「曲面の幾何」におけるユークリッド空間の扱い

2025 年 11 月 29 日 6 時 46 分更新

[1] においてユークリッド空間の定義が少々曖昧であったので，厳密に扱えるように試みる。実数すべてがなす体を $\mathbb{R}$ で表すことにする。ユークリッド空間を定義するために，まず実ユニタリ空間を復習しておく。

定義 (実ユニタリ空間の定義)　$\boldsymbol{L}$ を有限次元の実線型空間とする。写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}\to\mathbb{R}$ が次の三つを満足するとき，ひとつの $\boldsymbol{L}$ 上の**内積**と呼ぶ。$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を一つの内積とするとき，組 $(\boldsymbol{L},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を**実ユニタリ空間**と呼ぶ。

（双線型性）　$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は各変数ごとに線型である。つまり $\boldsymbol{L}$ の勝手なベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ と，勝手な実数 $r,\ s$ に対して

$$\langle r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle = r\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle + s\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$$
$$\langle\boldsymbol{x},r\boldsymbol{y}+s\boldsymbol{z}\rangle = r\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + s\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle$$

が成立する。

（正定値性）　零でない $\boldsymbol{L}$ の勝手なベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle > 0$ である。（特に $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = 0 \iff \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が成立する。）

（対称性）　$\boldsymbol{L}$ の勝手なベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ に対して $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$ が成立する。

注意 (ノルムについて)　実ユニタリ空間 $(\boldsymbol{L},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して，写像 $\|\cdot\|\colon \boldsymbol{L}\to\mathbb{R}$ を対応 $\boldsymbol{x}\mapsto\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}$ で定めれば，$(\boldsymbol{L},\|\cdot\|)$ はノルム空間となる。しかしながら内積から誘導されないノルムも存在することに注意されたい。

実ユニタリ空間があれば，二つのベクトルの間の角度を定められる。

事実 (ベクトルのなす角)　$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{L},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を実ユニタリ空間とする。このとき $\boldsymbol{L}$ の零でない勝手なベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ に対して

$$\cos\theta = \frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

を満足する θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の中で一意的に存在する[1)]。この θ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**なす角**と呼ぶ。

定義 (ユークリッド空間の定義)　n を非負整数，$\boldsymbol{E}$ を集合，$\boldsymbol{L}$ を次元 n の実ユニタリ空間とし，写像 $(\cdot)-(\cdot)\colon \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{L}$ があるとする。組 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{L},(\cdot)-(\cdot))$ が次の二つを満足するとき，次元 n の**ユークリッド空間**と呼ぶ。$\boldsymbol{E}$ の元を**点**，$\boldsymbol{L}$ の元を $\boldsymbol{E}$ の**幾何ベクトル**と呼ぶ。

---

1)　これは**シュバルツの不等式** $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\leqq\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ から従う。シュバルツの不等式は内積の公理から示せる。

(1) $\boldsymbol{L}$ の勝手なベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{E}$ の点 p に対して，$\boldsymbol{x} = q - p$ を満足する点 q が唯一存在する。

(2) $\boldsymbol{E}$ の勝手な点 p, q, r に対して，

$$(q-p)+(r-q)=r-p$$

が成立する。

注意 (1.2 節のいくつかの解釈)　$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{L}, (\cdot) - (\cdot))$ を次元 n のユークリッド空間とする。

1. 関数 $d\colon \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$ を $d(p,q) = \|q-p\|$ で定めると，d は $\boldsymbol{E}$ 上の距離を定めるので，$\boldsymbol{E}$ には位相が入る。
2. $\boldsymbol{E}$ の点 p を一つ固定すると，条件 (1) から全単射写像 $(\cdot)-p\colon \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{L}$ が定まる。この逆写像を $p+(\cdot)\colon \boldsymbol{L}\to\boldsymbol{E}$ で表すことにすれば，点 p と幾何ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，点 $p+\boldsymbol{x}$ が定まる。
3. $\mathbb{R}^n$ の標準基底を $e_1,\dots,e_n$ で表し，$\mathbb{R}^n$ に標準内積を備えて実ユニタリ空間と考える。このとき（カノニカルでない）実ユニタリ同型 $\varphi\colon \boldsymbol{L} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ を取れる。なんとなれば，$\boldsymbol{L}$ の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を一つ取り[2)]，グラム・シュミットの正規直交化法を $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ に用いれば，

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \begin{cases} 1 & (i=j\text{ のとき}) \\ 0 & (i\neq j\text{ のとき}) \end{cases}$$

を満足する $\boldsymbol{L}$ の基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ を構成でき, 対応 $\boldsymbol{e}_i \mapsto e_i$ で定まる線型写像 $\varphi\colon \boldsymbol{L}\to\mathbb{R}^n$ が目的の線型写像である。実ユニタリ同型 $\varphi\colon \boldsymbol{L}\to\mathbb{R}^n$ と点 o を固定して得られる全単射写像 $\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}^n; q\mapsto\varphi(q-o)$ を**直交座標系**，$\varphi(q-o)$ を q の**座標**と呼ぶ。

例題 ([1] の (1.3))　$\boldsymbol{E}$ の勝手な点 p と，$\boldsymbol{L}$ の勝手なベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して

$$(p+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y} = p+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

が成立する。

証明　$(\cdot)-p\colon \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{L}$ と $p+(\cdot)\colon \boldsymbol{L}\to\boldsymbol{E}$ が互いに逆写像であるから，

$$(p+\boldsymbol{x})-p = \boldsymbol{x},$$
$$((p+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y})-(p+\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

2） $\boldsymbol{L}$ が n 次元の実線型空間であるから，n 個のベクトルからなる基底の存在が定義より保証されている。

が成立する。これら二式を足すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= \big(((p+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y})-(p+\boldsymbol{x})\big)+\big((p+\boldsymbol{x})-p\big)\\ &= ((p+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y})-p \quad \text{（ユークリッド空間の条件 (2) より。）}\end{aligned}$$

と計算でき，p にこの幾何ベクトルを足すと，

$$(p+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}=p+\big((p+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}-p\big)=p+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

となり，主張の等式が従う。　　証明終

文献

[1]　砂田　利一，曲面の幾何（岩波書店）