# モジュラー形式に関する書き留め

2026 年 1 月 19 日 21 時 5 分更新

Robert Kurinczuk 氏の講義ノート [1] の勉強を書き留めたものです。複素関数論の知識は [2] に準じています。

## 目　　次



**約束**

1. 整数すべてがなす環を $\mathbb{Z}$，実数体を $\mathbb{R}$，複素数体を $\mathbb{C}$ で表す。
2. 虚数単位を $i$ で表すことにする。
3. 複素数 $z$ の実部を $\mathfrak{R}z$，虚部を $\mathfrak{I}z$ で表す。
4. 単位的可換環 $R$ と正整数 $n$ に対し，$R$ 係数 $n$ 次一般線形群を $\mathrm{GL}_n(R)$，特殊線形群を $\mathrm{SL}_n(R)$，特殊直交群を $\mathrm{SO}_n(R)$ で表す。
5. 二つの整数 $m, n$ に対して，その最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表す。

## 1　特殊線形群と上半平面

**定義 1.1**　集合 $\{ z \in \mathbb{C} : \mathfrak{I}z > 0 \}$ を $\mathbb{H}$ と置き，**上半平面**と呼ぶ。

**命題 1.2**　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対して定まる正則関数 $\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ は

$$c \neq 0 \implies \gamma \cdot (-d/c) = \infty, \quad \gamma \cdot \infty = a/c$$
$$c = 0 \implies \gamma \cdot \infty = \infty$$

と拡張できる定数でない $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数である。さらに関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への作用が定まる。

**証明　関数 $\gamma \cdot (-)\colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が有理型であることについて**　$c = 0$ のときは

明らかであるから，$c\neq 0$ のときを考える。$\lim_{n\to\infty} z_n = -d/c$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，$\lim_{n\to\infty} cz_n + d = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} az_n + b = -(ad-bc)/c \neq 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} \gamma\cdot z_n = \infty$ である。ゆえに $\gamma\cdot(-)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型である。同様に $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ なる複素数列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を勝手に考えるとき，すべての $n$ について $z_n\neq 0$ として良く，

$$\frac{az_n+b}{cz_n+d} = \frac{a+b/z_n}{c+d/z_n} \to \frac{a}{c} \qquad (n\to\infty)$$

であるから $\gamma\cdot(-)$ は $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の有理型関数である。

**関係 $(\gamma, z)\mapsto \gamma\cdot z$ が群作用であることについて**　　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ のとき $\gamma\cdot z = \frac{z+0}{0+1} = z$ であるので, 後は結合律を見れば良い。元 $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を勝手に取り, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma' = \left(\begin{smallmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{smallmatrix}\right)$ と表すとき,

$$\gamma'\cdot\gamma = \begin{pmatrix} aa'+b'c & a'b+b'd \\ ac'+cd' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

である。正則関数 $\gamma' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ の定義域を $U(\subset\mathbb{C})$ とすると，連続性から，$\gamma(V)\subset U$ となる開集合 $V\subset\mathbb{C}$ を取れる。勝手な複素数 $z\in\mathbb{V}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\gamma'\cdot(\gamma\cdot z) &= \gamma'\cdot\frac{az+b}{cz+d} \\
&= \frac{(\frac{az+b}{cz+d})a'+b'}{(\frac{az+b}{cz+d})c'+d'} \\
&= \frac{(az+b)a'+b'(cz+d)}{(az+b)c'+d'(cz+d)} && \text{(分母を払った)} \\
&= \frac{(aa'+b'c)z+(a'b+b'd)}{(ac'+cd')z+(bc'+dd')} && \text{(分母分子を } z \text{ についてまとめた)} \\
&= (\gamma'\cdot\gamma)\cdot z
\end{aligned}$$

と計算でき，一致の定理から $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の関数として $\gamma'\cdot(\gamma\cdot(-)) = (\gamma'\cdot\gamma)\cdot(-)$ であることが分かる。よって $(\gamma, z)\mapsto\gamma\cdot z$ が群作用であることが確かめられた。　　証明終

**命題 1.3**　元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と複素数 $z$ に対して,

$$\Im(\gamma\cdot z) = \det(\gamma)\frac{\Im z}{|cz+d|^2} \tag{1.1}$$

が成立する。

**証明**　複素数 $z$ の共役を $\bar{z}$ で表すことにする。このとき

$$2i\Im(\gamma\cdot z) = \gamma\cdot z - \overline{\gamma\cdot z} \qquad \because \text{定義}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} && \because a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ なので} \\
&= \frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (cz+d)(a\overline{z}+b)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2} \\
&= \det(\gamma)\frac{2i\Im z}{|cz+d|^2}
\end{aligned}
$$

と計算でき，この計算結果を $2i$ で割れば目的の等式を得る。 証明終

**系 1.4**　関係 $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$ によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{H}$ に作用する。

**証明**　$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，$z \in \mathbb{H}$ のとき $\det(\gamma) = 1 > 0$ かつ $\Im z > 0$ であるから，(1.1) より $\Im(\gamma \cdot z) > 0$ であり，これは $\gamma \cdot z \in \mathbb{H}$ を意味する。 証明終

