

モジュラー形式に関する書き留め

2026 年 2 月 8 日 14 時 46 分更新

Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

目 次

1	特殊線形群と上半平面	1
2	モジュラー関数	4
3	アイゼンシュタイン級数	8
4	基本領域	16
5	釣り合い公式	18
6	ヘッケ作用素	24
7	固有形式	28
A	整数係数行列のエルミート標準形	29

約束

1. 整数すべてがなす環を \mathbb{Z} , 実数体を \mathbb{R} , 複素数体を \mathbb{C} で表す。
2. 虚数単位を i で表すことにする。
3. 複素数 z の実部を $\Re z$, 虚部を $\Im z$ で表す。
4. 単位的可換環 R と正整数 n に対し, R 係数 n 次一般線形群を $\mathrm{GL}_n(R)$, 特殊線形群を $\mathrm{SL}_n(R)$, 特殊直交群を $\mathrm{SO}_n(R)$ で表す。
5. 二つの整数 m, n に対して, その最大公約数を $\mathrm{gcd}(m, n)$ で表す。



1 特殊線形群と上半平面

定義 1.1 集合 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ を \mathbb{H} と置き, **上半平面** と呼ぶ。

命題 1.2 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対して定まる正則関数 $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ は

$$\begin{aligned} c \neq 0 &\implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c \\ c = 0 &\implies \gamma \cdot \infty = \infty \end{aligned}$$

と拡張できる定数でない $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。さらに関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への作用が定まる。

証明 関数 $\gamma \cdot (-): \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が有理型であることについて $c = 0$ のときは明らかであるから、 $c \neq 0$ のときを考える。 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -d/c$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^\infty$ を勝手に考えると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} cz_n + d = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} az_n + b = -(ad - bc)/c \neq 0$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma \cdot z_n = \infty$ である。ゆえに $\gamma \cdot (-)$ は \mathbb{C} 上有理型である。同様に $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^\infty$ を勝手に考えると、すべての n について $z_n \neq 0$ として良く、

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{a + b/z_n}{c + d/z_n} \rightarrow \frac{a}{c} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから $\gamma \cdot (-)$ は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。

関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ が群作用であることについて $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $\gamma \cdot z = \frac{z+0}{0z+1} = z$ であるので、後は結合律を見れば良い。元 $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を勝手に取り、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ と表すとき、

$$\gamma' \cdot \gamma = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

である。正則関数 $\gamma' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ の定義域を $U(\subset \mathbb{C})$ とすると、連続性から、 $\gamma(V) \subset U$ となる開集合 $V \subset \mathbb{C}$ を取れる。勝手な複素数 $z \in V$ に対して、

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot (\gamma \cdot z) &= \gamma' \cdot \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)a' + b'}{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)c' + d'} \\ &= \frac{(az+b)a' + b'(cz+d)}{(az+b)c' + d'(cz+d)} && \text{(分母を払った)} \\ &= \frac{(aa' + b'c)z + (a'b + b'd)}{(ac' + cd')z + (bc' + dd')} && \text{(分母分子を } z \text{ についてまとめた)} \\ &= (\gamma' \cdot \gamma) \cdot z \end{aligned}$$

と計算でき、一致の定理から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の関数として $\gamma' \cdot (\gamma \cdot (-)) = (\gamma' \cdot \gamma) \cdot (-)$ であることが分かる。よって $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ が群作用であることが確かめられた。 証明終

命題 1.3 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と複素数 z ($c \neq 0$ のとき $z \neq -d/c$ を課す) に対して、

$$(1.1) \quad \Im(\gamma \cdot z) = \det(\gamma) \frac{\Im z}{|cz + d|^2}$$

が成立する。

証明 複素数 z の共役を \bar{z} で表すことにする。このとき

$$\begin{aligned}
2i\Im(\gamma \cdot z) &= \gamma \cdot z - \overline{\gamma \cdot z} && \because \text{定義} \\
&= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} && \because a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ なので} \\
&= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (cz+d)(a\bar{z}+b)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\
&= \det(\gamma) \frac{2i\Im z}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

と計算でき、この計算結果を $2i$ で割れば目的の等式を得る。

証明終

系 1.4 関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は \mathbb{H} に作用する。

証明 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$ のとき $\det(\gamma) = 1 > 0$ かつ $\Im z > 0$ であるから、(1.1) より $\Im(\gamma \cdot z) > 0$ であり、これは $\gamma \cdot z \in \mathbb{H}$ を意味する。

証明終

命題 1.5 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の \mathbb{H} への作用は推移的である。

証明 複素数 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取り、 $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ と表すと、 $y > 0$ であることに注意して、

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x + iy = z$$

と計算できるので、 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}$ である。

証明終

命題 1.6 安定化部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と等しい。したがって関係 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \gamma \mapsto \gamma \cdot i$ は全単射写像 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}$ を定める。

証明 元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ を勝手に取り、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すと、

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot i &= i \iff \frac{ai+b}{ci+d} = i \\
&\iff b+ia = -c+id \\
&\iff a=d \text{ かつ } c=-b \\
&\iff \gamma \text{ が直交行列である}
\end{aligned}$$

となり、これは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ であることを意味する。

証明終

2 モジュラー関数

定義 2.1 (弱モジュラー関数) k を整数とする。有理型関数 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が **レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数** であるとは、勝手な元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$(\star) \quad f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

が成立するときをいう。

命題 2.2 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f を考える。このとき勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して次の三つが成立する。

- (1) $f(z) = (-1)^k f(z)$ が成り立つ。ゆえに f が恒等的に零でなければ、 k は偶数でなければならない。
- (2) $f(z+1) = f(z)$ が成り立つ。ゆえに f は周期的関数である。
- (3) $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$ が成り立つ。

証明 (1) について $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

(2) について $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(z+1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

(3) について $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z + 0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。

証明終

命題 2.3 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $q(= q(z)) = \exp(2\pi iz)$ と置く。このとき $z \in \mathbb{H}$ であるためには、 $0 < |q| < 1$ であることが必要十分である。

証明 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| |\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \end{aligned}$$

$$= |\exp(-2\pi\Im z)|$$

であるから,

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi\Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。

証明終

穴あき単位円盤 $\{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$ を \mathbb{D}^* と置く。また実数 a に対して

$$\Omega_a = \{w \in \mathbb{C} : z \neq 0, a < \arg w < 2\pi + a\}$$

$$D_a = \{z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a\}$$

として対数関数の分枝

$$L_a : \Omega_a \rightarrow D_a; \quad w \mapsto \log |w| + i \arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

命題 2.4 f を弱モジュラー関数とする。各点 $q \in \mathbb{D}^*$ に対して, $q \in \Omega_a$ を満足するような対数関数の分枝 $L_a : \Omega_a \rightarrow D_a$ を一つ取る。このとき複素数

$$(2.1) \quad \tilde{f}(q) = f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right)$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって \mathbb{D}^* 上の有理型関数 \tilde{f} が定まる。また (2.1) を単に

$$\tilde{f}(q) = f\left(\frac{\log q}{2\pi i}\right)$$

と表す。

証明 $q \in \Omega_a, q \in \Omega_{a'}$ となる二つの分枝 $L_a, L_{a'}$ を取ると, 整数 n を用いて $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$ と表せるので,

