ハーツホーン 2 章の演習問題

2025 年 12 月 4 日 18 時 42 分更新

本文書は，修士課程在学中に取り組んだ Algebraic Geometry (Hartshorne, 1977) の演習問題 TEX を復元することと，TEX 作成の基礎鍛錬を意図したものです。

目　次

4　4 節

演習 4.2　S を概型とし，S 上の被約概型 X と S 上の分離的概型 Y を考える。このとき，二つの S 上の射 $f, g\colon X \to Y$ が，X の稠密開集合 U 上で等しいとき，$f = g$ であることを示せ。また次の二つの場合で，この結果が成立しない例を与えよ。(a) X が被約でない。(b) Y が分離的でない。

証明　まず f と g が位相空間の連続写像として等しいことを示す。f, g が S 上の射であるので，ファイバー積の普遍性から図式

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rrd, bend left, "f"] \arrow[rd, dashed, "f\times g"] \arrow[rdd, bend right, "g"'] & & \\
& Y \times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
\tag{4.1}
$$

（p_1 と p_2 はファイバー積の射影を表す。）

の可換性を満足する射 $f \times g\colon X \to Y \times_S Y$ が一意的に存在する。f と g が U 上で等しいことは，包含 $\iota\colon U \hookrightarrow X$ に対して $f \circ \iota = g \circ \iota$ が成立することを意味し，$\Delta\colon Y \to Y \times_S Y$

を対角射とするとき，二つの図式

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, bend left, "f\circ\iota"] \arrow[dr, "(f\times g)\circ\iota"] \arrow[ddr, bend right, "g\circ\iota"'] & & \\
& Y\times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, bend left, "f\circ\iota"] \arrow[dr, "\Delta\circ f\circ\iota"] \arrow[ddr, bend right, "g\circ\iota"'] & & \\
& Y\times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

がどちらも可換であるから，ファイバー積の普遍性より

$$(f\times g)\circ\iota=\Delta\circ f\circ\iota=\Delta\circ g\circ\iota \tag{4.2}$$

が成立する。よって集合として，

$$
\begin{aligned}
(f\times g)(X) &= (f\times g)(U^-) && (\because U\text{が稠密部分集合なので。})\\
&= (\Delta\circ f)(U^-) && (\because (4.2)\text{ より。})\\
&\subset (\Delta\circ f)(U)^- && (\because \Delta\circ f\text{ の連続性より。})\\
&= \Delta(f(U))^- && \\
&\subset \Delta(Y) && (\because Y\text{が分離的で，}\Delta(Y)\text{ が閉集合であるので。})
\end{aligned}
$$

となる。勝手な点 $P\in X$ に対し，

$$
\begin{aligned}
f(P) &= (p_1\circ(f\times g))(P) && (\because (4.1)\text{ の可換性より。})\\
&= p_1((f\times g)(P)) && \\
&= p_2((f\times g)(P)) && (\because (f\times g)(P)\in\Delta(Y)\text{ なので。})\\
&= g(P)
\end{aligned}
$$

と計算でき，f と g が位相空間の連続写像として等しいことがわかった。特に $f_*\mathscr{O}_X=g_*\mathscr{O}_X$ である。

次に構造層の射 $f^{\#},g^{\#}\colon \mathscr{O}_Y\to f_*\mathscr{O}_X$ が等しいことを示す。X の点 P を勝手に固定し，$f(P)$ のアフィン開近傍 W を取って，$f^{-1}(W)$ を V と置き，制限によって得られる連続写像を $f'=g'\colon V\to W$ と置く。制限 $f^{\#}|_W,g^{\#}|_W\colon \mathscr{O}_W\to f'_*\mathscr{O}_V$ が等しいことを示す。W がアフィン概型であるので，演習 2.4 から大域切断の環準同型 $\Gamma(W,f^{\#}),\Gamma(W,g^{\#})\colon \Gamma(W,\mathscr{O}_Y)\to\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$ で $f^{\#}|_W$ と $g^{\#}|_W$ が決定されるので，$\Gamma(W,f^{\#})=\Gamma(W,g^{\#})$ の成立を示せばよい。元 $a\in\Gamma(W,\mathscr{O}_Y)$ を勝手に取り，$f^{\#}(a)$—$g^{\#}(a)$ を b と置き，$b=0$ となることを見る。U が X の稠密部分集合なので，$U\cap V\neq\varnothing$ であ

