グラスマン多様体とプリュッカー座標

2025 年 12 月 25 日 2 時 2 分更新

目　次

本文書では，小行列式の等式であるプリュッカー関係式を示すことを目標にして，グラスマン多様体と旗多様体について論じる。

K を無限体とし，その非零元がなす乗法群を $K^\times$ で表す。K 線型空間 V に対して，その双対空間を V^* で表し，双対対 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V^*\to K$ を備えておく。

1　射影多様体

まずは集合としてのグラスマン多様体および射影空間を定めることから始める。

定義 1 (集合としてのグラスマン多様体)　E を有限次元 K 線型空間とし，その次元を m と置く。

(1) m 以下の正整数 r に対して，集合

$$\{\,V : V \text{ は } E \text{ の } r \text{ 次元部分空間である}\,\}$$

$\mathrm{Gr}_r(E)$ で表し，**グラスマン多様体**と呼ぶ。$\mathrm{Gr}_r(E)$ の元を $\mathrm{Gr}_r(E)$ の**点**と呼ぶ。

(2) $\mathrm{Gr}_1(E)$ を特に $\mathbb{P}(E)$ で表し，E の**射影空間**と呼ぶ。

(3) $\lambda\cdot(x_1,\dots,x_m)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_m)$ で $K^m\setminus\{\mathbf{0}\}$ の $K^\times$ による群作用を定め，その剰余集合を $\mathbb{P}^m_K$ で表し，m 次元の**射影空間**と呼ぶ。$(x_1,\dots,x_m)$ の剰余類を $[x_1:\cdots:x_m]$ で表し，$\mathbb{P}^m_K$ の**点**と呼ぶ。

観察 2 (斉次座標について)　E の基底 $e_1,\dots,e_m$ を取って，点 $L\in\mathbb{P}(E)$ の生成元の係数を考えると，

$$\{\,(x_1,\dots,x_m) : L=\mathrm{Span}_K(x_1e_1+\cdots x_me_m)\,\}=[x_1:\cdots:x_m]$$

となるので，$\mathbb{P}^m_K$ の点を定める。この点を L の**斉次座標**と呼ぶ。逆に $\mathbb{P}^m_K$ の点 $[x_1:\cdots:x_m]$

が $\mathbb{P}(E)$ の点 $\mathrm{Span}_K(x_1e_1 + \cdots + x_me_m) \subset E$ を定めるので，$e_1,\, \ldots,\, e_m$ が全単射写像 $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^m_K$ を誘導することがわかる。

次に集合として定義した $\mathbb{P}(E)$ に，代数的集合の構造を入れる。そのために基本となるのは次の補題である。

補題 3 (テンソル積と双対空間の可換性)　n を非負整数に対して，以下で構成する線型写像

$$(E^*)^{\otimes n} \to (E^{\otimes n})^*;\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot)$$

は同型である。

構成　n 個のベクトル $v_1,\, \ldots,\, v_n \in E^*$ が定める E^n 上の関数

$$(w_1,\, \ldots,\, w_n) \mapsto v_1(w_1) \cdots v_n(w_n)$$

が n 重線型であるから，$(E^{\otimes n})^*$ の元 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot)$ を定める（図 1 左図)。対応 $(v_1,\, \ldots,\, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot)$ は n 重線型であるから，線型写像 $(E^*)^{\otimes n} \to (E^{\otimes n})^*$ が誘導される（図 1 右図)。

$$\begin{tikzcd}
(w_1,\, \ldots,\, w_n) \arrow[d, mapsto] & \in & E^n \arrow[r] \arrow[d] & E^{\otimes n} \arrow[dl, dashed, "v_1\otimes\cdots\otimes v_n(\cdot)"] \\
v_1(w_1) \cdots v_n(w_n) & \in & K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(v_1,\, \ldots,\, v_n) \arrow[d, mapsto] & \in & (E^*)^n \arrow[r] \arrow[d] & (E^*)^{\otimes n} \arrow[dl, dashed] \\
v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot) & \in & (E^{\otimes n})^* &
\end{tikzcd}$$

