

# 基底族が定めるマトロイドについて

2025 年 12 月 3 日 22 時 38 分更新

**定義 1**  $E$  を有限集合,  $E$  の部分集合族の一つを  $\mathfrak{B}$  とし,  $(E, \mathfrak{B})$  を  $M$  と置くことにする。 $M$  が次の二条件 (B1) と (B2) を満たすとき, 基底族が定める  $E$  上のマトロイドと  $M$  を呼び,  $\mathfrak{B}$  の元をその**基底**と呼ぶ。

(B1)  $\mathfrak{B} \neq \emptyset$  である。

(B2)  $\mathfrak{B}$  の元  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  および  $\sigma_1 \setminus \sigma_2$  の元  $i$  に対して,  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathfrak{B}$  なる  $\sigma_2 \setminus \sigma_1$  の元  $j$  が存在する。

次の性質は定義から容易に従う。

**命題 2** 基底族が定めるマトロイド  $M$  に対して次が成り立つ。

(1)  $M$  の基底  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  に対し,  $\sigma_1 \subset \sigma_2$  ならば  $\sigma_1 = \sigma_2$  である。

(2)  $M$  の基底  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  に対し,  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$  である。特に  $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| = |\sigma_2 \setminus \sigma_1|$  である。

**(1) の証明**  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  だったとすると,  $\sigma_2 \setminus \sigma_1 \neq \emptyset$  であるから, (B2) より  $\sigma_1 \setminus \sigma_2 \neq \emptyset$  となるので,  $\sigma_1 \subset \sigma_2$  であることに矛盾する。証明終

**(2) の証明**  $\sigma_1 = \sigma_2$  なら明らかであるから,  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  の場合を考える。この場合は, 後に述べる手順により  $\sigma_1$  の元を一つずつ取り替えて  $\sigma_2$  にできるので, 元の個数が等しいことを示せる。すると後半については  $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| = |\sigma_1| - |\sigma_1 \cap \sigma_2| = |\sigma_2| - |\sigma_1 \cap \sigma_2| = |\sigma_2 \setminus \sigma_1|$  と計算できる。

**基底を取り替える手順** (1) より  $\sigma_1 \not\subset \sigma_2$  (かつ  $\sigma_2 \not\subset \sigma_1$ ) であるので,  $\sigma_1 \setminus \sigma_2$  の元  $i$  を取れ, (B2) を用いて  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$  が基底となるように  $\sigma_2 \setminus \sigma_1$  の元  $j$  を取れる。必要なら  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$  を  $\sigma'_1$  と置いて,  $\sigma'_1$  と  $\sigma_2$  に対して同様の議論をすることで  $\sigma''_1 := (\sigma \setminus \{i, i'\}) \cup \{j, j'\}$  ( $i' \in \sigma_1 \setminus \{i\}$ ,  $j' \in \sigma_2 \setminus \{j\}$ ) が基底になる。この操作を続けて元の個数が等しい基底の列  $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma''_1, \dots, \sigma_2$  が得られる。証明終

相異なる二つの基底があるときに双方の元を一つずつ交換して片方を新たな基底にできるというのが (B2) であるが, 実は両方が新たな基底になるように元を交換できる。

**命題 3** 基底族  $\mathfrak{B}$  が定めるマトロイド  $M$  を考える。このとき条件

(B2')  $\mathfrak{B}$  の元  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  と  $\sigma_1 \setminus \sigma_2$  の元  $i$  に対して,  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathfrak{B}$  かつ  $(\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathfrak{B}$  なる  $\sigma_2 \setminus \sigma_1$  の元  $j$  が存在する。

を  $M$  は満足する。

**証明**  $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| (= |\sigma_2 \setminus \sigma_1|)$  に関する帰納法で示す。 $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| = 1$  のとき  $\sigma_1 = (\sigma_1 \cap \sigma_2) \sqcup \{i\}$ ,  $\sigma_2 = (\sigma_1 \cap \sigma_2) \sqcup \{j\}$  と表せ,  $\sigma_1 \setminus \sigma_2 = \{i\}$ ,  $\sigma_2 \setminus \sigma_1 = \{j\}$  であり,

