組合せ論的ホッジ理論　雑記帳

2025年4月18日18時31分更新

[AHK18] を読むにあたって証明のギャップを埋めることを目的とした命題などをここに記す。

目　次

1 バーグマン扇など（[AHK18] の 2 節から 3 節に対応）

注意 1.1 [AHK18] では，非空な有限集合 E を基底とする自由アーベル群 $\mathbb{Z}^E$ の基底を $\mathbf{e}_i$, $i \in E$ と約束しているが，記号の濫用で $\mathbf{N}_E = \mathbb{Z}^E/\langle \mathbf{e}_E \rangle$ における $\mathbf{e}_i$ の像も $\mathbf{e}_i$ と表していることに注意する。

命題 1.2 ([AHK18] の 2 節を通して基本的な命題) E を非空な有限集合とし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathscr{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1}$ と $\sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ に対し，$\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ となるのは $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ となるとき即ち $(I_1 < \mathscr{F}_1) \prec (I_2 < \mathscr{F}_2)$ となるときかつそのときに限る。

証明 $I_1 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ のときに $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ となることは定義から従う。

逆に $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \subset \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ が成立するときを考える。$I_1 \not\subset I_2$ であったとすると元 $i \in I_1 \setminus I_2$ が少なくとも一つ存在し $\mathbf{e}_i \in \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ である。これは $\{i\} \in \mathscr{F}_2$ であることを意味し $I_2 = \varnothing$ である。この議論と $\mathscr{F}_2$ が全順序部分集合であることから $I_1 \setminus I_2 = I_1$ は一元集合でなければならない。つまり $I_1 = \{i\}$ であるがこれは $I_1 \notin \mathscr{P}$ であることに矛盾し $I_1 \subset I_2$ であることが従う。次に $\mathscr{F}_1 \not\subset \mathscr{F}_2$ であったと仮定し $F \in \mathscr{F}_1 \setminus \mathscr{F}_2$ を一つ取る。$\mathbf{e}_F \in \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ であるから $F \subset I_2$ となるが $\mathscr{P}$ が順序フィルターであることから $I_2 \in \mathscr{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ である。 ∎

注意 1.3 同様の証明によりループを持たないマトロイド M とそのバーグマン扇 $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ に対しても同様の主張が成立する。

1.1 [AHK18, Prop. 2.4] に関する命題

命題 1.4 ([AHK18, Prop. 2.4] の証明の補題) E を非空な有限集合とする。$\mathscr{P}_+$ と $\mathscr{P}_-$ が $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathscr{P}_+ = \mathscr{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとする。このとき Z と適合

する $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}_-$ に対し

$$\bigcup_{I\colon I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I<\{Z\}\cup\mathscr{F}} = \sigma_{Z<\mathscr{F}}$$

が成立する。

証明 包含 $\bigcup_{I\colon I \text{ は } Z \text{ の真部分集合}} \sigma_{I<\{Z\}\cup\mathscr{F}} \subset \sigma_{Z<\mathscr{F}}$ が成立ことは定義から直ちに従うので逆の包含を示す。

$\sigma_{Z<\mathscr{F}}$ の元 $\mathbf{v}$ を取ると

$$\mathbf{v} = \sum_{i\in Z} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{F\in\mathscr{F}} \mu_F \mathbf{e}_F \quad (\lambda_i \text{ と } \mu_F \text{ は非負実数である}) \tag{1.1}$$

と表すことができる。勝手な $i \in Z$ に対し不等式 $\lambda_{i_0} \le \lambda_i$ を満たす $i_0 \in Z$ を一つ取ると (1.1) は

$$\mathbf{v} = \sum_{i\in Z} (\lambda_i - \lambda_{i_0})\mathbf{e}_i + \lambda_{i_0}\mathbf{e}_Z + \sum_{F\in\mathscr{F}} \mu_F \mathbf{e}_F$$

ここで $I = \{i \in Z \mid \lambda_i - \lambda_{i_0} = 0\}$ と置けば (1.1) より I は Z の真部分集合かつ $\mathbf{v} \in \sigma_{I<\{Z\}\cup\mathscr{F}}$ である。 ∎

命題 1.5 E を非空な有限集合とし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターとする。このとき $\Sigma_{\mathscr{P}}$ に属する二つの錐 $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1}$ と $\sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ に対し，$\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2} = \sigma_{(I_1\cap I_2)<(\mathscr{F}_1\cap\mathscr{F}_2)}$ が成立する。

証明 定義から直ちに $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2} \supset \sigma_{(I_1\cap I_2)<(\mathscr{F}_1\cap\mathscr{F}_2)}$ であることは従うので逆の包含が成立することを示す。

[AHK18, Prop. 2.4] より $\Sigma_{\mathscr{P}}$ は特に扇であるので $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2}$ は $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1}$ の面である。ゆえに $\sigma_{I_1<\mathscr{F}_1} \cap \sigma_{I_2<\mathscr{F}_2} = \sigma_{I_3<\mathscr{F}_3}$ かつ $I_3 \subset I_1$ かつ $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_1$ を満たす I_3 と $\mathscr{F}_3$ が存在する。さらに命題 1.2 より $I_3 \subset I_2$ かつ $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_2$ となるので $I_3 \subset I_1 \cap I_2$ かつ $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ となり逆の包含が成立することが従う。 ∎

命題 1.6 ([AHK18, Prop. 2.4] の注意のために) E を非空な有限集合とする。$\mathscr{P}_+$ と $\mathscr{P}_-$ が $\mathscr{P}(E)$ の順序フィルターで $\mathscr{P}_+ = \mathscr{P}_- \cup \{Z\}$ という形をしているとし，さらに $\#Z = 1$ であるとする。このとき $\Sigma_{\mathscr{P}_+} = \Sigma_{\mathscr{P}_-}$ が成立する。

証明 [AHK18, Prop. 2.4] の証明より $\Sigma_{\mathscr{P}_+}$ は $\Sigma_{\mathscr{P}_-}$ の射線 $\sigma_{\varnothing<\{Z\}}$ に関する星状細分であるが，$Z = \{i\}$ と書けるため $\sigma_{\varnothing<\{Z\}} = \sigma_{\{i\}<\varnothing}$ であり，右辺は $\Sigma_{\mathscr{P}_-}$ の錐である。 ∎

命題 1.7 ([AHK18, Prop 2.4] と [AHK18, Prop 3.3] のために) 扇 Σ とその部分集合 Δ を考える。任意の Δ の錐 δ に対し δ の面すべてが Δ に属すると仮定する。このとき Δ は扇である。

証明 勝手な二つの錐 $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ に対し $\delta_1 \cap \delta_2$ が共通の面であることを示せば良いが，それは $\Delta \subset \Sigma$ であることと Σ が扇であることから従う。 ∎

1.2 [AHK18, Prop. 3.3] に関する命題

命題 1.8 ([AHK18, Prop. 3.3] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき $\sigma_{I<\mathscr{F}} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ に対してその面もすべて $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ に属す。

証明 一般論から $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ の面は I の部分集合 I' と $\mathscr{F}$ の部分集合 $\mathscr{F}'$ を用いて $\sigma_{I'<\mathscr{F}'}$ と表すことができる。すると $\mathrm{cl}_M(I') \notin \mathscr{P}$ である。そうでなかったとすると $I' \subset I$ であることと $\mathscr{P}$ が順序フィルターであることから $\mathrm{cl}_M(I) \in \mathscr{P}$ となり矛盾が生じる。ゆえに $\sigma_{I'<\mathscr{F}'} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ であり題意は示された。 ∎

注意 1.9 この証明手法によって $\tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}$ に対しても同様の主張が成立することが従う。

1.3 [AHK18, Prop. 3.5] に関する命題

命題 1.10 (マトロイドの制限と縮約が誘導する順序フィルターについて) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとしそのフラット F と $\mathscr{P}(F)$ の順序フィルター $\mathscr{P}$ をそれぞれ固定する。このとき $\mathscr{P}^F$ と $\mathscr{P}_F$ はそれぞれ $\mathscr{P}(M^F)$ と $\mathscr{P}(M_F)$ の順序フィルターである。

注意 1.11 M の F への**制限** M^F とは，フラットの族 $\mathscr{P}(M^F)$ が $\{G \cap F \mid G \in \mathscr{P}(M)\}$ で与えられる F 上のマトロイドのことである。M の F への**縮約** M_F とは，フラットの族 $\mathscr{P}(M_F)$ が $\{G \setminus F \mid G \in \mathscr{P}(M), F \subset G\}$ で与えられる $E \setminus F$ 上のマトロイドのことである。

命題 1.10 の証明 証明法が同様なので $\mathscr{P}_F$ が $\mathscr{P}(M_F)$ の順序フィルターであることのみを示す。$\mathscr{P}_F$ の元 G と G を含む $\mathscr{P}(M_F)$ の元 H を取ると，$G \cup F \in \mathscr{P}$ かつ $G \cup F \subset H \cup F \in \mathscr{P}(M)$ が成立するので $\mathscr{P}$ が順序フィルターであることから，$H \cup F \in \mathscr{P}$ であり $H \in \mathscr{P}^F$ が従う。ゆえに $\mathscr{P}^F$ は順序フィルターである。 ∎

命題 1.12 M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし元 $F \in \mathscr{P}(M)$ を一つ取る。$\mathscr{P}(M)$ の順序フィルター $\mathscr{P}$ に F が属するならば $\mathscr{P}_F = (M_F)$ が成立する。

証明 元 $G \in \mathscr{P}_F$ は M_F のフラットであることから $G \cup F$ は M のフラットである。$F \in \mathscr{P}$ であることと $F \subset G \cup F$ であることから $G \cup F$ も $\mathscr{P}$ に属す。ゆえに $G = (G \cup F) \setminus F \in \mathscr{P}_F$ であり大意は示された。 ∎

命題 1.13 ([AHK18, Prop. 3.5 (1)] の準備) E を非空な有限集合とし F を E の部分集合とする。このとき次の二つが成立する。

(1) 全射群準同型

$$\phi\colon\ \mathbb{Z}^E \to \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E\setminus F},\ \sum_{i\in E}\lambda_i\mathbf{e}_i \mapsto \left(\sum_{j\in F}\lambda_j\mathbf{e}_j,\ \sum_{k\in E\setminus F}\lambda_k\mathbf{e}_j\right)$$

に対し $\langle\mathbf{e}_E\rangle\ \subset\ \ker\phi$ が成立する。ϕ が誘導する $\mathbf{N}_E$ 上の群準同型も ϕ と書くことにする。

(2) $\mathbf{N}_E$ 上の群準同型 ϕ に対し $\ker\phi = \langle\mathbf{e}_F\rangle$ が成立する。つまり $\mathbf{N}_E/\langle\mathbf{e}_F\rangle \underset{\phi}{\cong} \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E\setminus F}$ である。

証明 (1) と (2) における $\langle\mathbf{e}_F\rangle\ \subset\ \ker\phi$ は定義から直ちに示すことができる。逆に $\ker\phi$ の元 $\mathbf{v} = \sum_{i\in E}\lambda_i\mathbf{e}_i$ を取ると $\mathbb{Z}^E$ の元として $\sum_{j\in F}\lambda_j\mathbf{e}_j \in \langle\mathbf{e}_F\rangle$ かつ $\sum_{k\in E\setminus F}\lambda_k\mathbf{e}_k \in \langle\mathbf{e}_{E\setminus E}\rangle$ である。ゆえに $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{e}_F + \mu\mathbf{e}_{E\setminus F}$（$\lambda$ と μ は整数）と表すことができるが，第二項目は $-\mu\mathbf{e}_F$ と等しく $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{e}_F\rangle$ である。ゆえに $\ker\phi\langle\mathbf{e}_F\rangle$ である。 ∎

命題 1.14 ([AHK18, Prop. 3.5 (2)] の準備) E を非空な有限集合としその元 i を一つ固定する。このとき次の二つが成立する。

(1) 全射群準同型

$$\phi\colon\ \mathbb{Z}^E \to \mathbf{N}_{E\setminus\{i\}},\ \sum_{j\in E}\lambda_j\mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j\in E\setminus\{i\}}\lambda_j\mathbf{e}_j$$

に対し $\langle\mathbf{e}_E\rangle\ \subset\ \ker\psi$ が成立する。ψ が誘導する $\mathbf{N}_E$ 上の群準同型も ψ と書くことにする。

