モジュラー形式に関する書き留め

2026 年 2 月 13 日 14 時 51 分更新

Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

目　　次

約束

1. 整数すべてがなす環を $\mathbb{Z}$，実数体を $\mathbb{R}$，複素数体を $\mathbb{C}$ で表す。
2. 虚数単位を i で表すことにする。
3. 複素数 z の実部を $\mathfrak{R}z$，虚部を $\mathfrak{I}z$ で表す。
4. 単位的可換環 R と正整数 n に対し，R 係数 n 次一般線形群を $\mathrm{GL}_n(R)$，特殊線形群を $\mathrm{SL}_n(R)$，特殊直交群を $\mathrm{SO}_n(R)$ で表す。
5. 二つの整数 m, n に対して，その最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表す。

1　特殊線形群と上半平面

定義 1.1　集合 $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{I}z > 0\}$ を $\mathbb{H}$ と置き，**上半平面**と呼ぶ。

命題 1.2　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対して定まる正則関数 $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ は

$$c \neq 0 \implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c$$
$$c = 0 \implies \gamma \cdot \infty = \infty$$

と拡張できる定数でない $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の有理型関数である。さらに関係 $(\gamma, z)\mapsto\gamma\cdot z$ によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ への作用が定まる。

証明　関数 $\gamma\cdot(-)\colon\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ が有理型であることについて　$c=0$ のときは明らかであるから，$c\neq 0$ のときを考える。$\lim_{n\to\infty}z_n=-d/c$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，$\lim_{n\to\infty}cz_n+d=0$ かつ $\lim_{n\to\infty}az_n+b=-(ad-bc)/c\neq 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\gamma\cdot z_n=\infty$ である。ゆえに $\gamma\cdot(-)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型である。同様に $\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，すべての n について $z_n\neq 0$ として良く，

$$\frac{az_n+b}{cz_n+d}=\frac{a+b/z_n}{c+d/z_n}\to\frac{a}{c}\qquad(n\to\infty)$$

であるから $\gamma\cdot(-)$ は $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の有理型関数である。

関係 $(\gamma, z)\mapsto\gamma\cdot z$ が群作用であることについて　$\gamma=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ のとき $\gamma\cdot z=\frac{z+0}{0+1}=z$ であるので, 後は結合律を見れば良い。元 $\gamma,\gamma'\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を勝手に取り, $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma'=\left(\begin{smallmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{smallmatrix}\right)$ と表すとき,

$$\gamma'\cdot\gamma=\begin{pmatrix}aa'+b'c & a'b+b'd\\ ac'+cd' & bc'+dd'\end{pmatrix}$$

である。正則関数 $\gamma'=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ の定義域を $U(\subset\mathbb{C})$ とすると，連続性から，$\gamma(V)\subset U$ となる開集合 $V\subset\mathbb{C}$ を取れる。勝手な複素数 $z\in\mathbb{V}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\gamma'\cdot(\gamma\cdot z)&=\gamma'\cdot\frac{az+b}{cz+d}\\
&=\frac{(\frac{az+b}{cz+d})a'+b'}{(\frac{az+b}{cz+d})c'+d'}\\
&=\frac{(az+b)a'+b'(cz+d)}{(az+b)c'+d'(cz+d)} &&\text{（分母を払った）}\\
&=\frac{(aa'+b'c)z+(a'b+b'd)}{(ac'+cd')z+(bc'+dd')} &&\text{（分母分子を } z \text{ についてまとめた）}\\
&=(\gamma'\cdot\gamma)\cdot z
\end{aligned}$$

と計算でき，一致の定理から $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の関数として $\gamma'\cdot(\gamma\cdot(-))=(\gamma'\cdot\gamma)\cdot(-)$ であることが分かる。よって $(\gamma, z)\mapsto\gamma\cdot z$ が群作用であることが確かめられた。　証明終

命題 1.3　元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と複素数 z（$c\neq 0$ のとき $z\neq -d/c$ を課す）に対して,

$$\Im(\gamma\cdot z)=\det(\gamma)\frac{\Im z}{|cz+d|^2}\tag{1.1}$$

が成立する。

証明　複素数 z の共役を $\bar{z}$ で表すことにする。このとき

$$
\begin{aligned}
2i\Im(\gamma\cdot z) &= \gamma\cdot z - \overline{\gamma\cdot z} && \because \text{定義}\\
&= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} && \because a,b,c,d\in\mathbb{R}\ \text{なので}\\
&= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)-(cz+d)(a\bar{z}+b)}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}\\
&= \det(\gamma)\frac{2i\Im z}{|cz+d|^2}
\end{aligned}
$$

と計算でき，この計算結果を $2i$ で割れば目的の等式を得る。　証明終

系 1.4　関係 $(\gamma, z)\mapsto \gamma\cdot z$ によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{H}$ に作用する。

証明　$\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，$z\in\mathbb{H}$ のとき $\det(\gamma)=1>0$ かつ $\Im z>0$ であるから，(1.1) より $\Im(\gamma\cdot z)>0$ であり，これは $\gamma\cdot z\in\mathbb{H}$ を意味する。　証明終

命題 1.5　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用は推移的である。

証明　複素数 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取り，$z=x+iy$，$x,y\in\mathbb{R}$ と表すと，$y>0$ であることに注意して，

$$
\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}}\end{pmatrix}\cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x+iy = z
$$

と計算できるので，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\cdot i=\mathbb{H}$ である。　証明終

命題 1.6　安定化部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と等しい。したがって関係 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\cdot\gamma\mapsto\gamma\cdot i$ は全単射写像 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{H}$ を定める。

証明　元 $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ を勝手に取り，$\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ と表すと，

$$
\begin{aligned}
\gamma\cdot i = i &\iff \frac{ai+b}{ci+d}=i\\
&\iff b+ia=-c+id\\
&\iff a=d\ \text{かつ}\ c=-b\\
&\iff \gamma\ \text{が直交行列である}
\end{aligned}
$$

となり，これは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i=\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ であることを意味する。　証明終

2　モジュラー関数

定義 2.1 (弱モジュラー関数)　k を整数とする。有理型関数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が**レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数**であるとは，勝手な元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$(\star) \qquad f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

が成立するときをいう。

命題 2.2　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f を考える。このとき勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して次の三つが成立する。

(1) $f(z) = (-1)^k f(z)$ が成り立つ。ゆえに f が恒等的に零でなければ，k は偶数でなければならない。

(2) $f(z+1) = f(z)$ が成り立つ。ゆえに f は周期的関数である。

(3) $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$ が成り立つ。

証明　(1) について　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

(2) について　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z+1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

(3) について　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z + 0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。　証明終

命題 2.3　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $q(= q(z)) = \exp(2\pi i z)$ と置く。このとき $z \in \mathbb{H}$ であるためには，$0 < |q| < 1$ であることが必要十分である。

証明　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)||\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \end{aligned}$$

$$= |\exp(-2\pi\Im z)|$$

であるから，

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi\Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

穴あき単位円盤 $\{q \in \mathbb{C} \colon 0 < |q| < 1\}$ を $\mathbb{D}^*$ と置く。また実数 a に対して

$$\Omega_a = \{ w \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ a < \arg w < 2\pi + a \}$$
$$D_a = \{ z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a \}$$

として対数関数の分枝

$$L_a \colon \Omega_a \to D_a; \quad w \mapsto \log|w| + i \arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

命題 2.4　f を弱モジュラー関数とする。各点 $q \in \mathbb{D}^*$ に対して，$q \in \Omega_a$ を満足するような対数関数の分枝 $L_a \colon \Omega_a \to D_a$ を一つ取る。このとき複素数

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) \tag{2.1}$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数 $\widetilde{f}$ が定まる。また (2.1) を単に

