モジュラー形式に関する書き留め

2026 年 1 月 5 日 1 時 36 分更新

Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

目　　次

約束

1. 整数すべてがなす環を $\mathbb{Z}$，実数体を $\mathbb{R}$，複素数体を $\mathbb{C}$ で表す。
2. 虚数単位を i で表すことにする。
3. 複素数 z の実部を $\Re z$，虚部を $\Im z$ で表す。
4. 単位的可換環 R と正整数 n に対し，R 係数 n 次一般線形群を $\mathrm{GL}_n(R)$，特殊線形群を $\mathrm{SL}_n(R)$，特殊直交群を $\mathrm{SO}_n(R)$ で表す。

1　特殊線形群と上半平面

定義 1.1　集合 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ を $\mathbb{H}$ と置き，**上半平面**と呼ぶ。

命題 1.2　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対して定まる正則関数 $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ は

$$c \neq 0 \implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c$$
$$c = 0 \implies \gamma \cdot \infty = \infty$$

と拡張できる定数でない $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。さらに対応 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への作用が定まる。

証明　関数 $\gamma \cdot (-) \colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が有理型であることについて　$c = 0$ のときは明らかであるから，$c \neq 0$ のときを考える。$\lim_{n\to\infty} z_n = -d/c$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，$\lim_{n\to\infty} cz_n + d = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} az_n + b = -(ad - bc)/c \neq 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} \gamma \cdot z_n = \infty$ である。ゆえに $\gamma \cdot (-)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型である。同様に $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$

なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，すべての n について $z_n \neq 0$ として良く，

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{a + b/z_n}{c + d/z_n} \to \frac{a}{c} \qquad (n \to \infty)$$

であるから $\gamma \cdot (\text{—})$ は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。

対応 $(\gamma, z) \mapsto \gamma{\cdot}z$ が群作用であることについて　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\gamma{\cdot}z = \frac{z+0}{0+1} = z$ であるので, 後は結合律を見れば良い。元 $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を勝手に取り, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \gamma' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ と表すとき,

$$\gamma' \cdot \gamma = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

である。正則関数 $\gamma' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ の定義域を $U(\subset \mathbb{C})$ とすると，連続性から，$\gamma(V) \subset U$ となる開集合 $V \subset \mathbb{C}$ を取れる。勝手な複素数 $z \in \mathbb{V}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\gamma' \cdot (\gamma \cdot z) &= \gamma' \cdot \frac{az + b}{cz + d} \\
&= \frac{(\frac{az+b}{cz+d})a' + b'}{(\frac{az+b}{cz+d})c' + d'} \\
&= \frac{(az + b)a' + b'(cz + d)}{(az + b)c' + d'(cz + d)} && (\text{分母を払った}) \\
&= \frac{(aa' + b'c)z + (a'b + b'd)}{(ac' + cd')z + (bc' + dd')} && (\text{分母分子を } z \text{ についてまとめた}) \\
&= (\gamma' \cdot \gamma) \cdot z
\end{aligned}$$

と計算でき，一致の定理から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の関数として $\gamma' \cdot (\gamma \cdot (\text{—})) = (\gamma' \cdot \gamma) \cdot (\text{—})$ であることが分かる。よって $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ が群作用であることが確かめられた。　証明終

命題 1.3　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と複素数 z に対して,

$$\Im(\gamma \cdot z) = \det(\gamma) \frac{\Im z}{|cz + d|^2} \tag{1.1}$$

が成立する。

証明　複素数 z の共役を $\bar{z}$ で表すことにする。このとき

$$\begin{aligned}
2i\Im(\gamma \cdot z) &= \gamma \cdot z - \overline{\gamma \cdot z} && \because \text{定義} \\
&= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} && \because a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ なので} \\
&= \frac{(az + b)(c\bar{z} + d) - (cz + d)(a\bar{z} + b)}{|cz + d|^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2} \\
&= \det(\gamma)\frac{2i\Im z}{|cz+d|^2}
\end{aligned}
$$

