

モジュラー形式に関する書き留め

2026 年 1 月 4 日 23 時 21 分更新

Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

目 次

1	特殊線形群と上半平面	1
2	モジュラー関数	3
3	アイゼンシュタイン級数	7

約束

1. 整数すべてがなす環を \mathbb{Z} , 実数体を \mathbb{R} , 複素数体を \mathbb{C} で表す。
2. 虚数単位を i で表すことにする。
3. 複素数 z の実部を $\Re z$, 虚部を $\Im z$ で表す。
4. 単位的可換環 R と正整数 n に対し, R 係数 n 次一般線形群を $\mathrm{GL}_n(R)$, 特殊線形群を $\mathrm{SL}_n(R)$, 特殊直交群を $\mathrm{SO}_n(R)$ で表す。



1 特殊線形群と上半平面

定義 1.1 集合 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ を \mathbb{H} と置き, **上半平面** と呼ぶ。

命題 1.2 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対して定まる正則関数 $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ は

$$c \neq 0 \implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c$$

$$c = 0 \implies \gamma \cdot \infty = \infty$$

と拡張できる定数でない $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。さらに対応 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への作用が定まる。

証明 関数 $\gamma \cdot (-): \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が有理型であることについて $c = 0$ のときは明らかであるから, $c \neq 0$ のときを考える。 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -d/c$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^\infty$ を勝手に考えるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} cz_n + d = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} az_n + b = -(ad - bc)/c \neq 0$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma \cdot z_n = \infty$ である。ゆえに $\gamma \cdot (-)$ は \mathbb{C} 上有理型である。同様に $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$

なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えると、すべての n について $z_n \neq 0$ として良く、

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{a + b/z_n}{c + d/z_n} \rightarrow \frac{a}{c} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから $\gamma \cdot (-)$ は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。

対応 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ が群作用であることについて $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $\gamma \cdot z = \frac{z+0}{0+1} = z$ であるので、後は結合律を見れば良い。元 $\gamma, \gamma' \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ を勝手に取り、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ と表すとき、

$$\gamma' \cdot \gamma = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

である。正則関数 $\gamma' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ の定義域を $U(\subset \mathbb{C})$ とすると、連続性から、 $\gamma(V) \subset U$ となる開集合 $V \subset \mathbb{C}$ を取れる。勝手な複素数 $z \in V$ に対して、

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot (\gamma \cdot z) &= \gamma' \cdot \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)a' + b'}{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)c' + d'} \\ &= \frac{(az+b)a' + b'(cz+d)}{(az+b)c' + d'(cz+d)} && \text{(分母を払った)} \\ &= \frac{(aa' + b'c)z + (a'b + b'd)}{(ac' + cd')z + (bc' + dd')} && \text{(分母分子を } z \text{ についてまとめた)} \\ &= (\gamma' \cdot \gamma) \cdot z \end{aligned}$$

と計算でき、一致の定理から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の関数として $\gamma' \cdot (\gamma \cdot (-)) = (\gamma' \cdot \gamma) \cdot (-)$ であることが分かる。よって $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ が群作用であることが確かめられた。証明終

命題 1.3 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ と複素数 z に対して、

$$(1.1) \quad \Im(\gamma \cdot z) = \det(\gamma) \frac{\Im z}{|cz + d|^2}$$

が成立する。

証明 複素数 z の共役を \bar{z} で表すことにする。このとき

$$\begin{aligned} 2i\Im(\gamma \cdot z) &= \gamma \cdot z - \overline{\gamma \cdot z} && \because \text{定義} \\ &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} && \because a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ なので} \\ &= \frac{(az + b)(c\bar{z} + d) - (cz + d)(a\bar{z} + b)}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{|cz + d|^2} \\
&= \det(\gamma) \frac{2i\Im z}{|cz + d|^2}
\end{aligned}$$

と計算でき、この計算結果を $2i$ で割れば目的の等式を得る。

証明終

系 1.4 対応 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は \mathbb{H} に作用する。

証明 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$ のとき $\det(\gamma) = 1 > 0$ かつ $\Im z > 0$ であるから, (1.1) より $\Im(\gamma \cdot z) > 0$ であり, これは $\gamma \cdot z \in \mathbb{H}$ を意味する。

