

# Hartshorne Exercise II

2025 年 12 月 5 日 0 時 55 分更新

本文書は，修士課程在学中に取り組んだ Algebraic Geometry (Hartshorne, 1977) の演習問題  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  を復元することと， $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  作成の基礎鍛錬を意図したものです。

## 目 次

4 節	1
演習 4.2	1
演習 4.4	3
補題（グラフ射は対角射の底変換）	4
補題（全射な射は底変換で不変）	6



## 4 節

**演習 4.2**  $S$  を概型とし， $S$  上の被約概型  $X$  と  $S$  上の分離的概型  $Y$  を考える。このとき，二つの  $S$  上の射  $f, g: X \rightarrow Y$  が， $X$  の稠密開集合  $U$  上で等しいとき， $f = g$  であることを示せ。また次の二つの場合で，この結果が成立しない例を与えよ。(a)  $X$  が被約でない。(b)  $Y$  が分離的でない。

**証明** まず  $f$  と  $g$  が位相空間の連続写像として等しいことを示す。 $f, g$  が  $S$  上の射であるので，ファイバー積の普遍性から図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{g} & & Y \\
 \searrow \langle f, g \rangle & & \searrow p_2 & & \downarrow \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y & & \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow & & \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & S & & 
 \end{array}
 \quad (p_1 \text{ と } p_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。})$$

(4.1)

の可換性を満足する射  $\langle f, g \rangle: X \rightarrow Y \times_S Y$  が一意に存在する。 $f$  と  $g$  が  $U$  上で等しいことは，包含  $\iota: U \hookrightarrow X$  に対して  $f \circ \iota = g \circ \iota$  が成立することを意味し， $\Delta: Y \rightarrow Y \times_S Y$

を対角射とすると、二つの図式

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{g \circ \iota} & Y \\
 \searrow \langle f, g \rangle \circ \iota & & \downarrow p_2 \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & S \\
 \uparrow f \circ \iota & & \\
 U & \xrightarrow{f \circ \iota} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{g \circ \iota} & Y \\
 \searrow \Delta \circ f \circ \iota & & \downarrow p_2 \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & S \\
 \uparrow f \circ \iota & & \\
 U & \xrightarrow{f \circ \iota} & Y
 \end{array}$$

がどちらも可換であるから、ファイバー積の普遍性より

$$(4.2) \quad \langle f, g \rangle \circ \iota = \Delta \circ f \circ \iota = \Delta \circ g \circ \iota$$

が成立する。よって集合として、

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle(X) &= \langle f, g \rangle(U^-) && (\because U \text{ が稠密部分集合なので。}) \\
 &= (\Delta \circ f)(U^-) && (\because (4.2) \text{ より。}) \\
 &\subset (\Delta \circ f)(U)^- && (\because \Delta \circ f \text{ の連続性より。}) \\
 &= \Delta(f(U))^- \\
 &\subset \Delta(Y) && (\because Y \text{ が分離的で、} \Delta(Y) \text{ が閉集合であるので。})
 \end{aligned}$$

となる。勝手な点  $P \in X$  に対し、

$$\begin{aligned}
 f(P) &= (p_1 \circ \langle f, g \rangle)(P) && (\because (4.1) \text{ の可換性より。}) \\
 &= p_1(\langle f, g \rangle(P)) \\
 &= p_2(\langle f, g \rangle(P)) && (\because \langle f, g \rangle(P) \in \Delta(Y) \text{ なので。}) \\
 &= g(P)
 \end{aligned}$$

と計算でき、 $f$  と  $g$  が位相空間の連続写像として等しいことがわかった。特に  $f_* \mathcal{O}_X = g_* \mathcal{O}_X$  である。

