

# グラスマン多様体とプリュッカーハイツ

2025年12月20時33分更新

## 目 次

1	射影多様体	1
2	プリュッカーハイツ埋め込み	4
付録	テンソル代数・対称代数・外算子	6



本文書では、小行列式の等式であるプリュッカーハイツ関係式を示すことを目標にして、グラスマン多様体と旗多様体について論じる。

$K$  を無限体とし、その非零元がなす乗法群を  $K^\times$  で表す。 $K$  線型空間  $V$  に対して、その双対空間を  $V^*$  で表し、双対対  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \rightarrow K$  を備えておく。

## 1 射影多様体

まずは集合としてのグラスマン多様体および射影空間を定めることから始める。

**定義 1 (集合としてのグラスマン多様体)**  $E$  を有限次元  $K$  線型空間とし、その次元を  $m$  と置く。

(1)  $m$  以下の正整数  $r$  に対して、集合

$$\{V : V \text{ は } E \text{ の } r \text{ 次元部分空間である}\}$$

$\text{Gr}_r(E)$  で表し、**グラスマン多様体**と呼ぶ。 $\text{Gr}_r(E)$  の元を  $\text{Gr}_r(E)$  の**点**と呼ぶ。

(2)  $\text{Gr}_1(E)$  を特に  $\mathbb{P}(E)$  で表し、 $E$  の**射影空間**と呼ぶ。

(3)  $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m)$  で  $K^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  の  $K^\times$  による群作用を定め、その商集合を  $\mathbb{P}_K^m$  で表し、 $m$  次元の**射影空間**と呼ぶ。 $(x_1, \dots, x_m)$  の剩余類を  $[x_1 : \dots : x_m]$  で表し、 $\mathbb{P}_K^m$  の**点**と呼ぶ。

**観察 2 (齊次座標について)**  $E$  の基底  $e_1, \dots, e_m$  を取って、点  $L \in \mathbb{P}(E)$  の生成元の係数を考えると、

$$\{(x_1, \dots, x_m) : L = \text{Span}_K(x_1e_1 + \dots + x_m e_m)\} = [x_1 : \dots : x_m]$$

となるので、 $\mathbb{P}_K^m$  の点を定める。この点を  $L$  の**齊次座標**と呼ぶ。逆に  $\mathbb{P}_K^m$  の点  $[x_1 : \dots : x_m]$

が  $\mathbb{P}(E)$  の点  $\text{Span}_K(x_1e_1 + \dots + x_m e_m) \subset E$  を定めるので,  $e_1, \dots, e_m$  が全単射写像  $\mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}_K^m$  を誘導することがわかる。

次に集合として定義した  $\mathbb{P}(E)$  に, 代数的集合の構造を入れる。そのために基本となるのは次の補題である。

**補題 3**  $n$  を非負整数に対して, 以下で構成する線型写像

$$(E^*)^{\otimes n} \rightarrow (E^{\otimes n})^*; v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n(\cdot)$$

は同型である。

**構成**  $n$  個のベクトル  $v_1, \dots, v_n \in E^*$  が定める  $E^n$  上の関数  $(w_1, \dots, w_n) \mapsto v_1(w_1) \cdots v_n(w_n)$  が  $n$  重線型であるから,  $(E^{\otimes n})^*$  の元  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n(\cdot)$  を定める (図 1 左図)。対応  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n$  は  $n$  重線型であるから, 線型写像  $(E^*)^{\otimes n} \rightarrow (E^{\otimes n})^*$  が誘導される (図 1 右図)。

$$\begin{array}{ccc} (w_1, \dots, w_n) & \in & E^n \longrightarrow E^{\otimes n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ v_1(w_1) \cdots v_n(w_n) & \in & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (v_1, \dots, v_n) & \in & (E^*)^n \longrightarrow (E^*)^{\otimes n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_n(\cdot) & \in & (E^{\otimes n})^* \end{array}$$

$v_1 \otimes \dots \otimes v_n(\cdot)$

図 1 線型汎関数のテンソル積 (左図) と目的の写像の誘導 (右図)

