

ハーツホーン 2 章の演習問題

2025 年 12 月 4 日 21 時 12 分更新

本文書は、修士課程在学中に取り組んだ Algebraic Geometry (Hartshorne, 1977) の演習問題 TeX を復元することと、TeX 作成の基礎鍛錬を意図したものです。

目 次

4 節	1
演習 4.2	1
演習 4.4	4



4 節

演習 4.2 S を概型とし、 S 上の被約概型 X と S 上の分離的概型 Y を考える。このとき、二つの S 上の射 $f, g: X \rightarrow Y$ が、 X の稠密開集合 U 上で等しいとき、 $f = g$ であることを示せ。また次の二つの場合で、この結果が成立しない例を与えてよ。(a) X が被約でない。(b) Y が分離的でない。

証明 まず f と g が位相空間の連続写像として等しいことを示す。 f, g が S 上の射であるので、ファイバー積の普遍性から図式

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad g \quad} & & & \\ \swarrow \langle f, g \rangle & & & & \\ Y \times_S Y & \xrightarrow{\quad p_2 \quad} & Y & & \text{(} p_1 \text{ と } p_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。)} \\ f \downarrow & & \downarrow & & \\ Y & \longrightarrow & S & & \end{array}$$

の可換性を満足する射 $\langle f, g \rangle: X \rightarrow Y \times_S Y$ が一意的に存在する。 f と g が U 上で等しいことは、包含 $\iota: U \hookrightarrow X$ に対して $f \circ \iota = g \circ \iota$ が成立することを意味し、 $\Delta: Y \rightarrow Y \times_S Y$

を対角射とするとき、二つの図式

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Left Diagram:} & \text{Right Diagram:} \\
 \begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\quad g \circ \iota \quad} & Y \times_S Y \xrightarrow{\quad p_2 \quad} Y \\
 \swarrow \langle f, g \rangle \circ \iota \quad \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 f \circ \iota \quad Y & \xrightarrow{\quad p_1 \quad} & S
 \end{array} & \quad &
 \begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\quad g \circ \iota \quad} & Y \times_S Y \xrightarrow{\quad p_2 \quad} Y \\
 \swarrow \Delta \circ f \circ \iota \quad \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 f \circ \iota \quad Y & \xrightarrow{\quad p_1 \quad} & S
 \end{array}
 \end{array}$$

がどちらも可換であるから、ファイバー積の普遍性より

$$(4.2) \quad \langle f, g \rangle \circ \iota = \Delta \circ f \circ \iota = \Delta \circ g \circ \iota$$

が成立する。よって集合として、

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle(X) &= \langle f, g \rangle(U^-) && (\because U \text{ が稠密部分集合なので。}) \\
 &= (\Delta \circ f)(U^-) && (\because (4.2) \text{ より。}) \\
 &\subset (\Delta \circ f)(U)^- && (\because \Delta \circ f \text{ の連続性より。}) \\
 &= \Delta(f(U))^- \\
 &\subset \Delta(Y) && (\because Y \text{ が分離的で, } \Delta(Y) \text{ が閉集合であるので。})
 \end{aligned}$$

となる。勝手な点 $P \in X$ に対し、

$$\begin{aligned}
 f(P) &= (p_1 \circ \langle f, g \rangle)(P) && (\because (4.1) \text{ の可換性より。}) \\
 &= p_1(\langle f, g \rangle(P)) \\
 &= p_2(\langle f, g \rangle(P)) && (\because \langle f, g \rangle(P) \in \Delta(Y) \text{ なので。}) \\
 &= g(P)
 \end{aligned}$$

と計算でき、 f と g が位相空間の連続写像として等しいことがわかった。特に $f_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$ である。

次に構造層の射 $f^\#, g^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ が等しいことを示す。 X の点 P を勝手に固定し、 $f(P)$ のアフィン開近傍 W を取って、 $f^{-1}(W)$ を V と置き、制限によって得られる連続写像を $f' = g' : V \rightarrow W$ と置く。制限 $f^\#|_W, g^\#|_W : \mathcal{O}_W \rightarrow f'_*\mathcal{O}_V$ が等しいことを示す。 W がアフィン概型であるので、演習 2.4 から大域切断の環準同型 $\Gamma(W, f^\#), \Gamma(W, g^\#) : \Gamma(W, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ で $f^\#|_W$ と $g^\#|_W$ が決定されるので、 $\Gamma(W, f^\#) = \Gamma(W, g^\#)$ の成立を示せばよい。元 $a \in \Gamma(W, \mathcal{O}_Y)$ を勝手に取り、 $f^\#(a) - g^\#(a)$ を b と置き、 $b = 0$ となることを見る。 U が X の稠密部分集合なので、 $U \cap V \neq \emptyset$ であ

