかなる体上でも実現可能でない。

**証明** 命題 4.7 より線形マトロイドのループの個数は高々一つである。したがってループを二つ以上もつマトロイドは線形マトロイドと同型になり得ない。 ■

## 4.2 グラフ的マトロイド

ループや多重辺の有無に関わらず、任意のグラフは自然にマトロイドを誘導することができる。独立集合の族やフラットの族を与える方法でグラフからマトロイドを誘導することはできるが、ここでは簡潔に記述ができるサーキットの族を与えることでマトロイドを誘導しよう。

**定義 4.9** ([MS15, p.168, Exa. 4.2.14])  $G$  をグラフとする。 $E(G)$  の部分集合族  $\mathcal{C}$  を

$$\mathcal{C} = \{E(H) \mid H \text{ は } G \text{ の部分閉路グラフである}\}$$

で定める。対  $(E, \mathcal{C})$  を **グラフ的マトロイド** といい、 $M_G$  で表す。

$M_G$  がマトロイドであることを示すために、二つの補題を用意する。一つ目の補題は、 $\mathcal{C}$  が公理 (C2) を満たすことを示すために用いる。

**補題 4.10** 閉路グラフは自身以外に閉路グラフを部分グラフとしてもたない。

**証明**  $H$  を  $n$  辺からなる閉路グラフ、 $L$  を  $m$  辺からなる閉路グラフとし、さらに  $L$  は  $H$  の部分グラフであるとする。 $H$  と  $L$  は閉路グラフであるから、

$$\begin{aligned} \psi_H(e_1) &= \{v_1, v_2\}, \psi_H(e_2) = \{v_2, v_3\}, \dots, \psi_H(e_{n-1}) = \{v_{n-1}, v_n\}, \psi_H(e_n) = \{v_n, v_1\}, \\ \psi_L(e_{i_1}) &= \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \psi_L(e_{i_2}) = \{v_{i_2}, v_{i_3}\}, \dots, \psi_L(e_{i_{m-1}}) = \{v_{i_{m-1}}, v_{i_m}\}, \psi_H(e_{i_m}) = \{v_{i_m}, v_{i_1}\} \end{aligned}$$

となるような頂点と辺の番号付け

$$\begin{aligned} V(H) &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \\ V(L) &= \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}\}, E(L) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}\} \end{aligned}$$

が存在する。

- ♣ 必要なら番号付けをずらすことで、 $e_1 = e_{i_1}$  と仮定して良い。また、必要なら番号付けの順番を逆転させることで、 $v_1 = v_{i_1}$ ,  $v_2 = v_{i_2}$  と仮定して良い。

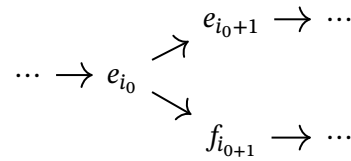
♠ 辺  $e_{i_2}$  は頂点  $v_2$  を端点に持つが、 $v_2$  を端点に持つ辺は  $e_1$  か  $e_2$  のどちらかである。いま  $e_{i_1} = e_1$  としていたので、特に  $e_{i_2} \neq e_1$  となり、 $e_{i_2} = e_2$  がわかる。また  $v_{i_3} = v_3$  も従う。

♠ の議論を繰り返すことで、 $e_{i_{m-1}} = e_{m-1}$ ,  $v_{i_m} = v_m$  となる。ここで、頂点  $v_1$  を端点とする辺は  $e_1$  か  $e_n$  のいずれかであるが、 $e_{i_m} \neq e_{i_1} = e_1$  であるから  $e_{i_m} = e_n$  である。特に、 $v_{i_m} = v_n$  でなければならないので、 $v_m = v_{i_m} = v_n$  となる。ゆえに  $m = n$  である。 ■

二つ目の補題は、 $\mathcal{C}$  が公理 (C3) を満たすことを示すために用いる。 $\mathcal{C}$  が公理 (C3) を満たすことの証明が最も難しい箇所である。

**補題 4.11**  $G$  をグラフとする。共通の辺をもつ二つの  $G$  の部分閉路グラフ  $H, L$  に対して、 $e$  をその共通な辺とすると、 $E(N) \subseteq (E(H) \cup E(L)) \setminus \{e\}$  となる  $G$  の部分閉路グラフ  $N$  が存在する。

♡ 証明方針の説明。 $H$  と  $L$  の共通な辺  $e$  を  $e_1$  と番号付し、これに続いて  $H$  の辺を  $e_2, e_3, \dots$  と番号付けしておく。 $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots$  のように  $H$  の辺を辿っていくと、 $L$  の辺でない  $H$  の辺に必ず行き着く。そうでないと、 $H$  が  $L$  の部分グラフになるので、補題 4.10 から  $H = L$  になってしまうからである。よって



のように分かれる。ここで、 $f_{i_0+1}$  は  $L$  の辺である。これに続いて  $L$  の辺を  $f_{i_0+2}, f_{i_0+3}, \dots$  と番号付けしておく。

さらに  $e_{i_0+1} \rightarrow e_{i_0+2} \rightarrow \dots$  のように辺を辿っていくと、 $L$  の辺となる  $e_{i_1+1}$  に行き着く。同様に、 $f_{i_0+1} \rightarrow f_{i_0+2} \rightarrow \dots$  のように辺を辿っていくと、 $f_{j_1+1} = e_{i_1+1}$  となる。このとき、 $\{e_{i_0+1}, \dots, e_{i_1}, f_{i_0+1}, \dots, f_{j_1}\}$  を辺とする  $G$  の部分閉路グラフ  $N$  は、 $E(N) \subseteq (E(H) \cup E(L)) \setminus \{e\}$  を満たす。

