

組合せ論的ホッジ理論 雑記帳

2025 年 3 月 30 日 3 時 12 分更新

[AHK18] を読むにあたって証明のギャップを埋めることを目的とした命題などをここに記す。

目 次

1	バーグマン扇など	1
1.1	[AHK18, Prop. 2.4] に関する命題	2
1.2	[AHK18, Prop. 3.3] に関する命題	3
1.3	[AHK18, Prop. 3.5] に関する命題	3
2	区分的線形関数など	6
2.1	区分的線形関数の例	6
2.2	[AHK18, Prop. 4.5] に関する命題	7
2.3	引き戻しなどに関する命題	8
2.4	マトロイドの組合せ論的幾何学に関する命題	9
2.5	[AHK18, Prop. 4.8] に関する命題	11
3	ホモロジーとコホモロジーなど	13
3.1	ミンコフスキー荷重に関する命題	13

1 バーグマン扇など

注意 1.1 [AHK18] では、非空な有限集合 E を基底とする自由アーベル群 \mathbb{Z}^E の基底を $\mathbf{e}_i, i \in E$ と約束しているが、記号の濫用で $\mathbf{N}_E = \mathbb{Z}^E / \langle \mathbf{e}_E \rangle$ における \mathbf{e}_i の像も \mathbf{e}_i と表していることに注意する。

命題 1.2 ([AHK18] の 2 節を通して基本的な命題) E を非空な有限集合とし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1}$ と $\sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ に対し、 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \subset \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ となるのは $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ となるとき即ち $(I_1 < \mathcal{F}_1) < (I_2 < \mathcal{F}_2)$ とな

るときかつそのときに限る。

証明 $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ のときに $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \subset \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ となることは定義から従う。

逆に $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \subset \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ が成立するときを考える。 $I_1 \not\subset I_2$ であつたとすると元 $i \in I_1 \setminus I_2$ が少なくとも一つ存在し $\mathbf{e}_i \in \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ である。これは $\{i\} \in \mathcal{F}_2$ であることを意味し $I_2 = \emptyset$ である。この議論と \mathcal{F}_2 が全順序部分集合であることから $I_1 \setminus I_2 = I_1$ は一元集合でなければならない。つまり $I_1 = \{i\}$ であるがこれは $I_1 \notin \mathcal{P}$ であることに矛盾し $I_1 \subset I_2$ であることが従う。次に $\mathcal{F}_1 \not\subset \mathcal{F}_2$ であつたと仮定し $F \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$ を一つ取る。 $\mathbf{e}_F \in \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ であるから $F \subset I_2$ となるが \mathcal{P} が順序フィルターであることから $I_2 \in \mathcal{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ である。 ■

注意 1.3 同様の証明によりループを持たないマトロイド M とそのバグマン扇 $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に対しても同様の主張が成立する。

1.1 [AHK18, Prop. 2.4] に関する命題

命題 1.4 ([AHK18, Prop. 2.4] の証明の補題) E を非空な有限集合とする。 \mathcal{P}_+ と \mathcal{P}_- が $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとする。このとき Z と適合する $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_-$ に対し

$$\bigcup_{I: I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I < \{Z\} \cup \mathcal{F}} = \sigma_{Z < \mathcal{F}}$$

が成立する。

証明 包含 $\bigcup_{I: I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I < \{Z\} \cup \mathcal{F}} \subset \sigma_{Z < \mathcal{F}}$ が成立ことは定義から直ちに従うので逆の包含を示す。

$\sigma_{Z < \mathcal{F}}$ の元 \mathbf{v} を取ると

$$(1.1) \quad \mathbf{v} = \sum_{i \in Z} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu_F \mathbf{e}_F \quad (\lambda_i \text{ と } \mu_F \text{ は非負実数である})$$

と表すことができる。勝手な $i \in Z$ に対し不等式 $\lambda_{i_0} \leq \lambda_i$ を満たす $i_0 \in Z$ を一つ取ると (1.1) は

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in Z} (\lambda_i - \lambda_{i_0}) \mathbf{e}_i + \lambda_{i_0} \mathbf{e}_Z + \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu_F \mathbf{e}_F$$

ここで $I = \{i \in Z \mid \lambda_i - \lambda_{i_0} = 0\}$ と置けば (1.1) より I は Z の真部分集合かつ $\mathbf{v} \in \sigma_{I < \{Z\} \cup \mathcal{F}}$ である。 ■

命題 1.5 E を非空な有限集合とし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1}$ と $\sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ に対し、 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2} = \sigma_{(I_1 \cap I_2) < (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)}$ が成立する。

証明 定義から直ちに $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2} \supset \sigma_{(I_1 \cap I_2) < (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)}$ であることは従うので逆の包含が成立することを示す。

[AHK18, Prop. 2.4] より $\Sigma_{\mathcal{P}}$ は特に扇であるので $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ は $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1}$ の面である。ゆえに $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2} = \sigma_{I_3 < \mathcal{F}_3}$ かつ $I_3 \subset I_1$ かつ $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_1$ を満たす I_3 と \mathcal{F}_3 が存在する。さらに命題 1.2 より $I_3 \subset I_2$ かつ $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_2$ となるので $I_3 \subset I_1 \cap I_2$ かつ $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ となり逆の包含が成立することが従う。 ■

命題 1.6 ([AHK18, Prop. 2.4] の注意のために) E を非空な有限集合とする。 \mathcal{P}_+ と \mathcal{P}_- が $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとし、さらに $\#Z = 1$ であるとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}_+} = \Sigma_{\mathcal{P}_-}$ が成立する。

証明 [AHK18, Prop. 2.4] の証明より $\Sigma_{\mathcal{P}_+}$ は $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ の射線 $\sigma_{\emptyset < \{Z\}}$ に関する星状細分であるが、 $Z = \{i\}$ と書けるため $\sigma_{\emptyset < \{Z\}} = \sigma_{\{i\} < \emptyset}$ であり、右辺は $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ の錐である。 ■

命題 1.7 ([AHK18, Prop 2.4] と [AHK18, Prop 3.3] のために) 扇 Σ とその部分集合 Δ を考える。任意の Δ の錐 δ に対し δ の面すべてが Δ に属すると仮定する。このとき Δ は扇である。

証明 勝手な二つの錐 $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ に対し $\delta_1 \cap \delta_2$ が共通の面であることを示せば良いが、それは $\Delta \subset \Sigma$ であることと Σ が扇であることから従う。 ■

1.2 [AHK18, Prop. 3.3] に関する命題

命題 1.8 ([AHK18, Prop. 3.3] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき $\sigma_{I < \mathcal{F}} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に対してその面もすべて $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に属す。

証明 一般論から $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ の面は I の部分集合 I' と \mathcal{F} の部分集合 \mathcal{F}' を用いて $\sigma_{I' < \mathcal{F}'}$ と表すことができる。すると $\text{cl}_M(I') \notin \mathcal{P}$ である。そうでなかったとすると $I' \subset I$ であることと \mathcal{P} が順序フィルターであることから $\text{cl}_M(I) \in \mathcal{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\sigma_{I' < \mathcal{F}'} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ であり題意は示された。 ■

注意 1.9 この証明手法によって $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に対しても同様の主張が成立することが従う。

1.3 [AHK18, Prop. 3.5] に関する命題

命題 1.10 (マトロイドの制限と縮約が誘導する順序フィルターについて) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとしそのフラット F と $\mathcal{P}(F)$ の順序フィルター