$(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\} = \sigma_2$ ,  $(\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i\} = \sigma_1$  となり共に基底である。次に  $|\sigma_1 \setminus \sigma_2| > 1$  のときを考える。 $\sigma_1 \setminus \sigma_2$  の元  $i$  を一つ取って固定しておく。(B2) を用いて  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$  が基底になるように  $\sigma_2 \setminus \sigma_1$  の元  $j$  を取る。再び (B2) を用いて  $(\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i'\}$  が基底になるように  $\sigma_1 \setminus \sigma_2$  の元  $i'$  を取る。 $i' = i$  であれば  $j$  が目的の元であるので、 $i' \neq i$  の場合を考える。このとき  $|\sigma_1 \setminus ((\sigma_2 \setminus \{j\}) \cup \{i'\})| < |\sigma_1 \setminus \sigma_2|$  であるから、帰納法の仮定から (B2') を用いて  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j'\}$  と  $(\sigma_2 \setminus \{j, j'\}) \cup \{i, i'\}$  が共に基底になるように  $\sigma_2 \setminus (\sigma_1 \cup \{j\})$  の元  $j'$  を取れる。後者の  $(\sigma_2 \setminus \{j, j'\}) \cup \{i, i'\}$  を  $\sigma_3$  と置き、 $\sigma_3 \setminus \sigma_2$  の元  $i'$  について (B2) を用いると、 $\sigma_2 \setminus \sigma_3 = \{j, j'\}$  なので、 $(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j\}$  か  $(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j'\}$  のいずれかが基底でなければならない。 $(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j\}$  が基底の場合、 $(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j\} = (\sigma_2 \setminus \{j'\}) \cup \{i\}$  であるので  $j'$  が目的の元である。 $(\sigma_3 \setminus \{i'\}) \cup \{j'\}$  が基底の場合は  $j$  が目的の元である。以上によって  $M$  が (B2') を満足する。 証明終

**命題 4** 基底族が定める  $E$  上のマトロイド  $M$  を考え、

$$\{I \in 2^E : I \text{ を包含する } M \text{ の基底 } \sigma \text{ が存在する}\}$$

を  $\mathfrak{J}$  と置く。このとき  $(E, \mathfrak{J})$  は独立集合族が定めるマトロイドである。すなわち三条件

(I1)  $\emptyset \in \mathfrak{J}$  である。

(I2)  $\mathfrak{J}$  の元  $I$  と  $E$  の部分集合  $J$  に対し、 $J \subset I$  ならば  $J \in \mathfrak{J}$  である。

(I3)  $\mathfrak{J}$  の元  $I, J$  に対し、 $|I| < |J|$  ならば  $I \cup \{j\} \in \mathfrak{J}$  となる  $J \setminus I$  の元  $j$  が存在する。

を  $(E, \mathfrak{J})$  が満たす。

**証明** (I1) について。 $M$  の基底が少なくとも一つ存在することを (B1) が意味し、空集合が特にその基底に包含されるので、 $\emptyset \in \mathfrak{J}$  である。

(I2) について。 $\mathfrak{J}$  の元  $I$  を取ると、 $I$  を包含する  $M$  の基底  $\sigma$  を取れる。 $I$  に包含される  $E$  の部分集合  $J$  を勝手に取ると、 $J \subset I \subset \sigma$  であるので、 $J \in \mathfrak{J}$  である。

(I3) について。 $|I| < |J|$  なる  $\mathfrak{J}$  の元  $I$  と  $J$  を考え、 $I$  を包含する基底  $\sigma_1$  と  $J$  を包含する基底  $\sigma_2$  を取る。まず  $J \setminus I \subset \sigma_1$  のとき  $J \setminus I$  のすべての元  $j$  に対し  $I \cup \{j\} \in \sigma_1$  であるので、 $J \setminus I$  のすべての元が目的の条件を満足する。よって  $J \setminus I \subset \sigma_1$  と仮定し、その元  $j$  を取っておく。取り方から  $j \in \sigma_2 \setminus \sigma_1$  であることに注意する。 $(\sigma_1 \setminus I) \cap (\sigma_1 \setminus \sigma_2) \neq \emptyset$  のときは、その元  $i$  を取って  $j$  を交換すれば、 $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$  が  $I \cup \{j\}$  を包含する基底であるので、 $j$  が目的の条件を満足する。残る  $(\sigma_1 \setminus I) \cap (\sigma_1 \setminus \sigma_2) = \emptyset$  のとき、さらに  $(J \cap \sigma_1) \setminus I \neq \emptyset$  であれば、先ほどの  $j$  を  $\sigma$  に属するように取れ、 $I \cup \{j\} \subset \sigma_1$  であるから、この  $j$  が目的の条件を満足する。 $(J \cap \sigma_1) \setminus I = \emptyset$  は起こり得ないことを示して証明を終える。このとき二つの仮定  $(\sigma_1 \setminus I) \cap (\sigma_1 \setminus \sigma_2) = \emptyset$  と  $(J \cap \sigma_1) \setminus I = \emptyset$  は、それぞれ  $\sigma_1 \setminus \sigma_2 = I \setminus \sigma_2$  と  $J \cap \sigma_1 \subset \sigma_2 \cap I$  を意味するので、 $I = (I \setminus \sigma_2) \cup (I \cap \sigma_2) \supset (\sigma_1 \setminus \sigma_2) \cup (J \cap \sigma_1)$  となる。