図 6 は以上の操作をまとめて表したものである。

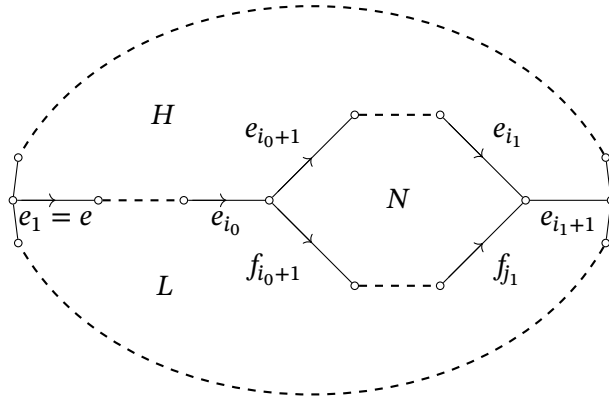


図6 閉路グラフ  $N$  を見つける過程

◇ 形式的な証明  $H$  と  $L$  は閉路グラフであるから,

$$\begin{aligned} \psi_H(e_1) &= \{v_1, v_2\}, \psi_H(e_2) = \{v_2, v_3\}, \dots, \psi_H(e_{n-1}) = \{v_{n-1}, v_n\}, \psi_H(e_n) = \{v_n, v_1\}, \\ \psi_L(f_1) &= \{w_1, w_2\}, \psi_L(f_2) = \{w_2, w_3\}, \dots, \psi_L(f_{m-1}) = \{w_{m-1}, w_m\}, \psi_H(f_m) = \{w_m, w_1\} \end{aligned}$$

となるような頂点と辺の番号付け

$$\begin{aligned} V(H) &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \\ V(L) &= \{w_1, w_2, \dots, w_m\}, E(L) = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \end{aligned}$$

が存在する。

- ♣  $n \leq m$  としても一般性は失われない。 $H$  と  $L$  は異なる部分閉路グラフで、かつ共通の辺を持つのでどちらもループにはなり得ないので、 $2 \leq n \leq m$  である。 $e$  は  $H$  と  $L$  の共通の辺なので、必要なら番号付けをずらすことで、 $e_1 = e = f_1$  と仮定して良い。また、必要なら番号付けの順番を逆転させることで、 $v_1 = w_1, v_2 = w_2$  と仮定して良い。

補題 4.10 から、 $e_i \neq f_i$  となる番号  $i$  は存在する。存在しなければ  $H$  は  $L$  の部分グラフとなるからである。ここで、番号  $i_0$  を

$$i_0 = \min \{i \mid i \text{ は } 2 \text{ から } n \text{ までの番号で, } e_i \neq f_i \text{ となるもの}\}$$

としよう。このとき、

- ♠  $e_{i_0} \neq f_{i_0}$  かつ  $i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}$  では  $e_i = f_i$  となる。

ここで、辺  $e_{i_0}, f_{i_0}$  がそれぞれ  $H$  と  $L$  の一番目の辺となるように番号をずらす。つまり

$$e_{n-i_0+1} = f_{m-i_0+1}(=e), e_{n-i_0+2} = f_{m-i_0+2}, \dots, e_n = f_m, \\ e_1 \neq f_1$$

という番号付けにずらす。番号

$$i_1 = \min\{i \mid i \text{ は } 1 \text{ から } n-i_0 \text{ までの番号で, } v_{i+1} \text{ は } L \text{ の頂点である}\} \\ j_1 = \min\{j \mid j \text{ は } 1 \text{ から } m-i_0 \text{ までの番号で, } f_j \text{ は } v_{i_1+1} \text{ を端点にもつ}\}$$

を取る。このとき,

- ★  $v_{i_1+1} = w_{j_1+1}$  である。実際、 $v_{i_1+1} = w_{j_1}$  であつたとすると、 $j_1 = 1$  のときは  $v_{i_1+1} = w_1 = v_1$  となり、番号付けの仕方に反する。 $j_1 > 1$  のときは  $v_{i_1+1} \in \psi_G(f_{j_1-1})$  となり、番号  $j_1$  の最小性に反する。

$N$  を

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_{i_1}, v_{i_1+1} = w_{i_1+1}, w_{i_1}, \dots, w_2\}, \\ E = \{e_1, e_2, \dots, e_{i_1}, f_1, f_2, \dots, f_{i_1}\}$$

で定められる  $G$  の部分グラフ  $(V, E, \psi_G|_E)$  とすると、これは閉路グラフである。実際、頂点の番号付けを

$$z_1 = v_1, z_2 = v_2, \dots, z_{i_1} = v_{i_1}, z_{i_1+1} = v_{i_1+1}, z_{i_1+2} = w_{i_1}, \dots, z_{2i_1} = w_2$$

とし、辺の番号付けを

$$h_1 = e_1, h_2 = e_2, \dots, h_{i_1} = e_{i_1}, h_{i_1+1} = f_1, h_{i_1+2} = f_{i_1-1}, \dots, h_{2i_1} = f_1$$

とすると,

$$\psi_N(h_1) = \{z_1, z_2\}, \psi_N(h_2) = \{z_2, z_3\}, \dots, \psi_N(h_{i_1}) = \{z_{i_1}, z_{i_1+1}\}, \\ \psi_N(h_{i_1+1}) = \{z_{i_1+1}, z_{i_1}\}, \dots, \psi_N(h_{2i_1}) = \{z_{2i_1}, z_1\}$$