図 1　線型汎関数のテンソル積（左図）と目的の写像の誘導（右図）

証明　E の基底 $e_1,\, \ldots,\, e_m$ を取って，E^* の双対基底 $e_1^*,\, \ldots,\, e_m^*$ を取る。すると $\{\, e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^* : 1 \leqq i_1,\, \ldots,\, i_n \leqq m \,\}$ が $(E^*)^{\otimes n}$ の基底で，構成より $e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^*(\cdot) = (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})^*$ であるので，$(E^*)^{\otimes n}$ の基底が $(E^{\otimes n})^*$ の基底に写ることがわかり，件の写像が同型であることが示された。　証明終

$S^\bullet(E^*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(E^*)$ を E^* の対称代数とし，次のようにして $S^\bullet(E^*)$ を E 上の K 値関数がなす環 $\mathscr{F}(E, K)$ に埋め込む。補題 3 を用いて元 $f \in (E^*)^{\otimes n}$ を $(E^{\otimes n})^*$ の元と考え，関数

$$f(\cdot)\colon E \to K;\ w \mapsto \langle w \otimes \cdots \otimes w, f\rangle$$

を対応させると，線型写像 $(E^*)^{\otimes n} \to \mathscr{F}(E, K)$ が得られ，テンソル代数 $T^\bullet(E^*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(E^*)^{\otimes n}$ からの環準同型 $T^\bullet(E^*) \to \mathscr{F}(E, K)$ に拡張できる。この準同型によって，勝手なベクトル $v_1, v_2 \in E^*$ に対して $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ が零に写るので，対称代数からの環準同型 $S^\bullet(E^*) \to \mathscr{F}(E, K)$ が誘導される。この環準同型の単射性は補題として扱うことにする。

補題 4 $S^\bullet(E^*) \to \mathscr{F}(E, K)$; $v_1 \cdots v_n \mapsto v_1 \cdots v_n(\cdot)$ は環同型である。

証明 E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を固定し, E^* の双対基底 $e_1^*, \dots, e_m^*$ を取る。$e_1, \dots, e_m$ によって環同型 $\mathscr{F}(E, K) \to \mathscr{F}(K^m, K)$ が得られ, $X_1, \dots, X_m$ を不定元とすると, 対応 $X_i \mapsto e_i^*$ によって環同型 $K[X_1, \dots, X_m] \to S^\bullet(E^*)$ が得られる。すると合成 $K[X_1, \dots, X_m] \to \mathscr{F}(K^m, K)$ は多項式を多項式写像に写す写像で，これが単射であることを示せばよい。

この写像の単射性を m に関する帰納法で示す。$m = 1$ のとき，多項式写像が零であることは，一変数多項式が無限個の解を持つことを意味するので，もとの多項式も零で，件の写像は零である。$m > 1$ とし，$K[X_1, \dots, X_{m-1}][X_m]$ と考える。この多項式環の元 $f = \sum_{i=0}^{\infty} g_i X_m^i$（$g_i \in K[X_1, \dots, X_{m-1}]$）を取り，多項式関数として零であると仮定する。$K$ 値ベクトル $(x_1, \dots, x_{m-1})$ を勝手に取ると，$f(x_1, \dots, x_{m-1}, X_m) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x_1, \dots, x_{m-1}) X_m^i$ は無限個の解を持つ一変数多項式環であるので，すべての i について $g_i(x_1, \dots, x_{m-1}) = 0$ である。$(x_1, \dots, x_{m-1})$ を勝手に取っていたので，帰納法の仮定により $g_i = 0$ となり，$f = 0$ であることも従うので，件の写像が単射であることが示された。 証明終