**証明**  $E$  の基底  $e_1, \dots, e_m$  を取って,  $E^*$  の双対基底  $e_1^*, \dots, e_m^*$  を取る。すると  $\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_n}^* : 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m\}$  が  $(E^*)^{\otimes n}$  の基底で, 構成より  $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_n}^* = (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})^*$  であるので,  $(E^*)^{\otimes n}$  の基底が  $(E^{\otimes n})^*$  の基底に写ることがわかり, 件の写像が同型であることが示された。

証明終

$S^*(E^*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(E^*)$  を  $E^*$  の対称代数とし, 次のようにして  $S^*(E^*)$  を  $E$  上の  $K$  値関数がなす環  $\mathcal{F}(E, K)$  に埋め込む。補題 3 元  $f \in (E^*)^{\otimes n}$  を  $(E^{\otimes n})^*$  の元と考え, 関数

$$f(\cdot) : E \rightarrow K; w \mapsto \langle w \otimes \dots \otimes w, f \rangle$$

を対応させると, 線型写像  $(E^*)^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{F}(E, K)$  が得られ, テンソル代数  $T^*(E^*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (E^*)^{\otimes n}$  からの環準同型  $T^*(E^*) \rightarrow \mathcal{F}(E, K)$  に拡張できる。この準同型によって, 勝手なベクトル  $v_1, v_2 \in E^*$  に対して  $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$  が零に写るので, 対称代数からの環準同型  $S^*(E^*) \rightarrow \mathcal{F}(E, K)$  が誘導される。この環準同型の単射性は補題として扱うことにする。

**補題 4**  $S^*(E^*) \rightarrow \mathcal{F}(E, K); v_1 \cdots v_n \mapsto v_1 \cdots v_n(\cdot)$  は環同型である。

**証明**  $E$  の基底  $e_1, \dots, e_m$  を固定し,  $E^*$  の双対基底  $e_1^*, \dots, e_m^*$  を取る。 $e_1, \dots, e_m$  によって環同型  $\mathcal{F}(E, K) \rightarrow \mathcal{F}(K^m, K)$  が得られ,  $X_1, \dots, X_m$  を不定元とすると, 対応  $X_i \mapsto e_i^*$  によって

環同型  $K[X_1, \dots, X_m] \rightarrow S^*(E^*)$  が得られる。すると合成  $K[X_1, \dots, X_m] \rightarrow \mathcal{F}(K^m, K)$  は多項式を多項式写像に写す写像で、これが单射であることを示せばよい。

この写像の单射性を  $m$  に関する帰納法で示す。 $m = 1$  のとき、多項式写像が零であることは、一変数多項式が無限個の解を持つことを意味するので、もとの多項式も零で、件の写像は零である。 $m > 1$  とし、 $K[X_1, \dots, X_{m-1}][X_m]$  と考える。この多項式環の元  $f = \sum_{i=0}^{\infty} g_i X_m^i$ ,  $g_i \in K[X_1, \dots, X_{m-1}]$  を取り、多項式関数として零であると仮定する。 $K$  値ベクトル  $(x_1, \dots, x_{m-1})$  を勝手に取ると、 $f(x_1, \dots, x_{m-1}, X_m) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x_1, \dots, x_{m-1}) X_m^i$  は無限個の解を持つ一変数多項式環であるので、すべての  $i$  について  $g_i(x_1, \dots, x_{m-1}) = 0$  である。 $(x_1, \dots, x_{m-1})$  を勝手に取っていたので、帰納法の仮定により  $g_i = 0$  となり、 $f = 0$  であることも従うので、件の写像は单射であることが示された。 証明終