\mathcal{P} をそれぞれ固定する。このとき \mathcal{P}^F と \mathcal{P}_F はそれぞれ $\mathcal{P}(M^F)$ と $\mathcal{P}(M_F)$ の順序フィルターである。

注意 1.11 M の F への制限 M^F とは, フラットの族 $\mathcal{P}(M^F)$ が $\{G \cap F \mid G \in \mathcal{P}(M)\}$ で与えられる F 上のマトロイドのことである。 M の F への縮約 M_F とは, フラットの族 $\mathcal{P}(M_F)$ が $\{G \setminus F \mid G \in \mathcal{P}(M), F \subset G\}$ で与えられる $E \setminus F$ 上のマトロイドのことである。

命題 1.10 の証明 証明法が同様なので \mathcal{P}_F が $\mathcal{P}(M_F)$ の順序フィルターであることのみを示す。 \mathcal{P}_F の元 G と G を含む $\mathcal{P}(M_F)$ の元 H を取ると, $G \cup F \in \mathcal{P}$ かつ $G \cup F \subset H \cup F \in \mathcal{P}(M)$ が成立するので \mathcal{P} が順序フィルターであることから, $H \cup F \in \mathcal{P}$ であり $H \in \mathcal{P}^F$ が従う。ゆえに \mathcal{P}^F は順序フィルターである。 ■

命題 1.12 M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし元 $F \in \mathcal{P}(M)$ を一つ取る。 $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルター \mathcal{P} に F が属するならば $\mathcal{P}_F = (M_F)$ が成立する。

証明 元 $G \in \mathcal{P}_F$ は M_F のフラットであることから $G \cup F$ は M のフラットである。 $F \in \mathcal{P}$ であることと $F \subset G \cup F$ であることから $G \cup F$ も \mathcal{P} に属す。ゆえに $G = (G \cup F) \setminus F \in \mathcal{P}_F$ であり大意は示された。 ■

命題 1.13 ([AHK18, Prop. 3.5 (1)] の準備) E を非空な有限集合とし F を E の部分集合とする。このとき次の二つが成立する。

(1) 全射群準同型

$$\phi: \mathbb{Z}^E \rightarrow \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}, \sum_{i \in E} \lambda_i \mathbf{e}_i \mapsto \left(\sum_{j \in F} \lambda_j \mathbf{e}_j, \sum_{k \in E \setminus F} \lambda_k \mathbf{e}_k \right)$$

に対し $\langle \mathbf{e}_E \rangle \subset \ker \phi$ が成立する。 ϕ が誘導する \mathbf{N}_E 上の群準同型も ϕ と書くことにする。

(2) \mathbf{N}_E 上の群準同型 ϕ に対し $\ker \phi = \langle \mathbf{e}_F \rangle$ が成立する。つまり $\mathbf{N}_E / \langle \mathbf{e}_F \rangle \cong_{\phi} \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}$ である。

証明 (1) と (2) における $\langle \mathbf{e}_F \rangle \subset \ker \phi$ は定義から直ちに示すことができる。逆に $\ker \phi$ の元 $\mathbf{v} = \sum_{i \in E} \lambda_i \mathbf{e}_i$ を取ると \mathbb{Z}^E の元として $\sum_{j \in F} \lambda_j \mathbf{e}_j \in \langle \mathbf{e}_F \rangle$ かつ $\sum_{k \in E \setminus F} \lambda_k \mathbf{e}_k \in \langle \mathbf{e}_{E \setminus F} \rangle$ である。ゆえに $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{e}_F + \mu \mathbf{e}_{E \setminus F}$ (λ と μ は整数) と表すことができるが, 第二項目は $-\mu \mathbf{e}_F$ と等しく $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{e}_F \rangle$ である。ゆえに $\ker \phi = \langle \mathbf{e}_F \rangle$ である。 ■

命題 1.14 ([AHK18, Prop. 3.5 (2)] の準備) E を非空な有限集合としその元 i を一つ固定する。このとき次の二つが成立する。

(1) 全射群準同型

$$\phi: \mathbb{Z}^E \rightarrow \mathbf{N}_{E \setminus \{i\}}, \sum_{j \in E} \lambda_j \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j \in E \setminus \{i\}} \lambda_j \mathbf{e}_j$$

に対し $\langle \mathbf{e}_E \rangle \subset \ker \psi$ が成立する。 ψ が誘導する \mathbf{N}_E 上の群準同型も ψ と書くことにする。

(2) \mathbf{N}_E 上の群準同型 ψ に対し $\ker \psi = \langle \mathbf{e}_i \rangle$ が成立する。つまり $\mathbf{N}_E / \langle \mathbf{e}_i \rangle \cong_{\psi} \mathbf{N}_{E \setminus \{i\}}$ である。

証明 (1) と (2) における $\langle \mathbf{e}_i \rangle \subset \ker \psi$ は定義から直ちに示すことができる。逆に $\ker \psi$ の元 $\mathbf{v} = \sum_{j \in E} \lambda_j \mathbf{e}_j$ を取るとすべての $j, k \in E \setminus \{i\}$ に関して $\lambda_j = \lambda_k$ が成り立つのでこの値を λ と置く。すると \mathbf{N}_E の元として $\mathbf{v} = (\lambda_i - \lambda) \mathbf{e}_i$ が成立するので $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{e}_i \rangle$ が従う。ゆえに $\ker \psi \subset \langle \mathbf{e}_i \rangle$ である。 ■

命題 1.15 ([AHK18, Prop. 3.5]) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき次の二つが成立する。

(1) F を \mathcal{P} に属す M のフラットとすると命題 1.13 の群同型 ϕ は全単射な写像

$$(1.2) \quad \phi: \text{star}(\mathbf{e}_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}, \quad \bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}} \mapsto \phi(\bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}})$$

を誘導する。

(2) 一元集合 $\{i\}$ が E の真部分集合かつ M のフラットであるとき命題 1.14 の群同型 ψ は全単射な写像

$$(1.3) \quad \psi: \text{star}(\mathbf{e}_i, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M_{\{i\}}, \mathcal{P}_{\{i\}}}, \quad \bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}} \mapsto \psi(\bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}})$$

を誘導する。

(1) の証明 $\text{cone}(\{\mathbf{e}_F\}) = \sigma_{\emptyset < M \setminus \{F\}}$ と表すことができるので、注意 1.3 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I < M \setminus \mathcal{F}}$ が $\text{cone}(\{\mathbf{e}_F\})$ を含むのは $F \in \mathcal{F}$ のときかつそのときに限る。 F が属す \mathcal{P} の旗 \mathcal{F} を $\{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k\}$ とし $F_l = F$ と書くことにする。このとき $\mathcal{G} = \{F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_{l-1}\}$ と置くとこれは \mathcal{P}^F の旗であり $\mathcal{H} = \{F_{l+1} \setminus F_l \subsetneq \dots \subsetneq F_k \setminus F_l\}$ と置くとこれは \mathcal{P}_F の旗である。さらに $\min(G) = \min(\mathcal{F})$ であるから $I < \mathcal{G}$ である。すると $i \in I$ に対し $\phi(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{0})$ かつ

$$\phi(\mathbf{e}_{F_j}) = \begin{cases} (\mathbf{e}_{F_j}, \mathbf{0}), & j \leq l \text{ のとき,} \\ (\mathbf{0}, \mathbf{e}_{F_j \setminus F_l}), & j \geq l \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立するので、 $\phi(\sigma_{I < \mathcal{F}}) = \sigma_{I < \mathcal{G}} \times \sigma_{\emptyset < \mathcal{H}}$ である。ゆえに (1.2) の写像は well-defined である。注意 1.3 と構成から単射性は明らかであるから全射性について述べる。 $\Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$