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに $q \in \mathbb{D}^*$ であれば,

$$\exp\left(2\pi i \frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*, \quad \exp\left(2\pi i \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので, 命題 2.3 より $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$ である。命題 2.2 (2) より f が $f(z+1) = f(z)$ を満足する周期関数であるから, $q \in \mathbb{D}^*$ のとき,

$$f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right)$$

となり, (2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。 $L_a(q)/2\pi i$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数, f も \mathbb{H} 上の有理型関数であるから, これら関数の合成である \tilde{f} は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数である。 $\bigcup_{a>0}(\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$ であるから, \tilde{f} が \mathbb{D}^* 上の有理型関数であることが分かった。 証明終

定義 2.5 f を弱モジュラー関数とする。

(1) \tilde{f} が 0 で有理型であるとき, f が ∞ で有理型という。

(2) \tilde{f} が 0 で正則であるとき, f が ∞ で正則という。

\tilde{f} が 0 で有理型のとき, ローラン展開

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ, $q = q(z) = \exp(2\pi iz)$ のとき, 虚部が十分大きい点 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$f(z) = f\left(\frac{\log \exp(2\pi iz)}{2\pi i}\right) = \tilde{f}(\exp(2\pi iz)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

となり, f のフーリエ展開を与える。複素数列 $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$ を f のフーリエ係数と呼ぶ。また f が ∞ で正則であれば, $N = 0$ とできる。

定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式) $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数とする。

(1) f が ∞ で有理型のとき, f をレベル 1 荷重 k のモジュラー関数と呼ぶ。

(2) f が \mathbb{H} 上の正則関数で, かつ ∞ で正則のとき, f をレベル 1 荷重 k のモジュラー形式と呼ぶ。

(3) モジュラー形式 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ の q 展開とは, \tilde{f} のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

のことをいう。さらに $a(0) = 0$ のとき f を尖点形式という。

命題 2.7 k を整数とし, 集合 M_k, S_k を

$$M_k = \{f: f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である}\}$$

$$S_k = \{f: f \text{ は 1 荷重 } k \text{ の尖点形式である}\}$$

で定める。このとき M_k と S_k は \mathbb{C} 線形空間である。

証明 M_k が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式 $f, g \in M_k$ を勝手に取るとき, 正則関数の和は正則関数であるから, $f + g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\tilde{f} + \tilde{g}: \mathbb{D}^* \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(f + g)^{\sim} = \tilde{f} + \tilde{g}$ であるから, $(f + g)^{\sim}: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数であ

る。あとは $f + g$ が (\star) を満足することを示せば、 $f + g \in M_k$ であることが分かる。元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると、

$$\begin{aligned} (f + g)(\gamma \cdot z) &= f(\gamma \cdot z) + g(\gamma \cdot z) \\ &= (cz + d)^k f(z) + (cz + d)^k g(z) \\ &= (cz + d)^k (f + g)(z) \end{aligned}$$

と計算でき、 (\star) を $f + g$ が満足することが確かめられ、 $f + g \in M_k$ である。 M_k がスカラー倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手な尖点形式 $f, g \in S_k$ に対して、 $(f + g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}$ が成立することから、 S_k が \mathbb{C} 線形空間であることも従う。

証明終

命題 2.8 整数 k, l とモジュラー形式 $f \in M_k, g \in M_l$ に対し、 $fg \in M_{k+l}$ が成立する。また f が尖点形式のとき fg も尖点形式である。

証明 正則関数の積は正則関数であるから、 $fg: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\tilde{f}\tilde{g}: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(fg)^\sim = \tilde{f}\tilde{g}$ であるから、 $(fg)^\sim$ も正則関数である。あとは fg が (\star) を満足することを示せばよく、元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると、

$$\begin{aligned} (fg)(\gamma \cdot z) &= (cz + d)^k f(z)(cz + d)^l g(z) \\ &= (cz + d)^{k+l} (fg)(z) \end{aligned}$$

と計算できるので、 $fg \in M_{k+l}$ であることが確かめられた。また f が尖点形式のとき、

$$\begin{aligned} \tilde{f}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \\ \tilde{g}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \end{aligned}$$

とローラン展開すると、

$$(fg)^\sim(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n, \quad c(n) = \sum_{m=0}^n a(m)b(n-m)$$

であるから、特に $c(0) = a(0)b(0) = 0$ で、 fg は尖点形式であることが分かる。 証明終

3 アイゼンシュタイン級数

定義 3.1 k を 3 以上の整数とする。各複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して、級数

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

を定め、 $G_k(z)$ を **アイゼンシュタイン級数** と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

補題 3.2 K を \mathbb{H} の有界閉集合とする。このとき勝手な点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$(3.1) \quad C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

が成立するような正数 C が存在する。

証明 $C_1 = \min\{\Im z : z \in K\}$, $C_2 = \max\{|\Re z| : z \in K\}$ と置く。

点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を勝手に取り、 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と表すと、

$$|mz + n| = |(mx + n) + imy| = \sqrt{(mx + n)^2 + (my)^2}$$

となる。 $C_2 = 0$ であれば常に $x = 0$ で、 $|mz + n| \geq |mx + n| = |n|$ かつ $|mz + n| \geq y|m| \geq C_1|m|$ であるから、 $C = \min\{1, C_1\}$ が (3.5) を満足する正数である。 $C_2 \neq 0$ の場合を考える。前述の議論と同じく $|m|$ については $|mz + n| \geq C_1|m|$ である。 $|n|$ について、 $|m| \geq |n|/(2C_2)$ のとき

$$(3.2) \quad |mz + n| \geq C_1|m| \geq \frac{C_1}{2C_2}|n|$$

となり、そうでないとき $n \neq 0$ かつ $|m/n| < 1/(2C_2)$ となり、常に $|m/n||x| \leq 1/2$ で、

$$(3.3) \quad |mx + n| = \left| n \left(\frac{m}{n}x + 1 \right) \right| \geq |n| \left(1 - \left| \frac{m}{n} \right| |x| \right) \geq \frac{1}{2}|n|$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると、 $C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$ が (3.5) を満足する正数である。 証明終

定理 3.3 $k \geq 3$ のとき G_k は \mathbb{H} 上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

証明 K を \mathbb{H} の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より、勝手な点 $z \in K$ と勝手な元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

となるような正数 C が存在し,

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{|mz + n|^k} \leq \frac{1}{C^k} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k}$$

であるから、右辺の級数の収束を示せば、 G_k が K 上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数 N に対して $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \max\{|m|, |n|\} = N\}$ の個数を数える。 $|m| > |n|$ のものを数えると、 $m = \pm N$ で、 $n = -N + 1, -N + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1$ の $2(2N - 1)$ 個ある。同様に $|n| < |m|$ のものも $2(2N - 1)$ 個ある。 $|m| = |n|$ のものは、 $(N, N), (N, -N), (-N, N), (-N, -N)$ の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は $8N$ 個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8N}{N^k} = 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{k-1}}$$

であり、いま $k \geq 3$ であるからこの正項級数は収束する。以上で、 G_k が \mathbb{H} 上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式 $mz + n$ は \mathbb{H} 上で常に零でないから、有理多項式 $1/(mz + n)$ は \mathbb{H} 上の正則関数であり、 G_k の収束先が正則関数であることも分かる。 証明終