**命題 1.5**　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用は推移的である。

**証明**　複素数 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取り，$z = x + iy$，$x, y \in \mathbb{R}$ と表すと，$y > 0$ であることに注意して，

$$
\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x + iy = z
$$

と計算できるので，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathbb{H}$ である。 証明終

**命題 1.6**　安定化部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と等しい。したがって関係 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \gamma \mapsto \gamma \cdot i$ は全単射写像 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}$ を定める。

**証明**　元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$ を勝手に取り，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と表すと，

$$
\begin{aligned}
\gamma \cdot i = i &\iff \frac{ai+b}{ci+d} = i \\
&\iff b + ia = -c + id \\
&\iff a = d \text{ かつ } c = -b \\
&\iff \gamma \text{ が直交行列である}
\end{aligned}
$$

となり，これは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ であることを意味する。 証明終

## 2　モジュラー関数

**定義 2.1 (弱モジュラー関数)**　$k$ を整数とする。有理型関数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が**レベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数**であるとは，勝手な元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$(\star) \qquad f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

が成立するときをいう。

**命題 2.2**　レベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数 $f$ を考える。このとき勝手な複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して次の三つが成立する。

(1) $f(z) = (-1)^k f(z)$ が成り立つ。ゆえに $f$ が恒等的に零でなければ，$k$ は偶数でなければならない。

(2) $f(z+1) = f(z)$ が成り立つ。ゆえに $f$ は周期的関数である。

(3) $f(-z^{-1}) = z^k f(z)$ が成り立つ。

**証明**　**(1) について**　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

と計算できる。

**(2) について**　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(z+1) = f(\gamma \cdot z) = (0 \cdot z + 1)^k f(z) = f(z)$$

と計算できる。

**(3) について**　$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，

$$f(-z^{-1}) = f(\gamma \cdot z) = (z + 0)^k f(z) = z^k f(z)$$

と計算できる。　　　　証明終

**命題 2.3**　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $q(= q(z)) = \exp(2\pi i z)$ と置く。このとき $z \in \mathbb{H}$ であるためには，$0 < |q| < 1$ であることが必要十分である。

**証明**　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} |q| &= |\exp(-2\pi \Im z + 2\pi i \Re z)| \\ &= |\exp(-2\pi \Im z)| |\cos(2\pi \Re z) + i \sin(2\pi \Re z)| \end{aligned}$$

$$= |\exp(-2\pi\Im z)|$$

であるから，

$$0 < |q| < 1 \iff -2\pi\Im z < 0 \iff \Im z > 0 \iff z \in \mathbb{H}$$

であることが分かる。 証明終

穴あき単位円盤 $\{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$ を $\mathbb{D}^*$ と置く。また実数 $a$ に対して

$$\begin{aligned} \Omega_a &= \{ w \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ a < \arg w < 2\pi + a \} \\ D_a &= \{ z \in \mathbb{C} : a < \Im z < 2\pi + a \} \end{aligned}$$

として対数関数の分枝

$$L_a : \Omega_a \to D_a; \quad w \mapsto \log|w| + i\arg w, \quad a < \arg w < 2\pi + a$$

を定める。

**命題 2.4** $f$ を弱モジュラー関数とする。各点 $q \in \mathbb{D}^*$ に対して，$q \in \Omega_a$ を満足するような対数関数の分枝 $L_a : \Omega_a \to D_a$ を一つ取る。このとき複素数

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) \tag{2.1}$$

は分枝の取り方に依存しない。したがって (2.1) によって $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数 $\widetilde{f}$ が定まる。また (2.1) を単に

$$\widetilde{f}(q) = f\Big(\frac{\log q}{2\pi i}\Big)$$

と表す。

**証明** $q \in \Omega_a$, $q \in \Omega_{a'}$ となる二つの分枝 $L_a, L_{a'}$ を取ると，整数 $n$ を用いて $L_a(q) = L_{a'}(q) + 2n\pi i$ と表せるので，

$$\frac{L_a(q)}{2\pi i} = \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n$$

となる。またさらに $q \in \mathbb{D}^*$ であれば，

$$\exp\Big(2\pi i \frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*, \qquad \exp\Big(2\pi i \frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big) = q \in \mathbb{D}^*$$

であるので，命題 2.3 より $L_a(q)/(2\pi i), L_{a'}(q)/(2\pi i) \in \mathbb{H}$ である。命題 2.2 (2) より $f$ が $f(z+1) = f(z)$ を満足する周期関数であるから，$q \in \mathbb{D}^*$ のとき，

$$f\Big(\frac{L_a(q)}{2\pi i}\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i} + n\Big) = f\Big(\frac{L_{a'}(q)}{2\pi i}\Big)$$

となり，(2.1) が分枝の取り方に依存しないことが分かった。$L_a(q)/2\pi i$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数，$f$ も $\mathbb{H}$ 上の有理型関数であるから，これら関数の合成である $\widetilde{f}$ は $\mathbb{D}^* \cap \Omega_a$ 上の有理型関数である。$\bigcup_{a>0}(\mathbb{D}^* \cap \Omega_a) = \mathbb{D}^*$ であるから，$\widetilde{f}$ が $\mathbb{D}^*$ 上の有理型関数であることが分かった。 証明終

