

モジュラー形式に関する書き留め

2026 年 1 月 19 日 20 時 57 分更新

Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

目 次

1	特殊線形群と上半平面	1
2	モジュラー関数	4
3	アイゼンシュタイン級数	8
4	ヘッケ作用素	16
A	整数係数行列のエルミート標準形	20

約束

1. 整数すべてがなす環を \mathbb{Z} , 実数体を \mathbb{R} , 複素数体を \mathbb{C} で表す。
2. 虚数単位を i で表すことにする。
3. 複素数 z の実部を $\Re z$, 虚部を $\Im z$ で表す。
4. 単位的可換環 R と正整数 n に対し, R 係数 n 次一般線形群を $\mathrm{GL}_n(R)$, 特殊線形群を $\mathrm{SL}_n(R)$, 特殊直交群を $\mathrm{SO}_n(R)$ で表す。
5. 二つの整数 m, n に対して, その最大公約数を $\mathrm{gcd}(m, n)$ で表す。



1 特殊線形群と上半平面

定義 1.1 集合 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ を \mathbb{H} と置き, **上半平面** と呼ぶ。

命題 1.2 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対して定まる正則関数 $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ は

$$c \neq 0 \implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c$$

$$c = 0 \implies \gamma \cdot \infty = \infty$$

と拡張できる定数でない $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。さらに関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への作用が定まる。

証明 関数 $\gamma \cdot (-): \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が有理型であることについて $c = 0$ のときは

明らかであるから, $c \neq 0$ のときを考える。 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -d/c$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} cz_n + d = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} az_n + b = -(ad - bc)/c \neq 0$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma \cdot z_n = \infty$ である。ゆえに $\gamma \cdot (-)$ は \mathbb{C} 上有理型である。同様に $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき, すべての n について $z_n \neq 0$ として良く,

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{a + b/z_n}{c + d/z_n} \rightarrow \frac{a}{c} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから $\gamma \cdot (-)$ は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。

関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ が群作用であることについて $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $\gamma \cdot z = \frac{z+0}{0+1} = z$ であるので, 後は結合律を見れば良い。元 $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を勝手に取り, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ と表すとき,

$$\gamma' \cdot \gamma = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

である。正則関数 $\gamma' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ の定義域を $U(\subset \mathbb{C})$ とすると, 連続性から, $\gamma(V) \subset U$ となる開集合 $V \subset \mathbb{C}$ を取れる。勝手な複素数 $z \in V$ に対して,

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot (\gamma \cdot z) &= \gamma' \cdot \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)a' + b'}{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)c' + d'} \\ &= \frac{(az+b)a' + b'(cz+d)}{(az+b)c' + d'(cz+d)} && \text{(分母を払った)} \\ &= \frac{(aa' + b'c)z + (a'b + b'd)}{(ac' + cd')z + (bc' + dd')} && \text{(分母分子を } z \text{ についてまとめた)} \\ &= (\gamma' \cdot \gamma) \cdot z \end{aligned}$$

と計算でき, 一致の定理から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の関数として $\gamma' \cdot (\gamma \cdot (-)) = (\gamma' \cdot \gamma) \cdot (-)$ であることが分かる。よって $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ が群作用であることが確かめられた。 証明終

命題 1.3 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と複素数 z に対して,

$$(1.1) \quad \Im(\gamma \cdot z) = \det(\gamma) \frac{\Im z}{|cz + d|^2}$$

が成立する。

証明 複素数 z の共役を \bar{z} で表すことにする。このとき

$$2i\Im(\gamma \cdot z) = \gamma \cdot z - \overline{\gamma \cdot z} \quad \because \text{定義}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} && \because a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ なので} \\
&= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (cz+d)(a\bar{z}+b)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\
&= \det(\gamma) \frac{2i\Im z}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

と計算でき、この計算結果を $2i$ で割れば目的の等式を得る。 証明終

系 1.4 関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は \mathbb{H} に作用する。

証明 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$ のとき $\det(\gamma) = 1 > 0$ かつ $\Im z > 0$ であるから, (1.1) より $\Im(\gamma \cdot z) > 0$ であり, これは $\gamma \cdot z \in \mathbb{H}$ を意味する。 証明終