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{\log q}{2\pi i}\Big)$$

と表す。

証明　$q \in \Omega_a$，$q \in \Omega_{a'}$ となる二つの分枝 $L_a, L_{a'}$ を取ると，整数 n を用いて $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$ と表せるので，

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに $q \in \mathbb{D}^*$ であれば，

$$\exp\Big(2\pi i \frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*, \qquad \exp\Big(2\pi i \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので，命題 2.3 より $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$ である。命題 2.2 (2) より f が $f(z+1) = f(z)$ を満足する周期関数であるから，$q \in \mathbb{D}^*$ のとき，

$$f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big)$$

となり，(2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。$L_a(q)/2\pi i$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数，f も $\mathbb{H}$ 上の有理型関数であるから，これら関数の合成である $\widetilde{f}$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数である。$\bigcup_{a>0}(\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$ であるから，$\widetilde{f}$ が $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数であることが分かった。　証明終

定義 2.5　f を弱モジュラー関数とする。

(1) $\widetilde{f}$ が 0 で有理型であるとき，f が ∞ **で有理型**という。

(2) $\widetilde{f}$ が 0 で正則であるとき，f が ∞ **で正則**という。

$\widetilde{f}$ が 0 で有理型のとき，ローラン展開

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ，$q = q(z) = \exp(2\pi i z)$ のとき，虚部が十分大きい点 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$f(z) = f\Big(\frac{\log\exp(2\pi i z)}{2\pi i}\Big) = \widetilde{f}(\exp(2\pi i z)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi i z}$$

となり，f のフーリエ展開を与える。複素数列 $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$ を f の**フーリエ係数**と呼ぶ。また f が ∞ で正則であれば，$N = 0$ とできる。

定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式)　$f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数とする。

(1) f が ∞ で有理型のとき，f を**レベル 1 荷重 k のモジュラー関数**と呼ぶ。

(2) f が $\mathbb{H}$ 上の正則関数で，かつ ∞ で正則のとき，f を**レベル 1 荷重 k のモジュラー形式**と呼ぶ。

(3) モジュラー形式 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ の q **展開**とは，$\widetilde{f}$ のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2ni\pi z}$$

のことをいう。さらに $a(0) = 0$ のとき f を**尖点形式**という。

命題 2.7　k を整数とし，集合 M_k, S_k を

$$M_k = \{f : f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である}\}$$
$$S_k = \{f : f \text{ は 1 荷重 } k \text{ の尖点形式である}\}$$

で定める。このとき M_k と S_k は $\mathbb{C}$ 線形空間である。

証明　M_k が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式 $f, g \in M_k$ を勝手に取るとき，正則関数の和は正則関数であるから，$f + g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ と $\widetilde{f} + \widetilde{g}\colon \mathbb{D}^* \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ であるから，$(f+g)^{\sim}\colon \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ は正則関数であ

る。あとは $f+g$ が $(\star)$ を満足することを示せば，$f+g \in M_k$ であることが分かる。元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\gamma\cdot z) &= f(\gamma\cdot z) + g(\gamma\cdot z) \\
&= (cz+d)^k f(z) + (cz+d)^k g(z) \\
&= (cz+d)^k (f+g)(z)
\end{aligned}
$$

と計算でき，$(\star)$ を $f+g$ が満足することが確かめられ，$f+g \in M_k$ である。M_k がスカラー倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手な尖点形式 $f, g \in S_k$ に対して，$(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ が成立することから，S_k が $\mathbb{C}$ 線形空間であることも従う。

証明終

命題 2.8　整数 k, l とモジュラー形式 $f \in M_k, g \in M_l$ に対し，$fg \in M_{k+l}$ が成立する。また f が尖点形式のとき fg も尖点形式である。

証明　正則関数の積は正則関数であるから，$fg\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ と $\widetilde{f}\widetilde{g}\colon \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(fg)^{\sim} = \widetilde{f}\widetilde{g}$ であるから，$(fg)^{\sim}$ も正則関数である。あとは fg が $(\star)$ を満足することを示せばよく，元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$
\begin{aligned}
(fg)(\gamma\cdot z) &= (cz+d)^k f(z)(cz+d)^l g(z) \\
&= (cz+d)^{k+l}(fg)(z)
\end{aligned}
$$

と計算できるので，$fg \in M_{k+l}$ であることが確かめられた。また f が尖点形式のとき，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \\
\widetilde{g}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n
\end{aligned}
$$

とローラン展開すると，

$$
(fg)^{\sim}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n, \qquad c(n) = \sum_{m=0}^{n} a(m)b(n-m)
$$

であるから, 特に $c(0) = a(0)b(0) = 0$ で, fg は尖点形式であることが分かる。　証明終

3　アイゼンシュタイン級数

定義 3.1　k を 3 以上の整数とする。各複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して，級数

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m,\,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

を定め，$G_k(z)$ を**アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

補題 3.2　K を $\mathbb{H}$ の有界閉集合とする。このとき勝手な点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leqq |mz+n| \tag{3.1}$$

が成立するような正数 C が存在する。

証明　$C_1 = \min\{\, \Im z : z \in K\}$，$C_2 = \max\{\, |\Re z| : z \in K\}$ と置く。

点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を勝手に取り，$z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）と表すと，

$$|mz+n| = |(mx+n) + imy| = \sqrt{(mx+n)^2 + (my)^2}$$

となる。$C_2 = 0$ であれば常に $x = 0$ で，$|mz+n| \geqq |mx+n| = |n|$ かつ $|mz+n| \geqq y|m| \geqq C_1|m|$ であるから，$C = \min\{1, C_1\}$ が (3.5) を満足する正数である。$C_2 \neq 0$ の場合を考える。前述の議論と同じく $|m|$ については $|mz+n| \geqq C_1|m|$ である。$|n|$ について，$|m| \geqq |n|/(2C_2)$ のとき

$$|mz+n| \geqq C_1|m| \geqq \frac{C_1}{2C_2}|n| \tag{3.2}$$

となり，そうでないとき $n \neq 0$ かつ $|m/n| < 1/(2C_2)$ となり，常に $|m/n||x| \leqq 1/2$ で，

$$|mx+n| = \left|n\Big(\frac{m}{n}x+1\Big)\right| \geqq |n|\Big(1-\left|\frac{m}{n}\right||x|\Big) \geqq \frac{1}{2}|n| \tag{3.3}$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると，$C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$ が (3.5) を満足する正数である。　証明終

定理 3.3　$k \geqq 3$ のとき G_k は $\mathbb{H}$ 上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

証明　K を $\mathbb{H}$ の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より，勝手な点 $z \in K$ と勝手な元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leqq |mz+n|$$

となるような正数 C が存在し,

$$\sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{|mz+n|^k} \leqq \frac{1}{C^k} \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{\max\{|m|,\,|n|\}^k}$$

であるから，右辺の級数の収束を示せば，G_k が K 上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数 N に対して $\{\,(m,n)\in\mathbb{Z}^2 : \max\{|m|,|n|\}=N\}$ の個数を数える。$|m|>|n|$ のものを数えると，$m=\pm N$ で，$n=-N+1,\,-N+2,\,\ldots,\,-1,0,1,\,\ldots,N-1$ の $2(2N-1)$ 個ある。同様に $|n|<|m|$ のものも $2(2N-1)$ 個ある。$|m|=|n|$ のものは，$(N,N),(N,\,-N),(-N,N),(-N,\,-N)$ の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は $8N$ 個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{\max\{|m|,\,|n|\}^k} = \sum_{N=1}^{\infty}\frac{8N}{N^k} = 8\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^{k-1}}$$

