組み合せ論的ホッジ理論　雑記帳

2025 年 3 月 18 日

1　バーグマン扇など

命題 1.1 E を有限集合とし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathscr{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1}$ と $\sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ に対し，$\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ となるのは $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ となるときかつその時に限る。

証明 $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ のときに $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ となることは定義から従う。

逆に $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ が成立する時を考える。$I_1 \not\subset I_2$ であったとすると元 $i \in I_1 \setminus I_2$ が少なくとも一つ存在し $\mathbf{e}_i \in \sigma_{\emptyset<\mathscr{F}_2}$ である。ゆえに $\{i\} \in \mathscr{F}_2$ であり $I_2 = \emptyset$ である。$\mathscr{F}_2$ が全順序部分集合であることから $I_1 = I_1$ は一元集合である。すちなわち $\{i\}$ であるがこれは $I_1 \notin \mathscr{P}$ であることに矛盾し $I_1 \subset I_2$ であることが従う。次に $\mathscr{F}_1 \not\subset \mathscr{F}_2$ であったと仮定し $F \in \mathscr{F}_1 \setminus \mathscr{F}_2$ を一つ取る。$\mathbf{e}_F \in \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ であるから

$$\mathbf{e}_F = \sum_{i \in I_2} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{G \in \mathscr{F}_2} \lambda_G \mathbf{e}_G,\ \lambda_i,\ \lambda_G \in \mathbb{R}_{>0}$$

のような一意的な表示が得られるが，F の取り方からすべての $G \in \mathscr{F}_2$ に対し $\lambda_G = 0$ となる。したがって $F \subset I_2$ であるが $\mathscr{P}$ が順序フィルターであることから $I_2 \in \mathscr{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ である。 ∎

命題 1.2 E を有限集合とし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathscr{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1}$ と $\sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ に対し，$\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2} = \sigma_{(I_1 \cap I_2)<(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2)}$ が成立する。

証明 定義から直ちに $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2} \supset \sigma_{(I_1 \cap I_2)<(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2)}$ であることは従うので逆の包含が成立することを示す。

[AHK18, Prop. 2.4] より $\Sigma_{\mathscr{P}}$ は特に扇であるので $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ は $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1}$ の面である。ゆえに $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2} = \sigma_{I_3<\mathscr{F}_3}$ となる $I_3 \subset I_1$ と $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_1$ が存在する。命題

参考文献

1.1 より $I_3 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_2$ となるので $I_3 \subset I_1 \cap I_2$ かつ $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ となり逆の包含が成立することが従う。 $\blacksquare$

参考文献

[AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. “Hodge theory for combinatorial geometries”. In: *Ann. of Math. (2)* **188**.2 (2018), pp. 381–452.