命題 1.5 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の \mathbb{H} への作用は推移的である。

証明 複素数 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取り, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ と表すと, $y > 0$ であることに注意して,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x + iy = z$$

と計算できるので, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}$ である。 証明終

命題 1.6 安定化部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と等しい。したがって関係 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \gamma \mapsto \gamma \cdot i$ は全単射写像 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}$ を定める。

証明 元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ を勝手に取り, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すと,

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot i = i &\iff \frac{ai+b}{ci+d} = i \\
&\iff b+ia = -c+id \\
&\iff a=d \text{ かつ } c=-b \\
&\iff \gamma \text{ が直交行列である}
\end{aligned}$$

となり, これは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ であることを意味する。 証明終

2 モジュラー関数

定義 2.1 (弱モジュラー関数) k を整数とする。有理型関数 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が **レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数** であるとは、勝手な元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$(\star) \quad f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

が成立するときをいう。

命題 2.2 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f を考える。このとき勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して次の三つが成立する。

- (1) $f(z) = (-1)^k f(z)$ が成り立つ。ゆえに f が恒等的に零でなければ、 k は偶数でなければならない。
- (2) $f(z+1) = f(z)$ が成り立つ。ゆえに f は周期的関数である。
- (3) $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$ が成り立つ。

証明 (1) について $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

(2) について $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(z+1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

(3) について $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z + 0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。

証明終

命題 2.3 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $q(= q(z)) = \exp(2\pi iz)$ と置く。このとき $z \in \mathbb{H}$ であるためには、 $0 < |q| < 1$ であることが必要十分である。

証明 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| |\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \end{aligned}$$

$$= |\exp(-2\pi\Im z)|$$

であるから,

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi\Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。

証明終

穴あき単位円盤 $\{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$ を \mathbb{D}^* と置く。また実数 a に対して

$$\Omega_a = \{w \in \mathbb{C} : z \neq 0, a < \arg w < 2\pi + a\}$$

$$D_a = \{z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a\}$$

として対数関数の分枝

$$L_a : \Omega_a \rightarrow D_a; \quad w \mapsto \log |w| + i \arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

命題 2.4 f を弱モジュラー関数とする。各点 $q \in \mathbb{D}^*$ に対して, $q \in \Omega_a$ を満足するような対数関数の分枝 $L_a : \Omega_a \rightarrow D_a$ を一つ取る。このとき複素数

$$(2.1) \quad \tilde{f}(q) = f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right)$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって \mathbb{D}^* 上の有理型関数 \tilde{f} が定まる。また (2.1) を単に

$$\tilde{f}(q) = f\left(\frac{\log q}{2\pi i}\right)$$

と表す。

証明 $q \in \Omega_a, q \in \Omega_{a'}$ となる二つの分枝 $L_a, L_{a'}$ を取ると, 整数 n を用いて $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$ と表せるので,

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに $q \in \mathbb{D}^*$ であれば,

$$\exp\left(2\pi i \frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*, \quad \exp\left(2\pi i \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので, 命題 2.3 より $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$ である。命題 2.2 (2) より f が $f(z+1) = f(z)$ を満足する周期関数であるから, $q \in \mathbb{D}^*$ のとき,

$$f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right)$$

となり, (2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。 $L_a(q)/2\pi i$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数, f も \mathbb{H} 上の有理型関数であるから, これら関数の合成である \tilde{f} は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数である。 $\bigcup_{a>0}(\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$ であるから, \tilde{f} が \mathbb{D}^* 上の有理型関数であることが分かった。 証明終

定義 2.5 f を弱モジュラー関数とする。

(1) \tilde{f} が 0 で有理型であるとき, f が ∞ で有理型という。

(2) \tilde{f} が 0 で正則であるとき, f が ∞ で正則という。

\tilde{f} が 0 で有理型のとき, ローラン展開

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ, $q = q(z) = \exp(2\pi iz)$ のとき

$$f(z) = f\left(\frac{\log \exp(2\pi iz)}{2\pi i}\right) = \tilde{f}(\exp(2\pi iz)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

となり, f のフーリエ展開を与える。複素数列 $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$ を f のフーリエ係数と呼ぶ。また f が ∞ で正則であれば, $N = 0$ とできる。

定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式) $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数とする。

