モジュラー形式に関する書き留め

2026 年 2 月 16 日 2 時 17 分更新

　Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

目　次

1　特殊線形群と上半平面 ・・・・・・ 1

2　モジュラー関数 ・・・・・・ 4

3　アイゼンシュタイン級数 ・・・・・・ 8

4　基本領域 ・・・・・・ 16

5　釣り合い公式 ・・・・・・ 19

6　ヘッケ作用素 ・・・・・・ 24

7　固有形式 ・・・・・・ 30

A　整数係数行列のエルミート標準形 ・・・・・・ 31

約束

1. 整数すべてがなす環を $\mathbb{Z}$，実数体を $\mathbb{R}$，複素数体を $\mathbb{C}$ で表す。
2. 虚数単位を i で表すことにする。
3. 複素数 z の実部を $\mathfrak{R}z$，虚部を $\mathfrak{I}z$ で表す。
4. 単位的可換環 R と正整数 n に対し，R 係数 n 次一般線形群を $\mathrm{GL}_n(R)$，特殊線形群を $\mathrm{SL}_n(R)$，特殊直交群を $\mathrm{SO}_n(R)$ で表す。
5. 二つの整数 m, n に対して，その最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表す。

1　特殊線形群と上半平面

定義 1.1　集合 $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{I}z > 0\}$ を $\mathbb{H}$ と置き，**上半平面**と呼ぶ。

命題 1.2　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対して定まる正則関数 $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ は

$$c \neq 0 \implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c$$
$$c = 0 \implies \gamma \cdot \infty = \infty$$

と拡張できる定数でない $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の有理型関数である。さらに関係 $(\gamma, z)\mapsto\gamma\cdot z$ によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ への作用が定まる。

証明　関数 $\gamma\cdot(-)\colon\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ が有理型であることについて　　$c=0$ のときは明らかであるから，$c\neq 0$ のときを考える。$\lim_{n\to\infty} z_n=-d/c$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，$\lim_{n\to\infty} cz_n+d=0$ かつ $\lim_{n\to\infty} az_n+b=-(ad-bc)/c\neq 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\gamma\cdot z_n=\infty$ である。ゆえに $\gamma\cdot(-)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型である。同様に $\lim_{n\to\infty} z_n=\infty$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，すべての n について $z_n\neq 0$ として良く，

$$\frac{az_n+b}{cz_n+d}=\frac{a+b/z_n}{c+d/z_n}\to\frac{a}{c}\qquad(n\to\infty)$$

であるから $\gamma\cdot(-)$ は $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の有理型関数である。

関係 $(\gamma, z)\mapsto\gamma\cdot z$ が群作用であることについて　　$\gamma=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ のとき $\gamma\cdot z=\frac{z+0}{0+1}=z$ であるので, 後は結合律を見れば良い。元 $\gamma,\gamma'\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を勝手に取り, $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma'=\left(\begin{smallmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{smallmatrix}\right)$ と表すとき,

$$\gamma'\cdot\gamma=\begin{pmatrix}aa'+b'c & a'b+b'd\\ ac'+cd' & bc'+dd'\end{pmatrix}$$

である。正則関数 $\gamma'=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ の定義域を $U(\subset\mathbb{C})$ とすると，連続性から，$\gamma(V)\subset U$ となる開集合 $V\subset\mathbb{C}$ を取れる。勝手な複素数 $z\in\mathbb{V}$ に対して,

$$\begin{aligned}\gamma'\cdot(\gamma\cdot z)&=\gamma'\cdot\frac{az+b}{cz+d}\\&=\frac{(\frac{az+b}{cz+d})a'+b'}{(\frac{az+b}{cz+d})c'+d'}\\&=\frac{(az+b)a'+b'(cz+d)}{(az+b)c'+d'(cz+d)}&&\text{(分母を払った)}\\&=\frac{(aa'+b'c)z+(a'b+b'd)}{(ac'+cd')z+(bc'+dd')}&&\text{(分母分子を } z \text{ についてまとめた)}\\&=(\gamma'\cdot\gamma)\cdot z\end{aligned}$$

と計算でき，一致の定理から $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の関数として $\gamma'\cdot(\gamma\cdot(-))=(\gamma'\cdot\gamma)\cdot(-)$ であることが分かる。よって $(\gamma, z)\mapsto\gamma\cdot z$ が群作用であることが確かめられた。　　証明終

命題 1.3　元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と複素数 z（$c\neq 0$ のとき $z\neq -d/c$ を課す）に対して,

$$\Im(\gamma\cdot z)=\det(\gamma)\frac{\Im z}{|cz+d|^2}\tag{1.1}$$

が成立する。

証明　複素数 z の共役を $\bar{z}$ で表すことにする。このとき

$$\begin{aligned}
2i\Im(\gamma\cdot z) &= \gamma\cdot z - \overline{\gamma\cdot z} && \because \text{定義}\\
&= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} && \because a,b,c,d\in\mathbb{R}\ \text{なので}\\
&= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)-(cz+d)(a\bar{z}+b)}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}\\
&= \det(\gamma)\frac{2i\Im z}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

と計算でき，この計算結果を $2i$ で割れば目的の等式を得る。　証明終

系 1.4　関係 $(\gamma, z)\mapsto \gamma\cdot z$ によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{H}$ に作用する。

証明　$\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，$z\in\mathbb{H}$ のとき $\det(\gamma)=1>0$ かつ $\Im z>0$ であるから，(1.1) より $\Im(\gamma\cdot z)>0$ であり，これは $\gamma\cdot z\in\mathbb{H}$ を意味する。　証明終

命題 1.5　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用は推移的である。

証明　複素数 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取り，$z=x+iy$，$x,y\in\mathbb{R}$ と表すと，$y>0$ であることに注意して，

$$\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}}\end{pmatrix}\cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x+iy = z$$

と計算できるので，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\cdot i=\mathbb{H}$ である。　証明終

命題 1.6　安定化部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と等しい。したがって関係 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\cdot\gamma\mapsto\gamma\cdot i$ は全単射写像 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{H}$ を定める。

証明　元 $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ を勝手に取り，$\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ と表すと，

$$\begin{aligned}
\gamma\cdot i = i &\iff \frac{ai+b}{ci+d} = i\\
&\iff b+ia = -c+id\\
&\iff a=d\ \text{かつ}\ c=-b\\
&\iff \gamma\ \text{が直交行列である}
\end{aligned}$$

となり，これは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i=\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ であることを意味する。　証明終

2 モジュラー関数

定義 2.1 (弱モジュラー関数)　k を整数とする。有理型関数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が**レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数**であるとは，勝手な元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$(\star)\qquad f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

が成立するときをいう。

命題 2.2　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f を考える。このとき勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して次の三つが成立する。

(1) $f(z) = (-1)^k f(z)$ が成り立つ。ゆえに f が恒等的に零でなければ，k は偶数でなければならない。
(2) $f(z+1) = f(z)$ が成り立つ。ゆえに f は周期的関数である。
(3) $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$ が成り立つ。

証明　**(1) について**　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

(2) について　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z+1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

(3) について　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z + 0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。　証明終

命題 2.3　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $q (= q(z)) = \exp(2\pi i z)$ と置く。このとき $z \in \mathbb{H}$ であるためには，$0 < |q| < 1$ であることが必要十分である。

証明　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)||\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \end{aligned}$$

$$= |\exp(-2\pi\Im z)|$$

であるから,

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi\Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。 証明終

穴あき単位円盤 $\{ q \in \mathbb{C} \colon 0 < |q| < 1 \}$ を $\mathbb{D}^*$ と置く。また実数 a に対して

$$\Omega_a = \{ w \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ a < \arg w < 2\pi + a \}$$
$$D_a = \{ z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a \}$$

として対数関数の分枝

$$L_a \colon \Omega_a \to D_a; \quad w \mapsto \log|w| + i\arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

命題 2.4 f を弱モジュラー関数とする。各点 $q \in \mathbb{D}^*$ に対して, $q \in \Omega_a$ を満足するような対数関数の分枝 $L_a \colon \Omega_a \to D_a$ を一つ取る。このとき複素数

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) \tag{2.1}$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数 $\widetilde{f}$ が定まる。また (2.1) を単に