**定義 2.5** $f$ を弱モジュラー関数とする。

(1) $\widetilde{f}$ が 0 で有理型であるとき，$f$ が $\infty$ **で有理型**という。

(2) $\widetilde{f}$ が 0 で正則であるとき，$f$ が $\infty$ **で正則**という。

$\widetilde{f}$ が 0 で有理型のとき，ローラン展開

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)q^n$$

ができ，$q = q(z) = \exp(2\pi iz)$ のとき

$$f(z) = f\Big(\frac{\log\exp(2\pi iz)}{2\pi i}\Big) = \widetilde{f}(\exp(2\pi iz)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a(n)e^{2n\pi iz}$$

となり，$f$ のフーリエ展開を与える。複素数列 $(a(n))_{n=-N}^{\infty}$ を $f$ の**フーリエ係数**と呼ぶ。また $f$ が $\infty$ で正則であれば，$N=0$ とできる。

**定義 2.6 (モジュラー関数とモジュラー形式)** $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をレベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数とする。

(1) $f$ が $\infty$ で有理型のとき，$f$ を**レベル 1 荷重 $k$ のモジュラー関数**と呼ぶ。

(2) $f$ が $\mathbb{H}$ 上の正則関数で，かつ $\infty$ で正則のとき，$f$ を**レベル 1 荷重 $k$ のモジュラー形式**と呼ぶ。

(3) モジュラー形式 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ の $q$ **展開**とは，$\widetilde{f}$ のローラン展開が与えるフーリエ展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2ni\pi z}$$

のことをいう。さらに $a(0)=0$ のとき $f$ を**カスプ形式**という。

**命題 2.7** $k$ を整数とし，集合 $M_k, S_k$ を

$$M_k = \{\, f : f \text{ はレベル 1 荷重 } k \text{ のモジュラー形式である}\,\}$$
$$S_k = \{\, f : f \text{ は 1 荷重 } k \text{ のカスプ形式である}\,\}$$

で定める。このとき $M_k$ と $S_k$ は $\mathbb{C}$ 線形空間である。

**証明** $M_k$ が各点和で閉じていることを見る。モジュラー形式 $f, g \in M_k$ を勝手に取るとき，正則関数の和は正則関数であるから，$f+g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ と $\widetilde{f} + \widetilde{g}\colon \mathbb{D}^* \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ であるから，$(f+g)^{\sim}\colon \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ は正則関数であ

る。あとは $f+g$ が $(\star)$ を満足することを示せば，$f+g \in M_k$ であることが分かる。元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$\begin{aligned}(f+g)(\gamma\cdot z) &= f(\gamma\cdot z)+g(\gamma\cdot z)\\ &= (cz+d)^k f(z)+(cz+d)^k g(z)\\ &= (cz+d)^k (f+g)(z)\end{aligned}$$

と計算でき，$(\star)$ を $f+g$ が満足することが確かめられ，$f+g \in M_k$ である。$M_k$ がスカラー倍で閉じていることも同様に示せるので省略する。勝手なカスプ形式 $f, g \in S_k$ に対して，$(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ が成立することから，$S_k$ が $\mathbb{C}$ 線形空間であることも従う。

証明終

**命題 2.8**　整数 $k, l$ とモジュラー形式 $f \in M_k, g \in M_l$ に対し，$fg \in M_{k+l}$ が成立する。また $f$ がカスプ形式のとき $fg$ もカスプ形式である。

**証明**　正則関数の積は正則関数であるから，$fg\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ と $\widetilde{f}\widetilde{g}\colon \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ は正則関数である。定義から $(fg)^{\sim} = \widetilde{f}\widetilde{g}$ であるから，$(fg)^{\sim}$ も正則関数である。あとは $fg$ が $(\star)$ を満足することを示せばよく，元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z \in \mathbb{H}$ を勝手に取ると，

$$\begin{aligned}(fg)(\gamma\cdot z) &= (cz+d)^k f(z)(cz+d)^l g(z)\\ &= (cz+d)^{k+l}(fg)(z)\end{aligned}$$

と計算できるので，$fg \in M_{k+l}$ であることが確かめられた。また $f$ がカスプ形式のとき，

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n\\ \widetilde{g}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n\end{aligned}$$

とローラン展開すると，

$$(fg)^{\sim}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n, \qquad c(n) = \sum_{m=0}^{n} a(m)b(n-m)$$

であるから，特に $c(0) = a(0)b(0) = 0$ で，$fg$ はカスプ形式であることが分かる。

証明終

# 3　アイゼンシュタイン級数

**定義 3.1**　$k$ を 3 以上の整数とする。各複素数 $z \in \mathbb{H}$ に対して，級数

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 : \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

を定め，$G_k(z)$ を**アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

第一にアイゼンシュタイン級数の収束を調べなければならない。

**補題 3.2**　$K$ を $\mathbb{H}$ の有界閉集合とする。このとき勝手な点 $z \in K$ と元 $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|,|n|\} \leqq |mz+n| \tag{3.1}$$

