



Iwasawa theory for vertex-weighted graphs

舘野莊平氏との共同研究 arXiv:2025.12351

室岡 亮祐

所属：名古屋大学大学院多元数理科学研究科

2026 年 2 月 10 日



荷重なしグラフの岩澤理論（導入）

頂点荷重グラフの定義（準備 1）

頂点荷重グラフの行列木定理（結果 1）

頂点荷重グラフのガロア被覆（準備 2）


\mathbb{Z}_p 塔における分解公式（結果 2）

岩澤型公式（結果 3）



岩澤型公式の略証（時間次第）



解説する論文

-  Murooka, R. and Tateno, S. (2025). Iwasawa theory for vertex-weighted graphs. *arXiv preprint* arXiv:2025.1235v1 [math.CO].

スライド中で引用する論文

-  Chung, F.R.K and Langlands, Robert R. (1996). A combinatorial Laplacian with Vertex Weights. In: *J. comb. theory, Ser. A*, 75(2), 316–327.
-  Wu, H., Feng, R., and Sato, I. (2011). Vertex weighted complexities of graphcoverings. In: *Algebra Collq.*, 18(1), 129–138.



定義 (基本の概念)

X : 連結有限グラフ T : X の部分グラフ

1. T は連結グラフ。
- ▶ T が X の全域木 \iff
2. $(T \text{ の頂点集合}) = (X \text{ の頂点集合})$ 。
 3. T は閉路を持たない。
- ▶ $ST_X := \{X \text{ の全域木}\}$, $\kappa(X) := \#ST_X \sim X$ の複雑度と呼ぶ。
- X が連結でない $\implies \kappa(X) = 0$

複雑度の例

$$X := \text{triangle with a loop} \rightsquigarrow ST_X = \left\{ \begin{array}{c} \text{path of 2 edges} \\ \text{path of 2 edges} \\ \text{path of 2 edges} \end{array} \right\}, \quad \kappa(X) = 3$$



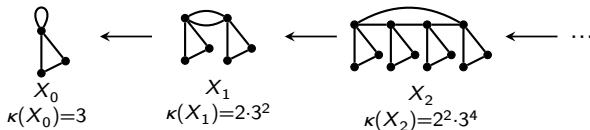
定義 (グラフの \mathbb{Z}_p 塔)

p : 素数 グラフのガロア被覆の列

$$X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$$

が \mathbb{Z}_p 塔 $:\iff \forall n, \text{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

例 ($p=2$ の場合の例)



定理 (Gonet'22, McGown-Vallières'24)

$$\exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Z}, \quad \underbrace{\text{ord}_p(\kappa(X_n))}_{\kappa(X_n) \text{ の } p \text{ ベキ部分}} = \mu p^n + \lambda n + \nu \quad \forall n \gg 0$$

上の例 $\text{ord}_2(\kappa(X_n)) = n \rightsquigarrow \mu = 0, \lambda = 1, \nu = 0$

導入終

頂点荷重グラフの定義（準備 1）

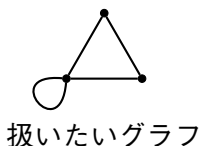


定義 (Serre によるグラフの定義)

(有限) グラフ : 五つ組 $X = (V_X, E_X, o, t, (-)^-)$ のこと

- ▶ 有限集合 V_X ; 頂点 (**V**ertex) の集合
- ▶ 有限集合 E_X ; 辺 (**E**dge) の集合
- ▶ 写像 $o: E_X \rightarrow V_X, t: E_X \rightarrow V_X$;
辺の始点 (**o**rigin) と終点 (**t**erminus) の指定
- ▶ $\forall e \in E_X, o(\bar{e}) = t(e), t(\bar{e}) = o(e), \bar{\bar{e}} = e$
となる写像 $(-)^-: E_X \rightarrow E_X$; 逆向きの辺の指定

互いに逆向きの関係にある辺を同一視 \rightsquigarrow 向き無しのグラフ ;



p : 素数 \mathbb{Q}_p : p 進数体 $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$: 代数閉包への埋込 (固定)



