# Iwasawa theory for vertex-weighted graphs

## 舘野荘平氏との共同研究　arXiv:2025.12351

室岡　亮祐

所属：名古屋大学大学院多元数理科学研究科

2026 年 2 月 10 日

# 目次

# 文献

## 解説する論文


Murooka, R. and Tateno, S. (2025). Iwasawa theory for vertex-weighted graphs. *arXiv preprint* `arXiv:2025.1235v1 [math.CO]`.


## スライド中で引用する論文


Chung, F.R.K and Langlands, Robert R. (1996). A combinatorial Laplacian with Vertex Weights. In: *J. comb. theory, Ser. A*, 75(2), 316–327.

Wu, H., Feng, R., and Sato, I. (2011). Vertex weighted complexities of graphcoverings. In: *Algebra Collq.*, 18(1), 129–138.

# 荷重なしグラフの岩澤理論（導入）

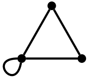
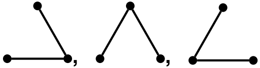
## 定義 (基本の概念)

$X$：連結有限グラフ　$T$：$X$ の部分グラフ

- $T$ が $X$ の**全域木** $\Longleftrightarrow$
  1. $T$ は連結グラフ。
  2. ($T$ の頂点集合) = ($X$ の頂点集合)。
  3. $T$ は閉路を持たない。
- $\mathrm{ST}_X := \{X \text{ の全域木}\}$, $\kappa(X) := \#\mathrm{ST}_X \leftsquigarrow X$ の**複雑度**と呼ぶ。

- $X$ が連結でない $\Longrightarrow \kappa(X) = 0$

## 複雑度の例

$X :=$  $\rightsquigarrow \mathrm{ST}_X = \{$  $\}$, $\kappa(X) = 3$

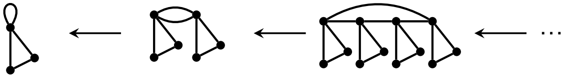
## 定義 (グラフの $\mathbb{Z}_p$ 塔)

$p$：素数　グラフのガロア被覆の列

$$X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$$

が $\mathbb{Z}_p$ 塔 $:\Longleftrightarrow\ \forall n,\ \mathrm{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

## 例 (p=2 の場合の例)



$X_0$ $\kappa(X_0)=3$　　$X_1$ $\kappa(X_1)=2\cdot 3^2$　　$X_2$ $\kappa(X_2)=2^2\cdot 3^4$

## 定理 (Gonet'22, McGown-Vallières'24)

$$\exists!\mu,\lambda,\nu \in \mathbb{Z},\quad \underbrace{\mathrm{ord}_p(\kappa(X_n))}_{\kappa(X_n)\text{ の } p \text{ べき部分}} = \mu p^n + \lambda n + \nu \quad \forall n \gg 0$$

上の例　$\mathrm{ord}_2(\kappa(X_n)) = n \rightsquigarrow \mu = 0, \lambda = 1, \nu = 0$

$\boxed{\text{導入終}}$

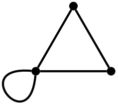
# 頂点荷重グラフの定義（準備１）

### 定義 (Serre によるグラフの定義)

**(有限）グラフ**：五つ組 $X = (V_X, E_X, o, t, (-)^-)$ のこと

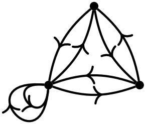
- 有限集合 $V_X$；　頂点（**V**ertex）の集合
- 有限集合 $E_X$；　辺（**E**dge）の集合
- 写像 $o\colon E_X \to V_X$,　$t\colon E_X \to V_X$；<br>辺の始点（**o**rigin）と終点（**t**erminus）の指定
- $\forall e \in E_X,\ \ o(\overline{e}) = t(e),\ \ t(\overline{e}) = o(e),\ \ \overline{e} \neq e,\ \ \overline{\overline{e}} = e$<br>となる写像 $(-)^-\colon E_X \to E_X$；　逆向きの辺の指定

互いに逆向きの関係にある辺を同一視 $\rightsquigarrow$ 向き無しのグラフ；



扱いたいグラフ

$\longleftrightarrow$



グラフの実態

$p$：素数　$\mathbb{Q}_p$：$p$ 進数体　$\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$：代数閉包への埋込（固定）