と計算でき，この計算結果を $2i$ で割れば目的の等式を得る。　証明終

系 1.4　対応 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{H}$ に作用する。

証明　$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，$z \in \mathbb{H}$ のとき $\det(\gamma) = 1 > 0$ かつ $\Im z > 0$ であるから，(1.1) より $\Im(\gamma \cdot z) > 0$ であり，これは $\gamma \cdot z \in \mathbb{H}$ を意味する。　証明終

命題 1.5　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用は推移的である。

証明　複素数 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取り，$z = x + iy$，$x, y \in \mathbb{R}$ と表すと，$y > 0$ であることに注意して，

$$
\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x + iy = z
$$

と計算できるので，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}$ である。　証明終

命題 1.6　安定化部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と等しい。したがって対応 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \gamma \mapsto \gamma \cdot i$ は全単射写像 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}$ を定める。

証明　元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ を勝手に取り，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と表すと，

$$
\begin{aligned}
\gamma \cdot i = i &\iff \frac{ai+b}{ci+d} = i \\
&\iff b + ia = -c + id \\
&\iff a = d \text{ かつ } c = -b \\
&\iff \gamma \text{ が直交行列である}
\end{aligned}
$$

となり，これは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ であることを意味する。　証明終

2　モジュラー関数

定義 2.1 (弱モジュラー関数)　k を整数とする。有理型関数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が**レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数**であるとは，勝手な元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$
(\star) \qquad f(\gamma \cdot z) = (cz+d)^k f(z)
$$

が成立するときをいう。

命題 2.2　レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f を考える。このとき勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して次の三つが成立する。

(1) $f(z) = (-1)^k f(z)$ が成り立つ。ゆえに f が恒等的に零でなければ，k は偶数でなければならない。

(2) $f(z+1) = f(z)$ が成り立つ。ゆえに f は周期的関数である。

(3) $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$ が成り立つ。

証明　**(1) について**　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

(2) について　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z+1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

(3) について　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z+0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

命題 2.3　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $q (= q(z)) = \exp(2\pi i z)$ と置く。このとき $z \in \mathbb{H}$ であるためには，$0 < |q| < 1$ であることが必要十分である。

証明　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| |\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| \end{aligned}$$

であるから，

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi \Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

穴あき単位円盤 $\{ q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1 \}$ を $\mathbb{D}^*$ と置く。また実数 a に対して

$$\Omega_a = \{ w \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ a < \arg w < 2\pi + a \}$$

$$D_a = \{ z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a \}$$

として対数関数の分枝

$$L_a \colon \Omega_a \to D_a; \quad w \mapsto \log|w| + i \arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

命題 2.4 　f を弱モジュラー関数とする。各点 $q \in \mathbb{D}^*$ に対して，$q \in \Omega_a$ を満足するような対数関数の分枝 $L_a \colon \Omega_a \to D_a$ を一つ取る。このとき複素数

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) \tag{2.1}$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数 $\widetilde{f}$ が定まる。また (2.1) を単に

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{\log q}{2\pi i}\Big)$$

と表す。

証明 　$q \in \Omega_a$，$q \in \Omega_{a'}$ となる二つの分枝 $L_a, L_{a'}$ を取ると，整数 n を用いて $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$ と表せるので，

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに $q \in \mathbb{D}^*$ であれば，

$$\exp\Big(2\pi i \frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*, \qquad \exp\Big(2\pi i \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので，命題 2.3 より $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$ である。命題 2.2 (2) より f が $f(z+1) = f(z)$ を満足する周期関数であるから，$q \in \mathbb{D}^*$ のとき，

$$f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big)$$

となり，(2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。$L_a(q)/2\pi i$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数，f も $\mathbb{H}$ 上の有理型関数であるから，これら関数の合成である $\widetilde{f}$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数である。$\bigcup_{a>0}(\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$ であるから，$\widetilde{f}$ が $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数であることが分かった。 証明終

定義 2.5 　f を弱モジュラー関数とする。

(1) $\widetilde{f}$ が 0 で有理型であるとき，f が ∞ **で有理型**という。

(2) $\widetilde{f}$ が 0 で正則であるとき，f が ∞ **で正則**という。

$\widetilde{f}$ が 0 で有理型のとき，ローラン展開

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ，$q = q(z) = \exp(2\pi iz)$ のとき

$$f(z) = f\Big(\frac{\log\exp(2\pi iz)}{2\pi i}\Big) = \widetilde{f}(\exp(2\pi iz)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