であり，いま $k\geqq 3$ であるからこの正項級数は収束する。以上で，G_k が $\mathbb{H}$ 上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式 $mz+n$ は $\mathbb{H}$ 上で常に零でないから，有理多項式 $1/(mz+n)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり，G_k の収束先が正則関数であることも分かる。 証明終

定理 3.4 $k\geqq 3$ のとき正則関数 $G_k\colon\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ はレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明 元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取る。γ が全単射写像 $\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ を誘導することに注意すると,

$$\begin{aligned}
G_k(\gamma\cdot z) &= \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{(m(\gamma\cdot z)+n)^k}\\
&= \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{(cz+d)^k}{(m(az+b)+n(cz+d))^k} && \because \text{分母を払った}\\
&= \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{(cz+d)^k}{((ma+nc)z+(mb+nd))^k}\\
&= \sum_{\substack{(m',\,n')\,:\\(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,\,0)\},\,\left(\begin{smallmatrix}m'\\n'\end{smallmatrix}\right)=\gamma\left(\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right)}} \frac{(cz+d)^k}{(m'z+n')^k}\\
&= (cz+d)^k \sum_{\substack{(m',\,n')\in\mathbb{Z}^2\,:\\(m',\,n')\neq(0,\,0)}} \frac{1}{(m'z+n')^k} && \because \gamma\text{ の全単射性より}
\end{aligned}$$

$$= (cz+d)^k G_k(z)$$

となり，G_k が $(\star)$ を満足することが確かめられた。　証明終

系 3.5　k が 3 以上の奇数のとき $\mathbb{H}$ 上で $G_k(z) = 0$ である。

証明　定理 3.4 より G_k が荷重 k の弱モジュラー関数であるから，命題 2.2 (1) より G_k は $\mathbb{H}$ 上の零関数である。　証明終

さらに弱モジュラー関数 G_k はモジュラー形式である。

定理 3.6　$k \geqq 3$ のとき G_k は ∞ で正則である。つまり G_k はモジュラー形式である。

この定理の証明のために，ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて G_k の q 展開を表示する。

定義 3.7　(1) 1 より大きい実数 s に対して，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数 ζ を定め，**ゼータ関数**と呼ぶ。

(2) 正整数 n と実数 l に対して，

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d>0,\ d|n}} d^l$$

として関数 σ_l を定め，**約数関数**と呼ぶ。

(3) 原点周りの $\mathbb{D}^*$ 上の正則関数 $z/(e^z - 1)$ のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数 B_k を**ベルヌーイ数**と呼ぶ。

補題 3.8 (オイラーの等式)　正の偶数 k に対して，

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^k B_k}{k!} \tag{3.4}$$

が成立する。

証明　三角関数の公式

$$\pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{3.5}$$

を用いる[1)]。(3.5) の左辺に z を掛けたものを計算すると，$z \in \mathbb{H}$ のとき

$$\pi z\cot(\pi z) = \pi z\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \qquad \because \cot \text{ の定義}$$

1）　証明は，例えばヘルグロッツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$
\begin{aligned}
&= \pi z \frac{(e^{\pi iz}+e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz}-e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos,\ \sin \text{ の定義} \\
&= \pi iz \frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1} \\
&= \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz}-1} \\
&= \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(2\pi z)^k && \because z \in \mathbb{H} \text{ なので，命題 2.3 から } e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので} \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

となる。次に (3.5) の右辺に z を掛けたものを計算すると，

$$
\begin{aligned}
z\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n} &= 1 + z\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-n}\right) \\
&= 1 + z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} && \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2z^2}{n^2-z^2} && \because z \text{ を総和の中に入れ，符号を調整した} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2}\frac{1}{1-(\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l}}{n^{2l}} && \because \frac{1}{1-z} \text{ の原点におけるテイラー展開} \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty}2z^{2(l+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2(l+1)}} && \because \text{和を交換した} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty}2z^{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2l}} && \because \text{添字 } l \text{ を 1 ずらした} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty}2\zeta(2l)z^{2l} && (3.7)
\end{aligned}
$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく，2 以上の偶数 $k = 2l$ に関する z^k の係数を比較することで，目的の等式

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。 証明終

補題 3.9 正の偶数 k に対して，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k)\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}n^k q^n \qquad (3.8)$$

が成立する。

証明　上述の補題と同様に三角関数の公式

$$\pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{3.9}$$

を用いる。(3.9) の左辺を書き直すと，

$$\begin{aligned}
\pi\cot(\pi z) &= \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{ の定義} \\
&= \pi\frac{(e^{\pi iz}+e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz}-e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos,\ \sin \text{ の定義} \\
&= \pi i\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1} \\
&= \pi i + \pi i\frac{2}{q-1} && \because q = e^{2\pi iz} \text{ と置いているので} \\
&= \pi i - 2\pi i\frac{1}{1-q} \\
&= \pi i - 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty} q^n && \because \frac{1}{1-q} \text{ の原点におけるテーラー展開}
\end{aligned}$$

となるので，$n \geqq 1$ のとき $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}q^n = (2\pi in)^{k-1}q^n$ であることに注意して，(3.9) の両辺を z について $(k-1)$ 階微分すると，

$$-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n = (-1)^{k-1}(k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}$$

となり，両辺を $(k-1)!$ で割ると，いま k が偶数であるから $(-1)^{k-1} = -1$ なので，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n$$

となる。また (3.4) から

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} = -\zeta(k)\frac{2k}{B_k}$$

であるから，目的の等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k)\frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n$$

を得られる。　証明終

定理 3.10　4 以上の偶数 k に対して，G_k の q 展開が

$$G_k(z) = 2\zeta(k)\Big(1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n\Big) \tag{3.10}$$

と表される。

証明　$G_k(z)$ を計算していくと，

$$
\begin{aligned}
G_k(z) &= \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\ (m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^k}}_{m=0\text{ の項}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}\Big) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(-mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-mz-n)^k}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}\Big) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}\Big) && \because k\text{ が偶数なので} \\
&=2\zeta(k)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k} \\
&=2\zeta(k)+2\sum_{m=1}^{\infty}\Big(-\zeta(k)\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}(e^{2\pi imz})^n\Big) && \because (3.8)\text{ を用いた} \\
&=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q^{mn}\Big) && \because q^{mn}=(e^{2\pi imz})^n \\
&=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}:\\ n>0,\ n|d}}n^{k-1}q^{d}\Big) && \because d=mn\text{ と置いた} \\
&=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{d=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(d)q^{d}\Big) && \because \text{約数関数の定義} \\
&=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^{n}\Big)
\end{aligned}
$$

と計算でき，これが目的の等式であった。　　証明終

定理 3.6 の証明　k が奇数のときは G_k が零関数であるので明らかである。k が偶数のとき (3.10) から

$$\widetilde{G}_k(q)=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\Big)$$

が成立するので，$\lim_{q\to 0}\widetilde{G}_k(q) = 2\zeta(k)$ である。これは $\widetilde{G}_k(q)$ が原点で正則であることを意味し，したがって G_k が ∞ で正則であることが従う。　　証明終

定義 3.11　3 以上の整数 k に対して，$\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上の正則関数 E_k を

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

で定め，**正規化アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

ベルヌーイ数（と約数関数）を計算できれば，E_k を明示的に書き下すことができるので，ここでベルヌーイ数の漸化式を述べておく。

命題 3.12　$B_0 = 1$，かつ $d \geqq 1$ のとき

$$B_d = -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k$$

が成り立つ。

証明　e^z を原点周りでテイラー展開すると

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

であるから，

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

となる。したがって

$$1 = \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k \right) = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{d} \frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!} \right) z^d$$

となるので，係数比較をすることで，$B_0 = 1$ かつ

$$\sum_{k=0}^{d} \frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!} = 0 \tag{3.11}$$