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{\log q}{2\pi i}\Big)$$

と表す。

証明 $q \in \Omega_a$, $q \in \Omega_{a'}$ となる二つの分枝 $L_a, L_{a'}$ を取ると, 整数 n を用いて $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$ と表せるので,

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに $q \in \mathbb{D}^*$ であれば,

$$\exp\Big(2\pi i\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*, \qquad \exp\Big(2\pi i\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので, 命題 2.3 より $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$ である。命題 2.2 (2) より f が $f(z+1) = f(z)$ を満足する周期関数であるから, $q \in \mathbb{D}^*$ のとき,

$$f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big)$$

となり，(2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。$L_a(q)/2\pi i$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数，f も $\mathbb{H}$ 上の有理型関数であるから，これら関数の合成である $\widetilde{f}$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数である。$\bigcup_{a>0}(\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$ であるから，$\widetilde{f}$ が $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数であることが分かった。　証明終

定義 2.5　f を弱モジュラー関数とする。

(1) $\widetilde{f}$ が 0 で有理型であるとき，f が ∞ **で有理型**という。

(2) $\widetilde{f}$ が 0 で正則であるとき，f が ∞ **で正則**という。

$\widetilde{f}$ が 0 で有理型のとき，ローラン展開

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ，$q = q(z) = \exp(2\pi iz)$ のとき，虚部が十分大きい点 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$f(z) = f\Big(\frac{\log \exp(2\pi iz)}{2\pi i}\Big) = \widetilde{f}(\exp(2\pi iz)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

となり，f のフーリエ展開を与える。複素数列 $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$ を f の**フーリエ係数**と呼ぶ。また f が ∞ で正則であれば，$N = 0$ とできる。

定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式)　$f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数とする。

(1) f が ∞ で有理型のとき，f を**レベル 1 荷重 k のモジュラー関数**と呼ぶ。

(2) f が $\mathbb{H}$ 上の正則関数で，かつ ∞ で正則のとき，f を**レベル 1 荷重 k のモジュラー形式**と呼ぶ。

(3) モジュラー形式 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ の q **展開**とは，$\widetilde{f}$ のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2ni\pi z}$$

のことをいう。さらに $a(0) = 0$ のとき f を**尖点形式**という。

命題 2.7　k を整数とし，集合 M_k, S_k を

$$M_k = \{\, f : f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である} \,\}$$
$$S_k = \{\, f : f \text{ は 1 荷重 } k \text{ の尖点形式である} \,\}$$

で定める。このとき M_k と S_k は $\mathbb{C}$ 線形空間である。

証明　M_k が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式 $f, g \in M_k$ を勝手に取るとき，正則関数の和は正則関数であるから，$f+g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ と $\widetilde{f} + \widetilde{g}\colon \mathbb{D}^* \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ であるから，$(f+g)^{\sim}\colon \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ は正則関数であ

る。あとは $f+g$ が $(\star)$ を満足することを示せば，$f+g\in M_k$ であることが分かる。元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\gamma\cdot z)&=f(\gamma\cdot z)+g(\gamma\cdot z)\\
&=(cz+d)^k f(z)+(cz+d)^k g(z)\\
&=(cz+d)^k(f+g)(z)
\end{aligned}
$$

と計算でき，$(\star)$ を $f+g$ が満足することが確かめられ，$f+g\in M_k$ である。M_k がスカラー倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手な尖点形式 $f,g\in S_k$ に対して，$(f+g)^{\sim}=\widetilde{f}+\widetilde{g}$ が成立することから，S_k が $\mathbb{C}$ 線形空間であることも従う。

証明終

命題 2.8　整数 k,l とモジュラー形式 $f\in M_k, g\in M_l$ に対し，$fg\in M_{k+l}$ が成立する。また f が尖点形式のとき fg も尖点形式である。

証明　正則関数の積は正則関数であるから，$fg\colon\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ と $\widetilde{f}\widetilde{g}\colon\mathbb{D}^*\to\mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(fg)^{\sim}=\widetilde{f}\widetilde{g}$ であるから，$(fg)^{\sim}$ も正則関数である。あとは fg が $(\star)$ を満足することを示せばよく，元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$
\begin{aligned}
(fg)(\gamma\cdot z)&=(cz+d)^k f(z)(cz+d)^l g(z)\\
&=(cz+d)^{k+l}(fg)(z)
\end{aligned}
$$

と計算できるので，$fg\in M_{k+l}$ であることが確かめられた。また f が尖点形式のとき，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(q)&=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n\\
\widetilde{g}(q)&=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)q^n
\end{aligned}
$$

とローラン展開すると，

$$
(fg)^{\sim}(q)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)q^n,\qquad c(n)=\sum_{m=0}^{n}a(m)b(n-m)
$$

であるから, 特に $c(0)=a(0)b(0)=0$ で, fg は尖点形式であることが分かる。　証明終

3 アイゼンシュタイン級数

定義 3.1 k を 3 以上の整数とする。各複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して，級数

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 : \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

を定め，$G_k(z)$ を**アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

補題 3.2 K を $\mathbb{H}$ の有界閉集合とする。このとき勝手な点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leqq |mz+n| \tag{3.1}$$

が成立するような正数 C が存在する。

証明 $C_1 = \min\{\Im z : z \in K\}$，$C_2 = \max\{|\Re z| : z \in K\}$ と置く。

点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を勝手に取り，$z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）と表すと，

$$|mz+n| = |(mx+n) + imy| = \sqrt{(mx+n)^2 + (my)^2}$$

となる。$C_2 = 0$ であれば常に $x = 0$ で，$|mz+n| \geqq |mx+n| = |n|$ かつ $|mz+n| \geqq y|m| \geqq C_1|m|$ であるから，$C = \min\{1, C_1\}$ が (3.5) を満足する正数である。$C_2 \neq 0$ の場合を考える。前述の議論と同じく $|m|$ については $|mz+n| \geqq C_1|m|$ である。$|n|$ について，$|m| \geqq |n|/(2C_2)$ のとき

$$|mz+n| \geqq C_1|m| \geqq \frac{C_1}{2C_2}|n| \tag{3.2}$$

となり，そうでないとき $n \neq 0$ かつ $|m/n| < 1/(2C_2)$ となり，常に $|m/n||x| \leqq 1/2$ で，

$$|mx+n| = \left|n\left(\frac{m}{n}x + 1\right)\right| \geqq |n|\left(1 - \left|\frac{m}{n}\right||x|\right) \geqq \frac{1}{2}|n| \tag{3.3}$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると，$C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$ が (3.5) を満足する正数である。 証明終

定理 3.3 $k \geqq 3$ のとき G_k は $\mathbb{H}$ 上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

証明 K を $\mathbb{H}$ の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より，勝手な点 $z \in K$ と勝手な元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leqq |mz+n|$$

となるような正数 C が存在し，

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 :\\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{|mz+n|^k} \leqq \frac{1}{C^k} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 :\\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\max\{|m|,|n|\}^k}$$

であるから，右辺の級数の収束を示せば，G_k が K 上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数 N に対して $\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 : \max\{|m|,|n|\}=N\}$ の個数を数える。$|m|>|n|$ のものを数えると，$m=\pm N$ で，$n=-N+1, -N+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1$ の $2(2N-1)$ 個ある。同様に $|n|<|m|$ のものも $2(2N-1)$ 個ある。$|m|=|n|$ のものは，$(N,N), (N,-N), (-N,N), (-N,-N)$ の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は $8N$ 個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 :\\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\max\{|m|,|n|\}^k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8N}{N^k} = 8\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{k-1}}$$

であり，いま $k \geqq 3$ であるからこの正項級数は収束する。以上で，G_k が $\mathbb{H}$ 上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式 $mz+n$ は $\mathbb{H}$ 上で常に零でないから，有理多項式 $1/(mz+n)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり，G_k の収束先が正則関数であることも分かる。　証明終