となり，f のフーリエ展開を与える。複素数列 $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$ を f の**フーリエ係数**と呼ぶ。また f が ∞ で正則であれば，$N = 0$ とできる。

定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式)　$f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数とする。

(1) f が ∞ で有理型のとき，f を**レベル 1 荷重 k のモジュラー関数**と呼ぶ。

(2) f が $\mathbb{H}$ 上の正則関数で，かつ ∞ で正則のとき，f を**レベル 1 荷重 k のモジュラー形式**と呼ぶ。

(3) モジュラー形式 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ の q **展開**とは，$\widetilde{f}$ のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2ni\pi z}$$

のことをいう。さらに $a(0) = 0$ のとき f を**カスプ形式**という。

命題 2.7　k を整数とし，集合 M_k, S_k を

$$M_k = \{\, f : f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である} \,\}$$
$$S_k = \{\, f : f \text{ は 1 荷重 } k \text{ のカスプ形式である} \,\}$$

で定める。このとき M_k と S_k は $\mathbb{C}$ 線形空間である。

証明　M_k が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式 $f, g \in M_k$ を勝手に取るとき，正則関数の和は正則関数であるから，$f + g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ と $\widetilde{f} + \widetilde{g}\colon \mathbb{D}^* \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ であるから，$(f+g)^{\sim}\colon \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ は正則関数である。あとは $f + g$ が $(\star)$ を満足することを示せば，$f + g \in M_k$ であることが分かる。元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$\begin{aligned}(f+g)(\gamma\cdot z) &= f(\gamma\cdot z) + g(\gamma\cdot z)\\ &= (cz+d)^k f(z) + (cz+d)^k g(z)\\ &= (cz+d)^k (f+g)(z)\end{aligned}$$

と計算でき，$(\star)$ を $f+g$ が満足することが確かめられ，$f+g\in M_k$ である。M_k がスカラー倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手なカスプ形式 $f,g\in S_k$ に対して，$(f+g)^{\sim}=\widetilde{f}+\widetilde{g}$ が成立することから，S_k が $\mathbb{C}$ 線形空間であることも従う。

証明終

命題 2.8　整数 k,l とモジュラー形式 $f\in M_k, g\in M_l$ に対し，$fg\in M_{k+l}$ が成立する。また f がカスプ形式のとき fg もカスプ形式である。

証明　正則関数の積は正則関数であるから，$fg\colon\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ と $\widetilde{f}\widetilde{g}\colon\mathbb{D}^*\to\mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(fg)^{\sim}=\widetilde{f}\widetilde{g}$ であるから，$(fg)^{\sim}$ も正則関数である。あとは fg が $(\star)$ を満足することを示せばよく，元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$\begin{aligned}(fg)(\gamma\cdot z)&=(cz+d)^k f(z)(cz+d)^l g(z)\\&=(cz+d)^{k+l}(fg)(z)\end{aligned}$$

と計算できるので，$fg\in M_{k+l}$ であることが確かめられた。また f がカスプ形式のとき，

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(q)&=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n\\\widetilde{g}(q)&=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)q^n\end{aligned}$$

とローラン展開すると，

$$(fg)^{\sim}(q)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)q^n,\qquad c(n)=\sum_{m=0}^{n}a(m)b(n-m)$$

であるから，特に $c(0)=a(0)b(0)=0$ で，fg はカスプ形式であることが分かる。

証明終

3　アイゼンシュタイン級数

定義 3.1　k を 3 以上の整数とする。各複素数 $z\in\mathbb{H}$ に対して，級数

$$G_k(z)=\sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,\,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{(mz+n)^k}$$

を定め，$G_k(z)$ を**アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

補題 3.2　K を $\mathbb{H}$ の有界閉集合とする。このとき勝手な点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leqq |mz + n| \tag{3.1}$$