(2) $\mathbf{N}_E$ 上の群準同型 ψ に対し $\ker\psi = \langle\mathbf{e}_i\rangle$ が成立する。つまり $\mathbf{N}_E/\langle\mathbf{e}_i\rangle \underset{\psi}{\cong} \mathbf{N}_{E\setminus\{i\}}$ である。

証明 (1) と (2) における $\langle\mathbf{e}_i\rangle\ \subset\ \ker\psi$ は定義から直ちに示すことができる。逆に $\ker\psi$ の元 $\mathbf{v} = \sum_{j\in E}\lambda_j\mathbf{e}_j$ を取るとすべての $j,\ k\in E\setminus\{i\}$ 関して $\lambda_j = \lambda_k$ が成り立つのでこの値を λ と置く。すると $\mathbf{N}_E$ の元として $\mathbf{v} = (\lambda_i - \lambda)\mathbf{e}_i$ が成立するので $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{e}_i\rangle$ が従う。ゆえに $\ker\psi\subset\langle\mathbf{e}_i\rangle$ である。 ∎

命題 1.15 ([AHK18, Prop. 3.5]) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき次の二つが成立する。

(1) F を $\mathscr{P}$ に属す M のフラットとすると命題 1.13 の群同型 ϕ は全単射な写像

$$\phi\colon\ \mathrm{star}\big(\mathbf{e}_F,\Sigma_{M,\mathscr{P}}\big)\to\Sigma_{M^F,\mathscr{P}^F}\times\Sigma_{M_F},\quad \bar{\sigma}_{I<\mathscr{F}}\mapsto\phi\big(\bar{\sigma}_{I<\mathscr{F}}\big) \tag{1.2}$$

を誘導する。

(2) 一元集合 $\{i\}$ が E の真部分集合かつ M のフラットであるとき命題 1.14 の群同型 ψ は全単射な写像

$$\psi\colon\ \mathrm{star}\big(\mathbf{e}_i, \Sigma_{M,\mathscr{P}}\big) \to \Sigma_{M_{\{i\}},\mathscr{P}_{\{i\}}}, \quad \bar{\sigma}_{I<\mathscr{F}} \mapsto \psi\big(\bar{\sigma}_{I<\mathscr{F}}\big) \tag{1.3}$$

を誘導する。

(1) の証明 $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_F\}) = \sigma_{\varnothing<_M\{F\}}$ と表すことができるので，注意 1.3 より $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ の錐 $\sigma_{I<_M\mathscr{F}}$ が $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_F\})$ を含むのは $F \in \mathscr{F}$ のときかつそのときに限る。F が属す $\mathscr{P}$ の旗 $\mathscr{F}$ を $\{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k\}$ とし $F_l = F$ と書くことにする。このとき $\mathscr{G} = \{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1}\}$ と置くとこれは $\mathscr{P}^F$ の旗であり $\mathscr{H} = \{F_{l+1} \setminus F_l \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus F_l\}$ と置くとこれは $\mathscr{P}_F$ の旗である。さらに $\min(G) = \min(\mathscr{F})$ であるから $I < \mathscr{G}$ である。すると $i \in I$ に対し $\phi(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{0})$ かつ

$$\phi(\mathbf{e}_{F_j}) = \begin{cases} (\mathbf{e}_{F_j}, \mathbf{0}), & j \le l \text{ のとき}, \\ (\mathbf{0}, \mathbf{e}_{F_j\setminus F_l}), & j \ge l \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立するので，$\phi(\sigma_{I<\mathscr{F}}) = \sigma_{I<\mathscr{G}} \times \sigma_{\varnothing<\mathscr{H}}$ である。ゆえに (1.2) の写像は well-defined である。注意 1.3 と構成から単射性は明らかであるから全射性について述べる。$\Sigma_{M^F,\mathscr{P}^F} \times \Sigma_{M_F}$ の元 $(\sigma_{I<\mathscr{G}}, \sigma_{\varnothing<\mathscr{H}})$ を取る。$\mathscr{G}$ を $\{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1}\}$ と表すとすべての i に関し $F_i \subsetneq F$ である。$\mathscr{H}$ を $\{F_{k+1} \setminus F \subsetneq \cdots \subsetneq F_l \setminus F\}$, $F_i \supsetneq F$ $(i \in \{k+1, \dots, l\})$ と表し，$\mathscr{P}(M)$ の旗

$$\mathscr{F} = \{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F \subsetneq F_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq F_l\}$$

を考えると $F \in \mathscr{F}$ かつ $I < \mathscr{F}$ なので $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ は $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_F\})$ を含む錐であり，$\phi(\sigma_{I<\mathscr{F}}) = \sigma_{I<\mathscr{G}} \times \sigma_{\varnothing<\mathscr{H}}$ である。これは (1.2) の全射性を意味する。 ∎

(2) の証明 $\{i\}$ が $\mathscr{P}$ に属すかそうでないかで場合分けが生じる。

$\{i\} \in \mathscr{P}$ のとき。まず命題 1.12 より $\mathscr{P}_{\{i\}} = \mathscr{P}\big(M_{\{i\}}\big)$ であることに注意する。$\{i\} \in \mathscr{P}$ であるから $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ の錐として $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_i\}) = \sigma_{\varnothing<\{i\}}$ と書くことができる。命題 1.2 より $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ の錐 $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ が $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_i\})$ を含むのは $\{i\} \in \mathscr{F}$ のときかつそのときに限る。またこのとき $\#I < \min\mathscr{F}$ なので $I = \varnothing$ である。$\{i\}$ を含む $\mathscr{P}$ の旗 $\mathscr{F}$ を $\{\{i\} \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ と書くとき $\mathscr{G} = \{F_1 \setminus \{i\} \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus \{i\}\}$ は $\mathscr{P}\big(M_{\{i\}}\big)$ の旗であり $\psi(\sigma_{\varnothing<\mathscr{F}}) = \sigma_{\varnothing<\mathscr{G}}$ である。これは (1.3) の写像が well-defined であることを示している。注意 1.3 から単射性は直ちに従い全射性は，$\mathscr{P}\big(M_{\{i\}}\big)$ の旗 $\mathscr{G}$ に対し $\mathscr{F} = \{\{i\}\} \cup \{F \cup \{i\} \mid F \in \mathscr{G}\}$ が $\mathscr{P}$ の旗であり $\psi(\sigma_{\varnothing<\mathscr{F}}) = \sigma_{\varnothing<\mathscr{G}}$ となることから従う。

$\{i\} \notin \mathscr{P}$ のとき。$\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ の錐として $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_i\}) = \sigma_{\{i\}<\varnothing}$ と書くことができる。命題 1.2 より $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ の錐 $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ が $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_i\})$ を含むのは $i \in I$ のときかつそのときに限る。このような

錐に対して $\mathcal{F}$ を $\{F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ と書くとき $\mathcal{G} = \{F_1 \setminus \{i\} \subseteq F_2 \setminus \{i\} \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \setminus \{i\}\}$ は $\mathcal{P}_{\{i\}}$ の旗であり $I \setminus \{i\} < \mathcal{G}$ である。このとき $\psi(\sigma_{I<\mathcal{F}}) = \sigma_{I\setminus\{i\}<\mathcal{G}}$ となるので (1.3) の写像が well-defined であることが従う。単射性および全射性はもはや明らかだろう。 ∎

2 区分的線形関数など（[AHK18] の 4 節に対応）

2.1 区分的線形関数の例

例 2.1 (凸でない区分的線形関数の例) $E = \{0, 1, 2\}$ とし $\Sigma_\varnothing$ 上の区分的線形関数 ℓ を

$$\ell(\mathbf{e}_1) = \ell(\mathbf{e}_2) = \ell(\mathbf{e}_0) = -1$$

で定まるものとする。ℓ のグラフは図 1 のように書くことができる[1)]。ℓ は $\sigma_{\{1\}<\varnothing}$ の周りで凸ではない。そうでなかったとすると $\mathrm{link}(\sigma_{\{1\}<\varnothing}, \Sigma) = \{\sigma_{\{1\}<\varnothing}, \sigma_{\{2\}<\varnothing}, \sigma_{\{0\}<\varnothing}\}$ であることから $\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) \geq 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) \geq 0$ を満たす線形関数 f が存在するが，$\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = (-1) + (-1) + f(\mathbf{e}_2) \leq \ell(\mathbf{e}_2) = -1$ となり矛盾が生じる。同様に ℓ は $\sigma_{\{2\}<\varnothing}$ の周りや $\sigma_{\{0\}<\varnothing}$ の周りで凸ではない。

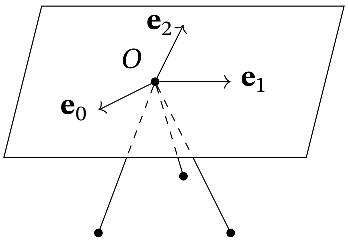

図 1　ℓ のグラフ

例 2.2 (強凸な区分的線形関数の例) $E = \{0, 1, 2\}$ とし $\Sigma_{\mathcal{P}(E)}$ 上の区分的線形関数 ℓ を

$$\ell(\mathbf{e}_1) = \ell(\mathbf{e}_2) = 0,\ \ell(\mathbf{e}_0) = 1$$

で定まるものとする。すると ℓ は強凸である。実際各射線周りの強凸性は以下に述べるようにして確かめられる。

1. $\sigma_{\{1\}<\varnothing}$ の周りについて $f(\mathbf{e}_1) = 0$ かつ $f(\mathbf{e}_2) = -1/2$ で定まる整線形関数 f を考えると，$\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = 1/2$ であるので強凸である。

1)　ℓ は直感的には凹である。

2. $\sigma_{\{2\}<\varnothing}$ の周りについて $f(\mathbf{e}_1) = -1/2$ かつ $f(\mathbf{e}_2) = 0$ で定まる整線形関数 f を考えると，$\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) = 0$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = 1/2$ であるので強凸である。
3. $\sigma_{\{0\}<\varnothing}$ の周りについて $f(\mathbf{e}_1) = -1/2$ かつ $f(\mathbf{e}_2) = -1/2$ で定まる整線形関数 f を考えると，$\ell(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_1) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_2) = 1/2$ かつ $\ell(\mathbf{e}_0) - f(\mathbf{e}_0) = 0$ であるので強凸である。

射線以外の錐の接続（link）は空集合である。

2.2 [AHK18, Prop. 4.5] に関する命題

補題 2.3 X を $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内の凸集合とする。このとき X の閉包 $\bar{X}$ も凸である。

証明 $\bar{X}$ の二点 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を取る。0 以上 1 以下の任意の実数 λ に対し $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \bar{X}$ が成立することを示せば良いが，それは $\mathbf{x}$ に収束する X の点列 $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ と $\mathbf{y}$ に収束する X の点列 $(\mathbf{y}_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在し $\mathbf{x}_n + \lambda(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n) \in X$ が成立することから従う。 ∎

命題 2.4 X を $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内の凸な開集合とする。$(-)^{\circ}$ を開核作用素とし $(-)^{-}$ を閉包作用素とするとき，$X = ((X)^{-})^{\circ}$ 成立する。

証明 $X \subset ((X)^{-})^{\circ}$ は明らかなので逆の包含が成立することを示す。元 $\mathbf{x} \in ((X)^{-})^{\circ}$ を取る。$\mathbf{x}$ は $\bar{X}$ の内点であるから $B_{\epsilon}(\mathbf{x}) \subset \bar{X}$ を満たす正の実数 ϵ が存在する。ただし $B_{\epsilon}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ を中心とする半径 ϵ の開球を表す。$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を $\mathbf{N}_R$ の基底とし，$\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 = \epsilon\mathbf{e}_1$, $\mathbf{x} - \mathbf{v}_2 = \epsilon\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{v}_n = \epsilon\mathbf{e}_n$, $\mathbf{x} - \mathbf{v}_{n+1} = \left(-\epsilon/\sqrt{n}\right)(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n)$ として一般の位置にあるベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ を取る。$\mathbf{v}_i$ はすべて $\bar{X}$ に属し，$\bar{X}$ が凸であること（補題 2.3）から n 次元単体 $\Delta = \mathrm{conv}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\})$ は $\bar{X}$ に含まれる。$\mathbf{x}$ はこの単体の内部に含まれるので $\mathbf{x}$ と Δ の狭義な面との距離の最小値 δ は正である。$\mathbf{v}_1$ は X の触点であるから $\mathbf{v}'_1 \in B_{\delta}(\mathbf{v}_1) \cap X$ を満たすベクトル $\mathbf{v}'_1$ を取ることができる。すると $\Delta' = \mathrm{conv}(\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\})$ は $\mathbf{x}$ を内点に持つ。同様の操作を Δ' に繰り返し行なっていくことで，Δ を X に含まれかつ $\mathbf{x}$ を内点として持つ n 次元単体にずらすことができる。特に $\mathbf{x} \in X$ であることが従う。 ∎