定理 3.4 $k \geq 3$ のとき正則関数 $G_k: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ はレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取る。 γ が全単射写像 $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を誘導することに注意すると、

$$\begin{aligned} G_k(\gamma \cdot z) &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m(\gamma \cdot z) + n)^k} \\ &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{(cz + d)^k}{(m(az + b) + n(cz + d))^k} && \because \text{分母を払った} \\ &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{(cz + d)^k}{((ma + nc)z + (mb + nd))^k} \\ &= \sum_{\substack{(m', n'): \\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}, \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}} \frac{(cz + d)^k}{(m'z + n')^k} \\ &= (cz + d)^k \sum_{\substack{(m', n') \in \mathbb{Z}^2: \\ (m', n') \neq (0,0)}} \frac{1}{(m'z + n')^k} && \because \gamma \text{ の全単射性より} \end{aligned}$$

$$= (cz + d)^k G_k(z)$$

となり, G_k が (\star) を満足することが確かめられた。

証明終

系 3.5 k が 3 以上の奇数のとき \mathbb{H} 上で $G_k(z) = 0$ である。

証明 定理 3.4 より G_k が荷重 k の弱モジュラー関数であるから, 命題 2.2 (1) より G_k は \mathbb{H} 上の零関数である。

証明終

さらに弱モジュラー関数 G_k はモジュラー形式である。

定理 3.6 $k \geq 3$ のとき G_k は ∞ で正則である。つまり G_k はモジュラー形式である。

この定理の証明のために, ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて G_k の q 展開を表示する。

定義 3.7 (1) 1 より大きい実数 s に対して,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数 ζ を定め, **ゼータ関数** と呼ぶ。

(2) 正整数 n と実数 l に対して,

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d|n}} d^l$$

として関数 σ_l を定め, **約数関数** と呼ぶ。

(3) 原点周りの \mathbb{D}^* 上の正則関数 $z/(e^z - 1)$ のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数 B_k を **ベルヌーイ数** と呼ぶ。

補題 3.8 (オイラーの等式) 正の偶数 k に対して,

$$(3.4) \quad \zeta(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

が成立する。

証明 三角関数の公式

$$(3.5) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

を用いる¹⁾。(3.5) の左辺に z を掛けたものを計算すると, $z \in \mathbb{H}$ のとき

$$\pi z \cot(\pi z) = \pi z \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad \because \cot \text{ の定義}$$

1) 証明は, 例えばヘルグロッツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$\begin{aligned}
&= \pi z \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\
&= \pi iz \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} \\
(3.6) \quad &= \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi z)^k && \because z \in \mathbb{H} \text{ なので, 命題 2.3 から} \\
&&& e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので}
\end{aligned}$$

となる。次に (3.5) の右辺に z を掛けたものを計算すると,

$$\begin{aligned}
z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} &= 1 + z \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} \right) \\
&= 1 + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} && \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2}{n^2 - z^2} && \because z \text{ を総和の中に入れ, 符号を調整した} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \frac{1}{1 - (\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{n^{2l}} && \because \frac{1}{1-z} \text{ の原点におけるテイラー展開} \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty} 2z^{2(l+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(l+1)}} && \because \text{和を交換した} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2z^{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2l}} && \because \text{添字 } l \text{ を } 1 \text{ ずらした} \\
(3.7) \quad &= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2\zeta(2l)z^{2l}
\end{aligned}$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく, 2 以上の偶数 $k = 2l$ に関する z^k の係数を比較することで, 目的の等式

$$\xi(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。

証明終

補題 3.9 正の偶数 k に対して,

$$(3.8) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$$

が成立する。

証明 上述の補題と同様に三角関数の公式

$$(3.9) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

を用いる。(3.9)の左辺を書き直すと,

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{ の定義} \\ &= \pi \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\ &= \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\ &= \pi i + \pi i \frac{2}{q - 1} && \because q = e^{2\pi iz} \text{ と置いているので} \\ &= \pi i - 2\pi i \frac{1}{1 - q} \\ &= \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n && \because \frac{1}{1 - q} \text{ の原点におけるテーラー展開} \end{aligned}$$

となるので, $n \geq 1$ のとき $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} q^n = (2\pi i n)^{k-1} q^n$ であることに注意して, (3.9)の両辺を z について $(k-1)$ 階微分すると,

$$-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n = (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}$$

となり, 両辺を $(k-1)!$ で割ると, いま k が偶数であるから $(-1)^{k-1} = -1$ なので,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

となる。また (3.4) から

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k}$$

であるから, 目的の等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

を得られる。

証明終

定理 3.10 4 以上の偶数 k に対して, G_k の q 展開が

$$(3.10) \quad G_k(z) = 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

と表される。

証明 $G_k(z)$ を計算していくと,

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^k}}_{m=0 \text{ の項}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(-mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz-n)^k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \right) \quad \because k \text{ が偶数なので} \\
&= 2\xi(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= 2\xi(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} (e^{2\pi i m z})^n \right) \quad \because (3.8) \text{ を用いた} \\
&= 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^{mn} \right) \quad \because q^{mn} = (e^{2\pi i m z})^n \\
&= 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}: \\ n > 0, n|d}} n^{k-1} q^d \right) \quad \because d = mn \text{ と置いた} \\
&= 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d \right) \quad \because \text{約数関数の定義} \\
&= 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)
\end{aligned}$$

と計算でき, これが目的の等式であった。

証明終

定理 3.6 の証明 k が奇数のときは G_k が零関数であるので明らかである。 k が偶数のとき (3.10) から

$$\tilde{G}_k(q) = 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

が成立するので, $\lim_{q \rightarrow 0} \tilde{G}_k(q) = 2\xi(k)$ である。これは $\tilde{G}_k(q)$ が原点で正則であることを意味し, したがって G_k が ∞ で正則であることが従う。

証明終

定義 3.11 3 以上の整数 k に対して, $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上の正則関数 E_k を

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\xi(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

で定め, **正規化アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

ベルヌーイ数 (と約数関数) を計算できれば, E_k を明示的に書き下すことができるので, ここでベルヌーイ数の漸化式を述べておく。

命題 3.12 $B_0 = 1$, かつ $d \geq 1$ のとき

$$B_d = -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k$$

が成り立つ。

証明 e^z を原点周りでテイラー展開すると

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

であるから,

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

となる。したがって

$$1 = \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k \right) = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^d \frac{B_k}{k! (d-k+1)!} \right) z^d$$

となるので, 係数比較をすることで, $B_0 = 1$ かつ

$$(3.11) \quad \sum_{k=0}^d \frac{B_k}{k! (d-k+1)!} = 0$$

が分かる。(3.11) を B_d について解くことで,

$$\begin{aligned} B_d &= - \sum_{k=0}^{d-1} \frac{d!}{k! (d-k+1)!} B_k \\ &= -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d+1)!}{k! (d-k+1)!} B_k && \because d+1 \text{ を挟み込んだ} \\ &= -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k && \because \text{二項係数の定義} \end{aligned}$$