証明終

命題 1.5 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の \mathbb{H} への作用は推移的である。

証明 複素数 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取り, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ と表すと, $y > 0$ であることに注意して,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x + iy = z$$

と計算できるので, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}$ である。

証明終

命題 1.6 安定化部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と等しい。したがって対応 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \gamma \mapsto \gamma \cdot i$ は全単射写像 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}$ を定める。

証明 元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ を勝手に取り, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すと,

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot i = i &\iff \frac{ai + b}{ci + d} = i \\
&\iff b + ia = -c + id \\
&\iff a = d \text{ かつ } c = -b \\
&\iff \gamma \text{ が直交行列である}
\end{aligned}$$

となり, これは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ であることを意味する。

証明終

2 モジュラー関数

定義 2.1 (弱モジュラー関数) k を整数とする。有理型関数 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が **レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数** であるとは, 勝手な元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$(\star) \quad f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

が成立するときをいう。

命題 2.2 レベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数 f を考える。このとき勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して次の三つが成立する。

- (1) $f(z) = (-1)^k f(z)$ が成り立つ。ゆえに f が恒等的に零でなければ、 k は偶数でなければならない。
- (2) $f(z+1) = f(z)$ が成り立つ。ゆえに f は周期的関数である。
- (3) $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$ が成り立つ。

証明 (1) について $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

(2) について $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(z+1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

(3) について $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で、

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z + 0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。

証明終

命題 2.3 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $q(= q(z)) = \exp(2\pi iz)$ と置く。このとき $z \in \mathbb{H}$ であるためには、 $0 < |q| < 1$ であることが必要十分である。

証明 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| |\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| \end{aligned}$$

であるから、

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi \Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。

証明終

穴あき単位円盤 $\{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$ を \mathbb{D}^* と置く。また実数 a に対して

$$\Omega_a = \{w \in \mathbb{C} : z \neq 0, a < \arg w < 2\pi + a\}$$

$$D_a = \{z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a\}$$

として対数関数の分枝

$$L_a : \Omega_a \rightarrow D_a; \quad w \mapsto \log |w| + i \arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

命題 2.4 f を弱モジュラー関数とする。各点 $q \in \mathbb{D}^*$ に対して, $q \in \Omega_a$ を満足するような対数関数の分枝 $L_a : \Omega_a \rightarrow D_a$ を一つ取る。このとき複素数

$$(2.1) \quad \tilde{f}(q) = f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right)$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって \mathbb{D}^* 上の有理型関数 \tilde{f} が定まる。また (2.1) を単に

$$\tilde{f}(q) = f\left(\frac{\log q}{2\pi i}\right)$$

と表す。

証明 $q \in \Omega_a, q \in \Omega_{a'}$ となる二つの分枝 $L_a, L_{a'}$ を取ると, 整数 n を用いて $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$ と表せるので,

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに $q \in \mathbb{D}^*$ であれば,

$$\exp\left(2\pi i \frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*, \quad \exp\left(2\pi i \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので, 命題 2.3 より $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$ である。命題 2.2 (2) より f が $f(z+1) = f(z)$ を満足する周期関数であるから, $q \in \mathbb{D}^*$ のとき,

$$f\left(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\right) = f\left(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\right)$$

となり, (2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。 $L_a(q)/2\pi i$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数, f も \mathbb{H} 上の有理型関数であるから, これら関数の合成である \tilde{f} は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数である。 $\bigcup_{a>0} (\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$ であるから, \tilde{f} が \mathbb{D}^* 上の有理型関数であることが分かった。証明終

定義 2.5 f を弱モジュラー関数とする。

(1) \tilde{f} が 0 で有理型であるとき, f が ∞ で有理型という。

(2) \tilde{f} が 0 で正則であるとき, f が ∞ で正則という。

\tilde{f} が 0 で有理型するとき, ローラン展開

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ, $q = q(z) = \exp(2\pi iz)$ のとき

$$f(z) = f\left(\frac{\log \exp(2\pi iz)}{2\pi i}\right) = \tilde{f}(\exp(2\pi iz)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