が分かる。(3.11) を B_d について解くことで，

$$\begin{aligned} B_d &= -\sum_{k=0}^{d-1} \frac{d!}{k!\,(d-k+1)!} B_k \\ &= -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d+1)!}{k!\,(d-k+1)!} B_k && \because d+1 \text{ を挟み込んだ} \\ &= -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k && \because \text{二項係数の定義} \end{aligned}$$

と計算でき，目的の漸化式を得られる。　　　　証明終

いくつかベルヌーイ数を計算すると，

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2}, \\
B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = -\frac{1}{3}\Big(1 - \frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{6}, \\
B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0, \\
B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{5}\Big(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0\Big) = -\frac{1}{30}, \\
B_5 &= \cdots = 0, \\
B_6 &= \cdots = \frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

などとなる。したがって，正規化アイゼンシュタイン級数は

$$
\begin{aligned}
E_4(z) &= 1 - 8(-30)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n = 1 - 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \cdots), \\
E_6(z) &= 1 - 12 \cdot 42\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n = 1 - 504(q + 33q^2 + 244q^3 + \cdots)
\end{aligned}
$$

などとなる。ここで正則関数 $E_4^3 - E_6^2$ を考えると，これは命題 2.7 と命題 2.8 から荷重 12 のモジュラー形式で，上の計算より

$$
(E_4(z))^3 - (E_6(z))^2 = 1728q + o(q)
$$

となるので，荷重 12 の尖点形式であることが分かる。尖点形式 Δ を $(E_4^3 - E_6^2)/1728$ で定め，**ラマヌジャンのデルタ**と呼ぶ。また Δ のフーリエ係数を $(\tau(n))_{n=0}^{\infty}$ で表し，**ラマヌジャンのタウ関数**と呼ぶ。具体的には

$$
\tau(0) = 0, \qquad \tau(1) = 1, \qquad \tau(2) = -24, \qquad \tau(3) = 252, \ \ldots
$$

と計算できる。ラマヌジャンのタウ関数については，ラマヌジャンによる有名な予想がある。

予想 3.13 (ラマヌジャン予想)　ラマヌジャンのタウ関数に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して，n と m が互いに素であるならば

$$
\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)
$$

が成立する。

(2) p を素数，r を正整数とするとき

$$
\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})
$$

が成立する。

予想 3.13 は，以降で扱うヘッケ作用素（6 節）を用いることで証明される。

4　基本領域

定義 4.1　群 G が $\mathbb{H}$ に作用しているとする。$\mathbb{H}$ の閉部分集合 $\mathcal{D}$ が条件

(FD1) $\mathcal{D}$ の境界は面積零である。

(FD2) 各点 $z \in \mathbb{H}$ に対し，$\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ を満足する元 $\gamma \in G$ が存在する。

(FD3) 相異なる 2 点 $z, z' \in \mathcal{D}$ に対して，$\gamma \cdot z = z'$ となる元 $\gamma \in G$ が存在するとき，z と z' は共に $\mathcal{D}$ の境界に属す。

観察 4.2　(ii) の条件から，$\mathbb{H}$ の勝手な点は，基本領域の点と G の下同値である。(iii) の条件から，基本領域に属す相異なる内点 z, z' は G の下同値でない。

今回は G が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，系 1.4 の作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ を考える。

観察 4.3　$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ を S，$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ を T と置く。

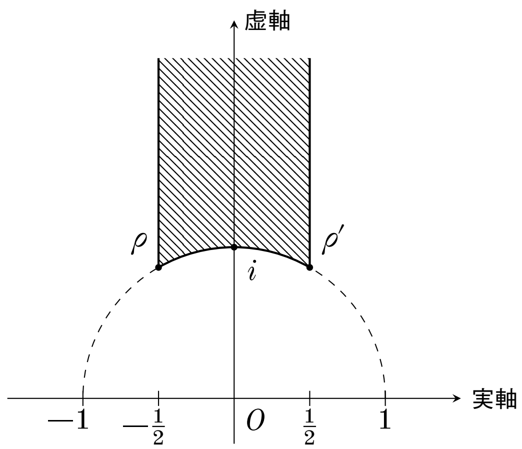
(1) 点 $z \in \mathbb{H}$ に対して，$S \cdot z = -1/z$ である。特に $|z| \leqq 1$ ならば $|S \cdot z| \geqq 1$ である。

(2) 点 $z \in \mathbb{H}$ に対して，$T \cdot z = z + 1$ である。また $T^{-1} \cdot z = z - 1$ であるから，特に $-1/2 \leqq \Re(T^n \cdot z) \leqq 1/2$ を満足するような整数 n がある。

以下 $\mathcal{D}$ を，$\mathbb{H}$ の閉集合

$$\left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leqq \Re(z) \leqq \frac{1}{2},\ |z| \geqq 1 \right\} \tag{4.1}$$

とし，これが作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ の基本領域であることを示す。$\mathcal{D}$ を図示すると，$\rho = -1/2 + i\sqrt{3}/2$，$\rho' = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ とするとき，図



における斜線部分の領域が $\mathcal{D}$ である。

定理 4.4　$\mathbb{H}$ の閉集合

$$\mathcal{D}=\left\{z\in\mathbb{H}:-\frac{1}{2}\leqq\Re(z)\leqq\frac{1}{2},\ |z|\geqq 1\right\}$$

は作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\curvearrowright\mathbb{H}$ の基本領域である。

証明　(FD1) について　$\mathcal{D}$ の境界は曲線であるから，面積零である。

(FD2) について　点 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に固定する。$\mathbb{Z}z+\mathbb{Z}$ が $\mathbb{C}$ の格子であるから，集合

$$\left\{|c'z+d'|:\left(\begin{smallmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\right\}$$

の最小値を与えるような行列 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。(1.1) の虚部の表示から，γ は集合

$$\left\{\Im(\gamma'\cdot z):\gamma'\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\right\}$$

の最大値を γ が与える。察 4.3 (2) から，$-1/2\leqq\Re(T^n\gamma\cdot z)\leqq 1/2$ を満足するような整数を取れる。この n について $|T^n\gamma\cdot z|\geqq 1$ で，したがって $T^n\gamma\cdot z\in\mathcal{D}$ である。なんとなれば，$|T^n\gamma\cdot z|<1$ だったとすると，

$$\begin{aligned}\Im(ST^n\gamma\cdot z)&=\Im\Big(-\frac{1}{T^n\gamma\cdot z}\Big)\\&=\frac{\Im(T^n\gamma\cdot z)}{|T^n\gamma\cdot z|}\\&>\Im(T^n\gamma\cdot z)\\&=\Im(\gamma\cdot z)&&\because T^n\gamma\cdot z=\gamma\cdot z+n\ \text{なので}\end{aligned}$$

と計算でき，γ の最大性に反するからである。

(FD3) について　相異なる点 $z,z'\in\mathcal{D}$ について，$\gamma\cdot z=z'$ を満足する元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ があるとし，z,z' が $\mathcal{D}$ の境界に属すことを示したい。ここで，$\mathcal{D}$ の点 z が $\mathcal{D}$ の境界に属すためには,「$|\Re(z)|=1/2$ または $|z|=1$」が成立することが必要十分であることに注意する。$\Im(z')\geqq\Im(z)$ と仮定しても一般性が失われない。すると (1.1) より

$$\frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}=\Im(\gamma\cdot z)=\Im(z')\geqq\Im(z)$$

となるので，$1\geqq|cz+d|$ である。特に虚部について見ると

$$1\geqq|\Im(cz+d)|=|\Im(cz)|=|c|\Im(z)\geqq|c|\Im(\rho)=|c|\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので，$c=-1,0,1$ のいずれかである。