が成立するような正数 $C$ が存在する。

**証明**　$C_1 = \min\{\Im z : z \in K\}$，$C_2 = \max\{|\Re z| : z \in K\}$ と置く。

点 $z \in K$ と元 $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を勝手に取り，$z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）と表すと，

$$|mz+n| = |(mx+n)+imy| = \sqrt{(mx+n)^2 + (my)^2}$$

となる。$C_2 = 0$ であれば常に $x = 0$ で，$|mz+n| \geqq |mx+n| = |n|$ かつ $|mz+n| \geqq y|m| \geqq C_1|m|$ であるから，$C = \min\{1, C_1\}$ が (3.5) を満足する正数である。$C_2 \neq 0$ の場合を考える。前述の議論と同じく $|n|$ については $|mz+n| \geqq C_1|m|$ である。$|m|$ について，$|m| \geqq |n|/(2C_2)$ のとき

$$|mz+n| \geqq C_1|m| \geqq \frac{C_1}{2C_2}|n| \tag{3.2}$$

となり，そうでないとき $n \neq 0$ かつ $|m/n| < 1/(2C_2)$ となり，常に $|m/n||x| \leqq 1/2$ で，

$$|mx+n| = \left|n\left(\frac{m}{n}x+1\right)\right| \geqq |n|\left(1-\left|\frac{m}{n}\right||x|\right) \geqq \frac{1}{2}|n| \tag{3.3}$$

となる。(3.2) と (3.3) を踏まえると，$C = \min\{C_1, C_1/(2C_2), 1/2\}$ が (3.5) を満足する正数である。　証明終

**定理 3.3**　$k \geqq 3$ のとき $G_k$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数に絶対収束かつ広義一様収束する。

**証明**　$K$ を $\mathbb{H}$ の勝手な有界閉集合とする。補題 3.2 より，勝手な点 $z \in K$ と勝手な元 $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して

$$C \max\{|m|,|n|\} \leqq |mz+n|$$

となるような正数 $C$ が存在し，

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{|mz+n|^k}\leqq\frac{1}{C^k}\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{\max\{|m|,|n|\}^k}$$

であるから，右辺の級数の収束を示せば，$G_k$ が $K$ 上で絶対収束かつ一様収束することが従う。正整数 $N$ に対して $\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\max\{|m|,|n|\}=N\}$ の個数を数える。$|m|>|n|$ のものを数えると，$m=\pm N$ で，$n=-N+1,-N+2,\ldots,-1,0,1,\ldots,N-1$ の $2(2N-1)$ 個ある。同様に $|n|<|m|$ のものも $2(2N-1)$ 個ある。$|m|=|n|$ のものは，$(N,N),(N,-N),(-N,N),(-N,-N)$ の 4 個ある。ゆえに件の集合の個数は $8N$ 個であることが分かった。ゆえに

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{\max\{|m|,|n|\}^k}=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{8N}{N^k}=8\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^{k-1}}$$

であり，いま $k\geqq 3$ であるからこの正項級数は収束する。以上で，$G_k$ が $\mathbb{H}$ 上で絶対収束かつ広義一様収束することが示された。多項式 $mz+n$ は $\mathbb{H}$ 上で常に零でないから，有理多項式 $1/(mz+n)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり，$G_k$ の収束先が正則関数であることも分かる。 証明終

**定理 3.4** $k\geqq 3$ のとき正則関数 $G_k\colon\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ はレベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数である。

**証明** 元 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と点 $z\in\mathbb{H}$ を勝手に取る。$\gamma$ が全単射写像 $\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ を誘導することに注意すると，

$$\begin{aligned}
G_k(\gamma\cdot z)&=\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{(m(\gamma\cdot z)+n)^k}\\
&=\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{(cz+d)^k}{(m(az+b)+n(cz+d))^k} && \because \text{分母を払った}\\
&=\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{(cz+d)^k}{((ma+nc)z+(mb+nd))^k}\\
&=\sum_{\substack{(m',n'):\\(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\},\left(\begin{smallmatrix}m'\\n'\end{smallmatrix}\right)=\gamma\left(\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right)}}\frac{(cz+d)^k}{(m'z+n')^k}\\
&=(cz+d)^k\sum_{\substack{(m',n')\in\mathbb{Z}^2:\\(m',n')\neq(0,0)}}\frac{1}{(m'z+n')^k} && \because \gamma\text{ の全単射性より}
\end{aligned}$$

$$= (cz+d)^k G_k(z)$$

となり，$G_k$ が $(\star)$ を満足することが確かめられた。　　　　　　　　　　　証明終

**系 3.5**　$k$ が 3 以上の奇数のとき $\mathbb{H}$ 上で $G_k(z) = 0$ である。

**証明**　定理 3.4 より $G_k$ が荷重 $k$ の弱モジュラー関数であるから，命題 2.2 (1) より $G_k$ は $\mathbb{H}$ 上の零関数である。　　　　　　　　　　　証明終

さらに弱モジュラー関数 $G_k$ はモジュラー形式である。

**定理 3.6**　$k \geqq 3$ のとき $G_k$ は $\infty$ で正則である。つまり $G_k$ はモジュラー形式である。

この定理の証明のために，ゼータ関数・約数関数・ベルヌーイ数を用いて $G_k$ の $q$ 展開を表示する。

**定義 3.7**　(1) 1 より大きい実数 $s$ に対して，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として関数 $\zeta$ を定め，**ゼータ関数**と呼ぶ。

(2) 正整数 $n$ と実数 $l$ に対して，

$$\sigma_l(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d>0,\ d|n}} d^l$$