となるので  $N$  は確かに閉路グラフである。構成から  $E(N) \subseteq E(H) \cap E(L) \setminus \{e\}$  であり、題意は示された。 ■

**命題 4.12** グラフ  $G$  に対して、グラフ的マトロイド  $M_G$  はマトロイドである。

**証明** 閉路グラフは少なくとも一つ以上の辺をもつように定義していたので、 $\emptyset \notin \mathcal{C}$  である。ゆえに  $\mathcal{C}$  は公理 (C1) を満たす。

$\mathcal{C}$  が公理 (C2) を満たすことは補題 4.10 を用いる。 $H$  と  $L$  を、 $E(H) \subseteq E(L)$  となる  $G$  部分閉路グラフとする。すると、 $H$  は  $L$  の部分グラフとなるので、補題 4.10 より  $H = L$  および  $E(H) = E(L)$  である。これは  $\mathcal{C}$  が公理 (C2) を満たすことを示している。

$\mathcal{C}$  は公理 (C3) を満たすということが、補題 4.11 の主張であるので、 $M_G = (E(G), \mathcal{C})$  がマトロイドであることが証明された。 ■

**例 4.13** 次の図 7 のグラフ  $G$  を考える。

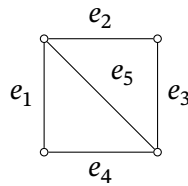


図 7 グラフ  $G$

すると  $M_G$  はサーキットが

$$\mathcal{C} = \{\{e_1, e_4, e_5\}, \{e_2, e_3, e_5\}\}$$

として与えられる  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  上のマトロイドである。

この例で挙げたマトロイドの実現可能性は明らかではないが、より一般に単純グラフに対して次の定理がある。

**定理 4.14**  $G$  を単純グラフとする。このとき、グラフ的マトロイド  $M_G$  は任意の体  $K$  上実現可能である。

この定理を示すにあたって、[MS15, p.168, Exa 4.2.14] にある説明を参考にした。いくつか準備をしよう。

**定義 4.15**  $K$  を体、 $G$  を単純グラフとし、頂点の番号付け  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  をしておく。

(i) 辺  $e \in E(G)$  に対して、 $\psi_G(e) = \{v_i, v_j\}$ ,  $i < j$  のとき、

$$o(e) = i, \quad t(e) = j$$

とする。 $o(e)$  を  $e$  の**始点**といい、 $t(e)$  を  $e$  の**終点**という。

(ii) 辺  $e \in E(G)$  に対して、

$$o(e^-) = t(e), \quad t(e^-) = o(e)$$

と置く。この記法にならって、 $o(e^+) = o(e)$ ,  $t(e^+) = t(e)$  と書くこともある。



(iii)  $K^n$  のベクトル  $\mathbf{x}(e)$  を

$$\mathbf{x}(e) = \mathbf{e}_{o(e)} - \mathbf{e}_{t(e)}$$

で定め、 $e$  に対応するベクトルという。ここで、 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  は  $K^n$  の標準基底を表す。

(ii) の記法を用いて、 $K^n$  のベクトル  $\mathbf{x}(e^+)$ ,  $\mathbf{x}(e^-)$  を

$$\mathbf{x}(e^+) = \mathbf{x}(e),$$

$$\mathbf{x}(e^-) = \mathbf{x}_{o(e^-)} - \mathbf{x}_{t(e^-)} (= -\mathbf{x}(e))$$

と書く。

**補題 4.16**  $K$  を体、 $G$  を単純グラフとし、頂点の番号付け  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  をしておく。このとき、 $e_1, \dots, e_\ell \in E(G)$  について、 $\mathbf{x}(e_1), \dots, \mathbf{x}(e_\ell)$  がサーキットなら、 $\{e_1, \dots, e_\ell\}$  を辺とする部分グラフは閉路グラフである。つまり、 $\{e_1, \dots, e_\ell\}$  は  $M_G$  のサーキットである。

**証明**  $\mathbf{x}(e_1), \dots, \mathbf{x}(e_\ell)$  はサーキットであるから、 $\mathbf{x}(e_2), \dots, \mathbf{x}(e_\ell)$  のいずれかは、第  $t(e_1)$  成分をもつ。すなわち、 $e_2, \dots, e_\ell$  のいずれかは  $v_{t(e_1)}$  を端点にもつ。

♣ 必要なら番号を取り替えることで、 $v_{t(e_1)}$  は  $e_2$  の端点であるとしてよい。このとき、 $t(e_1) = o(e_2^+)$  であるか、 $t(e_1) = o(e_2^-)$  であるので、簡潔に  $t(e_1) = o(e_2^\pm)$  と書くことにする。

同様に、 $\mathbf{x}(e_1), \dots, \mathbf{x}(e_\ell)$  はサーキットであるから、 $\mathbf{x}(e_3), \dots, \mathbf{x}(e_\ell)$  のいずれかは、第  $t(e_2^\pm)$  成分をもつので、番号付けを取り替えて、 $t(e_2^\pm) = o(e_3^\pm)$  となる。この操作を繰り返して、 $t(e_{n-1}^\pm) = o(e_n^\pm)$  および  $t(e_n^\pm) = o(e_1)$  となる。したがって、今の番号付けによって、

$$\psi_G(e_1) = \{o(e_1), t(e_1^\pm) = o(e_2^\pm)\}, \psi_G(e_2) = \{o(e_2^\pm), t(e_2^\pm) = o(e_3^\pm)\}, \dots,$$

$$\psi_G(e_n) = \{o(e_n^\pm), t(e_n^\pm) = o(e_1)\}$$

となる。これは、 $\{e_1, \dots, e_n\}$  が誘導する  $G$  の部分グラフが閉路グラフであることを意味している。 ■

**定理 4.14 の証明**  $E(G) = \emptyset$  の場合は、定義より任意の体上実現可能であるので、 $E(G) \neq \emptyset$  の場合を考える。体  $K$  を固定しておく。 $G$  の頂点の番号付け  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  をしておく。