この包含を用いて元の個数を評価すると,

$$\begin{aligned}
|I| &\geq |\sigma_1 \setminus \sigma_2| + |J \cap \sigma_1| \\
&= |\sigma_2 \setminus \sigma_1| + |J \cap \sigma_1| && (\because \text{命題 2 の (2) より。}) \\
&\geq |J \setminus \sigma_1| + |J \cap \sigma_1| && (\because \sigma_2 \supset J \text{ なので。}) \\
&= |J| && (\because J = (J \setminus \sigma_1) \sqcup (J \cap \sigma_1) \text{ なので。})
\end{aligned}$$

と計算でき,  $|I| < |J|$  であることに反する。

証明終

**命題 5** 独立集合族が定める  $E$  上のマトロイド  $M$  を考え,

$$\{\sigma \in 2^E : \text{独立集合族の中で包含に関して } \sigma \text{ が極大である}\}$$

を  $\mathfrak{B}$  と置く。このとき  $(E, \mathfrak{B})$  は基底族が定めるマトロイドである。

**証明** (B1) について。(I1) により少なくとも一つ独立集合が存在するので,  $\mathfrak{B} \neq \emptyset$  である。

(B2) について。 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  を  $\mathfrak{B}$  の元とし,  $\sigma_1 \setminus \sigma_2$  の元  $i$  を勝手に取る。(I2) より  $\sigma_1 \setminus \{i\} \in \mathfrak{B}$  である。 $|\sigma_1 \setminus \{i\}| < |\sigma_2|$  なので, (I3) より  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$  が独立集合になるような  $\sigma_2 \setminus (\sigma_1 \setminus \{i\}) = \sigma_2 \setminus \sigma_1$  の元  $j$  を取れる。あとは独立集合族の中で包含に関して  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}$  が極大なことを見ればよい。極大でなかったと仮定し,  $(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\} \subsetneq I$  となる独立集合  $I$  を取る。すると  $|I| > |(\sigma_1 \setminus \{i\}) \cup \{j\}| = |\sigma_1|$  であるから, (I3) により  $\sigma_1 \cup \{e\}$  が独立集合となるような  $I \setminus \sigma_1$  の元  $e$  が取れ,  $\sigma_1$  の極大性に反する。

証明終

**定理 6**  $E$  を有限集合とする。

(1) 基底族  $\mathfrak{B}$  が定める  $E$  上のマトロイド  $M$  を考え, その独立集合族  $\mathfrak{I}$  が定めるマトロイドを  $M'$  とする。このとき  $M'$  の基底族  $\mathfrak{B}'$  が定めるマトロイドは  $M$  と等しい。

(2) 独立族  $\mathfrak{I}$  が定める  $E$  上のマトロイド  $N$  を考え, その基底族  $\mathfrak{B}$  が定めるマトロイドを  $N'$  とする。このとき  $N'$  の独立集合族  $\mathfrak{I}'$  が定めるマトロイドは  $N$  と等しい。

ゆえに基底族が定めるマトロイドと, 独立集合族が定めるマトロイドは一対一に対応する。

**(1) の証明** 示すべきことは  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$  が成り立つことである。命題 2 の (1) より, 相異なる基底の間に包含関係がないので, 独立集合を包含する基底は  $\mathfrak{I}$  の極大元である。ゆえに  $\mathfrak{B} = \{\sigma : \mathfrak{I} \text{ の中で包含に関して } \sigma \text{ が極大である}\}$  であり, 右辺の集合を  $\mathfrak{B}'$  と定めていたので,  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$  である。

証明終

**(2) の証明** 示すべきことは  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$  が成り立つことである。(I2) より, 独立集合の勝手な部分集合も独立集合であるので,  $\mathfrak{I} = \{I : \text{包含に関する } \mathfrak{I} \text{ の極大元に } I \text{ が包含される}\}$  と表せ, 右辺は  $\{I : \mathfrak{B} \text{ の元に } I \text{ が包含される}\}$  と書き直せ, これを  $\mathfrak{I}'$  と定めていたので,  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$  である。 証明終