

# モジュラー形式に関する書き留め

2026年1月17日2時0分更新

Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

## 目 次

1	特殊線形群と上半平面	1
2	モジュラー関数	4
3	アイゼンシュタイン級数	8
4	ヘッケ作用素	16
A	整数係数行列のエルミート標準形	20

### 約束

1. 整数すべてがなす環を  $\mathbb{Z}$ , 実数体を  $\mathbb{R}$ , 複素数体を  $\mathbb{C}$  で表す。
2. 虚数単位を  $i$  で表すこととする。
3. 複素数  $z$  の実部を  $\Re z$ , 虚部を  $\Im z$  で表す。
4. 単位的可換環  $R$  と正整数  $n$  に対し,  $R$  係数  $n$  次一般線形群を  $\mathrm{GL}_n(R)$ , 特殊線形群を  $\mathrm{SL}_n(R)$ , 特殊直交群を  $\mathrm{SO}_n(R)$  で表す。
5. 二つの整数  $m, n$  に対して, その最大公約数を  $\gcd(m, n)$  で表す。



## 1 特殊線形群と上半平面

**定義 1.1** 集合  $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$  を  $\mathbb{H}$  と置き, 上半平面と呼ぶ。

**命題 1.2** 元  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  に対して定まる正則関数  $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$  は

$$c \neq 0 \implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c$$

$$c = 0 \implies \gamma \cdot \infty = \infty$$

と拡張できる定数でない  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の有理型関数である。さらに関係  $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$  によって  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  の  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への作用が定まる。

**証明** 関数  $\gamma \cdot (-) : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  が有理型であることについて  $c = 0$  のときは

明らかであるから、 $c \neq 0$  のときを考える。 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -d/c$  なる複素数列  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  を勝手に考えるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} cz_n + d = 0$  かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} az_n + b = -(ad - bc)/c \neq 0$  であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma \cdot z_n = \infty$  である。ゆえに  $\gamma \cdot (-)$  は  $\mathbb{C}$  上有理型である。同様に  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  なる複素数列  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  を勝手に考えるとき、すべての  $n$  について  $z_n \neq 0$  として良く、

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{a + b/z_n}{c + d/z_n} \rightarrow \frac{a}{c} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから  $\gamma \cdot (-)$  は  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の有理型関数である。

**関係**  $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$  が群作用であることについて  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  のとき  $\gamma \cdot z = \frac{z+0}{0+1} = z$  であるので、後は結合律を見れば良い。元  $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  を勝手に取り、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  と表すとき、

$$\gamma' \cdot \gamma = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

である。正則関数  $\gamma' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$  の定義域を  $U(\subset \mathbb{C})$  とすると、連続性から、 $\gamma(V) \subset U$  となる開集合  $V \subset \mathbb{C}$  を取れる。勝手な複素数  $z \in V$  に対して、

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot (\gamma \cdot z) &= \gamma' \cdot \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{(\frac{az+b}{cz+d})a' + b'}{(\frac{az+b}{cz+d})c' + d'} \\ &= \frac{(az+b)a' + b'(cz+d)}{(az+b)c' + d'(cz+d)} \quad (\text{分母を払った}) \\ &= \frac{(aa' + b'c)z + (a'b + b'd)}{(ac' + cd')z + (bc' + dd')} \quad (\text{分母分子を } z \text{ についてまとめた}) \\ &= (\gamma' \cdot \gamma) \cdot z \end{aligned}$$

と計算でき、一致の定理から  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の関数として  $\gamma' \cdot (\gamma \cdot (-)) = (\gamma' \cdot \gamma) \cdot (-)$  であることが分かる。よって  $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$  が群作用であることが確かめられた。 証明終

**命題 1.3** 元  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  と複素数  $z$  に対して、

$$(1.1) \quad \Im(\gamma \cdot z) = \det(\gamma) \frac{\Im z}{|cz + d|^2}$$

が成立する。

**証明** 複素数  $z$  の共役を  $\bar{z}$  で表すことにする。このとき

$$2i\Im(\gamma \cdot z) = \gamma \cdot z - \overline{\gamma \cdot z} \quad \therefore \text{定義}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \\
&= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (cz+d)(a\bar{z}+b)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\
&= \det(\gamma) \frac{2i\Im z}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

$\because a, b, c, d \in \mathbb{R}$  なので

と計算でき、この計算結果を  $2i$  で割れば目的の等式を得る。

証明終

**系 1.4** 関係  $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$  によって  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  は  $\mathbb{H}$  に作用する。

**証明**  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $z \in \mathbb{H}$  のとき  $\det(\gamma) = 1 > 0$ かつ  $\Im z > 0$  であるから、(1.1) より  $\Im(\gamma \cdot z) > 0$  であり、これは  $\gamma \cdot z \in \mathbb{H}$  を意味する。

