グラスマン多様体とプリュッカー座標

2025 年 12 月 1 日 15 時 34 分更新

目　次

本文書では，小行列式の等式であるプリュッカー関係式を示すことを目標にして，グラスマン多様体と旗多様体について論じる。

K を代数閉体とし，その非零元がなす乗法群を $K^{\times}$ で表す。K 線型空間 V に対して，その双対空間を V^* で表し，双対対 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to K$ を備えておく。

1　射影多様体

まずは集合としてのグラスマン多様体および射影空間を定めることから始める。

定義 1 (集合としてのグラスマン多様体)　E を有限次元 K 線型空間とし，その次元を m と置く。

(1) m 以下の正整数 r に対して，集合

$$\{ V : V \text{ は } E \text{ の } r \text{ 次元部分空間である} \}$$

$\mathrm{Gr}_r(E)$ で表し，**グラスマン多様体**と呼ぶ。$\mathrm{Gr}_r(E)$ の元を $\mathrm{Gr}_r(E)$ の**点**と呼ぶ。

(2) $\mathrm{Gr}_1(E)$ を特に $\mathbb{P}(E)$ で表し，E の**射影空間**と呼ぶ。

(3) $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m)$ で $K^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ の $K^{\times}$ による群作用を定め，その商集合を $\mathbb{P}^m_K$ で表し，m 次元の**射影空間**と呼ぶ。$(x_1, \dots, x_m)$ の剰余類を $[x_1 : \cdots : x_m]$ で表し，$\mathbb{P}^m_K$ の**点**と呼ぶ。

注意 2 (斉次座標について)　E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取って，点 $L \in \mathbb{P}(E)$ の生成元の係数を考えると，

$$\{ (x_1, \dots, x_m) : L = \mathrm{Span}_K(x_1 e_1 + \cdots x_1 e_m) \} = [x_1 : \cdots : x_m]$$

となるので, $\mathbb{P}^m_K$ の点を定める。この点を L の**斉次座標**と呼ぶ。逆に $\mathbb{P}^m_K$ の点 $[x_1 : \cdots : x_m]$ が $\mathbb{P}(E)$ の点 $\mathrm{Span}_K(x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m) \subset E$ を定めるので，$e_1, \dots, e_m$ が全単射写像 $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^m_K$ を誘導することがわかる。

次に集合として定義した $\mathbb{P}(E)$ に，代数多様体の構造を入れる。$\mathbb{P}(E)$ の斉次座標環を導入するために，次の補題から始める。

補題 3　n を非負整数に対して，以下で構成する線型写像

$$(E^*)^{\otimes n} \to (E^{\otimes n})^*;\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot)$$

は同型である。

構成　n 個のベクトル $v_1, \dots, v_n \in E^*$ が定める E^n 上の関数 $(w_1, \dots, w_n) \mapsto v_1(w_1) \cdots v_n(w_n)$ が n 重線型であるから，$(E^{\otimes n})^*$ の元 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot)$ を定める（図 3 左図）。対応 $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ は n 重線型であるから，線型写像 $(E^*)^{\otimes n} \to (E^{\otimes n})^*$ が誘導される（図 3 右図）。

$$
\begin{tikzcd}
(w_1,\dots,w_n) \arrow[d, mapsto] & \in & E^n \arrow[r] \arrow[d] & E^{\otimes n} \arrow[dl, dashed, "v_1\otimes\cdots\otimes v_n(\cdot)"] \\
v_1(w_1)\cdots v_n(w_n) & \in & K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(v_1,\dots,v_n) \arrow[d, mapsto] & \in & (E^*)^n \arrow[r] \arrow[d] & (E^*)^{\otimes n} \arrow[dl, dashed] \\
v_1\otimes\cdots\otimes v_n(\cdot) & \in & (E^{\otimes n})^* &
\end{tikzcd}
$$

図 1　線型汎関数のテンソル積（左図）と目的の写像の誘導（右図）

証明　E の基底 $e_1,\dots,e_m$ を取って, E^* の双対基底 $e_1^*,\dots,e_m^*$ を取る。すると $\{e_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes e_{i_n}^* : 1 \leqq i_1,\dots,i_n \leqq m\}$ が $(E^*)^{\otimes n}$ の基底で，構成より $e_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes e_{i_n}^* = (e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n})^*$ であるので，$(E^*)^{\otimes n}$ の基底が $(E^{\otimes n})^*$ の基底に写ることがわかり，件の写像が同型であることが示された。　証明終