## 定義

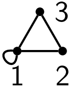
- **頂点荷重グラフ**：グラフ $X$ と関数 $w\colon V_X \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ の対 $(X, w)$ のこと $\rightsquigarrow$ **以下単にグラフと呼ぶ。**
- $X$ の**全域木**：$V_T = V_X$ かつ閉路を持たない $X$ の部分グラフ $T$ のこと　$\mathrm{ST}_X := \{ X$ の全域木 $\}$
- $v :\in V_X,\ T :\in \mathrm{ST}_X$, $d_T\colon V_X \times V_X \to \mathbb{Z}$：$T$ における頂点間の距離

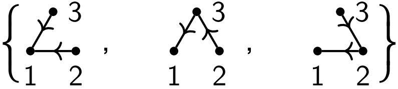
  $X$ の**根付き全域木**：次で定まる有向部分グラフ $T_v$ のこと

$$V_{T_v} = V_T, \quad E_{T_v} = \{ e \in E_T : d_T(v, o(e)) < d_T(v, t(e)) \}$$

- $w(T_v) := \prod_{e \in E_{T_v}} w_{t(e)}$,　$\kappa_v(X) := \sum_{T \in \mathrm{ST}_X} w(T_v)$,　$\kappa(X) := \sum_{v \in V_X} \kappa_v(X)$

例

$X =$ 

$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{根が 1 の} \\ \text{全域木} \end{array} \right\} =$ 


$\rightsquigarrow \kappa_1(X) = w_1^2 + w_1 w_3 + w_1 w_2$

$\cdots \rightsquigarrow \kappa(X) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1$

# 頂点荷重グラフの行列木定理（結果１）

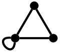
**定義 (頂点荷重グラフ $X$ の情報を持つ行列)**

$V_X := \{1, \ldots, m\}$　　$\forall i \in V_X$，平方根 $\sqrt{w_i} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。

- **次数行列**：$D_X(i,i) = \sum_{e \in E_X : o(e)=i} w_{t(e)}$ で定まる $m$ 次対角行列 $D_X$
- **隣接行列**：$W_X(i,j) = \sum_{e \in E_X : o(e)=i,\, t(e)=j} \sqrt{w_i}\sqrt{w_j}$ で定まる $m$ 次正方行列 $W_X$
- **ラプラス行列**：$L_X := D_X - W_X$ のこと

**定理 (Chung-Langlands '96（$\mathbb{R}_{>0}$ 荷重），M.-Tateno '26+)**

$$\det(L_X[i]) = \kappa_i(X), \qquad \Big(\sum_{k \in V_X} w_k\Big) \cdot \operatorname{adj} L_X(i,j) = \sqrt{w_i}\sqrt{w_j}\,\kappa(X)$$

例　$X =$  $\rightsquigarrow$ $D_X = \begin{pmatrix} 2w_1+w_2+w_3 & & \\ & w_1+w_3 & \\ & & w_1+w_2 \end{pmatrix}$,

$$W_X = \begin{pmatrix} 2w_1 & \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & 0 & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_X = \begin{pmatrix} w_2+w_3 & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & w_1+w_3 & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & w_1+w_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \det(L_X[1]) = (w_1+w_3)(w_1+w_2) = w_1^2 + w_1w_2 + w_1w_3 = \kappa_1(X)$$

# 頂点荷重グラフのガロア被覆（準備２）

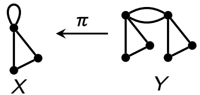
$Y, X$：頂点荷重グラフ　　$E_{Y,v} := \{ e \in E_Y : o(e) = v \}$

- **グラフの射 $f\colon Y \to X$**：3条件を満足する写像の組
  $f = (V_Y \xrightarrow{f_V} V_X, E_Y \xrightarrow{f_E} E_X)$ のこと；
  1. $\forall e \in E_Y,\ \ o(f_E(e)) = f_V(o(e)),\ \ t(f_E(e)) = f_V(t(e))$
  2. $\forall e \in E_Y,\ \ f_E(\overline{e}) = (f_E(e))^-$
  3. $\forall v \in V_Y,\ \ w_Y(v) = w_X(f_V(v))$
- **グラフの被覆 $Y/X$**：$\pi_V$ と $\pi_E$ が全射，かつ $E_{Y,v} \underset{\text{bij}}{\longrightarrow} E_{X,\pi(v)}$
  を満足する射 $\pi\colon Y \to X$ のこと；$Y/X := \pi$
- **$\pi$ 上の自己同型**：$\sigma_V$ と $\sigma_E$ が全単射，かつ $\pi \circ \sigma = \pi$

$$\left[\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}\right]$$

を満足する射 $\sigma\colon Y \to Y$のこと
$\mathrm{Aut}(Y/X) := \{\pi$ 上の自己同型$\}$

- **ガロア被覆**：$\forall v \in V_X,\ \ \mathrm{Aut}(Y/X) \curvearrowright \pi^{-1}(\{v\})$ が推移的な
  被覆 $\pi\colon Y \to X$ のこと $\mathrm{Gal}(Y/X) := \mathrm{Aut}(Y/X)$

