

Hartshorne Exercise II

2025 年 12 月 22 日 0 時 45 分更新

本文書は、修士課程在学中に取り組んだ Algebraic Geometry (Hartshorne, 1977) の演習問題 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ を復元することと、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 作成の基礎鍛錬を意図したものです。

目 次

4 節	1
演習 4.2	1
演習 4.4	4
補題 (グラフ射は対角射の底変換)	4
補題 (全射な射は底変換で不変)	6



4 節

演習 4.2 S を概型とし、 S 上の被約概型 X と S 上の分離的概型 Y を考える。このとき、二つの S 上の射 $f, g: X \rightarrow Y$ が、 X の稠密開集合 U 上で等しいとき、 $f = g$ であることを示せ。また次の二つの場合で、この結果が成立しない例を与えよ。(a) X が被約でない。(b) Y が分離的でない。

証明 まず f と g が位相空間の連続写像として等しいことを示す。 f, g が S 上の射であるので、ファイバー積の普遍性から図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{g} & & Y \\
 & \searrow \langle f, g \rangle & & \nearrow p_2 & \\
 & Y \times_S Y & & & \\
 & \downarrow p_1 & & \downarrow & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & S
 \end{array}
 \quad (p_1 \text{ と } p_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。})$$

(4.1)

の可換性を満足する射 $\langle f, g \rangle: X \rightarrow Y \times_S Y$ が一意的存在する。 f と g が U 上で等しいことは、包含 $\iota: U \hookrightarrow X$ に対して $f \circ \iota = g \circ \iota$ が成立することを意味し、 $\Delta: Y \rightarrow Y \times_S Y$

を対角射とすると、二つの図式

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{g \circ \iota} & Y \\
 \langle f, g \rangle \circ \iota \searrow & & \uparrow p_2 \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & S \\
 f \circ \iota \swarrow & & \uparrow \\
 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{g \circ \iota} & Y \\
 \Delta \circ f \circ \iota \searrow & & \uparrow p_2 \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & S \\
 f \circ \iota \swarrow & & \uparrow \\
 & &
 \end{array}$$

がどちらも可換であるから、ファイバー積の普遍性より

$$(4.2) \qquad \langle f, g \rangle \circ \iota = \Delta \circ f \circ \iota = \Delta \circ g \circ \iota$$

が成立する。よって集合として、

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle(X) &= \langle f, g \rangle(U^-) && (\because U \text{ が稠密部分集合なので。}) \\
 &= (\Delta \circ f)(U^-) && (\because (4.2) \text{ より。}) \\
 &\subset (\Delta \circ f)(U)^- && (\because \Delta \circ f \text{ の連続性より。}) \\
 &= \Delta(f(U))^- \\
 &\subset \Delta(Y) && (\because Y \text{ が分離的で、} \Delta(Y) \text{ が閉集合であるので。})
 \end{aligned}$$

となる。勝手な点 $P \in X$ に対し、

$$\begin{aligned}
 f(P) &= (p_1 \circ \langle f, g \rangle)(P) && (\because (4.1) \text{ の可換性より。}) \\
 &= p_1(\langle f, g \rangle(P)) \\
 &= p_2(\langle f, g \rangle(P)) && (\because \langle f, g \rangle(P) \in \Delta(Y) \text{ なので。}) \\
 &= g(P)
 \end{aligned}$$

と計算でき、 f と g が位相空間の連続写像として等しいことがわかった。特に $f_* \mathcal{O}_X = g_* \mathcal{O}_X$ である。

次に構造層の射 $f^\#, g^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ が等しいことを示す。 X の点 P を勝手に固定し、 $f(P)$ のアフィン開近傍 W を取って、 $f^{-1}(W)$ を V と置き、制限によって得られる連続写像を $f' = g' : V \rightarrow W$ と置くと、 $(f_* \mathcal{O}_X)|_W = f'_* \mathcal{O}_V$ となり、概型の射 $(f', f^\#|_W), (g', g^\#|_W) : (V, \mathcal{O}_V) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ が得られる。制限 $f^\#|_W, g^\#|_W : \mathcal{O}_W \rightarrow f'_* \mathcal{O}_V$ が等しいことを示す。 W がアフィン概型であるので、演習 2.4 から大域切断の環準同型 $f^\#(W), g^\#(W) : \Gamma(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ によって $f^\#|_W$ と $g^\#|_W$ が決定されるので、 $f^\#(W) = g^\#(W)$ の成立を示せばよい。元 $a \in \Gamma(W, \mathcal{O}_Y)$ を勝手に取り、 $f^\#(a) - g^\#(a)$ を

