

# Iwasawa theory for vertex-weighted graphs

舘野莊平氏との共同研究    arXiv:2025.12351

室岡 亮祐

所属：名古屋大学大学院多元数理科学研究科

2026 年 2 月 10 日



# 目次

荷重なしグラフの岩澤理論（導入）

頂点荷重グラフの定義（準備 1）

頂点荷重グラフの行列木定理（結果 1）

頂点荷重グラフのガロア被覆（準備 2）


$\mathbb{Z}_p$  塔における分解公式（結果 2）

岩澤型公式（結果 3）



岩澤型公式の略証（時間次第）



## 解説する論文

-  Murooka, R. and Tateno, S. (2025). Iwasawa theory for vertex-weighted graphs. *arXiv preprint arXiv:2025.1235v1 [math.CO]*.

## スライド中で引用する論文

-  Chung, F.R.K. and Langlands, Robert R. (1996). A combinatorial Laplacian with Vertex Weights. In: *J. comb. theory, Ser. A*, 75(2), 316–327.
-  Wu, H., Feng, R., and Sato, I. (2011). Vertex weighted complexities of graphcoverings. In: *Algebra Collq.*, 18(1), 129–138.

# 荷重なしグラフの岩澤理論（導入）

## 定義（基本の概念）

$X$ : 有限グラフ     $T$ :  $X$  の部分グラフ

1.  $T$  は連結グラフ。
- ▶  $T$  が  $X$  の全域木  $\iff$
2.  $(T \text{ の頂点集合}) = (X \text{ の頂点集合})$ 。
  3.  $T$  は閉路を持たない。
- ▶  $ST_X := \{X \text{ の全域木}\}$ ,  $\kappa(X) := \#ST_X \sim X$  の複雑度と呼ぶ。
- $X$  が連結でない  $\implies \kappa(X) = 0$

## 複雑度の例

$$X := \text{triangle with a loop} \rightsquigarrow ST_X = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \text{---} \\ \diagdown \end{array} \right\}, \quad \kappa(X) = 3$$

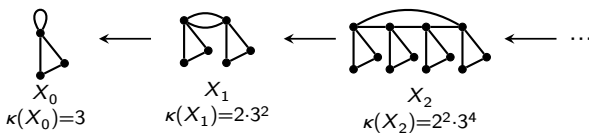
## 定義 (グラフの $\mathbb{Z}_p$ 塔)

$p$  : 素数    グラフのガロア被覆の列

$$X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$$

が  $\mathbb{Z}_p$  塔 :  $\iff \forall n, \text{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

例 ( $p=2$  の場合の例)



## 定理 (Gonet'22, McGown-Vallières'24)

$$\exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Z}, \quad \underbrace{\text{ord}_p(\kappa(X_n))}_{\kappa(X_n) \text{ の } p \text{ ベキ部分}} = \mu p^n + \lambda n + \nu \quad \forall n \gg 0$$

上の例     $\text{ord}_2(\kappa(X_n)) = n \rightsquigarrow \mu = 0, \lambda = 1, \nu = 0$

導入終

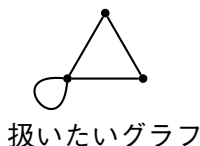
# 頂点荷重グラフの定義（準備 1）

## 定義 (Serre によるグラフの定義)

(有限) **グラフ** : 五つ組  $X = (V_X, E_X, o, t, (-)^-)$  のこと

- ▶ 有限集合  $V_X$  ; 頂点 (**V**ertex) の集合
- ▶ 有限集合  $E_X$  ; 辺 (**E**dge) の集合
- ▶ 写像  $o: E_X \rightarrow V_X, t: E_X \rightarrow V_X$  ;  
辺の始点 (**o**rigin) と終点 (**t**erminus) の指定
- ▶  $\forall e \in E_X, o(\bar{e}) = t(e), t(\bar{e}) = o(e), \bar{\bar{e}} \neq e, \bar{\bar{\bar{e}}} = e$   
となる写像  $(-)^-: E_X \rightarrow E_X$  ; 逆向きの辺の指定

互いに逆向きの関係にある辺を同一視  $\rightsquigarrow$  向き無しのグラフ ;



$p$ : 素数     $\mathbb{Q}_p$ :  $p$  進数体     $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ : 代数閉包への埋込 (固定)  
**定義**