定義

- ▶ **頂点荷重グラフ**: グラフ X と関数 $w: V_X \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ の対 (X, w) のこと \rightsquigarrow **以下単にグラフと呼ぶ**。
- ▶ X の**全域木**: $V_T = V_X$ かつ閉路を持たない X の部分グラフ T のこと $ST_X := \{X \text{ の全域木}\}$
- ▶ $v \in V_X, T \in ST_X, d_T: V_X \times V_X \rightarrow \mathbb{Z}$: T における頂点間の距離
 X の**根付き全域木**: 次で定まる有向部分グラフ T_v のこと

$$V_{T_v} = V_T, \quad E_{T_v} = \{e \in E_T : d_T(v, o(e)) < d_T(v, t(e))\}$$

$$\text{▶ } w(T_v) := \prod_{e \in E_{T_v}} w_{t(e)}, \quad \kappa_v(X) := \sum_{T \in ST_X} w(T_v), \quad \kappa(X) := \sum_{v \in V_X} \kappa_v(X)$$

例

$$X = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{根が } 1 \text{ の} \\ \text{全域木} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\}$$

$$\rightsquigarrow \kappa_1(X) = w_1^2 + w_1 w_3 + w_1 w_2$$

$$\dots \rightsquigarrow \kappa(X) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1$$

頂点荷重グラフの行列木定理 (結果 1)



定義 (頂点荷重グラフ X の情報を持つ行列)

$V_X := \{1, \dots, m\}$ $\forall i \in V_X$, 平方根 $\sqrt{w_i} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。


▶ **次数行列** : $D_X(i, i) = \sum_{e \in E_X: o(e)=i} w_{t(e)}$ で定まる m 次対角行列 D_X

▶ **隣接行列** : $W_X(i, j) = \sum_{e \in E_X: o(e)=i, t(e)=j} \sqrt{w_i} \sqrt{w_j}$ で定まる m 次正方行列 W_X

▶ **ラプラス行列** : $L_X := D_X - W_X$ のこと

定理 (Chung-Langlands '96 ($\mathbb{R}_{>0}$ 荷重), M.-Tateno '26+)

$$\det(L_X[i]) = \kappa_i(X), \quad \left(\sum_{k \in V_X} w_k \right) \cdot \text{adj } L_X(i, j) = \sqrt{w_i} \sqrt{w_j} \kappa(X)$$

例 $X =$  $\rightsquigarrow D_X = \begin{pmatrix} 2w_1 + w_2 + w_3 & & \\ & w_1 + w_3 & \\ & & w_1 + w_2 \end{pmatrix},$

$$W_X = \begin{pmatrix} 2w_1 & \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & 0 & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_X = \begin{pmatrix} w_2 + w_3 & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & w_1 + w_3 & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \det(L_X[1]) = (w_1 + w_3)(w_1 + w_2) = w_1^2 + w_1 w_2 + w_1 w_3 = \kappa_1(X)$$

頂点荷重グラフのガロア被覆 (準備 2)



Y, X : 頂点荷重グラフ $E_{Y,v} := \{e \in E_Y : o(e) = v\}$

▶ **グラフの射** $f: Y \rightarrow X$: 3 条件を満足する写像の組

$f = (V_Y \xrightarrow{f_V} V_X, E_Y \xrightarrow{f_E} E_X)$ のこと;

1. $\forall e \in E_Y, o(f_E(e)) = f_V(o(e)), t(f_E(e)) = f_V(t(e))$
2. $\forall e \in E_Y, f_E(\bar{e}) = (f_E(e))^-$
3. $\forall v \in V_Y, w_Y(v) = w_X(f_V(v))$

▶ **グラフの被覆** Y/X : π_V と π_E が全射, かつ $E_{Y,v} \xrightarrow[\text{bij}]{} E_{X,\pi(v)}$ を満足する射 $\pi: Y \rightarrow X$ のこと; $Y/X := \pi$

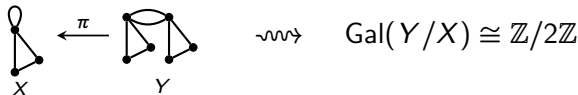
▶ **π 上の自己同型**: σ_V と σ_E が全単射, かつ $\pi \circ \sigma = \pi$

$\left[\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & X & \end{array} \right]$ を満足する射 $\sigma: Y \rightarrow Y$ のこと

