

組合せ論的ホッジ理論セミナー草稿

2025 年 5 月 1 日 15 時 50 分更新



むろぺえじ版

組合せ論的ホッジ理論セミナー 第一回

1 有限集合のバーグマン扇

この節では n を非負整数とし E を $n+1$ 元からなる有限集合とする。

記法 1.1 ([AHK18, Sec. 2.1 と Sec. 2.2])

1. \mathbb{Z}^E で E を基底とする自由アーベル群を表す。
2. \mathbf{e}_i で元 $i \in E$ に対応する \mathbb{Z}^E の基底ベクトルを表す。また勝手な E の部分集合 I に対し \mathbf{e}_I を $\sum_{i \in I} \mathbf{e}_i$ と置く。
3. \mathbf{N}_E を商格子 $\mathbb{Z}^E / \langle \mathbf{e}_E \rangle$ と置く。ここで $\langle \mathbf{e}_E \rangle$ は \mathbf{e}_E が生成する \mathbb{Z}^E の部分群を表す。
4. $\mathbf{N}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を $\mathbf{N}_{E, \mathbb{R}}$ と置く。
5. 半順序集合 $(2^E \setminus \{\emptyset, E\}, \subset)$ を $\mathcal{P}(E)$ と置くことにする。
6. $\mathcal{P}(E)$ の全順序部分集合を**非空狭義部分集合の旗**、あるいは簡潔に**旗**と呼ぶ。記号 $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ などを非空狭義部分集合の旗を表すものとして用いる。

定義 1.2 ([AHK18, Sec. 2.2 と Def. 2.1 と Def. 2.2]) \mathcal{F} を非空狭義部分集合の旗とする。

- (i) E を全体集合とする交叉 $\bigcap \mathcal{F}$ を $\min \mathcal{F}$ と置く。つまり

$$\min \mathcal{F} = \begin{cases} F_1 & (\mathcal{F} \neq \emptyset \text{ で } \mathcal{F} = \{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_r\} \text{ と表すとき}) \\ E & (\mathcal{F} = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。

- (ii) E の狭義部分集合 I が \mathcal{F} と**適合する**とは $I \subsetneq \min \mathcal{F}$ が成立するときをいい、 $I < \mathcal{F}$ と表してこれを**適合対**と呼ぶ。
- (iii) 適合対 $I < \mathcal{F}$ に対し、 $\mathbf{N}_{E, \mathbb{R}}$ 内のユニモデュラ錐 $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ を

$$\text{cone}(\{\mathbf{e}_i \mid i \in I\} \cup \{\mathbf{e}_F \mid F \in \mathcal{F}\})$$

として定める。

注意 1.3 $\mathcal{F} = \emptyset$ の場合、定義より E の任意の狭義部分集合が \mathcal{F} と適合する。同様に \emptyset は、すべての非空狭義部分集合の旗と適合する。よって

$$\sigma_{I < \mathcal{F}} = \sigma_{I < \emptyset} + \sigma_{\emptyset < \mathcal{F}}$$

のように和に分けることができる。また対応 $I < \mathcal{F} \mapsto \sigma_{I < \mathcal{F}}$ は一対一ではない。実際 E が二元以上からなるとき、元 i に対して $\sigma_{\{i\} < \emptyset} = \sigma_{\emptyset < \{\{i\}\}}$ が成立するからである。

定義 1.4 ([AHK18, Sec. 2.3]) $\mathcal{P}(E)$ の半順序部分集合 \mathcal{P} が**順序フィルター**であるとは、 $F \subset G$ を満たす $\mathcal{P}(E)$ の勝手な二元 F と G に対し、 $F \in \mathcal{P}$ ならば $G \in \mathcal{P}$ が成立するときをいう。

定義 1.5 ([AHK18, Def. 2.3]) \mathcal{P} を順序フィルターとする。

1. 適合対 $I < \mathcal{F}$ が \mathcal{P} の**バーグマン扇条件**を満たすとは、 $I \notin \mathcal{P}$ かつ $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ が成立するときをいう。
2. \mathcal{P} の**バーグマン扇**とは錐の族

$$\{\sigma_{I < \mathcal{F}} \mid I < \mathcal{F} \text{ は } \mathcal{P} \text{ のバーグマン扇条件を満たす適合対である}\}$$

といい、 $\Sigma_{\mathcal{P}}$ で表す。

例 1.6 $\mathcal{P} = \emptyset$ のとき

$$\begin{aligned} \Sigma_{\emptyset} &= \{\sigma_{I < \emptyset} \mid I \text{ は } E \text{ の狭義部分集合である}\} \\ &= \{\text{cone}(\{\mathbf{e}_i \mid i \in I\}) \mid I \text{ は } E \text{ の狭義部分集合である}\} \end{aligned}$$