・ $c=0$ のとき。$\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \det\gamma = 1$ であるから，$d=\pm 1$ である。$d=1$ のときを考えると，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ で，$\gamma \cdot z = z + b$ となる。$\gamma\cdot z \in \mathcal{D}$ であるから，

$$\frac{1}{2} \geqq |\Re(\gamma\cdot z)| = |\Re(z+b)| = |\Re(z)+b| \geqq |b| - |\Re(z)| \geqq |b| - \frac{1}{2}$$

となるので，$b=-1,0,1$ のいずれかである。$z' \neq z$ と仮定しているので $b \neq 0$ である。$b=1$ であるなら，$\Re(z) = -1/2$, $\Re(z') = 1/2$ となり，これらは $\mathcal{D}$ の境界の点である。同様に，$b=-1$ であるなら，$\Re(z) = 1/2$, $\Re(z') = -1/2$ となり，これらは $\mathcal{D}$ の境界の点である。$d=-1$ のときは，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ で，$\gamma\cdot z = z - b$ となるので，$d=1$ のときの議論と同様である。

・ $c=1$ のとき。このとき $1 \geqq |z+d|$ であるから，

$$1 \geqq |z+d| \geqq |\Re(z+d)| \geqq |d| - |\Re(z)| \geqq |d| - \frac{1}{2}$$

となり，$|d| \leqq 3/2$ であることが分かる。d が整数であるから，$d=-1,0,1$ のいずれかである。$d=0$ のとき $|z|=1$ であるので，z は $\mathcal{D}$ の境界に属す。また $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ であるので，$\det(\gamma)=1$ と合わせて，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である。すると $z' = \gamma\cdot z = -1/z + a$ と計算でき，$|-1/z| \leqq 1$ であることを踏まえると，

$$\frac{1}{2} \geqq |\Re(z')| = \left|\Re\left(-\frac{1}{z}\right) + a\right| \geqq |a| - \left|\Re\left(-\frac{1}{z}\right)\right| = |a| - 1$$

となるので，$|a| \leqq 3/2$ である。a が整数であるので，$a=-1,0,1$ のいずれかである。$a=0$ ならば $|z'| = |-1/z| = 1$ であるので，z' は $\mathcal{D}$ の境界の点である。$a=1$ ならば $\Re(-1/z) = -1/2$ かつ $\Re(z') = 1/2$ であるので，この場合も z' は $\mathcal{D}$ の境界の点である。$a=-1$ の場合も同様に考えると，$\Re(-1/z) = 1/2$ かつ $\Re(z') = -1/2$ であるので，z' は $\mathcal{D}$ の境界の点である。

・ $c=-1$ のとき。$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ となり，$\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\cdot z = z$ であるので，$c=1$ の場合の議論に帰着できる。

以上でいずれの場合でも z, z' が $\mathcal{D}$ の境界に属すことが示された。　　　証明終

5 釣り合い公式

引き続き (4.1) の基本領域 $\mathcal{D}$ を考える。

補題 5.1　零でないモジュラー形式 f に関して，$\mathcal{D}$ における f の零点は有限個である。

証明　f が $\mathbb{H}$ 上の正則関数，$\widetilde{f}$ が $\mathbb{D}$ 上の正則関数であることに注意する。$\mathcal{D}$ 内の f の零点集合を Z と置き，Z が無限集合であったと仮定する。さらに Z が有界集合であったと

すると，相異なる可算個の Z の点を番号付けして点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を考えると，点列コンパクト性から収束部分列 $(z_{n(i)})_{i=1}^{\infty}$ を取れる。すべての i について $f(z_{n(i)}) = 0$ であるから，一致の定理より $f \equiv 0$ となり，矛盾が生じるので，Z は有界でない。∞ に収束する Z の点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を取り，$q_n = \exp(2\pi i z_n)$ として $\mathbb{D}$ 内の点列 $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めると，$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ かつ $\widetilde{f}(q_n) = 0$ であるから，一致の定理より $\widetilde{f} \equiv 0$ で，再び一致の定理より $f \equiv 0$ となり，矛盾が生じる。ゆえに Z は有限集合であることが従う。　証明終

定理 5.2 (釣り合い公式)　$f \not\equiv 0$ であるようなレベル 1 荷重 k のモジュラー形式 f を考える。複素数 $z \in \mathbb{H}$ における f の位数を $v_z(f)$ で表し，0 における $\widetilde{f}$ の位数を $v_\infty(f)$ で表すことにする。このとき

$$v_\infty(f) + \frac{v_i(f)}{2} + \frac{v_\rho(f)}{3} + \sum_{\substack{p\in\mathcal{D}:\\ p\nsim i,\rho}} v_p(f) = \frac{k}{12} \tag{5.1}$$

が成立する。

証明　零点の虚部の集合

$$\{\, \Im(z) \in \mathcal{D} : z \text{ は } f \text{ の零点である} \,\}$$

が補題 5.1 より有限集合であるから，これら虚部より大きい数 N を取れる。正数 $\epsilon > 0$ を取り，1 図に表す閉曲線 $ABCC'DD'EE'A$ を考える。

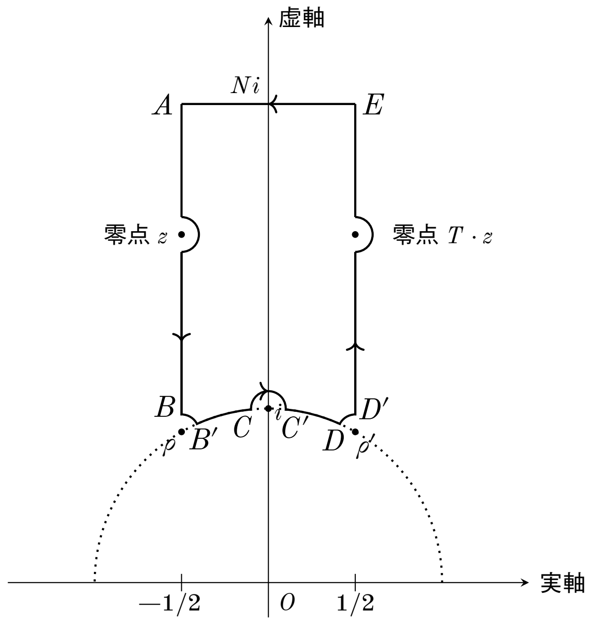


図 1　閉曲線 $ABB'CC'DD'EA$

ここで曲線は次の条件を満足するようにする。

- 曲線は，集合 $\mathcal{D} \cap \{ z \in \mathbb{H} : \mathfrak{I}(z) \leqq N \}$ の境界に沿ように，$-1/2 + Ni$ から ρ に向かって動き始める。
- 実部が負であるとき，f の零点を進行方向左側に半径 ϵ の円弧で避ける。
- 実部が正であるとき，f の零点を進行方向右側に半径 ϵ の円弧で避ける。
- i, ρ, ρ' はすべて進行方向左側に半径 ϵ の円弧で避ける。

したがってこの閉曲線の内部にある f の零点は

$$\{ z \in \mathcal{D} : z \text{ は } f \text{ の零点である} \} \setminus \Big(\{i, \rho, \rho'\} \cup \{ z \in \mathbb{H} : \mathfrak{R}(z) < 0 \} \Big)$$

である。特に，閉曲線の内部にある勝手な 2 点は互いに $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の下同値でないので，偏角の原理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ABCC'DD'EE'A} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{\substack{p \in \mathcal{D}: \\ p \nsim i, \rho}} v_p(f) \tag{5.2}$$

が成立する。以降で (5.2) の左辺の積分を計算する。

曲線 EA 上の積分について　関数 $q = \exp(2\pi i z)$ は集合

$$\{ z \in \mathbb{H} : \mathfrak{I}(z) = N,\ -1/2 \leqq \mathfrak{R}(z) \leqq 1/2 \}$$