$\text{Aut}(Y/X) := \{\pi \text{ 上の自己同型}\}$

▶ **ガロア被覆**: $\forall v \in V_X, \text{Aut}(Y/X) \curvearrowright \pi^{-1}(\{v\})$ が推移的な被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ のこと $\text{Gal}(Y/X) := \text{Aut}(Y/X)$

例



\mathbb{Z}_p 塔における分解公式 (結果 2)



X : 頂点荷重グラフ $K := \mathbb{Q}_p(w(V_X))$ $\mathcal{O} : K$ の付値環

$\Lambda := \mathcal{O}[[T]]$ (岩澤代数) $W(n) := \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \zeta^{p^n} = 1\}$

定義 (\mathbb{Z}_p 塔)

ガロア被覆の列 $X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$

が \mathbb{Z}_p 塔 $:\Leftrightarrow \forall n, \text{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

定理 (Wu-Feng-Sato '11 (根無しの場合の原型),

M.-Tateno '26+)

\mathbb{Z}_p 塔 $X \xleftarrow{\pi_n} \cdots \xleftarrow{\pi_n} X_n \longleftarrow \cdots$ に対して, 以下を満足する元

$F \in (\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} K) \setminus \{0\}$ を構成できる。

$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall v \in V_X, \forall w \in \pi_n^{-1}(\{v\}),$

$$\kappa_w(X_n) = \frac{\kappa_v(X)}{p^n} \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1), \quad \left(\rightsquigarrow \kappa(X_n) = \kappa(X) \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1) \right)$$

が成立する。

系 (被覆の根付き複雑度)

$\kappa_w(X_n)$ は $\pi_n^{-1}(\{v\})$ 上で一定である。 \rightsquigarrow これを $\kappa_v(X_n)$ と置く。

岩澤型公式 (結果 3)



定理 (根付き岩澤型公式, M.-Tateno '26+)

頂点 $v \in V_X$ を一つ固定し, $\forall n, \kappa_v(X_n) \neq 0$ と仮定する。このとき

$$\exists! \mu_v, \lambda_v, \nu_v \in \mathbb{Q}, \forall n \gg 0, \text{ord}_p(\kappa_v(X_n)) = \mu_v p^n + \lambda_v n + \nu_v$$

が成立する。

仮定について

一般の分解公式 $\rightsquigarrow [m \leq n \implies \kappa_v(X_m) \text{ は } \kappa_v(X_n) \text{ の倍数である}]$

$$\rightsquigarrow [\kappa_v(X_n) = 0 \implies \kappa_v(X_m) = 0 \ \forall m \geq n]$$

- 連結でないグラフが塔にある $\implies \kappa_v(X_n) = 0 \ \forall n \gg 0$

根なし複雑度についても同様の公式を得られる。

定理 (根なし岩澤型公式, M.-Tateno '26+)

$\forall n, \kappa(X_n) \neq 0$ と仮定する。このとき

$$\exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Q}, \forall n \gg 0, \text{ord}_p(\kappa(X_n)) = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

が成立する。



根付き公式の略証

- ① $[\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \kappa_v(X_n) \neq 0]$ と分解公式
 $\rightsquigarrow \forall \zeta \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} W(n), F(\zeta - 1) \neq 0 \dots (\heartsuit)$
- ② 岩澤理論の一般論と $(\heartsuit) \rightsquigarrow \exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Q}$ s.t.

$$\forall n \gg 0, \text{ord}_p \left(\sum_{\zeta \in W(n)} F(\zeta - 1) \right) = \mu p^n + \lambda n + \nu \dots (\clubsuit)$$
- ③ 分解公式と $(\clubsuit) \rightsquigarrow \forall n \gg 0,$

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(\kappa_v(X_n)) &= \text{ord}_p(\kappa_v(X)) - n + \sum_{\zeta \in W(n)} \text{ord}_p(F(\zeta - 1)) \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{=} \mu p^n + (\lambda - 1)n + (\nu + \text{ord}_p(\kappa_v(X))) \end{aligned}$$

略証終

根なしの場合について

三段階目の計算における $-n$ が無くなる
 $\rightsquigarrow \lambda$ 不変量のズレ -1 が解消される。