証明終

**命題 1.5**  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の  $\mathbb{H}$ への作用は推移的である。

**証明** 複素数  $z \in \mathbb{H}$  を勝手に取り、 $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  と表すと、 $y > 0$  であることに注意して、

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x + iy = z$$

と計算できるので、 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}$  である。

証明終

**命題 1.6** 安定化部分群  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$  は特殊直交群  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  と等しい。したがって関係  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \gamma \mapsto \gamma \cdot i$  は全单射写像  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}$  を定める。

**証明** 元  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$  を勝手に取り、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と表すと、

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot i = i &\iff \frac{ai+b}{ci+d} = i \\
&\iff b + ia = -c + id \\
&\iff a = d \text{かつ } c = -b \\
&\iff \gamma \text{ が直交行列である}
\end{aligned}$$

となり、これは  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  であることを意味する。

証明終

## 2 モジュラー関数

**定義 2.1 (弱モジュラー関数)**  $k$  を整数とする。有理型関数  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  が**レベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数**であるとは、勝手な元  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  と勝手な複素数  $z \in \mathbb{H}$  に対して

$$(\star) \quad f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

が成立するときをいう。

**命題 2.2** レベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数  $f$  を考える。このとき勝手な複素数  $z \in \mathbb{H}$  に対して次の三つが成立する。

- (1)  $f(z) = (-1)^k f(z)$  が成り立つ。ゆえに  $f$  が恒等的に零でなければ、 $k$  は偶数でなければならない。
- (2)  $f(z + 1) = f(z)$  が成り立つ。ゆえに  $f$  は周期的関数である。
- (3)  $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$  が成り立つ。

**証明** (1) について  $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  で、

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

(2) について  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  で、

$$f(z + 1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

(3) について  $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  で、

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z + 0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。

証明終

**命題 2.3** 複素数  $z \in \mathbb{C}$  に対して  $q (= q(z)) = \exp(2\pi i z)$  と置く。このとき  $z \in \mathbb{H}$  であるためには、 $0 < |q| < 1$  であることが必要十分である。

**証明** 複素数  $z \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| |\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \end{aligned}$$

$$= |\exp(-2\pi \Im z)|$$

であるから,

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi \Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。

証明終

穴あき単位円盤  $\{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$  を  $\mathbb{D}^*$  と置く。また実数  $a$  に対して

$$\begin{aligned}\Omega_a &= \{w \in \mathbb{C} : z \neq 0, a < \arg w < 2\pi + a\} \\ D_a &= \{z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a\}\end{aligned}$$

として対数関数の分枝

$$L_a : \Omega_a \rightarrow D_a; \quad w \mapsto \log |w| + i \arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

**命題 2.4**  $f$  を弱モジュラー関数とする。各点  $q \in \mathbb{D}^*$  に対して,  $q \in \Omega_a$  を満足するような対数関数の分枝  $L_a : \Omega_a \rightarrow D_a$  を一つ取る。このとき複素数

$$(2.1) \quad \tilde{f}(q) = f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right)$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって  $\mathbb{D}^*$  上の有理型関数  $\tilde{f}$  が定まる。また (2.1) を単に

$$\tilde{f}(q) = f\left(\frac{\log q}{2\pi i}\right)$$

と表す。

**証明**  $q \in \Omega_a, q \in \Omega_{a'}$  となる二つの分枝  $L_a, L_{a'}$  を取ると, 整数  $n$  を用いて  $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$  と表せるので,

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに  $q \in \mathbb{D}^*$  であれば,

$$\exp\left(2\pi i \frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*, \quad \exp\left(2\pi i \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので, 命題 2.3 より  $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$  である。命題 2.2 (2) より  $f$  が  $f(z+1) = f(z)$  を満足する周期関数であるから,  $q \in \mathbb{D}^*$  のとき,

$$f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right)$$

となり、(2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。 $L_a(q)/2\pi i$  は  $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$  上の有理型関数、 $f$  も  $\mathbb{H}$  上の有理型関数であるから、これら関数の合成である  $\tilde{f}$  は  $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$  上の有理型関数である。 $\bigcup_{a>0} (\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$  であるから、 $\tilde{f}$  が  $\mathbb{D}^*$  上の有理型関数であることが分かった。

証明終

**定義 2.5**  $f$  を弱モジュラー関数とする。

(1)  $\tilde{f}$  が 0 で有理型であるとき、 $f$  が  $\infty$  で**有理型**という。

(2)  $\tilde{f}$  が 0 で正則であるとき、 $f$  が  $\infty$  で**正則**という。

$\tilde{f}$  が 0 で有理型のとき、ローラン展開

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ、 $q = q(z) = \exp(2\pi iz)$  のとき

$$f(z) = f\left(\frac{\log \exp(2\pi iz)}{2\pi i}\right) = \tilde{f}(\exp(2\pi iz)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