- ▶ **頂点荷重グラフ**: グラフ  $X$  と関数  $w: V_X \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  の対  $(X, w)$  のこと  $\rightsquigarrow$  **以下単にグラフと呼ぶ**。
- ▶  $X$  の**全域木**:  $V_T = V_X$  かつ閉路を持たない  $X$  の部分グラフ  $T$  のこと     $ST_X := \{X \text{ の全域木}\}$
- ▶  $v \in V_X, T \in ST_X, d_T: V_X \times V_X \rightarrow \mathbb{Z}$ :  $T$  における頂点間の距離  
 $X$  の**根付き全域木**: 次で定まる有向部分グラフ  $T_v$  のこと

$$V_{T_v} = V_T, \quad E_{T_v} = \{e \in E_T : d_T(v, o(e)) < d_T(v, t(e))\}$$

$$\text{▶ } w(T_v) := \prod_{e \in E_{T_v}} w_{t(e)}, \quad \kappa_v(X) := \sum_{T \in ST_X} w(T_v), \quad \kappa(X) := \sum_{v \in V_X} \kappa_v(X)$$

**例**

$$\begin{aligned}
 X = \begin{array}{c} \text{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} & \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{根が 1 の} \\ \text{全域木} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array}, \begin{array}{c} \text{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array}, \begin{array}{c} \text{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right\} \\
 & \rightsquigarrow \kappa_1(X) = w_1^2 + w_1 w_3 + w_1 w_2 \\
 & \dots \rightsquigarrow \kappa(X) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1
 \end{aligned}$$

# 頂点荷重グラフの行列木定理 (結果 1)

定義 (頂点荷重グラフ  $X$  の情報を持つ行列)

$V_X := \{1, \dots, m\}$        $\forall i \in V_X$ , 平方根  $\sqrt{w_i} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$  を固定する。


▶ **次数行列** :  $D_X(i, i) = \sum_{e \in E_X: o(e)=i} w_{t(e)}$  で定まる  $m$  次対角行列  $D_X$

▶ **隣接行列** :  $W_X(i, j) = \sum_{e \in E_X: o(e)=i, t(e)=j} \sqrt{w_i} \sqrt{w_j}$  で定まる  $m$  次正方行列  $W_X$

▶ **ラプラス行列** :  $L_X := D_X - W_X$  のこと

定理 (Chung-Langlands '96 ( $\mathbb{R}_{>0}$  荷重), M.-Tateno '26+)

$$\det(L_X[i]) = \kappa_i(X), \quad \left( \sum_{k \in V_X} w_k \right) \cdot \text{adj } L_X(i, j) = \sqrt{w_i} \sqrt{w_j} \kappa(X)$$

例  $X =$    $\rightsquigarrow D_X = \begin{pmatrix} 2w_1+w_2+w_3 & & \\ & w_1+w_3 & \\ & & w_1+w_2 \end{pmatrix},$

$$W_X = \begin{pmatrix} 2w_1 & \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & 0 & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_X = \begin{pmatrix} w_2+w_3 & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & w_1+w_3 & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & w_1+w_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \det(L_X[1]) = (w_1 + w_3)(w_1 + w_2) = w_1^2 + w_1 w_2 + w_1 w_3 = \kappa_1(X)$$



# 頂点荷重グラフのガロア被覆 (準備2)

$Y, X$ : 頂点荷重グラフ  $E_{Y,v} := \{e \in E_Y : o(e) = v\}$

▶ **グラフの射**  $f: Y \rightarrow X$ : 3条件を満足する写像の組

$f = (V_Y \xrightarrow{f_V} V_X, E_Y \xrightarrow{f_E} E_X)$  のこと;

1.  $\forall e \in E_Y, o(f_E(e)) = f_V(o(e)), t(f_E(e)) = f_V(t(e))$

2.  $\forall e \in E_Y, f_E(\bar{e}) = (f_E(e))^-$

3.  $\forall v \in V_Y, w_Y(v) = w_X(f_V(v))$

▶ **グラフの被覆**  $Y/X$ :  $\pi_V$  と  $\pi_E$  が全射, かつ  $E_{Y,v} \xrightarrow[\text{bij}]{\pi} E_{X,\pi(v)}$  を満足する射  $\pi: Y \rightarrow X$  のこと;  $Y/X := \pi$

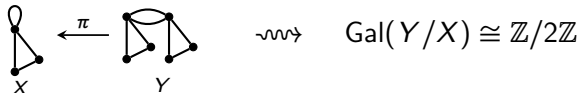
▶  **$\pi$  上の自己同型**:  $\sigma_V$  と  $\sigma_E$  が全単射, かつ  $\pi \circ \sigma = \pi$