り, $f|_U = g|_U$ であるので, 勝手な点 $Q \in U \cap V$ に対して $f_Q^\# = g_Q^\#$ が成立し,

$$b_Q = f_Q^\#(a_{f(Q)}) - g_Q^\#(a_{f(Q)}) = 0$$

であることがわかる。部分集合 $V_b = \{Q \in V : b_Q \notin \mathfrak{m}_Q\}$ は演習 2.16 (a) より開集合で, 上の計算より $V_b \cap (U \cap V) = \emptyset$ であるのに対し, $U \cap V$ が V の稠密部分集合であるから, $V_b = \emptyset$ である。したがって演習 2.18 (a) と演習 2.16 (a) より, V の勝手なアフィン開集合 Z において制限 $b|_Z$ が冪零元で, X が被約であるから $b|_Z = 0$ であり, $b = 0$ がわかった。ゆえに $f^\#|_W = g^\#|_W$ である。もしあフィン開近傍 $W \subset Y$ が $f(X) \cap W = \emptyset$ を満足するならば, $f^\#|_W$ と $g^\#|_W$ が零環の層への射となるから等しい。以上から, Y のアフィン開被覆上で $f^\#$ と $g^\#$ が等しく, $f^\# = g^\#$ であることが示された。 証明終

(a) の例 k を代数閉体, $S = \text{Spec } k$ として, $\text{Spec } k$ 上の概型 $\text{Spec } k[x, y]/(x^2, xy)$ を X と Y とすると, アフィン概型なので $\text{Spec } k$ 上分離的, かつ X 上で $x \neq 0$, $x^2 = 0$ なので被約でない。また $k[x, y]$ のイデアルとして $\sqrt{(x^2, xy)} = (x)$ であるから, ヒルベルト零点定理より

$$\text{sp}(X) = \text{sp}(Y) = \{(x, y - b) : b \in k\} \cup \{(x)\}$$

である。 k 代数の準同型 $\phi: k[x, y]/(x^2, xy) \rightarrow k[x, y]/(x^2, xy)$ を, $x \mapsto 0$ と $y \mapsto y$ で定まるものとして定め, ϕ が定めるアフィン概型の射を f , 恒等射を g とすると, 位相空間の連続写像として $f = g$ である。なんとなれば,

閉点について $y - b \in \phi^{-1}((x, y - b))$ なので $\phi^{-1}((x, y - b)) = (x, y - b)$ である。

生成点について 勝手な元 $b \in k$ に対して $y - b \notin \phi^{-1}((x))$ なので, $\phi^{-1}((x)) = (x)$ である。となるからである。開集合 $U = X \setminus \{(x, y)\}$ を考える。元 $\frac{F(x, y)}{G(x, y)} \in (k[x, y]/(x^2, xy))_{\mathfrak{p}}$ を勝手に取ると, $yF(x, y)$ と $yG(x, y)$ は y のみで表せ, ϕ は y を y に写すので,

$$\phi_{\mathfrak{p}}\left(\frac{F(x, y)}{G(x, y)}\right) = \phi_{\mathfrak{p}}\left(\frac{yF(x, y)}{yG(x, y)}\right) = \frac{\phi(yF(x, y))}{\phi(yG(x, y))} = \frac{yF(x, y)}{yG(x, y)} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

となり, $\phi_{\mathfrak{p}}$ が恒等写像であることがわかる。ゆえに $f^\#|_U: \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{O}_X|_U$ と $g^\#|_U: \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{O}_X|_U$ が等しく, 概型の射として $f|_U = g|_U$ である。他方, 閉点 $\mathfrak{m} = (x, y)$ に対して

$$\phi_{\mathfrak{m}}\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{0}{1} \neq \frac{x}{1}$$

であるから $f_{\mathfrak{m}} \neq g_{\mathfrak{m}}$ がわかり, 概型の射として $f \neq g$ である。 証明終

(b) の例 k を体として, X を $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$, Y を二重原点を持つアイフィン直線とする。このとき, 貼り合わせによって付随する相異なる射 $f, g: X \rightarrow Y$ があって, $U = X \setminus \{(x)\}$ とするとき $f|_U = g|_U$ である。 証明終

演習 4.4 ネーター概型 S 上の有限型分離的概型 X, Y と、その間の射 $f: X \rightarrow Y$ を考える。このとき、 S 上固有な閉部分概型 Z に対し、 $f(Z)$ が Y の閉集合で、 $f(Z)$ を f の概型論的像と考えるとき、 $f(Z)$ が S 上固有であることを示せ。

補題 (グラフ射は対角射の底変換) 概型 S 上の射 $f: X \rightarrow Y$ と恒等射 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ に対し、図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & & & \\
 \downarrow \Gamma_f & \nearrow & & & \\
 X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y & & (p_1 \text{ と } p_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。}) \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow & & \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & S & &
 \end{array}$$

の可換性を満足する射 $\Gamma_f: X \rightarrow X \times_S Y$ が一意的に存在し、**グラフ射**と呼ぶ。同様に、図式

$$\begin{array}{ccccc}
 Y \times_S Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & & & \\
 \downarrow f \times \text{id}_Y & \nearrow & & & \\
 X \times_S Y & \xrightarrow{q_2} & Y & & (q_1 \text{ と } q_2 \text{ はファイバー積の射影を表す。}) \\
 \downarrow q_1 & & \downarrow & & \\
 Y & \xrightarrow{f} & S & &
 \end{array}$$

の可換性を満足する射 $\text{id}_Y \times f$ が一意的に存在する。このとき Γ_f は、 $f \times \text{id}_Y$ による対角射 $\Delta: Y \rightarrow Y \times_S Y$ の底変換である。