2.3 引き戻しなどに関する命題

命題 2.5 ([AHK18, Prop. 4.4 (2)] のために) $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内のユニモジュラ扇 Σ の錐 σ を一つ取る。すると

$$\left\{\mathbf{e} \in V_{\Sigma} \mid \mathrm{cone}(\mathbf{e}) \text{ と } \sigma \text{ を含む } \Sigma \text{ の錐が存在しかつ } \mathbf{e} \notin \sigma \text{ である}\right\}$$

と $V_{\mathrm{star}(\sigma,\Sigma)}$ は $\mathbf{e} \mapsto \bar{\mathbf{e}}$ により一対一に対応するのであった。ここで $\bar{\mathbf{e}}$ は $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}/\langle\sigma\rangle$ における $\mathbf{e}$ の像を表す。このとき全射群準同型

$$\mathrm{PL}(\Sigma) \to \mathrm{PL}(\mathrm{star}(\sigma,\Sigma)),\ x_{\mathbf{e}} \mapsto \begin{cases} x_{\bar{\mathbf{e}}} & \mathrm{cone}(\mathbf{e}) \text{ と } \sigma \text{ を含む } \Sigma \text{ の錐が存在しかつ } \mathbf{e} \notin \sigma \text{ であるとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

は全射群準同型 $p_{\sigma\in\Sigma}\colon A^1(\Sigma) \to A^1(\mathrm{star}(\sigma,\Sigma))$ を誘導する。

証明 $\mathrm{im}(\mathrm{res}_\Sigma)$ が $\mathrm{PL}(\Sigma) \to A^1(\mathrm{star}(\sigma,\Sigma))$ の核に含まれること, つまり $\mathrm{im}(\mathrm{res}_\Sigma)$ の $\mathrm{PL}(\mathrm{star}(\sigma,\Sigma))$ における像が $\mathrm{im}\big(\mathrm{res}_{\mathrm{star}(\sigma,\Sigma)}\big)$ に含まれることを示せば良い。$m \in \mathbf{M}$ を取り区分的線形関数 $\ell = \mathrm{res}_\Sigma(m) = \sum_{\mathbf{e}\in V_\Sigma}\langle\mathbf{e},m\rangle x_{\mathbf{e}}$ を考える。$\mathbf{N}_\sigma$ を $\sigma\cap\mathbf{N}$ によって生成される $\mathbf{N}$ の部分群とし，$\mathbf{N}(\sigma) = \mathbf{N}/\mathbf{N}_\sigma$ [2] と置き，短完全列 $0 \to \mathbf{N}_\sigma \to \mathbf{N} \to \mathbf{N}(\sigma) \to 0$ の双対 $0 \to \mathbf{M}_\sigma \to \mathbf{M} \to \mathbf{M}(\sigma) \to 0$ の分裂を一つ取り，$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\sigma \oplus \mathbf{M}''$ と直和分解する。この分解の下 $m = m' + m''$, $m' \in \mathbf{M}_\sigma$, $m'' \in \mathbf{M}''$ と表そう。このとき $\mathbf{e} \notin \sigma$ を満たす点 V_Σ に対し $\langle\mathbf{e},m\rangle = \langle\mathbf{e},m'\rangle$ が成立する。ゆえに

$$\ell \mapsto \sum_{\bar{\mathbf{e}}\in V_{\mathrm{star}(\sigma,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m\rangle x_{\bar{\mathbf{e}}} = \sum_{\bar{\mathbf{e}}\in V_{\mathrm{star}(\sigma,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},\bar{m}'\rangle x_{\bar{\mathbf{e}}} = \mathrm{res}_{\mathrm{star}(\sigma,\Sigma)}(\bar{m}')$$

である。 ∎

2.4 マトロイドの組合せ論的構造に関する命題

命題 2.6 ([AHK18, Def. 4.6] のために) E 上のループを持たないマトロイド M に対し $\bar{E}$ を M の階数 1 のフラットが成す集合とする。このとき写像 $\theta\colon 2^{\bar{E}} \to 2^E, \bar{F} \mapsto F = \bigcup \bar{F}$ は単射である。

証明 仮定から $\varnothing$ が M のフラットであるので $\bar{E}$ は E の分割を与える。ゆえに $\theta\colon 2^{\bar{E}} \to 2^E$ は単射でなければならない。 ∎

命題 2.7 ([AHK18, Def. 4.6] のために) M を E 上のループを持たないマトロイドとし $\mathfrak{F}$ を M のフラットすべてがなす集合とする。このとき $\mathfrak{F}$ は $\theta\big(2^{\bar{E}}\big)$ に含まれる。

証明 F を M のフラットとすると $F = \bigcup_{A\in\bar{E}}(F\cap A)$ が成立する。すると $F\cap A$ が空でなければこれは階数 1 のフラットであるから A と等しい。ゆえに $\bar{F} = \{A \in 2^{\bar{E}} \mid F\cap A \neq \varnothing\}$ と置けば $\theta(\bar{F}) = F$ である。 ∎

2) 文脈によっては σ によって生成される $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ の部分群を $\mathbf{N}_\sigma$ とし $\mathbf{N}(\sigma) = \mathbf{N}_{\mathbb{R}}/N_\sigma$ と置く場合もある。

系 2.8 ([AHK18, Def. 4.6] のために) 非空な E 上のループを持たないマトロイド M に対し族 $\bar{\mathfrak{F}} = \theta^{-1}(\mathfrak{F})$ は $\bar{E}$ 上のマトロイド $\bar{M}$ を定める。また $\bar{M}$ は単純，すなわちそのサーキットはすべて 3 元以上からなる。$\bar{M}$ を M の**組合せ論的構造**と呼ぶ。

証明 $\bar{\mathfrak{F}}$ が $\bar{E}$ 上のマトロイドを誘導することは定義から従うので省略する。$\varnothing \in \bar{\mathfrak{F}}$ であるから $\bar{M}$ のサーキットは一元集合ではなく，また $\bar{M}$ の階数 1 のフラットはすべて一元集合であることから，$\bar{M}$ のサーキットは二元ではない。 ∎

注意 2.9 [AHK18] では $\bar{\mathfrak{F}}$ を $\mathfrak{F}$ と同一視した上で $\mathscr{P}(\bar{M}) = \mathscr{P}(M)$ としているが，本稿では引き続きこれらを区別して議論することにする。$\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(M)$ の順序フィルターとし $\bar{\mathscr{P}}$ を対応する $\mathscr{P}(\bar{M})$ の順序フィルターとするとき，本稿の記法の下では $\Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ に属す斜線の最初の格子点は $\mathbf{N}_{\bar{E},\mathbb{R}}$ 内の非交和

$$\left\{\mathbf{e}_A \,\middle|\, \begin{array}{l} A \text{ は } M \text{ の階数 } 1 \text{ のフラット} \\ \text{で } \mathscr{P} \text{ に属さない} \end{array}\right\} \cup \left\{\mathbf{e}_{\bar{F}} \mid F \text{ は } \mathscr{P} \text{ に属す } M \text{ のフラットである}\right\}$$

に属す点として表すことができる。

命題 2.10 ([AHK18, p.398] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし，$\pi\colon E \to \bar{E}$ を M における閉包作用素で定まる全射な写像とし，π の切断 $\iota\colon \bar{E} \to E$ を一つ固定する。このとき次の二つが成立する。

(1) 群準同型 $\mathbb{Z}^{\bar{E}} \to \mathbb{Z}^{E}$, $\mathbf{e}_A \mapsto \sum_{i\in A} \mathbf{e}_i$ は群準同型 $\pi_{\mathbf{M}}\colon \mathbf{M}_E \to \mathbf{M}_{\bar{E}}$ を誘導する。

(2) 群準同型

$$\mathbb{Z}^{E} \to \mathbb{Z}^{\bar{E}},\ \mathbf{e}_i \mapsto \begin{cases} \mathbf{e}_{\pi(i)} & i = \iota(\pi(i)) \text{ のとき}, \\ \mathbf{0} & \text{そのほかの場合}, \end{cases}$$

は群準同型 $\iota_{\mathbf{M}}\colon \mathbf{M}_{\bar{E}} \to \mathbf{M}_E$ を誘導する。

(1) の証明 与えられた群準同型により $\mathbf{e}_{\bar{E}} \mapsto \sum_{A\in\bar{E}}\left(\sum_{i\in A} \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i\in E} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_E$ であるから準同型定理より群準同型 $\mathbf{N}_{\bar{E}} \to \mathbf{N}_E$ を誘導することができる。この群準同型に関して $\hom(-,\mathbb{Z})$ を取れば良い。 ∎

(2) の証明 与えられた群準同型により $\mathbf{e}_E \mapsto \sum_{\substack{i\in E:\\ i=\iota(\pi(i))}} \left(\sum \mathbf{e}_{\pi(i)}\right) = \sum_{A\in\bar{E}} \mathbf{e}_A = \mathbf{e}_{\bar{E}}$ であるから準同型定理より群準同型 $\mathbf{N}_E \to \mathbf{N}_{\bar{E}}$ を誘導することができる。この群準同型に関して $\hom(-,\mathbb{Z})$ を取れば良い。 ∎

命題 2.11 ([AHK18, pp.398–399] のために) 非空な有限集合 E 上のループを持たないマト

ロイド M と $\mathscr{P}(M)$ の順序フィルター $\mathscr{P}$ について図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{PL}\left(\Sigma_{M,\mathscr{P}}\right) \arrow[r, shift left, "\pi_{\mathrm{PL}}"] & \mathrm{PL}\left(\Sigma_{\bar{E},\mathscr{P}}\right) \arrow[l, shift left, "\iota_{\mathrm{PL}}"] \\
\mathbf{M}_E \arrow[u, "\mathrm{res}"] \arrow[r, shift left, "\pi_{\mathbf{M}}"] & \mathbf{M}_{\bar{E}} \arrow[u, "\mathrm{res}"'] \arrow[l, shift left, "\iota_{\mathbf{M}}"]
\end{tikzcd}
$$

を考える。このとき

$$\pi_{\mathrm{PL}} \circ \mathrm{res} = \mathrm{res} \circ \pi_{\mathbf{M}}, \tag{2.1}$$

$$\iota_{\mathrm{PL}} \circ \mathrm{res} = \mathrm{res} \circ \iota_{\mathbf{M}}, \tag{2.2}$$

$$\pi_{\mathrm{PL}} \circ \iota_{\mathrm{PL}} = \mathrm{id}, \tag{2.3}$$

$$\pi_{\mathbf{M}} \circ \iota_{\mathbf{M}} = \mathrm{id} \tag{2.4}$$

が成立する。

(2.1) **の証明** 元 $m \in \mathbf{M}_E$ を一つ取る。このとき

$$
\begin{aligned}
\pi_{\mathrm{PL}}(\mathrm{res}(m)) &= \sum_{\mathbf{e} \in V_{\Sigma_{M,\mathscr{P}}}} \langle \mathbf{e}, m \rangle \pi_{\mathrm{PL}}(x_{\mathbf{e}}) \\
&= \sum_{\substack{i \in E: \\ \pi(i) \notin \mathscr{P}}} \langle \mathbf{e}_i, m \rangle x_{\pi(i)} + \sum_{F \in \mathscr{P}} \langle \mathbf{e}_F, m \rangle x_{\bar{F}} \\
&= \sum_{\substack{A \in \bar{E}: \\ A \notin \mathscr{P}}} \left\langle \sum_{i \in A} \mathbf{e}_i, m \right\rangle x_A + \sum_{\bar{F} \in \bar{\mathscr{P}}} \langle \mathbf{e}_{\bar{F}}, \pi_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_{\bar{F}} \\
&= \sum_{\substack{A \in \bar{E}: \\ A \notin \mathscr{P}}} \langle \mathbf{e}_A, \pi_{\mathrm{PL}}(m) \rangle \, x_A + \sum_{\bar{F} \in \bar{\mathscr{P}}} \langle \mathbf{e}_{\bar{F}}, \pi_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_{\bar{F}} \\
&= \mathrm{res}(\pi_{\mathbf{M}}(m))
\end{aligned}
$$