の元 $(\sigma_{I<\mathcal{G}}, \sigma_{\emptyset<\mathcal{H}})$ を取る。 \mathcal{G} を $\{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1}\}$ と表すとすべての i に関し $F_i \subsetneq F$ である。
 \mathcal{H} を $\{F_{k+1} \setminus F \subsetneq \cdots \subsetneq F_l \setminus F\}$, $F_i \supsetneq F$ ($i \in \{k+1, \dots, l\}$) と表し, $\mathcal{P}(M)$ の旗

$$\mathcal{F} = \{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F \subsetneq F_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq F_l\}$$

を考えると $F \in \mathcal{F}$ かつ $I < \mathcal{F}$ なので $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ は $\text{cone}(\{\mathbf{e}_F\})$ を含む錐であり, $\phi(\sigma_{I<\mathcal{F}}) = \sigma_{I<\mathcal{G}} \times \sigma_{\emptyset<\mathcal{H}}$ である。これは (1.2) の全射性を意味する。 ■

(2) の証明 $\{i\}$ が \mathcal{P} に属するかそうでないかで場合分けが生じる。

$\{i\} \in \mathcal{P}$ のとき。まず命題 1.12 より $\mathcal{P}_{\{i\}} = \mathcal{P}(M_{\{i\}})$ であることに注意する。 $\{i\} \in \mathcal{P}$ であるから $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐として $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\}) = \sigma_{\emptyset<\{i\}}$ と書くことができる。命題 1.2 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ が $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\})$ を含むのは $\{i\} \in \mathcal{F}$ のときかつそのときに限る。またこのとき $\#I < \min \mathcal{F}$ なので $I = \emptyset$ である。 $\{i\}$ を含む \mathcal{P} の旗 \mathcal{F} を $\{\{i\} \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ と書くとき $\mathcal{G} = \{F_1 \setminus \{i\} \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus \{i\}\}$ は $\mathcal{P}(M_{\{i\}})$ の旗であり $\psi(\sigma_{\emptyset<\mathcal{F}}) = \sigma_{\emptyset<\mathcal{G}}$ である。これは (1.3) の写像が well-defined であることを示している。注意 1.3 から単射性は直ちに従い全射性は, $\mathcal{P}(M_{\{i\}})$ の旗 \mathcal{G} に対し $\mathcal{F} = \{\{i\}\} \cup \{F \cup \{i\} \mid F \in \mathcal{G}\}$ が \mathcal{P} の旗であり $\psi(\sigma_{\emptyset<\mathcal{F}}) = \sigma_{\emptyset<\mathcal{G}}$ となることから従う。

$\{i\} \notin \mathcal{P}$ のとき。 $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐として $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\}) = \sigma_{\{i\}<\emptyset}$ と書くことができる。命題 1.2 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ が $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\})$ を含むのは $i \in I$ のときかつそのときに限る。このような錐に対して \mathcal{F} を $\{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ と書くとき $\mathcal{G} = \{F_1 \setminus \{i\} \subseteq F_2 \setminus \{i\} \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus \{i\}\}$ は $\mathcal{P}_{\{i\}}$ の旗であり $I \setminus \{i\} < \mathcal{G}$ である。このとき $\psi(\sigma_{I<\mathcal{F}}) = \sigma_{I \setminus \{i\} < \mathcal{G}}$ となるので (1.3) の写像が well-defined であることが従う。単射性および全射性はもはや明らかだろう。 ■

2 区分的線形関数など

2.1 区分的線形関数の例

例 2.1 (凸でない区分的線形関数の例) $E = \{0, 1, 2\}$ とし Σ_\emptyset 上の区分的線形関数 ℓ を

$$\ell(\mathbf{e}_1) = \ell(\mathbf{e}_2) = \ell(\mathbf{e}_0) = -1$$

で定まるものとする。 ℓ のグラフは図 1 のように書くことができる¹⁾。 ℓ は $\sigma_{\{1\}<\emptyset}$ の周りで凸ではない。そうでなかったとすると $\text{link}(\sigma_{\{1\}<\emptyset}, \Sigma) = \{\sigma_{\{1\}<\emptyset}, \sigma_{\{2\}<\emptyset}, \sigma_{\{0\}<\emptyset}\}$ であることから $\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) \geq 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) \geq 0$ を満たす線形関数 f が

1) ℓ は直感的には凹である。

存在するが, $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = (-1) + (-1) + f(\mathbf{e}_2) \leq \ell(\mathbf{e}_2) = -1$ となり矛盾が生じる。同様に ℓ は $\sigma_{\{2\} < \emptyset}$ の周りや $\sigma_{\{0\} < \emptyset}$ の周りで凸ではない。

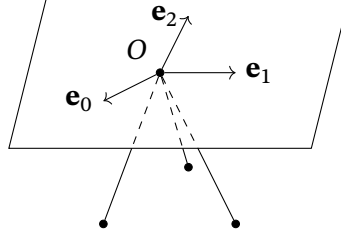


図1 ℓ のグラフ

例 2.2 (強凸な区分的線形関数の例) $E = \{0, 1, 2\}$ とし $\Sigma_{\mathcal{P}(E)}$ 上の区分的線形関数 ℓ を

$$\ell(\mathbf{e}_1) = \ell(\mathbf{e}_2) = 0, \ell(\mathbf{e}_0) = 1$$

で定まるものとする。すると ℓ は強凸である。実際各射線周りの強凸性は以下に述べるようにして確かめられる。

1. $\sigma_{\{1\} < \emptyset}$ の周りについて $f(\mathbf{e}_1) = 0$ かつ $f(\mathbf{e}_2) = -1/2$ で定まる整線形関数 f を考えると, $\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = 1/2$ であるので強凸である。
2. $\sigma_{\{2\} < \emptyset}$ の周りについて $f(\mathbf{e}_1) = -1/2$ かつ $f(\mathbf{e}_2) = 0$ で定まる整線形関数 f を考えると, $\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) = 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = 1/2$ であるので強凸である。
3. $\sigma_{\{0\} < \emptyset}$ の周りについて $f(\mathbf{e}_1) = -1/2$ かつ $f(\mathbf{e}_2) = -1/2$ で定まる整線形関数 f を考えると, $\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = 0$ であるので強凸である。

射線以外の錐の接続 (link) は空集合である。

2.2 [AHK18, Prop. 4.5] に関する命題

補題 2.3 X を $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内の凸集合とする。このとき X の閉包 \bar{X} も凸である。

証明 \bar{X} の二点 \mathbf{x} と \mathbf{y} を取る。0 以上 1 以下の任意の実数 λ に対し $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \bar{X}$ が成立することを示せば良いが, それは \mathbf{x} に収束する X の点列 $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ と \mathbf{y} に収束する X の点列 $(\mathbf{y}_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在し $\mathbf{x}_n + \lambda(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n) \in X$ が成立することから従う。 ■