となり、 $f$  のフーリエ展開を与える。複素数列  $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$  を  $f$  の**フーリエ係数**と呼ぶ。また  $f$  が  $\infty$  で正則であれば、 $N = 0$  とできる。

**定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式)**  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  をレベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数とする。

(1)  $f$  が  $\infty$  で有理型のとき、 $f$  を**レベル 1 荷重  $k$  のモジュラー関数**と呼ぶ。

(2)  $f$  が  $\mathbb{H}$  上の正則関数で、かつ  $\infty$  で正則のとき、 $f$  を**レベル 1 荷重  $k$  のモジュラー形式**と呼ぶ。

(3) モジュラー形式  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  の  $q$  展開とは、 $\tilde{f}$  のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2ni\pi z}$$

のことをいう。さらに  $a(0) = 0$  のとき  $f$  を**カスプ形式**という。

**命題 2.7**  $k$  を整数とし、集合  $M_k, S_k$  を

$$M_k = \{f : f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である}\}$$

$$S_k = \{f : f \text{ は 1 荷重 } k \text{ のカスプ形式である}\}$$

で定める。このとき  $M_k$  と  $S_k$  は  $\mathbb{C}$  線形空間である。

**証明**  $M_k$  が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式  $f, g \in M_k$  を勝手に取ると、正則関数の和は正則関数であるから、 $f + g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  と  $\tilde{f} + \tilde{g}: \mathbb{D}^* \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則関数である。定義から  $(f + g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}$  であるから、 $(f + g)^\sim: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$  は正則関数であ

る。あとは  $f + g$  が  $(\star)$  を満足することを示せば、 $f + g \in M_k$  であることが分かる。元  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  と点  $z \in \mathbb{H}$  を勝手に取ると、

$$\begin{aligned}(f + g)(\gamma \cdot z) &= f(\gamma \cdot z) + g(\gamma \cdot z) \\ &= (cz + d)^k f(z) + (cz + d)^k g(z) \\ &= (cz + d)^k (f + g)(z)\end{aligned}$$

と計算でき、 $(\star)$  を  $f + g$  が満足することが確かめられ、 $f + g \in M_k$  である。 $M_k$  がスカラ一倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手なカスプ形式  $f, g \in S_k$  に対して、 $(f + g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}$  が成立することから、 $S_k$  が  $\mathbb{C}$  線形空間であることも従う。

証明終

**命題 2.8** 整数  $k, l$  とモジュラー形式  $f \in M_k, g \in M_l$  に対し、 $fg \in M_{k+l}$  が成立する。また  $f$  がカスプ形式のとき  $fg$  もカスプ形式である。

**証明** 正則関数の積は正則関数であるから、 $fg: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  と  $\tilde{f}\tilde{g}: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$  は正則関数である。定義から  $(fg)^\sim = \tilde{f}\tilde{g}$  であるから、 $(fg)^\sim$  も正則関数である。あとは  $fg$  が  $(\star)$  を満足することを示せばよく、元  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  と点  $z \in \mathbb{H}$  を勝手に取ると、

$$\begin{aligned}(fg)(\gamma \cdot z) &= (cz + d)^k f(z) (cz + d)^l g(z) \\ &= (cz + d)^{k+l} (fg)(z)\end{aligned}$$

と計算できるので、 $fg \in M_{k+l}$  であることが確かめられた。また  $f$  がカスプ形式のとき、

$$\begin{aligned}\tilde{f}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \\ \tilde{g}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n) q^n\end{aligned}$$

とローラン展開すると、

$$(fg)^\sim(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n, \quad c(n) = \sum_{m=0}^n a(m) b(n-m)$$

であるから、特に  $c(0) = a(0)b(0) = 0$  で、 $fg$  はカスプ形式であることが分かる。

証明終

### 3 アイゼンシュタイン級数

**定義 3.1**  $k$  を 3 以上の整数とする。各複素数  $z \in \mathbb{H}$  に対して、級数

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(mz + n)^k}$$

を定め、 $G_k(z)$  をアイゼンシュタイン級数と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

**補題 3.2**  $K$  を  $\mathbb{H}$  の有界閉集合とする。このとき勝手な点  $z \in K$  と元  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  に対して

$$(3.1) \quad C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

が成立するような正数  $C$  が存在する。

**証明**  $C_1 = \min\{\Im z : z \in K\}$ ,  $C_2 = \max\{|\Re z| : z \in K\}$  と置く。

点  $z \in K$  と元  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  を勝手に取り、 $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) と表すと、

$$|mz + n| = |(mx + n) + imy| = \sqrt{(mx + n)^2 + (my)^2}$$

となる。 $C_2 = 0$  であれば常に  $x = 0$  で、 $|mz + n| \geq |mx + n| = |n|$  かつ  $|mz + n| \geq y|m| \geq C_1|m|$  であるから、 $C = \min\{1, C_1\}$  が (3.5) を満足する正数である。 $C_2 \neq 0$  の場合を考える。前述の議論と同じく  $|n|$  については  $|mz + n| \geq C_1|m|$  である。 $|m|$  について、 $|m| \geq |n|/(2C_2)$  のとき

