

組合せ論的ホッジ理論 雑記帳

2025 年 3 月 22 日 16 時 20 分更新

[AHK18] を読むにあたって証明のギャップを埋めることを目的とした命題などをここに記す。

目 次

1	バーグマン扇など	1
1.1	[AHK18, Prop. 2.4] に関する命題	2
1.2	[AHK18, Prop. 3.3] に関する命題	3
1.3	[AHK18, Prop. 3.5] に関する命題	3
2	区分的線形関数など	6

1 バーグマン扇など

注意 1.1 [AHK18] では、有限集合 E を基底とする自由アーベル群 \mathbb{Z}^E の基底を $\mathbf{e}_i, i \in E$ と約束しているが、記号の濫用で $\mathbf{N}_E = \mathbb{Z}^E / \langle \mathbf{e}_E \rangle$ における \mathbf{e}_i の像も \mathbf{e}_i と表していることに注意する。

命題 1.2 ([AHK18] の 2 節を通して基本的な命題) E を有限集合とし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1}$ と $\sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ に対し、 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \subset \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ となるのは $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ となるとき即ち $(I_1 < \mathcal{F}_1) < (I_2 < \mathcal{F}_2)$ となるときかつそのときに限る。

証明 $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ のときに $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \subset \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ となることは定義から従う。

逆に $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \subset \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ が成立するときを考える。 $I_1 \not\subset I_2$ であつたとすると元 $i \in I_1 \setminus I_2$ が少なくとも一つ存在し $\mathbf{e}_i \in \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ である。これは $\{i\} \in \mathcal{F}_2$ であることを意味し $I_2 = \emptyset$ である。この議論と \mathcal{F}_2 が全順序部分集合であることから $I_1 \setminus I_2 = I_1$ は一元集合でなければならない。つまり $I_1 = \{i\}$ であるがこれは $I_1 \notin \mathcal{P}$ であることに矛盾し $I_1 \subset I_2$ であること

が従う。次に $\mathcal{F}_1 \not\subset \mathcal{F}_2$ であったと仮定し $F \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$ を一つ取る。 $\mathbf{e}_F \in \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ であるから $F \subset I_2$ となるが \mathcal{P} が順序フィルターであることから $I_2 \in \mathcal{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ である。 ■

注意 1.3 同様の証明によりループを持たないマトロイド M とそのバークマン扇 $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に対しても同様の主張が成立する。

1.1 [AHK18, Prop. 2.4] に関する命題

命題 1.4 ([AHK18, Prop. 2.4] の証明の補題) E を有限集合とする。 \mathcal{P}_+ と \mathcal{P}_- が $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとする。このとき Z と適合する $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ に対し

$$\bigcup_{I: I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I < \{Z\} \cup \mathcal{F}} = \sigma_{Z < \mathcal{F}}$$

が成立する。

証明 包含 $\bigcup_{I: I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I < \{Z\} \cup \mathcal{F}} \subset \sigma_{Z < \mathcal{F}}$ が成立ことは定義から直ちに従うので逆の包含を示す。

$\sigma_{Z < \mathcal{F}}$ の元 \mathbf{v} を取ると

$$(1.1) \quad \mathbf{v} = \sum_{i \in Z} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu_F \mathbf{e}_F \quad (\lambda_i \text{ と } \mu_F \text{ は非負実数である})$$

と表すことができる。勝手な $i \in Z$ に対し不等式 $\lambda_{i_0} \leq \lambda_i$ を満たす $i_0 \in Z$ を一つ取ると (1.1) は

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = \sum_{i \in Z} (\lambda_i - \lambda_{i_0}) \mathbf{e}_i + \lambda_{i_0} \mathbf{e}_Z + \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu_F \mathbf{e}_F$$

ここで $I = \{i \in Z \mid \lambda_i - \lambda_{i_0} = 0\}$ と置けば (1.1) より I は Z の真部分集合かつ $\mathbf{v} \in \sigma_{I < \{Z\} \cup \mathcal{F}}$ である。 ■

命題 1.5 E を有限集合とし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1}$ と $\sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ に対し、 $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2} = \sigma_{(I_1 \cap I_2) < (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)}$ が成立する。

証明 定義から直ちに $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2} \supset \sigma_{(I_1 \cap I_2) < (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)}$ であることは従うので逆の包含が成立することを示す。

[AHK18, Prop. 2.4] より $\Sigma_{\mathcal{P}}$ は特に扇であるので $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2}$ は $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1}$ の面である。ゆえに $\sigma_{I_1 < \mathcal{F}_1} \cap \sigma_{I_2 < \mathcal{F}_2} = \sigma_{I_3 < \mathcal{F}_3}$ かつ $I_3 \subset I_1$ かつ $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_1$ を満たす I_3 と \mathcal{F}_3 が存在する。さらに命題 1.2 より $I_3 \subset I_2$ かつ $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_2$ となるので $I_3 \subset I_1 \cap I_2$ かつ $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ となり逆の包含が成立することが従う。 ■