観察 5 斉次元 $f \in S^n(E^*)$ と，点 $L \in \mathbb{P}(E)$ を考える。ベクトル $v_1^{(i)}, \dots, v_n^{(i)} \in E^*$ を用いて $f = \sum_{i=1}^{k} v_1^{(i)} \cdots v_n^{(i)}$ と表し，点 $w_0 \in L \setminus \{0\}$ を一つ固定して f に代入すると，

$$f(w_0) = \sum_{i=1}^{k} v_1^{(i)}(w_0) \cdots v_n^{(i)}(w_0)$$

と書ける。他の点 $w \in L \setminus \{0\}$ を勝手に取ると，元 $\lambda \in K^\times$ を用いて $w = \lambda w_0$ と表せるので，f に代入すると

$$f(w) = \sum_{i=1}^{k} v_1^{(i)}(\lambda w_0) \cdots v_n^{(i)}(\lambda w_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^n v_1^{(i)}(w_0) \cdots v_n^{(i)}(w_0) = \lambda^n f(w_0)$$

となる。特に E の基底 $e_1, \dots, e_m$ とその双対基底 $e_1^*, \dots, e_m^*$ を取って，$e_1^*, \dots, e_m^*$ に対応する $S^\bullet(E^*)$ の元を $X_1, \dots, X_m$ と書くと，この基底に関する L の斉次座標が $[X_1(w) : \cdots : X_m(w)]$ で与えられる。このような観点から，$S^\bullet(E^*)$ を $\mathbb{P}(E)$ の**斉次座標環**と呼ぶ。

以上で $\mathbb{P}(E)$ に代数的集合の構造を入れる準備が整った。

定義 6 (射影空間の代数的集合) $S^\bullet(E^*)$ の元 f と，$S^\bullet(E^*)$ の部分集合 S と，$\mathbb{P}(E)$ の部分集合 V を取る。

(1) 点 $L \in \mathbb{P}(E)$ が f の**零点**であるとは，$L \setminus \{0\}$ の勝手な元 w に対して $f(w) = 0$ が成立するときをいう。

(2) $\mathbb{P}(E)$ の部分集合 $V(S)$ を，

$$\{L \in \mathbb{P}(E) : 勝手な元\ f \in S\ に対して，L\ が\ f\ の零点である\}$$

として定め，この形の部分集合を $\mathbb{P}(E)$ の**（射影）代数的集合**と呼ぶ。

(3) $S^\bullet(E^*)$ の部分集合 $I(V)$ を，

$$\{f \in S^\bullet(E^*) : f\ は，V\ のすべての点を零点として持つ\}$$

として定めると，これは斉次イデアルで，V の**イデアル**と呼ぶ。

(4) 代数的集合 $V(S)$ が，$V(S)$ とは異なる代数的集合 $V(S_1)$ と $V(S_2)$ の和集合 $V(S_1) \cup V(S_2)$ と等しいとき，**可約である**といい，そうでないとき**既約である**という。既約な代数的集合を特に**射影多様体**と呼ぶ。射影多様体のイデアルは素イデアルである。

ここで零点定理も述べておく。

定理 7 (射影的零点定理)　K を代数閉体とする。$S^\bullet(E^*)$ の斉次イデアル I に対して次の二つが成立する。

(1) $V(I) = \varnothing$ となるのは，$\bigoplus_{n=N}^{\infty} S^\bullet(E^*) \subset I$ を満足する整数 N が存在するとき，かつそのときに限る。

(2) $V(I) \neq \varnothing$ であれば，$I(V(I)) = \sqrt{I}$ が成立する。ここで $\sqrt{I}$ は I の根基イデアルを表す。

系 8 (対応定理)　K を代数閉体とし，$\bigoplus_{n=1}^{\infty} S^\bullet(E^*)$ を S_+ と置く。このとき対応 $I \mapsto V(I)$ が全単射写像