定理 3.4　$k \geqq 3$ のとき正則関数 $G_k\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C}$ はレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取る。γ が全単射写像 $\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ を誘導することに注意すると，

$$\begin{aligned}
G_k(\gamma\cdot z) &= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 :\\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m(\gamma\cdot z)+n)^k} \\
&= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 :\\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{(cz+d)^k}{(m(az+b)+n(cz+d))^k} && \because \text{分母を払った} \\
&= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 :\\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{(cz+d)^k}{((ma+nc)z+(mb+nd))^k} \\
&= \sum_{\substack{(m',n') :\\ (m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\},\ \left(\begin{smallmatrix} m' \\ n' \end{smallmatrix}\right)=\gamma\left(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right)}} \frac{(cz+d)^k}{(m'z+n')^k} \\
&= (cz+d)^k \sum_{\substack{(m',n')\in\mathbb{Z}^2 :\\ (m',n')\neq(0,0)}} \frac{1}{(m'z+n')^k} && \because \gamma\text{ の全単射性より}
\end{aligned}$$

$$= (cz+d)^k G_k(z)$$

となり，G_k が $(\star)$ を満足することが確かめられた。　証明終

系 3.5　k が 3 以上の奇数のとき $\mathbb{H}$ 上で $G_k(z) = 0$ である。

証明　定理 3.4 より G_k が荷重 k の弱モジュラー関数であるから，命題 2.2 (1) より G_k は $\mathbb{H}$ 上の零関数である。　証明終

さらに弱モジュラー関数 G_k はモジュラー形式である。

定理 3.6　$k \geqq 3$ のとき G_k は ∞ で正則である。つまり G_k はモジュラー形式である。

この定理の証明のために，ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて G_k の q 展開を表示する。

定義 3.7　(1) 1 より大きい実数 s に対して，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数 ζ を定め，**ゼータ関数**と呼ぶ。

(2) 正整数 n と実数 l に対して，

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d>0,\ d|n}} d^l$$

として関数 σ_l を定め，**約数関数**と呼ぶ。

(3) 原点周りの $\mathbb{D}^*$ 上の正則関数 $z/(e^z - 1)$ のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数 B_k を**ベルヌーイ数**と呼ぶ。

補題 3.8 (オイラーの等式)　正の偶数 k に対して，

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^k B_k}{k!} \tag{3.4}$$

が成立する。

証明　三角関数の公式

$$\pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{3.5}$$

を用いる[1)]。(3.5) の左辺に z を掛けたものを計算すると，$z \in \mathbb{H}$ のとき

$$\pi z\cot(\pi z) = \pi z\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \qquad \because \cot \text{ の定義}$$

1）　証明は，例えばヘルグロッツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$
\begin{aligned}
&= \pi z \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\
&= \pi iz \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi z)^k && \because z \in \mathbb{H} \text{ なので，命題 2.3 から } e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので}
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

となる。次に (3.5) の右辺に z を掛けたものを計算すると，

$$
\begin{aligned}
z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} &= 1 + z \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} \right) \\
&= 1 + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} && \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2}{n^2 - z^2} && \because z \text{ を総和の中に入れ，符号を調整した} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \frac{1}{1 - (\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{n^{2l}} && \because \frac{1}{1-z} \text{ の原点におけるテイラー展開} \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty} 2z^{2(l+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(l+1)}} && \because \text{和を交換した} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2z^{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2l}} && \because \text{添字 } l \text{ を 1 ずらした} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2\zeta(2l) z^{2l}
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく，2 以上の偶数 $k = 2l$ に関する z^k の係数を比較することで，目的の等式

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。 証明終

補題 3.9 正の偶数 k に対して，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n \tag{3.8}$$

が成立する。

証明　上述の補題と同様に三角関数の公式

$$\pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{3.9}$$

を用いる。(3.9) の左辺を書き直すと，

$$\begin{aligned}
\pi\cot(\pi z) &= \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{ の定義} \\
&= \pi\frac{(e^{\pi iz}+e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz}-e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos,\ \sin \text{ の定義} \\
&= \pi i\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1} \\
&= \pi i + \pi i\frac{2}{q-1} && \because q = e^{2\pi iz} \text{ と置いているので} \\
&= \pi i - 2\pi i\frac{1}{1-q} \\
&= \pi i - 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty} q^n && \because \frac{1}{1-q} \text{ の原点におけるテーラー展開}
\end{aligned}$$

となるので，$n \geqq 1$ のとき $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}q^n = (2\pi in)^{k-1}q^n$ であることに注意して，(3.9) の両辺を z について $(k-1)$ 階微分すると，

$$-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n = (-1)^{k-1}(k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}$$

となり，両辺を $(k-1)!$ で割ると，いま k が偶数であるから $(-1)^{k-1} = -1$ なので，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n$$

となる。また (3.4) から

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} = -\zeta(k)\frac{2k}{B_k}$$

であるから，目的の等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k)\frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n$$

を得られる。　　　　証明終

定理 3.10　4 以上の偶数 k に対して，G_k の q 展開が

$$G_k(z) = 2\zeta(k)\Big(1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n\Big) \tag{3.10}$$

と表される。

証明　$G_k(z)$ を計算していくと，

$$
\begin{aligned}
G_k(z) =& \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\ (m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
=& \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^k}}_{m=0\text{ の項}} \\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}\Big) \\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(-mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-mz-n)^k}\Big) \\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} \\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}\Big) \\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}\Big) && \because k\text{ が偶数なので} \\
=& 2\zeta(k)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k} \\
=& 2\zeta(k)+2\sum_{m=1}^{\infty}\Big(-\zeta(k)\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}(e^{2\pi imz})^n\Big) && \because (3.8)\text{ を用いた} \\
=& 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q^{mn}\Big) && \because q^{mn}=(e^{2\pi imz})^n \\
=& 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}:\\ n>0,\ n\mid d}}n^{k-1}q^d\Big) && \because d=mn\text{ と置いた} \\
=& 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{d=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(d)q^d\Big) && \because \text{約数関数の定義} \\
=& 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\Big)
\end{aligned}
$$

と計算でき，これが目的の等式であった。　証明終

定理 3.6 の証明　k が奇数のときは G_k が零関数であるので明らかである。k が偶数のとき (3.10) から

$$\widetilde{G}_k(q)=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\Big)$$

が成立するので，$\lim_{q\to 0}\widetilde{G}_k(q) = 2\zeta(k)$ である。これは $\widetilde{G}_k(q)$ が原点で正則であることを意味し，したがって G_k が ∞ で正則であることが従う。　証明終

定義 3.11　3 以上の整数 k に対して，$\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上の正則関数 E_k を

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

で定め，**正規化アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

ベルヌーイ数（と約数関数）を計算できれば，E_k を明示的に書き下すことができるので，ここでベルヌーイ数の漸化式を述べておく。

命題 3.12　$B_0 = 1$，かつ $d \geqq 1$ のとき

$$B_d = -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k$$

が成り立つ。

証明　e^z を原点周りでテイラー展開すると

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

であるから，

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

となる。したがって

$$1 = \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k \right) = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{d} \frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!} \right) z^d$$

となるので，係数比較をすることで，$B_0 = 1$ かつ

$$\sum_{k=0}^{d} \frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!} = 0 \tag{3.11}$$

が分かる。(3.11) を B_d について解くことで，

$$\begin{aligned} B_d &= -\sum_{k=0}^{d-1} \frac{d!}{k!\,(d-k+1)!} B_k \\ &= -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d+1)!}{k!\,(d-k+1)!} B_k && \because d+1 \text{ を挟み込んだ} \\ &= -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k && \because \text{二項係数の定義} \end{aligned}$$

と計算でき，目的の漸化式を得られる。　証明終

いくつかベルヌーイ数を計算すると，

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2},\\
B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = -\frac{1}{3}\Big(1 - \frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{6},\\
B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0,\\
B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{5}\Big(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0\Big) = -\frac{1}{30},\\
B_5 &= \cdots = 0,\\
B_6 &= \cdots = \frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

などとなる。したがって，正規化アイゼンシュタイン級数は

$$
\begin{aligned}
E_4(z) &= 1 - 8(-30)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n = 1 - 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \cdots),\\
E_6(z) &= 1 - 12\cdot 42\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n = 1 - 504(q + 33q^2 + 244q^3 + \cdots)
\end{aligned}
$$

などとなる。ここで正則関数 $E_4^3 - E_6^2$ を考えると，これは命題 2.7 と命題 2.8 から荷重 12 のモジュラー形式で，上の計算より

$$
(E_4(z))^3 - (E_6(z))^2 = 1728q + o(q)
$$

となるので，荷重 12 の尖点形式であることが分かる。尖点形式 Δ を $(E_4^3 - E_6^2)/1728$ で定め，**ラマヌジャンのデルタ**と呼ぶ。また Δ のフーリエ係数を $(\tau(n))_{n=0}^{\infty}$ で表し，**ラマヌジャンのタウ関数**と呼ぶ。具体的には

$$
\tau(0) = 0, \qquad \tau(1) = 1, \qquad \tau(2) = -24, \qquad \tau(3) = 252, \ \ldots
$$