であるので、 Σ_{\emptyset} は射影空間の扇であることがわかる。

例 1.7 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$ のとき

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathcal{P}(E)} &= \{\sigma_{\emptyset < \mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \text{ は非空狭義部分集合の旗である}\} \\ &= \{\text{cone}(\{\mathbf{e}_F \mid F \in \mathcal{F}\}) \mid \mathcal{F} \text{ は } \mathcal{P}(E) \text{ の旗である}\} \end{aligned}$$

であるので、これは置換多面体の法扇である。

例 1.8 $E = \{0, 1, 2\}$ とし $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}\}$ とする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}}$ の錐は図 1 のように表すことができる。

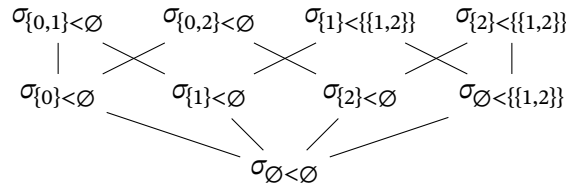


図 1 $\Sigma_{\mathcal{P}}$ の錐とその包含関係

これは、ちょうど Σ_{\emptyset} の錐 $\sigma_{\{1,2\} < \emptyset}$ を、射線 $\sigma_{\emptyset < \{\{1,2\}\}}$ に沿って $\sigma_{1 < \{\{1,2\}\}}$ と $\sigma_{2 < \{\{1,2\}\}}$ に分割した扇である。

次の命題が本節の主命題である。

命題 1.9 ([AHK18, Prop. 2.4]) 順序フィルター \mathcal{P} に対し、 $\Sigma_{\mathcal{P}}$ は扇である。

以降で命題 1.9 を示す。

補題 1.10 適合対 $I < \mathcal{F}$ と E の狭義部分集合 Z に対し, $\mathbf{e}_Z \in \sigma_{I < \mathcal{F}}$ が成立することは, $Z \subset I$ または $Z \in \mathcal{F}$ が成立することと同値である。

証明 $Z \subset I$ または $Z \in \mathcal{F}$ が成立するとき, $\mathbf{e}_Z \in \sigma_{I < \mathcal{F}}$ が成立することは明らかである。
 $\mathbf{e}_Z \in \sigma_{I < \mathcal{F}}$ が成立するとする。 \mathbb{R}^E の元として

$$(1.1) \quad \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{F \in \mathcal{F}} \lambda_F \mathbf{e}_F \right) - \mathbf{e}_Z \in \langle \mathbf{e}_E \rangle$$

が成立するような正数 λ_i と λ_F が存在する。(1.1) の第一項目のベクトルは Z 上の座標で最大値を取るが, このようなことが起こるのは $Z \subset Z$ のときか $Z \in \mathcal{F}$ のときのいずれかである。 ■

補題 1.11 \mathcal{P} を順序フィルターとする。このとき \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たす二つの適合対 $I < \mathcal{F}$ と $J < \mathcal{G}$ に対し, $\sigma_{I < \mathcal{F}} \subset \sigma_{J < \mathcal{G}}$ となるのは, $I \subset J$ かつ $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ となるとき, かつそのときに限る。

証明 $I \subset J$ かつ $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ のときに $\sigma_{I < \mathcal{F}} \subset \sigma_{J < \mathcal{G}}$ となることは定義から直ちに従う。逆に $\sigma_{I < \mathcal{F}} \subset \sigma_{J < \mathcal{G}}$ が成立するときを考える。すると i の勝手な元 i に対し, $\mathbf{e}_i \in \sigma_{J < \mathcal{G}}$ が成立するので, 補題 1.10 より $i \in J$ または $\{i\} \in \mathcal{G}$ が成立する。 $\{i\} \in \mathcal{G}$ だったとすると, \mathcal{P} が順序フィルターであるので, $I \in \mathcal{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $i \in J$ が成立し, $I \subset J$ であることが従う。また \mathcal{F} の勝手な元 F に対し, $\mathbf{e}_F \in \sigma_{J < \mathcal{G}}$ が成立するので, 補題 1.10 より $F \subset J$ または $F \in \mathcal{G}$ が成立する。 $F \subset J$ だったとすると, \mathcal{P} が順序フィルターであるので, $J \in \mathcal{P}$ となり矛盾する。ゆえに $F \in \mathcal{G}$ が成立し, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ が従う。 ■