(1.1)

$$\{I : I\ は\ S^\bullet(E^*)\ の根基斉次イデアルで，I \neq S_+\} \to \{V : V\ は\ \mathbb{P}(E)\ の代数的集合\}$$

を定める。

証明　対応 $V \mapsto I(V)$ が逆写像を定めることを示せばよい。勝手な代数的集合 V に対して $V(I(V)) = V$ が成立することは定義から直ちに従う。(1.1) の左の集合に属すイデアル I を勝手に取る。勝手な正整数 N に対して $\sqrt{\bigoplus_{n=N}^{\infty} S^\bullet(E^*)} = S_+$ が成立するので，$V(I) = \varnothing$ を満足する I は，定理 7 (1) より $S^\bullet(E^*)$ と等しく，

$$I(V(I)) = I(\varnothing) = S^\bullet(E^*) = I$$

となる。$V(I) \neq \varnothing$ を満足する I に対しては，定理 7 (2) より $I(V(I)) = I$ が成立し，件の対応が互いに逆となる写像を定めることが示された。　証明終

これから行うことは，グラスマン多様体を高次元の射影空間に射影多様体として埋め込むことである。

2 プリュッカー埋め込み

定義 9 (プリュッカー埋め込み) r を m 以下の正整数とする。点 $V \in \mathrm{Gr}_r(E)$ に対して，包含写像 $V \hookrightarrow E$ を取ると，r 次外冪 $\bigwedge^r V$ は一次元であるから，零でない線型写像 $\bigwedge^r V \hookrightarrow \bigwedge^r E;\ w_1 \wedge \cdots \wedge w_r \mapsto w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$ が単射である。この写像による像を $\iota(V)$ で表すと，$\iota(V)$ は $\mathbb{P}(E)$ の点であり，写像 $\iota\colon \mathrm{Gr}_r(E) \to \mathbb{P}(\bigwedge^r E)$ が定まる。この写像 ι を**プリュッカー埋め込み**と呼ぶ。

観察 10 (プリュッカー座標) E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取ると，辞書式順序で並べたベクトル $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} : 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq m)$ が $\bigwedge^r E$ の基底である。$\{1, \dots, m\}$ を $[m]$，r 個の元からなる部分集合すべてを $\binom{[m]}{r}$ で表すことにする。$I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$ として $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ を e_I で表すことにすれば，基底は $(e_I : I \in \binom{[m]}{r})$ と表せる。点 $V \in \mathrm{Gr}_r(E)$ に対して V の基底 $w_1, \dots, w_r$ を取って，その表現行列を考えると，(m, r) 型の行列 A を用いて

$$(w_1 \cdots w_r) = (e_1 \cdots e_m)A$$

と表せる。元 $I \in \binom{[m]}{r}$ に対して，I の番号に対応する行ベクトルが定める小行列を $A_{I,[r]}$ で表すと，

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_r = \sum_{I \in \binom{[m]}{r}} \det(A_{I,[r]}) e_I$$

となるので，点 $\left[(\det(A_{I,[r]}))_{I \in \binom{[m]}{r}} \right] \in \mathbb{P}^{\binom{m}{r}-1}$ が V の斉次座標を与え，この斉次座標を V の**プリュッカー座標**と呼ぶ。

第一に，プリュッカー埋め込みが単射であることを見なければならない。

命題 11 プリュッカー埋め込み $\iota\colon \mathrm{Gr}_r(E) \to \mathbb{P}(\bigwedge^r E)$ は単射である。

証明 相異なる二点 $V, V' \in \mathrm{Gr}_r(E)$ を勝手に取る。$V \cap V'$ の基底を $e_1, \dots, e_k$ とし，$e_1, \dots, e_r$ が V の基底，$e_1, \dots, e_k, e_{r+1}, \dots, e_{2r-k}$ が V' の基底となるように，E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取る。この基底に関するプリュッカー座標を考えると，V の座標で零でないものは $[r] \in \binom{[m]}{r}$ に対応する箇所のみで，V' の座標では $[r]$ に対応する箇所が零である。ゆえに $\iota(V) \neq \iota(V')$ である。 証明終