♣ ベクトル  $\{\mathbf{x}(e) \mid e \in E(G)\}$  で定まる体  $K$  上の線形マトロイドを  $L$  とすると、全単射  $\varphi: e \mapsto \mathbf{x}(e)$  はマトロイドの同型射  $\varphi: M_G \xrightarrow{\sim} L$  であることを示せばよい。

補題 4.16 は、 $L$  のサーキットが  $M_G$  のサーキットであること、つまり  $\mathcal{C}(L) \subseteq 2^\varphi(\mathcal{C}(M_G))$  であることを示している。

逆に、 $\{e_1, \dots, e_\ell\}$  を  $M_G$  のサーキットとすると、 $t(e_1) = o(e_2^\pm)$ ,  $t(e_2^\pm) = o(e_3^\pm), \dots$  となるように辺の向きを選ぶことで、

$$\mathbf{x}(e_1) + \mathbf{x}(e_2^\pm) + \dots + \mathbf{x}(e_\ell^\pm) = \mathbf{0}$$

となる。つまり、 $\{\mathbf{x}(e_1), \mathbf{x}(e_2), \dots, \mathbf{x}(e_\ell)\}$  は従属集合である。これがサーキットではなかったとすると、補題 4.16 から  $\{e_1, e_2, \dots, e_\ell\}$  の定める閉路グラフが真に小さい部分閉路グラフを持つことになるが、このことは補題 4.10 に矛盾する。したがって  $2^\varphi(\mathcal{C}(M_G)) \subseteq \mathcal{C}(L)$  が従う。ゆえに  $\varphi(\mathcal{C}(M_G)) = \mathcal{C}(L)$  であり、 $2^\varphi$  が  $M_G$  から  $L$  へのマトロイドの同型射であることが示された。 ■

**注意 4.17** 定理 4.14 はグラフが単純でない場合には一般に成立しない。ループがある場合と多重辺がある場合では原因が異なるので、いくつか例を挙げておこう。

- (i)  $G$  に多重辺はなく、ループをちょうど 1 つもつときは、 $M_G$  は任意の体上実現可能である。実際、 $\ell$  をグラフ  $G$  の唯一のループとし、 $\{\mathbf{x}(e) \mid e \in E(G) \setminus \{\ell\}\} \cup \{\mathbf{0}\}$  が定める線形マトロイド  $L$  を考えると、 $L$  のサーキット  $\{\mathbf{0}\}$  と  $M_G$  のサーキット  $\{\ell\}$  が対応する。
- (ii)  $G$  がループを二つ以上もつときは、 $M_G$  はループを二つ以上もつので、系 4.8 より  $M_G$  はどの体の上でも実現可能ではない。
- (iii) 正標数  $p > 0$  の体  $K$  について、グラフ  $G$  が  $p$  重以上の多重辺を持つ場合は一般に実現可能ではない。例えば、2 重の辺からなるグラフ  $G$  (図 8) のグラフ的マトロイド  $M_G$  は標数 2 の有限体  $\mathbb{F}_2$  上実現可能ではない。実際、 $V$  を  $\mathbb{F}_2$  上の線形空間とし、異なる二つのベクトル  $f_1, f_2 \in V$  で  $M_G$  が実現されるとすると、ベクトル  $f_1, f_2$  は一次従属なので、ある係数  $\lambda \in \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$  があって、 $f_1 = \lambda f_2$  であるが  $\lambda = 1$  となるしかないので  $f_1 = f_2$  となり、矛盾する。



図 8 2 重の辺からなるグラフ

他方、多項式環  $\mathbb{F}_2[x]$  の商体  $\mathbb{F}_2(x)$  は標数 2 であるが、1 次元ベクトル  $1, x \in \mathbb{F}_2(x)$  によって  $M_G$  は実現される。

## 5 マトロイドの変形

グラフには辺の除去と辺の縮約という 2 種類の変形する操作があった。4.2 小節でみたように、マトロイドの台集合はグラフの辺に相当するものとして考えることができ、グラフのように除去と縮約の変形ができることが期待される。この節ではマトロイドに対する除去と縮約の操作について見ていこう。まずは除去の操作について述べる。

**命題 5.1 ([Huh18, p.12])**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとし、元  $e \in E$  を一つ固定する。集合  $E \setminus \{e\}$  の部分集合族  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  を

$$\mathcal{F}(M \setminus e) = \{F \setminus \{e\} \mid F \in \mathcal{F}(M)\}$$

で定めると、族  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  はフラットの公理 (F1), (F2), (F3) を満たす。このように定まるマトロイドを、元  $e$  を除去して得られるマトロイドといい、記号  $M \setminus e$  で表す。

この命題の証明のうち、族  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  が公理 (F3) を満たすことの証明は次の補題として述べよう。