例　

$\rightsquigarrow$　$\mathrm{Gal}(Y/X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

# $\mathbb{Z}_p$ 塔における分解公式（結果２）

$X$：頂点荷重グラフ　$K := \mathbb{Q}_p(w(V_X))$　$\mathcal{O}$：$K$の付値環

$\Lambda := \mathcal{O}[\![T]\!]$（岩澤代数）　$W(n) := \{\, \zeta \in \overline{\mathbb{Q}}_p : \zeta^{p^n} = 1 \,\}$

**定義 ($\mathbb{Z}_p$ 塔)**

ガロア被覆の列 $X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$

が $\mathbb{Z}_p$ 塔 $:\Longleftrightarrow$ $\forall n$，$\mathrm{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

**定理 (Wu-Feng-Sato '11（根無しの場合の原型），M.-Tateno '26+)**

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_p \text{ 塔 } X & \cdots \arrow[l] & X_n \arrow[l] \arrow[ll, bend right, "\pi_n"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

に対して，以下を満足する元

$F \in (\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} K) \setminus \{0\}$ を構成できる。

$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\forall v \in V_X$，$\forall w \in \pi_n^{-1}(\{v\})$，

$$\kappa_w(X_n) = \frac{\kappa_v(X)}{p^n} \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1), \qquad \left( \rightsquigarrow \kappa(X_n) = \kappa(X) \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1) \right)$$

が成立する。

**系 (被覆の根付き複雑度)**

$\kappa_w(X_n)$ は $\pi_n^{-1}(\{v\})$ 上で一定である。$\rightsquigarrow$ これを $\kappa_v(X_n)$ と置く。

# 岩澤型公式（結果３）

**定理 (根付き岩澤型公式，M.-Tateno '26+)**

頂点 $v \in V_X$ を一つ固定し，$\forall n$，$\kappa_v(X_n) \neq 0$ と仮定する。このとき

$$\exists! \mu_v, \lambda_v, \nu_v \in \mathbb{Q},\ \forall n \gg 0,\ \mathrm{ord}_p(\kappa_v(X_n)) = \mu_v p^n + \lambda_v n + \nu_v$$

が成立する。

**仮定について**

一般の分解公式 $\rightsquigarrow$「$m \leqq n \Longrightarrow \kappa_v(X_m)$ は $\kappa_v(X_n)$ の倍数である」

$\rightsquigarrow$「$\kappa_v(X_n) = 0 \Longrightarrow \kappa_v(X_m) = 0\ \forall m \geqq n$」

- 連結でないグラフが塔にある $\Longrightarrow$ $\kappa_v(X_n) = 0\ \forall n \gg 0$

根なし複雑度についても同様の公式を得られる。

**定理 (根なし岩澤型公式，M.-Tateno '26+)**

$\forall n$，$\kappa(X_n) \neq 0$ と仮定する。このとき

$$\exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Q},\ \forall n \gg 0,\ \mathrm{ord}_p(\kappa(X_n)) = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

が成立する。

# 岩澤型公式の略証

**根付き公式の略証**

1. 「$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0},\ \ \kappa_v(X_n) \neq 0$」と分解公式
   $\rightsquigarrow \forall \zeta \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} W(n),\ \ F(\zeta - 1) \neq 0 \cdots (\heartsuit)$
2. 岩澤理論の一般論と $(\heartsuit) \rightsquigarrow \exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Q}$ s.t.
$$\forall n \gg 0,\ \ \mathrm{ord}_p\left(\sum_{\zeta \in W(n)} F(\zeta - 1)\right) = \mu p^n + \lambda n + \nu \cdots (\clubsuit)$$
3. 分解公式と $(\clubsuit) \rightsquigarrow \forall n \gg 0,$
$$\mathrm{ord}_p(\kappa_v(X_n)) = \mathrm{ord}_p(\kappa_v(X)) - n + \sum_{\zeta \in W(n)} \mathrm{ord}_p(F(\zeta - 1))$$
$$\underset{(\clubsuit)}{=} \mu p^n + (\lambda - 1)n + (\nu + \mathrm{ord}_p(\kappa_v(X)))$$

略証終

## 根なしの場合について

三段階目の計算における $-n$ が無くなる
$\rightsquigarrow \lambda$ 不変量のズレ $-1$ が解消される。