b と置き, $b = 0$ となることを見る。 U が X の稠密部分集合なので, $U \cap V \neq \emptyset$ であり, $f|_U = g|_U$ であるので, 勝手な点 $Q \in U \cap V$ に対して $f_Q^\# = g_Q^\#$ が成立し,

$$b_Q = f_Q^\#(a_{f(Q)}) - g_Q^\#(a_{f(Q)}) = 0$$

であることが分かる。部分集合 $V_b = \{Q \in V : b_Q \notin \mathfrak{m}_Q\}$ は演習 2.16 (a) より開集合で, 上の計算より $V_b \cap (U \cap V) = \emptyset$ であるのに対し, $U \cap V$ が V の稠密部分集合であるから, $V_b = \emptyset$ である。したがって演習 2.18 (a) と演習 2.16 (a) より, V の勝手なアフィン開集合 Z において制限 $b|_Z$ が冪零元で, X が被約であるから $b|_Z = 0$ であり, $b = 0$ がわかった。ゆえに $f^\#|_W = g^\#|_W$ である。もしアフィン開近傍 $W \subset Y$ が $f(X) \cap W = \emptyset$ を満足するならば, $f^\#|_W$ と $g^\#|_W$ が零環の層への射となるから等しい。以上から, Y のアフィン開被覆上で $f^\#$ と $g^\#$ が等しく, $f^\# = g^\#$ であることが示された。証明終

(a) の例 k を代数閉体, $S = \text{Spec } k$ として, $\text{Spec } k$ 上の概型 $\text{Spec } k[x, y]/(x^2, xy)$ を X と Y とすると, アフィン概型なので $\text{Spec } k$ 上分離的, かつ X 上で $x \neq 0$, $x^2 = 0$ なので被約でない。また $k[x, y]$ のイデアルとして $\sqrt{(x^2, xy)} = (x)$ であるから, ヒルベルト零点定理より

$$\text{sp}(X) = \text{sp}(Y) = \{(x, y - b) : b \in k\} \cup \{(x)\}$$

である。 k 代数の準同型 $\phi: k[x, y]/(x^2, xy) \rightarrow k[x, y]/(x^2, xy)$ を, $x \mapsto 0$ と $y \mapsto y$ で定まるものとして定め, ϕ が定めるアフィン概型の射を f , 恒等射を g とすると, 位相空間の連続写像として $f = g$ である。なんとなれば,

閉点について $y - b \in \phi^{-1}((x, y - b))$ なので $\phi^{-1}((x, y - b)) = (x, y - b)$ である。

生成点について 勝手な元 $b \in k$ に対して $y - b \notin \phi^{-1}((x))$ なので, $\phi^{-1}((x)) = (x)$ である。となるからである。開集合 $U = X \setminus \{(x, y)\}$ を考える。元 $\frac{F(x, y)}{G(x, y)} \in (k[x, y]/(x^2, xy))_{\mathfrak{p}}$ を勝手に取るとき, $yF(x, y)$ と $yG(x, y)$ は y のみで表せ, ϕ は y を y に写すので,

$$\phi_{\mathfrak{p}}\left(\frac{F(x, y)}{G(x, y)}\right) = \phi_{\mathfrak{p}}\left(\frac{yF(x, y)}{yG(x, y)}\right) = \frac{\phi(yF(x, y))}{\phi(yG(x, y))} = \frac{yF(x, y)}{yG(x, y)} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

となり, $\phi_{\mathfrak{p}}$ が恒等写像であることが分かる。ゆえに $f^\#|_U: \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{O}_X|_U$ と $g^\#|_U: \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{O}_X|_U$ が等しく, 概型の射として $f|_U = g|_U$ である。他方, 閉点 $\mathfrak{m} = (x, y)$ に対して

$$\phi_{\mathfrak{m}}\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{0}{1} \neq \frac{x}{1}$$