**補題 5.2** 命題 5.1 の仮定の下、 $M$  のフラット  $F$  と元  $\ell \in (E \setminus \{e\}) \setminus (F \setminus \{e\})$  に対して、

- (i)  $F \setminus \{e\} \subsetneq H \setminus \{e\}$  となる任意の  $M$  のフラット  $H$  に対して、 $F \subsetneq H$  が成り立つとき、 $\ell$  を含み、かつ  $F$  を被覆する  $M$  のフラット  $G$  は、 $F \setminus \{e\}$  を  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  の元として被覆する  $G \setminus \{e\}$  を与える。
- (ii)  $F \setminus \{e\} \subsetneq H \setminus \{e\} \subseteq G \setminus \{e\}$  かつ  $F \not\subseteq H$  となる  $M$  のフラット  $H$  が存在するなら、 $F \setminus \{e\}$  は  $M$  のフラットである。さらに、 $\ell$  を含み、かつ  $F \setminus \{e\}$  を被覆するフラット  $M$  のフラット  $G'$  は  $F \setminus \{e\}$  を  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  の元として被覆する  $G' \setminus \{e\}$  を与える。

が成り立つ。したがって、族  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  はフラットの公理 (F3) を満たす。

**補題 5.2 (i) の証明**  $\ell \in G \setminus \{e\}$  かつ  $\ell \notin F \setminus \{e\}$  なので、 $F \setminus \{e\} \subsetneq G \setminus \{e\}$  である。 $G \setminus \{e\}$  が  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  の元として  $F \setminus \{e\}$  を被覆することを確認しよう。仮定より、 $F \setminus \{e\} \subsetneq H \setminus \{e\} \subseteq G \setminus \{e\}$  なる任意のフラット  $H \in \mathcal{F}(M)$  に対して、包含  $F \subsetneq H$  が成り立つ。 $H \subseteq G$  も成り立てば、 $G$  が  $F$  を被覆することから  $H = G$  および  $H \setminus \{e\} = G \setminus \{e\}$  でなければならない。他方、

♣  $H \not\subseteq G$  であれば、 $e \in H$  かつ  $e \notin G$  となる。また、 $F \subsetneq G$  なので、 $e \notin F$  も従う。

したがって、 $F \subsetneq H \setminus \{e\} \subseteq G$  となり、 $G$  が  $F$  を被覆することから  $\text{cl}_M(H \setminus \{e\}) = G$  である。 $e \in H$  かつ  $e \notin G$  であることから、 $\text{cl}_M(H \setminus \{e\}) = H \setminus \{e\}$  でなくてはならず、等式  $H \setminus \{e\} = G \setminus \{e\}$  が成り立つ。

以上で、 $G \setminus \{e\}$  が  $F \setminus \{e\}$  を被覆することが示された。 ■

**補題 5.2 (ii) の証明** 仮定より、

♣  $F \setminus \{e\} \subsetneq H \setminus \{e\}$  かつ  $F \not\subseteq H$  であるから、 $e \in F$  かつ  $e \notin H$  となる。

したがって、包含  $F \setminus \{e\} \subseteq H \setminus \{e\} = H$  が成り立つので、 $F \not\subseteq H$  であることと合わせて、 $\text{cl}_M(F \setminus \{e\}) = F \setminus \{e\}$  であることがわかる、つまり  $F \setminus \{e\}$  は  $M$  のフラットである。

$\ell$  を含み、かつ  $F \setminus \{e\}$  を被覆するような  $M$  のフラット  $G'$  を取ろう。このとき、 $\ell$  は  $e$  とは異なるように取っていたので、 $\ell \in G' \setminus \{e\}$  である。したがって、特に  $F \setminus \{e\} \subsetneq G' \setminus \{e\}$  である。さらに、

♠  $F \setminus \{e\}$  は  $M$  のフラットで、かつ  $F \setminus \{e\} \subsetneq H' \setminus \{e\} \subseteq G' \setminus \{e\}$  となる任意のフラット  $H' \in \mathcal{F}(M)$  に対して、 $F \setminus \{e\} \subseteq H'$  となるので、 $F \setminus \{e\}$  に対して (i) の結果を適用することできる。

ゆえに  $G' \setminus \{e\}$  が  $F \setminus \{e\}$  を被覆することが従う。 ■

**命題 5.1 の証明** 族  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  が公理 (F1) と (F2) を満たすことは直ちに従う。また族  $\mathcal{F}(M \setminus e)$  が公理 (F3) を満たすことについては、すでに補題 5.2 で示した。以上から  $M \setminus e = (E \setminus \{e\}, \mathcal{F}(M \setminus e))$  がマトロイドであることの証明が完了した。 ■

次に、縮約の操作についてみよう。

**命題 5.3 ([Huh18, p.12])**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとし、元  $e \in E$  を一つ固定する。集合  $E \setminus \{e\}$  の部分集合族  $\mathcal{F}(M/e)$  を

$$\mathcal{F}(M/e) = \{F \setminus \{e\} \mid F \in \mathcal{F}(M) \text{ かつ } e \in F\}$$

で定めると、族  $\mathcal{F}(M/e)$  はフラットの公理 (F1), (F2), (F3) を満たす。このように定まるマトロイドを元  $e$  を縮約して得られるマトロイドといい、記号  $M/e$  で表す。