として関数 $\sigma_l$ を定め，**約数関数**と呼ぶ。

(3) 原点周りの $\mathbb{D}^*$ 上の正則関数 $z/(e^z-1)$ のテイラー展開

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

の係数 $B_k$ を**ベルヌーイ数**と呼ぶ。

**補題 3.8 (オイラーの等式)**　正の偶数 $k$ に対して，

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^k B_k}{k!} \tag{3.4}$$

が成立する。

**証明**　三角関数の公式

$$\pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{3.5}$$

を用いる[1)]。(3.5) の左辺に $z$ を掛けたものを計算すると，$z \in \mathbb{H}$ のとき

$$\pi z\cot(\pi z) = \pi z\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \qquad \because \cot \text{ の定義}$$

1)　証明は，例えばヘルグロッツの技法と呼ばれるものが [3] の 23 章にある。

$$
\begin{aligned}
&= \pi z \frac{(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos, \sin \text{の定義} \\
&= \pi iz \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} \\
&= \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(2\pi z)^k && \because z \in \mathbb{H} \text{ なので，命題 2.3 から } e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}^* \text{ であるので} \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

となる。次に (3.5) の右辺に $z$ を掛けたものを計算すると，

$$
\begin{aligned}
z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} &= 1 + z\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} \right) \\
&= 1 + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} && \because \text{分母を揃えた} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2}{n^2 - z^2} && \because z \text{ を総和の中に入れ，符号を調整した} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \frac{1}{1 - (\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{n^{2l}} && \because \frac{1}{1-z} \text{ の原点におけるテイラー展開} \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty} 2z^{2(l+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(l+1)}} && \because \text{和を交換した} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2z^{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2l}} && \because \text{添字 } l \text{ を 1 ずらした} \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{\infty} 2\zeta(2l) z^{2l} && (3.7)
\end{aligned}
$$

(3.5) より (3.6) と (3.7) が等しく，2 以上の偶数 $k = 2l$ に関する $z^k$ の係数を比較することで，目的の等式

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^k B_k}{k!}$$

を得られる。 証明終

**補題 3.9** 正の偶数 $k$ に対して，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = -\zeta(k) \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n \tag{3.8}$$

が成立する。

**証明**　上述の補題と同様に三角関数の公式

$$\pi\cot(\pi z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n} \tag{3.9}$$

を用いる。(3.9) の左辺を書き直すと，

$$\begin{aligned}
\pi\cot(\pi z)&=\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} && \because \cot\text{ の定義}\\
&=\pi\frac{(e^{\pi iz}+e^{-\pi iz})/2}{(e^{\pi iz}-e^{-\pi iz})/(2i)} && \because \cos,\ \sin\text{ の定義}\\
&=\pi i\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1}\\
&=\pi i+\pi i\frac{2}{q-1} && \because q=e^{2\pi iz}\text{ と置いているので}\\
&=\pi i-2\pi i\frac{1}{1-q}\\
&=\pi i-2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}q^n && \because \frac{1}{1-q}\text{ の原点におけるテーラー展開}
\end{aligned}$$

となるので，$n\geqq 1$ のとき $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}q^n=(2\pi in)^{k-1}q^n$ であることに注意して，(3.9) の両辺を $z$ について $(k-1)$ 階微分すると，

$$-(2\pi i)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q^n=(-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^k}$$

となり，両辺を $(k-1)!$ で割ると，いま $k$ が偶数であるから $(-1)^{k-1}=-1$ なので，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^k}=\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q^n$$

となる。また (3.4) から

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}=-\zeta(k)\frac{2k}{B_k}$$

であるから，目的の等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^k}=-\zeta(k)\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q^n$$

を得られる。　　　　証明終

**定理 3.10**　4 以上の偶数 $k$ に対して，$G_k$ の $q$ 展開が

$$G_k(z)=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\Big) \tag{3.10}$$

と表される。

**証明**　$G_k(z)$ を計算していくと，

$$
\begin{aligned}
G_k(z) = & \sum_{\substack{(m,\,n)\in\mathbb{Z}^2:\\(m,\,n)\neq(0,\,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
= & \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^k}}_{m=0\text{ の項}} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}\Big) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(-mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-mz-n)^k}\Big) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}\Big) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(mz)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz-n)^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k}\Big) && \because k\text{ が偶数なので} \\
= & 2\zeta(k)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k} \\
= & 2\zeta(k)+2\sum_{m=1}^{\infty}\Big(-\zeta(k)\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}(e^{2\pi imz})^n\Big) && \because (3.8)\text{ を用いた} \\
= & 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q^{mn}\Big) && \because q^{mn}=(e^{2\pi imz})^n \\
= & 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}:\\n>0,\ n\mid d}}n^{k-1}q^d\Big) && \because d=mn\text{ と置いた} \\
= & 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{d=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(d)q^d\Big) && \because \text{約数関数の定義} \\
= & 2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\Big)
\end{aligned}
$$

と計算でき，これが目的の等式であった。　証明終

**定理 3.6 の証明**　$k$ が奇数のときは $G_k$ が零関数であるので明らかである。$k$ が偶数のとき (3.10) から

$$
\widetilde{G}_k(q)=2\zeta(k)\Big(1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\Big)
$$