定義 1.12 ([CLS11]) Σ を格子 \mathbf{N} における扇¹⁾ とし, \mathbf{v} を $|\Sigma| \cap \mathbf{N}$ に属す格子点とする。 Σ の \mathbf{v} に沿う星状細分 $\Sigma^*(\mathbf{v})$ とは

$$\{\sigma \in \Sigma \mid \mathbf{v} \notin \sigma\} \cup \{\text{cone}(\{\mathbf{v}\} \cup \tau) \mid \tau \text{ は } \mathbf{v} \text{ を含む } \Sigma \text{ の錐の面であり, } \mathbf{v} \text{ を含まない}\}$$

のことである。星状細分は扇である。

補題 1.13 $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_-$ を満たす順序フィルター \mathcal{P}_+ と \mathcal{P}_- を考える。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}_+} = \Sigma_{\mathcal{P}_-}^*(\mathbf{e}_Z)$ が成立する。

証明 \mathcal{P}_- のバークマン扇条件を満たす適合対 $I < \mathcal{F}$ に対し, 補題 1.10 より $\mathbf{e}_Z \in \sigma_{I < \mathcal{F}}$ であることが $Z \subset I$ であることと同値であるが, Z は $\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}_-$ の極大元であるから, $Z = I$ であることと同値である。ゆえに $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ に属し \mathbf{e}_Z を含まない錐は, Z が適合する \mathcal{P}_- の旗 \mathcal{F} を用いて, $\sigma_{Z < \mathcal{F}}$ と表すことができる。 $\sigma_{Z < \mathcal{F}}$ の面のうち \mathbf{e}_Z を含まないものは, Z の狭

1) $\mathbf{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内の有理強凸錐の多面集合複体のこと

義部分集合 J と \mathcal{F} の任意の部分旗 \mathcal{G} を用いて $\sigma_{J<\mathcal{G}}$ と表される。 $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ の \mathbf{e}_Z に沿う星状細分により $\sigma_{Z<\mathcal{F}}$ は $\text{cone}(\{\mathbf{e}_Z\}) + \sigma_{J<\mathcal{G}} = \sigma_{J<\{Z\} \cup \mathcal{G}}$ の形の錐に置き変わる。 $J < \{Z\} \cup \mathcal{G}$ は \mathcal{P}_+ のバークマン扇条件を満たすので、 $\Sigma_{\mathcal{P}_-}^*(\mathbf{e}_Z) \subset \Sigma_{\mathcal{P}_+}$ であることが従う。逆に \mathcal{P}_+ のバークマン扇条件を満たす適合対 $I < \mathcal{F}$ を考えると、 $Z \in \mathcal{F}$ のとき $Z < (\mathcal{F} \setminus \{Z\})$ かつ $(\mathcal{F} \setminus \{Z\}) \subset \mathcal{P}_-$ が成立するので、 $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ は星状細分の操作で追加される錐である。 $Z \notin \mathcal{F}$ のとき $I \neq Z$ かつ $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_-$ であるから、 $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ は星状細分の操作で変化しない錐である。ゆえに $\Sigma_{\mathcal{P}_+} \subset \Sigma_{\mathcal{P}_-}^*(\mathbf{e}_Z)$ が成立する。 ■

命題 1.9 の証明 \mathcal{P}_0 を空順序フィルター \emptyset として、 i 番目の順序フィルター \mathcal{P}_i に $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_i$ の極大元を一つ加えて $i+1$ 番目の順序フィルター \mathcal{P}_{i+1} を定めることで、順序フィルターの有限列

$$(\emptyset = \mathcal{P}_0 \subsetneq \mathcal{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{P}_m = \mathcal{P})$$

を構成する。列 $(\mathcal{P}_i)_{i=0}^m$ に関する帰納法で示す。 $i = 0$ の時に関しては Σ_{\emptyset} が n 次元単体の法錐であることから従う。 $i > 0$ として、 \mathcal{P}_- を \mathcal{P}_{i-1} 、 \mathcal{P}_+ を \mathcal{P}_i と置いて $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\}$ と書くことにすると、 $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ は帰納法の仮定により扇であるから、補題 1.13 により $\Sigma_{\mathcal{P}_+} = \Sigma_{\mathcal{P}_-}^*(\mathbf{e}_Z)$ であり、 $\Sigma_{\mathcal{P}_+}$ は特に扇である。よって帰納法により題意は示された。 ■

注意 1.14 一般論として、最大次元多面体の法扇を星状細分がまた最大次元多面体の法扇であることが知られている。よって命題 1.9 の証明は、実は $\Sigma_{\mathcal{P}}$ が n 次元多面体の法扇であることも示している。 $(i = 0$ の場合 Σ_{\emptyset} が n 次元単体の複体であることを用いる。)