命題 2.4 X を $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内の凸な開集合とする。 $(-)^{\circ}$ を開核作用素とし $(-)^{-}$ を閉包作用素とするとき, $X = ((X)^{-})^{\circ}$ 成立する。

証明 $X \subset ((X)^-)^{\circ}$ は明らかなので逆の包含が成立することを示す。元 $\mathbf{x} \in ((X)^-)^{\circ}$ を取る。 \mathbf{x} は \bar{X} の内点であるから $B_{\epsilon}(\mathbf{x}) \subset \bar{X}$ を満たす正の実数 ϵ が存在する。ただし $B_{\epsilon}(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} を中心とする半径 ϵ の開球を表す。 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ の基底とし、 $\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 = \epsilon \mathbf{e}_1, \mathbf{x} - \mathbf{v}_2 = \epsilon \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{v}_n = \epsilon \mathbf{e}_n, \mathbf{x} - \mathbf{v}_{n+1} = (-\epsilon/\sqrt{n})(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n)$ として一般の位置にあるベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ を取る。 \mathbf{v}_i はすべて \bar{X} に属し、 \bar{X} が凸であること (補題 2.3) から n 次元単体 $\Delta = \text{conv}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\})$ は \bar{X} に含まれる。 \mathbf{x} はこの単体の内部に含まれるので \mathbf{x} と Δ の狭義な面との距離の最小値 δ は正である。 \mathbf{v}_1 は X の触点であるから $\mathbf{v}'_1 \in B_{\delta}(\mathbf{v}_1) \cap X$ を満たすベクトル \mathbf{v}'_1 を取ることができる。すると $\Delta' = \text{conv}(\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\})$ は \mathbf{x} を内点に持つ。同様の操作を Δ' に繰り返し行なっていくことで、 Δ を X に含まれかつ \mathbf{x} を内点として持つ n 次元単体にずらすことができる。特に $\mathbf{x} \in X$ であることが従う。 ■

2.3 引き戻しなどに関する命題

命題 2.5 ([AHK18, Prop. 4.4 (2)] のために) $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内のユニモジュラ扇 Σ の錐 σ を一つ取る。すると

$$\{\mathbf{e} \in \mathbb{V}_{\Sigma} \mid \text{cone}(\mathbf{e}) \text{ と } \sigma \text{ を含む } \Sigma \text{ の錐が存在しかつ } \mathbf{e} \notin \sigma \text{ である}\}$$

と $V_{\text{star}(\sigma, \Sigma)}$ は $\mathbf{e} \mapsto \bar{\mathbf{e}}$ により一対一に対応するのであった。ここで $\bar{\mathbf{e}}$ は $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}/\langle \sigma \rangle$ における \mathbf{e} の像を表す。このとき全射群準同型

$$\text{PL}(\Sigma) \rightarrow \text{PL}(\text{star}(\sigma, \Sigma)), x_{\mathbf{e}} \mapsto \begin{cases} x_{\bar{\mathbf{e}}} & \text{cone}(\mathbf{e}) \text{ と } \sigma \text{ を含む } \Sigma \text{ の錐が存在しかつ } \mathbf{e} \notin \sigma \text{ であるとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

は全射群準同型 $p_{\sigma \in \Sigma} : A^1(\Sigma) \rightarrow A^1(\text{star}(\sigma, \Sigma))$ を誘導する。

証明 $\text{im}(\text{res}_{\Sigma})$ が $\text{PL}(\Sigma) \rightarrow A^1(\text{star}(\sigma, \Sigma))$ の核に含まれること、つまり $\text{im}(\text{res}_{\Sigma})$ の $\text{PL}(\text{star}(\sigma, \Sigma))$ における像が $\text{im}(\text{res}_{\text{star}(\sigma, \Sigma)})$ に含まれることを示せば良い。 $m \in \mathbf{M}$ を取り区分的線形関数 $\ell = \text{res}_{\Sigma}(m) = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{V}_{\Sigma}} \langle \mathbf{e}, m \rangle x_{\mathbf{e}}$ を考える。 \mathbf{N}_{σ} を $\sigma \cap \mathbf{N}$ によって生成される \mathbf{N} の部分群とし、 $\mathbf{N}(\sigma) = \mathbf{N}/\mathbf{N}_{\sigma}$ ²⁾ と置き、短完全列 $0 \rightarrow \mathbf{N}_{\sigma} \rightarrow \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}(\sigma) \rightarrow 0$ の双対 $0 \rightarrow \mathbf{M}_{\sigma} \rightarrow \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}(\sigma) \rightarrow 0$ の分裂を一つ取り、 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\sigma} \oplus \mathbf{M}''$ と直和分解する。この分解の下 $m = m' + m'', m' \in \mathbf{M}_{\sigma}, m'' \in \mathbf{M}''$ と表そう。このとき $\mathbf{e} \notin \sigma$ を満たす点 \mathbb{V}_{Σ} に対し $\langle \mathbf{e}, m \rangle = \langle \mathbf{e}, m' \rangle$ が成立する。ゆえに

$$\ell \mapsto \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in V_{\text{star}(\sigma, \Sigma)}} \langle \mathbf{e}, m \rangle x_{\bar{\mathbf{e}}} = \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in V_{\text{star}(\sigma, \Sigma)}} \langle \mathbf{e}, m' \rangle x_{\bar{\mathbf{e}}} = \text{res}_{\text{star}(\sigma, \Sigma)}(\bar{m}')$$

である。 ■

2) 文脈によっては σ によって生成される $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ の部分群を \mathbf{N}_{σ} とし $\mathbf{N}(\sigma) = \mathbf{N}_{\mathbb{R}}/\mathbf{N}_{\sigma}$ と置く場合もある。

2.4 マトロイドの組合せ論的幾何学に関する命題

命題 2.6 ([AHK18, Def. 4.6] のために) E 上のループを持たないマトロイド M に対し \bar{E} を M の階数 1 のフラットが成す集合とする。このとき写像 $\theta: 2^{\bar{E}} \rightarrow 2^E, \bar{F} \mapsto F = \bigcup \bar{F}$ は単射である。

証明 仮定から \emptyset が M のフラットであるので \bar{E} は E の分割を与える。ゆえに $\theta: 2^{\bar{E}} \rightarrow 2^E$ は単射でなければならない。 ■

命題 2.7 ([AHK18, Def. 4.6] のために) M を E 上のループを持たないマトロイドとし \mathfrak{F} を M のフラットすべてがなす集合とする。このとき \mathfrak{F} は $\theta(2^{\bar{E}})$ に含まれる。

証明 F を M のフラットとすると $F = \bigcup_{A \in \bar{E}} (F \cap A)$ が成立する。すると $F \cap A$ が空でなければこれは階数 1 のフラットであるから A と等しい。ゆえに $\bar{F} = \{A \in 2^{\bar{E}} \mid F \cap A \neq \emptyset\}$ と置けば $\theta(\bar{F}) = F$ である。 ■

系 2.8 ([AHK18, Def. 4.6] のために) 非空な E 上のループを持たないマトロイド M に対し族 $\bar{\mathfrak{F}} = \theta^{-1}(\mathfrak{F})$ は \bar{E} 上のマトロイド \bar{M} を定める。また \bar{M} は単純, すなわちそのサーキットはすべて 3 元以上からなる。 \bar{M} を M の組合せ論的幾何学と呼ぶ。