と計算できる。 ∎

(2.2) **の証明** 元 $m \in \mathbf{M}_{\bar{E}}$ を一つ取る。このとき

$$
\begin{aligned}
\iota_{\mathrm{PL}}(\mathrm{res}(m)) &= \sum_{\mathbf{e} \in V_{\Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}}} \langle \mathbf{e}, m \rangle \iota_{\mathrm{PL}}(x_{\mathbf{e}}) \\
&= \sum_{\substack{A \in \bar{E}: \\ A \notin \mathscr{P}}} \langle \mathbf{e}_A, m \rangle x_{\iota(A)} + \sum_{\bar{F} \in \bar{\mathscr{P}}} \langle \mathbf{e}_{\bar{F}}, m \rangle x_F \\
&= \sum_{\substack{i \in E: \\ \pi(i) \notin A, \\ \iota(\pi(i)) = i}} \langle \mathbf{e}_i, \iota_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_i + \sum_{F \in \mathscr{P}} \langle \mathbf{e}_F, \iota_{\mathbf{M}}(m) \rangle x_F
\end{aligned}
$$

$$= \mathrm{res}(\iota_{\mathbf{M}}(m))$$

と計算できる。 ∎

(2.3) **の証明** $\iota \circ \pi = \mathrm{id}$ であることから直ちに従う。 ∎

(2.4) **の証明** 元 $A \in \bar{E}$ と元 $i \in A$ に対し $\mathbf{e}_i$ の $\mathbf{N}_{\bar{E}}$ における像が非零となるのは $i = \iota(A)$ となるときかつそのときに限るので，勝手な元 $m \in \mathbf{M}_{\bar{E}}$ に対し $\langle \mathbf{e}_A, \pi_{\mathbf{M}}(\iota_{\mathbf{M}}(m))\rangle = \langle \sum_{i\in A} \mathbf{e}_i, \iota_{\mathbf{M}}(m)\rangle = \sum_{i\in A}\langle \mathbf{e}_i, \iota_M(m)\rangle = \langle \mathbf{e}_A, m\rangle$ が成立する。$\{\mathbf{e}_A \mid A \in \bar{E}\}$ は $\mathbb{Z}^{\bar{E}}$ の基底を成すので，この計算は $\pi_{\mathbf{M}}(\iota_{\mathbf{M}}(m)) = m$ を意味する。 ∎

注意 2.12 $V_{\Sigma_{M,\mathscr{P}}} = V_{\tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}}$ が成立することから $\widetilde{M,\mathscr{P}}$ に対しても命題 2.3 と同様の主張が成立する。[3)]

注意 2.13 (2.1) により π_{PL} が群準同型 $\underline{\pi}_{\mathrm{PL}} : A^1\left(\sum_{M,\mathscr{P}}\right) \to A^1\left(\sum_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}\right)$ を誘導することが従う。同様に (2.2) により ι_{PL} が群準同型 $\underline{\iota}_{\mathrm{PL}} : A^1\left(\sum_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}\right) \to A^1\left(\sum_{M,\mathscr{P}}\right)$ を誘導することが従う。これら群準同型が互いに逆写像（したがって群同型）であることは [AHK18, Prop. 4.7] で証明が与えられている。

2.5 [AHK18, Prop. 4.8] に関する命題

命題 2.14 ([AHK18, Prop. 4.8] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}(M)$ の順序フィルターとする。このとき以下の命題が成立する。

(1) 勝手な錐 $\sigma_{I<\mathscr{F}} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ に対し $\sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}} \in \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ と $\sigma_{\iota^{-1}(I)<\bar{\mathscr{F}}} \in \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ が成立する。
(2) 勝手な錐 $\sigma_{\mathscr{I}<\bar{\mathscr{F}}} \in \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ に対し $\sigma_{\iota(\mathscr{I})<\mathscr{F}} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ と $\sigma_{\pi^{-1}(\mathscr{I})<\mathscr{F}} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ が成立する。
(3) 勝手な錐 $\sigma_{I<_M\mathscr{F}} \in \tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}$ に対し $\sigma_{\pi(I)<_{\bar{M}}\bar{\mathscr{F}}} \in \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ と $\sigma_{\iota^{-1}(I)<_{\bar{M}}\bar{\mathscr{F}}} \in \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ が成立する。
(4) 勝手な錐 $\sigma_{\mathscr{I}<_{\bar{M}}\bar{\mathscr{F}}} \in \tilde{\Sigma}_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ に対し $\sigma_{\iota(\mathscr{I})<_M\mathscr{F}} \in \tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}$ が成立する。

(1) の証明 $\iota^{-1}(I) \subset \pi(I)$ であるから $\pi(I) < \bar{\mathscr{F}}$ であることと $\sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}} \in \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ が成立することを示せば良い。もし $\pi(I) \not< \bar{\mathscr{F}}$ であったならば $\mathrm{cl}_M(I) = \min \mathscr{F}$ が成立するので $\mathrm{cl}_M(I) \in \hat{\mathscr{P}}$ となり矛盾が生じる。$\sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}} \in \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ が成立することは $\overline{(\mathrm{cl}_M(I))} = \mathrm{cl}_{\bar{M}}(\pi(I))$ であることから従う。 ∎

(2) の証明 (1) の証明と同様に $\iota(\mathscr{I}) \subset \pi^{-1}(\mathscr{I})$ であるから $\pi^{-1}(\mathscr{I}) < \mathscr{F}$ であることと $\sigma_{\pi^{-1}(\mathscr{I})<\mathscr{F}} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ が成立することを示せば良いが，$\pi^{-1}(\mathscr{I}) < \mathscr{F}$ であることは $\mathscr{I}$ が $\min \bar{\mathscr{F}}$ の真部分集合であることから直ちに従い，$\sigma_{\pi^{-1}(\mathscr{I})<\mathscr{F}} \in \Sigma_{M,\mathscr{P}}$ であることは $\overline{(\mathrm{cl}_M(\pi^{-1}(\mathscr{I})))} = \mathrm{cl}_{\bar{M}}(\mathscr{I})$ であることから従う。 ∎

---

3) 感覚的なことをいえば $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ と $\tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}$ の差異は豊富錐の差異として現れる。

(3) の証明 (1) の証明より $\pi(I) <_{\bar{M}} \bar{\mathscr{F}}$ が成立することを示せば良い。ところがこれは $\#I < \mathrm{rk}_M(\min \mathscr{F})$ であることから直ちに従う。 ∎

(4) の証明 $\iota(\mathscr{I}) <_M \mathscr{F}$ であることは $\#\mathscr{I} < \mathrm{rk}_{\bar{M}}(\min \bar{\mathscr{F}})$ であること $\#\mathscr{I} = \#\iota(\mathscr{I})$ であることと $\mathrm{rk}_{\bar{M}}(\min \bar{\mathscr{F}}) = \mathrm{rk}_M(\min \mathscr{F})$ であることの三つから従う。$\sigma_{\mathscr{I}<_M\mathscr{F}} \in \tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}$ であることは $\overline{(\mathrm{cl}_M(\iota(\mathscr{I})))} = \mathrm{cl}_{\bar{M}}(\mathscr{I})$ であることから従う。 ∎

命題 2.15 ([AHK18, Prop. 4.8] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし $\bar{\ell}$ を $\Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ 上の凸区分的線形関数とする。このとき $\iota_{\mathrm{PL}}\left(\bar{\ell}\right)$ は $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ 上の凸区分的線形関数である。

証明 $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ を勝手な $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ の錐とする。このとき $\bar{\ell}$ は凸であるから $\bar{\ell} - \mathrm{res}(m)$ が $\sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}}$ 上で零であり $\mathrm{link}\left(\sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}}, \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}\right)$ 属す錐上では非負となるような元 $m \in \mathbf{M}_{\bar{E},\mathbb{R}}$ が存在する。すると $\iota_{\mathrm{PL}}\left(\bar{\ell} - \mathrm{res}(m)\right)$ が $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ 上で零であることは定義から従う。勝手な錐 $\sigma_{J<\mathscr{G}} \in \mathrm{link}\left(\sigma_{I<\mathscr{F}}, \Sigma_{M,\mathscr{P}}\right)$ を考える。$J' = J \setminus \pi^{-1}\pi(I)$, $J'' = J \cap \pi^{-1}\pi(I)$ と置くと $\sigma_{J<\mathscr{G}} = \sigma_{J'<\mathscr{G}} + \sigma_{J''<\varnothing}$ と表すことができる。$\sigma_{\pi(J'')<\varnothing} \subset \sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}}$ であるから $\iota_{\mathrm{PL}}\left(\bar{\ell} - \mathrm{res}(m)\right)$ は $\sigma_{J''<\varnothing}$ 上で零である。また $\sigma_{J<\mathscr{G}}$ が $\mathrm{link}\left(\sigma_{I<\mathscr{F}}, \Sigma_{M,\mathscr{P}}\right)$ に属すことから $\sigma_{J<\mathscr{G}}$ と $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ を共に含む $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ の錐 $\sigma_{K<\mathscr{H}}$ が存在し，$\sigma_{\pi(K)<\bar{\mathscr{H}}}$ は $\sigma_{\pi(J')<\bar{\mathscr{G}}}$ と $\sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}}$ を共に含む。J' の置き方から $\sigma_{\pi(J')<\bar{\mathscr{G}}} \cap \sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}} = \{\mathbf{0}\}$ となるので $\sigma_{\pi(J')<\bar{\mathscr{G}}} \in \mathrm{link}\left(\sigma_{\pi(I)<\bar{\mathscr{F}}}, \Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}\right)$ であり $\iota_{\mathrm{PL}}\left(\bar{\ell} - \mathrm{res}(m)\right)$ が $\sigma_{J'<\mathscr{G}}$ 上で非負であることが従う。ゆえに $\iota_{\mathrm{PL}}\left(\bar{\ell} - \mathrm{res}(m)\right)$ は $\sigma_{J<\mathscr{G}}$ 上で非負である。(2.2) より $\iota_{PL}\left(\bar{\ell} - \mathrm{res}(m)\right) = \iota_{PL}\left(\bar{\ell}\right) - \mathrm{res}(\iota_{\mathbf{M}}(m))$ であるから $\iota_{PL}\left(\bar{\ell}\right)$ は $\sigma_{\pi^{-1}\pi(I)<\mathscr{F}}$ の周りで凸であり題意は示された。 ∎

命題 2.14 に注意すると命題 2.15 の証明と同様の議論を辿ることで被約バーグマン扇に関する同様の命題（命題 2.16）も示すことができる。

命題 2.16 M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし $\bar{\ell}$ を $\tilde{\Sigma}_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ 上の凸区分的線形関数とする。このとき $\iota_{\mathrm{PL}}\left(\bar{\ell}\right)$ は $\tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}$ 上の凸区分的線形関数である。

注意 2.17 命題 2.15 の証明は [AHK18, Prop. 4.8] とは異なるものである。[AHK18, Prop. 4.8] の証明では $\iota_{\mathrm{PL}} : A^1(\Sigma_{M,\mathscr{P}}) \to A^1(\Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}})$ の制限が $\mathscr{N}_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}} \to \mathscr{N}_{M,\mathscr{P}}$ を誘導することは示されるが，$\iota_{\mathrm{PL}} : A^1\left(\tilde{\Sigma}_{M,\mathscr{P}}\right) \to A^1\left(\tilde{\Sigma}_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}\right)$ の制限が $\tilde{\mathscr{N}}_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}} \to \tilde{\mathscr{N}}_{M,\mathscr{P}}$ を誘導することは示されない。

命題 2.18 ([AHK18, Prop. 4.8] のために) M を非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイドとし ℓ を $\Sigma_{M,\mathscr{P}}$ 上の凸区分的線形関数とする。このとき $\pi_{\mathrm{PL}}(\ell)$ は $\Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ 上の凸区分的線形関数である。

証明 $\sigma_{\mathscr{I}<\bar{\mathscr{F}}}$ を $\Sigma_{\bar{M},\bar{\mathscr{P}}}$ の勝手な錐とする。このとき ℓ は凸であるので $\ell - \mathrm{res}(m)$ が $\sigma_{\pi^{-1}(\mathscr{I})<\mathscr{F}}$ 上で零であり $\mathrm{link}(\sigma_{\pi^{-1}(\mathscr{I})<\mathscr{F}}, \Sigma_{M,\mathscr{P}})$ に属す錐の上で非負となるような元