次に構造層の射  $f^\#, g^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  が等しいことを示す。 $X$  の点  $P$  を勝手に固定し、 $f(P)$  のアフィン開近傍  $W$  を取って、 $f^{-1}(W)$  を  $V$  と置き、制限によって得られる連続写像を  $f' = g': V \rightarrow W$  と置く。制限  $f^\#|_W, g^\#|_W: \mathcal{O}_W \rightarrow f'_* \mathcal{O}_V$  が等しいことを示す。 $W$  がアフィン概型であるので、演習 2.4 から大域切断の環準同型  $\Gamma(W, f^\#), \Gamma(W, g^\#): \Gamma(W, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$  で  $f^\#|_W$  と  $g^\#|_W$  が決定されるので、 $\Gamma(W, f^\#) = \Gamma(W, g^\#)$  の成立を示せばよい。元  $a \in \Gamma(W, \mathcal{O}_Y)$  を勝手に取り、 $f^\#(a) - g^\#(a)$  を  $b$  と置き、 $b = 0$  となることを見る。 $U$  が  $X$  の稠密部分集合なので、 $U \cap V \neq \emptyset$  であ

り,  $f|_U = g|_U$  であるので, 勝手な点  $Q \in U \cap V$  に対して  $f_Q^\# = g_Q^\#$  が成立し,

$$b_Q = f_Q^\#(a_{f(Q)}) - g_Q^\#(a_{f(Q)}) = 0$$

であることが分かる。部分集合  $V_b = \{Q \in V : b_Q \notin \mathfrak{m}_Q\}$  は演習 2.16 (a) より開集合で, 上の計算より  $V_b \cap (U \cap V) = \emptyset$  であるのに対し,  $U \cap V$  が  $V$  の稠密部分集合であるから,  $V_b = \emptyset$  である。したがって演習 2.18 (a) と演習 2.16 (a) より,  $V$  の勝手なアフィン開集合  $Z$  において制限  $b|_Z$  が冪零元で,  $X$  が被約であるから  $b|_Z = 0$  であり,  $b = 0$  がわかった。ゆえに  $f^\#|_W = g^\#|_W$  である。もしアフィン開近傍  $W \subset Y$  が  $f(X) \cap W = \emptyset$  を満足するならば,  $f^\#|_W$  と  $g^\#|_W$  が零環の層への射となるから等しい。以上から,  $Y$  のアフィン開被覆上で  $f^\#$  と  $g^\#$  が等しく,  $f^\# = g^\#$  であることが示された。証明終

**(a) の例**  $k$  を代数閉体,  $S = \text{Spec } k$  として,  $\text{Spec } k$  上の概型  $\text{Spec } k[x, y]/(x^2, xy)$  を  $X$  と  $Y$  とすると, アフィン概型なので  $\text{Spec } k$  上分離的, かつ  $X$  上で  $x \neq 0, x^2 = 0$  なので被約でない。また  $k[x, y]$  のイデアルとして  $\sqrt{(x^2, xy)} = (x)$  であるから, ヒルベルト零点定理より

$$\text{sp}(X) = \text{sp}(Y) = \{(x, y - b) : b \in k\} \cup \{(x)\}$$

である。 $k$  代数の準同型  $\phi: k[x, y]/(x^2, xy) \rightarrow k[x, y]/(x^2, xy)$  を,  $x \mapsto 0$  と  $y \mapsto y$  で定まるものとして定め,  $\phi$  が定めるアフィン概型の射を  $f$ , 恒等射を  $g$  とすると, 位相空間の連続写像として  $f = g$  である。なんとなれば,

**閉点について**  $y - b \in \phi^{-1}((x, y - b))$  なので  $\phi^{-1}((x, y - b)) = (x, y - b)$  である。

**生成点について** 勝手な元  $b \in k$  に対して  $y - b \notin \phi^{-1}((x))$  なので,  $\phi^{-1}((x)) = (x)$  である。となるからである。開集合  $U = X \setminus \{(x, y)\}$  を考える。元  $\frac{F(x, y)}{G(x, y)} \in (k[x, y]/(x^2, xy))_{\mathfrak{p}}$  を勝手に取るとき,  $yF(x, y)$  と  $yG(x, y)$  は  $y$  のみで表せ,  $\phi$  は  $y$  を  $y$  に写すので,

$$\phi_{\mathfrak{p}}\left(\frac{F(x, y)}{G(x, y)}\right) = \phi_{\mathfrak{p}}\left(\frac{yF(x, y)}{yG(x, y)}\right) = \frac{\phi(yF(x, y))}{\phi(yG(x, y))} = \frac{yF(x, y)}{yG(x, y)} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