と計算でき, 目的の漸化式を得られる。

証明終

いくつかベルヌーイ数を計算すると,

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2}, \\
B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}, \\
B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0, \\
B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0\right) = -\frac{1}{30}, \\
B_5 &= \dots = 0, \\
B_6 &= \dots = \frac{1}{42}
\end{aligned}$$

などとなる。したがって, 正規化アイゼンシュタイン級数は

$$\begin{aligned}
E_4(z) &= 1 - 8(-30) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n = 1 - 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \dots), \\
E_6(z) &= 1 - 12 \cdot 42 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n = 1 - 504(q + 33q^2 + 244q^3 + \dots)
\end{aligned}$$

などとなる。ここで正則関数 $E_4^3 - E_6^2$ を考えると, これは命題 2.7 と命題 2.8 から荷重 12 のモジュラー形式で, 上の計算より

$$(E_4(z))^3 - (E_6(z))^2 = 1728q + o(q)$$

となるので, 荷重 12 の尖点形式であることが分かる。尖点形式 Δ を $(E_4^3 - E_6^2)/1728$ で定め, **ラマヌジャンのデルタ**と呼ぶ。また Δ のフーリエ係数を $(\tau(n))_{n=0}^{\infty}$ で表し, **ラマヌジャンのタウ関数**と呼ぶ。具体的には

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(1) = 1, \quad \tau(2) = -24, \quad \tau(3) = 252, \dots$$

と計算できる。ラマヌジャンのタウ関数については, ラマヌジャンによる有名な予想がある。

予想 3.13 (ラマヌジャン予想) ラマヌジャンのタウ関数に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して, n と m が互いに素であるならば

$$\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$$

が成立する。

(2) p を素数, r を正整数とするとき

$$\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})$$

が成立する。

予想??は、以降で扱うヘッケ作用素（6 節）を用いることで証明される。

4 基本領域

定義 4.1 群 G が \mathbb{H} に作用しているとする。 \mathbb{H} の閉部分集合 \mathcal{D} が条件

(FD1) \mathcal{D} の境界は面積零である。

(FD2) 各点 $z \in \mathbb{H}$ に対し、 $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ を満足する元 $\gamma \in G$ が存在する。

(FD3) 相異なる 2 点 $z, z' \in \mathcal{D}$ に対して、 $\gamma \cdot z = z'$ となる元 $\gamma \in G$ が存在するとき、 z と z' は共に \mathcal{D} の境界に属す。

観察 4.2 (ii) の条件から、 \mathbb{H} の勝手な点は、基本領域の点と G の下同値である。(iii) の条件から、基本領域に属す相異なる内点 z, z' は G の下同値でない。

今回は G が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、系 1.4 の作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ を考える。

観察 4.3 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を S , $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を T と置く。

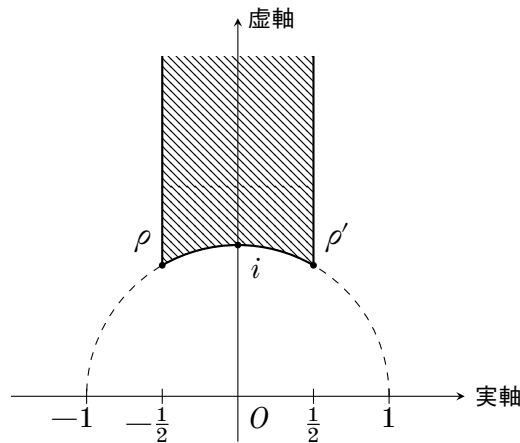
(1) 点 $z \in \mathbb{H}$ に対して、 $S \cdot z = -1/z$ である。特に $|z| \leq 1$ ならば $|S \cdot z| \geq 1$ である。

(2) 点 $z \in \mathbb{H}$ に対して、 $T \cdot z = z + 1$ である。また $T^{-1} \cdot z = z - 1$ であるから、特に $-1/2 \leq \Re(T^n \cdot z) \leq 1/2$ を満足するような整数 n がある。

以下 \mathcal{D} を、 \mathbb{H} の閉集合

$$(4.1) \quad \left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

とし、これが作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ の基本領域であることを示す。 \mathcal{D} を図示すると、 $\rho = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $\rho' = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ とするとき、図



における斜線部分の領域が \mathcal{D} である。

定理 4.4 \mathbb{H} の閉集合

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

は作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ の基本領域である。

証明 (FD1) について \mathcal{D} の境界は曲線であるから、面積零である。

(FD2) について 点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に固定する。 $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ が \mathbb{C} の格子であるから、集合

$$\left\{ |c'z + d'| : \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

の最小値を与えるような行列 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。(1.1) の虚部の表示から、 γ は集合

$$\left\{ \Im(\gamma' \cdot z) : \gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

の最大値を γ が与える。察 4.3 (2) から、 $-1/2 \leq \Re(T^n \gamma \cdot z) \leq 1/2$ を満足するような整数を取れる。この n について $|T^n \gamma \cdot z| \geq 1$ で、したがって $T^n \gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ である。なんとなれば、 $|T^n \gamma \cdot z| < 1$ だったとすると、

$$\begin{aligned} \Im(ST^n \gamma \cdot z) &= \Im\left(-\frac{1}{T^n \gamma \cdot z}\right) \\ &= \frac{\Im(T^n \gamma \cdot z)}{|T^n \gamma \cdot z|} \\ &> \Im(T^n \gamma \cdot z) \\ &= \Im(\gamma \cdot z) \end{aligned} \quad \because T^n \gamma \cdot z = \gamma \cdot z + n \text{ なので}$$

と計算でき、 γ の最大性に反するからである。

(FD3) について 相異なる点 $z, z' \in \mathcal{D}$ について、 $\gamma \cdot z = z'$ を満足する元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ があるとし、 z, z' が \mathcal{D} の境界に属することを示したい。ここで、 \mathcal{D} の点 z が \mathcal{D} の境界に属するためには、 $\lceil |\Re(z)| = 1/2$ または $|z| = 1$ が成立することが必要十分であることに注意する。 $\Im(z') \geq \Im(z)$ と仮定しても一般性が失われない。すると (1.1) より

$$\frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} = \Im(\gamma \cdot z) = \Im(z') \geq \Im(z)$$

となるので、 $1 \geq |cz + d|$ である。特に虚部について見ると

$$1 \geq |\Im(cz + d)| = |\Im(cz)| = |c| |\Im(z)| \geq |c| |\Im(\rho)| = |c| \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので、 $c = -1, 0, 1$ のいずれかである。

- ・ $c = 0$ のとき。 $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \det \gamma = 1$ であるから、 $d = \pm 1$ である。 $d = 1$ のときを考えると、 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で、 $\gamma \cdot z = z + b$ となる。 $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ であるから、

$$\frac{1}{2} \geq |\Re(\gamma \cdot z)| = |\Re(z + b)| = |\Re(z) + b| \geq |b| - |\Re(z)| \geq |b| - \frac{1}{2}$$

となるので、 $b = -1, 0, 1$ のいずれかである。 $z' \neq z$ と仮定しているので $b \neq 0$ である。 $b = 1$ であるなら、 $\Re(z) = -1/2$, $\Re(z') = 1/2$ となり、これらは \mathcal{D} の境界の点である。同様に、 $b = -1$ であるなら、 $\Re(z) = 1/2$, $\Re(z') = -1/2$ となり、これらは \mathcal{D} の境界の点である。 $d = -1$ のときは、 $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で、 $\gamma \cdot z = z - b$ となるので、 $d = 1$ のときの議論と同様である。