プリュッカー埋め込みによってグラスマン多様体が射影空間の中に単射に写ることがわかったので，次にこの像が代数的集合であることを示す。まず $S^\bullet((\bigwedge^r E)^*)$ を扱うために，次の補題を用意する。

補題 12 (外積と双対空間の可換性)　以下で構成する線型写像

$$\bigwedge^r (E^*) \to \Big(\bigwedge^r E\Big)^* ;\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r(\cdot)$$

は同型である。

構成　r 個のベクトル $v_1, \ldots, v_r \in E^*$ が定める E^r 上の関数

$$(w_1, \ldots, w_r) \mapsto \det\big((\langle w_i, v_j \rangle)_{1 \leqq i, j \leqq r}\big)$$

が，行列式が行に関して多重線型ゆえ，r 重線型写像であり，$E^{\otimes n}$ の上の関数を誘導する。さらに行列式が行に関して歪対称ゆえ，勝手な $[r]$ 上の置換 σ について $w_1 \otimes \cdots \otimes w_r$ と $w_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(r)}$ が同じ値に写り，$\bigwedge^r E$ 上の関数 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r(\cdot)$ を誘導する。行列式が列について多重線型かつ歪対称であるから，写像 $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r(\cdot)$ は線型写像 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r(\cdot)$ を誘導する。

証明　E の基底 $e_1, \ldots, e_m$ と双対基底 $e_1^*, \ldots, e_m^*$ を取る。すると $\{ e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^* : 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m \}$ が $\bigwedge^r (E^*)$ の基底で，構成より $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*(\cdot) = (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r})^*$ であるので，$\bigwedge^r (E^*)$ の基底が $(\bigwedge^r E)^*$ の基底に写ることがわかり，件の写像が同型であることが示された。　証明終

記法 13　以下 $(\bigwedge^r E)^*$ を $\bigwedge^r E^*$ と書くことにし，$\bigwedge^r (E^*)$ の元を用いて扱うことにする。

天下り的に，グラスマン多様体を定める関係式を導入する。

定義 14 (プリュッカー関係式)　r を m 以下の正整数，k を r 以下の正整数とし，ベクトルの列 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_r), \boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_r) \in (E^*)^r$ を勝手に取る。

(1) 整数 $i_1, \ldots, i_k$ を $1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq m$ とし，$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ について，各 $l = 1, \ldots, k$ で v_{i_l} を w_l と取り替えて得られる外積を

$$v_1 \wedge \cdots \underset{\underset{i_1}{\uparrow}}{w_1} \wedge \cdots \wedge \underset{\underset{i_k}{\uparrow}}{w_k} \wedge \cdots \wedge v_r$$

で表すことにする。

(2) $S^\bullet(\bigwedge^r E^*)$ の 2 次斉次元

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)(w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) - \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k: \\ 1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq r}} (v_1 \wedge \cdots \underset{\underset{i_1}{\uparrow}}{w_1} \wedge \cdots \wedge \underset{\underset{i_k}{\uparrow}}{w_k} \wedge \cdots \wedge v_r)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_r)$$

を**プリュッカー関係式**と呼び，$P_{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}}^{(k)}$ で表すことにする。

(3) プリュッカー関係式すべてで生成されるイデアル

$$\left\langle P^{(k)}_{\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in (E^*)^r,\ 1 \leqq k \leqq r \right\rangle$$

を Q_r で表すことにする。

観察 15 (座標を入れる場合のプリュッカー関係式) E の基底 $e_1, \dots, e_m$ と双対基底 $e_1^*, \dots, e_m^*$ を取る。大小を問わない 1 から m の整数 $i_1, \dots, i_r$ に対し，$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*$ に対応する $S^{\bullet}(\bigwedge^r E^*)$ の元を $X_{i_1,\dots,i_r}$ と書く。この記法を用いて，これまでの議論を書き直すと次のようになる。