(1) f が ∞ で有理型のとき, f をレベル 1 荷重 k のモジュラー関数と呼ぶ。

(2) f が \mathbb{H} 上の正則関数で, かつ ∞ で正則のとき, f をレベル 1 荷重 k のモジュラー形式と呼ぶ。

(3) モジュラー形式 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ の q 展開とは, \tilde{f} のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

のことをいう。さらに $a(0) = 0$ のとき f をカスプ形式という。

命題 2.7 k を整数とし, 集合 M_k, S_k を

$$M_k = \{f: f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である}\}$$

$$S_k = \{f: f \text{ は 1 荷重 } k \text{ のカスプ形式である}\}$$

で定める。このとき M_k と S_k は \mathbb{C} 線形空間である。

証明 M_k が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式 $f, g \in M_k$ を勝手に取るとき, 正則関数の和は正則関数であるから, $f + g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\tilde{f} + \tilde{g}: \mathbb{D}^* \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(f + g)^{\sim} = \tilde{f} + \tilde{g}$ であるから, $(f + g)^{\sim}: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数であ

る。あとは $f + g$ が (\star) を満足することを示せば、 $f + g \in M_k$ であることが分かる。元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると、

$$\begin{aligned} (f + g)(\gamma \cdot z) &= f(\gamma \cdot z) + g(\gamma \cdot z) \\ &= (cz + d)^k f(z) + (cz + d)^k g(z) \\ &= (cz + d)^k (f + g)(z) \end{aligned}$$

と計算でき、 (\star) を $f + g$ が満足することが確かめられ、 $f + g \in M_k$ である。 M_k がスカラー倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手なカスプ形式 $f, g \in S_k$ に対して、 $(f + g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}$ が成立することから、 S_k が \mathbb{C} 線形空間であることも従う。

証明終

命題 2.8 整数 k, l とモジュラー形式 $f \in M_k, g \in M_l$ に対し、 $fg \in M_{k+l}$ が成立する。また f がカスプ形式のとき fg もカスプ形式である。

証明 正則関数の積は正則関数であるから、 $fg: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\tilde{f}\tilde{g}: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(fg)^\sim = \tilde{f}\tilde{g}$ であるから、 $(fg)^\sim$ も正則関数である。あとは fg が (\star) を満足することを示せばよく、元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると、

$$\begin{aligned} (fg)(\gamma \cdot z) &= (cz + d)^k f(z)(cz + d)^l g(z) \\ &= (cz + d)^{k+l} (fg)(z) \end{aligned}$$

と計算できるので、 $fg \in M_{k+l}$ であることが確かめられた。また f がカスプ形式のとき、

$$\begin{aligned} \tilde{f}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \\ \tilde{g}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \end{aligned}$$

とローラン展開すると、

$$(fg)^\sim(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n, \quad c(n) = \sum_{m=0}^n a(m)b(n-m)$$

であるから、特に $c(0) = a(0)b(0) = 0$ で、 fg はカスプ形式であることが分かる。

証明終

3 アイゼンシュタイン級数

定義 3.1 k を 3 以上の整数とする。各複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して、級数

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

を定め、 $G_k(z)$ を **アイゼンシュタイン級数** と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

補題 3.2 K を \mathbb{H} の有界閉集合とする。このとき勝手な点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$(3.1) \quad C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

が成立するような正数 C が存在する。

証明 $C_1 = \min\{\Im z : z \in K\}$, $C_2 = \max\{|\Re z| : z \in K\}$ と置く。

点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を勝手に取り、 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と表すと、

$$|mz + n| = |(mx + n) + imy| = \sqrt{(mx + n)^2 + (my)^2}$$

となる。 $C_2 = 0$ であれば常に $x = 0$ で、 $|mz + n| \geq |mx + n| = |n|$ かつ $|mz + n| \geq y|m| \geq C_1|m|$ であるから、 $C = \min\{1, C_1\}$ が (3.5) を満足する正数である。 $C_2 \neq 0$ の場合を考える。前述の議論と同じく $|n|$ については $|mz + n| \geq C_1|m|$ である。 $|m|$ について、 $|m| \geq |n|/(2C_2)$ のとき

$$(3.2) \quad |mz + n| \geq C_1|m| \geq \frac{C_1}{2C_2}|n|$$

となり、そうでないとき $n \neq 0$ かつ $|m/n| < 1/(2C_2)$ となり、常に $|m/n||x| \leq 1/2$ で、

$$(3.3) \quad |mx + n| = \left| n \left(\frac{m}{n}x + 1 \right) \right| \geq |n| \left(1 - \left| \frac{m}{n} \right| |x| \right) \geq \frac{1}{2}|n|$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると、 $C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$ が (3.5) を満足する正数である。 証明終