系 1.15 \mathcal{P} を順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}}$ のバークマン扇条件を満たす勝手な適合対 $I < \mathcal{F}$ と $J < \mathcal{G}$ に対し、 $\sigma_{I<\mathcal{F}} \cap \sigma_{J<\mathcal{G}} = \sigma_{(I \cap J) < (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})}$ が成立する。

証明 定義から直ちに、右辺が左辺に含まれることが従うので、左辺が右辺に含まれることを示す。命題 1.9 から $\Sigma_{\mathcal{P}}$ は扇であるから、 $\sigma_{I<\mathcal{F}} \cap \sigma_{J<\mathcal{G}}$ は $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ の面である。ゆえに $\sigma_{I<\mathcal{F}} \cap \sigma_{J<\mathcal{G}} = \sigma_{K<\mathcal{H}}$ かつ $K \subset I$ かつ $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ を満たす K と \mathcal{H} が存在する。さらに補題 1.11 から $K \subset J$ かつ $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ も成立するので、 $K \subset I \cap J$ かつ $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ が成立し、目的の包含が成立することが従う。 ■

参考文献

[AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. “Hodge theory for combinatorial geometries”. In: **Ann. of Math. (2)** **188.2** (2018), pp. 381–452.

- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. **Toric varieties**. **124**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, pp. xxiv+841.

組合せ論的ホッジ理論セミナー 第二回

2 マトロイドのバーグマン扇

この節では、 n と r を非負整数、 E を $n+1$ 元からなる有限集合、 M を E 上の階数 $r+1$ のループなしマトロイドとする。

記法 2.1

1. rk_M を M の階数関数とする。
2. M の非空狭義フラット全体の族が定める半順序集合を $\mathcal{P}(M)$ で表す。
3. $\mathcal{P}(M)$ の全順序部分集合を**非空狭義フラットの旗**、あるいは簡潔に**旗**と呼ぶ。記号 \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{H} などを非空狭義フラットの旗を表すものとして用いる。
4. 前節の定義を用いて、非空狭義フラットの旗 \mathcal{F} に対して $\min \mathcal{F}$ は E を全体集合とする交叉 $\bigcap \mathcal{F}$ とし、 I が $\min \mathcal{F}$ の狭義部分集合であるとき、 $I < \mathcal{F}$ と書く。

定義 2.2 ([AHK18, Def. 3.1]) \mathcal{F} を非空狭義フラットの旗とし、適合対 $I <_M \mathcal{F}$ を考える。 I が M において \mathcal{F} と**適合する**とは、 $\#I < \text{rk}_M(\min \mathcal{F})$ が成立するときといい、 $I <_M \mathcal{F}$ と書く。

注意 2.3 M における適合対 $I <_M \mathcal{F}$ に対し、 $\#\mathcal{F} \leq r+1 - \text{rk}_M(\mathcal{F}) < r+1 - \#I$ が成立するので、 $\sigma_{I <_M \mathcal{F}}$ の次元は r 以下である。

定義 2.4 ([AHK18, Def. 3.2])

1. $\mathcal{P}(M)$ の部分半順序集合 \mathcal{P} が**順序フィルター**であるとは、 $F \subset G$ を満たす $\mathcal{P}(M)$ の勝手な二元 F と G に対し、 $F \in \mathcal{P}$ ならば $G \in \mathcal{P}$ が成立するときをいう。
2. $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルター \mathcal{P} に対し、 $\hat{\mathcal{P}}$ を $\mathcal{P} \cup \{E\}$ と置く。
3. $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルター \mathcal{P} と適合対 $I < \mathcal{F}$ に対し、 $I < \mathcal{P}$ が \mathcal{P} の**バーグマン扇条件**を満たすとは、 $\text{cl}_M(I) \notin \hat{\mathcal{P}}$ かつ $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ が成立するときをいう。
4. 順序フィルター \mathcal{P} に対しその**バーグマン扇**を

$$\{\sigma_{I < \mathcal{F}} \mid I < \mathcal{F} \text{ が } \mathcal{P} \text{ のバーグマン扇条件を満たす}\}$$

として定め、 $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ で表す。

5. 順序フィルター \mathcal{P} に対しその**被約バーグマン扇**を

$$\{\sigma_{I <_M \mathcal{F}} \mid I <_M \mathcal{F} \text{ が } \mathcal{P} \text{ のバーグマン扇条件を満たす}\}$$

として定め、 $\tilde{\Sigma}_{M, \mathcal{P}}$ で表す。

補題 1.10 を用いることで、補題 1.11 と同様の主張が成立することが示される。

命題 2.5 \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき \mathcal{P} のバーグマン扇条件を満たす二つの適合対 $I < \mathcal{F}$ と $J < \mathcal{G}$ に対し、 $\sigma_{I < \mathcal{F}} \subset \sigma_{J < \mathcal{G}}$ となるのは、 $I \subset J$ かつ $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ となるとき、かつそのときに限る。