証明 $\bar{\mathfrak{F}}$ が \bar{E} 上のマトロイドを誘導することは定義から従うので省略する。 $\emptyset \in \bar{\mathfrak{F}}$ であるから \bar{M} のサーキットは一元集合ではなく, また \bar{M} の階数 1 のフラットはすべて一元集合であることから, \bar{M} のサーキットは二元ではない。 ■

注意 2.9 [AHK18] では $\bar{\mathfrak{F}}$ を \mathfrak{F} と同一視した上で $\mathcal{P}(\bar{M}) = \mathcal{P}(M)$ としているが, 本稿では引き続きこれらを区別して議論することにする。 \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとし $\bar{\mathcal{P}}$ を対応する $\mathcal{P}(\bar{M})$ の順序フィルターとするとき, 本稿の記法の下では $\Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ に属す斜線の最初の格子点は $\mathbf{N}_{\bar{E}, \mathbb{R}}$ 内の非交和

$$\left\{ \mathbf{e}_A \mid \begin{array}{l} A \text{ は } M \text{ の階数 1 のフラット} \\ \text{で } \mathcal{P} \text{ に属さない} \end{array} \right\} \cup \{ \mathbf{e}_F \mid F \text{ は } \mathcal{P} \text{ に属す } M \text{ のフラットである} \}$$

に属す点として表すことができる。

命題 2.10 ([AHK18, p.398] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし, $\pi: E \rightarrow \bar{E}$ を M における閉包作用素で定まる全射な写像とし, π の切断 $\iota: \bar{E} \rightarrow E$ を一つ固定する。このとき次の二つが成立する。

- (1) 群準同型 $\mathbb{Z}^{\bar{E}} \rightarrow \mathbb{Z}^E, \mathbf{e}_A \mapsto \sum_{i \in A} \mathbf{e}_i$ は群準同型 $\pi_M: \mathbf{M}_E \rightarrow \mathbf{M}_{\bar{E}}$ を誘導する。

(2) 群準同型

$$\mathbb{Z}^E \rightarrow \mathbb{Z}^{\bar{E}}, \mathbf{e}_i \mapsto \begin{cases} \mathbf{e}_{\pi(i)} & i = \iota(\pi(i)) \text{ のとき,} \\ \mathbf{0} & \text{その他の場合,} \end{cases}$$

は群準同型 $\iota_{\mathbf{M}}: \mathbf{M}_{\bar{E}} \rightarrow \mathbf{M}_E$ を誘導する。

(1) の証明 与えられた群準同型により $\mathbf{e}_{\bar{E}} \mapsto \sum_{A \in \bar{E}} (\sum_{i \in A} \mathbf{e}_i) = \sum_{i \in E} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_E$ であるから準同型定理より群準同型 $\mathbf{N}_{\bar{E}} \rightarrow \mathbf{N}_E$ を誘導することができる。この群準同型に関して $\text{hom}(-, \mathbb{Z})$ を取れば良い。 ■

(2) の証明 与えられた群準同型により $\mathbf{e}_E \mapsto \sum_{\substack{i \in E: \\ i = \iota(\pi(i))}} (\sum \mathbf{e}_{\pi(i)}) = \sum_{A \in \bar{E}} \mathbf{e}_A = \mathbf{e}_{\bar{E}}$ であるから準同型定理より群準同型 $\mathbf{N}_E \rightarrow \mathbf{N}_{\bar{E}}$ を誘導することができる。この群準同型に関して $\text{hom}(-, \mathbb{Z})$ を取れば良い。 ■

命題 2.11 ([AHK18, pp.398–399] のために) 非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイド M と $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルター \mathcal{P} について図式

$$\begin{array}{ccc} \text{PL}(\sum_{M, \mathcal{P}}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{\text{PL}}} \\ \xleftarrow{\iota_{\text{PL}}} \end{array} & \text{PL}(\sum_{\bar{E}, \mathcal{P}}) \\ \text{res} \uparrow & & \uparrow \text{res} \\ \mathbf{M}_E & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{M}}} \\ \xleftarrow{\iota_{\mathbf{M}}} \end{array} & \mathbf{M}_{\bar{E}} \end{array}$$

を考える。このとき

$$(2.1) \quad \pi_{\text{PL}} \circ \text{res} = \text{res} \circ \pi_{\mathbf{M}},$$

$$(2.2) \quad \iota_{\text{PL}} \circ \text{res} = \text{res} \circ \iota_{\mathbf{M}},$$

$$(2.3) \quad \pi_{\text{PL}} \circ \iota_{\text{PL}} = \text{id},$$

$$(2.4) \quad \pi_{\mathbf{M}} \circ \iota_{\mathbf{M}} = \text{id}$$

が成立する。

(2.1) の証明 元 $m \in \mathbf{M}_E$ を一つ取る。このとき

$$\begin{aligned} \pi_{\text{PL}}(\text{res}(m)) &= \sum_{\mathbf{e} \in V_{\sum_{M, \mathcal{P}}}} \langle \mathbf{e}, m \rangle \pi_{\text{PL}}(x_{\mathbf{e}}) \\ &= \sum_{\substack{i \in E: \\ \pi(i) \notin \mathcal{P}}} \langle \mathbf{e}_i, m \rangle x_{\pi(i)} + \sum_{F \in \mathcal{P}} \langle \mathbf{e}_F, m \rangle x_{\bar{F}} \\ &= \sum_{\substack{A \in \bar{E}: \\ A \notin \mathcal{P}}} \left\langle \sum_{i \in A} \mathbf{e}_i, m \right\rangle x_A + \sum_{F \in \mathcal{P}} \langle \mathbf{e}_{\bar{F}}, \pi_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_{\bar{F}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{A \in \bar{E}: \\ A \notin \mathcal{P}}} \langle \mathbf{e}_A, \pi_{\text{PL}}(m) \rangle x_A + \sum_{F \in \mathcal{P}} \langle \mathbf{e}_F, \pi_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_F \\
&= \text{res}(\pi_{\mathbf{M}}(m))
\end{aligned}$$

と計算できる。 ■

(2.2) の証明 元 $m \in \mathbf{M}_{\bar{E}}$ を一つ取る。このとき

$$\begin{aligned}
\iota_{\text{PL}}(\text{res}(m)) &= \sum_{\mathbf{e} \in V_{\Sigma_{\mathbf{M}, \mathcal{P}}}} \langle \mathbf{e}, m \rangle \iota_{\text{PL}}(x_{\mathbf{e}}) \\
&= \sum_{\substack{A \in \bar{E}: \\ A \notin \mathcal{P}}} \langle \mathbf{e}_A, m \rangle x_{\iota(A)} + \sum_{F \in \mathcal{P}} \langle \mathbf{e}_F, m \rangle x_F \\
&= \sum_{\substack{i \in \bar{E}: \\ \pi(i) \notin A, \\ \iota(\pi(i))=i}} \langle \mathbf{e}_i, \iota_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_i + \sum_{F \in \mathcal{P}} \langle \mathbf{e}_F, \iota_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_F \\
&= \text{res}(\iota_{\mathbf{M}}(m))
\end{aligned}$$