が成立するような正数 C が存在する。

証明　$C_1 = \min\{\,\Im z : z \in K\}$，$C_2 = \max\{\,|\Re z| : z \in K\}$ と置く。

点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を勝手に取り，$z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）と表すと，

$$|mz + n| = |(mx + n) + imy| = \sqrt{(mx + n)^2 + (my)^2}$$

となる。$C_2 = 0$ であれば常に $x = 0$ で，$|mz + n| \geqq |mx + n| = |n|$ かつ $|mz + n| \geqq y|m| \geqq C_1|m|$ であるから，$C = \min\{1, C_1\}$ が (3.5) を満足する正数である。$C_2 \neq 0$ の場合を考える。前述の議論と同じく $|n|$ については $|mz + n| \geqq C_1|m|$ である。$|m|$ について，$|m| \geqq |n|/(2C_2)$ のとき

$$|mz + n| \geqq C_1|m| \geqq \frac{C_1}{2C_2}|n| \tag{3.2}$$

となり，そうでないとき $n \neq 0$ かつ $|m/n| < 1/(2C_2)$ となり，常に $|m/n||x| \leqq 1/2$ で，

$$|mx + n| = \left|n\Big(\frac{m}{n}x + 1\Big)\right| \geqq |n|\Big(1 - \left|\frac{m}{n}\right||x|\Big) \geqq 1/2|n| \tag{3.3}$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると，$C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$ が (3.5) を満足する正数である。　　証明終

定理 3.3　$k \geqq 3$ のとき G_k は $\mathbb{H}$ 上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

証明　K を $\mathbb{H}$ の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より，勝手な点 $z \in K$ と勝手な元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leqq |mz + n|$$

となるような正数 C が存在し，

$$\sum_{\substack{(m,\, n) \in \mathbb{Z}^2 :\\ (m,\, n) \neq (0,\, 0)}} \frac{1}{|mz + n|^k} \leqq \frac{1}{C^k} \sum_{\substack{(m,\, n) \in \mathbb{Z}^2 :\\ (m,\, n) \neq (0,\, 0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k}$$

であるから，右辺の級数の収束を示せば，G_k が K 上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数 N に対して $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \max\{|m|, |n|\} = N\}$ の個数を数える。$|m| > |n|$ のものを数えると，$m = \pm N$ で，$n = -N + 1,\ -N + 2,\ \ldots,\ -1, 0, 1, \ldots, N - 1$ の

$2(2N-1)$ 個ある。同様に $|n|<|m|$ のものも $2(2N-1)$ 個ある。$|m|=|n|$ のものは，(N,N), $(N,-N)$, $(-N,N)$, $(-N,-N)$ の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は $8N$ 個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{\max\{|m|,|n|\}^k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8N}{N^k} = 8\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{k-1}}$$

であり，いま $k \geqq 3$ であるからこの正項級数は収束する。以上で，G_k が $\mathbb{H}$ 上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式 $mz+n$ は $\mathbb{H}$ 上で常に零でないから，有理多項式 $1/(mz+n)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり，G_k の収束先が正則関数であることも分かる。　証明終

定理 3.4　$k \geqq 3$ のとき正則関数 $G_k\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ はレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取る。γ が全単射写像 $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を誘導することに注意すると，

$$\begin{aligned}
G_k(\gamma\cdot z) &= \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{(m(\gamma\cdot z)+n)^k} \\
&= \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{(cz+d)^k}{(m(az+b)+n(cz+d))^k} && \because \text{分母を払った} \\
&= \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{(cz+d)^k}{((ma+nc)z+(mb+nd))^k} \\
&= \sum_{\substack{(m',\,n'):\\(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,\,0)\},\ \left(\begin{smallmatrix} m' \\ n' \end{smallmatrix}\right)=\gamma\left(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right)}} \frac{(cz+d)^k}{(m'z+n')^k} \\
&= (cz+d)^k \sum_{\substack{(m',\,n')\in\mathbb{Z}^2:\\(m',\,n')\neq(0,\,0)}} \frac{1}{(m'z+n')^k} && \because \gamma\text{ の全単射性より} \\
&= (cz+d)^k G_k(z)
\end{aligned}$$