証明 補題 1.11 の証明と同様であるから、省略する。 ■

後の命題で被約バーグマン扇が純 r 次元の扇であることを示すが、対してバーグマン扇は一般に純次元ではない。

例 2.6 (純次元でないバーグマン扇の例) K を標数が 2 でない体とし、 K^3 のベクトル $f_0 = (1, 0, 0)$, $f_1 = (0, 1, 0)$, $f_2 = (0, 0, 1)$, $f_3 = (0, 0, -1)$ を用いて定まる $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 上のマトロイド M を考える。図 2 に M のフラットの束を表す。

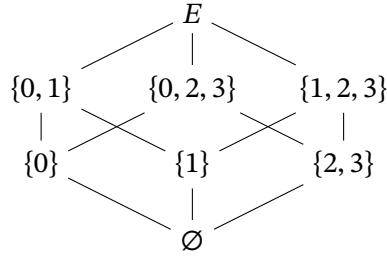


図 2 M のフラットの束

このとき $\mathcal{P} = \{\{0, 2, 3\}\}$ は順序フィルターであり、 $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐の包含関係は図 3 のようになり、 $\sigma_{\{0, 1\} < \emptyset}$ は次元 2 の極大錐、 $\sigma_{\{1, 2, 3\} < \emptyset}$ は次元 3 の極大錐であるので、 $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ は純次元ではない。

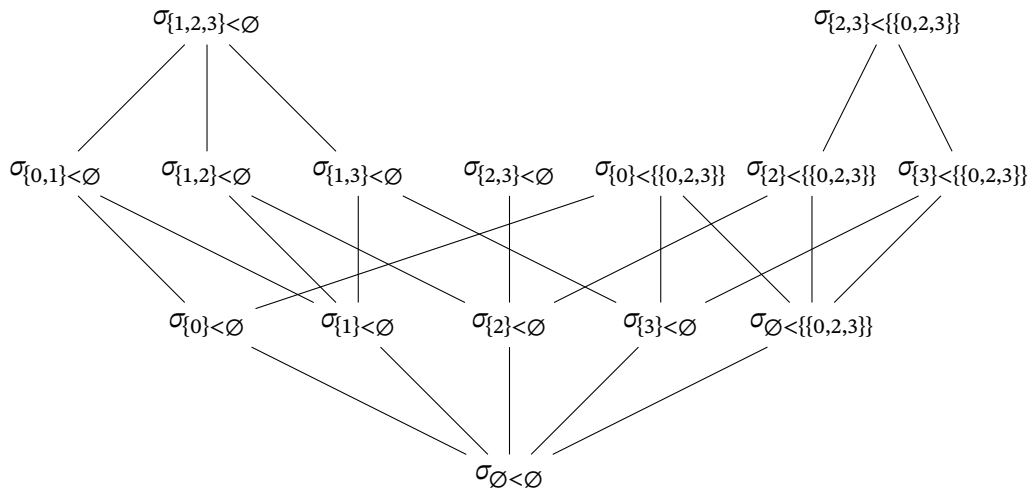


図 3 $\Sigma_{\mathcal{P}}$ の錐の包含関係

一方被約バークマン扇 $\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$ では、図 3 の $\sigma_{\{1,2,3\} < \emptyset}$ と $\sigma_{\{2,3\} < \{0,2,3\}}$ が除かれるので、図 3 のようになり、 $\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$ が純 2 次元であることがわかる。

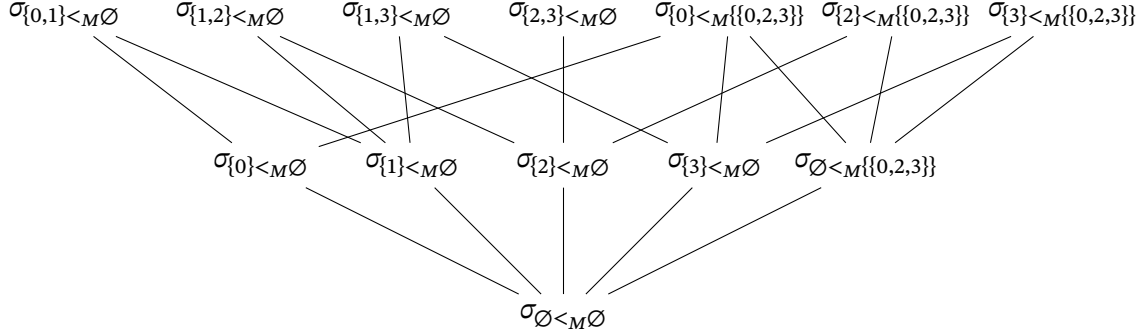


図 4 $\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$ の錐の包含関係

次が本節の主命題である。

命題 2.7 ([AHK18, Prop. 3.3]) \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき $\mathcal{P}(E)$ のある順序フィルター $\tilde{\mathcal{P}}$ があって、 $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ は $\Sigma_{\tilde{\mathcal{P}}}$ の部分扇である。