**証明** 族  $\mathcal{F}(M/e)$  が公理 (F1) と (F2) を満たすことは定義から直ちに従う。公理 (F3) が満たされることを確認しよう。 $e$  を含む  $M$  のフラット  $F$  から誘導される  $\mathcal{F}(M/e)$  の元  $F \setminus \{e\}$  と、元  $\ell \in (E \setminus \{e\}) \setminus (F \setminus \{e\})$  を考える。 $\ell$  を含み、かつ  $F$  を被覆する  $M$  のフラット  $G$  を取る。 $\ell \in G \setminus \{e\}$  であり、したがって  $F \setminus \{e\} \subsetneq G \setminus \{e\}$  であるから、 $G \setminus \{e\}$  が  $F \setminus \{e\}$  を被覆することを確認できればよいが、これは次のように直ちに従う。

♣  $F \setminus \{e\} \subsetneq H \setminus \{e\} \subseteq G \setminus \{e\}$  となる  $e$  を含む  $M$  のフラット  $H$  について、 $F \subsetneq H \subseteq G$  が成り立つので  $H \setminus \{e\} = G \setminus \{e\}$  となる。

これは  $G \setminus \{e\}$  が  $F \setminus \{e\}$  を被覆することを意味する。よって族  $\mathcal{F}(M/e)$  は公理 (F3) も見たし、 $M/e = (E/\mathcal{F}(M/e))$  がマトロイドであることが示された。 ■

次の命題 5.4 で述べるように、グラフ的マトロイドにおける元の除去・縮約の操作とグラフにおける辺の除去・縮約の操作が可換である。このような意味で、マトロイドに対する除去・縮約の操作はグラフの辺の除去・縮約の操作に相当するものであるといえる。

**命題 5.4**  $G$  をグラフとし、 $E = E(G)$  と置く。辺  $e \in E$  を一つ固定する。このとき

$$(5.1) \quad M_{(G \setminus e)} = (M_G) \setminus e$$

$$(5.2) \quad M_{(G/e)} = (M_G)/e$$

が成り立つ。

**可換性 (5.1) の証明** 等式  $\mathcal{F}(M_{(G \setminus e)}) = \mathcal{F}(M_G \setminus e)$  を示すことが目標である。 $F$  をマトロイド  $M_{(G \setminus e)}$  のフラットとし、これが ( $e$  を含まない)  $M_G$  のフラットであることを示そう。

♣ グラフの辺の除去とグラフ的マトロイドの定義から直ちに、マトロイド  $M_{(G \setminus e)}$  のサーキット全体は

$$\mathcal{C}(M_{(G \setminus e)}) = \{C' \mid C' \text{ は } M_G \text{ のサーキットで元 } e \text{ を含まない}\}$$

となる。

したがって、命題 1.38 より、 $e$  を含まない  $M_G$  のサーキット  $C'$  に対して  $\#(C' \setminus F) \neq 1$  である。

♠ さらに、 $e$  を含む任意の  $M_G$  のサーキット  $C$  に対して  $\#(C \setminus F) \neq 1$  であれば、命題 1.38 より部分集合  $F$  は  $M_G$  のフラットである。

★ 元  $e$  を含み、かつ  $\#(C \setminus F) = 1$  となる  $M_G$  のサーキット  $C$  があれば、 $C \setminus F = \{e\}$  であるので、 $F \cup \{e\}$  が  $M_G$  のフラットである。

結局、 $F$  または  $F \cup \{e\}$  のいずれかが  $M_G$  のフラットであるので、 $F = F \setminus \{e\} = (F \cup \{e\}) \setminus \{e\}$  はマトロイド  $(M_G) \setminus e$  のフラットである。

逆に、 $F$  を  $(M_G) \setminus e$  のフラットとすると、ある  $M_G$  のフラット  $F'$  があって  $F = F' \setminus \{e\}$  と書ける。このとき、各  $M_{(G \setminus e)}$  のサーキット  $C'$  に対して

$$\#(C' \setminus F) = \#(C' \setminus F') \neq 1$$

である。したがって、命題 1.38 より  $F$  は  $M_{(G \setminus e)}$  のフラットである。以上により  $\mathcal{F}(M_{(G \setminus e)}) = \mathcal{F}(M_G \setminus e)$  が成り立ち、したがって  $M_{(G \setminus e)} = M_G \setminus e$  である。 ■

**可換性 (5.2) の証明** 等式  $\mathcal{F}(M_{(G/e)}) = \mathcal{F}(M_G/e)$  を示すことが目標である。 $F$  を  $M_{(G/e)}$  のフラットとする。

♣ グラフの辺の縮約とグラフ的マトロイドの定義から直ちに、マトロイド  $M_{(G/e)}$  のサーキット全体は

$$\mathcal{C}(M_{G/e}) = \{C \setminus \{e\} \subseteq E \setminus \{e\} \mid C \text{ は } M_G \text{ のサーキットである}\}$$

であることがわかる。

すると、任意の  $M_{(G/e)}$  のサーキット  $C$  に対して

$$\#(C \setminus (F \cup \{e\})) = \#((C \setminus \{e\}) \setminus F) \neq 1$$

となるので、命題 1.38 より  $F \cup \{e\}$  は  $M_G$  のフラットである。これは  $F = (F \cup \{e\}) \setminus \{e\}$  が  $M_G/e$  のフラットであることを意味する。

逆に、 $F$  が  $(M_G)/e$  のフラットであるとする。すると、 $e$  を含む  $M_G$  のフラット  $F'$  を用いて  $F = F' \setminus \{e\}$  と書ける。このとき、

$$\#((C \setminus \{e\}) \setminus F) = \#(C \setminus F') \neq 1$$

となるから  $F$  はマトロイド  $M_{(G/e)}$  のフラットであることがわかった。

以上により  $\mathcal{F}(M_{(G/e)}) = \mathcal{F}(M_G/e)$  が成り立ち、したがって  $M_{(G/e)} = M_G/e$  が従う。 ■