となり, f のフーリエ展開を与える。複素数列 $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$ を f のフーリエ係数と呼ぶ。また f が ∞ で正則であれば, $N = 0$ とできる。

定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式) $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数とする。

- (1) f が ∞ で有理型するとき, f をレベル 1 荷重 k のモジュラー関数と呼ぶ。
- (2) f が \mathbb{H} 上の正則関数で, かつ ∞ で正則のとき, f をレベル 1 荷重 k のモジュラー形式と呼ぶ。
- (3) モジュラー形式 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ の q 展開とは, \tilde{f} のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

のことをいう。さらに $a(0) = 0$ のとき f をカスプ形式という。

命題 2.7 k を整数とし, 集合 M_k, S_k を

$$M_k = \{f: f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である}\}$$

$$S_k = \{f: f \text{ は 1 荷重 } k \text{ のカスプ形式である}\}$$

で定める。このとき M_k と S_k は \mathbb{C} 線形空間である。

証明 M_k が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式 $f, g \in M_k$ を勝手に取るとき, 正則関数の和は正則関数であるから, $f + g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\tilde{f} + \tilde{g}: \mathbb{D}^* \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(f + g)^{\sim} = \tilde{f} + \tilde{g}$ であるから, $(f + g)^{\sim}: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である。あとは $f + g$ が (\star) を満足することを示せば, $f + g \in M_k$ であることが分かる。元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると,

$$\begin{aligned} (f + g)(\gamma \cdot z) &= f(\gamma \cdot z) + g(\gamma \cdot z) \\ &= (cz + d)^k f(z) + (cz + d)^k g(z) \\ &= (cz + d)^k (f + g)(z) \end{aligned}$$

と計算でき, (\star) を $f + g$ が満足することが確かめられ, $f + g \in M_k$ である。 M_k がスカラー倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手なカスプ形式 $f, g \in S_k$ に対して, $(f + g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}$ が成立することから, S_k が \mathbb{C} 線形空間であることも従う。

証明終

命題 2.8 整数 k, l とモジュラー形式 $f \in M_k, g \in M_l$ に対し, $fg \in M_{k+l}$ が成立する。また f がカスプ形式のとき fg もカスプ形式である。

証明 正則関数の積は正則関数であるから, $fg: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\tilde{f}\tilde{g}: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(fg)^\sim = \tilde{f}\tilde{g}$ であるから, $(fg)^\sim$ も正則関数である。あとは fg が (\star) を満足することを示せばよく, 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると,

$$\begin{aligned} (fg)(\gamma \cdot z) &= (cz + d)^k f(z)(cz + d)^l g(z) \\ &= (cz + d)^{k+l} (fg)(z) \end{aligned}$$

と計算できるので, $fg \in M_{k+l}$ であることが確かめられた。また f がカスプ形式のとき,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \\ \tilde{g}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \end{aligned}$$

とローラン展開すると,

$$(fg)^\sim(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n, \quad c(n) = \sum_{m=0}^n a(m)b(n-m)$$

であるから, 特に $c(0) = a(0)b(0) = 0$ で, fg はカスプ形式であることが分かる。

証明終

3 アイゼンシュタイン級数

定義 3.1 k を整数とする。各複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して, 級数

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz + n)^k}$$

を定め, $G_k(z)$ を**アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

補題 3.2 K を \mathbb{H} の有界閉集合とする。このとき勝手な点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$(3.1) \quad C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

が成立するような正数 C が存在する。

証明 $C_1 = \min\{\Im z : z \in K\}$, $C_2 = \max\{\Re z : z \in K\}$ と置く。

点 $z \in K$ と元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を勝手に取り, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と表すと,

$$|mz + n| = |(mx + n) + imy| = \sqrt{(mx + n)^2 + (my)^2}$$

となる。 $C_2 = 0$ であれば常に $x = 0$ で, $|mz + n| \geq |mx + n| = |n|$ かつ $|mz + n| \geq y|m| \geq C_1|m|$ であるから, $C = \min\{1, C_1\}$ が (3.5) を満足する正数である。 $C_2 \neq 0$ の場合を考える。前述の議論と同じく $|n|$ については $|mz + n| \geq C_1|m|$ である。 $|m|$ について, $|m| \geq |n|/(2C_2)$ のとき