となり,  $\phi_{\mathfrak{p}}$  が恒等写像であることが分かる。ゆえに  $f^\#|_U: \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{O}_X|_U$  と  $g^\#|_U: \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{O}_X|_U$  が等しく, 概型の射として  $f|_U = g|_U$  である。他方, 閉点  $\mathfrak{m} = (x, y)$  に対して

$$\phi_{\mathfrak{m}}\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{0}{1} \neq \frac{x}{1}$$

であるから  $f_{\mathfrak{m}} \neq g_{\mathfrak{m}}$  がわかり, 概型の射として  $f \neq g$  である。終

**(b) の例**  $k$  を体として,  $X$  を  $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$ ,  $Y$  を二重原点を持つアフィン直線とする。このとき, 貼り合わせによって付随する相異なる射  $f, g: X \rightarrow Y$  があって,  $U = X \setminus \{(x)\}$  とするとき  $f|_U = g|_U$  である。終

**演習 4.4** ネーター概型  $S$  上の有限型分離的概型  $X, Y$  と、その間の射  $f: X \rightarrow Y$  を考える。このとき、 $S$  上固有な閉部分概型  $Z$  に対し、 $f(Z)$  が  $Y$  の閉集合で、 $f(Z)$  を  $f$  の概型論的像と考えるとき、 $f(Z)$  が  $S$  上固有であることを示せ。

**補題 (グラフ射は対角射の底変換)** 概型  $S$  上の射  $f: X \rightarrow Y$  と恒等射  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  に対し、図式

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \Gamma_f \searrow & & \downarrow p_2 \\
 X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & S
 \end{array}
 \quad (p_1 \text{ と } p_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。})$$

の可換性を満足する射  $\Gamma_f: X \rightarrow X \times_S Y$  が一意的存在し、**グラフ射**と呼ぶ。同様に、図式

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S Y & \xrightarrow{\text{id}_Y \circ p_2} & Y \\
 f \times \text{id}_Y \searrow & & \downarrow q_2 \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{q_2} & Y \\
 q_1 \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & S
 \end{array}
 \quad (q_1 \text{ と } q_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。})$$

の可換性を満足する射  $\text{id}_Y \circ f$  が一意的存在する。このとき  $\Gamma_f$  は、 $f \times \text{id}_Y$  による対角射  $\Delta: Y \rightarrow Y \times_S Y$  の底変換である。

**証明** まず次の図式

$$(4.3) \quad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_S Y \\
 f \downarrow & & \downarrow f \times \text{id}_Y \\
 Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_S Y
 \end{array}$$

が可換であることを、ファイバー積  $(Y \times_S Y, q_1, q_2)$  の普遍性を用いて示す。つまり図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & f \swarrow & \vdots & \searrow f & \\
 Y & \xleftarrow{q_1} & Y \times_S Y & \xrightarrow{q_2} & Y
 \end{array}$$

の破線の射の箇所に  $\Delta \circ f$  と  $(f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f$  を代入して、図式の可換性が満足されることを示す。 $\Delta \circ f$  について計算すると、

$$q_1 \circ (\Delta \circ f) = (q_1 \circ \Delta) \circ f = \text{id}_Y \circ f = f,$$

$$q_2 \circ (\Delta \circ f) = \dots = f$$

となるので可換性を満足し,  $(f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f$  についても

$$q_1 \circ ((f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f) = (q_1 \circ (f \times \text{id}_Y)) \circ \Gamma_f = f \circ p_1 \circ \Gamma_f = f \circ \text{id}_X = f,$$

$$q_2 \circ ((f \times \text{id}_Y) \circ \Gamma_f) = (q_2 \circ (f \times \text{id}_Y)) \circ \Gamma_f = p_2 \circ \Gamma_f = f$$

となるので可換性を満足する。ゆえに図式 (4.3) は可換である。この可換図式がファイバー積の普遍性を満足することを示して証明を終える。可換図式

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{z_2} & X \times_X Y \\ z_1 \downarrow & & \downarrow f \times \text{id}_Y \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_S Y \end{array}$$