命題 2.7 を示すための補題を述べる。

補題 2.8 \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ の勝手な錐 $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ に対し、その面もすべて $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ に属す。

証明 \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たすように $I < \mathcal{F}$ を取っておく。一般論から $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ の面は I の部分集合 J と \mathcal{F} の部分旗 \mathcal{G} を用いて $\sigma_{J < \mathcal{G}}$ という形をしているので、 $\text{cl}_M(J) \notin \mathcal{P}$ であることをいえば良い。 $\text{cl}_M(J) \in \mathcal{P}$ であったとすると、 $\text{cl}_M(J) \subset \text{cl}_M(I)$ であるから $\text{cl}_M(I) \in \mathcal{P}$ となり、 \mathcal{P} のバークマン扇条件に反する。ゆえに $\text{cl}_M(J) \notin \mathcal{P}$ であり、 $\sigma_{J < \mathcal{G}} \in \Sigma_{M,\mathcal{P}}$ であることが従う。 ■

命題 2.7 の証明 補題 2.8 より $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ を含む扇が存在すれば、 $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ はその部分扇になるので、そのような n 次元多面体の法扇を構成する。 $\tilde{\mathcal{P}}$ を

$$\{F \in \mathcal{P}(E) \mid F \text{ は } \mathcal{P} \text{ のフラットを少なくとも一つ含む}\}$$

と置くと、これは $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターである。命題 1.9 より $\Sigma_{\tilde{\mathcal{P}}}$ は n 次元多面体の法扇である。 $\Sigma_{M,\mathcal{P}} \subset \Sigma_{\tilde{\mathcal{P}}}$ であることを示したい。 $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ を取ると、 $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ であるから $\text{cl}_M(I) \notin \tilde{\mathcal{P}}$ を示せば良いが、 $\text{cl}_M(I) \notin \mathcal{P}$ であることと \mathcal{P} が順序フィルターであることから、 $\text{cl}_M(I)$ が \mathcal{P} のフラットを含むことはない。つまり $I \notin \tilde{\mathcal{P}}$ である。 ■

系 2.9 $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルター \mathcal{P} に対し、 $\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$ は $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ の部分扇である。

証明 $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}$ が $\Sigma_{\mathcal{P}}$ の部分集合であり、補題 2.8 と同様の主張が $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}$ に対しても成立するので、 $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}$ は $\Sigma_{\mathcal{P}}$ の部分扇である。 ■

ここで被約バークマン扇が純次元であることをも示しておく。

命題 2.10 ([AHK18, Prop. 3.4]) $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルター \mathcal{P} に対し、 $\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$ は純 r 次元である。

証明 勝手な $\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$ の勝手な錐 $\sigma_{I <_M \mathcal{F}}$ に対し、 $\sigma_{I <_M \mathcal{F}} \subset \sigma_{I' <_M \mathcal{F}'}$ かつ $\#I' + \#\mathcal{F}' = r$ を満たす $\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I' <_M \mathcal{F}'}$ が存在することを示せば良い。 I が M において適合し \mathcal{F} を含むような \mathcal{P} の旗の中で極大なものを一つ取り \mathcal{F}' と置く。 $\text{crk}_M(\min \mathcal{F}') = \#\mathcal{F}'$ である。続けて I を含み $\min \mathcal{F}'$ に狭義に含まれる M のフラットの中で極大なものを一つ取り F と置く。 $\text{rk}_M(F) + 1 = \text{rk}_M(\min \mathcal{F}')$ である。すると

$$\#I \leq \text{rk}_M(\min \mathcal{F}') - 1 = r - \text{crk}_M(\min \mathcal{F}') = r - \#\mathcal{F}' = \text{rk}_M(F) \leq \#\mathcal{F}$$

となるので、 $\#I' = r - \#\mathcal{F}$ かつ $I \subset I' \subset F$ を満たす部分集合 I' を取ることができ、 $I' <_M \mathcal{F}'$ である。あとは $\text{cl}_M(I') \notin \mathcal{P}$ であることを示せば、 $I' <_M \mathcal{F}'$ が \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たし、証明が終わる。 $\text{cl}_M(I') \in \mathcal{P}$ であったとすると、 \mathcal{P} が順序フィルターであることから $F \in \mathcal{F}$ である。 \mathcal{F}' の極大性から $I \not<_M \{F\}$ であることに加え、 $I < \{F\}$ でもあるから $\#I \geq \text{rk}_M(F)$ が成立するので、 $\text{cl}_M(I) = F \in \mathcal{P}$ でなければならず、矛盾が生じる。 ■