- ・ $c = 1$ のとき。このとき $1 \geq |z + d|$ であるから、

$$1 \geq |z + d| \geq |\Re(z + d)| \geq |d| - |\Re(z)| \geq |d| - \frac{1}{2}$$

となり、 $|d| \leq 3/2$ であることが分かる。 d が整数であるから、 $d = -1, 0, 1$ のいずれかである。 $d = 0$ のとき $|z| = 1$ であるので、 z は \mathcal{D} の境界に属す。また $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるので、 $\det(\gamma) = 1$ と合わせて、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。すると $z' = \gamma \cdot z = -1/z + a$ と計算でき、 $|-1/z| \leq 1$ であることを踏まえると、

$$\frac{1}{2} \geq |\Re(z')| = \left| \Re\left(-\frac{1}{z}\right) + a \right| \geq |a| - \left| \Re\left(-\frac{1}{z}\right) \right| = |a| - 1$$

となるので、 $|a| \leq 3/2$ である。 a が整数であるので、 $a = -1, 0, 1$ のいずれかである。 $a = 0$ ならば $|z'| = |-1/z| = 1$ であるので、 z' は \mathcal{D} の境界の点である。 $a = 1$ ならば $\Re(-1/z) = -1/2$ かつ $\Re(z') = 1/2$ であるので、この場合も z' は \mathcal{D} の境界の点である。 $a = -1$ の場合も同様に考えると、 $\Re(-1/z) = 1/2$ かつ $\Re(z') = -1/2$ であるので、 z' は \mathcal{D} の境界の点である。

- ・ $c = -1$ のとき。 $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となり、 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot z = z$ であるので、 $c = 1$ の場合の議論に帰着できる。

以上でいずれの場合でも z, z' が \mathcal{D} の境界に属することが示された。

証明終

5 釣り合い公式

引き続き (4.1) の基本領域 \mathcal{D} を考える。

補題 5.1 零でないモジュラー形式 f に関して、 \mathcal{D} における f の零点は有限個である。

証明 f が \mathbb{H} 上の正則関数、 \tilde{f} が \mathbb{D} 上の正則関数であることに注意する。 \mathcal{D} 内の f の零点集合を Z と置き、 Z が無限集合であったと仮定する。さらに Z が有界集合であったと

すると、相異なる可算個の Z の点を番号付けして点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を考えると、点列コンパクト性から収束部分列 $(z_{n(i)})_{i=1}^{\infty}$ を取れる。すべての i について $f(z_{n(i)}) = 0$ であるから、一致の定理より $f \equiv 0$ となり、矛盾が生じるので、 Z は有界でない。 ∞ に収束する Z の点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を取り、 $q_n = \exp(2\pi i z_n)$ として \mathbb{D} 内の点列 $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ かつ $\tilde{f}(q_n) = 0$ であるから、一致の定理より $\tilde{f} \equiv 0$ で、再び一致の定理より $f \equiv 0$ となり、矛盾が生じる。ゆえに Z は有限集合であることが従う。 証明終

定理 5.2 (釣り合い公式) $f \neq 0$ であるようなレベル 1 荷重 k のモジュラー形式 f を考える。複素数 $z \in \mathbb{H}$ における f の位数を $v_z(f)$ で表し、 0 における \tilde{f} の位数を $v_{\infty}(f)$ で表すことにする。このとき

$$(5.1) \quad v_{\infty}(f) + \frac{v_i(f)}{2} + \frac{v_{\rho}(f)}{3} + \sum_{\substack{p \in \mathcal{D}: \\ p \neq i, \rho}} v_p(f) = \frac{k}{12}$$

が成立する。

証明 零点の虚部の集合

$$\{\Im(z) \in \mathcal{D} : z \text{ は } f \text{ の零点である}\}$$

が補題 5.1 より有限集合であるから、これら虚部より大きい数 N を取れる。正数 $\epsilon > 0$ を取り、1 図に表す閉曲線 $ABCC'DD'EE'A$ を考える。

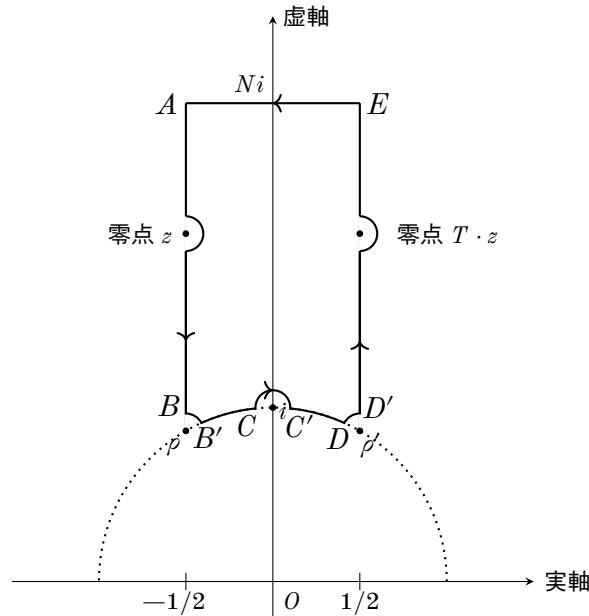


図 1 閉曲線 $ABB'CC'DD'EA$

ここで曲線は次の条件を満足するようにする。

- ・ 曲線は、集合 $\mathcal{D} \cap \{z \in \mathbb{H} : \Im(z) \leq N\}$ の境界に沿ように、 $-1/2 + Ni$ から ρ に向かって動き始める。
- ・ 実部が負であるとき、 f の零点を進行方向左側に半径 ϵ の円弧で避ける。
- ・ 実部が正であるとき、 f の零点を進行方向右側に半径 ϵ の円弧で避ける。
- ・ i, ρ, ρ' はすべて進行方向左側に半径 ϵ の円弧で避ける。

したがってこの閉曲線の内部にある f の零点は

$$\{z \in \mathcal{D} : z \text{ は } f \text{ の零点である}\} \setminus (\{i, \rho, \rho'\} \cup \{z \in \mathbb{H} : \Re(z) < 0\})$$

である。特に、閉曲線の内部にある勝手な 2 点は互いに $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の下同値でないので、偏角の原理より

$$(5.2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCC'DD'EE'A} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{p \in \mathcal{D}: \\ p \neq i, \rho}} v_p(f)$$

が成立する。以降で (5.2) の左辺の積分を計算する。

曲線 EA 上の積分について 関数 $q = \exp(2\pi iz)$ は集合

$$\{z \in \mathbb{H} : \Im(z) = N, -1/2 \leq \Re(z) \leq 1/2\}$$

を集合

$$\mathcal{B} = \{q \in \mathbb{D} : |q| = \exp(-2\pi N)\}$$

へ一対一に対応させるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{EA} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}: \text{時計回り}} \frac{f'(\frac{\log q}{2\pi i})}{f(\frac{\log q}{2\pi i})} \frac{1}{2\pi i q} dq && \because q = \exp(2\pi iz) \text{ と置換した} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}: \text{時計回り}} \frac{\tilde{f}'(q)}{\tilde{f}(q)} dq && \because \frac{d}{dz} \tilde{f}(q) = \tilde{f}'(q) \cdot 2\pi i q \\ &= -v_\infty(f) && \because \text{時計周りの積分に対する偏角の原理} \end{aligned}$$