ここから、除去・縮約したマトロイドの階数に関する一般論について触れておこう。マトロイドの元の除去を考えるにあたっては、峽と呼ばれる概念が重要になるのでここで導入しておく。

**定義 5.5**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとする。マトロイド  $M$  の**峽**とは、どの  $M$  のサーキットにも含まれないような元  $e \in E$  のことをいう。

**命題 5.6**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとし、元  $e \in E$  を一つ取る。このとき、任意の部分集合  $X \subseteq 2^{E \setminus \{e\}}$  に対して

$$\text{rk}_M(X) = \text{rk}_{M \setminus e}(X)$$

が成り立つ。

**証明** まずはじめに、部分集合  $X \subseteq E \setminus \{e\}$  に対して

$$\text{cl}_{M \setminus e}(X) = \bigcap \{F \setminus \{e\} \mid F \text{ は } M \text{ のマトロイドであり、包含 } X \subseteq F \setminus \{e\} \text{ を満たす}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \bigcap \{F \mid F \text{ は } X \text{ を含む } M \text{ のフラットである} \} \right) \setminus \{e\} \\
&= \text{cl}_M(X) \setminus \{e\}
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する。 $e \notin \text{cl}_M(X)$  なら、補題 5.2 により  $\text{cl}_M(X)$  の間にある  $M$  のフラットの極大鎖は  $M \setminus e$  のフラットの極大鎖でもあるので、 $\text{rk}_M(X) = \text{rk}_{M \setminus e}(X)$  が従う。問題は  $e \in \text{cl}_M(X)$  の場合である。

$F_0$  をマトロイド  $M$  の最小のフラットとしよう。元  $\ell_1 \in C \setminus \{e\}$  を取り、 $\ell_1$  を含み、かつ最小のフラット  $F_0$  を被覆するフラット  $F_1$  を取る。

♣  $e \notin F_0$  であれば、 $X \not\subseteq F_0$  であるから、元  $\ell_1 \in X \setminus F_0$  を取ることができる。公理 (F3) により、 $\ell_1$  を含み、かつ  $F_0$  を被覆するような  $M$  のフラット  $F_1$  が存在する。この議論を繰り返すことで、 $e \notin F_0, \dots, F_{k-1}$ ,  $e \in F_k$ ,  $\#(F_k \setminus F_{k-1}) \geq 2$  となるような  $M$  のフラットの鎖

$$F_0 \leq F_1 \leq \dots \leq F_k$$

が得られる。

$F_k \subseteq \text{cl}_M(X)$  であるから、この鎖の延長

$$F_0 \leq \dots \leq F_k \leq F_{k+1} \leq \dots \leq F_r = \text{cl}_M(X)$$

を一つ取る。この鎖は  $M \setminus e$  のフラットの鎖

$$F_0 \subsetneq \dots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F_k \setminus \{e\} \subsetneq F_{k+1} \setminus \{e\} \subsetneq \dots \subsetneq F_r \setminus \{e\} = \text{cl}_{M \setminus e}(X)$$

を誘導するが、実はこれは  $F_0$  と  $\text{cl}_{M \setminus e}(X)$  の間の  $M \setminus e$  のフラットの鎖として極大である。

♠ 部分鎖  $F_0 \subsetneq \dots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F_k \setminus \{e\}$  が極大であることは補題 5.2 (i) から直ちに従う。

$k$  以上の番号  $i$  を任意に固定し、 $F_i \setminus \{e\} \subsetneq H \setminus \{e\}$  となるフラット  $H \in \mathcal{F}(M)$  を考えよう。

★ もし、 $F_i \not\subseteq H$  であれば、補題 5.2 (ii) より  $F_i \setminus \{e\}$  は  $M$  のフラットである。ところが、 $F_k$  の取り方から  $F_k \setminus \{e\}$  はフラットではないので、命題 1.38 より  $C \setminus (F_k \setminus \{e\}) = \{e\}$  となる  $M$  のサーキット  $C$  が存在する。このとき、 $C \setminus (F_i \setminus \{e\}) = \{e\}$  も成り立つので、 $F_i \setminus \{e\}$  がフラットであることに反する。したがって、 $F_i \setminus \{e\} \subsetneq H \setminus \{e\}$  となる  $M$  のフラット  $H$  は  $F_i \subseteq H$  でなければならない。

よってこの場合も補題 5.2 (i) から  $F_i \setminus \{e\} \leq F_{i+1} \setminus \{e\}$  であることが従う。よって部分鎖  $\subsetneq F_k \setminus \{e\} \subsetneq F_{k+1} \setminus \{e\} \subsetneq \dots \subsetneq F_r \setminus \{e\}$  も極大であることがわかり、 $\text{rk}_M(X) = \text{rk}_{M \setminus e}(X)$  であることが示された。 ■

**系 5.7**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとし、元  $e \in E$  は峽ではないとする。このとき、

$$\text{rk}(M) = \text{rk}(M \setminus e)$$

である。ここで、マトロイド  $M$  に対して、その階数  $\text{rk}(M)$  は台集合の階数  $\text{rk}_M(E)$  で定められていたことを思い出しておく（定義 1.4）。

