

数  
学  
的  
戏  
言

ここに，私が気付いた数学的な内容で，本来なら学部生の段階で習得すべきだったものを記録する。書いていて恥ずべきような内容であるから，このような見つかりづらい場所に配置することにした。

## 目 次

体上有限型概型の閉点の行く末 .....	2
----------------------	---

## 体上有限型概型の閉点の行く末

次の形のヒルベルト零点定理を用いること考える。

**定理 1 (ヒルベルトの零点定理, [AM69, Cor. 5.24])**  $k$  を体とし, 有限生成  $k$  代数  $A$  を考える。このとき  $A$  が体であるならば,  $A/k$  は有限拡大である。

この定理を用いて  $k$  上局所有有限型概型の閉点が  $k$  上概型の間の射によって閉点に移ることを示そう。

**命題 2**  $k$  を体とし, 有限生成  $k$  代数の射  $\varphi: B \rightarrow A$  を考える。このとき,  $A$  の勝手な極大イデアル  $\mathfrak{m}$  に対し,  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  は  $B$  の極大イデアルである。

**証明** 定理 1 より合成写像  $k \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}$  が体の有限拡大であることがわかる。 $\varphi$  は単射な環準同型  $\bar{\varphi}: B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$  を誘導し, また  $\varphi$  が  $k$  代数の間の射であることから, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) & \xhookrightarrow{\bar{\varphi}} & A/\mathfrak{m} \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \xlongequal{\quad} & k \end{array}$$

が得られる。体拡大  $(A/\mathfrak{m})/k$  が代数拡大であるから,  $B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  の元はすべて  $k$  上代数的である。よって  $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  の非零元  $a$  に対し,  $a^{-1} \in k[a] \subset B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  であり,  $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  が体であることがわかる。ゆえに  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  は極大イデアルである。 ■

**系 3**  $k$  を体とし, 二つの  $k$  上局所有有限型概型  $X$  と  $Y$  を考える。このとき  $k$  上概型の射  $\varphi: X \rightarrow Y$  により  $X$  の閉点は  $Y$  の閉点に移る。

**証明**  $x$  を  $X$  の閉点とする。 $Y$  が  $k$  上局所有有限型であるから, 有限生成  $k$  代数  $B$  のスペクトルと同型な開アフィン部分概型で  $Y$  を覆うことができる。そのうち  $f(x)$  が属すもの勝手に固定し,  $V$  で表すことにする。また  $X$  が  $k$  上局所有有限型であるから, その開部分概型も  $k$  上局所有有限型であるので,  $x$  が属し, かつ有限生成  $k$  代数  $A$  のスペクトルと同型な開アフィン部分概型  $U$  が存在して,  $f$  が  $k$  上アフィン概型の射  $f|_U: U \rightarrow V$  を引き起こす。この  $f|_U$  に対応する  $k$  代数の射を  $\varphi: B \rightarrow A$  とする。このとき  $x$  に対応する  $\text{Spec } A$  の閉点を  $\mathfrak{m}$  とするとき,  $f(x)$  に対応する  $\text{Spec } B$  の点は  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  で与えられ, 命題 2 により  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  は  $\text{Spec } B$  の閉点であることが従う。ゆえに  $f(x)$  は  $V$  の閉点である。 $f(x)$  を含む  $V$  を勝手に選んでいたのので,  $f(x)$  が  $Y$  の閉点であることが示された。 ■

一応次のことも言及しておく。

**補題 4**  $X$  を概型とする。このとき開埋め込み  $\iota: U \rightarrow X$  は局所有限型である。

**証明**  $X$  の開アフィン部分概型  $V$  を勝手に取り。切断が有限生成  $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$  代数であるような開集合で  $\iota^{-1}(V)$  を覆えることを示せば良い。 $\iota$  により  $U \cong (\iota(U), \mathcal{O}_X|_{\iota(U)})$  であり、この同型により  $\iota^{-1}(V)$  と  $\iota(U) \cap V$  が対応するので、 $\iota(U) \cap V$  を覆えば良い。それは次に述べる環のスペクトルの議論から従う。 $\Gamma(V, \mathcal{O}_X|_V)$  を  $A$  と置き、 $W$  を  $\text{Spec } A$  の開集合とする。 $A$  の元  $f$  に対し、 $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$  を  $D(f)$  と置くと、 $\{D(f) \mid f \in A\}$  は  $\text{Spec } A$  の開基を成すので、 $W$  を  $D(f)$  の形の集合で覆うことができる。他方、 $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  が  $A$  代数として  $A_f$  として同型であり、 $A_f$  は  $1/f$  を生成元とする有限生成  $A$  代数である。よって題意が従う。 ■

少し話題を変えて、古典的な代数幾何学における多項式写像をスペクトルの射として観察してみる。 $k$  を体とする。有限生成  $k$  代数  $A$  と  $B$  に対し、 $k$  代数の同型  $k[X_1, \dots, X_n]/I \simeq A$  と  $k[Y_1, \dots, Y_m]/J \simeq B$  を固定し、各  $X_i$  の  $A$  における像を  $x_i$  で表し、同様に各  $y_i$  の  $B$  における像を  $y_i$  で表すことにする。 $k$  の元  $a_1, \dots, a_n$  によって  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  のように表すことができる極大イデアル  $\mathfrak{m}$  を考えると、 $k \rightarrow A/\mathfrak{m}$  が同型である。 $A$  の元  $f$  の  $A/\mathfrak{m}$  における像を  $f(a_1, \dots, a_n)$  で表すことにする。

**命題 5**  $k$  代数の射  $\varphi: B \rightarrow A$  による  $\mathfrak{m}$  の引き戻し  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  は、極大イデアル  $(y_i - \varphi(y_i)(a_1, \dots, a_n) \mid i \in \{1, \dots, m\})$  と等しい。

**証明** 各  $i$  に対し、 $(\varphi(y_i) - f(y_i)(a_1, \dots, a_n))(a_1, \dots, a_n) = 0$  であるから、 $\varphi(y_i) - f(y_i)(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{m}$  である。ゆえに  $(y_i - \varphi(y_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  である。 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \neq B$  であるので、 $(y_i - \varphi(y_i) \mid i \in \{1, \dots, m\})$  が極大であることから題意が従う。 ■

$k^n$  の点  $(a_1, \dots, a_n)$  に対し、 $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  が極大イデアルであることと、 $I \subset (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$  であることが同値であるので、後者は  $I$  の勝手な多項式  $F$  に対し  $F(a_1, \dots, a_n) = 0$  が成立することが同値である。ゆえに  $V(I)$  は  $\text{Specm } A$  に埋め込まれる。命題 5 から、 $k$  代数の射  $\varphi: B \rightarrow A$  は  $V(I)$  から  $V(J)$  への写像  $\varphi': (a_1, \dots, a_n) \mapsto (\varphi(y_1)(a_1, \dots, a_n), \dots, \varphi(y_n)(a_1, \dots, a_n))$  を引き起こす。(後者の値は同型  $k \simeq A/\mathfrak{m}$  で引き戻していることに注意する)。 $\varphi'$  はもちろん同型  $k[X_1, \dots, X_n]/I \simeq A$  と  $k[Y_1, \dots, Y_n]/J \simeq B$  の取り方に依存するが、 $\varphi$  が定める  $k$  概型の射  $\varphi^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  および閉点の間の写像  $\text{Specm } B \rightarrow \text{Specm } A$  は  $\varphi$  のみから定まる。

## 参考文献

- [AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. **Introduction to commutative algebra**. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, pp. ix+128.