定理 3.3 $k \geq 3$ のとき G_k は \mathbb{H} 上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

証明 K を \mathbb{H} の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より、勝手な点 $z \in K$ と勝手な元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

となるような正数 C が存在し,

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{|mz + n|^k} \leq \frac{1}{C^k} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k}$$

であるから、右辺の級数の収束を示せば、 G_k が K 上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数 N に対して $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \max\{|m|, |n|\} = N\}$ の個数を数える。 $|m| > |n|$ のものを数えると、 $m = \pm N$ で、 $n = -N + 1, -N + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1$ の $2(2N - 1)$ 個ある。同様に $|n| < |m|$ のものも $2(2N - 1)$ 個ある。 $|m| = |n|$ のものは、 $(N, N), (N, -N), (-N, N), (-N, -N)$ の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は $8N$ 個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8N}{N^k} = 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{k-1}}$$

であり、いま $k \geq 3$ であるからこの正項級数は収束する。以上で、 G_k が \mathbb{H} 上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式 $mz + n$ は \mathbb{H} 上で常に零でないから、有理多項式 $1/(mz + n)$ は \mathbb{H} 上の正則関数であり、 G_k の収束先が正則関数であることも分かる。 証明終

定理 3.4 $k \geq 3$ のとき正則関数 $G_k: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ はレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取る。 γ が全単射写像 $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を誘導することに注意すると、

$$\begin{aligned} G_k(\gamma \cdot z) &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m(\gamma \cdot z) + n)^k} \\ &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{(cz + d)^k}{(m(az + b) + n(cz + d))^k} && \because \text{分母を払った} \\ &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{(cz + d)^k}{((ma + nc)z + (mb + nd))^k} \\ &= \sum_{\substack{(m', n'): \\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}, \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}} \frac{(cz + d)^k}{(m'z + n')^k} \\ &= (cz + d)^k \sum_{\substack{(m', n') \in \mathbb{Z}^2: \\ (m', n') \neq (0,0)}} \frac{1}{(m'z + n')^k} && \because \gamma \text{ の全単射性より} \end{aligned}$$

$$= (cz + d)^k G_k(z)$$

となり, G_k が (\star) を満足することが確かめられた。

証明終

系 3.5 k が 3 以上の奇数のとき \mathbb{H} 上で $G_k(z) = 0$ である。

証明 定理 3.4 より G_k が荷重 k の弱モジュラー関数であるから, 命題 2.2 (1) より G_k は \mathbb{H} 上の零関数である。

証明終

さらに弱モジュラー関数 G_k はモジュラー形式である。

定理 3.6 $k \geq 3$ のとき G_k は ∞ で正則である。つまり G_k はモジュラー形式である。

この定理の証明のために, ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて G_k の q 展開を表示する。

定義 3.7 (1) 1 より大きい実数 s に対して,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数 ζ を定め, **ゼータ関数** と呼ぶ。

(2) 正整数 n と実数 l に対して,

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d|n}} d^l$$

として関数 σ_l を定め, **約数関数** と呼ぶ。

(3) 原点周りの \mathbb{D}^* 上の正則関数 $z/(e^z - 1)$ のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数 B_k を **ベルヌーイ数** と呼ぶ。

補題 3.8 (オイラーの等式) 正の偶数 k に対して,

$$(3.4) \quad \zeta(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

が成立する。

証明 三角関数の公式

$$(3.5) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

を用いる¹⁾。(3.5) の左辺に z を掛けたものを計算すると, $z \in \mathbb{H}$ のとき

$$\pi z \cot(\pi z) = \pi z \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad \because \cot \text{ の定義}$$

