



Iwasawa theory for vertex-weighted graphs

館野莊平氏との共同研究 arXiv:2025.12351

室岡 亮祐

所属：名古屋大学大学院多元数理科学研究科

2026年2月10日



荷重なしグラフの岩澤理論（導入）

頂点荷重グラフの定義（準備1）

頂点荷重グラフの行列木定理（結果1）

頂点荷重グラフのガロア被覆（準備2）

\mathbb{Z}_p 塔における分解公式（結果2）

岩澤型公式（結果3）

岩澤型公式の略証（時間次第）



解説する論文

- Murooka, R. and Tateno, S. (2025). Iwasawa theory for vertex-weighted graphs. *arXiv preprint arXiv:2025.1235v1 [math.CO]*.

スライド中で引用する論文

- Chung, F.R.K and Langlands, Robert R. (1996). A combinatorial Laplacian with Vertex Weights. In: *J. comb. theory, Ser. A*, 75(2), 316–327.
- Wu, H., Feng, R., and Sato, I. (2011). Vertex weighted complexities of graphcoverings. In: *Algebra Collq.*, 18(1), 129–138.



定義（基本の概念）

X : 連結有限グラフ $T: X$ の部分グラフ

1. T は連結グラフ。

- ▶ T が X の**全域木** \iff 2. (T の頂点集合) = (X の頂点集合)。
3. T は閉路を持たない。

▶ $ST_X := \{X \text{ の全域木}\}$, $\kappa(X) := \#ST_X \rightsquigarrow X$ の**複雑度**と呼ぶ。

- X が連結でない $\implies \kappa(X) = 0$

複雑度の例

$$X := \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \bullet \end{array} \rightsquigarrow ST_X = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}, \quad \kappa(X) = 3$$



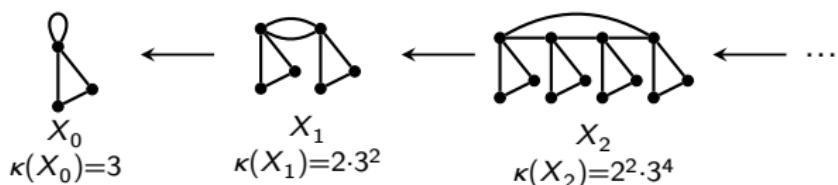
定義 (グラフの \mathbb{Z}_p 塔)

p : 素数 グラフのガロア被覆の列

$$X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$$

が \mathbb{Z}_p 塔 : $\iff \forall n, \text{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

例 ($p=2$ の場合の例)



定理 (Gonet'22, McGown-Vallières'24)

$$\exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Z}, \quad \underbrace{\text{ord}_p(\kappa(X_n))}_{\kappa(X_n) \text{ の } p \text{ ベキ部分}} = \mu p^n + \lambda n + \nu \quad \forall n \gg 0$$

上の例 $\text{ord}_2(\kappa(X_n)) = n \rightsquigarrow \mu = 0, \lambda = 1, \nu = 0$

導入終

頂点荷重グラフの定義（準備1）

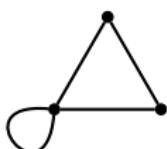


定義 (Serreによるグラフの定義)

(有限) グラフ：五つ組 $X = (V_X, E_X, o, t, (-)^-)$ のこと

- ▶ 有限集合 V_X ; 頂点 (Vertex) の集合
- ▶ 有限集合 E_X ; 辺 (Edge) の集合
- ▶ 対応 $o: E_X \rightarrow V_X, t: E_X \rightarrow V_X$;
辺の始点 (origin) と終点 (terminus) の指定
- ▶ $\forall e \in E_X, o(\bar{e}) = t(e), t(\bar{e}) = o(e), \bar{\bar{e}} = e$
となる対応 $(-)^-: E_X \rightarrow E_X$; 逆向きの辺の指定

互いに逆向きの関係にある辺を同一視 \rightsquigarrow 向き無しのグラフ；



扱いたいグラフ



グラフの実態

p : 素数 \mathbb{Q}_p : p 進数体 $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$: 代数閉包への埋込(固定)