$$(3.2) \quad |mz + n| \geq C_1|m| \geq \frac{C_1}{2C_2}|n|$$

となり, そうでないとき $n \neq 0$ かつ $|m/n| < 1/(2C_2)$ となり, 常に $|m/n||x| \leq 1/2$ で,

$$(3.3) \quad |mx + n| = \left| n \left(\frac{m}{n}x + 1 \right) \right| \geq |n| \left(1 - \left| \frac{m}{n} \right| |x| \right) \geq 1/2 |n|$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると, $C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$ が (3.5) を満足する正数である。 証明終

定理 3.3 $k \geq 3$ のとき G_k は \mathbb{H} 上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

証明 K を \mathbb{H} の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より, 勝手な点 $z \in K$ と勝手な元 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|, |n|\} \leq |mz + n|$$

となるような正数 C が存在し,

$$\sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{|mz + n|^k} \leq \frac{1}{C^k} \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k}$$

であるから, 右辺の級数の収束を示せば, G_k が K 上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数 N に対して $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \max\{|m|, |n|\} = N\}$ の個数を数える。 $|m| > |n|$ のものを数えると, $m = \pm N$ で, $n = -N + 1, -N + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1$ の

$2(2N - 1)$ 個ある。同様に $|n| < |m|$ のものも $2(2N - 1)$ 個ある。 $|m| = |n|$ のものは、 $(N, N), (N, -N), (-N, N), (-N, -N)$ の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は $8N$ 個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{\max\{|m|, |n|\}^k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8N}{N^k} = 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{k-1}}$$

であり、いま $k \geq 3$ であるからこの正項級数は収束する。以上で、 G_k が \mathbb{H} 上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式 $mz + n$ は \mathbb{H} 上で常に零でないから、有理多項式 $1/(mz + n)$ は \mathbb{H} 上の正則関数であり、 G_k の収束先が正則関数であることも分かる。 証明終

定理 3.4 $k \geq 3$ のとき正則関数 $G_k: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ はレベル 1 荷重 k の弱モジュラー関数である。

証明 元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手取る。 γ が全単射写像 $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を誘導することに注意すると、

$$\begin{aligned} G_k(\gamma \cdot z) &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m(\gamma \cdot z) + n)^k} \\ &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{(cz + d)^k}{(m(az + b) + n(cz + d))^k} && \because \text{分母を払った} \\ &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{(cz + d)^k}{((ma + nc)z + (mb + nd))^k} \\ &= \sum_{\substack{(m', n'): \\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}} \frac{(cz + d)^k}{(m'z + n')^k} \\ &= (cz + d)^k \sum_{\substack{(m', n') \in \mathbb{Z}^2: \\ (m', n') \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m'z + n')^k} && \because \gamma \text{ の全単射性より} \\ &= (cz + d)^k G_k(z) \end{aligned}$$

となり、 G_k が (\star) を満足することが確かめられた。 証明終

系 3.5 k が 3 以上の奇数のとき \mathbb{H} 上で $G_k(z) = 0$ である。

証明 定理 3.4 より G_k が荷重 k の弱モジュラー関数であるから、命題 2.2 (1) より G_k は \mathbb{H} 上の零関数である。 証明終

さらに弱モジュラー関数 G_k はモジュラー形式である。

定理 3.6 k が 4 以上の偶数であるとき, G_k は ∞ で正則である。つまり G_k はモジュラー形式である。

この定理の証明のために, ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて G_k の q 展開を表示する。

定義 3.7 (1) 1 より大きい実数 s に対して,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数 ζ を定め, **ゼータ関数** と呼ぶ。

(2) 正整数 n と実数 l に対して,

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d > 0, d|n}} d^l$$

として関数 σ_l を定め, **約数関数** と呼ぶ。

(3) 原点周りの \mathbb{D}^* 上の正則関数 $z/(e^z - 1)$ のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数 B_k を **ベルヌーイ数** と呼ぶ。