$$(3.2) \quad |mz + n| \geq C_1|m| \geq \frac{C_1}{2C_2}|n|$$

となり、そうでないとき  $n \neq 0$  かつ  $|m/n| < 1/(2C_2)$  となり、常に  $|m/n||x| \leq 1/2$  で、

$$(3.3) \quad |mx + n| = \left| n \left( \frac{m}{n}x + 1 \right) \right| \geq |n| \left( 1 - \left| \frac{m}{n} \right| |x| \right) \geq 1/2|n|$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると、 $C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$  が (3.5) を満足する正数である。 証明終

**定理 3.3**  $k \geq 3$  のとき  $G_k$  は  $\mathbb{H}$  上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

**証明**  $K$  を  $\mathbb{H}$  の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より、勝手な点  $z \in K$  と勝手な元  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

となるような正数  $C$  が存在し,

$$\sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{|mz + n|^k} \leq \frac{1}{C^k} \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k}$$

であるから、右辺の級数の収束を示せば、 $G_k$  が  $K$  上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数  $N$  に対して  $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \max\{|m|, |n|\} = N\}$  の個数を数える。 $|m| > |n|$  のものを数えると、 $m = \pm N$  で、 $n = -N + 1, -N + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1$  の  $2(2N - 1)$  個ある。同様に  $|n| < |m|$  のものも  $2(2N - 1)$  個ある。 $|m| = |n|$  のものは、 $(N, N), (N, -N), (-N, N), (-N, -N)$  の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は  $8N$  個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8N}{N^k} = 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{k-1}}$$

であり、いま  $k \geq 3$  であるからこの正項級数は収束する。以上で、 $G_k$  が  $\mathbb{H}$  上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式  $mz + n$  は  $\mathbb{H}$  上で常に零でないから、有理多項式  $1/(mz + n)$  は  $\mathbb{H}$  上の正則関数であり、 $G_k$  の収束先が正則関数であることも分かる。

証明終

**定理 3.4**  $k \geq 3$  のとき正則関数  $G_k: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  はレベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数である。

**証明** 元  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  と点  $z \in \mathbb{H}$  を勝手に取る。 $\gamma$  が全単射写像  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  を誘導することに注意すると、

$$\begin{aligned} G_k(\gamma \cdot z) &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m(\gamma \cdot z) + n)^k} \\ &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{(cz + d)^k}{(m(az + b) + n(cz + d))^k} && \because \text{分母を払った} \\ &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{(cz + d)^k}{((ma + nc)z + (mb + nd))^k} \\ &= \sum_{\substack{(m', n') : \\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (\frac{m'}{n'}) = \gamma(\frac{m}{n})}} \frac{(cz + d)^k}{(m'z + n')^k} \\ &= (cz + d)^k \sum_{\substack{(m', n') \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m', n') \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m'z + n')^k} && \because \gamma \text{ の全単射性より} \end{aligned}$$

$$= (cz + d)^k G_k(z)$$

となり、 $G_k$  が  $(\star)$  を満足することが確かめられた。

証明終

**系 3.5**  $k$  が 3 以上の奇数のとき  $\mathbb{H}$  上で  $G_k(z) = 0$  である。

**証明** 定理 3.4 より  $G_k$  が荷重  $k$  の弱モジュラー関数であるから、命題 2.2 (1) より  $G_k$  は  $\mathbb{H}$  上の零関数である。 証明終

さらに弱モジュラー関数  $G_k$  はモジュラー形式である。

**定理 3.6**  $k \geqq 3$  のとき  $G_k$  は  $\infty$  で正則である。つまり  $G_k$  はモジュラー形式である。

この定理の証明のために、ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて  $G_k$  の  $q$  展開を表示する。

**定義 3.7** (1) 1 より大きい実数  $s$  に対して、

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数  $\xi$  を定め、ゼータ関数と呼ぶ。

(2) 正整数  $n$  と実数  $l$  に対して、

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d|n}} d^l$$

として関数  $\sigma_l$  を定め、約数関数と呼ぶ。

(3) 原点周りの  $\mathbb{D}^*$  上の正則関数  $z/(e^z - 1)$  のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数  $B_k$  をベルヌーイ数と呼ぶ。

**補題 3.8 (オイラーの等式)** 正の偶数  $k$  に対して、

$$(3.4) \quad \xi(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

が成立する。

**証明** 三角関数の公式

$$(3.5) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n}$$

を用いる<sup>1)</sup>。(3.5) の左辺に  $z$  を掛けたものを計算すると、 $z \in \mathbb{H}$  のとき

$$\pi z \cot(\pi z) = \pi z \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad \because \cot \text{の定義}$$

