グラスマン多様体とプリュッカー座標

2025 年 12 月 2 日 15 時 30 分更新

目　　次

本文書では，小行列式の等式であるプリュッカー関係式を示すことを目標にして，グラスマン多様体と旗多様体について論じる。

K を無限体とし，その非零元がなす乗法群を $K^\times$ で表す。K 線型空間 V に対して，その双対空間を V^* で表し，双対対 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V^* \to K$ を備えておく。

1　射影多様体

まずは集合としてのグラスマン多様体および射影空間を定めることから始める。

定義 1 (集合としてのグラスマン多様体)　E を有限次元 K 線型空間とし，その次元を m と置く。

(1) m 以下の正整数 r に対して，集合

$$\{\, V : V \text{ は } E \text{ の } r \text{ 次元部分空間である} \,\}$$

$\mathrm{Gr}_r(E)$ で表し，**グラスマン多様体**と呼ぶ。$\mathrm{Gr}_r(E)$ の元を $\mathrm{Gr}_r(E)$ の**点**と呼ぶ。

(2) $\mathrm{Gr}_1(E)$ を特に $\mathbb{P}(E)$ で表し，E の**射影空間**と呼ぶ。

(3) $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m)$ で $K^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ の $K^\times$ による群作用を定め，その商集合を $\mathbb{P}^m_K$ で表し，m 次元の**射影空間**と呼ぶ。$(x_1, \dots, x_m)$ の剰余類を $[x_1 : \cdots : x_m]$ で表し，$\mathbb{P}^m_K$ の**点**と呼ぶ。

観察 2 (斉次座標について)　E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取って，点 $L \in \mathbb{P}(E)$ の生成元の係数を考えると，

$$\{\, (x_1, \dots, x_m) : L = \mathrm{Span}_K(x_1 e_1 + \cdots x_m e_m) \,\} = [x_1 : \cdots : x_m]$$

となるので, $\mathbb{P}^m_K$ の点を定める。この点を L の**斉次座標**と呼ぶ。逆に $\mathbb{P}^m_K$ の点 $[x_1 : \cdots : x_m]$ が $\mathbb{P}(E)$ の点 $\mathrm{Span}_K(x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m) \subset E$ を定めるので，$e_1, \dots, e_m$ が全単射写像 $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^m_K$

を誘導することがわかる。

次に集合として定義した $\mathbb{P}(E)$ に，代数的集合の構造を入れる。そのために基本となるのは次の補題である。

補題 3　n を非負整数に対して，以下で構成する線型写像

$$(E^*)^{\otimes n} \to (E^{\otimes n})^*;\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot)$$

は同型である。

構成　n 個のベクトル $v_1, \dots, v_n \in E^*$ が定める E^n 上の関数 $(w_1, \dots, w_n) \mapsto v_1(w_1) \cdots v_n(w_n)$ が n 重線型であるから，$(E^{\otimes n})^*$ の元 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot)$ を定める（図 1 左図）。対応 $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ は n 重線型であるから，線型写像 $(E^*)^{\otimes n} \to (E^{\otimes n})^*$ が誘導される（図 1 右図）。

$$\begin{tikzcd}
(w_1, \dots, w_n) \arrow[d, mapsto] & \in & E^n \arrow[r] \arrow[d] & E^{\otimes n} \arrow[dl, dashed, "v_1\otimes\cdots\otimes v_n(\cdot)"] \\
v_1(w_1) \cdots v_n(w_n) & \in & K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(v_1, \dots, v_n) \arrow[d, mapsto] & \in & (E^*)^n \arrow[r] \arrow[d] & (E^*)^{\otimes n} \arrow[dl, dashed] \\
v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\cdot) & \in & (E^{\otimes n})^* &
\end{tikzcd}$$

図 1　線型汎関数のテンソル積（左図）と目的の写像の誘導（右図）

証明　E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取って, E^* の双対基底 $e_1^*, \dots, e_m^*$ を取る。すると $\{e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^* : 1 \leqq i_1, \dots, i_n \leqq m\}$ が $(E^*)^{\otimes n}$ の基底で，構成より $e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^* = (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})^*$ であるので，$(E^*)^{\otimes n}$ の基底が $(E^{\otimes n})^*$ の基底に写ることがわかり，件の写像が同型であることが示された。　　証明終

$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^n(E^*)$ を E^* の対称代数とし，次のようにして $\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ を E 上の K 値関数がなす環 $\mathscr{F}(E, K)$ に埋め込む。元 $f \in (E^*)^{\otimes n}$ を $(E^{\otimes n})^*$ の元と考え，関数

$$f(\cdot) \colon E \to K;\ w \mapsto \langle w \otimes \cdots \otimes w, f \rangle$$

を対応させると, 線型写像 $(E^*)^{\otimes n} \to \mathscr{F}(E, K)$ が得られ, テンソル代数 $T^\bullet(E^*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (E^*)^{\otimes n}$ からの環準同型 $T^\bullet(E^*) \to \mathscr{F}(E, K)$ に拡張できる。この準同型によって，勝手なベクトル $v_1,\ v_2 \in E^*$ に対して $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ が零に写るので，対称代数からの環準同型 $S^\bullet(E^*) \to \mathscr{F}(E, K)$ が誘導される。この環準同型の単射性は補題として扱うことにする。