を集合

$$\mathcal{B} = \{ q \in \mathbb{D} : |q| = \exp(-2\pi N) \}$$

へ一対一に対応させるので，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{EA} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}:\text{時計回り}} \frac{f'(\frac{\log q}{2\pi i})}{f(\frac{\log q}{2\pi i})} \frac{1}{2\pi i q}\, dq && \because q = \exp(2\pi i) \text{ と置換した} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}:\text{時計回り}} \frac{\widetilde{f}'(q)}{\widetilde{f}(q)}\, dq && \because \frac{d}{dz}\widetilde{f}(q) = \widetilde{f}'(q) \cdot 2\pi i q \\
&= -v_\infty(f) && \because \text{時計周りの積分に対する偏角の原理}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

と計算できる。

曲線 AB と $D'E$ 上の積分について　f は周期 1 の周期関数であるから

$$\int_{AB} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \int_{D'E} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{AB} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \int_{BA} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0 \tag{5.4}$$

と打ち消し合う。

曲線 BB', CC', DD' 上の積分について　一般論として，点 $p \in \mathbb{H}$ を中心とする半径 ϵ 角度 θ の円弧 $\mathcal{C}$ 上の時計回り積分は，$f'(z)/f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-p)^n$ をローラン展開とするとき[2)]，$a_{-1} = p(f)$ で，

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \int_{\mathcal{C}} (z-p)^n\,dz \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \int_0^{-\theta} \epsilon^n e^{itn} i\epsilon e^{it}\,dt \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \epsilon^{n+1} i \int_0^{-\theta} e^{i(n+1)t}\,dt \\ &\to -v_p(f)\theta i \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{BB'} + \int_{CC'} + \int_{DD'} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\Big) &= -\frac{1}{2\pi i}\Big(\frac{1}{3}\pi v_\rho(f) i + \pi v_i(f) i + \frac{1}{3}\pi v_{\rho'}(f) i\Big) \\ &= -\frac{1}{3}v_\rho(f) - \frac{1}{2}v_i(f)\end{aligned} \tag{5.5}$$

となる。

曲線 $B'C$ と $C'D$ 上の積分について　一次分数変換 $S \cdot (-)$ によって曲線 $C'D$ が曲線 $CB' = -B'C$ に写されるので

$$\int_{B'C} + \int_{C'D} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_{B'C} - \int_{S(B'C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

と書ける。第二項目の積分を考えると，

$$\begin{aligned}\int_{S(B'C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \int_{B'C} \frac{f'(S\cdot z)}{f(S\cdot z)}\Big(\frac{d}{dz}S\cdot z\Big)dz \\ &= \int_{B'C} \frac{\frac{d}{dz}f(S\cdot z)}{f(S\cdot z)}\,dz && \because \text{合成関数の微分} \\ &= \int_{B'C} \frac{\frac{d}{dz}(z^k f(z))}{z^k f(z)}\,dz && \because (\star)\text{ より} \\ &= \int_{B'C} \frac{kz^{k-1}f(z) + z^k f'(z)}{z^k f(z)}\,dz \\ &= k\int_{B'C} \frac{1}{z}\,dz + \int_{B'C} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\end{aligned}$$

---

2)　$v_p(f') - v_p(f) \geqq 1$ なので，f'/f が p を極として持つなら，その位数は高々 1 である。

$$\to ki\int_{2\pi/3}^{\pi/2} dt + \int_{B'C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad (\epsilon\to+0)$$

$$= -\frac{k\pi i}{6} + \int_{B'C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \tag{5.6}$$

と計算できるので，

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{B'C} + \int_{C'D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\Big) = \frac{k}{12} \tag{5.7}$$

となる。

以上 (5.3)，(5.4)，(5.5)，(5.7) を合わせると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{ABB'CC'DD'EA}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{ABB'CC'DD'EA}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \qquad \because \text{偏角の原理}\\ &= -v_\infty(f) - \frac{1}{2}v_i(f) - \frac{1}{3}v_\rho(f) + \frac{k}{12}\end{aligned}$$

この計算結果と (5.2) を合わせれば，目的の等式 (5.1) が得られる。　証明終

系 5.3　k を整数とする。

(1) $M_0 = \mathbb{C}$ である。

(2) $k < 0$ であるならば $M_k = 0$ である。

(3) $M_2 = 0$ である。

(4) $k = 4, 6, 8, 10, 14$ のとき $M_k = \mathbb{C}E_k$ である。

(5) ラマヌジャンのデルタ Δ は $\mathbb{H}$ 上で零点を持たない。

(6) 整数 k に対して乗算写像 $\Delta\cdot(—)\colon M_{k-12}\to S_k$ は $\mathbb{C}$ 上の線形同型である。

(1) の証明　$\mathbb{H}$ 上の定数関数はすべて荷重 0 のモジュラー形式であるので，$\mathbb{C}\subset M_0$ である。逆に荷重 0 のモジュラー形式 f を考えると，i における f の値を c とするとき，差 $f-c$ も荷重 0 のモジュラー形式，かつ i における値が零である。よって $f-c\not\equiv 0$ であったとすると，(5.1) の左辺は 0 より大きいのに対し，右辺は 0 であるから，矛盾が生じる。ゆえに $f\equiv c$ であり，$M_k\subset\mathbb{C}$ であることが示された。　証明終

(2) の証明　$f\not\equiv 0$ であるような M_k のモジュラー形式があったとすると，(5.1) の左辺は非負であるのに対し右辺が負であるから矛盾が生じる。ゆえに M_k の元は零関数のみである。　証明終

(3) の証明　零でない荷重 2 のモジュラー形式があったとすると，(5.1) が成立するが，右辺が 1/6 なのに対して左辺は 1/6 になり得ないので，矛盾が生じる。ゆえに荷重 2 のモジュラー形式は零関数しかない。　証明終

(4) の証明　各場合の k を考えると

- $k=4$ のとき，(5.1) の右辺が $1/3$ であるから，荷重 4 の零でないモジュラー形式は ρ を位数 1 の零点として持つ。
- $k=6$ のとき，(5.1) の右辺が $1/2$ であるから，荷重 6 の零でないモジュラー形式は i を位数 1 の零点として持つ。
- $k=8$ のとき，(5.1) の右辺が $2/3$ であるから，荷重 8 の零でないモジュラー形式は ρ を位数 2 の零点として持つ。
- $k=10$ のとき，(5.1) の右辺が $5/6$ であるから，荷重 10 の零でないモジュラー形式は i と ρ を位数 1 の零点として持つ。
- $k=14$ のとき，(5.1) の右辺が $7/6$ であるから，荷重 14 の零でないモジュラー形式は i を位数 1 の零点，ρ を位数 2 の零点として持つ。

となるので，零でない荷重 k のモジュラー形式 f,g について，f/g は零でない荷重 0 のモジュラー形式で，(1) より $f=cg$，$c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ となることが分かる。特に g として正規化アイゼンシュタイン級数 E_k として取れば，勝手な荷重 k のモジュラー形式が cE_k と表せることが分かる。これは $M_k=\mathbb{C}E_k$ であることを意味する。　証明終

(5) の証明　ラマヌジャンのタウ関数の値は $\tau(0)=0$，$\tau(1)=1$ となっているので，$v_\infty(\Delta)=1$ である。対して (5.1) の右辺は 1 であるから，Δ は $\mathbb{H}$ で零点を持ち得ない。　証明終

(6) の証明　乗算写像 $\Delta\cdot(\text{—})\colon M_{k-12}\to S_k$ の線形性は明らかであるから，この写像が全単射であることを示す。