1) 証明は, 例えばヘルグロッツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$\begin{aligned}
&= \pi z \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\
&= \pi iz \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} \\
(3.6) \quad &= \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi z)^k && \because z \in \mathbb{H} \text{ なので, 命題 2.3 から} \\
&&& e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので}
\end{aligned}$$

となる。次に (3.5) の右辺に z を掛けたものを計算すると,

$$\begin{aligned}
z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} &= 1 + z \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} \right) \\
&= 1 + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} && \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2}{n^2 - z^2} && \because z \text{ を総和の中に入れ, 符号を調整した} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \frac{1}{1 - (\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{n^{2l}} && \because \frac{1}{1-z} \text{ の原点におけるテイラー展開} \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty} 2z^{2(l+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(l+1)}} && \because \text{和を交換した} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2z^{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2l}} && \because \text{添字 } l \text{ を } 1 \text{ ずらした} \\
(3.7) \quad &= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2\zeta(2l)z^{2l}
\end{aligned}$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく, 2 以上の偶数 $k = 2l$ に関する z^k の係数を比較することで, 目的の等式

$$\xi(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。

証明終

補題 3.9 正の偶数 k に対して,

$$(3.8) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$$

が成立する。

証明 上述の補題と同様に三角関数の公式

$$(3.9) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

を用いる。(3.9)の左辺を書き直すと,

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{ の定義} \\ &= \pi \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\ &= \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\ &= \pi i + \pi i \frac{2}{q - 1} && \because q = e^{2\pi iz} \text{ と置いているので} \\ &= \pi i - 2\pi i \frac{1}{1 - q} \\ &= \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n && \because \frac{1}{1 - q} \text{ の原点におけるテーラー展開} \end{aligned}$$

となるので, $n \geq 1$ のとき $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} q^n = (2\pi i n)^{k-1} q^n$ であることに注意して, (3.9)の両辺を z について $(k-1)$ 階微分すると,

$$-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n = (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}$$

となり, 両辺を $(k-1)!$ で割ると, いま k が偶数であるから $(-1)^{k-1} = -1$ なので,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

となる。また (3.4) から

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k}$$

であるから, 目的の等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

を得られる。

証明終

定理 3.10 4 以上の偶数 k に対して, G_k の q 展開が

$$(3.10) \quad G_k(z) = 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

と表される。

証明 $G_k(z)$ を計算していくと,

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^k}}_{m=0 \text{ の項}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(-mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz-n)^k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \right) \quad \because k \text{ が偶数なので} \\
&= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} (e^{2\pi i m z})^n \right) \quad \because (3.8) \text{ を用いた} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^{mn} \right) \quad \because q^{mn} = (e^{2\pi i m z})^n \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}: \\ n > 0, n|d}} n^{k-1} q^d \right) \quad \because d = mn \text{ と置いた} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d \right) \quad \because \text{約数関数の定義} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)
\end{aligned}$$

と計算でき、これが目的の等式であった。

証明終

定理 3.6 の証明 k が奇数のときは G_k が零関数であるので明らかである。 k が偶数のとき (3.10) から

$$\tilde{G}_k(q) = 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

が成立するので、 $\lim_{q \rightarrow 0} \widetilde{G}_k(q) = 2\xi(k)$ である。これは $\widetilde{G}_k(q)$ が原点で正則であることを意味し、したがって G_k が ∞ で正則であることが従う。 証明終

定義 3.11 3 以上の整数 k に対して、 $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上の正則関数 E_k を

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\xi(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

で定め、**正規化アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

ベルヌーイ数（と約数関数）を計算できれば、 E_k を明示的に書き下すことができるので、ここでベルヌーイ数の漸化式を述べておく。

命題 3.12 $B_0 = 1$, かつ $d \geq 1$ のとき

$$B_d = -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k$$

が成り立つ。

証明 e^z を原点周りでテイラー展開すると

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

であるから、

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

となる。したがって

$$1 = \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k \right) = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^d \frac{B_k}{k! (d-k+1)!} \right) z^d$$

となるので、係数比較をすることで、 $B_0 = 1$ かつ

$$(3.11) \quad \sum_{k=0}^d \frac{B_k}{k! (d-k+1)!} = 0$$

が分かる。(3.11) を B_d について解くことで、

$$\begin{aligned} B_d &= \sum_{k=0}^{d-1} \frac{d!}{k! (d-k+1)!} B_k \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d+1)!}{k! (d-k+1)!} B_k && \because d+1 \text{ を挟み込んだ} \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k && \because \text{二項係数の定義} \end{aligned}$$