$m \in \mathbf{M}_{E,\mathbb{R}}$ が存在する。すると定義より $\pi_{\mathrm{PL}}(\ell - \mathrm{res}(m))$ は $\sigma_{\mathcal{I}<\mathcal{P}}$ 上で零である。[4] また錐 $\sigma_{\mathcal{J}<\bar{\mathcal{G}}} \in \mathrm{link}(\sigma_{\mathcal{I}<\mathcal{F}}, \Sigma_{\bar{E},\bar{\mathcal{P}}})$ に対し $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{J})<\mathcal{G}} \in \mathrm{link}(\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{I})<\mathcal{F}})$ が成立する。$\ell - \mathrm{res}(m)$ は $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{J})<\mathcal{G}}$ 上で非負であるから $\pi_{\mathrm{PL}}(\ell - \mathrm{res}(m))$ は $\sigma_{\mathcal{J}<\bar{\mathcal{G}}}$ 上でも非負である。(2.1) より $\pi_{\mathrm{PL}}(\ell - \mathrm{res}(m)) = \pi_{\mathrm{PL}}(\ell) - \mathrm{res}(\pi_{\mathbf{M}}(m))$ であるから $\pi_{PL}(\ell)$ は $\sigma_{\mathcal{I}<\bar{\mathcal{F}}}$ の周りで凸であり題意は示された。 ∎

3　ホモロジーとコホモロジーなど（[AHK18] の 5 節に対応）

3.1　ミンコフスキー荷重に関する命題

命題 3.1 $\mathbf{M}$ から $\mathbb{Z}^{\Sigma_1}$ への制限写像 res_Σ を $\mathrm{res}_\Sigma(m)(\sigma) = \langle \mathbf{e}_{\sigma/\{\mathbf{0}\}}, m \rangle$ で定める。[5] このとき $\mathrm{MW}_1(\sigma) = \mathrm{im}(\mathrm{res}_\Sigma)^\perp$ が成立する。ただし $\mathbb{Z}^{\Sigma_1}$ には標準内積 $\langle -, - \rangle\colon \mathbb{Z}^{\Sigma_1} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_1} \to \mathbb{Z}$ が定まっているとする。

証明 次元 1 のミンコフスキー荷重 $\omega \in \mathrm{MW}_1(\sigma)$ を取ると $\sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\{\mathbf{0}\}} = \mathbf{0}$ が成立するので，勝手な元 $m \in \mathbf{M}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\langle \omega, \mathrm{res}_\Sigma(m) \rangle &= \sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \langle \mathbf{e}_{\sigma/\{\mathbf{0}\}}, m \rangle \\
&= \left\langle \sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\{\mathbf{0}\}}, m \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{0}, m \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

であるから $\omega \in \mathrm{im}(\mathrm{res}_\Sigma)^\perp$ である。逆に関数 $\omega \in \mathrm{im}(\mathrm{res}_\Sigma)^\perp$ を取ると勝手な元 $m \in \mathbf{M}$ との内積が零であるから $\sum_{\sigma \in \Sigma_1} \omega(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\{\mathbf{0}\}} = \mathbf{0}$ が成立し $\omega \in \mathrm{MW}_1(\Sigma)$ である。 ∎

命題 3.2 ([AHK18, Prop. 5.2] のために) 非空な有限集合 E 上のループを持たない階数 $r+1$ のマトロイド M と $r-1$ 個のフラットからなる $\mathcal{P}(M)$ の旗 $\mathcal{G}$ を考える。$V_{\mathrm{star}(\mathcal{G})} = V_{\mathrm{star}(\sigma_{\mathcal{G}}, \Sigma_{M,\mathcal{P}})}$ と書くことにする。[6] このとき次の二つが成立する。

(1) $\sum_{\mathbf{e} \in V_{\mathrm{star}(\mathcal{G})}} \mathbf{e} = \mathbf{0}$ である。
(2) $V_{\mathrm{star}(\mathcal{G})}$ の真部分集合はいずれも線型独立である。

---

4)　$\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ 上の区分的線形関数に対し $\sigma_{\iota^{-1}(\mathcal{I})<\mathcal{F}}$ 上で零であっても π_{PL} による像が $\sigma_{\mathcal{I}<\bar{\mathcal{F}}}$ 上で零であることは含意しないことに注意する。

5)　このとき $\mathbf{e}_{\sigma/\{\mathbf{0}\}}$ は斜線 σ の最初の格子点である。

6)　添え字に用いる際の視認性のため。

証明 $\mathscr{G}=\{G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G_{r-1}\}$ と書くことにし，さらに $G_0=\varnothing$, $G_r=E$ と置くことにする。すると M の階数が $r+1$ であることと $\mathscr{G}$ が $r-1$ 個のフラットから構成されていることから，ある番号 $i_0 \in \{0,1,\dots,r-1\}$ に対し G_{i_0+1} は G_{i_0} を被覆せず，他の番号 i について G_{i+1} は G_i を被覆する。$\mathscr{F}_1,\dots,\mathscr{F}_k$ を，$\mathscr{G}$ を狭義に含む $\mathscr{P}(M)$ の旗のすべてとすると $\mathscr{F}_j=\{G_1 \subseteq \cdots \subsetneq G_{i_0} \subsetneq F_j \subsetneq G_{i_0+1} \subsetneq \cdots \subsetneq G_{r-1}\}$ と表され，F_j は G_{i_0} を被覆しまた G_{i_0+1} に被覆される。ゆえにフラットの公理より $\{G_{i_0}, F_1 \setminus G_{i_0},\dots,F_k \setminus G_{i_0}\}$ は G_{i_0+1} の分割を与える。いま $V_{\mathrm{star}\,\mathscr{G}}=\{\mathbf{e}_{F_j} \mid j \in \{1,\dots,k\}\}$ と表すことができるので

$$\sum_{\mathbf{e}\in \mathrm{star}(\mathscr{G})} \mathbf{e} = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{e}_{F_j} = \mathbf{e}_{G_{i_0+1}} + (k-1)\mathbf{e}_{G_{i_0}} = \mathbf{0} + (k-1)\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

であり (1) が成立することが示された。

(2) について考える。$\{\mathbf{e}_{F_1},\dots,\mathbf{e}_{F_{k-1}}\}$ が $\mathbf{N}_E(\sigma_{\mathscr{G}})_{\mathbb{R}}$ 内で線型独立であることを示せばよい。ただし $\mathbf{N}_E(\sigma_{\mathscr{G}})$ は $\sigma_{\mathscr{G}}$ が生成する部分格子 $\mathbf{N}_{E,\sigma_{\mathscr{G}}}$ による $\mathbf{N}_E$ の商格子を表す。$\mathbf{N}_E(\sigma_{\mathscr{G}})_{\mathbb{R}}$ 上の線形関係 $\lambda_1\mathbf{e}_{F_1}+\cdots+\lambda_{k-1}\mathbf{e}_{F_{k-1}}=\mathbf{0}$ が成立すると，$\mathbf{N}_E$ の元として $\lambda_1\mathbf{e}_{F_1\setminus G_{i_0}}+\cdots+\lambda_{k-1}\mathbf{e}_{F_{k-1}\setminus G_{i_0}} \in \mathbf{N}_{E,\sigma_{\mathscr{G}},\mathbb{R}}$ であり，ゆえにこのベクトルの成分は G_1, $G_2 \setminus G_1,\dots$, $G_{r-1} \setminus G_{r-2}$, $E \setminus G_{r-1}$ 上でそれぞれ一定であるので，$\lambda_1=\cdots=\lambda_{k-1}=0$ でなければならない。 ∎

命題 3.3 ([AHK18, Prop. 5.5] の証明加筆版) Σ を $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ 内のユニモジュラ扇とする。このとき勝手な非負整数 k について $A^k(\Sigma)$ は $Z^k(\Sigma)$ の像と等しい。

証明 $A^k(\Sigma)$ における次元 k の単項式 $f=\prod_{\mathbf{e}\in V_\Sigma} x_{\mathbf{e}}^{i_{\mathbf{e}}}$ が $Z^k(\Sigma)$ の像に属すことを示せばよい。もし $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e} \in V_\Sigma \mid i_{\mathbf{e}} \neq 0\}) \notin \Sigma$ であれば I_Σ による関係式から $f=0$ である。なので $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e} \in V_\Sigma \mid i_{\mathbf{e}} \neq 0\}) \in \Sigma$ の場合を考える。$\sigma=\mathrm{cone}(\{\mathbf{e} \in V_\Sigma \mid i_{\mathbf{e}} \neq 0\})$ と置き，$\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_l$ を σ に含まれる斜線の最初の格子点すべてとし，$f=x_{\mathbf{e}_1}^{i_1}x_{\mathbf{e}_2}^{i_2}\cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l}$ と表したときに $i_1 \geqq i_2 \geqq \cdots \geqq i_l \geqq 1$ となるようにしておく。

f が $Z^k(\Sigma)$ の像に属すことを σ の次元に関する減少方向の帰納法で示す。$\dim(\sigma)=k$ のときは $f=x_{\mathbf{e}_1}x_{\mathbf{e}_2}\cdots x_{\mathbf{e}_l}=x_\sigma$ であるから帰納法の主張は成立する。$\dim(\sigma)<k$ の場合を考える。すると $i_1 \geqq 2$ であり，また σ はユニモジュラ錐であるから $\langle \mathbf{e}_1, m\rangle=-1$ かつ $\langle \mathbf{e}_2, m\rangle=\cdots=\langle \mathbf{e}_l, m\rangle=0$ となるような元 $m \in \mathbf{M}$ が存在する。すると

$$f = x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-1}x_{\mathbf{e}_2}^{i_2}\cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l}\left(\sum_{\mathbf{e}\in V_\Sigma\setminus\{\mathbf{e}_1\}} \langle \mathbf{e}, m\rangle x_{\mathbf{e}}\right) \tag{3.1}$$

と表すことができるが，$\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_l,\mathbf{e}\}) \notin \Sigma$ のとき，すなわち $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\}) \notin \mathrm{link}(\sigma,\Sigma)$

のとき，I_Σ の関係式より $x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-1}x_{\mathbf{e}_2}^{i_2}\cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l}x_{\mathbf{e}}=0$ であるので，(3.1) は

$$f=\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma\setminus\{\mathbf{e}_1\}:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\sigma,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m\rangle\left(x_{\mathbf{e}_1}^{i_1-1}x_{\mathbf{e}_2}^{i_2}\cdots x_{\mathbf{e}_l}^{i_l}x_{\tau_{\mathbf{e}}}\right) \tag{3.2}$$

と書き直すことができる。[7] (3.2) の右辺の各単項式は次元 k の単項式かつ $\dim(\tau_{\mathbf{e}})=\dim(\sigma)+1$ であるから，帰納法の仮定より $Z^k(\Sigma)$ の像に属しゆえに f も $Z^k(\Sigma)$ に属す。 ∎

命題 3.4 ([AHK18, Prop. 5.6] のために) Σ を $\mathbf{N}_\mathbb{R}$ 内のユニモジュラ扇とする。このとき勝手な非負整数 k について $Z^k(\Sigma)\cap(I_\Sigma+J_\Sigma)$ は

$$\left\{\left(\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\tau,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m\rangle x_{\mathbf{e}}\right)x_\tau\ \middle|\ \tau\in\Sigma_{k-1},\ m\in\langle\tau\rangle^\perp\right\} \tag{3.3}$$

で生成される。

証明 (3.3) が $Z^k(\Sigma)\cap(I_\Sigma+J_\Sigma)$ に含まれることを示す。$\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\tau,\Sigma)$ を満たす点 $\mathbf{e}\in V_\Sigma$ と錐 $\tau\in\Sigma_{k-1}$ に対し $x_{\mathbf{e}}x_\tau=x_{\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\}\cup\tau)}\in Z^k(\Sigma)$ であるから (3.3) は $Z^k(\Sigma)$ に含まれる。ここで

$$\left(\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\tau,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m\rangle x_{\mathbf{e}}\right)x_\tau=x_\tau\left(\sum_{\mathbf{e}\in V_\Sigma}\langle\mathbf{e},m\rangle x_{\mathbf{e}}-\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\notin\mathrm{link}(\tau,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m\rangle x_{\mathbf{e}}\right) \tag{3.4}$$

と分解する。すると $\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\notin\mathrm{link}(\tau,\Sigma)$ を満たす点 $\mathbf{e}\in V_\Sigma$ に対し $x_{\mathbf{e}}\notin Z^k(\Sigma)$ であるから，(3.4) の右辺括弧内の第二総和は I_Σ の元であり，また第一総和は J_Σ の元であるから (3.4) の左辺は $I_\Sigma+J_\Sigma$ の元である。ゆえに (3.3) は $Z^(\Sigma)\cap(I_\Sigma+J_\Sigma)$ に含まれる。