が成立するので，$\lim_{q\to0}\widetilde{G}_k(q) = 2\zeta(k)$ である。これは $\widetilde{G}_k(q)$ が原点で正則であることを意味し，したがって $G_k$ が $\infty$ で正則であることが従う。　証明終

**定義 3.11**　3 以上の整数 $k$ に対して，$\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上の正則関数 $E_k$ を

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

で定め，**正規化アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ。

ベルヌーイ数（と約数関数）を計算できれば，$E_k$ を明示的に書き下すことができるので，ここでベルヌーイ数の漸化式を述べておく。

**命題 3.12**　$B_0 = 1$，かつ $d \geqq 1$ のとき

$$B_d = -\frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k$$

が成り立つ。

**証明**　$e^z$ を原点周りでテイラー展開すると

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

であるから，

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

となる。したがって

$$1 = \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k \right) = \sum_{d=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{d} \frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!} \right) z^d$$

となるので，係数比較をすることで，$B_0 = 1$ かつ

$$\sum_{k=0}^{d} \frac{B_k}{k!\,(d-k+1)!} = 0 \tag{3.11}$$

が分かる。(3.11) を $B_d$ について解くことで，

$$\begin{aligned} B_d &= \sum_{k=0}^{d-1} \frac{d!}{k!\,(d-k+1)!} B_k \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d+1)!}{k!\,(d-k+1)!} B_k && \because d+1 \text{ を挟み込んだ} \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+1}{k} B_k && \because \text{二項係数の定義} \end{aligned}$$

と計算でき，目的の漸化式を得られる。　　証明終

いくつかベルヌーイ数を計算すると，

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2}, \\
B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = -\frac{1}{3}\Big(1 - \frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{6}, \\
B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0, \\
B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{5}\Big(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0\Big) = -\frac{1}{30}, \\
B_5 &= \cdots = 0, \\
B_6 &= \cdots = \frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

などとなる。したがって，正規化アイゼンシュタイン級数は

$$
\begin{aligned}
E_4(z) &= 1 - 8(-30)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n = 1 - 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \cdots), \\
E_6(z) &= 1 - 12\cdot 42\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n = 1 - 504(q + 33q^2 + 244q^3 + \cdots)
\end{aligned}
$$

などとなる。ここで正則関数 $E_4^3 - E_6^2$ を考えると，これは命題 2.7 と命題 2.8 から荷重 12 のモジュラー形式で，上の計算より

$$
(E_4(z))^3 - (E_6(z))^2 = 1728q + o(q)
$$

となるので，荷重 12 のカスプ形式であることが分かる。カスプ形式 $\Delta$ を $(E_4^3 - E_6^2)/1728$ で定め，**ラマヌジャンのデルタ**と呼ぶ。また $\Delta$ のフーリエ係数を $(\tau(n))_{n=0}^{\infty}$ で表し，**ラマヌジャンのタウ関数**と呼ぶ。具体的には

$$
\tau(0) = 0, \qquad \tau(1) = 1, \qquad \tau(2) = -24, \qquad \tau(3) = 252, \ \ldots
$$

と計算できる。ラマヌジャンのタウ関数については，ラマヌジャンによる有名な予想がある。

**予想 3.13 (ラマヌジャン予想)**　ラマヌジャンのタウ関数に対して次が成立する。

(1) 勝手な非負整数 $n, m$ に対して，$n$ と $m$ が互いに素であるならば

$$
\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)
$$

が成立する。

(2) $p$ を素数，$r$ を正整数とするとき

$$
\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})
$$

が成立する。

予想 3.13 は，以降で扱うヘッケ作用素を用いることで証明される。

# 4　ヘッケ作用素

ヘッケ作用素を定義するための準備を行なっていく。正整数 $n$ に対して集合

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n\right\}$$

を $\mathbf{M}_n$ と置き，行列の左乗算によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathbf{M}_n$ への左群作用を定めておく。

**補題 4.1**　レベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数 $f$ と正整数 $n$ を考える。勝手な行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n$ と軌道の元 $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = (\tilde{c}z+\tilde{d})^{-k} f\Big(\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}\Big) \tag{4.1}$$

が成立する。

**証明**　軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の元は，行列 $\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+b'c & a'b+b'd \\ ac'+cd' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

と表される。すると (4.1) の右辺は

$$\begin{aligned}
&(ac'z+cd')^{-k} f(\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z) \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k} (c'\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z + d')^k f(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z) && \because (\star)\text{より} \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k} \Big(c'\frac{az+b}{cz+d} + d'\Big)^k f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) && \because \text{作用の定義} \\
&\qquad = (ac'z+cd')^{-k} \Big(\frac{(ac'+cd')z+(bc'+dd')}{cz+d}\Big)^k f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) \\
&\qquad = (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)
\end{aligned}$$

と計算でき，(4.1) の左辺と等しいことが分かる。　証明終

補題 4.1 から，レベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数 $f$ と軌道 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_n$ に対して

$$(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

を軌道の代表元の取り方に依らずに定義できる。

**定義 4.2**　レベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数 $f$ と正整数 $n$ に対して，$\mathbb{H}$ 上の有理型関数 $T_nf$ を，

$$T_nf(z) = n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

で定める。レベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数の集合から $\mathbb{H}$ 上の有理型関数への写像 $T_n$ を**ヘッケ作用素**と呼ぶ。

