数学的戲言

ここに，私が気付いた数学的な内容で，本来なら学部生の段階で習得すべきだったものを記録する。書いていて恥ずべきような内容であるから，このような見つかりづらい場所に配置することにした。

目　次

体上有限型概型の閉点の行く末

次の形のヒルベルト零点定理を用いること考える。

定理 1 (ヒルベルトの零点定理，[AM69, Cor. 5.24])　k を体とし，有限生成 k 代数 A を考える。このとき A が体であるならば，A/k は有限拡大である。

この定理を用いて k 上局所有限型概型の閉点が k 上概型の間の射によって閉点に移ることを示そう。

命題 2　k を体とする。k 代数の射 $\varphi\colon B \to A$ を考え，A が k 代数として有限生成であるとする。このとき，A の勝手な極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し，$\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ は B の極大イデアルである。

証明　定理 1 より合成写像 $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ が体の有限拡大であることがわかる。φ は単射な環準同型 $\bar{\varphi}\colon B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ を誘導し，また φ が k 代数の間の射であることから，可換図式

$$\begin{tikzcd}
B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \arrow[r, hook, "\bar{\varphi}"] & A/\mathfrak{m} \\
k \arrow[u] \arrow[r, equal] & k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

が得られる。体拡大 $(A/\mathfrak{m})/k$ が代数拡大であるから，$B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ の元はすべて k 上代数的である。よって $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ の非零元 a に対し，$a^{-1} \in k[a] \subset B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ であり，$A/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ が体であることがわかる。ゆえに $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ は極大イデアルである。　証明終

命題 3　k を体とし，二つの k 概型 X と Y を考え，さらに X が k 上局所有限型であるとする。このとき k 上概型の射 $\varphi\colon X \to Y$ により X の閉点は Y の閉点に移る。

証明　x を X の閉点とし，$f(x)$ を含む Y の開アフィン部分概型 V を取り，$\Gamma(V, \mathscr{O}_Y)$ を B と置く。また X が k 局所有限型であるから，x を含み，かつ切断が有限生成 k 代数であるような開アフィン部分概型 U が存在する。$\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ を A と置く。f が k アフィン概型の射 $f|_U\colon U \to V$ を引き起こすので，この $f|_U$ に対応する k 代数の射を $\varphi\colon B \to A$ とする。このとき x に対応する $\operatorname{Spec} A$ の閉点を $\mathfrak{m}$ とするとき，$f(x)$ に対応する $\operatorname{Spec} B$ の点は $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ で与えられ，命題 2 により $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ は $\operatorname{Spec} B$ の閉点であることが従う。ゆえに $f(x)$ は V の閉点である。$f(x)$ を含む開アフィン部分概型 V は勝手に選ぶことができるので，$f(x)$ が Y の閉点であることが示された。　証明終

例 4　k を体，$k[X]$ を k 係数一変数多項式環，その商体を $k(X)$ とする。このとき $k(X)$ は k 代数として有限生成でない。なぜなら有限生成だったとすると，定理 1 より

$k(X)/k$ が有限拡大となるので矛盾である。このとき，包含 $k[X] \to k(X)$ が誘導する射 $\operatorname{Spec} k(t) \to \operatorname{Spec} k[X]$ によって $\operatorname{Spec} k(X)$ の閉点は $\operatorname{Spec} k[X]$ の生成点に移る。

少し話題を変えて，古典的な代数幾何学における多項式写像をスペクトルの射として観察してみる。k を体とする。有限生成 k 代数 A と B に対し，k 代数の同型 $k[X_1, \dots, X_n]/I \xrightarrow{\sim} A$ と $k[Y_1, \dots, Y_m]/J \xrightarrow{\sim} B$ を固定し，各 X_i の A における像を x_i で表し，同様に各 y_i の B における像を y_i で表すことにする。また k の元 a の A や B における像も a で表すことにする。k の元 $a_1, \dots, a_n$ によって $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ のように表すことができる極大イデアル $\mathfrak{m}$ を考えると，$k \to A/\mathfrak{m}$ が同型である。A の元 f の $A/\mathfrak{m}$ における像を $f(a_1, \dots, a_n)$ で表すことにする。