- $[r]$ 上の勝手な置換 σ について $X_{i_1,\dots,i_r} = \mathrm{sgn}(\sigma) X_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(r)}}$ が成立する。
- 辞書式順序で並べた $(X_{i_1,\dots,i_r} : 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m)$ が $S^1(\bigwedge^r E^*)$ の基底をなす。
- 点 $V \in \mathrm{Gr}_r(E)$ と, V の基底の表現行列 A を勝手に取ると, 整数 $1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m$ に対し，斉次座標の等式

$$\Big[\big(X_{i_1,\dots,i_r}(\iota(V))\big)_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m} \Big] = \Big[\big(\det(A_{\{i_1,\dots,i_r\},[r]})\big)_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m} \Big]$$

  が成立する。

このとき Q_r は，各 $v_1, \dots, w_r$ を基底で表して，双線型性を用いて分けることで，関係式

$$\left\{ X_{i_1,\dots,i_r} X_{j_1,\dots,j_r} - \sum_{\substack{l_1,\dots,l_k:\\ 1 \leqq l_1 < \cdots < l_k \leqq r}} X_{i_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ l_1}}{j_1},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ l_k}}{j_k},\dots,i_r} X_{l_1,\dots,l_k,j_{k+1},\dots,j_r} : \begin{array}{l} 1 \leqq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r \leqq m, \\ 1 \leqq k \leqq r \end{array} \right\}$$

で生成されることがわかる。さらに外積の歪対称性を用いることで，関係式

(2.1)
$$\left\{ X_{i_1,\dots,i_r} X_{j_1,\dots,j_r} - \sum_{\substack{l_1,\dots,l_k:\\ 1 \leqq l_1 < \cdots < l_k \leqq r}} X_{i_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ l_1}}{j_1},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ l_k}}{j_k},\dots,i_r} X_{l_1,\dots,l_k,j_{k+1},\dots,j_r} : \begin{array}{l} 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m, \\ 1 \leqq j_1 < \cdots < j_r \leqq m, \\ 1 \leqq k \leqq r \end{array} \right\}$$

で Q_r が生成されることがわかる。このうち $k = 1$ のものを，古典的プリュッカー関係式

$$\left\{ \sum_{l=1}^{r+1} (-1)^l X_{i_1,\dots,i_{r-1},j_l} X_{j_1,\dots,\underset{\wedge}{j_l},\dots,j_{r+1}} : \begin{array}{l} 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m, \\ 1 \leqq j_1 < \cdots < j_{r+1} \leqq m \end{array} \right\}$$

と置き換えても良い。ここで $X_{j_1,\dots,\underset{\wedge}{j_l},\dots,j_{r+1}}$ は，j_l を除いて得られる元を表す。

これから等式 $\iota(\mathrm{Gr}_r(E)) = V(Q_r)$ の証明を目標にして議論していく。

命題 16 $\iota(\mathrm{Gr}_r(E)) \subset V(Q_r)$ が成立する。

証明　点 $V \in \mathrm{Gr}_r(E)$ を勝手に取る。$e_1, \dots, e_r$ が V の基底をなすように，E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取り，V のプリュッカー座標を $[(x_{i_1, \dots, i_r})_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m}]$ とする。$\iota(V)$ の零でないプリュッカー座標は $x_{1, \dots, r}$ の箇所のみである。関係式 (2.1) を次の二つの場合に分ける。

$i_1 = 1, \dots, i_r = r$ かつ $j_1 = 1, \dots, j_r = r$ の場合 このとき第一項目と第二項目が共に $x_{1, \dots, r}^2$ であるので，プリュッカー関係式を満足する。