**証明**  $e \in E$  は峽でないので、 $e$  を含むサーキット  $C \in \mathcal{C}(M)$  が存在する。ゆえに部分集合  $E \setminus \{e\}$  はフラットではなく、

$$\text{rk}_M(E \setminus \{e\}) = \text{rk}_M(E) = \text{rk}(M)$$

である。他方、命題 5.6 より

$$\text{rk}_M(E \setminus \{e\}) = \text{rk}_{M \setminus e}(E \setminus \{e\}) = \text{rk}(M \setminus e)$$

であるから、目的の等式  $\text{rk}(M) = \text{rk}(M \setminus e)$  が従う。 ■

次に、元を縮約したマトロイドの階数についてみてみよう。

**命題 5.8**  $M$  を  $E$  上のマトロイドとし、元  $e \in E$  を一つ取る。このとき、元  $e$  を含む任意の部分集合  $X \subseteq E$  に対して

$$\text{rk}_M(X) = \text{rk}_{M/e}(X \setminus \{e\}) + \text{rk}_M(\{e\})$$

が成り立つ。特に、

$$\text{rk}(M) = \text{rk}(M/e) + \text{rk}_M(\{e\})$$

である。

**証明** まずはじめに、

$$\begin{aligned} \text{cl}_{M/e}(X \setminus \{e\}) &= \bigcap \left\{ F \setminus \{e\} \mid \begin{array}{l} F \text{ は } e \text{ を含む } M \text{ のフラットであり,} \\ \text{包含 } X \setminus \{e\} \subseteq F \setminus \{e\} \text{ を満たす} \end{array} \right\} \\ &= \left( \bigcap \{ F \mid F \text{ は } X \text{ を含む } M \text{ のフラットである} \} \right) \setminus \{e\} \\ &= \text{cl}_M(X) \setminus \{e\} \end{aligned}$$

が成り立つことに注意する。

$F_0$  を  $M$  の最小のフラットとしよう。 $e \in F_0$  のときは  $\text{rk}_M(\{e\}) = 0$  である。 $F_0$  と  $\text{cl}_M(X)$  の間にある  $M$  のフラットの極大鎖

$$F_0 \triangleleft F_1 \triangleleft \cdots \triangleleft F_r = \text{cl}_M(X)$$



は  $F_0 \setminus \{e\}$  と  $\text{cl}_{M/e}(X)$  の間にあるフラットの極大鎖

$$F_0 \setminus \{e\} \leq F_1 \setminus \{e\} \leq \cdots \leq F_r \setminus \{e\} = \text{cl}_M(X) \setminus \{e\} = \text{cl}_{M/e}(X \setminus \{e\})$$

を誘導する。よって  $\text{rk}_{M/e}(X \setminus \{e\}) = \text{rk}_M(X) = \text{rk}_M(X) - \text{rk}_M(\{e\})$  である。

$e \notin F_0$  の場合は,  $F_1 = \text{cl}_M(\{e\})$  は  $F_0$  を被覆するので,  $\text{rk}_M(\{e\}) = 1$  である。また,  $F_1 \setminus \{e\}$  がマトロイド  $M/e$  の最小のフラットである。 $M$  のフラットの鎖  $F_0 \leq F_1$  を延長して鎖

$$F_0 \leq \text{cl}_M(\{e\}) = F_1 \leq \cdots \leq F_r = \text{cl}_M(X)$$

を取ろう。この鎖は  $M/e$  の最小のフラット  $F_1 \setminus \{e\}$  と  $\text{cl}_{M/e}(X)$  の間にあるフラットの極大な鎖

$$F_1 \setminus \{e\} \leq \cdots \leq F_r \setminus \{e\} = \text{cl}_M(X) \setminus \{e\} = \text{cl}_{M/e}(X \setminus \{e\})$$

を誘導する。したがって, 等式  $\text{rk}_{M/e}(X \setminus \{e\}) = \text{rk}_M(X) - 1 = \text{rk}_M(X) - \text{rk}_M(\{e\})$  が従う。

マトロイドの階数については,

$$\text{rk}(M) = \text{rk}_M(E) = \text{rk}_{M/e}(E \setminus \{e\}) + \text{rk}_M(\{e\}) = \text{rk}(M/e) + \text{rk}_M(\{e\})$$

と計算できる。以上により題意は示された。 ■

**注意 5.9**  $\text{rk}_M(\{e\})$  の値は, 元  $e$  がループであるかそうでないかで分類される。

- (i)  $e$  がループのとき,  $\text{rk}_M(\{e\}) = 0$  である。
- (ii)  $e$  がループではないとき,  $\text{rk}_M(\{e\}) = 1$  である。

実際, 命題 1.38 より  $M$  の最小のフラット  $\text{cl}_M(\emptyset)$  は  $M$  のループ全体の集合であることがわかる。したがって,  $e$  がループのときは  $e \in \text{cl}_M(\emptyset)$  および  $\text{rk}_M(\{e\}) = 0$  となる。 $e$  がループでないときは  $\text{cl}_M(\emptyset) \leq \text{cl}_M(\{e\})$  となるので,  $\text{rk}_M(\{e\}) = 1$  となる。

## 参考文献

- [Huh18] June Huh. “Tropical geometry of matroids”. In: **Current developments in mathematics 2016**. Int. Press, Somerville, MA, 2018, pp. 1–46.
- [MS15] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. **Introduction to tropical geometry**. 161. Graduate Studies in Mathematics. (石川剛郎, 梶原健, 小林正典, 前野俊昭 訳: トロピカル幾何学入門, 丸善出版, (2023)). American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, pp. xii+363.

- [Jac85] Nathan Jacobson. **Basic algebra. I.** Second. W. H. Freeman and Company, New York, 1985, pp. xviii+499.