と計算できる。ラマヌジャンのタウ関数については，ラマヌジャンによる有名な予想がある。

予想 3.13 (ラマヌジャン予想)　ラマヌジャンのタウ関数に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して，n と m が互いに素であるならば

$$
\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)
$$

が成立する。

(2) p を素数，r を正整数とするとき

$$
\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})
$$

が成立する。

予想 3.13 は，以降で扱うヘッケ作用素（6 節）を用いることで証明される。

4 基本領域

定義 4.1 群 G が $\mathbb{H}$ に作用しているとする。$\mathbb{H}$ の閉部分集合 $\mathcal{D}$ が条件

(FD1) $\mathcal{D}$ の境界は面積零である。

(FD2) 各点 $z \in \mathbb{H}$ に対し，$\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ を満足する元 $\gamma \in G$ が存在する。

(FD3) 相異なる 2 点 $z, z' \in \mathcal{D}$ に対して，$\gamma \cdot z = z'$ となる元 $\gamma \in G$ が存在するとき，z と z' は共に $\mathcal{D}$ の境界に属す。

観察 4.2 (ii) の条件から，$\mathbb{H}$ の勝手な点は，基本領域の点と G の下同値である。(iii) の条件から，基本領域に属す相異なる内点 z, z' は G の下同値でない。

今回は G が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，系 1.4 の作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ を考える。

観察 4.3 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ を S，$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ を T と置く。

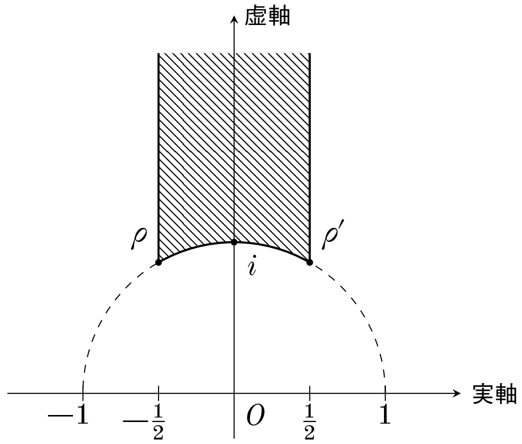
(1) 点 $z \in \mathbb{H}$ に対して，$S \cdot z = -1/z$ である。特に $|z| \leqq 1$ ならば $|S \cdot z| \geqq 1$ である。

(2) 点 $z \in \mathbb{H}$ に対して，$T \cdot z = z + 1$ である。また $T^{-1} \cdot z = z - 1$ であるから，特に $-1/2 \leqq \Re(T^n \cdot z) \leqq 1/2$ を満足するような整数 n がある。

以下 $\mathcal{D}$ を，$\mathbb{H}$ の閉集合

$$\left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leqq \Re(z) \leqq \frac{1}{2},\ |z| \geqq 1 \right\} \tag{4.1}$$

とし，これが作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ の基本領域であることを示す。$\mathcal{D}$ を図示すると，$\rho = -1/2 + i\sqrt{3}/2$，$\rho' = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ とするとき，図



における斜線部分の領域が $\mathcal{D}$ である。

定理 4.4　$\mathbb{H}$ の閉集合

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leqq \Re(z) \leqq \frac{1}{2},\ |z| \geqq 1 \right\}$$

は作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ の基本領域である。

証明　(FD1) について　$\mathcal{D}$ の境界は曲線であるから，面積零である。

(FD2) について　点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に固定する。$\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ が $\mathbb{C}$ の格子であるから，集合

$$\left\{ |c'z + d'| : \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

の最小値を与えるような行列 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。(1.1) の虚部の表示から，γ は集合

$$\left\{ \Im(\gamma' \cdot z) : \gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

の最大値を γ が与える。察 4.3 (2) から，$-1/2 \leqq \Re(T^n\gamma \cdot z) \leqq 1/2$ を満足するような整数を取れる。この n について $|T^n\gamma \cdot z| \geqq 1$ で，したがって $T^n\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ である。なんとなれば，$|T^n\gamma \cdot z| < 1$ だったとすると，

$$\begin{aligned}
\Im(ST^n\gamma \cdot z) &= \Im\Big(-\frac{1}{T^n\gamma \cdot z} \Big) \\
&= \frac{\Im(T^n\gamma \cdot z)}{|T^n\gamma \cdot z|} \\
&> \Im(T^n\gamma \cdot z) \\
&= \Im(\gamma \cdot z) && \because T^n\gamma \cdot z = \gamma \cdot z + n \text{ なので}
\end{aligned}$$

と計算でき，γ の最大性に反するからである。

(FD3) について　(FD3) が満足されることは，次に述べる補題 4.5 として扱うことにする。　証明終

補題 4.5　相異なる点 $z, z' \in \mathcal{D}$ について，$\gamma \cdot z = z'$ を満足する元 $\gamma \in \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ があるとする。このとき z, z' が $\mathcal{D}$ の境界

$$\{ w \in \mathcal{D} : |\Re(w)| = 1/2 \text{ または } |w| = 1 \}$$

に属す。さらに $|\Re(z)| = 1/2$ であれば z' についても $|\Re(z')| = 1/2$ であり，$|z| = 1$ であれば z' についても $|z'| = 1$ である。

証明　$\Im(z') \geqq \Im(z)$ と仮定しても一般性が失われない。すると (1.1) より

$$\frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} = \Im(\gamma \cdot z) = \Im(z') \geqq \Im(z),$$

かつ $\Im(z) > 0$ であるから，$1 \geqq |cz + d|$ である。特に虚部について見ると

$$1 \geqq |\Im(cz + d)| = |\Im(cz)| = |c|\Im(z) \geqq |c|\Im(\rho) = |c|\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので，$c = -1, 0, 1$ のいずれかである。

- $c = 0$ のとき。$\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \det\gamma = 1$ であるから，$d = \pm 1$ である。$d = 1$ のときを考えると，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ で，$\gamma \cdot z = z + b$ となる。$\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ であるから，

$$\frac{1}{2} \geqq |\Re(\gamma \cdot z)| = |\Re(z + b)| = |\Re(z) + b| \geqq |b| - |\Re(z)| \geqq |b| - \frac{1}{2}$$

  となるので，$b = -1, 0, 1$ のいずれかである。$z' \neq z$ と仮定しているので $b \neq 0$ である。$b = 1$ であるなら，$\Re(z) = -1/2$, $\Re(z') = 1/2$ となり，これらは $\mathcal{D}$ の境界の点である。同様に，$b = -1$ であるなら，$\Re(z) = 1/2$, $\Re(z') = -1/2$ となり，これらは $\mathcal{D}$ の境界の点である。$d = -1$ のときは，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ で，$\gamma \cdot z = z - b$ となるので，$d = 1$ のときの議論と同様である。

- $c = 1$ のとき。このとき $1 \geqq |z + d|$ であるから，

$$1 \geqq |z + d| \geqq |\Re(z + d)| \geqq |d| - |\Re(z)| \geqq |d| - \frac{1}{2}$$

  となり，$|d| \leqq 3/2$ であることが分かる。d が整数であるから，$d = -1, 0, 1$ のいずれかである。$d = 0$ のとき $|z| = 1$ であるので，z は $\mathcal{D}$ の境界に属す。また $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ であるので，$\det(\gamma) = 1$ と合わせて，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である。すると $z' = \gamma \cdot z = -1/z + a$ と計算でき，$|-1/z| \leqq 1$ であることを踏まえると，

$$\frac{1}{2} \geqq |\Re(z')| = \left|\Re\left(-\frac{1}{z}\right) + a\right| \geqq |a| - \left|\Re\left(-\frac{1}{z}\right)\right| = |a| - 1$$