定義

- ▶ **頂点荷重グラフ**: グラフ X と関数 $w: V_X \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ の対 (X, w) のこと \rightsquigarrow **以下単にグラフと呼ぶ。**
- ▶ X の**全域木**: $V_T = V_X$ かつ閉路を持たない X の部分グラフ T のこと $\text{ST}_X := \{X \text{ の全域木}\}$
- ▶ $v \in V_X, T \in \text{ST}_X, d_T: V_X \times V_X \rightarrow \mathbb{Z}$: T における頂点間の距離
 X の**根付き全域木**: 次で定まる有向部分グラフ T_v のこと

$$V_{T_v} = V_T, \quad E_{T_v} = \{e \in E_T : d_T(v, o(e)) < d_T(v, t(e))\}$$

$$\blacktriangleright w(T_v) := \prod_{e \in E_{T_v}} w_{t(e)}, \quad \kappa_v(X) := \sum_{T \in \text{ST}_X} w(T_v), \quad \kappa(X) := \sum_{v \in V_X} \kappa_v(X)$$

例 $X = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array}$ $\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{根が } 1 \text{ の} \\ \text{全域木} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \right\}$

$$\rightsquigarrow \kappa_1(X) = w_1^2 + w_1 w_3 + w_1 w_2$$

$$\cdots \rightsquigarrow \kappa(X) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1$$

頂点荷重グラフの行列木定理（結果 1）



定義 (頂点荷重グラフ X の情報を持つ行列)

$V_X := \{1, \dots, m\} \quad \forall i \in V_X, \text{ 平方根 } \sqrt{w_i} \in \bar{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。

▶ 次数行列 : $D_X(i, i) = \sum_{e \in E_X : o(e)=i} w_{t(e)}$ で定まる m 次対角行列 D_X

▶ 隣接行列 : $W_X(i, j) = \sum_{e \in E_X : o(e)=i, t(e)=j} \sqrt{w_i} \sqrt{w_j}$ で定まる m 次正方形行列 W_X

▶ ラプラス行列 : $L_X := D_X - W_X$ のこと

定理 (Chung-Langlands '96 ($\mathbb{R}_{>0}$ 荷重), M.-Tateno '26+)

$$\det(L_X[i]) = \kappa_i(X), \quad \left(\sum_{k \in V_X} w_k \right) \cdot \text{adj } L_X(i, j) = \sqrt{w_i} \sqrt{w_j} \kappa(X)$$

例 $X = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \bullet \end{array} \rightsquigarrow D_X = \begin{pmatrix} 2w_1 + w_2 + w_3 & & \\ & w_1 + w_3 & \\ & & w_1 + w_2 \end{pmatrix},$

$$W_X = \begin{pmatrix} 2w_1 & \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & 0 & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ \sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & \sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_X = \begin{pmatrix} w_2 + w_3 & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} & w_1 + w_3 & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} \\ -\sqrt{w_1}\sqrt{w_3} & -\sqrt{w_2}\sqrt{w_3} & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \det(L_X[1]) = (w_1 + w_3)(w_1 + w_2) = w_1^2 + w_1 w_2 + w_1 w_3 = \kappa_1(X)$$

頂点荷重グラフのガロア被覆（準備2）



Y, X : 頂点荷重グラフ $E_{Y,v} := \{e \in E_Y : o(e) = v\}$

▶ グラフの射 $f: Y \rightarrow X$: 3条件を満足する写像の組

$f = (V_Y \xrightarrow{f_V} V_X, E_Y \xrightarrow{f_E} E_X)$ のこと;

1. $\forall e \in E_Y, o(f_E(e)) = f_V(o(e)), t(f_E(e)) = f_V(t(e))$
2. $\forall e \in E_Y, f_E(\bar{e}) = (f_E(e))^+$
3. $\forall v \in V_Y, w_Y(v) = w_X(f_V(v))$

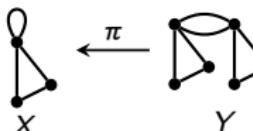
▶ グラフの被覆 Y/X : π_V と π_E が全射, かつ $E_{Y,v} \xrightarrow{\text{bij}} E_{X,\pi(v)}$ を満足する射 $\pi: Y \rightarrow X$ のこと; $Y/X := \pi$

▶ π 上の自己同型: σ_V と σ_E が全単射, かつ $\pi \circ \sigma = \pi$

$\left[\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & X & \end{array} \right]$ を満足する射 $\sigma: Y \rightarrow Y$ のこと
 $\text{Aut}(Y/X) := \{\pi \text{ 上の自己同型}\}$