となり，G_k が $(\star)$ を満足することが確かめられた。　証明終

系 3.5　k が 3 以上の奇数のとき $\mathbb{H}$ 上で $G_k(z)=0$ である。

証明　定理 3.4 より G_k が荷重 k の弱モジュラー関数であるから，命題 2.2 (1) より G_k は $\mathbb{H}$ 上の零関数である。　証明終

さらに弱モジュラー関数 G_k はモジュラー形式である。

定理 3.6 $k \geqq 3$ のとき G_k は ∞ で正則である。つまり G_k はモジュラー形式である。

この定理の証明のために，ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて G_k の q 展開を表示する。

定義 3.7 (1) 1 より大きい実数 s に対して，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数 ζ を定め，**ゼータ関数**と呼ぶ。

(2) 正整数 n と実数 l に対して，

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d>0,\ d|n}} d^l$$

として関数 σ_l を定め，**約数関数**と呼ぶ。

(3) 原点周りの $\mathbb{D}^*$ 上の正則関数 $z/(e^z - 1)$ のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数 B_k を**ベルヌーイ数**と呼ぶ。

補題 3.8 (オイラーの等式) 正の偶数 k に対して，

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^k B_k}{k!} \tag{3.4}$$

が成立する。

証明 三角関数の公式

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{3.5}$$

を用いる[1)]。(3.5) の左辺に z を掛けたものを計算すると，$z \in \mathbb{H}$ のとき

$$\begin{aligned}
\pi z \cot(\pi z) &= \pi z \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{ の定義} \\
&= \pi z \frac{(e^{\pi i z} + e^{-\pi i z})/2}{(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\
&= \pi i z \frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} \\
&= \pi i z + \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z} - 1}
\end{aligned}$$

1) 証明は，例えばヘルグロッツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$(3.6)\qquad = \pi i z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(2\pi z)^k \qquad \because z \in \mathbb{H} \text{ なので，命題 2.3 から } e^{2\pi i z} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので}$$

となる。次に (3.5) の右辺に z を掛けたものを計算すると，

$$\begin{aligned}
z\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n} &= 1 + z\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-n}\right) \\
&= 1 + z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} && \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2z^2}{n^2-z^2} && \because z \text{ を総和の中に入れ，符号を調整した} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2}\frac{1}{1-(\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l}}{n^{2l}} && \because \frac{1}{1-z} \text{ の原点におけるテイラー展開} \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty}2z^{2(l+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2(l+1)}} && \because \text{和を交換した} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty}2z^{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2l}} && \because \text{添字 } l \text{ を 1 ずらした} \\
(3.7)\qquad &= 1 - \sum_{l=1}^{\infty}2\zeta(2l)z^{2l}
\end{aligned}$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく，2 以上の偶数 $k = 2l$ に関する z^k の係数を比較することで，目的の等式

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。 証明終

補題 3.9 正の偶数 k に対して，

$$(3.8)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k)\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}n^k q^n$$

が成立する。

証明 上述の補題と同様に三角関数の公式

$$(3.9)\qquad \pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n}$$

を用いる。(3.9) の左辺を書き直すと，

$$\pi\cot(\pi z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \qquad \because \cot \text{ の定義}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos,\ \sin \text{ の定義} \\
&= \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi i + \pi i \frac{2}{q - 1} && \because q = e^{2\pi iz} \text{ と置いているので} \\
&= \pi i - 2\pi i \frac{1}{1 - q} \\
&= \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n && \because \frac{1}{1-q} \text{ の原点におけるテーラー展開}
\end{aligned}
$$

となるので，$n \geqq 1$ のとき $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} q^n = (2\pi in)^{k-1} q^n$ であることに注意して，(3.9) の両辺を z について $(k-1)$ 階微分すると，

$$
-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n = (-1)^{k-1}(k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}
$$

となり，両辺を $(k-1)!$ で割ると，いま k が偶数であるから $(-1)^{k-1} = -1$ なので，

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n
$$

となる。また (3.4) から

$$
\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} = -\zeta(k) \frac{2k}{B_k}
$$

であるから，目的の等式

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n
$$

を得られる。 証明終

定理 3.10　4 以上の偶数 k に対して，G_k の q 展開が

$$
G_k(z) = 2\zeta(k)\Big(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n\Big) \tag{3.10}
$$