単射性　モジュラー形式 $f,g\in M_{k-12}$ に対して $\Delta\cdot f=\Delta\cdot g$ だとすると，(5) より Δ が $\mathbb{H}$ 上常に零でないので，$f=g$ であることが分かる。ゆえに $\Delta\cdot(\text{—})$ は単射である。

全射性　尖点形式 $f\in S_k$ に対して，f/Δ が荷重 $k-12$ のモジュラー形式であることを示せば良い。f が $\mathbb{H}$ 上の正則関数で，Δ が常に零でない $\mathbb{H}$ 上の正則関数であるから，f/Δ も $\mathbb{H}$ 上の正則関数である。また f と Δ が $(\star)$ を満足するので，f/Δ も $(\star)$ を満足し，f/Δ が荷重 $k-12$ の正則な弱モジュラー関数であることが分かる。また $v_\infty(f/\Delta)=v_\infty(f)-1\geqq 0$ であるから，f/Δ は ∞ で正則である。したがって $f/\Delta\in M_{k-12}$ で，$f=\Delta\cdot(f/\Delta)\in M_{k-12}\Delta$ である。ゆえに $\Delta\cdot(\text{—})$ は全射である。　証明終

系 5.3 (6) より $S_{12}=\mathbb{C}\Delta$，すなわち荷重 12 の尖点形式はすべてラマヌジャンのデルタの定数倍である。

6　ヘッケ作用素

ヘッケ作用素を定義するための準備を行なっていく。正整数 n に対して集合

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n \right\}$$

を $\mathbf{M}_n$ と置き，行列の左乗算によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathbf{M}_n$ への左群作用を定めておく。

補題 6.1　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n を考える。勝手な行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n$ と軌道の元 $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = (\tilde{c}z+\tilde{d})^{-k} f\Big(\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}\Big) \tag{6.1}$$

が成立する。

証明　軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の元は，行列 $\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+b'c & a'b+b'd \\ ac'+cd' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

と表される。すると (6.1) の右辺は

$$\begin{aligned}
&(ac'z+cd')^{-k} f\big(\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z\big) \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k} \big(c'\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z + d'\big)^k f\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z\big) && \because (\star)\text{より} \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k} \Big(c'\frac{az+b}{cz+d} + d'\Big)^k f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) && \because \text{作用の定義} \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k} \Big(\frac{(ac'+cd')z+(bc'+dd')}{cz+d}\Big)^k f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) \\
&\qquad = (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)
\end{aligned}$$

と計算でき，(6.1) の左辺と等しいことが分かる。　証明終

補題 6.1 から，レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ に対して

$$(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

を軌道の代表元の取り方に依らずに定義できる。

定義 6.2　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して，$\mathbb{H}$ 上の有理型関数 $T_n f$ を，

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

で定める。レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数の集合から $\mathbb{H}$ 上の有理型関数への写像 T_n を**ヘッケ作用素**と呼ぶ。

まずヘッケ作用素によって弱モジュラー関数が弱モジュラー関数に写ることを見る。

命題 6.3　f がレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数であるとき，T_nf も荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明　行列 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を勝手に取る。γ の右乗算が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n$ 上の置換を引き起こすことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
&T_nf(\gamma\cdot z)\\
&\quad= n^{k-1}\sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n}(c(\gamma\cdot z)+d)^{-k}f\Big(\frac{a(\gamma\cdot z)+b}{c(\gamma\cdot z)+d}\Big)\\
&\quad= n^{k-1}\sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n}\Big(c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d\Big)^{-k}f\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big) \qquad \because \text{作用の定義}\\
&\quad= n^{k-1}\sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n}\Big(\frac{(a'c+c'd)z+(b'c+dd')}{c'z+d'}\Big)^{-k}f\Big(\left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big)\\
&\quad= (c'z+d')^k n^{k-1}\sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n}((a'c+c'd)z+(b'c+dd'))^{-k}f\Big(\left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big)\\
&\quad= (c'z+d')^k n^{k-1}\sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n}(c(\gamma\cdot z)+d)^{-k}f\Big(\frac{a(\gamma\cdot z)+b}{c(\gamma\cdot z)+d}\Big) \qquad \because \gamma \text{ が } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash M_n \text{ 上の置換なので}\\
&\quad= (c'z+d')^kT_nf(z)
\end{aligned}
$$

と計算でき，T_nf が $(\star)$ を満足することが確かめられる。ゆえに T_nf は荷重 k の弱モジュラー関数である。　証明終

ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n$ の完全代表系としてエルミート標準形を取れることを見ておく。

命題 6.4　行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n$ に対して，$\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がエルミート標準形，すなわち

$$
\gamma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} > 0,\ \tilde{a}\tilde{d} = n,\ 0 \leqq \tilde{b} < \tilde{d}
$$

を満足する行列 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在する。

証明　行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ が非特異であるから，定理 A.2 より $\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がエルミート標準形となるようなユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。エルミート標準形の行列式は正で，かつ $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の行列式も正であるから，$\det(\gamma) = 1$，すなわち $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であることが従う。　証明終

系 6.5　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して，

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big) \tag{6.2}$$

と表せる。

証明　命題 6.4 とエルミート標準形の一意性から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n$ の完全代表系として $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n : a > 0,\ 0 \leqq b < d\}$ を取れるので。　証明終

(6.2) によるヘッケ作用素の表示を用いることで，モジュラー関数がモジュラー関数に写ることを示せる。

定理 6.6　f をレベル 1 荷重 k のモジュラー関数とし，その q 展開を $f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha(m) q^m$ とする。このとき

$$T_n f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma(m) q^m, \qquad \gamma(m) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}:\, a>0,\\ a \mid \gcd(m,\, n)}} a^{k-1} \alpha\Big(\frac{mn}{a^2}\Big) \tag{6.3}$$

が成立する。

証明　(6.2) を用いて計算を行うと，

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big) && \because (6.2)\text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az+b}{d} m\Big) && \because f\text{ の } q \text{ 展開} \\ &= n^{k-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az}{d} m\Big) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) \qquad (6.4) \end{aligned}$$

となる。ここで，整数 d, m に対して $\sum_{b=0}^{d-1} \exp(2\pi i \frac{b}{d} m)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} &\sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) \qquad (6.5) \\ &= \begin{cases} d & d \mid m \text{ のとき（}\because \text{ 常に } \exp(2\pi i \frac{b}{d} m) = 1 \text{ なので）} \\ \frac{1-\exp(2\pi i (m/d))^d}{1-\exp(2\pi i (m/d))} = 0 & d \nmid m \text{ のとき（}\because \text{ 等比数列の和）} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。(6.4) の計算を続けると，

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az}{d} m\Big) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) \qquad \because (6.4)\text{ より}$$

$$= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n,\, d|m}} d^{-k+1} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i a z \frac{m}{d}\Big) \qquad \because (6.5)\ より$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}:\\ d>0,\, d|n,\, d|m}} \Big(\frac{n}{d}\Big)^{k-1} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i z \frac{mn}{d^2}\Big) \qquad \because a = n/d$$

$$(6.6) \qquad = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}:\\ d>0,\, d|\gcd(m,\, n)}} \Big(\frac{n}{d}\Big)^{k-1} \alpha\Big(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\Big) q^{\frac{m}{d}\frac{n}{d}}$$

となる。ここで関係 $(m, d) \mapsto (m/d, n/d)$ によって全単射写像

$$(6.7) \qquad \{\,(m, d) : m, d \in \mathbb{Z},\ d > 0,\ d \mid \gcd(m, n)\,\} \to \{\,(m', a) : m', d \in \mathbb{Z},\ a > 0,\ a \mid n\,\}$$