補題 4　$S^\bullet(E^*) \to \mathscr{F}(E, K);\ v_1 \cdots v_n \mapsto v_1 \cdots v_n(\cdot)$ は環同型である。

証明　E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を固定し，E^* の双対基底 $e_1^*, \dots, e_m^*$ を取る。$e_1, \dots, e_m$ によって環同型 $\mathscr{F}(E, K) \to \mathscr{F}(K^m, K)$ が得られ，$X_1, \dots, X_m$ を不定元とすると，対応 $X_i \mapsto e_i^*$ によって環同型 $K[X_1, \dots, X_m] \to S^\bullet(E^*)$ が得られる。すると合成 $K[X_1, \dots, X_m] \to \mathscr{F}(K^m, K)$ は多項式を多項式写像に写す写像で，これが単射であることを示せばよい。

この写像の単射性を m に関する帰納法で示す。$m = 1$ のとき，多項式写像が零であることは，一変数多項式が無限個の解を持つことを意味するので，もとの多項式も零で，件の写像は零である。$m > 1$ とし，$K[X_1, \dots, X_{m-1}][X_m]$ と考える。この多項式環の元 $f = \sum_{i=0}^{\infty} g_i X_m^i$, $g_i \in K[X_1, \dots, X_{m-1}]$ を取り，多項式関数として零であると仮定する。K 値ベクトル $(x_1, \dots, x_{m-1})$ を勝手に取ると，$f(x_1, \dots, x_{m-1}, X_m) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x_1, \dots, x_{m-1}) X_m^i$ は無限個の解を持つ一変数多項式環であるので，すべての i について $g_i(x_1, \dots, x_{m-1}) = 0$ である。$(x_1, \dots, x_{m-1})$ を勝手に取っていたので，帰納法の仮定により $g_i = 0$ となり，$f = 0$ であることも従うので，件の写像は単射であることが示された。　証明終

観察 5　斉次元 $f \in \mathrm{Sym}^n(E^*)$ と，点 $L \in \mathbb{P}(E)$ を考える。ベクトル $v_1^{(i)}, \dots, v_n^{(i)} \in E^*$ を用いて $f = \sum_{i=1}^{k} v_1^{(i)} \cdots v_n^{(i)}$ と表し，点 $w_0 \in L \setminus \{0\}$ を一つ固定して f に代入すると，

$$f(w_0) = \sum_{i=1}^{k} v_1^{(i)}(w_0) \cdots v_n^{(i)}(w_0)$$

と書ける。他の点 $w \in L \setminus \{0\}$ を勝手に取ると，元 $\lambda \in K^\times$ を用いて $w = \lambda w_0$ と表せるので，f に代入すると

$$f(w) = \sum_{i=1}^{k} v_1^{(i)}(\lambda w_0) \cdots v_n^{(i)}(\lambda w_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^n v_1^{(i)}(w_0) \cdots v_n^{(i)}(w_0) = \lambda^n f(w_0)$$

となる。特に E の基底 $e_1, \dots, e_m$ とその双対基底 $e_1^*, \dots, e_m^*$ を取って，$e_1^*, \dots, e_m^*$ を $\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の元と考えると，この基底に関する L の斉次座標が $[e_1^*(w) : \cdots : e_m^*(w)]$ で与えられる。このような観点から，$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ を $\mathbb{P}(E)$ の**斉次座標環**と呼ぶ。

以上で $\mathbb{P}(E)$ に代数的集合の構造を入れる準備が整った。

定義 6 (射影空間の代数的集合)　$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の元 f と，$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の部分集合 S と，$\mathbb{P}(E)$ の部分集合 V を取る。

(1) 点 $L \in \mathbb{P}(E)$ が f の**零点**であるとは，L の勝手な元 w に対して $f(w) = 0$ が成立するときをいう。

(2) $\mathbb{P}(E)$ の部分集合 $V(S)$ を，

$$\{L \in \mathbb{P}(E) : \text{勝手な元 } f \in S \text{ に対して，} L \text{ が } f \text{ の零点である}\}$$

として定め，この形の部分集合を $\mathbb{P}(E)$ の**代数的集合**と呼ぶ。

(3) $\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の部分集合 $I(V)$ を，

$$\{f \in \mathrm{Sym}^\bullet(E^*) : f \text{ は，} V \text{ のすべての点を零点として持つ}\}$$

として定めると，これは斉次イデアルで，V の**イデアル**と呼ぶ。

(4) 代数的集合 $V(S)$ が, $V(S)$ とは異なる代数的集合 $V(S_1)$ と $V(S_2)$ の和集合 $V(S_1) \cup V(S_2)$ と等しいとき，**可約である**といい，そうでないとき**既約である**という。既約な代数的集合を特に**射影多様体**と呼ぶ。射影多様体のイデアルは素イデアルである。

ここで零点定理も述べておく。

定理 7 (射影的零点定理)　K を代数閉体とする。$\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ の斉次イデアル I に対して次の二つが成立する。