**観察 5** 齊次元  $f \in S^n(E^*)$  と、点  $L \in \mathbb{P}(E)$  を考える。ベクトル  $v_1^{(i)}, \dots, v_n^{(i)} \in E^*$  を用いて  $f = \sum_{i=1}^k v_1^{(i)} \cdots v_n^{(i)}$  と表し、点  $w_0 \in L \setminus \{0\}$  を一つ固定して  $f$  に代入すると、

$$f(w_0) = \sum_{i=1}^k v_1^{(i)}(w_0) \cdots v_n^{(i)}(w_0)$$

と書ける。他の点  $w \in L \setminus \{0\}$  を勝手に取ると、元  $\lambda \in K^\times$  を用いて  $w = \lambda w_0$  と表せるので、 $f$  に代入すると

$$f(w) = \sum_{i=1}^k v_1^{(i)}(\lambda w_0) \cdots v_n^{(i)}(\lambda w_0) = \sum_{i=1}^k \lambda^n v_1^{(i)}(w_0) \cdots v_n^{(i)}(w_0) = \lambda^n f(w_0)$$

となる。特に  $E$  の基底  $e_1, \dots, e_m$  とその双対基底  $e_1^*, \dots, e_m^*$  を取って、 $e_1^*, \dots, e_m^*$  を  $S^*(E^*)$  の元と考えると、この基底に関する  $L$  の齊次座標が  $[e_1^*(w) : \cdots : e_m^*(w)]$  で与えられる。このような観点から、 $S^*(E^*)$  を  $\mathbb{P}(E)$  の**齊次座標環**と呼ぶ。

以上で  $\mathbb{P}(E)$  に代数的集合の構造を入れる準備が整った。

**定義 6 (射影空間の代数的集合)**  $S^*(E^*)$  の元  $f$  と、 $S^*(E^*)$  の部分集合  $S$  と、 $\mathbb{P}(E)$  の部分集合  $V$  を取る。

- (1) 点  $L \in \mathbb{P}(E)$  が  $f$  の零点であるとは、 $L$  の勝手な元  $w$  に対して  $f(w) = 0$  が成立するときをいう。
- (2)  $\mathbb{P}(E)$  の部分集合  $V(S)$  を、

$$\{L \in \mathbb{P}(E) : \text{勝手な元 } f \in S \text{ に対して, } L \text{ が } f \text{ の零点である}\}$$

として定め、この形の部分集合を  $\mathbb{P}(E)$  の**代数的集合**と呼ぶ。

- (3)  $S^*(E^*)$  の部分集合  $I(V)$  を、

$$\{f \in S^*(E^*) : f \text{ は, } V \text{ のすべての点を零点として持つ}\}$$

として定めると、これは齊次イデアルで、 $V$ のイデアルと呼ぶ。

- (4) 代数的集合  $V(S)$  が、 $V(S)$  とは異なる代数的集合  $V(S_1)$  と  $V(S_2)$  の和集合  $V(S_1) \cup V(S_2)$  と等しいとき、可約であるといい、そうでないとき既約であるという。既約な代数的集合を特に射影多様体と呼ぶ。射影多様体のイデアルは素イデアルである。

ここで零点定理も述べておく。

**定理 7 (射影的零点定理)**  $K$  を代数閉体とする。 $S^*(E^*)$  の齊次イデアル  $I$  に対して次の二つが成立する。

- (1)  $V(I) = \emptyset$  となるのは、 $\bigoplus_{n=N}^{\infty} S^*(E^*) \subset I$  を満足する整数  $N$  が存在するとき、かつそのときに限る。

- (2)  $V(I) \neq \emptyset$  であれば、 $I(V(I)) = \sqrt{I}$  が成立する。ここで  $\sqrt{I}$  は  $I$  の根基イデアルを表す。

**系 8 (対応定理)**  $K$  を代数閉体とし、 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} S^*(E^*)$  を  $S_+$  と置く。このとき対応  $I \mapsto V(I)$  が全単射写像

$$\{I : I \text{ は } S^*(E^*) \text{ の根基齊次イデアルで, } I \neq S_+\} \rightarrow \{V : V \text{ は } \mathbb{P}(E) \text{ の代数的集合}\}$$