と計算でき、目的の漸化式を得られる。

証明終

いくつかベルヌーイ数を計算すると、

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2}, \\ B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}, \\ B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0, \\ B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0\right) = -\frac{1}{30}, \\ B_5 &= \dots = 0, \\ B_6 &= \dots = \frac{1}{42} \end{aligned}$$

などとなる。したがって、正規化アイゼンシュタイン級数は

$$\begin{aligned} E_4(z) &= 1 - 8(-30) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n = 1 - 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \dots), \\ E_6(z) &= 1 - 12 \cdot 42 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n = 1 - 504(q + 33q^2 + 244q^3 + \dots) \end{aligned}$$

などとなる。ここで正則関数 $E_4^3 - E_6^2$ を考えると、これは命題 2.7 と命題 2.8 から荷重 12 のモジュラー形式で、上の計算より

$$(E_4(z))^3 - (E_6(z))^2 = 1728q + o(q)$$

となるので、荷重 12 のカスプ形式であることが分かる。カスプ形式 Δ を $(E_4^3 - E_6^2)/1728$ で定め、**ラマヌジャンのデルタ**と呼ぶ。また Δ のフーリエ係数を $(\tau(n))_{n=0}^{\infty}$ で表し、**ラマヌジャンのタウ関数**と呼ぶ。具体的には

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(1) = 1, \quad \tau(2) = -24, \quad \tau(3) = 252, \dots$$

と計算できる。ラマヌジャンのタウ関数については、ラマヌジャンによる有名な予想がある。

予想 3.13 (ラマヌジャン予想) ラマヌジャンのタウ関数に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 n, m に対して、 n と m が互いに素であるならば

$$\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$$

が成立する。

(2) p を素数, r を正整数とするとき

$$\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})$$

が成立する。

予想 3.13 は, 以降で扱うヘッケ作用素を用いることで証明される。

4 ヘッケ作用素

ヘッケ作用素を定義するための準備を行なっていく。正整数 n に対して集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n \right\}$$

を \mathbf{M}_n と置き, 行列の左乗算によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の \mathbf{M}_n への左群作用を定めておく。

補題 4.1 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n を考える。勝手な行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n$ と軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$(4.1) \quad (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (\tilde{c}z + \tilde{d})^{-k} f\left(\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}\right)$$

が成立する。

証明 軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の元は, 行列 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

と表される。すると (4.1) の右辺は

$$\begin{aligned} & (ac'z + cd')^{-k} f\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z \\ &= (ac'z + cd')^{-k} (c' \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z + d')^k f\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) && \because (\star) \text{より} \\ &= (ac'z + cd')^{-k} \left(c' \frac{az + b}{cz + d} + d'\right)^k f\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) && \because \text{作用の定義} \\ &= (ac'z + cd')^{-k} \left(\frac{(ac' + cd')z + (bc' + dd')}{cz + d}\right)^k f\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) \\ &= (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \end{aligned}$$

と計算でき, (4.1) の左辺と等しいことが分かる。

証明終

補題 4.1 から, レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ に対して

$$(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

を軌道の代表元の取り方に依らずに定義できる。

定義 4.2 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して、 \mathbb{H} 上の有理型関数 $T_n f$ を、

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n}} (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

で定める。レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数の集合から \mathbb{H} 上の有理型関数への写像 T_n をヘッケ作用素と呼ぶ。

