閉包作用素が定めるマトロイドについて

2025 年 10 月 7 日 20 時 12 分更新

定義 1 　E を有限集合とし，$(E, \mathrm{cl}\colon 2^E \to 2^E)$ を M と置くことにする。M が次の四条件 (CL1) から (CL4) を満たすとき，閉包作用素が定める E 上の**マトロイド**と M を呼び，cl をその**閉包作用素**と呼ぶ。

(CL1) E の部分集合 X に対し，$X \subset \mathrm{cl}(X)$ である。

(CL2) E の部分集合 X に対し，$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$ である。

(CL3) E の部分集合 X と Y に対し，$X \subset Y$ ならば $\mathrm{cl}(X) \subset \mathrm{cl}(Y)$ である。

(CL4) E の元 x と E の部分集合 X と $\mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ の元 y に対し，$x \in \mathrm{cl}(X \cup \{y\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ である。

閉包族とフラット族が等しいことを見るのが目標である。

命題 2 　閉包作用素が定める E 上のマトロイドと M を考え，

$$\left\{F \in 2^E \mid \mathrm{cl}(F) = F\right\}$$

を $\mathfrak{F}$ と置く。このとき $(E, \mathfrak{F})$ はフラット族が定めるマトロイドである。すなわち

(F1) $E \in \mathfrak{F}$ である。

(F2) $\mathfrak{F}$ の元 F_1 と F_2 に対し，$F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ である。

(F3) $\mathfrak{F}$ の元 F と $E \setminus F$ の元 e に対し，F を被覆し e を含むような $\mathfrak{F}$ 元が存在する。

ここで $\mathfrak{F}$ の元 F と G について，G が F を**被覆する**とは，$F \subsetneq G$ かつ「$F \subsetneq H \subset G$, $H \in \mathfrak{F}$ ならば $H = G$」が成り立つときをいう。

証明 　(F1) について。(CL1) より $E \subset \mathrm{cl}(E)$ なので，$E = \mathrm{cl}(E)$ である。ゆえに $E \in \mathfrak{F}$。

(F2) について。$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ とする。すると (CL1) と (CL3) より $F_1 \cap F_2 \subset \mathrm{cl}(F_1 \cap F_2) \subset \mathrm{cl}(F_1) \cap \mathrm{cl}(F_2)$ であり，最右辺は $F_1 \cap F_2$ と等しい。ゆえに $\mathrm{cl}(F_1 \cap F_2) = F_1 \cap F_2$ であり，$F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ が従う。

(F3) について。$F \in \mathfrak{F}$，$e \in E \setminus F$ とする。$\mathrm{cl}(F \cup \{e\})$ を G と置くとき，(CL2) より $G \in \mathfrak{F}$ であり，(CL1) より $e \in G$ かつ $F \subsetneq G$ である。あとは G が F を被覆することを示せば (F3) の成立を確かめられる。$F \subsetneq H \subset G$, $H \in \mathfrak{F}$ とする。$H \setminus F$ の元 x を一つ取ると，$x \in \mathrm{cl}(X \cup \{e\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ であるので，(CL4) より $e \in \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ である。したがって $X \cup \{e\} \subset \mathrm{cl}(X \cup \{x\})$ であるので，

$$\begin{aligned} G &\subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X \cup \{x\})) && (\because \text{(CL3) より。}) \\ &= \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) && (\because \text{(CL2) より。}) \end{aligned}$$

$$\subset \mathrm{cl}(H) \qquad (\because \text{(CL2) より。})$$

$$= H \qquad (\because H \in \mathfrak{F} \text{ なので。})$$

と計算できるので，$H = G$ である。　証明終

命題 3　フラット族 $\mathfrak{F}$ が定めるマトロイド M を考え，$\mathrm{cl}\colon 2^E \to 2^E$ を $\mathrm{cl}(X) = \bigcap_{\substack{F\in\mathfrak{F}:\\ X\subset F}} F$ で定める。このとき (E, cl) は閉包作用素が定めるマトロイドである。

証明　(CL1) と (CL3) は定義から直ちに従う。

(CL2) について。(F2) はフラット族が有限交叉で閉じていることを意味しているので，すべての閉包はフラットであることに注意する。（すなわち $\mathrm{cl}(2^E) \subset \mathfrak{F}$ である。）すると E の部分集合 X に対し，$\mathrm{cl}(X) \in \{F \in \mathfrak{F} \mid X \subset F\}$ となるので，$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) \subset \mathrm{cl}(X)$ であり，(CL3) より逆の包含も成立するので，$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$ である。

(CL4) について。$X \in 2^E$, $x \in E$, $y \in \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ とする。このとき $\mathrm{cl}(X \cup \{x\})$ は，x を含み $\mathrm{cl}(X)$ を被覆するフラットである。なんとなれば，(F3) を用いて x を含み $\mathrm{cl}(X)$ を被覆するフラット G を取ると，$\mathrm{cl}(X) \subsetneq \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \subset G$ となるからである。ここで $y \in \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{y\})$ であるから，$\mathrm{cl}(X) \subsetneq \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{y\})$ である。$\mathrm{cl}(X \cup \{x\})$ が $\mathrm{cl}(X)$ を被覆することから，$\mathrm{cl}(X \cup \{x\}) = \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{y\})$ である。ゆえに $x \in \mathrm{cl}(X \cap \{y\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ である。　証明終