その他の場合 このとき第一項目と第二項目が共に 0 であるので，プリュッカー関係式を満足する。

ゆえに $\iota(V) \in V(Q_r)$ である。　証明終

命題 17　$V(Q_r) \subset \iota(\mathrm{Gr}_r(E))$ が成立する。

証明　点 $L \in V(Q_r)$ を勝手に取る。E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取って，L のプリュッカー座標 $[(x_{i_1, \dots, i_r})_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m}]$ を考える。$e_1, \dots, e_m$ の順番を並べ替えることで，$x_{1, \dots, r} \neq 0$ とし，斉次座標を $x_{1, \dots, r}$ で一斉に割ることで，$x_{1, \dots, r} = 1$ と考える。添字に関して $x_{i_1, \dots, i_r}$ が歪対称的に振る舞うように考えて，(m, r) 型の行列 $A = (a_{s, t})_{\substack{1 \leqq s \leqq m, \\ 1 \leqq t \leqq r}}$ を

$$a_{s, t} = x_{1, \dots, t-1, s, t+1, \dots, r}, \qquad 1 \leqq s \leqq m,\ 1 \leqq t \leqq r$$

で定め，$e_1, \dots, e_m$ と A で表現されるベクトル $(w_1 \cdots w_r) = (e_1 \cdots e_m)A$ で生成される E の部分空間を V とすると，$X_{i_1, \dots, i_r}$ が添字に関して歪対称かつ $x_{1, \dots, r} = 1$ であるので，$A_{[r], [r]}$ は r 次単位行列である。ゆえに $\det(A_{[r], [r]}) = 1$ かつ A の階数が r で，$V \in \mathrm{Gr}_r(E)$ である。$\iota(V) = L$ であることを示せば証明が終わり，そのためには勝手な添字集合 $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$ に対し，

$$\det(A_{I, [r]}) = x_{i_1, \dots, i_r} \tag{2.2}$$

が成立することを示せば良い。(2.2) が成立することを，$|I \cap [r]|$ に関する減少方向の帰納法で示す。$|I \cap [r]| = r$ のときは，$I = [r]$ であるから既に証明済みである。$|I \cap [r]| = r - 1$ のとき，$I = \{1, \dots, r-1, i_r\}$ かつ $i_r > r$ と表せ，対応する小行列式は

$$A_{I, [r]} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ a_{i_r, 1} & \cdots & \cdots & a_{i_r, r} \end{pmatrix}$$

となる。このとき $\det(A_{I, [r]}) = a_{i_r, r} = x_{1, \dots, r-1, i_r}$ となるので，(2.2) が成立する。$|I \cap [r]| < r - 1$ と仮定すると，上のときと同様に $i_r \notin [r]$ である。L が Q_r の零点である

から，$k=1$ のプリュッカー関係式により

$$\begin{aligned}
x_{i_1,\dots,i_r} &= x_{1,\dots,r}x_{i_1,\dots,i_r} \\
&= (-1)^{r-1}x_{1,\dots,r}x_{i_r,i_1,\dots,i_{r-1}} \\
&= (-1)^{r-1}\sum_{j=1}^{r} x_{1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{i_r},\dots,r}x_{j,i_1,\dots,i_{r-1}} \quad (\because k=1 \text{ のプリュッカー関係式より。}) \\
&= (-1)^{r-1}\sum_{j=1}^{r} \det(A_{(1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{i_r},\dots,r)})\det(A_{(j,i_1,\dots,i_{r-1})}) \quad (\because \text{帰納法の仮定より。}) \\
&= (-1)^{r-1}\det(A_{[r],[r]})\det(A_{(i_r,i_1,\dots,i_{r-1})}) \quad (\because \iota(V) \text{ が } Q_r \text{ の零点なので。}) \\
&= \det(A_{I,[r]})
\end{aligned}$$