と計算できる。 ■

(2.3) の証明 $\iota \circ \pi = \text{id}$ であることから直ちに従う。 ■

(2.4) の証明 元 $A \in \bar{E}$ と元 $i \in A$ に対し \mathbf{e}_i の $\mathbf{N}_{\bar{E}}$ における像が非零となるのは $i = \iota(A)$ となるときかつそのときに限るので、勝手な元 $m \in \mathbf{M}_{\bar{E}}$ に対し $\langle \mathbf{e}_A, \pi_{\mathbf{M}}(\iota_{\mathbf{M}}(m)) \rangle = \langle \sum_{i \in A} \mathbf{e}_i, \iota_{\mathbf{M}}(m) \rangle = \sum_{i \in A} \langle \mathbf{e}_i, \iota_{\mathbf{M}}(m) \rangle = \langle \mathbf{e}_A, m \rangle$ が成立する。 $\{\mathbf{e}_A \mid A \in \bar{E}\}$ は $\mathbb{Z}^{\bar{E}}$ の基底を成すので、この計算は $\pi_{\mathbf{M}}(\iota_{\mathbf{M}}(m)) = m$ を意味する。 ■

注意 2.12 $V_{\Sigma_{\mathbf{M}, \mathcal{P}}} = V_{\tilde{\Sigma}_{\mathbf{M}, \mathcal{P}}}$ が成立することから \tilde{M}, \mathcal{P} に対しても命題 2.3 と同様の主張が成立する。³⁾

注意 2.13 (2.1) により π_{PL} が群準同型 $\pi_{\text{PL}}: A^1(\Sigma_{\mathbf{M}, \mathcal{P}}) \rightarrow A^1(\Sigma_{\tilde{\mathbf{M}}, \mathcal{P}})$ を誘導することが従う。同様に (2.2) により ι_{PL} が群準同型 $\iota_{\text{PL}}: A^1(\Sigma_{\tilde{\mathbf{M}}, \mathcal{P}}) \rightarrow A^1(\Sigma_{\mathbf{M}, \mathcal{P}})$ を誘導することが従う。これら群準同型が互いに逆写像（したがって群同型）であることは [AHK18, Prop. 4.7] で証明が与えられている。

2.5 [AHK18, Prop. 4.8] に関する命題

命題 2.14 ([AHK18, Prop. 4.8] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき以下の命題が成立する。

- (1) 勝手な錐 $\sigma_{I < \mathcal{F}} \in \Sigma_{\mathbf{M}, \mathcal{P}}$ に対し $\sigma_{\pi(I) < \mathcal{F}} \in \Sigma_{\tilde{\mathbf{M}}, \mathcal{P}}$ と $\sigma_{\iota^{-1}(I) < \mathcal{F}} \in \Sigma_{\tilde{\mathbf{M}}, \mathcal{P}}$ が成立する。

3) 感覚的なことをいえば $\Sigma_{\mathbf{M}, \mathcal{P}}$ と $\tilde{\Sigma}_{\mathbf{M}, \mathcal{P}}$ の差異は豊富錐の差異として現れる。

- (2) 勝手な錐 $\sigma_{\mathcal{F} < \bar{\mathcal{F}}} \in \Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ に対し $\sigma_{\iota(\mathcal{F}) < \bar{\mathcal{F}}} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ と $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \bar{\mathcal{F}}} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ が成立する。
(3) 勝手な錐 $\sigma_{I <_M \bar{\mathcal{F}}} \in \tilde{\Sigma}_{M, \bar{\mathcal{P}}}$ に対し $\sigma_{\pi(I) <_M \bar{\mathcal{F}}} \in \Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ と $\sigma_{\iota^{-1}(I) <_M \bar{\mathcal{F}}} \in \Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ が成立する。
(4) 勝手な錐 $\sigma_{\mathcal{F} <_M \bar{\mathcal{F}}} \in \tilde{\Sigma}_{M, \bar{\mathcal{P}}}$ に対し $\sigma_{\iota(\mathcal{F}) <_M \bar{\mathcal{F}}} \in \tilde{\Sigma}_{M, \bar{\mathcal{P}}}$ が成立する。

(1) の証明 $\iota^{-1}(I) \subset \pi(I)$ であるから $\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}$ であることと $\sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}} \in \Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ が成立することを示せば良い。もし $\pi(I) \not< \bar{\mathcal{F}}$ であつたならば $\text{cl}_M(I) = \min \bar{\mathcal{F}}$ が成立するので $\text{cl}_M(I) \in \bar{\mathcal{P}}$ となり矛盾が生じる。 $\sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}} \in \Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ が成立することは $(\text{cl}_M(I))^\sim = \text{cl}_M(\pi(I))$ であることから従う。 ■

(2) の証明 (1) の証明と同様に $\iota(\mathcal{F}) \subset \pi^{-1}(\mathcal{F})$ であるから $\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}$ であることと $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ が成立することを示せば良いが、 $\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}$ であることは \mathcal{F} が $\min \bar{\mathcal{F}}$ の真部分集合であることから直ちに従い、 $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ であることは $(\text{cl}_M(\pi^{-1}(\mathcal{F})))^\sim = \text{cl}_M(\mathcal{F})$ であることから従う。 ■

(3) の証明 (1) の証明より $\pi(I) <_M \bar{\mathcal{F}}$ が成立することを示せば良い。ところがこれは $\#I < \text{rk}_M(\min \bar{\mathcal{F}})$ であることから直ちに従う。 ■

(4) の証明 $\iota(\mathcal{F}) <_M \bar{\mathcal{F}}$ であることは $\#\mathcal{F} < \text{rk}_M(\min \bar{\mathcal{F}})$ であること $\#\mathcal{F} = \#\iota(\mathcal{F})$ であることと $\text{rk}_M(\min \bar{\mathcal{F}}) = \text{rk}_M(\min \mathcal{F})$ であることの三つから従う。 $\sigma_{\mathcal{F} <_M \bar{\mathcal{F}}} \in \tilde{\Sigma}_{M, \bar{\mathcal{P}}}$ であることは $(\text{cl}_M(\iota(\mathcal{F})))^\sim = \text{cl}_M(\mathcal{F})$ であることから従う。 ■

命題 2.15 ([AHK18, Prop. 4.8] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし $\bar{\ell}$ を $\Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ 上の凸区分的線形関数とする。このとき $\iota_{PL}(\bar{\ell})$ は $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ 上の凸区分的線形関数である。