であるから $f_{\mathfrak{m}} \neq g_{\mathfrak{m}}$ がわかり, 概型の射として $f \neq g$ である。終

(b) の例 k を体として, X を $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$, Y を二重原点を持つアフィン直線とする。このとき, 貼り合わせによって付随する相異なる射 $f, g: X \rightarrow Y$ があって, $U = X \setminus \{(x)\}$ とするとき $f|_U = g|_U$ である。終



演習 4.4 ネーター概型 S 上の有限型分離的概型 X, Y と、その間の射 $f: X \rightarrow Y$ を考える。このとき、 S 上固有な閉部分概型 Z に対し、 $f(Z)$ が Y の閉集合で、 f の概型論的像が S 上固有であることを示せ。

補題 (グラフ射は対角射の底変換) 概型 S 上の射 $f: X \rightarrow Y$ と恒等射 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ に対し、図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{f} & & Y \\
 & \searrow \Gamma_f & & \searrow p_2 & \\
 & & X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
 & \searrow \text{id}_X & \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 & & X & \longrightarrow & S
 \end{array} \quad (p_1 \text{ と } p_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。})$$

の可換性を満足する射 $\Gamma_f: X \rightarrow X \times_S Y$ が一意的存在し、 f の**グラフ射**と呼ぶ。同様に、図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_S Y & & \xrightarrow{\text{id}_Y \circ p_2} & & Y \\
 & \searrow f \times \text{id}_Y & & \searrow q_2 & \\
 & & Y \times_S Y & \xrightarrow{q_2} & Y \\
 & \searrow f \circ p_1 & \downarrow q_1 & & \downarrow \\
 & & Y & \longrightarrow & S
 \end{array} \quad (q_1 \text{ と } q_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。})$$

の可換性を満足する射 $\text{id}_Y \times f$ が一意的存在する。このとき Γ_f は、対角射 $\Delta: Y \rightarrow Y \times_S Y$ の $f \times \text{id}_Y$ による底変換である。

証明 まず次の図式

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_S Y \\
 f \downarrow & & \downarrow f \times \text{id}_Y \\
 Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_S Y
 \end{array}$$

が可換であることを、ファイバー積 $(Y \times_S Y, q_1, q_2)$ の普遍性を用いて示す。つまり図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \swarrow f & \downarrow & \searrow f & \\
 Y & \xleftarrow{q_1} & Y \times_S Y & \xrightarrow{q_2} & Y
 \end{array}$$

の破線の射の箇所に $\Delta \circ f$ と $(f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f$ を代入して、図式の可換性が満足されることを示す。 $\Delta \circ f$ について計算すると、

$$\begin{aligned} q_1 \circ (\Delta \circ f) &= (q_1 \circ \Delta) \circ f = \text{id}_Y \circ f = f, \\ q_2 \circ (\Delta \circ f) &= \dots = f \end{aligned}$$

となるので可換性を満足し、 $(f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f$ についても

$$\begin{aligned} q_1 \circ ((f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f) &= (q_1 \circ (f \times \text{id}_Y)) \circ \Gamma_f = f \circ p_1 \circ \Gamma_f = f \circ \text{id}_X = f, \\ q_2 \circ ((f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f) &= (q_2 \circ (f \times \text{id}_Y)) \circ \Gamma_f = p_2 \circ \Gamma_f = f \end{aligned}$$

となるので可換性を満足する。ゆえに図式 (4.3) は可換である。この可換図式がファイバー積の普遍性を満足することを示して証明を終える。可換図式

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{z_2} & X \times_X Y \\ z_1 \downarrow & & \downarrow f \times \text{id}_Y \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_S Y \end{array}$$

が与えられているとする。 $p_1 \circ z_2: Z \rightarrow X$ を h と置くと、図式

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & z_1 \swarrow & \downarrow h & \searrow z_2 & \\ Y & \xleftarrow{f} & X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_S Y \end{array}$$

が可換である。なんとなれば、 $f \circ h$ については

$$(4.5) \quad f \circ h = f \circ p_1 \circ z_2 = q_1 \circ (f \times \text{id}_Y) \circ z_2 = q_1 \circ \Delta \circ z_1 = \text{id}_Y \circ z_1 = z_1$$

