Hartshorne Exercise II

2025 年 12 月 5 日 0 時 24 分更新

本文書は，修士課程在学中に取り組んだ Algebraic Geometry (Hartshorne, 1977) の演習問題 TEX を復元することと，TEX 作成の基礎鍛錬を意図したものです。

目　　次

4 節

演習 4.2　S を概型とし，S 上の被約概型 X と S 上の分離的概型 Y を考える。このとき，二つの S 上の射 $f, g\colon X \to Y$ が，X の稠密開集合 U 上で等しいとき，$f = g$ であることを示せ。また次の二つの場合で，この結果が成立しない例を与えよ。(a) X が被約でない。(b) Y が分離的でない。

証明　まず f と g が位相空間の連続写像として等しいことを示す。f, g が S 上の射であるので，ファイバー積の普遍性から図式

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& Y \times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
\tag{4.1}
$$

（p_1 と p_2 はファイバー積の射影を表す。）

の可換性を満足する射 $\langle f, g\rangle\colon X \to Y \times_S Y$ が一意的に存在する。f と g が U 上で等しいことは，包含 $\iota\colon U \hookrightarrow X$ に対して $f \circ \iota = g \circ \iota$ が成立することを意味し，$\Delta\colon Y \to Y \times_S Y$

を対角射とするとき，二つの図式

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "\langle f,g\rangle\circ\iota"] \arrow[drr, bend left, "g\circ\iota"] \arrow[ddr, bend right, "f\circ\iota"'] & & \\
& Y\times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "\Delta\circ f\circ\iota"] \arrow[drr, bend left, "g\circ\iota"] \arrow[ddr, bend right, "f\circ\iota"'] & & \\
& Y\times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

がどちらも可換であるから，ファイバー積の普遍性より

$$\langle f,g\rangle\circ\iota=\Delta\circ f\circ\iota=\Delta\circ g\circ\iota \tag{4.2}$$

が成立する。よって集合として，

$$
\begin{aligned}
\langle f,g\rangle(X)&=\langle f,g\rangle(U^{-}) && (\because U\text{ が稠密部分集合なので。})\\
&=(\Delta\circ f)(U^{-}) && (\because (4.2)\text{ より。})\\
&\subset(\Delta\circ f)(U)^{-} && (\because \Delta\circ f\text{ の連続性より。})\\
&=\Delta(f(U))^{-} && \\
&\subset\Delta(Y) && (\because Y\text{ が分離的で，}\Delta(Y)\text{ が閉集合であるので。})
\end{aligned}
$$

となる。勝手な点 $P\in X$ に対し，

$$
\begin{aligned}
f(P)&=(p_1\circ\langle f,g\rangle)(P) && (\because (4.1)\text{ の可換性より。})\\
&=p_1(\langle f,g\rangle(P)) && \\
&=p_2(\langle f,g\rangle(P)) && (\because \langle f,g\rangle(P)\in\Delta(Y)\text{ なので。})\\
&=g(P)
\end{aligned}
$$

と計算でき，f と g が位相空間の連続写像として等しいことがわかった。特に $f_*\mathscr{O}_X=g_*\mathscr{O}_X$ である。

次に構造層の射 $f^{\#},g^{\#}\colon\mathscr{O}_Y\to f_*\mathscr{O}_X$ が等しいことを示す。X の点 P を勝手に固定し，$f(P)$ のアフィン開近傍 W を取って，$f^{-1}(W)$ を V と置き，制限によって得られる連続写像を $f'=g'\colon V\to W$ と置く。制限 $f^{\#}|_W,g^{\#}|_W\colon\mathscr{O}_W\to f'_*\mathscr{O}_V$ が等しいことを示す。W がアフィン概型であるので，演習 2.4 から大域切断の環準同型 $\Gamma(W,f^{\#}),\Gamma(W,g^{\#})\colon\Gamma(W,\mathscr{O}_Y)\to\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$ で $f^{\#}|_W$ と $g^{\#}|_W$ が決定されるので，$\Gamma(W,f^{\#})=\Gamma(W,g^{\#})$ の成立を示せばよい。元 $a\in\Gamma(W,\mathscr{O}_Y)$ を勝手に取り，$f^{\#}(a)$—$g^{\#}(a)$ を b と置き，$b=0$ となることを見る。U が X の稠密部分集合なので，$U\cap V\neq\varnothing$ であ