次に $Z^k(\Sigma)\cap(I_\Sigma+J_\Sigma)$ が (3.3) で生成される群に含まれることを示す。元 $f\in Z^k(\Sigma)\cap(I_\Sigma+J_\Sigma)$ を取ると $f\in I_\Sigma+J_\Sigma$ であることからアプリオリには

$$f=\sum_{i=1}^{l}c_ix^{\mathbf{a}_i}x^{\mathbf{c}_i}+\sum_{j=1}^{s}\left(x^{\mathbf{b}_j}\sum_{\mathbf{e}\in V_\Sigma}\langle\mathbf{e},m_j\rangle x_{\mathbf{e}}\right) \tag{3.5}$$

という形をしている。ここで $x^{\mathbf{a}_i}$ と $x^{\mathbf{b}_j}$ は適当な単項式を $x^{\mathbf{c}_i}$ は $Z^*(\Sigma)$ に属さない無平方単項式を表し $c_i\in\mathbb{Z}$ かつ $m_j\in\mathbf{M}$ である。[8] だが $x^{\mathbf{b}_j}\in I_\Sigma$ となるような j に対し

---

7) [AHK18] では，$\mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\sigma,\Sigma)$ であることを簡単に $\mathbf{e}\in\mathrm{link}(\sigma)$ と表している。

8) ここでは多重指数の記法を用いる。ベクトル $\mathbf{a}=(a_{\mathbf{e}}\mid\mathbf{e}\in V_\Sigma)\in(\mathbb{Z}_{\geqq0})^{V_\Sigma}$ に対し $x^{\mathbf{a}}=\prod_{\mathbf{e}\in V_\Sigma}x_{\mathbf{e}}^{a_{\mathbf{e}}}$ と表す。

て $x^{\mathbf{b}_j}\sum_{\mathbf{e}\in V_\Sigma}\langle\mathbf{e},m_i\rangle x_\mathbf{e}$ は I_Σ の元として吸収することができるので Σ の錐 τ_j を用いて $x^{\mathbf{b}_j}=x^{\mathbf{b}'_j}x_{\tau_j}$ で $\{\mathbf{e}\in V_\Sigma\mid b'_\mathbf{e}\neq 0\}\subset\tau_j$ として良い。さらに各 $j\in\{1,\dots,s\}$ に対し

$$x^{\mathbf{b}'_j}x_{\tau_j}\sum_{\mathbf{e}\in V_\Sigma}\langle\mathbf{e},m_j\rangle x_\mathbf{e}=x^{\mathbf{b}'_j}x_{\tau_j}\left(\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\tau_j,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m_j\rangle x_\mathbf{e}\right)+x^{\mathbf{b}'_j}x_{\tau_j}\left(\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\notin\mathrm{link}(\tau_j,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m_j\rangle x_\mathbf{e}\right)$$

と分解すると第二項目は I_Σ の元であるから (3.5) は

$$f=\sum_{i=1}^{l}c_ix^{\mathbf{a}_i}x^{\mathbf{c}_i}+\sum_{j=1}^{s}\left(x^{\mathbf{b}'_j}x_{\tau_j}\left(\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\tau_j,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m_j\rangle x_\mathbf{e}\right)\right)$$

と書き換えられ第一総和と第二総和は共通の単項式を持たない。ところが $f\in Z^k(\Sigma)$ であったので第一総和は零かつ $\mathbf{b}'_j=\mathbf{0}$ でなければならない。また（命題 3.3 の証明と同様に）短完全列 $0\to\mathbf{M}_{\tau_j}\to\mathbf{M}\to\mathbf{M}(\tau_j)\to 0$ の分裂 $\mathbf{M}=\mathbf{M}_{\tau_j}\oplus\mathbf{M}''$ を取り $m_j=m'_j+m''_j$ と分解すると $m'_j\in\langle\tau_j\rangle^\perp$ であり

$$f=\sum_{j=1}^{s}\left(x_{\tau_j}\left(\sum_{\substack{\mathbf{e}\in V_\Sigma:\\ \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}\})\in\mathrm{link}(\tau'_j,\Sigma)}}\langle\mathbf{e},m'_j\rangle x_\mathbf{e}\right)\right)$$

となる。ゆえに f は (3.3) が生成する部分群に含まれることが従い題意は示された。 ∎

4 ポアンカレ双対など（[AHK18] の 6 節に対応）

命題 4.1 有限生成アーベル群 A に対して $\hom(A,\mathbb{Z})$ は捩れなしである。

証明 A が有限生成アーベル群であるから，$A\cong\mathbb{Z}^r\oplus(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z})$ である。群準同型 $g\in\hom(A,\mathbb{Z})$ と A の捩れ x に対し $g(x)=0$ でなければならない。ゆえに $\hom(N,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^r$ である。 ∎

4.1 [AHK18, Prop. 6.2] に関する命題

命題 4.2 ([AHK18, Prop. 6.2] のために) M を有限集合 E 上のマトロイドとしそのフラット F と $\#I\geqq\mathrm{rk}_M(F)$ かつ $\mathrm{rk}_M(I)<\mathrm{rk}_M(F)$ を満たす F の部分集合 I を考える。このとき $\mathrm{rk}_M(J)=\mathrm{rk}_M(I)+1$ かつ $\#(I\setminus J)=\#(J\setminus I)=1$ を満たす F の部分集合 J が存在する。

証明 $\mathrm{rk}_M(I) < \#I$ なので $\mathrm{rk}_M(I \setminus \{i\}) = \mathrm{rk}_M(I)$ を満たす元 $i \in I$ が存在する。[9] また $\mathrm{rk}_M(I) < \mathrm{rk}_M(F)$ であるから元 $j \in F \setminus \mathrm{cl}_M(I)$ を取ることができ $\mathrm{rk}_M(I \cup \{j\}) = \mathrm{rk}_M(I) + 1$ である。ここで $J = (I \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ と置けば J は F の部分集合で $\mathrm{rk}_M(J) = \mathrm{rk}_M(I) + 1$ かつ $J \setminus I = \{j\}$ かつ $I \setminus J = \{i\}$ が成立する。 ∎

命題 4.3 ([AHK18, Prop. 6.2] における帰納法の議論) 正整数 n と非空な有限集合 E 上のループを持たないマトロイド M とそのフラット F を考える。$\#J \geqq \mathrm{rk}_M(F)$ かつ $\mathrm{rk}_M(F) - \mathrm{rk}_M(J) < n$ を満たす F の勝手な部分集合 J について $A^*(M, \mathscr{P})$ の元として $\left(\prod_{j\in J} x_j\right) x_F = 0$ が成立すると仮定する。このとき $\#I \geqq \mathrm{rk}_M(F)$ かつ $\mathrm{rk}_M(F) - \mathrm{rk}_M(I) = n$ を満たす F の部分集合 I についても $A^*(M, \mathscr{P})$ の元として $\left(\prod_{i\in I} x_i\right) x_F = 0$ が成立する。

証明 命題 4.2 より $\mathrm{rk}_M(J) = \mathrm{rk}_M(I) + 1$ かつ $I \setminus J = \{i\}$ かつ $J \setminus I = \{j\}$ を満たす F の部分集合 J が存在する。$\mathcal{I}_4$ の関係式より $x_i + \sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\\ i\in G}} x_G = x_j + \sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\\ j\in G}} x_G$ が成立するが，両辺から $\sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\\ i\in G,\\ j\in G}} x_G$ を引くことで $x_i + \sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\\ i\in G,\\ j\notin G}} x_G = x_j + \sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\\ i\notin G,\\ j\in G}} x_G$ となる。この両辺に $\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) x_F$ を掛けることを考える。すると

$$\left(\sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\\ i\in G,\ j\notin G}} x_G\right)\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) x_F = \left(\sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\ G\subset F\\ i\in G,\ j\notin G}} x_G\right)\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) x_F \qquad (\mathcal{I}_1 \text{ の関係式を用いる。})$$

$$= \left(\sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\ I\cap J\subsetneq G\subsetneq F\\ i\in G,\ j\notin G}} x_G\right)\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) x_F \quad (\mathcal{I}_2 \text{ の関係式を用いる。}) \tag{4.1}$$

となるが，(4.1) の右辺の G と $I\cap J$ について $\#(I\cap J) \geqq \mathrm{rk}_M(G)$ かつ $\mathrm{rk}_M(G) - \mathrm{rk}_M(I\cap J) < n$ を満たすので $x_G\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) = 0$ である。同様の議論が $\left(\sum_{\substack{G\in\mathscr{P}:\\ i\notin G,\ j\in G}} x_G\right)\left(\prod_{i\in I\cap J} x_i\right) x_F$ に対しても行えるので $x_i\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) x_F = x_j\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) x_F$ が成立する。左辺と右辺はそれぞれ $\left(\prod_{k\in I} x_k\right) x_F$ と $\left(\prod_{l\in J} x_l\right) x_F$ であるが，後者は仮定により零である。 ∎

命題 4.4 ([AHK18, Prop. 6.2 (2)] の証明) M を非空な有限集合 E 上のループを持たない階数 $r+1$ のマトロイドとし I を $\#I \geqq r+1$ を満たす E の部分集合とする。このとき $A^*(M, \mathscr{C})$ の元として $\prod_{i\in I} x_i = 0$ が成立する。

証明 $\mathrm{rk}_M(I)$ に関する減少方向の帰納法による。$\mathrm{rk}_M(I) = r + 1$ のとき I は $\mathrm{cl}_M(B) = E$ を満たす独立集合 B を含む。$\mathcal{I}_3$ の関係式より $\prod_{i\in B} x_i = 0$ でありゆえに $\prod_{i\in I} x_i = 0$ でもある。$\mathrm{rk}_M(I) < r + 1$ のときを考える。命題 4.2 より $\mathrm{rk}_M(J) = \mathrm{rk}_M(I) + 1$ かつ $I \setminus J = \{i\}$ かつ

9） フラットの分割公理を用いることで $\mathrm{cl}_M(I)$ の基底 B を構成することができ，必要なら再度フラットの分割公理を用いることで B を I に含むように取り替えることができる。

$J \setminus I = \{j\}$ を満たす E の部分集合 J が存在する。命題 4.3 の証明と同様に $\mathcal{I}_4$ の関係式より $x_i + \sum_{\substack{G\in\mathcal{P}:\\ i\in G,\\ j\notin G}} x_G = x_j + \sum_{\substack{G\in\mathcal{P}:\\ i\notin G,\\ j\in G}} x_G$ が成立する。この両辺に $\prod_{k\in I\cap J} x_k$ を掛けると命題 4.3 の証明と同様の計算により $x_i\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right) = x_j\left(\prod_{k\in I\cap J} x_k\right)$ が成立することが従う。左辺と右辺はそれぞれ $\prod_{k\in I} x_k$ と $\prod_{k\in J} x_k$ であり後者は帰納法の仮定により零である。 ∎

4.2 [AHK18, Prop. 6.7] に関連する命題

命題 4.5 ([AHK18, Prop. 6.7] について) 元 $j \in Z$ を固定し，$\phi'_Z\colon S_{E\cup\mathcal{P}_+} \to S_{E\cup\mathcal{P}_-}$ を [AHK18, Prop. 6.7] にある Φ'_Z と同様の関係式

$$x_Z \mapsto x_j \text{ と } x_F \mapsto x_F \text{ と } x_i \mapsto \begin{cases} 0 & (i \in Z \text{ のとき}) \\ x_i & (i \notin Z \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定まる多項式環の準同型とする。このとき $\phi'_Z(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ かつ $\phi'_Z(\mathcal{I}_2) \subset \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$ かつ $\phi'_Z(\mathcal{I}_3) \subset \mathcal{I}_3$ かつ $\phi'_Z(\mathcal{I}_4) \subset \mathcal{I}_4$ が成立する。

証明 $\phi'_Z(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ が成立することを示す。$\mathcal{P}_-$ の比較不可能な二つのフラット F_1 と F_2 に対しては $\phi'_Z(x_{F_1}x_{F_2}) = x_{F_1}x_{F_2} \in \mathcal{I}_1$ である。Z と比較不可能な $\mathcal{P}_-$ のフラット F に対し $\phi'_Z(x_Z x_F) = x_j x_F \in \mathcal{I}_2$ である。これで $\phi'_Z(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ であることが確かめられた。