と計算でき、 $\Gamma_f \circ h$ については図式

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & h \swarrow & \downarrow z_2 \parallel \Gamma_f \circ h & \searrow z_1 & \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

が計算

$$p_1 \circ z_2 = h, \quad (\because \text{定義。})$$

$$p_2 \circ z_2 = q_2 \circ (f \times \text{id}_Y) \circ z_2 = q_2 \circ \Delta \circ z_1 = \text{id}_X \circ z_1 = z_1,$$

$$p_1 \circ (\Gamma_f \circ h) = \text{id}_X \circ h = h,$$

$$p_2 \circ (\Gamma_f \circ h) = f \circ h = z_1 \quad (\because (4.5) \text{ より}).$$

により可換なので、ファイバー積の普遍性から $\Gamma_f \circ h = z_2$ である。最後に、他に可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \swarrow z_1 & \downarrow h' & \searrow z_2 & \\ Y & \xleftarrow{f} & X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_S Y \end{array}$$

が与えられているとすると、

$$h = p_1 \circ z_2 = p_1 \circ \Gamma_f \circ h' = \text{id}_X \circ h' = h'$$

となるので、図式 (4.4) を可換にする h は一意的である。

証明終

補題 (全射な射は底変換で不変) 概型の射 $f: X \rightarrow Y$ が位相空間の連続写像として全射であるとき、**全射な射**と呼ぶ。全射な射は底変換で不変である。より正確にいうと、全射な射 $f: X \rightarrow Y$ と概型の射 $g: Y' \rightarrow Y$ に対し、底変換 $f': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ は全射である。

証明 勝手な点 $y' \in Y'$ に対し、 $f'^{-1}(y') \neq \emptyset$ が成り立つことを示せば良い。演習 3.10(a) と底変換が推移的であることから、位相空間の同相

$$f'^{-1}(y') \underset{3.10(a)}{\cong} \text{sp}((X \times_Y Y')_{k(y')}) = \text{sp}((X \times_Y Y') \times_{Y'} \text{Spec } k(y')) \cong \text{sp}(X \times_Y \text{Spec } k(y'))$$

があるので、 $X \times_Y \text{Spec } k(y') \neq \emptyset$ であることを示せば良い。底変換の推移性をさらに用いると、概型として

$$X \times_Y \text{Spec } k(y') \cong (X \times_Y \text{Spec } k(g(y')) \times_{\text{Spec } k(g(y'))} \text{Spec } k(y')) = X_{k(g(y'))} \times_{k(g(y'))} \text{Spec } k(y')$$

であり、演習 3.10(a) より $f^{-1}(g(y')) \cong \text{sp}(X_{g(y')})$ で、 f の全射性よりこの空間が空でないことが分かる。ゆえに空でないアフィン開集合 $U \subset X_{g(y')}$ を取れ、 $U \times_{k(g(y'))} \text{Spec } k(y')$ が空でないことを示せば証明が終わる。 U と同型なアフィン概型 $\text{Spec } A$ を取ると、 A が零でない $k(g(y'))$ 代数で、かつ $U \times_{k(g(y'))} \text{Spec } k(y') \cong \text{Spec}(A \otimes_{k(g(y'))} k(y'))$ である。 $A \otimes_{k(g(y'))} k(y')$ が体 $k(y')$ を包含するので、特に零環でない。ゆえに $A \otimes_{k(g(y'))} k(y')$ が極大イデアルを持ち、 $\text{Spec}(A \otimes_{k(g(y'))} k(y'))$ が点を少なくとも一つ点を持つことが分かる。

証明終

演習 4.4 の証明 X と Y がネーター概型上の有限型概型であるから、演習 3.3 (g) よりこれらはネーター的である。また演習 3.3 (a) より閉埋め込みが有限型であるので、 X のネーター性から Z もネーター的である。 $(Z \rightarrow S) = (Y \rightarrow S) \circ (f|_Z)$ が固有かつ $Y \rightarrow S$ が

分離的であるので，系 4.8(e) より $f|_Z$ も固有である。よって，固有射は閉写像であるので， $f(Z)$ が閉集合であることが従う。 証明終