り，$f|_U = g|_U$ であるので，勝手な点 $Q \in U \cap V$ に対して $f_Q^\# = g_Q^\#$ が成立し，

$$b_Q = f_Q^\#(a_{f(Q)}) - g_Q^\#(a_{f(Q)}) = 0$$

であることがわかる。部分集合 $V_b = \{\, Q \in V : b_Q \notin \mathfrak{m}_Q \,\}$ は演習 2.16 (a) より開集合で，上の計算より $V_b \cap (U \cap V) = \varnothing$ であるのに対し，$U \cap V$ が V の稠密部分集合であるから，$V_b = \varnothing$ である。したがって演習 2.18 (a) と演習 2.16 (a) より，V の勝手なアフィン開集合 Z において制限 $b|_Z$ が冪零元で，X が被約であるから $b|_Z = 0$ であり，$b = 0$ がわかった。ゆえに $f^\#|_W = g^\#|_W$ である。もしアフィン開近傍 $W \subset Y$ が $f(X) \cap W = \varnothing$ を満足するならば，$f^\#|_W$ と $g^\#|_W$ が零環の層への射となるから等しい。以上から，Y のアフィン開被覆上で $f^\#$ と $g^\#$ が等しく，$f^\# = g^\#$ であることが示された。　　証明終

(a) の例　k を代数閉体，$S = \operatorname{Spec} k$ として，$\operatorname{Spec} k$ 上の概型 $\operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2, xy)$ を X と Y とすると，アフィン概型なので $\operatorname{Spec} k$ 上分離的，かつ X 上で $x \neq 0$, $x^2 = 0$ なので被約でない。また $k[x,y]$ のイデアルとして $\sqrt{(x^2, xy)} = (x)$ であるから，ヒルベルト零点定理より

$$\operatorname{sp}(X) = \operatorname{sp}(Y) = \{\, (x, y-b) : b \in k \,\} \cup \{\, (x) \,\}$$

である。k 代数の準同型 $\phi\colon k[x,y]/(x^2,xy) \to k[x,y]/(x^2,xy)$ を，$x \mapsto 0$ と $y \mapsto y$ で定まるものとして定め，ϕ が定めるアフィン概型の射を f，恒等射を g とすると，位相空間の連続写像として $f = g$ である。なんとなれば，

閉点について　$y - b \in \phi^{-1}((x, y-b))$ なので $\phi^{-1}((x,y-b)) = (x, y-b)$ である。

生成点について　勝手な元 $b \in k$ に対して $y - b \notin \phi^{-1}((x))$ なので，$\phi^{-1}((x)) = (x)$ である。

となるからである。開集合 $U = X \setminus \{\, (x,y) \,\}$ を考える。元 $\frac{F(x,y)}{G(x,y)} \in (k[x,y]/(x^2,xy))_{\mathfrak{p}}$ を勝手に取るとき，$yF(x,y)$ と $yG(x,y)$ は y のみで表せ，ϕ は y を y に写すので，

$$\phi_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{F(x,y)}{G(x,y)}\Big) = \phi_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{yF(x,y)}{yG(x,y)}\Big) = \frac{\phi(yF(x,y))}{\phi(yG(x,y))} = \frac{yF(x,y)}{yG(x,y)} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)}$$

となり，$\phi_{\mathfrak{p}}$ が恒等写像であることがわかる。ゆえに $f^\#|_U\colon \mathscr{O}_X|_U \to \mathscr{O}_X|_U$ と $g^\#|_U\colon \mathscr{O}_X|_U \to \mathscr{O}_X|_U$ が等しく，概型の射として $f|_U = g|_U$ である。他方，閉点 $\mathfrak{m} = (x,y)$ に対して

$$\phi_{\mathfrak{m}}\Big(\frac{x}{1}\Big) = \frac{0}{1} \neq \frac{x}{1}$$

であるから $f_{\mathfrak{m}} \neq g_{\mathfrak{m}}$ がわかり，概型の射として $f \neq g$ である。　　証明終