命題 1.6 ([AHK18, Prop. 2.4] の注意のために) E を有限集合とする。 \mathcal{P}_+ と \mathcal{P}_- が $\mathcal{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとし、さらに $\#Z = 1$ であるとする。このとき $\Sigma_{\mathcal{P}_+} = \Sigma_{\mathcal{P}_-}$ が成立する。

証明 [AHK18, Prop. 2.4] の証明より $\Sigma_{\mathcal{P}_+}$ は $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ の射線 $\sigma_{\emptyset < \{Z\}}$ に関する星状細分であるが、 $Z = \{i\}$ と書けるため $\sigma_{\emptyset < \{Z\}} = \sigma_{\{i\} < \emptyset}$ であり、右辺は $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ の錐である。 ■

命題 1.7 ([AHK18, Prop. 2.4] と [AHK18, Prop. 3.3] のために) 扇 Σ とその部分集合 Δ を考える。任意の Δ の錐 δ に対し δ の面すべてが Δ に属すると仮定する。このとき Δ は扇である。

証明 勝手な二つの錐 $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ に対し $\delta_1 \cap \delta_2$ が共通の面であることを示せば良いが、それは $\Delta \subset \Sigma$ であることと Σ が扇であることから従う。 ■

1.2 [AHK18, Prop. 3.3] に関する命題

命題 1.8 ([AHK18, Prop. 3.3] のために) M を有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき $\sigma_{I < \mathcal{F}} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に対してその面もすべて $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に属す。

証明 一般論から $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ の面は I の部分集合 I' と \mathcal{F} の部分集合 \mathcal{F}' を用いて $\sigma_{I' < \mathcal{F}'}$ と表すことができる。すると $\text{cl}_M(I') \notin \mathcal{P}$ である。そうでなかったとすると $I' \subset I$ であることと \mathcal{P} が順序フィルターであることから $\text{cl}_M(I) \in \mathcal{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\sigma_{I' < \mathcal{F}'} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$ であり題意は示された。 ■

注意 1.9 この証明手法によって $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ に対しても同様の主張が成立することが従う。

1.3 [AHK18, Prop. 3.5] に関する命題

命題 1.10 (マトロイドの制限と縮約が誘導する順序フィルターについて) M を有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとしそのフラット F と $\mathcal{P}(F)$ の順序フィルター \mathcal{P} をそれぞれ固定する。このとき \mathcal{P}^F と \mathcal{P}_F はそれぞれ $\mathcal{P}(M^F)$ と $\mathcal{P}(M_F)$ の順序フィルターである。

注意 1.11 M の F への制限 M^F とは、フラットの族 $\mathcal{P}(M^F)$ が $\{G \cap F \mid G \in \mathcal{P}(M)\}$ で与えられる F 上のマトロイドのことである。 M の F への縮約 M_F とは、フラットの族 $\mathcal{P}(M_F)$ が $\{G \setminus F \mid G \in \mathcal{P}(M), F \subset G\}$ で与えられる $E \setminus F$ 上のマトロイドのことである。

命題 1.10 の証明 証明法が同様なので \mathcal{P}_F が $\mathcal{P}(M_F)$ の順序フィルターであることのみを示す。 \mathcal{P}_F の元 G と G を含む $\mathcal{P}(M_F)$ の元 H を取ると、 $G \cup F \in \mathcal{P}$ かつ $G \cup F \subset H \cup F \in \mathcal{P}(M)$

が成立するので \mathcal{P} が順序フィルターであることから, $H \cup F \in \mathcal{P}$ であり $H \in \mathcal{P}^F$ が従う。ゆえに \mathcal{P}^F は順序フィルターである。 ■

命題 1.12 M を有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし元 $F \in \mathcal{P}(M)$ を一つ取る。 $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルター \mathcal{P} に F が属するならば $\mathcal{P}_F = (M_F)$ が成立する。

証明 元 $G \in \mathcal{P}_F$ は M_F のフラットであることから $G \cup F$ は M のフラットである。 $F \in \mathcal{P}$ であることと $F \subset G \cup F$ であることから $G \cup F$ も \mathcal{P} に属す。ゆえに $G = (G \cup F) \setminus F \in \mathcal{P}_F$ であり大意は示された。 ■