1) 証明は、例えばヘルグロツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$\begin{aligned}
&= \pi z \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin の定義 \\
&= \pi iz \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} \\
(3.6) \quad &= \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi z)^k && \because z \in \mathbb{H} \text{ なので, 命題 2.3 から} \\
&\quad e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので}
\end{aligned}$$

となる。次に (3.5) の右辺に  $z$  を掛けたものを計算すると,

$$\begin{aligned}
z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} &= 1 + z \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} \right) \\
&= 1 + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} && \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2}{n^2 - z^2} && \because z を総和の中に入れ, 符号を調整した \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \frac{1}{1 - (\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{n^{2l}} && \because \frac{1}{1-z} の原点におけるテイラー展開 \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty} 2z^{2(l+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(l+1)}} && \because 和を交換した \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2z^{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2l}} && \because 添字 l を 1 ずらした \\
(3.7) \quad &= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2\xi(2l)z^{2l}
\end{aligned}$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく, 2 以上の偶数  $k = 2l$  に関する  $z^k$  の係数を比較することで, 目的の等式

$$\xi(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。

証明終

**補題 3.9** 正の偶数  $k$  に対して,

$$(3.8) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$$

が成立する。

**証明** 上述の補題と同様に三角関数の公式

$$(3.9) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

を用いる。(3.9) の左辺を書き直すと,

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{の定義} \\ &= \pi \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{の定義} \\ &= \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\ &= \pi i + \pi i \frac{2}{q-1} && \because q = e^{2\pi iz} \text{ と置いているので} \\ &= \pi i - 2\pi i \frac{1}{1-q} \\ &= \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n && \because \frac{1}{1-q} \text{ の原点におけるテーラー展開} \end{aligned}$$

となるので,  $n \geq 1$  のとき  $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} q^n = (2\pi i n)^{k-1} q^n$  であることに注意して, (3.9) の両辺を  $z$  について  $(k-1)$  階微分すると,

$$-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n = (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}$$

となり, 両辺を  $(k-1)!$  で割ると, いま  $k$  が偶数であるから  $(-1)^{k-1} = -1$  なので,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

となる。また (3.4) から

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} = -\zeta(k) \frac{2k}{B_k}$$

であるから, 目的の等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

を得られる。

証明終

**定理 3.10** 4 以上の偶数  $k$  に対して,  $G_k$  の  $q$  展開が

$$(3.10) \quad G_k(z) = 2\zeta(k) \left( 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

と表される。

**証明**  $G_k(z)$  を計算していくと,

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(mz + n)^k} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^k}}_{m=0 \text{ の項}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz + n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz - n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(-mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz + n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz - n)^k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz + n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz - n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz - n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz + n)^k} \right) \quad \because k \text{ が偶数なので} \\
&= 2\xi(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz + n)^k} \\
&= 2\xi(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( -\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} (e^{2\pi imz})^n \right) \quad \because (3.8) \text{ を用いた} \\
&= 2\xi(k) \left( 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^{mn} \right) \quad \because q^{mn} = (e^{2\pi imz})^n \\
&= 2\xi(k) \left( 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}: \\ n>0, n|d}} n^{k-1} q^d \right) \quad \because d = mn \text{ と置いた} \\
&= 2\xi(k) \left( 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d \right) \quad \because 約数関数の定義 \\
&= 2\xi(k) \left( 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)
\end{aligned}$$

と計算でき、これが目的の等式であった。

証明終

**定理 3.6 の証明**  $k$  が奇数のときは  $G_k$  が零関数であるので明らかである。 $k$  が偶数のとき (3.10) から

$$\tilde{G}_k(q) = 2\xi(k) \left( 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

が成立するので,  $\lim_{q \rightarrow 0} \tilde{G}_k(q) = 2\xi(k)$  である。これは  $\tilde{G}_k(q)$  が原点で正則であることを意味し, したがって  $G_k$  が  $\infty$  で正則であることが従う。

証明終

**定義 3.11** 3 以上の整数  $k$  に対して,  $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$  上の正則関数  $E_k$  を

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\xi(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

で定め, 正規化アイゼンシュタイン級数と呼ぶ。

ベルヌーイ数 (と約数関数) を計算できれば,  $E_k$  を明示的に書き下すことができるので, ここでベルヌーイ数の漸化式を述べておく。

**命題 3.12**  $B_0 = 1$ , かつ  $d \geqq 1$  のとき

$$B_d = -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k$$

が成り立つ。

**証明**  $e^z$  を原点周りでテイラー展開すると

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

であるから,

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

となる。したがって

$$1 = \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k \right) = \sum_{d=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^d \frac{B_k}{k! (d-k+1)!} \right) z^d$$