を得られるので，(6.6) の計算を続けて，

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}:\\ d>0,\, d|\gcd(m,\, n)}} \Big(\frac{n}{d}\Big)^{k-1} \alpha\Big(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\Big) q^{\frac{m}{d}\frac{n}{d}} && \because (6.6) \\ &= \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, a|n}} a^{k-1} \alpha\Big(\frac{nm'}{a}\Big) q^{m'a} && \because (6.7) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Bigg(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a>0\\ a|\gcd(m,\, n)}} a^{k-1} \alpha\Big(\frac{mn}{a^2}\Big) \Bigg) q^m \end{aligned}$$

と計算でき，$T_n f$ を目的の形で表示できた。 証明終

系 6.7 f がレベル 1 荷重 k のモジュラー関数のとき，$T_n f$ もレベル 1 荷重 k のモジュラー関数である。さらに f がモジュラー形式ならば $T_n f$ もモジュラー形式であり，f がカスプ形式ならば $T_n f$ もカスプ形式である。

証明 $a \mid n$ なる正整数 a に対して n/a^2 は高々有界であるから，$m \ll 1$ のとき (6.3) における $\gamma(m)$ は零である。ゆえに $T_n f$ は ∞ で有理型で，モジュラー関数であることが従う。

f がモジュラー形式であれば，負の整数 m に対して常に $\gamma(m) = 0$ であることが分かるので，$T_n f$ は ∞ で正則で，モジュラー形式であることが従う。また f が尖点形式であれば，$(\alpha(i))_{i=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とするとき (6.3) より

$$\gamma(0) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a>0\\ a|n}} a^{k-1} \alpha(0) = 0$$

となるので，$T_n f$ も尖点形式である。 証明終

命題 6.8 ヘッケ作用素 $T_n\colon M_k \to M_k$ に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して，n と m が互いに素であるならば

$$T_n T_m = T_{nm}$$

が成立する。

(2) p を素数，r を正整数とするとき

$$T_{p^{r+1}} = T_p T_{p^r} - p^{k-1} T_{p^{r-1}}$$

が成立する。

7 固有形式

定義 7.1 f をモジュラー形式とし，$(\alpha(i))_{i=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とする。勝手な正整数 n に対して $T_n f = \lambda_n f$ を満足するような複素数 λ_n が存在するとき，f を**固有形式**と呼び，λ_n を T_n 固有値と呼ぶ。さらに $\alpha(1) = 1$ であるならば f を**正規化固有形式**と呼ぶ。

例 7.2 ラマヌジャンのデルタ Δ は正規化固有形式である。なんとなれば，系 6.7 より $T_n\Delta$ も荷重 12 の尖点形式であり，系 5.3 (6) から $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ であるから，$T_n\Delta = \lambda_n\Delta$ を満足する複素数 λ_n が存在する。ゆえに Δ は固有形式である。またラマヌジャンのタウ関数について $\tau(1) = 1$ であるから，Δ は正規化固有形式であることが分かる。

定理 7.3 f を荷重 k の正規化固有形式とするとき，その T_n 固有値は n 番目のフーリエ係数である。

証明 $(c(n))_{n=0}^{\infty}$ を f のフーリエ係数とすると，(6.3) より $T_n f$ の 1 番目のフーリエ係数は

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z} : a > 0, \\ a \mid \gcd(n, 1)}} a^{k-1} c\Big(\frac{n}{a^2}\Big) = c(n) \qquad \because \gcd(n, 1) = 1$$

となる。他方 $T_n f = \lambda_n f$ であるから 1 番目のフーリエ係数を比べることで $c(n) = \lambda_n c(1)$ であることが分かる。いま $c(1) = 1$ であるから，$\lambda_n = c(n)$ であり，これが示すべきことだった。 証明終

系 7.4 f を正規化固有形式とし，$(c(n))_{n=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とする。このとき次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して，n と m が互いに素であるならば

$$c(nm) = c(n)c(m)$$

が成立する。

(2) p を素数，r を正整数とするとき

$$c(p^{r+1}) = c(p)c(p^r) - p^{k-1}c(p^{r-1})$$

が成立する。

特に f としてラマヌジャンのデルタを考えれば，予想 3.13 の主張が正しいことが従う。

証明　命題 6.8 と定理 7.3 から直ちに従う。　証明終

A　整数係数行列のエルミート標準形

整数係数の非特異正方行列に対してエルミート標準形が存在することを，2 次の場合に限定して取り扱う。

定義 A.1 (非特異正方行列のエルミート標準形)　A を整数係数の非特異 2 次行列とする。ユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ によって

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad h_{11}, h_{22} > 0 \text{ かつ } 0 \leqq h_{12} < h_{22}$$

と表せるとき，この上三角行列を A の**エルミート標準形**と呼ぶ。

エルミート標準形を誘導するにあたって，

・ 一行目と二行目を交換する行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
・ 一行目を -1 倍する行列 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
・ 二行目を -1 倍する行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$
・ 一行目を m 倍して二行目に足す行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{smallmatrix}\right)$
・ 二行目を m 倍して一行目に足す行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

が基本となるユニモジュラー行列で，これら行列の左乗算によって行列の変形を行う。

定理 A.2　整数係数の非特異 2 次行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対してエルミート標準形は一意的に存在する。

証明　存在性と一意性を分けて証明する。

存在性　$a = 0$ または $c = 0$ なら，行の入れ替えを行うことで $c = 0$ と考えて良く，すると非特異性から $a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。さらに各行を適当に -1 倍することで $a > 0$ かつ $d > 0$ として良い。b を d で割ることで

$$b = qd + b', \qquad q, b' \in \mathbb{Z},\ \ 0 \leqq b' < d$$

を得られる。を満足する q, b' を取り，$-q$ 倍した二行目を一行目に足して A のエルミート標準形 $\left(\begin{smallmatrix} a & b' \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ を得る。a, c が共に零でない場合は，以下のようにユークリッドの互除法を用いて上述の議論に帰着させる。必要なら一行目と二行目を入れ替えて，$0 < |a| \leqq |c|$ として良い。c を a で割って，

$$c = qa + c', \qquad q, c' \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq c' < |a|$$

を満足する q, c' を取り，$-q$ 倍した一行目を二行目に足して，行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c' & d-qb \end{smallmatrix}\right)$ を得る。$c' \neq 0$ であれば，$0 \leqq |c'| < |a|$ であるから，行を交換して再度同じ議論を繰り返すことで，$c' = 0$ としてよく，証明の最初の議論に帰着された。

一意性　二つの A のエルミート標準形

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad \gamma' \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11'} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix}, \qquad \gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

があるとすると，$\gamma' \cdot \gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と書けば

$$\begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$$

となる。これから $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列であることを示す。$h_{11}c = 0$ かつ $h_{11} \neq 0$ であるから，$c = 0$ である。すると $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ がユニモジュラーであるから，$ad = 1$ または $ad = -1$ である。$h_{11}a = h'_{11}$ かつ $h_{11}, h'_{11} > 0$ であるから，$a > 0$ である。同様に $h_{22}d = h'_{22}$ かつ $h_{22}, h'_{22} > 0$ であるから，$d > 0$ である。したがって $a = d = 1$ であることが分かる。$0 \leqq h'_{12} = h_{12} + bh_{22}$ かつ $0 \leqq h_{12} < h_{22}$ であるから，$b \geqq 0$ でなければならない。また $h'_{22} = h_{22}$ であるから，$0 \leqq h'_{12} < h'_{22}$ であることと合わせて $b = 0$ であることが分かる。ゆえに $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列で，二つのエルミート標準形が等しいことが従う。　証明終

文献

[1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. `https://www.ma.imperial.ac.uk/~dhelm/M4P58/ModularForms2.pdf`（2026 年 1 月 1 日最終確認）.

[2] 岸　正倫・藤本　担孝（1980）. 複素関数論. 学術図書出版社.

[3] Aigner, M. and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.