が与えられているとする。  $p_1 \circ z_2: Z \rightarrow X$  を  $h$  と置くと, 図式

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & z_1 \swarrow & \downarrow h & \searrow z_2 & \\ Y & \xleftarrow{f} & X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_S Y \end{array}$$

が可換である。なんとなれば,  $f \circ h$  については

$$(4.5) \quad f \circ h = f \circ p_1 \circ z_2 = q_1 \circ (f \times \text{id}_Y) \circ z_2 = q_1 \circ \Delta \circ z_1 = \text{id}_Y \circ z_1 = z_1$$

と計算でき,  $\Gamma_f \circ h$  については図式

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & h \swarrow & \downarrow z_2 \parallel \Gamma_f \circ h & \searrow z_1 & \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

が計算

$$p_1 \circ z_2 = h, \quad (\because \text{定義})$$

$$p_2 \circ z_2 = q_2 \circ (f \times \text{id}_Y) \circ z_2 = q_2 \circ \Delta \circ z_1 = \text{id}_X \circ z_1 = z_1,$$

$$p_1 \circ (\Gamma_f \circ h) = \text{id}_X \circ h = h,$$

$$p_2 \circ (\Gamma_f \circ h) = f \circ h = z_1 \quad (\because (4.5) \text{ より})$$

により可換なので, ファイバー積の普遍性から  $\Gamma_f \circ h = z_2$  である。最後に, 他に可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & z_1 \swarrow & \downarrow h' & \searrow z_2 & \\ Y & \xleftarrow{f} & X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_S Y \end{array}$$

が与えられているとすると,

$$h = p_1 \circ z_2 = p_1 \circ \Gamma_f \circ h' = \text{id}_X \circ h' = h'$$

となるので, 図式 (4.4) を可換にする  $h$  は一意である。

証明終

**補題 (全射な射は底変換で不変)** 概型の射  $f: X \rightarrow Y$  が位相空間の連続写像として全射であるとき, **全射な射**と呼ぶ。全射な射は底変換で不変である。より正確にいうと, 全射な射  $f: X \rightarrow Y$  と概型の射  $g: Y' \rightarrow Y$  に対し, 底変換  $f': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  は全射である。

**証明** 勝手な点  $y' \in Y'$  に対し,  $f'^{-1}(y') \neq \emptyset$  が成り立つことを示せば良い。演習 3.10(a) と底変換が推移的であることから, 位相空間の同相

$$f'^{-1}(y') \underset{3.10(a)}{\cong} \text{sp}((X \times_Y Y')_{k(y')}) = \text{sp}((X \times_Y Y') \times_{Y'} \text{Spec } k(y')) \cong \text{sp}(X \times_Y \text{Spec } k(y'))$$

があるので,  $X \times_Y \text{Spec } k(y') \neq \emptyset$  であることを示せば良い。底変換の推移性をさらに用いると, 概型として

$$X \times_Y \text{Spec } k(y') \cong (X \times_Y \text{Spec } k(g(y')) \times_{\text{Spec } k(g(y'))} \text{Spec } k(y')) = X_{k(g(y'))} \times_{k(g(y'))} \text{Spec } k(y')$$

であり, 演習 3.10(a) より  $f^{-1}(g(y')) \cong \text{sp}(X_{g(y')})$  で,  $f$  の全射性よりこの空間が空でないことが分かる。ゆえに空でないアフィン開集合  $U \subset X_{g(y')}$  を取れ,  $U \times_{k(g(y'))} \text{Spec } k(y')$  が空でないことを示せば証明が終わる。 $U$  と同型なアフィン概型  $\text{Spec } A$  を取るとき,  $A$  が零でない  $k(g(y'))$  代数かつ  $U \times_{k(g(y'))} \text{Spec } k(y') \cong \text{Spec}(A \otimes_{k(g(y'))} k(y'))$  で,  $A \otimes_{k(g(y'))} k(y')$  が体  $k(y')$  を包含するので, 特に零環でない。ゆえに  $A \otimes_{k(g(y'))} k(y')$  が極大イデアルを持ち,  $\text{Spec}(A \otimes_{k(g(y'))} k(y'))$  が点を少なくとも一つ点を持つことが分かる。

証明終

**演習 4.4 の証明**

証明終