を定める。

**証明** 対応  $V \mapsto I(V)$  が逆写像を定めることを示せばよい。勝手な代数的集合  $V$  に対して  $V(I(V)) = V$  が成立することは定義から直ちに従う。(8) の左の集合に属すイデアル  $I$  を勝手に取る。勝手な正整数  $N$  に対して  $\sqrt{\bigoplus_{n=N}^{\infty} S^*(E^*)} = S_+$  が成立するので、 $V(I) = \emptyset$  を満足する  $I$  は、定理 7(1) より  $S^*(E^*)$  と等しく、

$$I(V(I)) = I(\emptyset) = S^*(E^*) = I$$

となる。 $V(I) \neq \emptyset$  を満足する  $I$  に対しては、定理 7(2) より  $I(V(I)) = I$  が成立し、件の対応が互いに逆となる写像を定めることが示された。 証明終

これから行うことは、グラスマン多様体を高次元の射影空間に射影多様体として埋め込むことである。

## 2 プリュッカーリー埋め込み

**定義 9 (プリュッカーリー埋め込み)**  $r$  を  $m$  以下の正整数とする。点  $V \in \text{Gr}_r(E)$  に対して、包含写像  $\iota: V \hookrightarrow E$  を取ると、 $r$  次外幂  $\wedge^r V$  は一次元であるから、零でない線型写像  $\wedge^r V \hookrightarrow \wedge^r E$ ;  $w_1 \wedge \cdots \wedge w_r \mapsto w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$  が单射である。この写像による像を  $\iota(V)$  で表すと、 $\iota(V)$  は  $\mathbb{P}(E)$  の点であり、写像  $\iota: \text{Gr}_r(E) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^r E)$  が定まる。この写像  $\iota$  をプリュッカーリー埋め込みと呼ぶ。

**観察 10 (プリュッカ一座標)**  $E$  の基底  $e_1, \dots, e_m$  を取ると、辞書式順序で並べたベクトル  $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m)$  が  $\bigwedge^r E$  の基底である。 $\{1, \dots, m\}$  を  $[m]$ ,  $r$  個の元からなる部分集合すべてを  $\binom{[m]}{r}$  で表すことにする。 $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$  として  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$  を  $e_I$  で表すことにはすれば、基底は  $(e_I : I \in \binom{[m]}{r})$  と表せる。点  $V \in \text{Gr}_r(E)$  に対して  $V$  の基底  $w_1, \dots, w_r$  を取って、その表現行列を考えると、 $(m, r)$  型の行列  $A$  を用いて

$$(w_1 \cdots w_r) = (e_1 \cdots e_m)A$$

と表せる。元  $I \in \binom{[m]}{r}$  に対して、 $I$  の番号に対応する行ベクトルが定める小行列を  $A_{I,[r]}$  で表すと、

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_r = \sum_{I \in \binom{[m]}{r}} |A_{I,[r]}| e_I$$

となるので、点  $(|A_{I,[r]}| : I \in \binom{[m]}{r}) \in K^{(m)}_r$  が  $V$  の齊次座標を与える。この齊次座標を  $V$  のプリュッカ一座標と呼ぶ。

第一に、プリュッカ一埋め込みが单射であることを見なければならない。

**命題 11** プリュッカ一埋め込み  $\iota: \text{Gr}_r(E) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^r E)$  は单射である。

**証明** 相異なる二点  $V, V' \in \text{Gr}_r(E)$  を勝手に取る。 $V \cap V'$  の基底を  $e_1, \dots, e_k$  とし、 $e_1, \dots, e_r$  が  $V$  の基底、 $e_1, \dots, e_k, e_{r+1}, \dots, e_{2r-k}$  が  $V'$  の基底となるように、 $E$  の基底  $e_1, \dots, e_m$  を取る。この基底に関するプリュッカ一座標を考えると、 $V$  の座標で零でないものは  $[r] \in \binom{[m]}{r}$  に対応する箇所のみで、 $V'$  の座標では  $[r]$  に対応する箇所が零である。ゆえに  $\iota(V) \neq \iota(V')$  である。 証明終

プリュッカ一埋め込みによってグラスマン多様体が射影空間の中に单射に写ることがわかったので、次にこの像が代数的集合であることを示す。天下り的に、グラスマン多様体を定める関係式を導入する。

