組み合せ論的ホッジ理論　雑記帳

2025 年 3 月 20 日 2 時 23 分更新

[AHK18] を読むにあたって証明のギャップを埋めることを目的とした命題などをここに記す。

目　次

1　バーグマン扇など

注意 1.1 [AHK18] では，有限集合 E を基底とする自由アーベル群 $\mathbb{Z}^E$ の基底を $\mathbf{e}_i$, $i \in E$ と約束しているが，記号の濫用で $\mathbf{N}_E = \mathbb{Z}^E/\langle \mathbf{e}_E \rangle$ における $\mathbf{e}_i$ の像も $\mathbf{e}_i$ と表していることに注意する。

命題 1.2 ([AHK18] の 2 節を通して基本的な命題) E を有限集合とし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathscr{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1}$ と $\sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ に対し，$\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ となるのは $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ となるとき即ち $(I_1 < \mathscr{F}_1) \prec (I_2 < \mathscr{F}_2)$ となるときかつその時に限る。

証明 $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ のときに $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ となることは定義から従う。

逆に $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ が成立する時を考える。$I_1 \not\subset I_2$ であったとすると元 $i \in I_1 \setminus I_2$ が少なくとも一つ存在して $\mathbf{e}_i \in \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ である。ゆえに $\{i\} \in \mathscr{F}_2$ でなければならず $I_2 = \varnothing$ である。$\mathscr{F}_2$ が全順序部分集合であることから $I_1 \setminus I_2 = I_1$ は一元集合でなければならない。つまり $I_1 = \{i\}$ であるがこれは $I_1 \notin \mathscr{P}$ であることに矛盾し $I_1 \subset I_2$ であることが従う。次に

$\mathcal{F}_1 \not\subset \mathcal{F}_2$ であったと仮定し $F \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$ を一つ取る。$\mathbf{e}_F \in \sigma_{I_2<\mathcal{F}_2}$ であるから

$$\mathbf{e}_F = \sum_{i\in I_2} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{G\in\mathcal{F}_2} \lambda_G \mathbf{e}_G \quad (\lambda_i \text{ と } \lambda_G \text{ は正実数である})$$

のような一意的な表示が得られるが，F の取り方からすべての $G \in \mathcal{F}_2$ に対し $\lambda_G = 0$ となる。したがって $F \subset I_2$ であるが $\mathcal{P}$ が順序フィルターであることから $I_2 \in \mathcal{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ である。 ∎

1.1 [AHK18, Prop. 2.4] に関する命題

命題 1.3 ([AHK18, Prop. 2.4] の証明の補題) E を有限集合とする。$\mathcal{P}_+$ と $\mathcal{P}_-$ が $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとする。このとき Z と適合する $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_-$ に対し

$$\bigcup_{I:\ I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I<\{Z\}\cup\mathcal{F}} = \sigma_{Z<\mathcal{F}}$$

が成立する。

証明 包含 $\bigcup_{I:\ I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I<\{Z\}\cup\mathcal{F}} \subset \sigma_{Z<\mathcal{F}}$ が成立ことは定義から直ちに従うので逆の包含を示す。

$\sigma_{Z<\mathcal{F}}$ の元 $\mathbf{v}$ を取ると

$$\mathbf{v} = \sum_{i\in Z} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{F\in\mathcal{F}} \mu_F \mathbf{e}_F \quad (\lambda_i \text{ と } \mu_F \text{ は非負実数である}) \tag{1.1}$$

と表すことができる。勝手な $i \in Z$ に対し不等式 $\lambda_{i_0} \leq \lambda_i$ を満たす $i_0 \in Z$ を一つ取ると (1.1) は

$$\mathbf{v} = \sum_{i\in Z} (\lambda_i - \lambda_{i_0}) \mathbf{e}_i + \lambda_{i_0} \mathbf{e}_Z + \sum_{F\in\mathcal{F}} \mu_F \mathbf{e}_F \tag{1.2}$$

ここで $I = \{i \in Z \mid \lambda_i - \lambda_{i_0} = 0\}$ と置けば (1.1) より I は Z の真部分集合かつ $\mathbf{v} \in \sigma_{I<\{Z\}\cup\mathcal{F}}$ である。 ∎

命題 1.4 E を有限集合とし $\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1<\mathcal{F}_1}$ と $\sigma_{I_2<\mathcal{F}_2}$ に対し，$\sigma_{I_1<\mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathcal{F}_2} = \sigma_{(I_1\cap I_2)<(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2)}$ が成立する。

証明 定義から直ちに $\sigma_{I_1<\mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathcal{F}_2} \supset \sigma_{(I_1\cap I_2)<(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2)}$ であることは従うので逆の包含が成立することを示す。

[AHK18, Prop. 2.4] より $\Sigma_{\mathcal{P}}$ は特に扇であるので $\sigma_{I_1<\mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathcal{F}_2}$ は $\sigma_{I_1<\mathcal{F}_1}$ の面である。ゆえに $\sigma_{I_1<\mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathcal{F}_2} = \sigma_{I_3<\mathcal{F}_3}$ かつ $I_3 \subset I_1$ かつ $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_1$ を満たす I_3 と $\mathcal{F}_3$ が存在する。さ