(5.3)

と計算できる。

曲線 AB と $D'E$ 上の積分について f は周期 1 の周期関数であるから

$$(5.4) \quad \int_{AB} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{D'E} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{AB} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{BA} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

と打ち消し合う。

曲線 BB' , CC' , DD' 上の積分について 一般論として, 点 $p \in \mathbb{H}$ を中心とする半径 ϵ 角度 θ の円弧 \mathcal{C} 上の時計回り積分は, $f'(z)/f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-p)^n$ をローラン展開とするとき²⁾, $a_{-1} = p(f)$ で,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \int_{\mathcal{C}} (z-p)^n dz \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \int_0^{-\theta} \epsilon^n e^{itn} i \epsilon e^{it} dt \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \epsilon^{n+1} i \int_0^{-\theta} e^{i(n+1)t} dt \\ &\rightarrow -v_p(f) \theta i \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{BB'} + \int_{CC'} + \int_{DD'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{3} \pi v_{\rho}(f) i + \pi v_i(f) i + \frac{1}{3} \pi v_{\rho'}(f) i \right) \\ (5.5) \qquad \qquad \qquad &= -\frac{1}{3} v_{\rho}(f) - \frac{1}{2} v_i(f) \end{aligned}$$

となる。

曲線 $B'C$ と $C'D$ 上の積分について 一次分数変換 $S \cdot (-)$ によって曲線 $C'D$ が曲線 $CB' = -B'C$ に写されるので

$$\int_{B'C} + \int_{C'D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{B'C} - \int_{S(B'C)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

と書ける。第二項目の積分を考えると,

$$\begin{aligned} \int_{S(B'C)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{B'C} \frac{f'(S \cdot z)}{f(S \cdot z)} \left(\frac{d}{dz} S \cdot z \right) dz \\ &= \int_{B'C} \frac{\frac{d}{dz} f(S \cdot z)}{f(S \cdot z)} dz && \because \text{合成関数の微分} \\ &= \int_{B'C} \frac{\frac{d}{dz} (z^k f(z))}{z^k f(z)} dz && \because (\star) \text{ より} \\ &= \int_{B'C} \frac{k z^{k-1} f(z) + z^k f'(z)}{z^k f(z)} dz \\ &= k \int_{B'C} \frac{1}{z} dz + \int_{B'C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

2) $v_p(f') - v_p(f) \geq 1$ なので, f'/f が p を極として持つなら, その位数は高々 1 である。

$$\begin{aligned}
& \rightarrow ki \int_{2\pi/3}^{\pi/2} dt + \int_{B'C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (\epsilon \rightarrow +0) \\
(5.6) \quad & = -\frac{k\pi i}{6} + \int_{B'C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz
\end{aligned}$$

と計算できるので,

$$(5.7) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{B'C} + \int_{C'D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = \frac{k}{12}$$

となる。

以上 (5.3), (5.4), (5.5), (5.7) を合わせると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{ABB'CC'DD'EA} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{ABB'CC'DD'EA} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \because \text{偏角の原理} \\
&= -v_{\infty}(f) - \frac{1}{2}v_i(f) - \frac{1}{3}v_{\rho}(f) + \frac{k}{12}
\end{aligned}$$

この計算結果と (5.2) を合わせれば, 目的の等式 (5.1) が得られる。

証明終

系 5.3 k を整数とする。

- (1) $M_0 = \mathbb{C}$ である。
- (2) $k < 0$ であるならば $M_k = 0$ である。
- (3) $M_2 = 0$ である。
- (4) $k = 4, 6, 8, 10, 14$ のとき $M_k = \mathbb{C}E_k$ である。
- (5) ラマヌジャンのデルタ Δ は \mathbb{H} 上で零点を持たない。
- (6) 整数 k に対して乗算写像 $\Delta \cdot (-): M_{k-12} \rightarrow S_k$ は \mathbb{C} 上の線形同型である。

(1) の証明 \mathbb{H} 上の定数関数はすべて荷重 0 のモジュラー形式であるので, $\mathbb{C} \subset M_0$ である。逆に荷重 0 のモジュラー形式 f を考えると, i における f の値を c とするとき, 差 $f - c$ も荷重 0 のモジュラー形式, かつ i における値が零である。よって $f - c \equiv 0$ であったとすると, (5.1) の左辺は 0 より大きいのに対し, 右辺は 0 であるから, 矛盾が生じる。ゆえに $f \equiv c$ であり, $M_k \subset \mathbb{C}$ であることが示された。

証明終

(2) の証明 $f \not\equiv 0$ であるような M_k のモジュラー形式があったとすると, (5.1) の左辺は非負であるのに対し右辺が負であるから矛盾が生じる。ゆえに M_k の元は零関数のみである。

証明終

(3) の証明 零でない荷重 2 のモジュラー形式があったとすると, (5.1) が成立するが, 右辺が $1/6$ なのに対して左辺は $1/6$ になり得ないので, 矛盾が生じる。ゆえに荷重 2 のモジュラー形式は零関数しかない。

証明終

(4) の証明 各場合の k を考えると

- ・ $k = 4$ のとき, (5.1) の右辺が $1/3$ であるから, 荷重 4 の零でないモジュラー形式は ρ を位数 1 の零点として持つ。
- ・ $k = 6$ のとき, (5.1) の右辺が $1/2$ であるから, 荷重 6 の零でないモジュラー形式は i を位数 1 の零点として持つ。
- ・ $k = 8$ のとき, (5.1) の右辺が $2/3$ であるから, 荷重 8 の零でないモジュラー形式は ρ を位数 2 の零点として持つ。
- ・ $k = 10$ のとき, (5.1) の右辺が $5/6$ であるから, 荷重 10 の零でないモジュラー形式は i と ρ を位数 1 の零点として持つ。
- ・ $k = 14$ のとき, (5.1) の右辺が $7/6$ であるから, 荷重 14 の零でないモジュラー形式は i を位数 1 の零点, ρ を位数 2 の零点として持つ。

となるので, 零でない荷重 k のモジュラー形式 f, g について, f/g は零でない荷重 0 のモジュラー形式で, (1) より $f = cg$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ となることが分かる。特に g として正規化アイゼンシュタイン級数 E_k として取れば, 勝手な荷重 k のモジュラー形式が cE_k と表せることが分かる。これは $M_k = \mathbb{C}E_k$ であることを意味する。証明終

(5) の証明 ラマヌジャンのタウ関数の値は $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ となっているので, $v_\infty(\Delta) = 1$ である。対して (5.1) の右辺は 1 であるから, Δ は \mathbb{H} で零点を持ち得ない。

証明終

(6) の証明 乗算写像 $\Delta \cdot (-): M_{k-12} \rightarrow S_k$ の線形性は明らかであるから, この写像が全単射であることを示す。