り，$f|_U = g|_U$ であるので，勝手な点 $Q \in U \cap V$ に対して $f^\#_Q = g^\#_Q$ が成立し，

$$b_Q = f^\#_Q(a_{f(Q)}) - g^\#_Q(a_{f(Q)}) = 0$$

であることが分かる。部分集合 $V_b = \{\, Q \in V : b_Q \notin \mathfrak{m}_Q \,\}$ は演習 2.16 (a) より開集合で，上の計算より $V_b \cap (U \cap V) = \varnothing$ であるのに対し，$U \cap V$ が V の稠密部分集合であるから，$V_b = \varnothing$ である。したがって演習 2.18 (a) と演習 2.16 (a) より，V の勝手なアフィン開集合 Z において制限 $b|_Z$ が冪零元で，X が被約であるから $b|_Z = 0$ であり，$b = 0$ がわかった。ゆえに $f^\#|_W = g^\#|_W$ である。もしアフィン開近傍 $W \subset Y$ が $f(X) \cap W = \varnothing$ を満足するならば，$f^\#|_W$ と $g^\#|_W$ が零環の層への射となるから等しい。以上から，Y のアフィン開被覆上で $f^\#$ と $g^\#$ が等しく，$f^\# = g^\#$ であることが示された。　　　　証明終

(a) の例　k を代数閉体，$S = \operatorname{Spec} k$ として，$\operatorname{Spec} k$ 上の概型 $\operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2, xy)$ を X と Y とすると，アフィン概型なので $\operatorname{Spec} k$ 上分離的，かつ X 上で $x \neq 0$, $x^2 = 0$ なので被約でない。また $k[x,y]$ のイデアルとして $\sqrt{(x^2, xy)} = (x)$ であるから，ヒルベルト零点定理より

$$\operatorname{sp}(X) = \operatorname{sp}(Y) = \{\, (x, y - b) : b \in k \,\} \cup \{\, (x) \,\}$$

である。k 代数の準同型 $\phi\colon k[x,y]/(x^2, xy) \to k[x,y]/(x^2, xy)$ を，$x \mapsto 0$ と $y \mapsto y$ で定まるものとして定め，ϕ が定めるアフィン概型の射を f，恒等射を g とすると，位相空間の連続写像として $f = g$ である。なんとなれば，

閉点について　$y - b \in \phi^{-1}((x, y - b))$ なので $\phi^{-1}((x, y-b)) = (x, y - b)$ である。

生成点について　勝手な元 $b \in k$ に対して $y - b \notin \phi^{-1}((x))$ なので，$\phi^{-1}((x)) = (x)$ である。

となるからである。開集合 $U = X \setminus \{\, (x, y) \,\}$ を考える。元 $\frac{F(x,y)}{G(x,y)} \in \bigl(k[x,y]/(x^2, xy)\bigr)_{\mathfrak{p}}$ を勝手に取るとき，$yF(x,y)$ と $yG(x,y)$ は y のみで表せ，ϕ は y を y に写すので，

$$\phi_{\mathfrak{p}}\Bigl(\frac{F(x,y)}{G(x,y)}\Bigr) = \phi_{\mathfrak{p}}\Bigl(\frac{yF(x,y)}{yG(x,y)}\Bigr) = \frac{\phi(yF(x,y))}{\phi(yG(x,y))} = \frac{yF(x,y)}{yG(x,y)} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)}$$