まずヘッケ作用素によって弱モジュラー関数が弱モジュラー関数に写ることを見る。

命題 4.3 f がレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数であるとき、 $T_n f$ も荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明 行列 $\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を勝手に取る。 γ の右乗算が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ 上の置換を引き起こすことに注意すると、

$$\begin{aligned} T_n f(\gamma \cdot z) &= n^{k-1} \sum_{\substack{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n}} (c(\gamma \cdot z) + d)^{-k} f\left(\frac{a(\gamma \cdot z) + b}{c(\gamma \cdot z) + d}\right) \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n}} \left(c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d\right)^{-k} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot z\right) \quad \because \text{作用の定義} \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n}} \left(\frac{(a'c + c'd)z + (b'c + dd')}{c'z + d'}\right)^{-k} f\left(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \cdot z\right) \\ &= (c'z + d')^k n^{k-1} \sum_{\substack{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n}} ((a'c + c'd)z + (b'c + dd'))^{-k} f\left(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \cdot z\right) \\ &= (c'z + d')^k n^{k-1} \sum_{\substack{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n}} (c(\gamma \cdot z) + d)^{-k} f\left(\frac{a(\gamma \cdot z) + b}{c(\gamma \cdot z) + d}\right) \quad \because \gamma \text{ が } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n \text{ 上の} \\ &\quad \text{置換なので} \\ &= (c'z + d')^k T_n f(z) \end{aligned}$$

と計算でき、 $T_n f$ が (\star) を満足することが確かめられる。ゆえに $T_n f$ は荷重 k の弱モジュラー関数である。 証明終

ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ の完全代表系としてエルミート標準形を取れることを見ておく。

命題 4.4 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n$ に対して、 $\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がエルミート標準形、すなわち

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} > 0, \quad \tilde{a}\tilde{d} = n, \quad 0 \leq \tilde{b} < \tilde{d}$$

を満足する行列 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在する。

証明 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が非特異であるから、定理 A.2 より $\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がエルミート標準形となるようなユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。エルミート標準形の行列式は正で、かつ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式も正であるから、 $\det(\gamma) = 1$ 、すなわち $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であることが従う。

証明終

系 4.5 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f と正整数 n に対して、

$$(4.2) \quad T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

と表せる。

証明 命題 4.4 とエルミート標準形の一意性から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ の完全代表系として $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n : a > 0, 0 \leq b < d \right\}$ を取れるので。

証明終

(4.2) によるヘッケ作用素の表示を用いることで、モジュラー関数がモジュラー関数に写ることを示せる。

定理 4.6 f をレベル 1 荷重 k のモジュラー関数とし、その q 展開を $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) q^m$ とする。このとき

$$(4.3) \quad T_n f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m, \quad \gamma(m) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a > 0, \\ a | \gcd(m, n)}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}\right)$$

が成立する。

証明 (4.2) を用いて計算を行うと、

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) && \because (4.2) \text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az+b}{d} m\right) && \because f \text{ の } q \text{ 展開} \\ (4.4) \quad &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az}{d} m\right) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、整数 d, m に対して $\sum_{b=0}^{d-1} \exp(2\pi i \frac{b}{d} m)$ を計算すると、

$$(4.5) \quad \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right)$$

$$= \begin{cases} d & d \mid m \text{ のとき } (\because \text{常に } \exp(2\pi i \frac{b}{d}m) = 1 \text{ なので}) \\ \frac{1 - \exp(2\pi i(m/d))}{1 - \exp(2\pi i(m/d))} = 0 & d \nmid m \text{ のとき } (\because \text{等比数列の和}) \end{cases}$$

となる。(4.4) の計算を続けると,

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az}{d} m\right) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right) \quad \because (4.4) \text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n, d \mid m}} d^{-k+1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i a z \frac{m}{d}\right) \quad \because (4.5) \text{ より} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d \mid n, d \mid m}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i z \frac{mn}{d^2}\right) \quad \because a = n/d \\ (4.6) \quad &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d \mid \gcd(m, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}} \end{aligned}$$

となる。ここで関係 $(m, d) \mapsto (m/d, n/d)$ によって全単射写像

$$(4.7) \quad \{(m, d) : m, d \in \mathbb{Z}, d > 0, d \mid \gcd(m, n)\} \rightarrow \{(m', a) : m', d \in \mathbb{Z}, a > 0, a \mid n\}$$

を得られるので, (4.6) の計算を続けて,

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d \mid \gcd(m, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}} \quad \because (4.6) \\ &= \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, a \mid n}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{nm'}{a}\right) q^{m'a} \quad \because (4.7) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, a \mid \gcd(m, n)}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}\right) \right) q^m \end{aligned}$$