となるので, 係数比較をすることで,  $B_0 = 1$  かつ

$$(3.11) \quad \sum_{k=0}^d \frac{B_k}{k! (d-k+1)!} = 0$$

が分かる。(3.11) を  $B_d$  について解くことで,

$$\begin{aligned} B_d &= \sum_{k=0}^{d-1} \frac{d!}{k! (d-k+1)!} B_k \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d+1)!}{k! (d-k+1)!} B_k && \because d+1 \text{ を挟み込んだ} \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k && \because \text{二項係数の定義} \end{aligned}$$

と計算でき、目的の漸化式を得られる。

証明終

いくつかベルヌーイ数を計算すると、

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2}, \\ B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}, \\ B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0, \\ B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0\right) = -\frac{1}{30}, \\ B_5 &= \dots = 0, \\ B_6 &= \dots = \frac{1}{42} \end{aligned}$$

などとなる。したがって、正規化アイゼンシュタイン級数は

$$\begin{aligned} E_4(z) &= 1 - 8(-30) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n = 1 - 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \dots), \\ E_6(z) &= 1 - 12 \cdot 42 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n = 1 - 504(q + 33q^2 + 244q^3 + \dots) \end{aligned}$$

などとなる。ここで正則関数  $E_4^3 - E_6^2$  を考えると、これは命題 2.7 と命題 2.8 から荷重 12 のモジュラー形式で、上の計算より

$$(E_4(z))^3 - (E_6(z))^2 = 1728q + o(q)$$

となるので、荷重 12 のカスプ形式であることが分かる。カスプ形式  $\Delta$  を  $(E_4^3 - E_6^2)/1728$  で定め、ラマヌジャンのデルタと呼ぶ。また  $\Delta$  のフーリエ係数を  $(\tau(n))_{n=0}^{\infty}$  で表し、ラマヌジャンのタウ関数と呼ぶ。具体的には

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(1) = 1, \quad \tau(2) = -24, \quad \tau(3) = 252, \dots$$

と計算できる。ラマヌジャンのタウ関数については、ラマヌジャンによる有名な予想がある。

**予想 3.13 (ラマヌジャン予想)** ラマヌジャンのタウ関数に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数  $n, m$  に対して、 $n$  と  $m$  が互いに素であるならば

$$\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$$

が成立する。

(2)  $p$  を素数,  $r$  を正整数とするとき

$$\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})$$

が成立する。

予想 3.13 は、以降で扱うヘッケ作用素を用いることで証明される。

## 4 ヘッケ作用素

ヘッケ作用素を定義するための準備を行なっていく。正整数  $n$  に対して集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n \right\}$$

を  $\mathbf{M}_n$  と置き、行列の左乗算によって  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  の  $\mathbf{M}_n$  への左群作用を定めておく。

**補題 4.1** レベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数  $f$  と正整数  $n$  を考える。勝手な行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n$  と軌道の元  $\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して

$$(4.1) \quad (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (\tilde{c}z + \tilde{d})^{-k} f\left(\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}\right)$$

が成立する。

**証明** 軌道  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の元は、行列  $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  を用いて

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

と表される。すると (4.1) の右辺は

$$\begin{aligned} & (ac'z + cd')^{-k} f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z\right) \\ &= (ac'z + cd')^{-k} (c' \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z + d')^k f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z\right) \quad \because (\star) \text{ より} \\ &= (ac'z + cd')^{-k} \left( c' \frac{az + b}{cz + d} + d' \right)^k f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad \because \text{作用の定義} \\ &= (ac'z + cd')^{-k} \left( \frac{(ac' + cd')z + (bc' + dd')}{cz + d} \right)^k f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \end{aligned}$$

と計算でき、(4.1) の左辺と等しいことが分かる。

証明終

補題 4.1 から、レベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数  $f$  と軌道  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbf{M}_n$  に対して

$$(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

を軌道の代表元の取り方に依らずに定義できる。

**定義 4.2** レベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数  $f$  と正整数  $n$  に対して,  $\mathbb{H}$  上の有理型関数  $T_n f$  を,

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

で定める。レベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数の集合から  $\mathbb{H}$  上の有理型関数への写像  $T_n$  をヘッケ作用素と呼ぶ。