ここで、バークマン扇の星が高々二つの扇に分解できることを見ておく。この性質は主定理 [AHK18, Thm. 8.8] の証明において重要である。

定義 2.11 Σ を \mathbf{N} 内の扇とし、 Σ の錐 σ を一つ取る。 Σ の σ における**星**とは、 $\mathbf{N}/\langle \sigma \cap \mathbf{N} \rangle$ 内の扇

$$\{\tau + \langle \sigma \rangle \mid \tau \text{ は } \sigma \text{ を含む } \Sigma \text{ の錐である}\}$$

のことをいい、 $\text{star}(\sigma, \Sigma)$ で表す。また Σ に属す射線 σ の最初の格子点 \mathbf{e} に対して $\text{star}(\sigma, \Sigma)$ を $\text{star}(\mathbf{e}, \Sigma)$ と書くこともある。

定義 2.12 M のフラット F を一つ取る。

(i) M の F への**制限**とは、フラット全体の族が

$$\{G \mid G \text{ は } F \text{ に含まれる } M \text{ のフラットである}\}$$

として与えられる F 上のマトロイドのことをいい、 M^F で表される。 M^F の階数は $\text{rk}_M(F)$ である。

(ii) M の F への縮約とは、フラット全体の族が

$$\{G \setminus F \mid G \text{ は } F \text{ を含む } M \text{ のフラットである}\}$$

として与えられる $E \setminus F$ 上のマトロイドのことをいい、 M_F で表される。 M_F の階数は $\text{crk}_M(F)$ である。

命題 2.13 \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとし、 F を M のフラットとする。

- (1) $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}(M^F)$ を \mathcal{P}^F と置く。このとき \mathcal{P}^F は $\mathcal{P}(M^F)$ の順序フィルターである。
- (2) $\{G \in \mathcal{P}(M_F) \mid G \cup F \in \mathcal{P}\}$ を \mathcal{P}_F と置く。このとき \mathcal{P}_F は $\mathcal{P}(M_F)$ の順序フィルターである。

証明 省略する。 ■

命題 2.14 F を M のフラット、 i を E の元とする。

- (1) 対応 $\sum_{j \in E} \lambda_j \mathbf{e}_j \mapsto (\sum_{j \in F} \lambda_j \mathbf{e}_j, \sum_{j \in E \setminus F} \lambda_j \mathbf{e}_j)$ は群同型 $\phi: \mathbf{N}_E / \langle \mathbf{e}_F \rangle \simeq \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}$ を誘導する。
- (2) 対応 $\sum_{j \in E} \lambda_j \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j \in E \setminus \{i\}} \lambda_j \mathbf{e}_j$ は群同型 $\psi: \mathbf{N}_E / \langle \mathbf{e}_i \rangle \simeq \mathbf{N}_{E \setminus \{i\}}$ を誘導する。

証明 省略する。 ■

命題 2.15 \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。

- (1) \mathcal{P} に属すフラット F に対し、命題 2.14(1) の ϕ は $\text{star}(\mathbf{e}_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}})$ から $\Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ への全単射を誘導する。
- (2) $\{i\}$ が M のフラットであるような E の元 i に対し、命題 2.14(2) の ψ は $\text{star}(\mathbf{e}_i, \Sigma_{M, \mathcal{P}})$ から $\Sigma_{M \setminus \{i\}, \mathcal{P} \setminus \{i\}}$ への全単射を誘導する。

(1) の証明 まず $\phi(\text{star}(\mathbf{e}_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}})) \subset \Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ が成り立つこと、つまり $\text{star}(\mathbf{e}_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}})$ の勝手な錐 $\bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}}$ に対し、 $\phi(\bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}})$ が $\Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ に属することを示す。ここで $I < \mathcal{F}$ は \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たす適合対で、 $F \in \mathcal{F}$ であるものとする。 $\mathcal{F} = \{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots F_k\}$ と書き、 $F_1 = F$ とする。このとき $\{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1}\}$ を \mathcal{G} とすると、 $I < \mathcal{G}$ は \mathcal{P}^F のバークマン扇条件を満たす適合対であり、 $\{F_{l+1} \setminus F \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus F\}$ を \mathcal{H} とすると、 \mathcal{H} は $\mathcal{P}(M_F)$ の旗である。 I の勝手な元 i に対して $\phi(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_i, 0)$ であり、勝手な番号 j に対し