単射性 モジュラー形式 $f, g \in M_{k-12}$ に対して $\Delta \cdot f = \Delta \cdot g$ だとすると, (5) より Δ が \mathbb{H} 上常に零でないので, $f = g$ であることが分かる。ゆえに $\Delta \cdot (-)$ は単射である。

全射性 尖点形式 $f \in S_k$ に対して, f/Δ が荷重 $k - 12$ のモジュラー形式であることを示せば良い。 f が \mathbb{H} 上の正則関数で, Δ が常に零でない \mathbb{H} 上の正則関数であるから, f/Δ も \mathbb{H} 上の正則関数である。また f と Δ が (\star) を満足するので, f/Δ も (\star) を満足し, f/Δ が荷重 $k - 12$ の正則な弱モジュラー関数であることが分かる。また $v_\infty(f/\Delta) = v_\infty(f) - 1 \geq 0$ であるから, f/Δ は ∞ で正則である。したがって $f/\Delta \in M_{k-12}$ で, $f = \Delta \cdot (f/\Delta) \in M_{k-12}\Delta$ である。ゆえに $\Delta \cdot (-)$ は全射である。証明終

系 5.3 (6) より $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$, すなわち荷重 12 の尖点形式はすべてラマヌジャンのデルタの定数倍である。

6 ヘッケ作用素

ヘッケ作用素を定義するための準備を行なっていく。正整数 n に対して集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n \right\}$$

を \mathbf{M}_n と置き, 行列の左乗算によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の \mathbf{M}_n への左群作用を定めておく。

補題 6.1 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n を考える。勝手な行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n$ と軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$(6.1) \quad (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (\tilde{c}z + \tilde{d})^{-k} f\left(\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}\right)$$

が成立する。

証明 軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の元は, 行列 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

と表される。すると (6.1) の右辺は

$$\begin{aligned} & (ac'z + cd')^{-k} f\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) \cdot f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= (ac'z + cd')^{-k} (c' \frac{az + b}{cz + d} + d')^k f\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) && \because (\star) \text{より} \\ &= (ac'z + cd')^{-k} \left(c' \frac{az + b}{cz + d} + d'\right)^k f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) && \because \text{作用の定義} \\ &= (ac'z + cd')^{-k} \left(\frac{(ac' + cd')z + (bc' + dd')}{cz + d}\right)^k f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \end{aligned}$$

と計算でき, (6.1) の左辺と等しいことが分かる。

証明終

補題 6.1 から, レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ に対して

$$(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

を軌道の代表元の取り方に依らずに定義できる。

定義 6.2 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して, \mathbb{H} 上の有理型関数 $T_n f$ を,

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

で定める。レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数の集合から \mathbb{H} 上の有理型関数への写像 T_n をヘッケ作用素と呼ぶ。

まずヘッケ作用素によって弱モジュラー関数が弱モジュラー関数に写ることを見る。

命題 6.3 f がレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数であるとき, $T_n f$ も荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明 行列 $\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を勝手に取る。 γ の右乗算が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ 上の置換を引き起こすことに注意すると,

$$\begin{aligned}
& T_n f(\gamma \cdot z) \\
&= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma \cdot z) + d)^{-k} f\left(\frac{a(\gamma \cdot z) + b}{c(\gamma \cdot z) + d}\right) \\
&= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} \left(c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d\right)^{-k} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot z\right) \quad \because \text{作用の定義} \\
&= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} \left(\frac{(a'c + c'd)z + (b'c + dd')}{c'z + d'}\right)^{-k} f\left(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \cdot z\right) \\
&= (c'z + d')^k n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} ((a'c + c'd)z + (b'c + dd'))^{-k} f\left(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \cdot z\right) \\
&= (c'z + d')^k n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma \cdot z) + d)^{-k} f\left(\frac{a(\gamma \cdot z) + b}{c(\gamma \cdot z) + d}\right) \quad \because \gamma \text{ が } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n \text{ 上の置換なので} \\
&= (c'z + d')^k T_n f(z)
\end{aligned}$$

と計算でき, $T_n f$ が (\star) を満足することが確かめられる。ゆえに $T_n f$ は荷重 k の弱モジュラー関数である。 証明終

ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ の完全代表系としてエルミート標準形を取れることを見ておく。

命題 6.4 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n$ に対して, $\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がエルミート標準形, すなわち

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} > 0, \quad \tilde{a}\tilde{d} = n, \quad 0 \leq \tilde{b} < \tilde{d}$$

を満足する行列 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在する。

証明 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が非特異であるから, 定理 A.2 より $\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がエルミート標準形となるようなユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。エルミート標準形の行列式は正で, かつ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式も正であるから, $\det(\gamma) = 1$, すなわち $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であることが従う。

証明終

系 6.5 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して,

$$(6.2) \quad T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

と表せる。

証明 命題 6.4 とエルミート標準形の一意性から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ の完全代表系として $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n : a > 0, 0 \leq b < d \right\}$ を取れるので。 証明終

(6.2) によるヘッケ作用素の表示を用いることで, モジュラー関数がモジュラー関数に写ることを示せる。

定理 6.6 f をレベル 1 荷重 k のモジュラー関数とし, その q 展開を $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) q^m$ とする。このとき

$$(6.3) \quad T_n f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m, \quad \gamma(m) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a > 0, \\ a \mid \gcd(m, n)}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}\right)$$

が成立する。

証明 (6.2) を用いて計算を行うと,

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) && \because (6.2) \text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az+b}{d} m\right) && \because f \text{ の } q \text{ 展開} \\ (6.4) \quad &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az}{d} m\right) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right) \end{aligned}$$

となる。ここで, 整数 d, m に対して $\sum_{b=0}^{d-1} \exp(2\pi i \frac{b}{d} m)$ を計算すると,

$$(6.5) \quad \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right) = \begin{cases} d & d \mid m \text{ のとき } (\because \text{常に } \exp(2\pi i \frac{b}{d} m) = 1 \text{ なので}) \\ \frac{1 - \exp(2\pi i (m/d))}{1 - \exp(2\pi i (m/d))} = 0 & d \nmid m \text{ のとき } (\because \text{等比数列の和}) \end{cases}$$

となる。(6.4) の計算を続けると,

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az}{d} m\right) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right) \quad \because (6.4) \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n, d|m}} d^{-k+1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i a z \frac{m}{d}\right) && \because (6.5) \text{ より} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d|n, d|m}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i z \frac{mn}{d^2}\right) && \because a = n/d \\
(6.6) \quad &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d|\gcd(m, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}}
\end{aligned}$$

となる。ここで関係 $(m, d) \mapsto (m/d, n/d)$ によって全単射写像

$$(6.7) \quad \{(m, d) : m, d \in \mathbb{Z}, d > 0, d | \gcd(m, n)\} \rightarrow \{(m', a) : m', d \in \mathbb{Z}, a > 0, a | n\}$$

を得られるので, (6.6) の計算を続けて,

$$\begin{aligned}
T_n f(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d|\gcd(m, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}} && \because (6.6) \\
&= \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, a|n}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{nm'}{a}\right) q^{m'a} && \because (6.7) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a > 0 \\ a|\gcd(m, n)}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}\right) \right) q^m
\end{aligned}$$