命題 1.13 ([AHK18, Prop. 3.5 (1)] の準備) E を有限集合とし F を E の部分集合とする。このとき次の二つが成立する。

(1) 全射群準同型

$$\phi: \mathbb{Z}^E \rightarrow \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}, \sum_{i \in E} \lambda_i \mathbf{e}_i \mapsto \left(\sum_{j \in F} \lambda_j \mathbf{e}_j, \sum_{k \in E \setminus F} \lambda_k \mathbf{e}_k \right)$$

に対し $\langle \mathbf{e}_E \rangle \subset \ker \phi$ が成立する。 ϕ が誘導する \mathbf{N}_E 上の群準同型も ϕ と書くことにする。

(2) \mathbf{N}_E 上の群準同型 ϕ に対し $\ker \phi = \langle \mathbf{e}_F \rangle$ が成立する。つまり $\mathbf{N}_E / \langle \mathbf{e}_F \rangle \cong_{\phi} \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}$ である。

証明 (1) と (2) における $\langle \mathbf{e}_F \rangle \subset \ker \phi$ は定義から直ちに示すことができる。逆に $\ker \phi$ の元 $\mathbf{v} = \sum_{i \in E} \lambda_i \mathbf{e}_i$ を取ると \mathbb{Z}^E の元として $\sum_{j \in F} \lambda_j \mathbf{e}_j \in \langle \mathbf{e}_F \rangle$ かつ $\sum_{k \in E \setminus F} \lambda_k \mathbf{e}_k \in \langle \mathbf{e}_{E \setminus F} \rangle$ である。ゆえに $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{e}_F + \mu \mathbf{e}_{E \setminus F}$ (λ と μ は整数) と表すことができるが、第二項目は $-\mu \mathbf{e}_F$ と等しく $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{e}_F \rangle$ である。ゆえに $\ker \phi = \langle \mathbf{e}_F \rangle$ である。 ■

命題 1.14 ([AHK18, Prop. 3.5 (2)] の準備) E を有限集合としその元 i を一つ固定する。このとき次の二つが成立する。

(1) 全射群準同型

$$\phi: \mathbb{Z}^E \rightarrow \mathbf{N}_{E \setminus \{i\}}, \sum_{j \in E} \lambda_j \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j \in E \setminus \{i\}} \lambda_j \mathbf{e}_j$$

に対し $\langle \mathbf{e}_E \rangle \subset \ker \psi$ が成立する。 ψ が誘導する \mathbf{N}_E 上の群準同型も ψ と書くことにする。

(2) \mathbf{N}_E 上の群準同型 ψ に対し $\ker \psi = \langle \mathbf{e}_i \rangle$ が成立する。つまり $\mathbf{N}_E / \langle \mathbf{e}_i \rangle \cong_{\psi} \mathbf{N}_{E \setminus \{i\}}$ である。

証明 (1) と (2) における $\langle \mathbf{e}_i \rangle \subset \ker \psi$ は定義から直ちに示すことができる。逆に $\ker \psi$ の元 $\mathbf{v} = \sum_{j \in E} \lambda_j \mathbf{e}_j$ を取るとすべての $j, k \in E \setminus \{i\}$ に関して $\lambda_j = \lambda_k$ が成り立つのでこの値を

λ と置く。すると \mathbf{N}_E の元として $\mathbf{v} = (\lambda_i - \lambda)\mathbf{e}_i$ が成立するので $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{e}_i \rangle$ が従う。ゆえに $\ker \psi \subset \langle \mathbf{e}_i \rangle$ である。 ■

命題 1.15 ([AHK18, Prop. 3.5]) M を有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし \mathcal{P} を $\mathcal{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき次の二つが成立する。

(1) F を \mathcal{P} に属す M のフラットとすると命題 1.13 の群同型 ϕ は全単射な写像

$$(1.3) \quad \phi: \text{star}(\mathbf{e}_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}, \quad \bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}} \mapsto \phi(\bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}})$$

を誘導する。

(2) 一元集合 $\{i\}$ が E の真部分集合かつ M のフラットであるとき命題 1.14 の群同型 ψ は全単射な写像

$$(1.4) \quad \psi: \text{star}(\mathbf{e}_i, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M_{\{i\}}, \mathcal{P}_{\{i\}}}, \quad \bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}} \mapsto \psi(\bar{\sigma}_{I < \mathcal{F}})$$