$$\phi(\mathbf{e}_{F_j}) = \begin{cases} (\mathbf{e}_{F_j}, 0) & (j < l \text{ のとき}) \\ (0, \mathbf{e}_{F_j \setminus F}) & (j \geq l \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成立するので、 $\phi(\bar{\sigma}_{I<\mathcal{F}}) = \sigma_{I<\mathcal{G}} \times \sigma_{\emptyset<\mathcal{H}}$ であり、右辺が $\Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ に属す。 $\phi: \text{star}(\mathbf{e}_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ の単射性は $\phi: \mathbf{N}_E / \langle \mathbf{e}_F \rangle \simeq \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}$ の単射性から従うので、全射性を示す。 \mathcal{P}^F のバークマン扇条件を満たす適合対 $I < \mathcal{G}$ と $\mathcal{P}(M_F)$ の旗 \mathcal{H} を取り、錐 $\sigma_{I<\mathcal{G}} \times \sigma_{\emptyset<\mathcal{H}}$ を考える。 $\mathcal{G} = \{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1}\}$ と書き、 $\mathcal{H} = \{F_{l+1} \setminus F \subsetneq F_{l+2} \setminus F \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus F\}$ と書くと、 $F \in \mathcal{P}$ であるので、 $\{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1} \subsetneq F \subsetneq F_{l+1} \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ は \mathcal{P} の旗である。この旗を \mathcal{F} と置くと、 I が \mathcal{F} に適合し、 $\phi(\sigma_{I<\mathcal{F}}) = \sigma_{I<\mathcal{G}} \times \sigma_{\emptyset<\mathcal{H}}$ が成立する。ゆえに $\phi: \text{star}(\mathbf{e}_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ は全射である。 ■

(2) の証明 $\{i\} < \emptyset$ が \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たすのは、 $\{i\} \notin \mathcal{P}$ であるときかつそのときに限るので、 $\{i\} \in \mathcal{P}$ であるかそうでないかで場合分けが生じる。

$\{i\} \notin \mathcal{P}$ である場合 全単射性は易しいので、 $\psi(\text{star}(\mathbf{e}_i, \Sigma_{M, \mathcal{P}})) \subset \Sigma_{M_{\{i\}}, \mathcal{P}_{\{i\}}}$ が成り立つことのみを示す。 $\{i\} < \emptyset$ が \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たすので、命題 2.5 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ ($I < \mathcal{F}$ は \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たす) が \mathbf{e}_i を含むことは、 $i \in I$ であることと同値である。よって $\mathcal{P}_{\{i\}}$ の旗 $\{F \setminus \{i\} \mid F \in \mathcal{F}\}$ を \mathcal{G} と置くと、 $\psi(\bar{\sigma}_{I<\mathcal{F}}) = \sigma_{(I \setminus \{i\}) < \mathcal{G}}$ であり、後者は $\Sigma_{M_{\{i\}}, \mathcal{P}_{\{i\}}}$ に属す。

$\{i\} \in \mathcal{P}$ である場合 全単射性は易しいので、 $\psi(\text{star}(\mathbf{e}_i, \Sigma_{M, \mathcal{P}})) \subset \Sigma_{M_{\{i\}}, \mathcal{P}_{\{i\}}}$ が成り立つことのみを示す。 \mathcal{P} が順序フィルターであることから、 $\{i\}$ を含む $\mathcal{P}(M)$ のフラットはすべて \mathcal{P} に属す。ゆえに $\mathcal{P}_{\{i\}} = \mathcal{P}(M_{\{i\}})$ が成り立つ (つまり $\mathcal{P}_{\{i\}}$ はすべての $M_{\{i\}}$ の非空狭義フラットからなる)。また $\emptyset < \{i\}$ が \mathcal{P} のバークマン扇条件を満たすので、命題 2.5 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ が \mathbf{e}_i を含むことは、 $\{i\} \in \mathcal{F}$ であることと同値であり、後者は $\min \mathcal{F} = \{i\}$ であることと同値である。またこのとき $I = \emptyset$ である。 $\mathcal{P}_{\{i\}}$ の旗 $\{F \setminus \{i\} \mid F \in \mathcal{F} \setminus \{\{i\}\}\}$ を \mathcal{G} と置くと、 $\psi(\bar{\sigma}_{\emptyset<\mathcal{F}}) = \sigma_{\emptyset<\mathcal{G}}$ が成立し、後者は扇 $\Sigma_{M_{\{i\}}, \mathcal{P}_{\{i\}}} = \Sigma_{M_{\{i\}}}$ に属す。 ■

参考文献

- [AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. “Hodge theory for combinatorial geometries”. In: **Ann. of Math. (2)** **188.2** (2018), pp. 381–452.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. **Toric varieties**. **124**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, pp. xxiv+841.