補題 3.8 (オイラーの等式) 正の偶数 k に対して,

$$(3.4) \quad \zeta(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

が成立する。

証明 三角関数の公式

$$(3.5) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

を用いる¹⁾。(3.5) の左辺に z を掛けたものを計算すると, $z \in \mathbb{H}$ のとき

$$\begin{aligned} \pi z \cot(\pi z) &= \pi z \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{ の定義} \\ &= \pi z \frac{(e^{\pi i z} + e^{-\pi i z})/2}{(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\ &= \pi i z \frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} \end{aligned}$$

1) 証明は, 例えばヘルグロッツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$\begin{aligned}
&= \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} \\
(3.6) \quad &= \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi z)^k \quad \because z \in \mathbb{H} \text{ なので, 命題 2.3 から} \\
&\quad e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので}
\end{aligned}$$

となる。次に (3.5) の右辺に z を掛けたものを計算すると,

$$\begin{aligned}
z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} &= 1 + z \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} \right) \\
&= 1 + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2}{n^2 - z^2} \quad \because z \text{ を総和の中に入れ, 符号を調整した} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \frac{1}{1 - (\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{n^{2l}} \quad \because \frac{1}{1-z} \text{ の原点におけるテイラー展開} \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty} 2z^{2(l+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(l+1)}} \quad \because \text{和を交換した} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2z^{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2l}} \quad \because \text{添字 } l \text{ を } 1 \text{ ずらした} \\
(3.7) \quad &= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2\zeta(2l)z^{2l}
\end{aligned}$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく, 2 以上の偶数 $k = 2l$ に関する z^k の係数を比較することで, 目的の等式

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。

証明終

補題 3.9 正の偶数 k に対して,

$$(3.8) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$$

が成立する。

証明 上述の補題と同様に三角関数の公式

$$(3.9) \quad \pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

を用いる。(3.9)の左辺を書き直すと,

$$\begin{aligned}
\pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot \text{ の定義} \\
&= \pi \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{ の定義} \\
&= \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi i + \pi i \frac{2}{q - 1} && \because q = e^{2\pi iz} \text{ と置いているので} \\
&= \pi i - 2\pi i \frac{1}{1 - q} \\
&= \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n && \because \frac{1}{1 - q} \text{ の原点におけるテーラー展開}
\end{aligned}$$

となるので, $n \geq 1$ のとき $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} q^n = (2\pi i n)^{k-1} q^n$ であることに注意して, (3.9)の両辺を z について $(k-1)$ 階微分すると,

$$-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n = (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}$$

となり, 両辺を $(k-1)!$ で割ると, いま k が偶数であるから $(-1)^{k-1} = -1$ なので,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

となる。また (3.4) から

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k}$$

であるから, 目的の等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\xi(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

を得られる。

証明終

定理 3.10 4 以上の偶数 k に対して, G_k の q 展開が

$$(3.10) \quad G_k(z) = 2\xi(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

と表される。

証明 $G_k(z)$ を計算していくと,

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^k}}_{m=0 \text{ の項}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(-mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-mz-n)^k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(mz)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz-n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \right) \quad \because k \text{ が偶数なので} \\
&= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} (e^{2\pi i m z})^n \right) \quad \because (3.8) \text{ を用いた} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^{mn} \right) \quad \because q^{mn} = (e^{2\pi i m z})^n \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}: \\ n > 0, \ n|d}} n^{k-1} q^d \right) \quad \because d = mn \text{ と置いた} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d \right) \quad \because \text{約数関数の定義} \\
&= 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)
\end{aligned}$$

と計算でき、これが目的の等式であった。

証明終

定理 3.6 の証明 (3.10) から

$$\tilde{G}_k(q) = 2\zeta(k) \left(1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right)$$

が成立するので、 $\lim_{q \rightarrow 0} \tilde{G}_k(q) = 2\zeta(k)$ である。これは $\tilde{G}_k(q)$ が原点で正則であることを意味し、したがって G_k が ∞ で正則であることが従う。

証明終



文献

- [1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. <https://www.ma.imperial.ac.uk/~dhelm/M4P58/ModularForms2.pdf> (2026 年 1 月 1 日最終確認).
- [2] 岸 正倫, 藤本 担孝 (1980). 複素関数論. 学術図書出版社.
- [3] Aigner, M., and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.