を誘導する。

(1) の証明 $\text{cone}(\{\mathbf{e}_F\}) = \sigma_{\emptyset < M \setminus F}$ と表すことができるので、注意 1.3 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I < M \setminus \mathcal{F}}$ が $\text{cone}(\{\mathbf{e}_F\})$ を含むのは $F \in \mathcal{F}$ のときかつそのときに限る。 F が属す \mathcal{P} の旗 \mathcal{F} を $\{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k\}$ とし $F_l = F$ と書くことにする。このとき $\mathcal{G} = \{F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_{l-1}\}$ と置くとこれは \mathcal{P}^F の旗であり $\mathcal{H} = \{F_{l+1} \setminus F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \setminus F_l\}$ と置くとこれは \mathcal{P}_F の旗である。さらに $\min(G) = \min(\mathcal{F})$ であるから $I < \mathcal{G}$ である。すると $i \in I$ に対し $\phi(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{0})$ かつ

$$\phi(\mathbf{e}_{F_j}) = \begin{cases} (\mathbf{e}_{F_j}, \mathbf{0}), & j \leq l \text{ のとき,} \\ (\mathbf{0}, \mathbf{e}_{F_j \setminus F_l}), & j \geq l \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立するので、 $\phi(\sigma_{I < \mathcal{F}}) = \sigma_{I < \mathcal{G}} \times \sigma_{\emptyset < \mathcal{H}}$ である。ゆえに (1.3) の写像は well-defined である。注意 1.3 と構成から単射性は明らかであるから全射性について述べる。 $\Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ の元 $(\sigma_{I < \mathcal{G}}, \sigma_{\emptyset < \mathcal{H}})$ を取る。 \mathcal{G} を $\{F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_{k-1}\}$ と表すとすべての i に関し $F_i \subsetneq F$ である。 \mathcal{H} を $\{F_{k+1} \setminus F \subsetneq \dots \subsetneq F_l \setminus F\}$, $F_l \supsetneq F$ ($i \in \{k+1, \dots, l\}$) と表し、 $\mathcal{P}(M)$ の旗

$$\mathcal{F} = \{F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F \subsetneq F_{k+1} \subsetneq \dots \subsetneq F_l\}$$

を考えると $F \in \mathcal{F}$ かつ $I < \mathcal{F}$ なので $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ は $\text{cone}(\{\mathbf{e}_F\})$ を含む錐であり、 $\phi(\sigma_{I < \mathcal{F}}) = \sigma_{I < \mathcal{G}} \times \sigma_{\emptyset < \mathcal{H}}$ である。これは (1.3) の全射性を意味する。 ■

(2) の証明 $\{i\}$ が \mathcal{P} に属するかそうでないかで場合分けが生じる。

$\{i\} \in \mathcal{P}$ のとき。まず命題 1.12 より $\mathcal{P}_{\{i\}} = \mathcal{P}(M_{\{i\}})$ であることに注意する。 $\{i\} \in \mathcal{P}$ であるから $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐として $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\}) = \sigma_{\emptyset < \{i\}}$ と書くことができる。命題 1.2 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$

の錐 $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ が $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\})$ を含むのは $\{i\} \in \mathcal{F}$ のときかつそのときに限る。またこのとき $\#I < \min \mathcal{F}$ なので $I = \emptyset$ である。 $\{i\}$ を含む \mathcal{P} の旗 \mathcal{F} を $\{\{i\} \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ と書くとき $\mathcal{G} = \{F_1 \setminus \{i\} \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus \{i\}\}$ は $\mathcal{P}(M_{\{i\}})$ の旗であり $\psi(\sigma_{\emptyset < \mathcal{F}}) = \sigma_{\emptyset < \mathcal{G}}$ である。これは (1.4) の写像が well-defined であることを示している。注意 1.3 から単射性は直ちに従い全射性は、 $\mathcal{P}(M_{\{i\}})$ の旗 \mathcal{G} に対し $\mathcal{F} = \{\{i\}\} \cup \{F \cup \{i\} \mid F \in \mathcal{G}\}$ が \mathcal{P} の旗であり $\psi(\sigma_{\emptyset < \mathcal{F}}) = \sigma_{\emptyset < \mathcal{G}}$ となることから従う。

$\{i\} \notin \mathcal{P}$ のとき、 $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐として $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\}) = \sigma_{\{i\} < \emptyset}$ と書くことができる。命題 1.2 より $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ の錐 $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ が $\text{cone}(\{\mathbf{e}_i\})$ を含むのは $i \in I$ のときかつそのときに限る。このような錐に対して \mathcal{F} を $\{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ と書くとき $\mathcal{G} = \{F_1 \setminus \{i\} \subseteq F_2 \setminus \{i\} \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus \{i\}\}$ は $\mathcal{P}_{\{i\}}$ の旗であり $I \setminus \{i\} < \mathcal{G}$ である。このとき $\psi(\sigma_{I < \mathcal{F}}) = \sigma_{I \setminus \{i\} < \mathcal{G}}$ となるので (1.4) の写像が well-defined であることが従う。単射性および全射性はもはや明らかだろう。 ■

2 区分的線形関数など

参考文献

[AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. “Hodge theory for combinatorial geometries”. In: *Ann. of Math. (2)* **188.2** (2018), pp. 381–452.