  となるので，$|a| \leqq 3/2$ である。a が整数であるので，$a = -1, 0, 1$ のいずれかである。$a = 0$ ならば $|z'| = |-1/z| = 1$ であるので，z' は $\mathcal{D}$ の境界の点である。$a = 1$ ならば $\Re(-1/z) = -1/2$ かつ $\Re(z') = 1/2$ であるので，この場合も z' は $\mathcal{D}$ の境界の点である。$a = -1$ の場合も同様に考えると，$\Re(-1/z) = 1/2$ かつ $\Re(z') = -1/2$ であるので，z' は $\mathcal{D}$ の境界の点である。

- $c = -1$ のとき。$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ となり，$\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = z$ であるので，$c = 1$ の場合の議論に帰着できる。

以上でいずれの場合でも z, z' が $\mathcal{D}$ の境界に属し，$|\Re(z)| = 1/2$ であれば z' についても $|\Re(z')| = 1/2$ であり，$|z| = 1$ であれば z' についても $|z'| = 1$ であることが示された。

証明終

5　釣り合い公式

引き続き (4.1) の基本領域 $\mathcal{D}$ を考える。

補題 5.1　零でないモジュラー形式 f に関して，$\mathcal{D}$ における f の零点は有限個である。

証明　f が $\mathbb{H}$ 上の正則関数，$\widetilde{f}$ が $\mathbb{D}$ 上の正則関数であることに注意する。$\mathcal{D}$ 内の f の零点集合を Z と置き，Z が無限集合であったと仮定する。さらに Z が有界集合であったとすると，相異なる可算個の Z の点を番号付けして点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を考えると，点列コンパクト性から収束部分列 $(z_{n(i)})_{i=1}^{\infty}$ を取れる。すべての i について $f(z_{n(i)}) = 0$ であるから，一致の定理より $f \equiv 0$ となり，矛盾が生じるので，Z は有界でない。∞ に収束する Z の点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を取り，$q_n = \exp(2\pi i z_n)$ として $\mathbb{D}$ 内の点列 $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めると，$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ かつ $\widetilde{f}(q_n) = 0$ であるから，一致の定理より $\widetilde{f} \equiv 0$ で，再び一致の定理より $f \equiv 0$ となり，矛盾が生じる。ゆえに Z は有限集合であることが従う。　証明終

定理 5.2 (釣り合い公式)　$f \not\equiv 0$ であるようなレベル 1 荷重 k のモジュラー形式 f を考える。複素数 $z \in \mathbb{H}$ における f の位数を $v_z(f)$ で表し，0 における $\widetilde{f}$ の位数を $v_\infty(f)$ で表すことにする。このとき

$$v_\infty(f) + \frac{v_i(f)}{2} + \frac{v_\rho(f)}{3} + \sum_{\substack{p \in \mathcal{D}:\\ p \neq i, \rho}} v_p(f) = \frac{k}{12} \tag{5.1}$$

が成立する。

証明　零点の虚部の集合

$$\{\, \Im(z) \in \mathcal{D} : z \text{ は } f \text{ の零点である} \,\}$$

が補題 5.1 より有限集合であるから，これら虚部より大きい数 N を取れる。正数 $\epsilon > 0$ を取り，1 図に表す閉曲線 $ABCC'DD'EE'A$ を考える。 ここで曲線は次の条件を満足するようにする。

- 曲線は，集合 $\mathcal{D} \cap \{z \in \mathbb{H} : \Im(z) \leqq N\}$ の境界に沿ように，$-1/2 + Ni$ から ρ に向かって動き始める。
- 実部が負であるとき，f の零点を進行方向左側に半径 ϵ の円弧で避ける。
- 実部が正であるとき，f の零点を進行方向右側に半径 ϵ の円弧で避ける。
- i, ρ, ρ' はすべて進行方向左側に半径 ϵ の円弧で避ける。

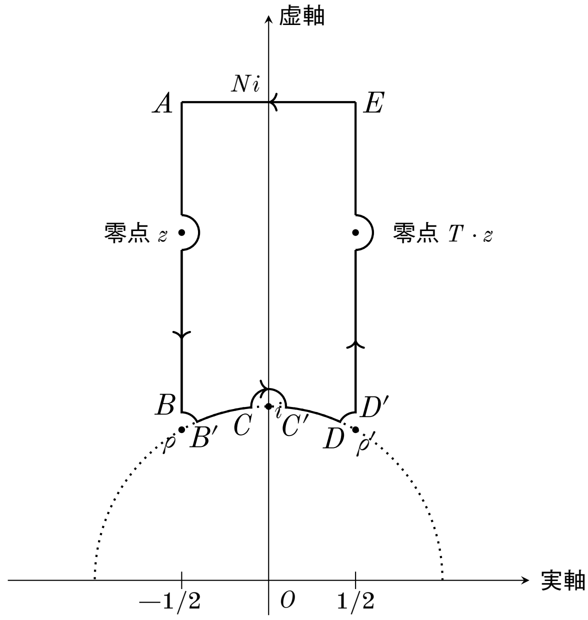


図 1　閉曲線 $ABB'CC'DD'EA$

$(\star)$ と補題 4.5 より境界上の零点が虚軸を軸として対称に分布していることを踏まえると，この閉曲線の内部にある f の零点は

$$\{\, z\in\mathcal{D} : z \text{ は } f \text{ の零点である} \,\} \setminus \Big(\{i,\rho,\rho'\} \cup \{\, z\in\mathbb{H} : \Re(z) < 0 \,\} \Big)$$

である。また $\mathcal{D}$ が基本領域であるので，閉曲線の内部にある勝手な 2 点は互いに $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の下同値でなく，偏角の原理より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ABCC'DD'EE'A} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{\substack{p\in\mathcal{D}:\\ p\nsim i,\,\rho}} v_p(f) \tag{5.2}$$

が成立する。以降で (5.2) の左辺の積分を計算する。

曲線 EA 上の積分について　　関数 $q=\exp(2\pi i z)$ は集合

$$\{\, z\in\mathbb{H} : \Im(z) = N,\ -1/2 \leqq \Re(z) \leqq 1/2 \,\}$$

を集合

$$\mathcal{B} = \{\, q\in\mathbb{D} : |q| = \exp(-2\pi N) \,\}$$

へ一対一に対応させるので，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{EA}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{B}:\text{時計回り}} \frac{f'(\frac{\log q}{2\pi i})}{f(\frac{\log q}{2\pi i})}\frac{1}{2\pi i q}\,dq \qquad \because q=\exp(2\pi i) \text{ と置換した}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}:\text{時計回り}} \frac{\widetilde{f}'(q)}{\widetilde{f}(q)}\, dq \qquad \because \frac{d}{dz}\widetilde{f}(q) = \widetilde{f}'(q) \cdot 2\pi i q$$

(5.3) $$= -v_\infty(f)$$ ∵ 時計周りの積分に対する偏角の原理

と計算できる。

曲線 AB と $D'E$ 上の積分について　f は周期 1 の周期関数であるから

(5.4) $$\int_{AB} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \int_{D'E} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{AB} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \int_{BA} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$$

と打ち消し合う。

曲線 BB', CC', DD' 上の積分について　一般論として，点 $p \in \mathbb{H}$ を中心とする半径 ϵ 角度 θ の円弧 $\mathcal{C}$ 上の時計回り積分は，$f'(z)/f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-p)^n$ をローラン展開とするとき[2)]，$a_{-1} = p(f)$ で，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \int_{\mathcal{C}} (z-p)^n\, dz \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \int_0^{-\theta} \epsilon^n e^{itn} i\epsilon e^{it}\, dt \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \epsilon^{n+1} i \int_0^{-\theta} e^{i(n+1)t}\, dt \\
&\to -v_p(f)\theta i \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{BB'} + \int_{CC'} + \int_{DD'} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \Big) &= -\frac{1}{2\pi i}\Big(\frac{1}{3}\pi v_\rho(f) i + \pi v_i(f) i + \frac{1}{3}\pi v_{\rho'}(f) i \Big) \\
&= -\frac{1}{3} v_\rho(f) - \frac{1}{2} v_i(f)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

となる。

曲線 $B'C$ と $C'D$ 上の積分について　一次分数変換 $S \cdot (-)$ によって曲線 $C'D$ が曲線 $CB' = -B'C$ に写されるので

$$\int_{B'C} + \int_{C'D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{B'C} - \int_{S(B'C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

と書ける。第二項目の積分を考えると，

$$\int_{S(B'C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{B'C} \frac{f'(S \cdot z)}{f(S \cdot z)} \Big(\frac{d}{dz} S \cdot z \Big) dz$$