となり，$\phi_{\mathfrak{p}}$ が恒等写像であることが分かる。ゆえに $f^\#|_U\colon \mathscr{O}_X|_U \to \mathscr{O}_X|_U$ と $g^\#|_U\colon \mathscr{O}_X|_U \to \mathscr{O}_X|_U$ が等しく，概型の射として $f|_U = g|_U$ である。他方，閉点 $\mathfrak{m} = (x, y)$ に対して

$$\phi_{\mathfrak{m}}\Bigl(\frac{x}{1}\Bigr) = \frac{0}{1} \neq \frac{x}{1}$$

であるから $f_{\mathfrak{m}} \neq g_{\mathfrak{m}}$ がわかり，概型の射として $f \neq g$ である。　　　　証明終

(b) の例　k を体として，X を $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$，$Y$ を二重原点を持つアイフィン直線とする。このとき，貼り合わせによって付随する相異なる射 $f, g\colon X \to Y$ があって，$U = X \setminus \{\, (x) \,\}$ とするとき $f|_U = g|_U$ である。　　　　証明終

演習 4.4　ネーター概型 S 上の有限型分離的概型 X, Y と，その間の射 $f\colon X \to Y$ を考える。このとき，S 上固有な閉部分概型 Z に対し，$f(Z)$ が Y の閉集合で，$f(Z)$ を f の概型論的像と考えるとき，$f(Z)$ が S 上固有であることを示せ。

補題 (グラフ射は対角射の底変換)　概型 S 上の射 $f\colon X \to Y$ と恒等射 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\Gamma_f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

（p_1 と p_2 はファイバー積の射影を表す。）

の可換性を満足する射 $\Gamma_f\colon X \to X \times_S Y$ が一意的に存在し，**グラフ射**と呼ぶ。同様に，図式

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[dr, dashed, "f \times \mathrm{id}_Y"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_Y \circ p_2"] \arrow[ddr, bend right, "f \circ p_1"'] & & \\ & Y \times_S Y \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & Y \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

（q_1 と q_2 はファイバー積の射影を表す。）

の可換性を満足する射 $\mathrm{id}_Y \times f$ が一意的に存在する。このとき Γ_f は，$f \times \mathrm{id}_Y$ による対角射 $\Delta\colon Y \to Y \times_S Y$ の底変換である。

証明　まず次の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d, "f"'] & X \times_S Y \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "\Delta"'] & Y \times_S Y \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

が可換であることを，ファイバー積 $(Y \times_S Y, q_1, q_2)$ の普遍性を用いて示す。つまり図式

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & Y \times_S Y \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

の破線の射の箇所に $\Delta \circ f$ と $(f \times \mathrm{id}_Y) \circ \Gamma_f$ を代入して，図式の可換性が満足されることを示す。$\Delta \circ f$ について計算すると，

$$q_1 \circ (\Delta \circ f) = (q_1 \circ \Delta) \circ f = \mathrm{id}_Y \circ f = f,$$

$$q_2 \circ (\Delta \circ f) = \cdots = f$$

となるので可換性を満足し，$(f \times \mathrm{id}_Y) \circ \Gamma_f$ についても

$$\begin{aligned} q_1 \circ ((f \times \mathrm{id}_Y) \circ \Gamma_f) &= (q_1 \circ (f \times \mathrm{id}_Y)) \circ \Gamma_f = f \circ p_1 \circ \Gamma_f = f \circ \mathrm{id}_X = f, \\ q_2 \circ ((f \times \mathrm{id}_Y) \circ \Gamma_f) &= (q_2 \circ (f \times \mathrm{id}_Y)) \circ \Gamma_f = p_2 \circ \Gamma_f = f \end{aligned}$$

となるので可換性を満足する。ゆえに図式 (4.3) は可換である。この可換図式がファイバー積の普遍性を満足することを示して証明を終える。可換図式

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "z_1"'] & X \times_X Y \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "\Delta"'] & Y \times_S Y \end{tikzcd}$$

が与えられているとする。$p_1 \circ z_2 \colon Z \to X$ を h と置くと，図式

(4.4)
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "z_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "z_2"] & \\ Y & X \arrow[l, "f"] \arrow[r, "\Gamma_f"'] & X \times_S Y \end{tikzcd}$$

が可換である。なんとなれば，$f \circ h$ については

(4.5)
$$f \circ h = f \circ p_1 \circ z_2 = q_1 \circ (f \times \mathrm{id}_Y) \circ z_2 = q_1 \circ \Delta \circ z_1 = \mathrm{id}_Y \circ z_1 = z_1$$