$\left[ \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & X & \end{array} \right]$  を満足する射  $\sigma: Y \rightarrow Y$  のこと

$\text{Aut}(Y/X) := \{\pi \text{ 上の自己同型}\}$

▶ **ガロア被覆**:  $\forall v \in V_X, \text{Aut}(Y/X) \curvearrowright \pi^{-1}(\{v\})$  が推移的な被覆  $\pi: Y \rightarrow X$  のこと  $\text{Gal}(Y/X) := \text{Aut}(Y/X)$

例



## $\mathbb{Z}_p$ 塔における分解公式 (結果 2)

$X$ : 頂点荷重グラフ  $K := \mathbb{Q}_p(w(V_X))$   $\mathcal{O}: K$  の付値環

$\Lambda := \mathcal{O}[[T]]$  (岩澤代数)  $W(n) := \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \zeta^{p^n} = 1\}$

定義 ( $\mathbb{Z}_p$  塔)

ガロア被覆の列  $X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$

が  $\mathbb{Z}_p$  塔  $:\Leftrightarrow \forall n, \text{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

定理 (Wu-Feng-Sato '11, M.-Tateno '26+ の帰結)

$\mathbb{Z}_p$  塔  $X \xleftarrow{\pi_n} \cdots \xleftarrow{\pi_n} X_n \longleftarrow \cdots$  に対して, 以下を満足する元

$F \in (\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} K) \setminus \{0\}$  を構成できる。

$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall v \in V_X, \forall w \in \pi_n^{-1}(\{v\}),$

$$\kappa_w(X_n) = \frac{\kappa_v(X)}{p^n} \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1), \quad \left( \rightsquigarrow \kappa(X_n) = \kappa(X) \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1) \right)$$

が成立する。

系 (被覆の根付き複雑度)

$\kappa_w(X_n)$  は  $\pi_n^{-1}(\{v\})$  上で一定である。  $\rightsquigarrow$  これを  $\kappa_v(X_n)$  と置く。

## 岩澤型公式 (結果 3)

定理 (根付き岩澤型公式, M.-Tateno '26+の1次元版)

頂点  $v \in V_X$  を一つ固定し,  $\forall n, \kappa_v(X_n) \neq 0$  と仮定する。このとき

$$\exists! \mu_v, \lambda_v, \nu_v \in \mathbb{Q}, \forall n \gg 0, \operatorname{ord}_p(\kappa_v(X_n)) = \mu_v p^n + \lambda_v n + \nu_v$$

が成立する。

仮定について

一般の分解公式  $\rightsquigarrow [m \leq n \implies \kappa_v(X_m) \mid \kappa_v(X_n) \text{ である。}]$

$$\rightsquigarrow [\kappa_v(X_m) = 0 \implies \kappa_v(X_n) = 0 \ \forall n \geq m]$$

- 連結でないグラフが塔にある  $\implies \kappa_v(X_n) = 0 \ \forall n \gg 0$

根なし複雑度についても同様の公式を得られる。

定理 (根なし岩澤型公式, M.-Tateno '26+の1次元版)

$\forall n, \kappa(X_n) \neq 0$  と仮定する。このとき

$$\exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Q}, \forall n \gg 0, \operatorname{ord}_p(\kappa(X_n)) = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

が成立する。

# 岩澤型公式の略証

## 根付き公式の略証

①  $[\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \kappa_v(X_n) \neq 0]$  と分解公式  
 $\rightsquigarrow \forall \zeta \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} W(n), F(\zeta - 1) \neq 0 \dots (\heartsuit)$

② 岩澤理論の一般論と  $(\heartsuit) \rightsquigarrow \exists! \mu', \lambda', \nu' \in \mathbb{Q}$  s.t.

$$\forall n \gg 0, \sum_{\zeta \in W(n)} \text{ord}_p F(\zeta - 1) = \mu' p^n + \lambda' n + \nu' \dots (\clubsuit)$$

③ 分解公式と  $(\clubsuit) \rightsquigarrow \forall n \gg 0,$

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(\kappa_v(X_n)) &= \text{ord}_p(\kappa_v(X)) - n + \sum_{\zeta \in W(n)} \text{ord}_p(F(\zeta - 1)) \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{=} \mu' p^n + (\lambda' - 1)n + (\nu' + \text{ord}_p(\kappa_v(X))) \end{aligned}$$

略証終

## 根なしの場合について

三段階目の計算における  $-n$  が無くなる

$\rightsquigarrow \lambda$  不変量のズレ  $-1$  が解消される。