**定義 12(プリュッカ一関係式)**  $r$  を  $m$  以下の正整数、 $k$  を  $r$  以下の正整数とし、ベクトルの列  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r), \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r) \in (E^*)^r$  を勝手に取る。

- (1) 整数  $i_1, \dots, i_k$  を  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$  とし、 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$  について、各  $l = 1, \dots, k$  で  $v_{i_l}$  を  $w_l$  と取り替えて得られる外積を

$$v_1 \wedge \cdots \overset{i_1}{\underset{w_1}{\wedge}} \cdots \wedge w_k \wedge \cdots \wedge v_r$$

で表すこととする。

- (2)  $S^*(\bigwedge^r E^*)$  の 2 次齊次元

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)(w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) - \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k: \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r}} (v_1 \wedge \cdots \overset{i_1}{\underset{w_1}{\wedge}} \cdots \wedge w_k \wedge \cdots \wedge v_r)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_r)$$

をプリュッカー関係式と呼び,  $P_{v,w}$  で表すことにする。

- (3) プリュッカー関係式すべてで生成されるイデアル  $\langle P_{v,w} : v, w \in (E^*)^r \rangle$  を  $Q_r$  で表すことにする。

**観察 13 (座標を取る場合のプリュッカー関係式)**

## 付録 テンソル代数・対称代数・外幕

本文書で用いるテンソル代数・対称代数・外幕の定義を述べる。 $E$  を有限次元  $K$  線型空間とし, テンソル積はすべて  $K$  上で取るものとする。

**定義 14 (テンソル代数)** 2 以上の整数  $n$  に対して,  $n$  個の  $E$  のテンソル積を  $E^{\otimes n}$  で表すことにする。形式的に  $E^{\otimes 1}$  を  $E$ ,  $E^{\otimes 0}$  を  $K$  として定める。 $E$  のテンソル代数  $T^*(E)$  を,  $K$  線型空間として,  $K$  線型空間の直和  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{\otimes n}$  として定める。勝手な非負整数  $n, m$  に対し, テンソル積の普遍性から線型同型  $E^{\otimes n} \otimes E^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} E^{\otimes n+m}$  があるので, 乗算写像

$$E^{\otimes n} \times E^{\otimes m} \rightarrow E^{\otimes n+m}; (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

が定まる。この写像を直和に拡張すれば, 乗算写像  $\otimes : T^*(E) \times T^*(E) \rightarrow T^*(E)$  を得られ,  $T^*(E)$  に非可換  $K$  代数の構造が定まる。

**定義 15 (対称代数)**  $E$  の対称代数  $S^*(E)$  を,  $T^*(E)$  の両側イデアル

$$\langle v \otimes w - w \otimes v : v, w \in E \rangle$$

による商環として定める。 $S^*(E)$  は  $S^1(E) = E$  で生成される可換  $K$  代数である。

本文書では交代代数  $\bigwedge^*(E)$  は導入せず, 外幕  $\bigwedge^n(E)$  のみを用いる。

**定義 16 (外幕)** 正整数  $n$  に対し,  $n$  次対称群を  $\mathfrak{S}_n$  で表し, 元  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  の符号を  $\text{sgn}(\sigma)$  で表すことにする。 $E$  の  $n$  次外幕  $\bigwedge^n E$  を,  $E^{\otimes n}$  の部分空間

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n - \text{sgn}(\sigma)v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} : v_1, \dots, v_n \in E, \sigma \in \mathfrak{S}_n \rangle$$

による商線型空間として定める。 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  の剩余類を  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$  で表し,  $v_1, \dots, v_n$  の外積と呼ぶ。 $e_1, \dots, e_m$  を  $E$  の基底とするとき,  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m\}$  が  $\bigwedge^n E$  の基底をなすので,  $\bigwedge^n E$  の次元は  $\binom{\dim E}{n}$  である。特に  $n > \dim E$  のとき  $\bigwedge^n E$  は零線型空間である。