と計算でき，$\Gamma_f \circ h$ については図式

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, shift right, "z_2"'] \arrow[d, shift left, "\Gamma_f \circ h"] \arrow[dr, "z_1"] & \\ X & X \times_S Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

が計算

$$\begin{aligned} p_1 \circ z_2 &= h, && (\because \text{定義。}) \\ p_2 \circ z_2 &= q_2 \circ (f \times \mathrm{id}_Y) \circ z_2 = q_2 \circ \Delta \circ z_1 = \mathrm{id}_X \circ z_1 = z_1, \\ p_1 \circ (\Gamma_f \circ h) &= \mathrm{id}_X \circ h = h, \\ p_2 \circ (\Gamma_f \circ h) &= f \circ h = z_1 && (\because \text{(4.5) より。}) \end{aligned}$$

により可換なので，ファイバー積の普遍性から $\Gamma_f \circ h = z_2$ である。最後に，他に可換図式

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "z_1"'] \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, "z_2"] & \\ Y & X \arrow[l, "f"] \arrow[r, "\Gamma_f"'] & X \times_S Y \end{tikzcd}$$

が与えられているとすると，

$$h = p_1 \circ z_2 = p_1 \circ \Gamma_f \circ h' = \mathrm{id}_X \circ h' = h'$$

となるので，図式 (4.4) を可換にする h は一意的である。 証明終

補題 (全射な射は底変換で不変)　概型の射 $f\colon X \to Y$ が位相空間の連続写像として全射であるとき，**全射な射**と呼ぶ。全射な射は底変換で不変である。より正確にいうと，全射な射 $f\colon X \to Y$ と概型の射 $g\colon Y' \to Y$ に対し，底変換 $f'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ は全射である。

証明　勝手な点 $y' \in Y'$ に対し，$f'^{-1}(y') \neq \varnothing$ が成り立つことを示せば良い。演習 3.10(a) と底変換が推移的であることから，位相空間の同相

$$f'^{-1}(y') \underset{3.10\,(a)}{\cong} \mathrm{sp}\left((X \times_Y Y')_{k(y')}\right) = \mathrm{sp}\left((X \times_Y Y') \times_{Y'} \operatorname{Spec} k(y')\right) \cong \mathrm{sp}(X \times_Y \operatorname{Spec} k(y'))$$

があるので，$X \times_Y \operatorname{Spec} k(y') \neq \varnothing$ であることを示せば良い。底変換の推移性をさらに用いると，概型として

$$X \times_Y \operatorname{Spec} k(y') \cong \Big(X \times_Y \operatorname{Spec} k(g(y'))\Big) \times_{\operatorname{Spec} k(g(y'))} \operatorname{Spec} k(y') = X_{k(g(y'))} \times_{k(g(y'))} \operatorname{Spec} k(y')$$

であり，演習 3.10(a) より $f^{-1}(g(y')) \cong \mathrm{sp}(X_{g(y')})$ で，f の全射性よりこの空間が空でないことが分かる。ゆえに空でないアフィン開集合 $U \subset X_{g(y')}$ を取れ，$U \times_{k(g(y'))} \operatorname{Spec} k(y')$ が空でないことを示せば証明が終わる。U と同型なアフィン概型 $\operatorname{Spec} A$ を取るとき，A が零でない $k(g(y'))$ 代数かつ $U \times_{k(g(y'))} \operatorname{Spec} k(y') \cong \operatorname{Spec}\left(A \otimes_{k(g(y'))} k(y')\right)$ で，$A \otimes_{k(g(y'))} k(y')$ が体 $k(y')$ を包含するので，特に零環でない。ゆえに $A \otimes_{k(g(y'))} k(y')$ が極大イデアルを持ち，$\operatorname{Spec}\left(A \otimes_{k(g(y'))} k(y')\right)$ が点を少なくとも一つ点を持つことが分かる。
証明終

演習 4.4 の証明 証明終