と表される。

証明　$G_k(z)$ を計算していくと，

$$
G_k(z) = \sum_{\substack{(m,\, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m,\, n) \neq (0,\, 0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^k}}_{m=0\ \text{の項}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(-mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz-n)^k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \right) && \because k\ \text{が偶数なので} \\
&= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \left(-\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} (e^{2\pi i m z})^n \right) && \because (3.8)\ \text{を用いた} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^{mn} \right) && \because q^{mn} = (e^{2\pi i m z})^n \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}: \\ n>0,\ n \mid d}} n^{k-1} q^d \right) && \because d = mn\ \text{と置いた} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d \right) && \because \text{約数関数の定義} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)
\end{aligned}
$$

と計算でき，これが目的の等式であった。 証明終

定理 3.6 の証明　k が奇数のときは G_k が零関数であるので明らかである。k が偶数のとき (3.10) から

$$
\widetilde{G}_k(q) = 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)
$$

が成立するので，$\lim_{q \to 0} \widetilde{G}_k(q) = 2\zeta(k)$ である。これは $\widetilde{G}_k(q)$ が原点で正則であることを意味し，したがって G_k が ∞ で正則であることが従う。 証明終

定義 3.11　3 以上の整数 k に対して，$\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上の正則関数 E_k を

$$
E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n
$$

で定め，**正規化アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

ベルヌーイ数（と約数関数）を計算できれば，E_k を明示的に書き下すことができるので，ここでベルヌーイ数の漸化式を述べておく。

命題 3.12　$B_0 = 1$，かつ $d \geqq 1$ のとき

$$B_d = -\frac{1}{d+1}\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d+1}{k}B_k$$

が成り立つ。

証明　e^z を原点周りでテイラー展開すると

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$$

であるから，

$$\frac{e^z-1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}z^k$$

となる。したがって

$$1 = \frac{z}{e^z-1}\frac{e^z-1}{z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}z^k\right) = \sum_{d=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{d}\frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!}\right)z^d$$

となるので，係数比較をすることで，$B_0 = 1$ かつ

$$\sum_{k=0}^{d}\frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!} = 0 \tag{3.11}$$

が分かる。(3.11) を B_d について解くことで，

$$\begin{aligned}
B_d &= \sum_{k=0}^{d-1}\frac{d!}{k!\,(d-k+1)!}B_k \\
&= \frac{1}{d+1}\sum_{k=0}^{d-1}\frac{(d+1)!}{k!\,(d-k+1)!}B_k && \because d+1 \text{ を挟み込んだ} \\
&= \frac{1}{d+1}\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d+1}{k}B_k && \because \text{二項係数の定義}
\end{aligned}$$

と計算でき，目的の漸化式を得られる。　　　　証明終

いくつかベルヌーイ数を計算すると，

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2}, \\
B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = -\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0,\\
B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{5}\Big(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0\Big) = -\frac{1}{30},\\
B_5 &= \cdots = 0,\\
B_6 &= \cdots = \frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

などとなる。したがって，正規化アイゼンシュタイン級数は

$$
\begin{aligned}
E_4(z) &= 1 - 8(-30)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n = 1 - 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \cdots),\\
E_6(z) &= 1 - 12\cdot 42\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n = 1 - 504(q + 33q^2 + 244q^3 + \cdots)
\end{aligned}
$$

などとなる。ここで正則関数 $E_4^3 - E_6^2$ を考えると，これは命題 2.7 と命題 2.8 から荷重 12 のモジュラー形式で，上の計算より

$$
(E_4(z))^3 - (E_6(z))^2 = 1728q + o(q)
$$

となるので，荷重 12 のカスプ形式であることが分かる。カスプ形式 Δ を $(E_4^3 - E_6^2)/1728$ で定め，**モジュラー判別式**と呼ぶ。

文献

[1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. `https://www.ma.imperial.ac.uk/~dhelm/M4P58/ModularForms2.pdf`（2026 年 1 月 1 日最終確認）.

[2] 岸　正倫，藤本　担孝（1980）．複素関数論．学術図書出版社．

[3] Aigner, M., and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.