$\phi'_Z(\mathcal{I}_2) \subset \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$ が成立することを示す。$\mathcal{P}_-$ のフラット F と F に属さない元 $i \in E$ を取る。このとき

$$\phi'_Z(x_i x_F) = \begin{cases} 0 & (i \in Z \text{ のとき}) \\ x_i x_F & (i \notin Z \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，どちらの場合も $\mathcal{I}_2$ の元である。また元 $i \in E\setminus Z$ に対し $\phi'_Z(x_i x_Z) = x_i x_j \in \mathcal{I}_3$ であるが，$\mathrm{cl}_M(\{i,j\}) \supsetneq Z$ であるから $\mathrm{cl}_M(\{i,j\}) \in \mathcal{P}_-$ である。ゆえに $\phi'_Z(x_i x_Z) \in \mathcal{I}_3$ である。

$\phi'_Z(\mathcal{I}_3) \subset \mathcal{I}_3$ が成立することを示す。$\mathrm{cl}_M(I) \in \mathcal{P}_+ \cup \{E\}$ を満たす E の独立集合 E に対し

$$\phi'_Z\left(\prod_{i\in I} x_i\right) = \phi'_Z\left(\prod_{i\in I\cap Z} x_i\right)\phi'_Z\left(\prod_{i\in I\setminus Z} x_i\right) = \begin{cases} \prod_{i\in I} x_i & (I\cap Z = \varnothing \text{ のとき}) \\ 0 & (I \cap Z \neq \varnothing \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるが，$I\cap Z \neq \varnothing$ のとき $\mathrm{cl}_M(I) \in \mathcal{P}_- \cup \{E\}$ であるから，どちらの場合も $\mathcal{I}_3$ の元である。

$\phi'_Z(\mathcal{I}_4) \subset \mathcal{I}_4$ であることを示す。E の相異なる二元 i と k に対し

$$\phi'_Z\left(\left(x_i + \prod_{\substack{F\in\mathcal{P}_+:\\ i\in F}} x_F\right) - \left(x_k + \prod_{\substack{F\in\mathcal{P}_+:\\ k\in F}} x_F\right)\right)$$

$$
= \begin{cases} \left(x_i + \prod_{\substack{F\in\mathscr{P}_-:\\ i\in F}} x_F\right) - \left(x_k + \prod_{\substack{F\in\mathscr{P}_-:\\ k\in F}} x_F\right) & (i \notin Z \text{ かつ } k \notin Z \text{ のとき}) \\ \left(x_j + \prod_{\substack{F\in\mathscr{P}_-:\\ j\in F}} x_F\right) - \left(x_k + \prod_{\substack{F\in\mathscr{P}_-:\\ k\in F}} x_F\right) & (i \in Z \text{ かつ } k \notin Z \text{ のとき}) \\ \left(x_i + \prod_{\substack{F\in\mathscr{P}_-:\\ i\in F}} x_F\right) - \left(x_j + \prod_{\substack{F\in\mathscr{P}_-:\\ j\in F}} x_F\right) & (i \notin Z \text{ かつ } k \in Z \text{ のとき}) \\ 0 & (i \in Z \text{ かつ } k \in Z \text{ のとき}) \end{cases}
$$

でありいずれの場合も $\mathscr{I}_4$ の元である。 ∎

4.3 [AHK18, Prop. 6.8] に関連する命題

命題 4.6 (ギシン準同型が線形関係を保存することの微修正版 [AHK18, Prop. 6.8]) p を正整数とする。Z を中心とするマトロイドフリップ $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{M,\mathscr{P}_+}$ を考える。$\mathscr{P}(M_Z)$ のフラットを Z を含むフラットと考える。このとき勝手な二元 $i,\ j \in E \setminus Z$ に対し $S_{E\cup\mathscr{P}_+}$ の元として

$$
x_Z^p\left(\left(x_i + \sum_{\substack{F\in\mathscr{P}(M_Z):\\ i\in F}} x_F\right) - \left(x_j + \sum_{\substack{F\in\mathscr{P}(M_Z):\\ j\in F}} x_F\right)\right) \in \mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_4 \tag{4.2}
$$

が成立する。

証明 $\mathscr{P}_+$ が順序フィルターであることから $\mathscr{P}(M_Z) \subset \mathscr{P}_+$ が成立することに注意する。(4.2) にある第一総和を考える。

$$
\begin{aligned}
x_Z^p\left(\sum_{\substack{F\in\mathscr{P}(M_Z):\\ i\in F}} x_F\right) &= x_Z^p\left(\sum_{\substack{F\in\mathscr{P}_+:\\ i\in F}} x_F - \sum_{\substack{F\in\mathscr{P}_+:\ i\in F\\ Z\not\subset F,\ F\not\subset Z}} x_F\right) \\
&= x_Z^p\left(\sum_{\substack{F\in\mathscr{P}_+:\\ i\in F}} x_F\right) - x_Z^p\left(\sum_{\substack{F\in\mathscr{P}_+:\ i\in F\\ Z\not\subset F,\ F\not\subset Z}} x_F\right)
\end{aligned}
$$

であり第二項目は $\mathscr{I}_2$ の元である。p が正整数であることから $x_Z^p x_i$ と $x_Z^p x_j$ は $\mathscr{I}_1$ であり，したがって (4.2) が $\mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_4$ の元であることが従う。 ∎

4.4 [AHK18, Prop. 6.10] に関する命題

命題 4.7 ([AHK18, Prop. 6.10] のために) q を正整数とする。Z を中心とするマトロイドフリップ $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{M,\mathscr{P}_+}$ を考える。$\mathscr{P}(M_Z)$ のフラットを Z を含むフラットと考える。このとき $\Phi_Z^q \oplus \bigoplus_{p=1}^{q} \Psi_Z^{p,q}$ が全射であれば $\Phi_Z^q \oplus \bigoplus_{p=1}^{\mathrm{rk}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q}$ も全射である。

証明 $q \leqq \mathrm{rk}_M(Z)-1$ のときは明らかであるので $q \geqq \mathrm{rk}_M(Z)$ のときを考える。すると [AHK18, Lem. 6.16] から $\mathrm{rk}_M(Z) \leqq k \leqq q$ を満たす整数 k に対し

$$\Psi_Z^{k,q} \subset \mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{k-1} \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p,q} \tag{4.3}$$

が成立するのであった。(4.3) を逐次的に用いることで

$$\begin{aligned}
&\mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{q} \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p,q} \\
&\quad = \mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{\mathrm{rk}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} + \sum_{p=\mathrm{rk}_M(Z)}^{q} \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p,q} \quad \text{（総和を二つの総和に分ける）} \\
&\quad \subset \mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{\mathrm{rk}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} + \sum_{p=\mathrm{rk}_M(Z)}^{q-1} \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p,q} \quad \text{（(4.3) を } k=q \text{ と当てはめて用いる）} \\
&\quad \subset \cdots \\
&\quad \subset \mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{\mathrm{rk}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} + \Psi_Z^{\mathrm{rk}_M(Z),q} \\
&\quad \subset \mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{\mathrm{rk}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} \quad \text{（(4.3) を } k=\mathrm{rk}_M(Z) \text{ と当てはめて用いる）}
\end{aligned}$$

となるが，仮定より $\mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{q} \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p,q} = A^q(M,\mathscr{P}_+)$ であるから $\mathrm{im}\,\Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{\mathrm{rk}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} = A^q(M,\mathscr{P}_+)$ も成立する。 ∎

4.5 [AHK18, Thm. 6.18 と Thm.6.19] に関する命題

命題 4.8 有限生成アーベル群 A に対して $\mathrm{hom}(A,\mathbb{Z})$ は捩れなしである。

証明 A が有限生成アーベル群であるから，$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z})$ である。群準同型 $g \in \mathrm{hom}(A,\mathbb{Z})$ と A の捩れ x に対し $g(x)=0$ でなければならない。ゆえに $\mathrm{hom}(N,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ である。 ∎

命題 4.9 ([AHK18, Lem. 6.20] の証明) q_1 と q_2 を正整数とする。このとき次の二つが成立する。

(1) 勝手な正整数 p に対し $\mathrm{im}\,\Psi_Z^{p,q_1} \cdot \mathrm{im}\,\Phi_Z^{q_2} \subset \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p,q_1+q_2}$ が成立する。
(2) 勝手な二つの正整数 p_1 と p_2 に対し $\mathrm{im}\,\Psi_Z^{p_1,q_1} \cdot \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p_2,q_2} \subset \mathrm{im}\,\Psi_Z^{p_1+p_2,q_1+q_2}$ が成立する。

(1) の証明 [AHK18, Lem. 6.15] から勝手な二つの正整数 p と q に対し $x_Z \cdot \mathrm{im}\,\Phi_Z^q \subset \mathrm{im}\,\Psi_Z^{1,q+1}$

と $x_Z \cdot \operatorname{im}\Psi_Z^{p,q} \subset \operatorname{im}\Psi_Z^{p+1,q+1}$ が成立するのであった。すると

$$\begin{aligned}\operatorname{im}\Psi_Z^{p,q_1}\cdot\operatorname{im}\Phi_Z^{q_2} &= \left(A^{q_1-p}(M_Z)\cdot x_Z^p\right)\cdot\operatorname{im}\Phi_Z^{q_2}\\ &\subset \left(A^{q_1-p}(M_Z)\cdot x_Z^{p-1}\right)\cdot\operatorname{im}\Psi_Z^{1,q_2+1}\\ &\subset \left(A^{q_1-p}(M_Z)\cdot x_Z^{p-2}\right)\cdot\operatorname{im}\Psi_Z^{2,q_2+2}\\ &\subset \cdots\\ &\subset A^{q_1-p}(M_Z)\cdot\operatorname{im}\Psi_Z^{p,q_2+p}\\ &\subset \operatorname{im}\Psi_Z^{p,q_1+q_2}\end{aligned}$$

となり題意が従う。 ∎

(2) の証明 (1) と同様の方針で計算していくと

$$\begin{aligned}\operatorname{im}\Psi_Z^{p,q_1}\cdot\operatorname{im}\Phi_Z^{q_2} &= \left(\left(A^{q_1-p_1}(M_Z)\right)\cdot x_Z^{p_1}\right)\cdot\left(\left(A^{q_2-p_2}(M_Z)\right)\cdot x_Z^{p_2}\right)\\ &\subset \left(A^{(q_1+q_2)-(p_1+p_2)}(M_Z)\right)\cdot x_Z^{p_1+p_2}\\ &= \operatorname{im}\Psi_Z^{p_1+p_2,q_1+q_2}\end{aligned}$$

となり題意が従う。 ∎

命題 4.10 ([AHK18, Lem. 6.21] のために) Z を中心とするマトロイドフリップ $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{M,\mathscr{P}_+}$ を考え，$A^*(M,\mathscr{P}_-)$ に対してポアンカレ双対が成立すると仮定する。このとき Φ_Z^q の定義域 $A^q(M,\mathscr{P}_-)$ の勝手な非零元 ξ に対し $\Phi_X^q(\xi)\cdot\operatorname{im}\Phi_Z^{r-q} \neq 0$ が成立する。特に Φ_Z^q は単射である。

証明 すると $A^*(M,\mathscr{P}_-)$ に対するポアンカレ双対より $\xi\cdot\eta \neq 0$ を満たす元 $\eta \in A^{r-q}(M,\mathscr{P}_-)$ が存在する。[10] [AHK18, Coro. 6.11] より最高次数の引き戻し準同型 $\Phi_Z^r\colon A^r(M,\mathscr{P}_-) \to A^r(M,\mathscr{P}_+)$ は同型なので $\Phi_Z^q(\xi)\cdot\Phi_Z^{r-q}(\eta) \neq 0$ である。ξ は勝手に取ることができるので題意は示された。 ∎

5 ポアンカレ双対代数など（[AHK18] の 7 節に対応）

命題 5.1 ([GG82, Lem. 1.3]) 次数付き可換アルチン環 $R^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}} R^n$ は有限 R^0 代数である。

証明 R^* がネーター環でもあるので [松村 00, 定理 13.1] より R^* は R^0 上の有限生成代数である。$R^* = R^0[x_1,\dots,x_r]$ とし $x_1,\dots,x_r$ がそれぞれ次数 $d_1,\dots,d_r$ の斉次元であるとする。

