阿弥陀籤のあれこれ

2025 年 3 月 25 日 2 時 14 分更新

この紙では阿弥陀籤（あみだくじ）を引くと必ず下まで辿り着くことを示す。まずは阿弥陀籤を行うための土台を用意しよう。ここでは単純無向グラフを用いる。

定義 1 単純無向グラフ X とは，V_X と E_X の二つの集合と像が必ず二元集合になる写像 $\mathrm{inc}_X\colon E_X \to 2^{V_X}$ の組 $(V_X, E_X, \mathrm{inc}_X)$ のことをいう。V を X の**頂点集合**，E を X の**辺集合**，inc_X を X の**隣接写像**と呼ぶ。X の二つの頂点 v, w が $\{v, w\} \in \mathrm{inc}_X(E_X)$ を満たすとき，v と w は**隣接する**という。

定義 2 n と m を正整数とする。次の 5 条件を満たす単純無向グラフ X を**阿弥陀籤**と呼ぶ。

(a) V_X は $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m+1\}$ でラベル付けされている。$(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m+1\}$ に対応する頂点を $v_{i.j}$ と書くことにする。

(b) 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $v_{i,j}$ と $v_{i,k}$ が隣接するのは $j = k + 1$ のときかつそのときに限る。

(c) 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $v_{i,0}$ は $v_{i,1}$ としか隣接しない。

(d) 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $v_{i,m+1}$ は $v_{i,m}$ としか隣接しない。

(e) 各頂点の次数は 3 以下である。ここで頂点 v の**次数**とは $\#\{e \in E_X \mid v \in \mathrm{inc}_X(e)\}$ のことをいう。

阿弥陀籤の辺 e の端点 $v_{i,k}$ と $v_{j,l}$ が $i \neq j$ となるとき e を **橋** と呼ぶ。

定義 3 阿弥陀籤 X を考える。$v_{i,j}$ に対して $v_{i,j+1}, v_{i,j+2}, \dots, v_{i,j+k}, \dots$ と数えていき，$v_{i,j+k}$ の次数が 3 となるような最初の頂点を $t(v_{i,j})$ と書くことにする。そのような番号がなければ $t(v_{i,j}) = v_{i,m+1}$ とする。番号 $s \in \{1, \dots, n\}$ に対して以下の操作を考えて，各 i に関し w_i と w_{i+1} が隣り合うような頂点の列 $K_s = (w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots)$ を構成することを考える。

手順 1 $w_0 = v_{s,0}$ と置き $t(w_0) = v_{s,n_1}$ となる番号 n_1 を取り $w_1 = v_{s,1}, w_2 = v_{s,2}, \dots, w_{n_1} = v_{s,n_1}$ と決定する。$n_1 = m + 1$ であれば K_s を w_{n_1} で打ち止めにする。そうでなければ次の手順 2 に移る。

手順 2 w_{n_1+1} を w_{n_1} と橋によって隣接する頂点と置き，w_{n_1+1} に対して手順 1 のようにして

$w_{n_1+2}, \dots, w_{(n_1+1)+n_2}$ を決定していく。

K_s を X **における** s **番目の籤引き**と呼ぶ。

例 4 図 1 は阿弥陀籤の例である。この阿弥陀籤の籤引きは

$$K_1 = (v_{1,0}, v_{1,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}),$$
$$K_2 = (v_{2,0}, v_{2,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{3,4}),$$
$$K_3 = (v_{3,0}, v_{3,1}, v_{2,3}, v_{2,4})$$

である。

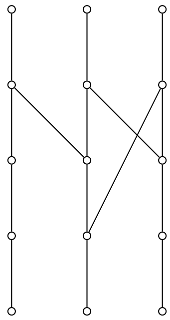

図 1　$n = 3,\ m = 3$ の阿弥陀籤の例

命題 5 阿弥陀籤 X と番号 s に対しその籤引き K_s は有限列である。

証明 背理法による。X が無限列であったとすると (v_a, v_{a+1}) がそれ以降の番号 b において (v_b, b_{c+1}) と一致するような a が存在する。c をこのようなことが成立する最小の番号とし，$v_c = v_{c+k}$ かつ $v_{c+1} = v_{c+k+1}$ となる番号 k を取る。すると阿弥陀籤の構成法から $c > 1$ であり

$$K_s = (v_0, v_1, \dots, v_{c-1}, v_c, v_{c+1}, \dots, v_{c+k-1}, v_c, v_{c+1}, \dots, v_{c+k-1}, v_c, \dots)$$

と表すことができる。阿弥陀籤の構成から $v_{c-1} \neq v_{c+1}$，c の最小性から $v_{c-1} \neq v_{c+k-1}$ であり v_c の次数は 3 である。ところが v_{c-1} と v_c が橋で結ばれているなら $v_{c+1} = v_{c-1}$ となり矛盾し，そうでないとすると $v_{c-1} = v_{c+k-1}$ となり矛盾する。ゆえに K_s は有限列でなければならない。　∎

注意 6 $w_0 = v_{s,j},\ j \in \{1, \dots, m\}$ から手順 1 と手順 2 に従って列 K を構成するとき，K が無限列になる場合がある。図 2 の阿弥陀籤について，$w_0 = v_{1,1}$ として列 K を構成すると

$$K = (v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{1,1}, \dots)$$

のように循環する列になる。この例では命題 5 の証明において $c = 0$ となることに注意する。

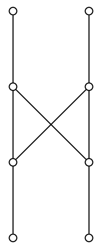

図 2　反例のための阿弥陀籤