まずヘッケ作用素によって弱モジュラー関数が弱モジュラー関数に写ることを見る。

**命題 4.3**　$f$ がレベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数であるとき，$T_nf$ も荷重 $k$ の弱モジュラー関数である。

**証明**　行列 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を勝手に取る。$\gamma$ の右乗算が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n$ 上の置換を引き起こすことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&T_nf(\gamma\cdot z) \\
&= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma\cdot z)+d)^{-k} f\Big(\frac{a(\gamma\cdot z)+b}{c(\gamma\cdot z)+d}\Big) \\
&= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} \Big(c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d\Big)^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big) \qquad \because \text{作用の定義} \\
&= n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} \Big(\frac{(a'c+c'd)z+(b'c+dd')}{c'z+d'}\Big)^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big) \\
&= (c'z+d')^k n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} ((a'c+c'd)z+(b'c+dd'))^{-k} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big) \\
&= (c'z+d')^k n^{k-1} \sum_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\cdot\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n} (c(\gamma\cdot z)+d)^{-k} f\Big(\frac{a(\gamma\cdot z)+b}{c(\gamma\cdot z)+d}\Big) \qquad \because \gamma \text{ が } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash M_n \text{ 上の置換なので} \\
&= (c'z+d')^k T_nf(z)
\end{aligned}$$

と計算でき，$T_nf$ が $(\star)$ を満足することが確かめられる。ゆえに $T_nf$ は荷重 $k$ の弱モジュラー関数である。　　証明終

ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathbf{M}_n$ の完全代表系としてエルミート標準形を取れることを見ておく。

**命題 4.4**　行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n$ に対して，$\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がエルミート標準形，すなわち

$$\gamma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} > 0,\ \tilde{a}\tilde{d} = n,\ 0 \leqq \tilde{b} < \tilde{d}$$

を満足する行列 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在する。

**証明**　行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ が非特異であるから，定理 A.2 より $\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がエルミート標準形となるようなユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ を取れる。エルミート標準形の行列式は正で，かつ $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の行列式も正であるから，$\det(\gamma) = 1$，すなわち $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であることが従う。
証明終

**系 4.5**　レベル 1 荷重 $k$ の弱モジュラー関数 $f$ と正整数 $n$ に対して，

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big) \tag{4.2}$$

と表せる。

**証明**　命題 4.4 とエルミート標準形の一意性から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{M}_n$ の完全代表系として $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_n : a > 0,\ 0 \leqq b < d\}$ を取れるので。　証明終

(4.2) によるヘッケ作用素の表示を用いることで，モジュラー関数がモジュラー関数に写ることを示せる。

**定理 4.6**　$f$ をレベル 1 荷重 $k$ のモジュラー関数とし，その $q$ 展開を $f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha(m) q^m$ とする。このとき

$$T_n f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma(m) q^m, \qquad \gamma(m) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}:\, a>0,\\ a \mid \gcd(m,\, n)}} a^{k-1} \alpha\Big(\frac{mn}{a^2}\Big) \tag{4.3}$$

が成立する。

**証明**　(4.2) を用いて計算を行うと，

$$\begin{aligned}
T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big) && \because (4.2)\ \text{より} \\
&= n^{k-1} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az+b}{d} m\Big) && \because f\ \text{の}\ q\ \text{展開} \\
&= n^{k-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}:\\ a>0,\, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\Big(2\pi i \frac{az}{d} m\Big) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) && (4.4)
\end{aligned}$$

となる。ここで，整数 $d, m$ に対して $\sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right)$ を計算すると，

$$\sum_{b=0}^{d-1} \exp\Big(2\pi i \frac{b}{d} m\Big) \tag{4.5}$$

$$= \begin{cases} d & d \mid m \text{ のとき（}\because \text{常に} \exp(2\pi i \frac{b}{d} m) = 1 \text{ なので）} \\ \frac{1 - \exp\left(2\pi i (m/d)\right)^d}{1 - \exp\left(2\pi i (m/d)\right)} = 0 & d \nmid m \text{ のとき（}\because \text{等比数列の和）} \end{cases}$$

となる。(4.4) の計算を続けると，

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, ad=n}} d^{-k} \alpha(m) \exp\left(2\pi i \frac{az}{d} m\right) \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{b}{d} m\right) & \because (4.4) \text{ より} \\ &= n^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,\, d \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, ad=n,\, d \mid m}} d^{-k+1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i a z \frac{m}{d}\right) & \because (4.5) \text{ より} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d>0,\, d \mid n,\, d \mid m}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha(m) \exp\left(2\pi i z \frac{mn}{d^2}\right) & \because a = n/d \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d>0,\, d \mid \gcd(m,\, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

となる。ここで関係 $(m, d) \mapsto (m/d, n/d)$ によって全単射写像

$$\{(m, d) : m, d \in \mathbb{Z},\ d > 0,\ d \mid \gcd(m, n)\} \to \{(m', a) : m', d \in \mathbb{Z},\ a > 0,\ a \mid n\} \tag{4.7}$$