(1) $V(I) = \varnothing$ となるのは，$\bigoplus_{n=N}^{\infty} \mathrm{Sym}^\bullet(E^*) \subset I$ を満足する整数 N が存在するとき，かつそのときに限る。

(2) $V(I) \neq \varnothing$ であれば，$I(V(I)) = \sqrt{I}$ が成立する。ここで $\sqrt{I}$ は I の根基イデアルを表す。

系 8 (対応定理)　K を代数閉体とし，$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ を S_+ と置く。このとき対応 $I \mapsto V(I)$ が全単射写像

$$\{\, I : I \text{ は } \mathrm{Sym}^\bullet(E^*) \text{ の根基斉次イデアルで，} I \neq S_+ \,\} \to \{\, V : V \text{ は } \mathbb{P}(E) \text{ の代数的集合} \,\}$$

を定める。

証明　対応 $V \mapsto I(V)$ が逆写像を定めることを示せばよい。勝手な代数的集合 V に対して $V(I(V)) = V$ が成立することは定義から直ちに従う。(8) の左の集合に属すイデアル I を勝手に取る。勝手な正整数 N に対して $\sqrt{\bigoplus_{n=N}^{\infty} \mathrm{Sym}^\bullet(E^*)} = S_+$ が成立するので，$V(I) = \varnothing$ を満足する I は，定理 7 (1) より $\mathrm{Sym}^\bullet(E^*)$ と等しく，

$$I(V(I)) = I(\varnothing) = \mathrm{Sym}^\bullet(E^*) = I$$

となる。$V(I) \neq \varnothing$ を満足する I に対しては，定理 7 (2) より $I(V(I)) = I$ が成立し，件の対応が互いに逆となる写像を定めることが示された。　証明終

これから行うことは，グラスマン多様体を高次元の射影空間に射影多様体として埋め込むことである。

2　プリュッカー埋め込み

定義 9 (プリュッカー埋め込み)　r を m 以下の正整数とする。点 $V \in \mathrm{Gr}_r(E)$ に対して，包含写像 $\iota\colon V \hookrightarrow E$ を取ると，r 次外冪 $\bigwedge^r V$ は一次元であるから，零でない線型写像 $\bigwedge^r V \hookrightarrow \bigwedge^r E;\ w_1 \wedge \cdots \wedge w_r \mapsto w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$ が単射である。この写像による像を $\iota(V)$ で表すと，$\iota(V)$ は $\mathbb{P}(E)$ の点であり，写像 $\iota\colon \mathrm{Gr}_r(E) \to \mathbb{P}\bigl(\bigwedge^r E\bigr)$ が定まる。この写像 ι を**プリュッカー埋め込み**と呼ぶ。

観察 10 (プリュッカー座標)　E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取ると，辞書式順序で並べたベクトル $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} : 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq m)$ が $\bigwedge^r E$ の基底である。$\{1, \dots, m\}$ を $[m]$，r 個の元からなる部分集合すべてを $\binom{[m]}{r}$ で表すことにする。$I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$ として $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ を e_I で表すことにすれば，基底は $\left(e_I : I \in \binom{[m]}{r}\right)$ と表せる。点 $V \in \mathrm{Gr}_r(E)$ に対して V の基底 $w_1, \dots, w_r$ を取って，その表現行列を考えると，(m, r) 型の行列 A を用いて

$$(w_1 \cdots w_r) = (e_1 \cdots e_m)A$$

と表せる。元 $I \in \binom{[m]}{r}$ に対して，I の番号に対応する行ベクトルが定める小行列を $A_{I,[r]}$ で表すと，

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_r = \sum_{I \in \binom{[m]}{r}} |A_{I,[r]}| e_I$$

となるので，点 $\left(|A_{I,[r]}| : I \in \binom{[m]}{r}\right) \in K^{\binom{m}{r}}$ が V の斉次座標を与え，この斉次座標を V の**プリュッカー座標**と呼ぶ。

第一に，プリュッカー埋め込みが単射であることを見なければならない。

命題 11　プリュッカー埋め込み ι: $\mathrm{Gr}_r(E) \to \mathbb{P}\left(\bigwedge^r E\right)$ は単射である。

証明　相異なる二点 $V, V' \in \mathrm{Gr}_r(E)$ を勝手に取る。$V \cap V'$ の基底を $e_1, \dots, e_k$ とし，$e_1, \dots, e_r$ が V の基底，$e_1, \dots, e_k, e_{r+1}, \dots, e_{2r-k}$ が V' の基底となるように，E の基底 $e_1, \dots, e_m$ を取る。この基底に関するプリュッカー座標を考えると，V の座標で零でないものは $[r] \in \binom{[m]}{r}$ に対応する箇所のみで，V' の座標では $[r]$ に対応する箇所が零である。ゆえに $\iota(V) \neq \iota(V')$ である。　証明終

プリュッカー埋め込みによってグラスマン多様体が射影空間の中に単射に写ることがわかったので，次にこの像が代数的集合であることを示す。天下り的に，グラスマン多様体を定める関係式を導入する。

定義 12 (プリュッカー関係式)