と計算できる。この計算において，添字列 $(j_1,\dots,j_r)$ に対して，この順番で行ベクトルを並べて得られる r 次正方行列を $A_{(j_1,\dots,j_r)}$ で表した。したがって帰納法によって，すべての添字集合 $I=\{i_1<\dots<i_r\}$ に対して $x_{i_1,\dots,i_r}=\det(A_{I,[r]})$ であることが分かり，$L=\iota(V)$ であることが示された。 証明終

系 18　グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_r(E)$ は，プリュッカー埋め込みによって射影代数的集合 $V(Q_r)$ に埋め込まれる。

証明　命題 11 よりプリュッカー埋め込み $\iota\colon \mathrm{Gr}_r(E)\to\mathbb{P}(\bigwedge^r E)$ が単射で，命題 16 と命題 17 により $\iota(\mathrm{Gr}_r(E))=V(Q_r)$ が成立するので。 証明終

付録　テンソル代数・対称代数・外冪

本文書で用いるテンソル代数・対称代数・外冪の定義を述べる。E を有限次元 K 線型空間とし，テンソル積はすべて K 上で取るものとする。

定義 19 (テンソル代数)　2 以上の整数 n に対して，n 個の E のテンソル積を $E^{\otimes n}$ で表すことにする。形式的に $E^{\otimes 1}$ を E，$E^{\otimes 0}$ を K として定める。E の**テンソル代数** $T^\bullet(E)$ を，K 線型空間として，K 線型空間の直和 $\bigoplus_{n=0}^{\infty}E^{\otimes n}$ として定める。勝手な非負整数 n,m に対し，テンソル積の普遍性から線型同型 $E^{\otimes n}\otimes E^{\otimes m}\xrightarrow{\sim}E^{\otimes n+m}$ があるので，乗算写像

$$E^{\otimes n}\times E^{\otimes m}\to E^{\otimes n+m};\ (v_1\otimes\cdots\otimes v_n, w_1\otimes\cdots\otimes w_m)\mapsto v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_m$$

が定まる。この写像を直和に拡張すれば，乗算写像 $\otimes\colon T^\bullet(E)\times T^\bullet(E)\to T^\bullet(E)$ を得られ，$T^\bullet(E)$ に非可換 K 代数の構造が定まる。

定義 20 (対称代数)　E の**対称代数** $S^\bullet(E)$ を，$T^\bullet(E)$ の両側イデアル

$$\langle v \otimes w - w \otimes v : v, w \in E \rangle$$

による商環として定める。$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ の剰余類を $v_1 \cdots v_n$ で表し，$v_1, \dots, v_n$ の**対称積**と呼ぶ。$S^\bullet(E)$ は $S^1(E) = E$ で生成される可換 K 代数で，E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取れば，$X_1, \dots, X_m$ を不定元とするとき，対応 $X_i \mapsto e_i$ によって K 代数同型 $K[X_1, \dots, X_m] \xrightarrow{\sim} S^\bullet(E)$ が誘導される。

本文書では交代代数 $\bigwedge^\bullet(E)$ は導入せず，外冪 $\bigwedge^n(E)$ のみを用いる。

定義 21 (外冪)　正整数 n に対し，n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ で表し，元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の符号を $\mathrm{sgn}(n)$ で表すことにする。E の n 次**外冪** $\bigwedge^n E$ を，$E^{\otimes n}$ の部分空間

$$\langle\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n : v_1, \dots, v_n \in E \text{ で，} v_i = v_j \text{ となる相異なる番号 } i, j \text{ がある} \,\rangle$$

による商線型空間として定める。$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ の剰余類を $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ で表し，$v_1, \dots, v_n$ の**外積**と呼ぶ。$e_1, \dots, e_m$ を E の基底とするとき，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leqq i_1 < \cdots < i_n \leqq m\}$ が $\bigwedge^n E$ の基底をなすので，$\bigwedge^n E$ の次元は $\binom{\dim E}{n}$ である。特に $n > \dim E$ のとき $\bigwedge^n E$ は零線型空間である。