まずヘッケ作用素によって弱モジュラー関数が弱モジュラー関数に写ることを見る。

**命題 4.3**  $f$  がレベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数であるとき,  $T_n f$  も荷重  $k$  の弱モジュラー関数である。

**証明** 行列  $\gamma = \left( \begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix} \right) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  を勝手に取る。 $\gamma$  の右乗算が  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$  上の置換を引き起こすことに注意すると,

$$\begin{aligned} T_n f(\gamma \cdot z) &= n^{k-1} \sum_{\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma \cdot z) + d)^{-k} f\left(\frac{a(\gamma \cdot z) + b}{c(\gamma \cdot z) + d}\right) \\ &= n^{k-1} \sum_{\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} \left( c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d \right)^{-k} f\left(\left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix} \right) \cdot z\right) \quad \because \text{作用の定義} \\ &= n^{k-1} \sum_{\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} \left( \frac{(a'c + c'd)z + (b'c + dd')}{c'z + d'} \right)^{-k} f\left(\left( \begin{smallmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{smallmatrix} \right) \cdot z\right) \\ &= (c'z + d')^k n^{k-1} \sum_{\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} ((a'c + c'd)z + (b'c + dd'))^{-k} f\left(\left( \begin{smallmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{smallmatrix} \right) \cdot z\right) \\ &= (c'z + d')^k n^{k-1} \sum_{\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma \cdot z) + d)^{-k} f\left(\frac{a(\gamma \cdot z) + b}{c(\gamma \cdot z) + d}\right) \quad \because \gamma \text{ が } \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash M_n \text{ 上の} \\ &\quad \text{置換なので} \\ &= (c'z + d')^k T_n f(z) \end{aligned}$$

と計算でき,  $T_n f$  が  $(*)$  を満足することが確かめられる。ゆえに  $T_n f$  は荷重  $k$  の弱モジュラー関数である。 証明終

ここで  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$  の完全代表系としてエルミート標準形を取れることを見ておく。

**命題 4.4** 行列  $\left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathbf{M}_n$  に対して,  $\gamma \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right)$  がエルミート標準形, すなわち

$$\gamma \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} > 0, \quad \tilde{a}\tilde{d} = n, \quad 0 \leq \tilde{b} < \tilde{d}$$

を満足する行列  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  が存在する。

**証明** 行列  $(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})$  が非特異であるから、定理 A.2 より  $\gamma(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})$  がエルミート標準形となるようなユニモジュラー行列  $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  を取れる。エルミート標準形の行列式は正で、かつ  $(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})$  の行列式も正であるから、 $\det(\gamma) = 1$ 、すなわち  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  であることが従う。

証明終

**系 4.5** レベル 1 荷重  $k$  の弱モジュラー関数  $f$  と正整数  $n$  に対して、

$$(4.2) \quad T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

と表せる。

**証明** 命題 4.4 とエルミート標準形の一意性から  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$  の完全代表系として  $\{(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}) \in \mathbf{M}_n : a > 0, 0 \leqq b < d\}$  を取れるので。証明終

(4.2) によるヘッケ作用素の表示を用いることで、モジュラー関数がモジュラー関数に写ることを示せる。

**定理 4.6**  $f$  をレベル 1 荷重  $k$  のモジュラー関数とし、その  $q$  展開を  $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) q^m$  とする。このとき

$$(4.3) \quad T_n f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m, \quad \gamma(m) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: a > 0, \\ a \mid \gcd(m, n)}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}\right)$$

が成立する。

**証明** (4.2) を用いて計算を行うと、

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) && \because (4.2) \text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az+b}{d} m\right) && \because f \text{ の } q \text{ 展開} \\ (4.4) \quad &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az}{d} m\right) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、整数  $d, m$  に対して  $\sum_{b=0}^{d-1} \exp(2\pi i \frac{b}{d} m)$  を計算すると、

$$(4.5) \quad \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right)$$

$$= \begin{cases} d & d \mid m のとき (\because 常に \exp(2\pi i \frac{b}{d}m) = 1 なので) \\ \frac{1 - \exp(2\pi i(m/d))}{1 - \exp(2\pi i(m/d))}^d = 0 & d \nmid m のとき (\because 等比数列の和) \end{cases}$$

となる。(4.4) の計算を続けると,

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az}{d}m\right) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d}m\right) \quad \because (4.4) \text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, ad=n, d \mid m}} d^{-k+1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i a z \frac{m}{d}\right) \quad \because (4.5) \text{ より} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d \mid n, d \mid m}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i z \frac{mn}{d^2}\right) \quad \because a = n/d \\ (4.6) \quad &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d \mid \gcd(m, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}} \end{aligned}$$

となる。ここで関係  $(m, d) \mapsto (m/d, n/d)$  によって全単射写像

$$(4.7) \quad \{(m, d) : m, d \in \mathbb{Z}, d > 0, d \mid \gcd(m, n)\} \rightarrow \{(m', a) : m', d \in \mathbb{Z}, a > 0, a \mid n\}$$

を得られるので、(4.6) の計算を続けて、

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d \mid \gcd(m, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}} \quad \because (4.6) \\ &= \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, a \mid n}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{nm'}{a}\right) q^{m' a} \quad \because (4.7) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: \\ a > 0, a \mid \gcd(m, n)}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}\right) \right) q^m \end{aligned}$$

と計算でき、 $T_n f$  を目的の形で表示できた。

証明終

**系 4.7**  $f$  がレベル 1 荷重  $k$  のモジュラー関数のとき、 $T_n f$  もレベル 1 荷重  $k$  のモジュラー関数である。さらに  $f$  がモジュラー形式ならば、 $T_n f$  もモジュラー形式である。