▶ ガロア被覆: $\forall v \in V_X, \text{Aut}(Y/X) \cong \pi^{-1}(\{v\})$ が推移的な被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ のこと $\text{Gal}(Y/X) := \text{Aut}(Y/X)$

例



$$\rightsquigarrow \text{Gal}(Y/X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$



\mathbb{Z}_p 塔における分解公式 (結果 2)

X : 頂点荷重グラフ $K := \mathbb{Q}_p(w(V_X))$ \mathcal{O} : K の付値環

$\Lambda := \mathcal{O}[[T]]$ (岩澤代数) $W(n) := \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}_p : \zeta^{p^n} = 1\}$

定義 (\mathbb{Z}_p 塔)

ガロア被覆の列 $X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \cdots$

が \mathbb{Z}_p 塔 : $\iff \forall n, \text{Gal}(X_n/X) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

定理 (Wu-Feng-Sato '11 (根無しの場合の原型),

M.-Tateno '26+)

\mathbb{Z}_p 塔 $X \xleftarrow{\pi_n} \cdots \xleftarrow{\pi_n} X_n \leftarrow \cdots$ に対して, 以下を満足する元

$F \in (\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} K) \setminus \{0\}$ を構成できる。

$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall v \in V_X, \forall w \in \pi_n^{-1}(\{v\}),$

$$\kappa_w(X_n) = \frac{\kappa_v(X)}{p^n} \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1), \quad \left(\rightsquigarrow \kappa(X_n) = \kappa(X) \prod_{\zeta \in W(n) \setminus \{1\}} F(\zeta - 1) \right)$$

が成立する。

系 (被覆の根付き複雑度)

$\kappa_w(X_n)$ は $\pi_n^{-1}(\{v\})$ 上で一定である。 \rightsquigarrow これを $\kappa_v(X_n)$ と置く。



岩澤型公式（結果3）

定理（根付き岩澤型公式, M.-Tateno '26+）

頂点 $v \in V_X$ を一つ固定し, $\forall n, \kappa_v(X_n) \neq 0$ と仮定する。このとき

$$\exists! \mu_v, \lambda_v, \nu_v \in \mathbb{Q}, \forall n \gg 0, \text{ord}_p(\kappa_v(X_n)) = \mu_v p^n + \lambda_v n + \nu_v$$

が成立する。

仮定について

一般の分解公式 \rightsquigarrow 「 $m \leq n \Rightarrow \kappa_v(X_m)$ は $\kappa_v(X_n)$ の倍数である」

\rightsquigarrow 「 $\kappa_v(X_n) = 0 \Rightarrow \kappa_v(X_m) = 0 \ \forall m \geq n$ 」

● 連結でないグラフが塔にある $\Rightarrow \kappa_v(X_n) = 0 \ \forall n \gg 0$

根なし複雑度についても同様の公式を得られる。

定理（根なし岩澤型公式, M.-Tateno '26+）

$\forall n, \kappa(X_n) \neq 0$ と仮定する。このとき

$$\exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Q}, \forall n \gg 0, \text{ord}_p(\kappa(X_n)) = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

が成立する。



根付き公式の略証

① 「 $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \kappa_v(X_n) \neq 0$ 」と分解公式

$$\rightsquigarrow \forall \zeta \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} W(n), F(\zeta - 1) \neq 0 \cdots (\heartsuit)$$

② 岩澤理論の一般論と (\heartsuit) $\rightsquigarrow \exists! \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{Q}$ s.t.

$$\forall n \gg 0, \text{ord}_p \left(\sum_{\zeta \in W(n)} F(\zeta - 1) \right) = \mu p^n + \lambda n + \nu \cdots (\clubsuit)$$

③ 分解公式と (\clubsuit) $\rightsquigarrow \forall n \gg 0,$

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(\kappa_v(X_n)) &= \text{ord}_p(\kappa_v(X)) - \textcolor{red}{n} + \sum_{\zeta \in W(n)} \text{ord}_p(F(\zeta - 1)) \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{=} \mu p^n + (\lambda - 1)n + (\nu + \text{ord}_p(\kappa_v(X))) \end{aligned}$$

根なしの場合について

略証終

三段階目の計算における $-\textcolor{red}{n}$ が無くなる

$\rightsquigarrow \lambda$ 不变量のズレ -1 が解消される。