証明 $\sigma_{I < \bar{\mathcal{F}}}$ を勝手な $\Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}}$ の錐とする。このとき $\bar{\ell}$ は凸であるから $\bar{\ell} - \text{res}(m)$ が $\sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}}$ 上で零であり $\text{link}(\sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}}, \Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}})$ 属す錐上では非負となるような元 $m \in \mathbf{M}_{\bar{E}, \mathbb{R}}$ が存在する。すると $\iota_{PL}(\bar{\ell} - \text{res}(m))$ が $\sigma_{I < \bar{\mathcal{F}}}$ 上で零であることは定義から従う。勝手な錐 $\sigma_{J < \mathcal{F}} \in \text{link}(\sigma_{I < \bar{\mathcal{F}}}, \Sigma_{M, \mathcal{P}})$ を考える。 $J' = J \setminus \pi^{-1}\pi(I)$, $J'' = J \cap \pi^{-1}\pi(I)$ と置くと $\sigma_{J < \mathcal{F}} = \sigma_{J' < \mathcal{F}} + \sigma_{J'' < \mathcal{F}}$ と表すことができる。 $\sigma_{\pi(J'') < \mathcal{F}} \subset \sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}}$ であるから $\iota_{PL}(\bar{\ell} - \text{res}(m))$ は $\sigma_{J'' < \mathcal{F}}$ 上で零である。また $\sigma_{J < \mathcal{F}}$ が $\text{link}(\sigma_{I < \bar{\mathcal{F}}}, \Sigma_{M, \mathcal{P}})$ に属することから $\sigma_{J < \mathcal{F}}$ と $\sigma_{I < \bar{\mathcal{F}}}$ を共に含む $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{K < \mathcal{H}}$ が存在し、 $\sigma_{\pi(K) < \bar{\mathcal{H}}}$ は $\sigma_{\pi(J') < \bar{\mathcal{F}}}$ と $\sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}}$ を共に含む。 J' の置き方から $\sigma_{\pi(J') < \bar{\mathcal{F}}} \cap \sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}} = \{\mathbf{0}\}$ となるので $\sigma_{\pi(J') < \bar{\mathcal{F}}} \in \text{link}(\sigma_{\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}}, \Sigma_{\bar{M}, \bar{\mathcal{P}}})$ であり $\iota_{PL}(\bar{\ell} - \text{res}(m))$ が $\sigma_{J' < \mathcal{F}}$ 上で非負であることが従う。ゆえに $\iota_{PL}(\bar{\ell} - \text{res}(m))$ は $\sigma_{J < \mathcal{F}}$ 上で非負である。(2.2) より $\iota_{PL}(\bar{\ell} - \text{res}(m)) = \iota_{PL}(\bar{\ell}) - \text{res}(\iota_M(m))$ であるから $\iota_{PL}(\bar{\ell})$ は $\sigma_{\pi^{-1}\pi(I) < \bar{\mathcal{F}}}$ の周りで凸であり題意は示された。 ■

命題 2.14 に注意すると命題 2.15 の証明と同様の議論を辿ることで被約バーグマン扇に関する同様の命題（命題 2.16）も示すことができる。

命題 2.16 M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし ℓ を $\Sigma_{\tilde{M}, \mathcal{P}}$ 上の凸区分的線形関数とする。このとき $\iota_{\text{PL}}(\ell)$ は $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ 上の凸区分的線形関数である。

注意 2.17 命題 2.15 の証明は [AHK18, Prop. 4.8] とは異なるものである。[AHK18, Prop. 4.8] の証明では $\iota_{\text{PL}}: A^1(\Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow A^1(\Sigma_{\tilde{M}, \mathcal{P}})$ の制限が $\mathcal{N}_{\tilde{M}, \mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{N}_{M, \mathcal{P}}$ を誘導することは示されるが、 $\iota_{\text{PL}}: A^1(\tilde{\Sigma}_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow A^1(\tilde{\Sigma}_{\tilde{M}, \mathcal{P}})$ の制限が $\tilde{\mathcal{N}}_{\tilde{M}, \mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{M, \mathcal{P}}$ を誘導することは示されない。

命題 2.18 ([AHK18, Prop. 4.8] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし ℓ を $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ 上の凸区分的線形関数とする。このとき $\pi_{\text{PL}}(\ell)$ は $\Sigma_{\tilde{M}, \mathcal{P}}$ 上の凸区分的線形関数である。

証明 $\sigma_{\mathcal{F} < \mathcal{F}}$ を $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の勝手な錐とする。このとき ℓ は凸であるので $\ell - \text{res}(m)$ が $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}}$ 上で零であり $\text{link}(\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}}, \Sigma_{M, \mathcal{P}})$ に属す錐の上で非負となるような元 $m \in \mathbf{M}_{E, \mathbb{R}}$ が存在する。すると定義より $\pi_{\text{PL}}(\ell - \text{res}(m))$ は $\sigma_{\mathcal{F} < \mathcal{P}}$ 上で零である。⁴⁾ また錐 $\sigma_{\mathcal{G} < \mathcal{G}} \in \text{link}(\sigma_{\mathcal{F} < \mathcal{F}}, \Sigma_{E, \mathcal{P}})$ に対し $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{G}) < \mathcal{G}} \in \text{link}(\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}})$ が成立する。 $\ell - \text{res}(m)$ は $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{G}) < \mathcal{G}}$ 上で非負であるから $\pi_{\text{PL}}(\ell - \text{res}(m))$ は $\sigma_{\mathcal{G} < \mathcal{G}}$ 上でも非負である。(2.1) より $\pi_{\text{PL}}(\ell - \text{res}(m)) = \pi_{\text{PL}}(\ell) - \text{res}(\pi_{\mathbf{M}}(m))$ であるから $\pi_{\text{PL}}(\ell)$ は $\sigma_{\mathcal{F} < \mathcal{F}}$ の周りで凸であり題意は示された。 ■

3 ホモロジーとコホモロジーなど

3.1 ミンコフスキー荷重に関する命題

命題 3.1 \mathbf{M} から \mathbb{Z}^{Σ_1} への制限写像 res_{Σ} を $\text{res}_{\Sigma}(m)(\sigma) = \langle \mathbf{e}_{\sigma/\{0\}}, m \rangle$ で定める。⁵⁾ このとき $\text{MW}_1(\sigma) = \text{im}(\text{res}_{\Sigma})^{\perp}$ が成立する。ただし \mathbb{Z}^{Σ_1} には標準内積 $\langle -, - \rangle: \mathbb{Z}^{\Sigma_1} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_1} \rightarrow \mathbb{Z}$ が定まっているとする。

証明 次元 1 のミンコフスキー荷重 $\omega \in \text{MW}_1(\sigma)$ を取ると $\sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\{0\}} = \mathbf{0}$ が成立するので、勝手な元 $m \in \mathbf{M}$ に対し

$$\langle \omega, \text{res}_{\Sigma}(m) \rangle = \sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \langle \mathbf{e}_{\sigma/\{0\}}, m \rangle$$

4) $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ 上の区分的線形関数に対し $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F}) < \mathcal{F}}$ 上で零であっても π_{PL} による像が $\sigma_{\mathcal{F} < \mathcal{F}}$ 上で零であることは含意しないことに注意する。

5) このとき $\mathbf{e}_{\sigma/\{0\}}$ は斜線 σ の最初の格子点である。

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\{0\}}, m \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{0}, m \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるから $\omega \in \text{im}(\text{res}_\Sigma)^\perp$ である。逆に関数 $\omega \in \text{im}(\text{res}_\Sigma)^\perp$ を取ると勝手な元 $m \in \mathbf{M}$ との内積が零であるから $\sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\{0\}} = \mathbf{0}$ が成立し $\omega \in \text{MW}_1(\Sigma)$ である。 ■

命題 3.2 ([AHK18, Prop. 5.2] のために) 非空な有限集合 E 上のループを持たない階数 $r+1$ のマトロイド M と $r-1$ 個のフラットからなる $\mathcal{P}(M)$ の旗 \mathcal{G} を考える。

$V_{\text{star}}(\mathcal{G}) = V_{\text{star}(\sigma_{\mathcal{G}}, \Sigma_M, \mathcal{P})}$ と書くことにする。⁶⁾ このとき次の二つが成立する。

- (1) $\sum_{\mathbf{e} \in V_{\text{star}}(\mathcal{G})} \mathbf{e} = \mathbf{0}$ である。
- (2) $V_{\text{star}}(\mathcal{G})$ の真部分集合はいずれも線型独立である。