**証明**  $a \mid n$  なる正整数  $a$  に対して  $n/(a^2)$  は高々有界であるから、 $m \ll 0$  のとき (4.3) における  $\gamma(m)$  は零である。ゆえに  $T_n f$  は  $\infty$  で有理型で、モジュラー関数であることが従う。また  $f$  がモジュラー形式であれば、負の整数  $m$  に対して常に  $\gamma(m) = 0$  であることが分かるので、 $T_n f$  は  $\infty$  で正則で、モジュラー形式であることが従う。

証明終

## A 整数係数行列のエルミート標準形

整数係数の非特異正方行列に対してエルミート標準形が存在することを、2次の場合に限定して取り扱う。

**定義 A.1 (非特異正方行列のエルミート標準形)**  $A$  を整数係数の非特異 2 次行列とする。ユニモジュラー行列  $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  によって

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \quad h_{11}, h_{22} > 0 \text{かつ} 0 \leq h_{12} < h_{22}$$

と表せるとき、この上三角行列を  $A$  のエルミート標準形と呼ぶ。

エルミート標準形を誘導するにあたって、

- ・一行目と二行目を交換する行列  $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$
- ・一行目を  $-1$  倍する行列  $(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$
- ・二行目を  $-1$  倍する行列  $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix})$
- ・一行目を  $m$  倍して二行目に足す行列  $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{smallmatrix})$
- ・二行目を  $m$  倍して一行目に足す行列  $(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$

が基本となるユニモジュラー行列で、これら行列の左乗算によって行列の変形を行う。

**定理 A.2** 整数係数の非特異 2 次行列  $A = (\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})$  に対してエルミート標準形は一意的に存在する。

**証明** 存在性と一意性を分けて証明する。

**存在性**  $a = 0$  または  $c = 0$  なら、行の入れ替えを行うことで  $c = 0$  と考えて良く、すると非特異性から  $a \neq 0$  かつ  $d \neq 0$  である。さらに各行を適当に  $-1$  倍することで  $a > 0$  かつ  $d > 0$  として良い。 $b$  を  $d$  で割ることで

$$b = qd + b', \quad q, b' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq b' < d$$

を得られる。を満足する  $q, b'$  を取り、 $-q$  倍した二行目を一行目に足して  $A$  のエルミート標準形  $(\begin{smallmatrix} a & b' \\ 0 & d \end{smallmatrix})$  を得る。 $a, c$  が共に零でない場合は、以下のようにユークリッドの互除法を用いて上述の議論に帰着させる。必要なら一行目と二行目を入れ替えて、 $0 < |a| \leq |c|$  として良い。 $c$  を  $a$  で割って、

$$c = qa + c', \quad q, c' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq c' < |a|$$

を満足する  $q, c'$  を取り、 $-q$  倍した一行目を二行目に足して、行列  $(\begin{smallmatrix} a & b \\ c' & d - qb \end{smallmatrix})$  を得る。

$c' \neq 0$  であれば、 $0 \leqq |c'| < |a|$  であるから、行を交換して再度同じ議論を繰り返すことで、 $c' = 0$  としてよく、証明の最初の議論に帰着された。

一意性 二つの  $A$  のエルミート標準形

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \gamma' \cdot A = \begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix}, \quad \gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

があるとすると、 $\gamma' \cdot \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と書けば

$$\begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$$

となる。これから  $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$  が単位行列であることを示す。 $h_{11}c = 0$ かつ  $h_{11} \neq 0$  であるから、 $c = 0$  である。すると  $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$  がユニモジュラーであるから、 $ad = 1$  または  $ad = -1$  である。 $h_{11}a = h'_{11}$  かつ  $h_{11}, h'_{11} > 0$  であるから、 $a > 0$  である。同様に  $h_{22}d = h'_{22}$  かつ  $h_{22}, h'_{22} > 0$  であるから、 $d > 0$  である。したがって  $a = d = 1$  であることが分かる。 $0 \leqq h'_{12} = h_{12} + bh_{22}$  かつ  $0 \leqq h_{12} < h_{22}$  であるから、 $b \geqq 0$  でなければならない。また  $h'_{22} = h_{22}$  であるから、 $0 \leqq h'_{12} < h'_{22}$  であることと合わせて  $b = 0$  であることが分かる。ゆえに  $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$  が単位行列で、二つのエルミート標準形が等しいことが従う。 証明終



## 文献

- [1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. <https://www.ma.imperial.ac.uk/~dheitm/M4P58/ModularForms2.pdf> (2026年1月1日最終確認).
- [2] 岸 正倫・藤本 担孝 (1980). 複素関数論. 学術図書出版社.
- [3] Aigner, M. and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.