2)　$v_p(f') - v_p(f) \geqq 1$ なので，f'/f が p を極として持つなら，その位数は高々 1 である。

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B'C} \frac{\frac{d}{dz}f(S\cdot z)}{f(S\cdot z)}\,dz && \because \text{合成関数の微分}\\
&= \int_{B'C} \frac{\frac{d}{dz}(z^k f(z))}{z^k f(z)}\,dz && \because (\star)\ \text{より}\\
&= \int_{B'C} \frac{kz^{k-1}f(z)+z^k f'(z)}{z^k f(z)}\,dz\\
&= k\int_{B'C}\frac{1}{z}\,dz + \int_{B'C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\\
&\to ki\int_{2\pi/3}^{\pi/2} dt + \int_{B'C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad (\epsilon\to+0)\\
&= -\frac{k\pi i}{6} + \int_{B'C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

と計算できるので,

$$
\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{B'C}+\int_{C'D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\Big) = \frac{k}{12} \qquad (5.7)
$$

となる。

以上 (5.3), (5.4), (5.5), (5.7) を合わせると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{ABB'CC'DD'EA}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{ABB'CC'DD'EA}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz && \because \text{偏角の原理}\\
&= -v_\infty(f) - \frac{1}{2}v_i(f) - \frac{1}{3}v_\rho(f) + \frac{k}{12}
\end{aligned}
$$

この計算結果と (5.2) を合わせれば，目的の等式 (5.1) が得られる。　証明終

系 5.3　k を整数とする。

(1) $M_0 = \mathbb{C}$ である。

(2) $k < 0$ であるならば $M_k = 0$ である。

(3) $M_2 = 0$ である。

(4) $k = 4, 6, 8, 10, 14$ のとき $M_k = \mathbb{C}E_k$ である。

(5) ラマヌジャンのデルタ Δ は $\mathbb{H}$ 上で零点を持たない。

(6) 整数 k に対して乗算写像 $\Delta\cdot(\text{—})\colon M_{k-12}\to S_k$ は $\mathbb{C}$ 上の線形同型である。

(1) の証明　$\mathbb{H}$ 上の定数関数はすべて荷重 0 のモジュラー形式であるので，$\mathbb{C}\subset M_0$ である。逆に荷重 0 のモジュラー形式 f を考えると，i における f の値を c とするとき，差 $f-c$ も荷重 0 のモジュラー形式，かつ i における値が零である。よって $f-c\not\equiv 0$ であったとすると，(5.1) の左辺は 0 より大きいのに対し，右辺は 0 であるから，矛盾が生じる。ゆえに $f\equiv c$ であり，$M_k\subset\mathbb{C}$ であることが示された。　証明終

(2) の証明　$f \not\equiv 0$ であるような M_k のモジュラー形式があったとすると，(5.1) の左辺は非負であるのに対し右辺が負であるから矛盾が生じる。ゆえに M_k の元は零関数のみである。　証明終

(3) の証明　零でない荷重 2 のモジュラー形式があったとすると，(5.1) が成立するが，右辺が 1/6 なのに対して左辺は 1/6 になり得ないので，矛盾が生じる。ゆえに荷重 2 のモジュラー形式は零関数しかない。　証明終

(4) の証明　各場合の k を考えると

- $k = 4$ のとき，(5.1) の右辺が 1/3 であるから，荷重 4 の零でないモジュラー形式は ρ を位数 1 の零点として持つ。
- $k = 6$ のとき，(5.1) の右辺が 1/2 であるから，荷重 6 の零でないモジュラー形式は i を位数 1 の零点として持つ。
- $k = 8$ のとき，(5.1) の右辺が 2/3 であるから，荷重 8 の零でないモジュラー形式は ρ を位数 2 の零点として持つ。
- $k = 10$ のとき，(5.1) の右辺が 5/6 であるから，荷重 10 の零でないモジュラー形式は i と ρ を位数 1 の零点として持つ。
- $k = 14$ のとき，(5.1) の右辺が 7/6 であるから，荷重 14 の零でないモジュラー形式は i を位数 1 の零点，ρ を位数 2 の零点として持つ。

となるので，零でない荷重 k のモジュラー形式 f, g について，f/g は零でない荷重 0 のモジュラー形式で，(1) より $f = cg$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ となることが分かる。特に g として正規化アイゼンシュタイン級数 E_k として取れば，勝手な荷重 k のモジュラー形式が cE_k と表せることが分かる。これは $M_k = \mathbb{C}E_k$ であることを意味する。　証明終

(5) の証明　ラマヌジャンのタウ関数の値は $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ となっているので，$v_\infty(\Delta) = 1$ である。対して (5.1) の右辺は 1 であるから，Δ は $\mathbb{H}$ で零点を持ち得ない。
証明終

(6) の証明　乗算写像 $\Delta \cdot (\text{—})\colon M_{k-12} \to S_k$ の線形性は明らかであるから，この写像が全単射であることを示す。

単射性　モジュラー形式 $f, g \in M_{k-12}$ に対して $\Delta \cdot f = \Delta \cdot g$ だとすると，(5) より Δ が $\mathbb{H}$ 上常に零でないので，$f = g$ であることが分かる。ゆえに $\Delta \cdot (\text{—})$ は単射である。

全射性　尖点形式 $f \in S_k$ に対して，f/Δ が荷重 $k - 12$ のモジュラー形式であることを示せば良い。f が $\mathbb{H}$ 上の正則関数で，Δ が常に零でない $\mathbb{H}$ 上の正則関数であるから，f/Δ も $\mathbb{H}$ 上の正則関数である。また f と Δ が $(\star)$ を満足するので，f/Δ も $(\star)$ を満足し，f/Δ が荷重 $k - 12$ の正則な弱モジュラー関数であることが分かる。また

$v_\infty(f/\Delta) = v_\infty(f) - 1 \geqq 0$ であるから，f/Δ は ∞ で正則である。したがって $f/\Delta \in M_{k-12}$ で，$f = \Delta\cdot(f/\Delta) \in M_{k-12}\Delta$ である。ゆえに $\Delta\cdot(-)$ は全射である。　　証明終

系 5.3 (6) より $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$，すなわち荷重 12 の尖点形式はすべてラマヌジャンのデルタの定数倍である。

6　ヘッケ作用素

ヘッケ作用素を定義するための準備を行なっていく。正整数 n に対して集合

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n \right\}$$

を $\mathbf{M}_n$ と置き，行列の左乗算によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathbf{M}_n$ への左群作用を定めておく。

補題 6.1　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n を考える。勝手な行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n$ と軌道の元 $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = (\tilde{c}z+\tilde{d})^{-k} f\Big(\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}\Big) \tag{6.1}$$

が成立する。

証明　軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の元は，行列 $\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+b'c & a'b+b'd \\ ac'+cd' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

と表される。すると (6.1) の右辺は

$$\begin{aligned}
&(ac'z+cd')^{-k} f\big(\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot z\big) \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k}\big(c'\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot z + d'\big)^k f\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot z\big) && \because (\star)\text{より} \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k}\Big(c'\frac{az+b}{cz+d}+d'\Big)^k f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) && \because \text{作用の定義} \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k}\Big(\frac{(ac'+cd')z+(bc'+dd')}{cz+d}\Big)^k f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) \\
&\qquad = (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)
\end{aligned}$$

と計算でき，(6.1) の左辺と等しいことが分かる。　　証明終

補題 6.1 から，レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n$ に対して

$$(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

を軌道の代表元の取り方に依らずに定義できる。

定義 6.2　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して，$\mathbb{H}$ 上の有理型関数 $T_n f$ を，

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

で定める。レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数の集合から $\mathbb{H}$ 上の有理型関数への写像 T_n を**ヘッケ作用素**と呼ぶ。