と計算でき, $T_n f$ を目的の形で表示できた。

証明終

系 4.7 f がレベル 1 荷重 k のモジュラー関数のとき, $T_n f$ もレベル 1 荷重 k のモジュラー関数である。さらに f がモジュラー形式ならば, $T_n f$ もモジュラー形式である。

証明 $a \mid n$ なる正整数 a に対して n/a^2 は高々有界であるから, $m \ll 0$ のとき (4.3) における $\gamma(m)$ は零である。ゆえに $T_n f$ は ∞ で有理型で, モジュラー関数であることが従う。また f がモジュラー形式であれば, 負の整数 m に対して常に $\gamma(m) = 0$ であることが分かるので, $T_n f$ は ∞ で正則で, モジュラー形式であることが従う。

証明終

A 整数係数行列のエルミート標準形

整数係数の非特異正方行列に対してエルミート標準形が存在することを、2 次の場合に限定して取り扱う。

定義 A.1 (非特異正方行列のエルミート標準形) A を整数係数の非特異 2 次行列とする。ユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ によって

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \quad h_{11}, h_{22} > 0 \text{ かつ } 0 \leq h_{12} < h_{22}$$

と表せるとき、この上三角行列を A の**エルミート標準形**と呼ぶ。

エルミート標準形を誘導するにあたって、

- ・ 一行目と二行目を交換する行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ・ 一行目を -1 倍する行列 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ・ 二行目を -1 倍する行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ・ 一行目を m 倍して二行目に足す行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$
- ・ 二行目を m 倍して一行目に足す行列 $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

が基本となるユニモジュラー行列で、これら行列の左乗算によって行列の変形を行う。

定理 A.2 整数係数の非特異 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してエルミート標準形は一意的に存在する。

証明 存在性と一意性を分けて証明する。

存在性 $a = 0$ または $c = 0$ なら、行の入れ替えを行うことで $c = 0$ と考えて良く、すると非特異性から $a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。さらに各行を適当に -1 倍することで $a > 0$ かつ $d > 0$ として良い。 b を d で割ることで

$$b = qd + b', \quad q, b' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq b' < d$$

を得られる。を満足する q, b' を取り、 $-q$ 倍した二行目を一行目に足して A のエルミート標準形 $\begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を得る。 a, c が共に零でない場合は、以下のようにユークリッドの互除法を用いて上述の議論に帰着させる。必要なら一行目と二行目を入れ替えて、 $0 < |a| \leq |c|$ として良い。 c を a で割って、

$$c = qa + c', \quad q, c' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq c' < |a|$$

を満足する q, c' を取り、 $-q$ 倍した一行目を二行目に足して、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d - qb \end{pmatrix}$ を得る。

$c' \neq 0$ であれば, $0 \leq |c'| < |a|$ であるから, 行を交換して再度同じ議論を繰り返すことで, $c' = 0$ としてよく, 証明の最初の議論に帰着された。

一意性 二つの A のエルミート標準形

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \gamma' \cdot A = \begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix}, \quad \gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

があるとする, $\gamma' \cdot \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書けば

$$\begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$$

となる。これから $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列であることを示す。 $h_{11}c = 0$ かつ $h_{11} \neq 0$ であるから, $c = 0$ である。すると $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ がユニモジュラーであるから, $ad = 1$ または $ad = -1$ である。 $h_{11}a = h'_{11}$ かつ $h_{11}, h'_{11} > 0$ であるから, $a > 0$ である。同様に $h_{22}d = h'_{22}$ かつ $h_{22}, h'_{22} > 0$ であるから, $d > 0$ である。したがって $a = d = 1$ であることが分かる。 $0 \leq h'_{12} = h_{12} + bh_{22}$ かつ $0 \leq h_{12} < h_{22}$ であるから, $b \geq 0$ でなければならない。また $h'_{22} = h_{22}$ であるから, $0 \leq h'_{12} < h'_{22}$ であることと合わせて $b = 0$ であることが分かる。ゆえに $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列で, 二つのエルミート標準形が等しいことが従う。 証明終



文献

- [1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. <https://www.ma.imperial.ac.uk/~dhelm/M4P58/ModularForms2.pdf> (2026 年 1 月 1 日最終確認).
- [2] 岸 正倫・藤本 担孝 (1980). 複素関数論. 学術図書出版社.
- [3] Aigner, M. and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.