命題 5　k 代数の射 $\varphi\colon B \to A$ による $\mathfrak{m}$ の引き戻し $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ は，極大イデアル $(y_i - \varphi(y_i)(a_1, \dots, a_n) \mid i \in \{1, \dots, m\})$ と等しい。

証明　各 i に対し，$(\varphi(y_i) - f(y_i)(a_1, \dots, a_n))(a_1, \dots, a_n) = 0$ であるから，$\varphi(y_i) - f(y_i)(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{m}$ である。ゆえに $(y_i - \varphi(y_i)(a_1, \dots, a_n) \mid i \in \{1, \dots, m\}) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ である。$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \neq B$ であるので，$(y_i - \varphi(y_i)(a_1, \dots, a_n) \mid i \in \{1, \dots, m\})$ が極大であることから題意が従う。　証明終

k^n の点 $(a_1, \dots, a_n)$ に対し，$(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ が極大イデアルであることと，$I \subset (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ であることが同値であるので，後者は I の勝手な多項式 F に対し $F(a_1, \dots, a_n) = 0$ が成立することが同値である。ゆえに $V(I)$ は $\operatorname{Specm} A$ に埋め込まれる。命題 5 から，k 代数の射 $\varphi\colon B \to A$ は $V(I)$ から $V(J)$ への写像 $\varphi'\colon (a_1, \dots, a_n) \mapsto (\varphi(y_1)(a_1, \dots, a_n), \dots, \varphi(y_n)(a_1, \dots, a_n))$ を引き起こす。φ' はもちろん同型 $k[X_1, \dots, X_n]/I \xrightarrow{\sim} A$ と $k[Y_1, \dots, Y_n]/I \xrightarrow{\sim} B$ の取り方に依存するが，φ が定める k 概型の射 $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ および閉点の間の写像 $\operatorname{Specm} B \to \operatorname{Specm} A$ は φ のみから定まる。

参考文献

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. **Introduction to commutative algebra**. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, pp. ix+128.

クルルの高度定理の「逆」

クルルの高度定理と呼ばれる有名な定理がある。

定理 6 　R をネーター環とし，r 個の R の元 $a_1, \dots, a_r$ で生成されるイデアルを $(a_1, \dots, a_r)$ とする。このとき $(a_1, \dots, a_r)$ に属す極小素イデアルの高さは r 以下である。

この定理の「逆」と考えられるような主張も成立する。

定理 7 　R をネーター環とし，その素イデアル $\mathfrak{p}$ を一つ取る。定理 6 から $\mathfrak{p}$ の高さは有限である。$\mathfrak{p}$ の高さを r と置く。このとき $\mathfrak{p}$ が $(a_1, \dots, a_r)$ に属す極小素イデアルであるような r 個の元 $a_1, \dots, a_r$ が存在する。

証明 　r に関する帰納法で示す。$r = 0$ のとき $\mathfrak{p}$ は零イデアルに属す極小素イデアルであるから主張が成り立つ。$r > 0$ のときを考える。R がネーターであるから，$\mathfrak{p} = (p_1, \dots, p_m)$ と表せる。$\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R : \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}\}$ を S と置くとき，勝手な S の元 $\mathfrak{q}$ に対して $p_i \notin \mathfrak{q}$ となる番号 i がある。なんとなれば，このような番号が無かったとし，$p_i \in \mathfrak{q}_i \in S$ なる $\mathfrak{q}_i$ を各番号で取ると，$\mathfrak{p} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i$ となるので，素イデアル回避よりある番号について $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_i$ で，$\mathfrak{q}_i \subsetneq \mathfrak{p}$ であることに反する。この条件を満足する番号 i を取り p_i を a_r と置く。S の中から高さ $r-1$ の素イデアル $\mathfrak{q}$ を取ると，帰納法の仮定から $\mathfrak{q}$ が $(a_1, \dots, a_{r-1})$ に属す極小素イデアルであるような $r-1$ 個の元 $a_1, \dots, a_{r-1}$ を取れる。すると $\mathfrak{p}$ に狭義に包含される素イデアルに a_r が属さないので，$\mathfrak{p}$ は $(a_1, \dots, a_r)$ に属す極小素イデアルである。 証明終