まずヘッケ作用素によって弱モジュラー関数が弱モジュラー関数に写ることを見る。

命題 6.3　f がレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数であるとき，$T_n f$ も荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明　行列 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を勝手に取る。γ の右乗算が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n$ 上の置換を引き起こすことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&T_n f(\gamma\cdot z)\\
&\quad= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma\cdot z)+d)^{-k} f\Big(\frac{a(\gamma\cdot z)+b}{c(\gamma\cdot z)+d}\Big)\\
&\quad= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} \Big(c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d\Big)^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big) \qquad \because \text{作用の定義}\\
&\quad= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} \Big(\frac{(a'c+c'd)z+(b'c+dd')}{c'z+d'}\Big)^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big)\\
&\quad= (c'z+d')^k n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} ((a'c+c'd)z+(b'c+dd'))^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big)\\
&\quad= (c'z+d')^k n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma\cdot z)+d)^{-k} f\Big(\frac{a(\gamma\cdot z)+b}{c(\gamma\cdot z)+d}\Big) \qquad \because \gamma \text{ が } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash M_n \text{ 上の置換なので}\\
&\quad= (c'z+d')^k T_n f(z)
\end{aligned}$$

と計算でき，$T_n f$ が $(\star)$ を満足することが確かめられる。ゆえに $T_n f$ は荷重 k の弱モジュラー関数である。　　証明終

ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n$ の完全代表系としてエルミート標準形を取れることを見ておく。

命題 6.4　行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n$ に対して，$\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がエルミート標準形，すなわち

$$\gamma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} > 0,\ \tilde{a}\tilde{d} = n,\ 0 \leqq \tilde{b} < \tilde{d}$$

を満足する行列 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在する。

証明　行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ が非特異であるから，定理 A.2 より $\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がエルミート標準形となるようなユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。エルミート標準形の行列式は正で，かつ $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の行列式も正であるから，$\det(\gamma) = 1$，すなわち $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であることが従う。

証明終

系 6.5　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して，

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big) \tag{6.2}$$

と表せる。

証明　命題 6.4 とエルミート標準形の一意性から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ の完全代表系として $\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n : a > 0,\ 0 \leqq b < d \}$ を取れるので。

証明終

(6.2) によるヘッケ作用素の表示を用いることで，モジュラー関数がモジュラー関数に写ることを示せる。

定理 6.6　f をレベル 1 荷重 k のモジュラー関数とし，その q 展開を $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) q^m$ とする。このとき

$$T_n f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m, \qquad \gamma(m) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z} : a > 0, \\ a \mid \gcd(m,\, n)}} a^{k-1} \alpha\Big(\frac{mn}{a^2}\Big) \tag{6.3}$$

が成立する。

証明　(6.2) を用いて計算を行うと，

$$\begin{aligned}
T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big) && \because (6.2) \text{ より} \\
&= n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az+b}{d} m\Big) && \because f \text{ の } q \text{ 展開} \\
&= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az}{d} m\Big) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) && (6.4)
\end{aligned}$$

となる。ここで，整数 d, m に対して $\sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right)$ を計算すると，

$$\sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) \tag{6.5}$$

$$=\begin{cases} d & d \mid m \text{ のとき（} \because \text{常に} \exp(2\pi i \frac{b}{d} m) = 1 \text{ なので）} \\ \frac{1-\exp\left(2\pi i(m/d)\right)^d}{1-\exp\left(2\pi i(m/d)\right)} = 0 & d \nmid m \text{ のとき（} \because \text{等比数列の和）} \end{cases}$$

となる。(6.4) の計算を続けると，

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d\in\mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az}{d} m\Big) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) && \because (6.4) \text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d\in\mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n,\, d\mid m}} d^{-k+1} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i a z \frac{m}{d}\Big) && \because (6.5) \text{ より} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}:\\ d>0,\, d\mid n,\, d\mid m}} \Big(\frac{n}{d}\Big)^{k-1} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i z \frac{mn}{d^2}\Big) && \because a = n/d \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}:\\ d>0,\, d\mid\gcd(m,\, n)}} \Big(\frac{n}{d}\Big)^{k-1} \alpha\Big(n\frac{d}{n}\frac{m}{d}\Big) q^{\frac{m}{d}\frac{n}{d}} \end{aligned} \tag{6.6}$$

となる。ここで関係 $(m, d) \mapsto (m/d, n/d)$ によって全単射写像

$$\{(m, d) : m, d \in \mathbb{Z},\ d > 0,\ d \mid \gcd(m, n)\} \to \{(m', a) : m', d \in \mathbb{Z},\ a > 0,\ a \mid n\} \tag{6.7}$$

を得られるので，(6.6) の計算を続けて，

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}:\\ d>0,\, d\mid\gcd(m,\, n)}} \Big(\frac{n}{d}\Big)^{k-1} \alpha\Big(n\frac{d}{n}\frac{m}{d}\Big) q^{\frac{m}{d}\frac{n}{d}} && \because (6.6) \\ &= \sum_{m'\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}:\\ a>0,\, a\mid n}} a^{k-1} \alpha\Big(\frac{nm'}{a}\Big) q^{m'a} && \because (6.7) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Bigg(\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}:\, a>0\\ a\mid\gcd(m,\, n)}} a^{k-1} \alpha\Big(\frac{mn}{a^2}\Big) \Bigg) q^m \end{aligned}$$

と計算でき，$T_n f$ を目的の形で表示できた。 証明終

系 6.7 f がレベル 1 荷重 k のモジュラー関数のとき，$T_n f$ もレベル 1 荷重 k のモジュラー関数である。さらに f がモジュラー形式ならば $T_n f$ もモジュラー形式であり，f がカスプ形式ならば $T_n f$ もカスプ形式である。

証明 $a \mid n$ なる正整数 a に対して n/a^2 は高々有界であるから，$m \ll 1$ のとき (6.3) における $\gamma(m)$ は零である。ゆえに $T_n f$ は ∞ で有理型で，モジュラー関数であることが従う。

f がモジュラー形式であれば，負の整数 m に対して常に $\gamma(m) = 0$ であることが分かるので，$T_n f$ は ∞ で正則で，モジュラー形式であることが従う。また f が尖点形式であれ

ば，$(\alpha(i))_{i=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とするとき (6.3) より

$$\gamma(0)=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}\,:\,a>0\\ a|n}} a^{k-1}\alpha(0)=0$$

となるので，T_nf も尖点形式である。　　　　　　　　　　　　　　　証明終

予想 3.13 を扱うことが，今回のヘッケ作用素を導入する動機であったので，そのための準備を行う。

補題 6.8　n,m を互いに素な非負整数とする。$\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} a'' & b''\\ 0 & d''\end{smallmatrix}\right)$ を，行列式が n であるようなエルミート標準形行列とし，$\left(\begin{smallmatrix} a' & b'\\ 0 & d'\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} a''' & b'''\\ 0 & d'''\end{smallmatrix}\right)$ を，行列式が m であるようなエルミート標準形行列とする。もし

$$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b'\\ 0 & d'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix} a'' & b''\\ 0 & d''\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a''' & b'''\\ 0 & d'''\end{pmatrix} \tag{6.8}$$

を満足する行列 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix} x & y\\ z & w\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在するならば，$\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} a'' & b''\\ 0 & d''\end{smallmatrix}\right)$ かつ $\left(\begin{smallmatrix} a' & b'\\ 0 & d'\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} a''' & b'''\\ 0 & d'''\end{smallmatrix}\right)$ である。

証明　(6.8) が成立すると仮定すると，γ 以外の行列が上三角であるので，γ も上三角，すなわち $z=0$ である。また $\det\gamma=1$ であるから $xw=1$ で，さらに (6.8) の γ 以外の行列がすべて非負成分であるので，$x=w=1$ であることが分かる。よって (6.8) が意味する等式は

$$aa'=a''a''',\qquad dd'=d''d''',\qquad ab'+bd'=a''b'''+b''d'''+yd''d''' \tag{6.8'}$$

の三つである。n と m が互いに素で，$a,a''\mid n$ かつ $a',a'''\mid m$ であるから，a と a''' 及び a' と a'' も互いに素で，$a\mid a''$，$a''\mid a$，$a'\mid a'''$，$a'''\mid a'$ が成立し，すべて正であるので，$a=a''$ かつ $a'=a'''$ であることが分かる。この議論において a を d に置き換えて読むことで，$d=d''$ かつ $d'=d'''$ であることも分かる。よって (6.8') の三つ目の等式は

$$(b'-b''')a=(b''+yd-b)d' \tag{6.8''}$$

と書き直せる。n と m が互いに素で，$a\mid n$ かつ $d'\mid m$ であるから，a と d' も互いに素である。このことと (6.8") から $d'\mid(b'-b''')$ であることが従い，また $|b'-b'''|\leqq d-1$ であるので，$b'=b'''$ であることが分かる。よって (6.8") の左辺が零であるので，$b=b''+yd$ となり，$0\leqq b,b''\leqq d-1$ であることから $y=0$，したがって $b=b''$ であることが分かる。　　　　　　　　　　　　　　　証明終