と計算でき, $T_n f$ を目的の形で表示できた。

証明終

系 6.7 f がレベル 1 荷重 k のモジュラー関数のとき, $T_n f$ もレベル 1 荷重 k のモジュラー関数である。さらに f がモジュラー形式ならば $T_n f$ もモジュラー形式であり, f がカスプ形式ならば $T_n f$ もカスプ形式である。

証明 $a | n$ なる正整数 a に対して n/a^2 は高々有界であるから, $m \ll 1$ のとき (6.3) における $\gamma(m)$ は零である。ゆえに $T_n f$ は ∞ で有理型で, モジュラー関数であることが従う。

f がモジュラー形式であれば, 負の整数 m に対して常に $\gamma(m) = 0$ であることが分かるので, $T_n f$ は ∞ で正則で, モジュラー形式であることが従う。また f が尖点形式であれば, $(\alpha(i))_{i=0}^\infty$ をそのフーリエ係数とするとき (6.3) より

$$\gamma(0) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a > 0 \\ a|n}} a^{k-1} \alpha(0) = 0$$

となるので, $T_n f$ も尖点形式である。

証明終

命題 6.8 ヘッケ作用素 $T_n : M_k \rightarrow M_k$ に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して, n と m が互いに素であるならば

$$T_n T_m = T_{nm}$$

が成立する。

(2) p を素数, r を正整数とすると

$$T_{p^{r+1}} = T_p T_{p^r} - p^{k-1} T_{p^{r-1}}$$

が成立する。

7 固有形式

定義 7.1 f をモジュラー形式とし, $(\alpha(i))_{i=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とする。勝手な正整数 n に対して $T_n f = \lambda_n f$ を満足するような複素数 λ_n が存在するとき, f を**固有形式**と呼び, λ_n を T_n 固有値と呼ぶ。さらに $\alpha(1) = 1$ であるならば f を**正規化固有形式**と呼ぶ。

例 7.2 ラマヌジャンのデルタ Δ は正規化固有形式である。なんとなれば, 系 6.7 より $T_n \Delta$ も荷重 12 の尖点形式であり, 系 5.3 (6) から $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ であるから, $T_n \Delta = \lambda_n \Delta$ を満足する複素数 λ_n が存在する。ゆえに Δ は固有形式である。またラマヌジャンのタウ関数について $\tau(1) = 1$ であるから, Δ は正規化固有形式であることが分かる。

定理 7.3 f を荷重 k の正規化固有形式とすると, その T_n 固有値は n 番目のフーリエ係数である。

証明 $(c(n))_{n=0}^{\infty}$ を f のフーリエ係数とすると, (6.3) より $T_n f$ の 1 番目のフーリエ係数は

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a > 0, \\ a | \gcd(n, 1)}} a^{k-1} c\left(\frac{n}{a^2}\right) = c(n) \quad \because \gcd(n, 1) = 1$$

となる。他方 $T_n f = \lambda_n f$ であるから 1 番目のフーリエ係数を比べることで $c(n) = \lambda_n c(1)$ であることが分かる。いま $c(1) = 1$ であるから, $\lambda_n = c(n)$ であり, これが示すべきことだった。 証明終

系 7.4 f を正規化固有形式とし, $(c(n))_{n=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とする。このとき次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して, n と m が互いに素であるならば

$$c(nm) = c(n)c(m)$$

が成立する。

(2) p を素数, r を正整数とするとき

$$c(p^{r+1}) = c(p)c(p^r) - p^{k-1}c(p^{r-1})$$

が成立する。

特に f としてラマヌジャンのデルタを考えれば, 予想 3.13 の主張が正しいことが従う。

証明 命題 6.8 と定理 7.3 から直ちに従う。

証明終

A 整数係数行列のエルミート標準形

整数係数の非特異正方行列に対してエルミート標準形が存在することを, 2 次の場合に限定して取り扱う。

定義 A.1 (非特異正方行列のエルミート標準形) A を整数係数の非特異 2 次行列とする。ユニモジュラー行列 $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ によって

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \quad h_{11}, h_{22} > 0 \text{ かつ } 0 \leq h_{12} < h_{22}$$

と表せるとき, この上三角行列を A の**エルミート標準形**と呼ぶ。

エルミート標準形を誘導するにあたって,

- ・ 一行目と二行目を交換する行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ・ 一行目を -1 倍する行列 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ・ 二行目を -1 倍する行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ・ 一行目を m 倍して二行目に足す行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$
- ・ 二行目を m 倍して一行目に足す行列 $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

が基本となるユニモジュラー行列で, これら行列の左乗算によって行列の変形を行う。

定理 A.2 整数係数の非特異 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してエルミート標準形は一意的に存在する。

証明 存在性と一意性を分けて証明する。

存在性 $a = 0$ または $c = 0$ なら, 行の入れ替えを行うことで $c = 0$ と考えて良く, すると非特異性から $a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。さらに各行を適当に -1 倍することで $a > 0$ かつ $d > 0$ として良い。 b を d で割ることで

$$b = qd + b', \quad q, b' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq b' < d$$

を得られる。を満足する q, b' を取り, $-q$ 倍した二行目を一行目に足して A のエルミート標準形 $\begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を得る。 a, c が共に零でない場合は, 以下のようにユークリッドの互除法を用いて上述の議論に帰着させる。必要なら一行目と二行目を入れ替えて, $0 < |a| \leq |c|$ として良い。 c を a で割って,

$$c = qa + c', \quad q, c' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq c' < |a|$$

を満足する q, c' を取り, $-q$ 倍した一行目を二行目に足して, 行列 $\begin{pmatrix} a & b' \\ c' & d - qb \end{pmatrix}$ を得る。 $c' \neq 0$ であれば, $0 \leq |c'| < |a|$ であるから, 行を交換して再度同じ議論を繰り返すことで, $c' = 0$ としてよく, 証明の最初の議論に帰着された。

一意性 二つの A のエルミート標準形

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \gamma' \cdot A = \begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix}, \quad \gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

があるとする, $\gamma' \cdot \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書けば

$$\begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$$

となる。これから $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列であることを示す。 $h_{11}c = 0$ かつ $h_{11} \neq 0$ であるから, $c = 0$ である。すると $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ がユニモジュラーであるから, $ad = 1$ または $ad = -1$ である。 $h_{11}a = h'_{11}$ かつ $h_{11}, h'_{11} > 0$ であるから, $a > 0$ である。同様に $h_{22}d = h'_{22}$ かつ $h_{22}, h'_{22} > 0$ であるから, $d > 0$ である。したがって $a = d = 1$ であることが分かる。 $0 \leq h'_{12} = h_{12} + bh_{22}$ かつ $0 \leq h_{12} < h_{22}$ であるから, $b \geq 0$ でなければならない。また $h'_{22} = h_{22}$ であるから, $0 \leq h'_{12} < h'_{22}$ であることと合わせて $b = 0$ であることが分かる。ゆえに $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列で, 二つのエルミート標準形が等しいことが従う。 証明終



文献

- [1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. <https://www.ma.imperial.ac.uk/~dhelm/M4P58/ModularForms2.pdf> (2026 年 1 月 1 日最終確認).
- [2] 岸 正倫・藤本 担孝 (1980). 複素関数論. 学術図書出版社.
- [3] Aigner, M. and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.