らに命題 1.2 より $I_3 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_2$ となるので $I_3 \subset I_1 \cap I_2$ かつ $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ となり逆の包含が成立することが従う。 $\blacksquare$

命題 1.5 ([AHK18, Prop. 2.4] の注意のために) E を有限集合とする。$\mathscr{P}_+$ と $\mathscr{P}_-$ が $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathscr{P}_+ = \mathscr{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとし，さらに $\#Z = 1$ であるとする。このとき $\Sigma_{\mathscr{P}_+} = \Sigma_{\mathscr{P}_-}$ が成立する。

証明 [AHK18, Prop. 2.4] の証明より $\Sigma_{\mathscr{P}_+}$ は $\Sigma_{\mathscr{P}_-}$ の射線 $\sigma_{\emptyset<\{Z\}}$ に関する星状細分であるが，$Z = \{i\}$ と書けるため $\sigma_{\emptyset<\{Z\}} = \sigma_{\{i\}<\emptyset}$ であり，右辺は $\Sigma_{\mathscr{P}_-}$ の錐である。 $\blacksquare$

命題 1.6 ([AHK18, Prop 2.4] と [AHK18, Prop 3.3] のために) 扇 Σ とその部分集合 Δ を考える。任意の Δ の錐 δ に対し δ の面すべてが Δ に属すると仮定する。このとき Δ は扇である。

証明 勝手な二つの錐 $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ に対し $\delta_1 \cap \delta_2$ が共通の面であることを示せば良いが，それは $\Delta \subset \Sigma$ であることと Σ が扇であることから従う。 $\blacksquare$

1.2 [AHK18, Prop. 3.3] に関する命題

命題 1.7 ([AHK18, Prop. 3.3] のために) M を有限集合 E 上のマトロイドとし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(M)$ の順序フィルターとする。族 $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ は $\{\sigma_{I<\mathscr{F}} \mid \mathrm{cl}_M(I) \notin \hat{\mathscr{P}}, \mathscr{F} \subset \mathscr{P}\}$ として与えられるのであった。このとき $\sigma_{I<\mathscr{F}} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ に対してその面もすべて $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ に属す。

証明 一般論から $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ の面は I の部分集合 I' と $\mathscr{F}$ の部分集合 $\mathscr{F}'$ を用いて $\sigma_{I'<\mathscr{F}'}$ と表すことができる。すると $\mathrm{cl}_M(I') \notin \mathscr{P}$ である。そうでなかったとすると $I' \subset I$ であることと $\mathscr{P}$ が順序フィルターであることから $\mathrm{cl}_M(I) \in \mathscr{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\sigma_{I'<\mathscr{F}'} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ であり題意は示された。 $\blacksquare$

注意 1.8 この証明手法によって $\tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}$ に対しても同様の主張が成立することが従う。

1.3 [AHK18, Prop. 3.5] に関する命題

命題 1.9 ([AHK18, Prop. 3.5 (1)] の準備) E を有限集合とし F を E の部分集合とする。このとき

(1) 全射群準同型 $\phi\colon \mathbb{Z}^E \to \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E\setminus F};\ \sum_{i\in E} \lambda_i \mathbf{e}_i \mapsto \left(\sum_{j\in F} \lambda_j \mathbf{e}_j, \sum_{k\in E\setminus F} \lambda_k \mathbf{e}_j\right)$ に対し $\langle \mathbf{e}_E \rangle \subset \ker\phi$ が成り立つ。ϕ が誘導する $\mathbf{N}_E$ 上の群準同型も ϕ と書くことにする。

(2) $\ker\phi = \langle \mathbf{e}_F \rangle$ が成立する。つまり $\mathbf{N}_E/\langle \mathbf{e}_F \rangle \underset{\phi}{\cong} \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E\setminus F}$ である。

証明 (1) と (2) における $\langle \mathbf{e}_F \rangle \subset \ker \phi$ は定義から直ちに示すことができる。逆に $\ker \phi$ の元 $\mathbf{v} = \sum_{i \in E} \lambda_i \mathbf{e}_i$ を取ると $\mathbb{Z}^E$ の元として $\sum_{j \in F} \lambda_j \mathbf{e}_j \in \langle \mathbf{e}_F \rangle$ かつ $\sum_{k \in E \setminus F} \lambda_k \mathbf{e}_k \in \langle \mathbf{e}_{E \setminus E} \rangle$ である。ゆえに $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{e}_F + \mu \mathbf{e}_{E \setminus F}$（$\lambda$ と μ は整数）と表すことができるが，第二項目は $-\mu \mathbf{e}_F$ と等しい。ゆえに $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{e}_F \rangle$ である。 ∎

参考文献

[AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. “Hodge theory for combinatorial geometries”. In: *Ann. of Math. (2)* **188**.2 (2018), pp. 381–452.