補題 6.9　正整数 n に対して，行列式が n であるようなエルミート標準形行列すべてを H_n で表すことにする。もし正整数 n, m が互いに素な正整数であるならば，乗算写像が誘導する写像

$$\mathrm{H}_n \times \mathrm{H}_m \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{M}_{nm};\quad (A, B) \mapsto \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot AB$$

は全単射である。

証明　補題 6.8 から件の写像は単射である。集合の元の個数が一致すること示して，全単射性を示す。正整数 n に対して $\#H_n = \sum_{d\in\mathbb{Z}\colon d>0,\, d|n} d$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\#(H_n \times H_m) &= \#(H_n)\#(H_m) \\
&= \#H_n \\
&= \Bigg(\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}\colon \\ d>0,\, d|n}} d\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\colon \\ l>0,\, l|m}} l\Bigg) \\
&= \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}\colon \\ d>0,\, d|n}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\colon \\ l>0,\, l|m}} dl \\
&= \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}\colon \\ d>0,\, d|nm}} d & \because n \text{ と } m \text{ が互いに素なので。} \\
&= \#H_{nm} \\
&= \#(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{M}_{nm}) & \because \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ の行列を用いてエルミート標準化できるので。}
\end{aligned}$$

と計算できるので，件の写像は全射でなければならない。　　証明終

命題 6.10　ヘッケ作用素 $T_n\colon M_k \to M_k$ に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して，n と m が互いに素であるならば

$$T_n T_m = T_{nm}$$

が成立する。

(2) p を素数，r を正整数とするとき

$$T_{p^{r+1}} = T_p T_{p^r} - p^{k-1} T_{p^{r-1}}$$

が成立する。

(1) の証明　(6.2) の表示を用いて計算すると，

$$T_n T_m f(z) = n^{k-1} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\in H_n} d^{-k} T_m f\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \cdot z\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= (nm)^{k-1} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in H_n} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right) \in H_m} (dd')^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right) \cdot z \Big) \\
&= (nm)^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{M}_{nm}} (cz+d)^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z \Big) && \because \text{補題 } 6.9 \\
&= T_{nm} f(z)
\end{aligned}
$$

となり，目的の等式を得られる。 証明終

7 固有形式

定義 7.1 f をモジュラー形式とし，$(\alpha(i))_{i=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とする。勝手な正整数 n に対して $T_n f = \lambda_n f$ を満足するような複素数 λ_n が存在するとき，f を**固有形式**と呼び，λ_n を T_n 固有値と呼ぶ。さらに $\alpha(1) = 1$ であるならば f を**正規化固有形式**と呼ぶ。

例 7.2 ラマヌジャンのデルタ Δ は正規化固有形式である。なんとなれば，系 6.7 より $T_n\Delta$ も荷重 12 の尖点形式であり，系 5.3 (6) から $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ であるから，$T_n\Delta = \lambda_n\Delta$ を満足する複素数 λ_n が存在する。ゆえに Δ は固有形式である。またラマヌジャンのタウ関数について $\tau(1) = 1$ であるから，Δ は正規化固有形式であることが分かる。

定理 7.3 f を荷重 k の正規化固有形式とするとき，その T_n 固有値は n 番目のフーリエ係数である。

証明 $(c(n))_{n=0}^{\infty}$ を f のフーリエ係数とすると，(6.3) より $T_n f$ の 1 番目のフーリエ係数は

$$
\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z} \,:\, a > 0, \\ a \mid \gcd(n,\,1)}} a^{k-1} c\Big(\frac{n}{a^2}\Big) = c(n) \qquad \because \gcd(n, 1) = 1
$$

となる。他方 $T_n f = \lambda_n f$ であるから 1 番目のフーリエ係数を比べることで $c(n) = \lambda_n c(1)$ であることが分かる。いま $c(1) = 1$ であるから，$\lambda_n = c(n)$ であり，これが示すべきことだった。 証明終

系 7.4 f を正規化固有形式とし，$(c(n))_{n=0}^{\infty}$ をそのフーリエ係数とする。このとき次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して，n と m が互いに素であるならば

$$
c(nm) = c(n)c(m)
$$

が成立する。

(2) p を素数，r を正整数とするとき

$$c(p^{r+1}) = c(p)c(p^r) - p^{k-1}c(p^{r-1})$$

が成立する。

特に f としてラマヌジャンのデルタを考えれば，予想 3.13 の主張が正しいことが従う。

証明　命題 6.10 と定理 7.3 から直ちに従う。　証明終

A　整数係数行列のエルミート標準形

整数係数の非特異正方行列に対してエルミート標準形が存在することを，2 次の場合に限定して取り扱う。

定義 A.1 (非特異正方行列のエルミート標準形)　A を整数係数の非特異 2 次行列とする。ユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ によって

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad h_{11}, h_{22} > 0 \text{ かつ } 0 \leqq h_{12} < h_{22}$$

と表せるとき，この上三角行列を A の**エルミート標準形**と呼ぶ。

エルミート標準形を誘導するにあたって，

・一行目と二行目を交換する行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

・一行目を -1 倍する行列 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

・二行目を -1 倍する行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

・一行目を m 倍して二行目に足す行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{smallmatrix}\right)$

・二行目を m 倍して一行目に足す行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

が基本となるユニモジュラー行列で，これら行列の左乗算によって行列の変形を行う。

定理 A.2　整数係数の非特異 2 次行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対してエルミート標準形は一意的に存在する。

証明　存在性と一意性を分けて証明する。

存在性　$a = 0$ または $c = 0$ なら，行の入れ替えを行うことで $c = 0$ と考えて良く，すると非特異性から $a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。さらに各行を適当に -1 倍することで $a > 0$ かつ $d > 0$ として良い。b を d で割ることで

$$b = qd + b', \qquad q, b' \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq b' < d$$

を得られる。を満足する q, b' を取り，$-q$ 倍した二行目を一行目に足して A のエルミート標準形 $\left(\begin{smallmatrix} a & b' \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ を得る。a, c が共に零でない場合は，以下のようにユークリッドの互除法を用いて上述の議論に帰着させる。必要なら一行目と二行目を入れ替えて，$0 < |a| \leqq |c|$ として良い。c を a で割って，

$$c = qa + c', \qquad q, c' \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq c' < |a|$$

を満足する q, c' を取り，$-q$ 倍した一行目を二行目に足して，行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c' & d-qb \end{smallmatrix}\right)$ を得る。$c' \neq 0$ であれば，$0 \leqq |c'| < |a|$ であるから，行を交換して再度同じ議論を繰り返すことで，$c' = 0$ としてよく，証明の最初の議論に帰着された。

一意性　二つの A のエルミート標準形

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad \gamma' \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11'} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix}, \qquad \gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

があるとすると，$\gamma' \cdot \gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と書けば

$$\begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$$

となる。これから $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列であることを示す。$h_{11}c = 0$ かつ $h_{11} \neq 0$ であるから，$c = 0$ である。すると $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ がユニモジュラーであるから，$ad = 1$ または $ad = -1$ である。$h_{11}a = h'_{11}$ かつ $h_{11}, h'_{11} > 0$ であるから，$a > 0$ である。同様に $h_{22}d = h'_{22}$ かつ $h_{22}, h'_{22} > 0$ であるから，$d > 0$ である。したがって $a = d = 1$ であることが分かる。$0 \leqq h'_{12} = h_{12} + bh_{22}$ かつ $0 \leqq h_{12} < h_{22}$ であるから，$b \geqq 0$ でなければならない。また $h'_{22} = h_{22}$ であるから，$0 \leqq h'_{12} < h'_{22}$ であることと合わせて $b = 0$ であることが分かる。ゆえに $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列で，二つのエルミート標準形が等しいことが従う。　証明終

文献

[1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. `https://www.ma.imperial.ac.uk/~dhelm/M4P58/ModularForms2.pdf`（2026 年 1 月 1 日最終確認）.

[2] 岸　正倫・藤本　担孝（1980）．複素関数論．学術図書出版社．

[3] Aigner, M. and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.