$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*) = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathrm{Sym}^n(E^*)$ を E^* の対称代数とし，次のようにして $\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ を E 上の K 値関数がなす環 $\mathscr{F}(E,K)$ に埋め込む。元 $f\in(E^*)^{\otimes n}$ に対して関数

$$f|_E\colon E\to K;\ w\mapsto f(w\otimes\cdots\otimes w)$$

を対応させると, 線型写像 $(E^*)^{\otimes n}\to\mathscr{F}(E,K)$ が得られ, テンソル代数 $T^\bullet(E^*)=\bigoplus_{n=0}^\infty (E^*)^{\otimes n}$ からの環準同型 $T^\bullet(E^*)\to\mathscr{F}(E,K)$ に拡張できる。この準同型によって，勝手なベクトル $v_1,\ v_2\in E^*$ に対して $v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1$ が零に写るので，対称代数からの環準同型 $S^\bullet(E^*)\to\mathscr{F}(E,K)$ が誘導される。この環準同型の単射性は補題として扱うことにする。

補題 4　$S^\bullet(E^*)\to\mathscr{F}(E,K);\ v_1\cdots v_n\mapsto v_1\cdots v_n(\cdot)$ は環同型である。

証明　E の基底 $e_1,\dots,e_m$ を固定し，E^* の双対基底 $e_1^*,\dots,e_m^*$ を取る。$e_1,\dots,e_m$ によって環同型 $\mathscr{F}(E,K)\to\mathscr{F}(K^m,K)$ が得られ，$X_1,\dots,X_m$ を不定元とすると，対応 $X_i\mapsto e_i^*$ によって環同型 $K[X_1,\dots,X_m]\to S^\bullet(E^*)$ が得られる。すると合成 $K[X_1,\dots,X_m]\to\mathscr{F}(K^m,K)$ は多項式を多項式写像に写す写像で，これが単射であることを示せばよい。

この写像の単射性を m に関する帰納法で示す。$m=1$ のとき，多項式写像が零であることは，一変数多項式が無限個の解を持つことを意味するので，もとの多項式も零であるので，件の写像は零である。$m>1$ とし，$K[X_1,\dots,X_{m-1}][X_m]$ と考える。この多項式環の元 $f=\sum_{i=0}^\infty g_iX_m^i,\ g_i\in K[X_1,\dots,X_{m-1}]$ を取り，多項式関数として零であると仮定する。K 値ベクトル $(x_1,\dots,x_{m-1})$ を勝手に取ると，$f(x_1,\dots,x_{m-1},X_m)=\sum_{i=0}^\infty g_i(x_1,\dots,x_{m-1})X_m^i$ は無限個の解を持つ一変数多項式環であるので，すべての i について $g_i(x_1,\dots,x_{m-1})=0$ である。$(x_1,\dots,x_{m-1})$ を勝手に取っていたので，帰納法の仮定により $g_i=0$ となり，$f=0$ であることも従うので，件の写像は単射であることが示された。　証明終

以上で $\mathbb{P}(E)$ に代数多様体の構造を入れる準備が整った。

定義 5　$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の元 f と，$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の部分集合 S と，$\mathbb{P}(E)$ の部分集合 V を取る。

(1) 点 $L \in \mathbb{P}(E)$ が f の**零点**であるとは，L の勝手な元 w に対して $f(w) = 0$ が成立するときをいう。
(2) $\mathbb{P}(E)$ の部分集合 $V(S)$ を，$\{L \in \mathbb{P}(E) : $ 勝手な元 $f \in S$ に対して，L が f の零点である$\}$ で定め，この形の部分集合を $\mathbb{P}(E)$ の**（射影的）代数的集合**と呼ぶ。
(3) $\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の部分集合 $I(V)$ を，$\{f \in \mathrm{Sym}^\bullet(E^*) : f$ は，V のすべての点を零点として持つ$\}$ で定めると，これは斉次イデアルで，V の**イデアル**と呼ぶ。
(4) 代数的集合 $V(S)$ が，$V(S)$ とは異なる代数的集合 $V(S_1)$ と $V(S_2)$ の和集合 $V(S_1) \cup V(S_2)$ と等しいとき，**可約である**といい，そうでないとき**既約である**という。既約な代数的集合を特に**射影多様体**と呼ぶ。射影多様体のイデアルは素イデアルである。

これから行うことは，グラスマン多様体を高次の射影空間に射影多様体として埋め込み，そのイデアルの生成元を調べることである。

2 プリュッカー埋め込み