証明 $\mathcal{G} = \{G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G_{r-1}\}$ と書くことにし、さらに $G_0 = \emptyset$, $G_r = E$ と置くことにする。すると M の階数が $r+1$ であることと \mathcal{G} が $r-1$ 個のフラットから構成されていることから、ある番号 $i_0 \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ に対し G_{i_0+1} は G_{i_0} を被覆せず、他の番号 i について G_{i+1} は G_i を被覆する。 $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ を、 \mathcal{G} を狭義に含む $\mathcal{P}(M)$ の旗のすべてとすると $\mathcal{F}_j = \{G_1 \subseteq \cdots \subsetneq G_{i_0} \subsetneq F_j \subsetneq G_{i_0+1} \subsetneq \cdots \subsetneq G_{r-1}\}$ と表され、 F_j は G_{i_0} を被覆した G_{i_0+1} に被覆される。ゆえにフラットの公理より $\{G_{i_0}, F_1 \setminus G_{i_0}, \dots, F_k \setminus G_{i_0}\}$ は G_{i_0+1} の分割を与える。いま $V_{\text{star}} \mathcal{G} = \{\mathbf{e}_{F_j} \mid j \in \{1, \dots, k\}\}$ と表すことができるので

$$\sum_{\mathbf{e} \in \text{star}(\mathcal{G})} \mathbf{e} = \sum_{j=1}^k \mathbf{e}_{F_j} = \mathbf{e}_{G_{i_0+1}} + (k-1)\mathbf{e}_{G_{i_0}} = \mathbf{0} + (k-1)\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

であり (1) が成立することが示された。

(2) について考える。 $\{\mathbf{e}_{F_1}, \dots, \mathbf{e}_{F_{k-1}}\}$ が $\mathbf{N}_E(\sigma_{\mathcal{G}})_{\mathbb{R}}$ 内で線型独立であることを示せばよい。ただし $\mathbf{N}_E(\sigma_{\mathcal{G}})$ は $\sigma_{\mathcal{G}}$ が生成する部分格子 $\mathbf{N}_{E, \sigma_{\mathcal{G}}}$ による \mathbf{N}_E の商格子を表す。 $\mathbf{N}_E(\sigma_{\mathcal{G}})_{\mathbb{R}}$ 上の線形関係 $\lambda_1 \mathbf{e}_{F_1} + \cdots + \lambda_{k-1} \mathbf{e}_{F_{k-1}} = \mathbf{0}$ が成立すると、 \mathbf{N}_E の元として $\lambda_1 \mathbf{e}_{F_1 \setminus G_{i_0}} + \cdots + \lambda_{k-1} \mathbf{e}_{F_{k-1} \setminus G_{i_0}} \in \mathbf{N}_{E, \sigma_{\mathcal{G}}, \mathbb{R}}$ であり、ゆえにこのベクトルの成分は $G_1, G_2 \setminus G_1, \dots, G_{r-1} \setminus G_{r-2}, E \setminus G_{r-1}$ 上でそれぞれ一定であるので、 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$ でなければならない。 ■

命題 3.3 ([AHK18, Prop. 5.5] の証明加筆版) Σ を $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内のユニモジュラ扇とする。このとき勝手な非負整数 k について $A^k(\Sigma)$ は $Z^k(\Sigma)$ の像と等しい。

6) 添え字に用いる際の視認性のため。

証明 $A^k(\Sigma)$ における次元 k の単項式 $f = \prod_{\mathbf{e} \in V_\Sigma} x_{\mathbf{e}}^{i_{\mathbf{e}}}$ が $Z^k(\Sigma)$ の像に属することを示せばよい。もし $\text{cone}(\{\mathbf{e} \in V_\Sigma \mid i_{\mathbf{e}} \neq 0\}) \notin \Sigma$ であれば I_Σ による関係式から $f = 0$ である。なので $\text{cone}(\{\mathbf{e} \in V_\Sigma \mid i_{\mathbf{e}} \neq 0\}) \in \Sigma$ の場合を考える。 $\sigma = \text{cone}(\{\mathbf{e} \in V_\Sigma \mid i_{\mathbf{e}} \neq 0\})$ と置き、 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l$ を σ に含まれる斜線の最初の格子点すべてとし、 $f = x_{\mathbf{e}_1}^{i_1} x_{\mathbf{e}_2}^{i_2} \cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l}$ と表したときに $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_l \geq 1$ となるようにしておく。

f が $Z^k(\Sigma)$ の像に属することを σ の次元に関する減少方向の帰納法で示す。 $\dim(\sigma) = k$ のときは $f = x_{\mathbf{e}_1} x_{\mathbf{e}_2} \cdots x_{\mathbf{e}_l} = x_\sigma$ であるから帰納法の主張は成立する。 $\dim(\sigma) < k$ の場合を考える。すると $i_1 \geq 2$ であり、また σ はユニモジュラ錐であるから $\langle \mathbf{e}_1, m \rangle = -1$ かつ $\langle \mathbf{e}_2, m \rangle = \cdots = \langle \mathbf{e}_l, m \rangle = 0$ となるような元 $m \in \mathbf{M}$ が存在する。すると

$$(3.1) \quad f = x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-1} x_{\mathbf{e}_2}^{i_2} \cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l} \left(\sum_{\mathbf{e} \in V_\Sigma \setminus \{\mathbf{e}_1\}} \langle \mathbf{e}, m \rangle x_{\mathbf{e}} \right)$$

と表すことができるが、 $\text{cone}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}\}) \notin \Sigma$ のとき I_Σ の関係式より $x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-1} x_{\mathbf{e}_2}^{i_2} \cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l} x_{\mathbf{e}} = 0$ であるので、 $\tau_{\mathbf{e}} = \text{cone}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}\})$ と書けば (3.1) は

$$(3.2) \quad \begin{aligned} f &= x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-1} x_{\mathbf{e}_2}^{i_2} \cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l} \left(\sum_{\substack{\mathbf{e} \in V_\Sigma \setminus \{\mathbf{e}_1\}: \\ \tau_{\mathbf{e}} \in \Sigma}} \langle \mathbf{e}, m \rangle x_{\mathbf{e}} \right) \\ &= x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-2} x_{\mathbf{e}_2}^{i_2-1} \cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l-1} \left(\sum_{\substack{\mathbf{e} \in V_\Sigma \setminus \{\mathbf{e}_1\}: \\ \tau_{\mathbf{e}} \in \Sigma}} \langle \mathbf{e}, m \rangle x_{\tau_{\mathbf{e}}} \right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{e} \in V_\Sigma \setminus \{\mathbf{e}_1\}: \\ \tau_{\mathbf{e}} \in \Sigma}} \langle \mathbf{e}, m \rangle (x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-2} x_{\mathbf{e}_2}^{i_2-1} \cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l-1} x_{\tau_{\mathbf{e}}}) \end{aligned}$$

と書き直すことができる。(3.2) の右辺の各単項式は次元 k の単項式かつ $\dim(\tau_{\mathbf{e}}) = \dim(\sigma) + 1$ であるから、帰納法の仮定より $Z^k(\Sigma)$ の像に属しゆえに f も $Z^k(\Sigma)$ に属す。 ■

参考文献

[AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. “Hodge theory for combinatorial geometries”. In: **Ann. of Math. (2)** **188.2** (2018), pp. 381–452.