を得られるので，(4.6) の計算を続けて，

$$\begin{aligned} T_n f(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}: \\ d>0,\, d \mid \gcd(m,\, n)}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha\left(n \frac{d}{n} \frac{m}{d}\right) q^{\frac{m}{d} \frac{n}{d}} & \because (4.6) \\ &= \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, a \mid n}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{nm'}{a}\right) q^{m' a} & \because (4.7) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}: \\ a>0,\, a \mid \gcd(m,\, n)}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}\right) \right) q^m \end{aligned}$$

と計算でき，$T_n f$ を目的の形で表示できた。　証明終

**系 4.7**　$f$ がレベル 1 荷重 $k$ のモジュラー関数のとき，$T_n f$ もレベル 1 荷重 $k$ のモジュラー関数である。さらに $f$ がモジュラー形式ならば，$T_n f$ もモジュラー形式である。

**証明**　$a \mid n$ なる正整数 $a$ に対して $n/(a^2)$ は高々有界であるから，$m \ll 0$ のとき (4.3) における $\gamma(m)$ は零である。ゆえに $T_n f$ は $\infty$ で有理型で，モジュラー関数であることが従う。また $f$ がモジュラー形式であれば，負の整数 $m$ に対して常に $\gamma(m) = 0$ であることが分かるので，$T_n f$ は $\infty$ で正則で，モジュラー形式であることが従う。　証明終

# A　整数係数行列のエルミート標準形

整数係数の非特異正方行列に対してエルミート標準形が存在することを，2 次の場合に限定して取り扱う。

**定義 A.1 (非特異正方行列のエルミート標準形)**　$A$ を整数係数の非特異 2 次行列とする。ユニモジュラー行列 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ によって

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad h_{11}, h_{22} > 0 \text{ かつ } 0 \leqq h_{12} < h_{22}$$

と表せるとき，この上三角行列を $A$ の**エルミート標準形**と呼ぶ。

エルミート標準形を誘導するにあたって，

- 一行目と二行目を交換する行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
- 一行目を $-1$ 倍する行列 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
- 二行目を $-1$ 倍する行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$
- 一行目を $m$ 倍して二行目に足す行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{smallmatrix}\right)$
- 二行目を $m$ 倍して一行目に足す行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

が基本となるユニモジュラー行列で，これら行列の左乗算によって行列の変形を行う。

**定理 A.2**　整数係数の非特異 2 次行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対してエルミート標準形は一意的に存在する。

**証明**　存在性と一意性を分けて証明する。

**存在性**　$a = 0$ または $c = 0$ なら，行の入れ替えを行うことで $c = 0$ と考えて良く，すると非特異性から $a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。さらに各行を適当に $-1$ 倍することで $a > 0$ かつ $d > 0$ として良い。$b$ を $d$ で割ることで

$$b = qd + b', \qquad q, b' \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq b' < d$$

を得られる。を満足する $q, b'$ を取り，$-q$ 倍した二行目を一行目に足して $A$ のエルミート標準形 $\left(\begin{smallmatrix} a & b' \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ を得る。$a, c$ が共に零でない場合は，以下のようにユークリッドの互除法を用いて上述の議論に帰着させる。必要なら一行目と二行目を入れ替えて，$0 < |a| \leqq |c|$ として良い。$c$ を $a$ で割って，

$$c = qa + c', \qquad q, c' \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq c' < |a|$$

を満足する $q, c'$ を取り，$-q$ 倍した一行目を二行目に足して，行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c' & d-qb \end{smallmatrix}\right)$ を得る。

$c' \neq 0$ であれば，$0 \leqq |c'| < |a|$ であるから，行を交換して再度同じ議論を繰り返すことで，$c' = 0$ としてよく，証明の最初の議論に帰着された。

**一意性**　二つの $A$ のエルミート標準形

$$\gamma \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad \gamma' \cdot A = \begin{pmatrix} h_{11'} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix}, \qquad \gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

があるとすると，$\gamma' \cdot \gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と書けば

$$\begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ 0 & h'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$$

となる。これから $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列であることを示す。$h_{11}c = 0$ かつ $h_{11} \neq 0$ であるから，$c = 0$ である。すると $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ がユニモジュラーであるから，$ad = 1$ または $ad = -1$ である。$h_{11}a = h'_{11}$ かつ $h_{11}, h'_{11} > 0$ であるから，$a > 0$ である。同様に $h_{22}d = h'_{22}$ かつ $h_{22}, h'_{22} > 0$ であるから，$d > 0$ である。したがって $a = d = 1$ であることが分かる。$0 \leqq h'_{12} = h_{12} + bh_{22}$ かつ $0 \leqq h_{12} < h_{22}$ であるから，$b \geqq 0$ でなければならない。また $h'_{22} = h_{22}$ であるから，$0 \leqq h'_{12} < h'_{22}$ であることと合わせて $b = 0$ であることが分かる。ゆえに $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ が単位行列で，二つのエルミート標準形が等しいことが従う。　証明終

# 文献


[1] Kurinczuk, R. (2017). Modular Forms. `https://www.ma.imperial.ac.uk/~dhelm/M4P58/ModularForms2.pdf`（2026 年 1 月 1 日最終確認）.

[2] 岸　正倫・藤本　担孝（1980）. 複素関数論. 学術図書出版社.

[3] Aigner, M. and Ziegler, Günter M. (2010). *Proofs from THE BOOK* (fourth ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.