10） 乗算写像 $\xi\cdot(-)\colon A^{r-q}(M,\mathscr{P}_-) \to A^r(M,\mathscr{P}_-)$ は零写像ではないので。

各番号 n に対し R^n は $\left\{x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r} \;\middle|\; i_1d_1+\cdots+i_rd_r=n\right\}$ で生成される R^0 加群である。[11] 一方イデアルの減少列 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} R^n \supset \bigoplus_{n=2}^{\infty} R^n \supset \cdots \supset \bigoplus_{n=m}^{\infty} R^n \supset \cdots$ は R^* がアルチンであることから停止する。つまり $n \geqq N$ ならば $R^n = \{0\}$ となるような番号 N が存在する。よって $R^* = \bigoplus_{n=0}^{N} R^n$ であり R^* が有限 R^0 代数であることが示された。 ∎

注意 5.2 次元 r のポアンカレ双対代数 R^* は次数付き可換アルチン環[12] に対して定義するので，特に有限次元 $\mathbb{R}$ 線型空間である。したがってポアンカレ双対性より $q \leqq r$ を満たす非負整数 q に対し R^q と R^{r-q} の次元は等しい。

命題 5.3 V と W を $\mathbb{R}$ 上の内積空間とし $f\colon V \to W$ を線型写像とする。このとき

(1) 勝手なベクトル $x \in V$ に対し $\|f(x)\| = \|x\|$ が成立することと，
(2) 勝手なベクトル $x \in V$ と $v \in W$ に対し $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$ が成立すること

は同値である。

証明 (2) が (1) を含意することは明らかである。(1) が成立すると仮定する。二つのベクトル $x \in V$ と $y \in V$ を勝手に取る。このとき $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ かつ $\|f(x)+f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2$ が成立するが，仮定より $\|f(x)\| = \|x\|$ かつ $\|f(y)\| = \|y\|$ かつ $\|f(x+y)\| = \|x+y\|$ であるから，$\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$ が成立することが従う。 ∎

5.1 [AHK18, Prop. 7.2] に関する命題

命題 5.4 ([AHK18, Prop. 7.2]) R^* を次元 r のポアンカレ双対代数とし非零元 $x \in R^d$ を取る。$\operatorname{ann}(x)$ を x の零化イデアルとするとき商環 $Q^* = R^*/\operatorname{ann}(x)$ も次元 $r-d$ のポアンカレ双対代数である。ここで Q^* の次数写像は

$$\deg(x\cdot -)\colon Q^{r-d} \to \mathbb{R},\ a + \operatorname{ann}(x) \mapsto \deg(x\cdot a)$$

で定まるものとする。

証明 R^* のポアンカレ双対性より $1 \notin \operatorname{ann}(x)$ でなければならないので，特に $Q^0 \neq 0$ である。また $Q^{\simeq}\mathbb{R}$ であるから全射な環準同型 $R^0 \twoheadrightarrow Q^0$ は同型であり，これら同型の合成により同型 $Q^0 \simeq \mathbb{R}$ が与えられる。$\deg(x\cdot -)\colon Q^{r-d} \to \mathbb{R}$ が同型であることを示そう。deg の単射性より $\deg(x\cdot -)\colon R^{r-d} \to \mathbb{R}$ の核が $\operatorname{ann}(x) \cap R^{r-d}$ であるから $\deg(x\cdot -)\colon Q^{r-d} \to \mathbb{R}$ は単射である。他方ポアンカレ双対より $x\cdot(-)\colon R^{r-d} \to R^r$ は零写像ではないので $Q^{r-d} \neq 0$ である。ゆえに $\deg(x\cdot -)\colon Q^{r-d} \to \mathbb{R}$ は全射でなければならない。

11） 帰納法で直ちに示される。
12） [AHK18] における次数付き環は $\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ 次数付き可換環のことを指している。

$q > r - d$ を満たす整数 q に対し $Q^q \simeq 0$ であることを示す。$a \in R^q$ に対し $a \cdot x$ の次数は r より大きいので R^* のポアンカレ双対性より $a \cdot x = 0$ である。ゆえに $R^q \subset \operatorname{ann}(x)$ であり $Q^q \simeq 0$ である。

$0 \leqq q \leqq r-d$ を満たす整数 q に対し乗算写像が誘導する準同型 $Q^{r-d-q} \to \hom_{\mathbb{R}}(Q^q, Q^{r-d})$ が同型であることを示す。勝手な元 $b \in R^q$ に対して $(a+\operatorname{ann}(x))\cdot(b+\operatorname{ann}(x)) = 0+\operatorname{ann}(x)$ となることを元 $a \in R^{r-d-q}$ が満たすとする。すると R^* のポアンカレ双対性より $ax = 0$ であり $a \in \operatorname{ann}(x)$ である。これは件の写像が単射であることを意味する。線型写像 $f \in \hom_{\mathbb{R}}(Q^q, Q^{r-d})$ を勝手に取る。単射な写像 $x \cdot (-)\colon Q^q \hookrightarrow R^{q+d}$ と $x \cdot (-)\colon Q^{r-d} \hookrightarrow R^r$ からなる図式

$$\begin{tikzcd} R^{q+d} & R^r \\ Q^q \arrow[u, hook, "x\cdot(-)"] \arrow[r, "f"'] & Q^{r-q} \arrow[u, hook, "x\cdot(-)"'] \end{tikzcd}$$

を考えると，この図式を可換にする線型写像 $\bar{f}\colon R^{q+d} \to R^r$ を取ることができる。このとき R^* のポアンカレ双対性より $\bar{f} = c \cdot (-)$ を満たす元 $c \in R^{r-q-d}$ が存在する。すると勝手な元 $a \in R^q$ に対し

$$x \cdot f(a + \operatorname{ann}(x)) = \bar{f}\big(x \cdot (a + \operatorname{ann}(x))\big) = c \cdot \big(x \cdot (a + \operatorname{ann}(x))\big) = x \cdot (c \cdot a + \operatorname{ann}(x))$$

であり，$x \cdot (-)$ の単射性により $f(a + \operatorname{ann}(x)) = (c + \operatorname{ann}(x)) \cdot (a + \operatorname{ann}(x))$ が成立する。ゆえに $Q^{r-d-q} \to \hom_{\mathbb{R}}(Q^q, Q^{r-d})$ は全射である。 ∎

5.2 [AHK18, p.425] に関する命題

命題 5.5 R^* を次元 r のポアンカレ双対代数とし，元 $\ell \in R^1$ に関する R^q 上のレフシェッツ作用素 L_ℓ^q が同型であると仮定する。このとき内部直和分解 $R^{q+1} = P_\ell^{q+1} \oplus \ell R^q$ が存在する。

証明 まず $R^{q+1} = P_\ell^{q+1} + \ell R^q$ であることを示す。勝手な元 $a \in R^{q+1}$ に対し $\ell L_\ell^{q+1}(a) \in R^{r-q}$ であるから，L_ℓ^q の全射性より $\ell L_\ell^{q+1}(a) = L_\ell^q(b)$ となる元 $b \in R^q$ が存在する。すると $\ell^{r-2q-1}(a - \ell b) = 0$ であるから $a - \ell b \in P_\ell^{q+1}$ が成立し，$a \in P_\ell^{q+1} + \ell R^q$ が従う。また元 $\ell b \in P_\ell^{q+1} \cap \ell R^q$ を取ると $0 = \ell L_\ell^{q+1}(\ell b) = L_\ell^q(b)$ であり L_ℓ^q の単射性より $b = 0$ である。ゆえに $P_\ell^{q+1} + \ell R^q$ は直和である。 ∎

系 5.6 次元 r のポアンカレ双対代数 R^* が $\mathrm{HR}(\ell)$ を満たすとき $q \leqq r/2$ を満たす勝手な非負整数 q に対し R^q の**レフシェッツ分解**

$$R^q = P_\ell^q \oplus \ell P_\ell^{q-1} \oplus \ell^2 P_\ell^{q-2} \oplus \cdots \oplus \ell^q P_\ell^0$$

が存在する。

証明 命題 5.5 の分解を逐次的に用いることで目的の分解

$$R^q = P_\ell^q \oplus \ell R^{q-1} = P_\ell^q \oplus \ell P_\ell^{q-1} \oplus \ell^2 R^{q-2} = \cdots = P_\ell^q \oplus \ell P_\ell^{q-1} \oplus \ell^2 P_\ell^{q-2} \oplus \cdots \oplus \ell^q P_\ell^0$$

を得られる。 ∎

命題 5.7 次元 r のポアンカレ双対代数 R^* が $\mathrm{HR}(\ell)$ を満たすとする。このとき $q_1 < q_2 \leqq q \leqq r/2$ を満たす勝手な非負整数 q_1 と q_2 と q に対して $\ell^{q_1} P_\ell^{q-q_1}$ と $\ell^{q_2} P_\ell^{q-q_2}$ はホッジ・リーマン形式 Q_ℓ^q に関して直交する。

証明 元 $a_1 \in P_\ell^{q-q_1}$ と元 $a_2 \in P_\ell^{q-q_2}$ を勝手に取る。すると

$$\begin{aligned}
Q_\ell^q(\ell^{q_1} a_1, \ell^{q_2} a_2) &= (-1)^q \deg\left(\ell^{q_1} a_1 L_\ell^q(\ell^{q_2} a_2)\right) \\
&= (-1)^q \deg(\ell^{q_1+r-2q+q_2} a_1 a_2) \\
&= (-1)^q \deg\left(\underbrace{\ell^{q_2-q_1} L_\ell^{q-q_1}(a_1)}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

と計算でき題意が従う。 ∎

命題 5.8 次元 r のポアンカレ双対代数 R^* が $\mathrm{HR}(\ell)$ を満たすとき $\mathrm{HL}(\ell)$ も満たす。

証明 $q \leqq r/2$ を満たす非負整数 q を固定する。元 $a \in R^q$ に対して $L_\ell^q(a) = 0$ が成立すると仮定すると，直ちに $a \in P_\ell^q$ かつ $Q_\ell^q(a, a) = 0$ となるが，Q_ℓ^q は R^q 上正定値であるから $a = 0$ でなければならない。ゆえに L_ℓ^q は単射である。ここでポアンカレ双対性より R^q と R^{r-q} の次元は等しいので，L_ℓ^q は同型であることが従う。 ∎

5.3 [AHK18, Prop. 7.6] に関する命題

命題 5.9 ([AHK18, Prop. 7.6] のために) 次元 r のポアンカレ双対代数 R^* が $\mathrm{HR}(\ell)$ を満たすと仮定する。このとき $p \leqq q \leqq r/2$ を満たす勝手な非負整数 p と q に対し，$\left(P_\ell^p, Q_\ell^p\right)$ と $\left(\ell^{q-p} P_\ell^p, (-1)^{p-q} Q_\ell^q\right)$ は内積空間で，写像 $\ell^{q-p} \cdot (-)$ は等長同型 $\left(P_\ell^p, Q_\ell^p\right) \xrightarrow{\sim} \left(\ell^{q-p} P_\ell^p, (-1)^{p-q} Q_\ell^q\right)$ を誘導する。

証明 $p \leqq q \leqq r/2$ を満たす勝手な非負整数 p と q に対し $r - 2p \geqq 2q - 2p \geqq q - p$ が成立するので，元 $x \in P_\ell^p$ に対し $\ell^{q-p} x = 0$ が成立するならば $L_\ell^p(x) = 0$ なので $x = 0$ である。ゆえに $\ell^{p-q} \cdot (-) \colon P_\ell^p \to \ell^{p-q} P_\ell^p$ は同型である。

R^* が $\mathrm{HR}(\ell)$ を満たすので $\mathrm{HL}(\ell)$ も満たす（命題**??**より）。ゆえに Q_ℓ^p は P_ℓ^p 上の内積を定める。[13] 勝手な元 $x \in P_\ell^p$ と元 $y \in P_\ell^p$ に対し

$$(-1)^{p-q} Q_\ell^q(\ell^{q-p}x, \ell^{q-p}y) = (-1)^p \deg\left(x\ell^{2q-2p+r-2q}y\right) = (-1)^p \deg\left(xL_\ell^p(y)\right) = Q_\ell^p(x,y)$$

と計算できるので，$\left(\ell^{q-p}P_\ell^p, (-1)^{p-q}Q_\ell^q\right)$ は内積空間であり $\ell^{p-q}\cdot(-)\colon P_\ell^p \Rightarrow \ell^{q-p}P_\ell^p$ は等長同型である。 ∎

5.4 [AHK18, Lem. 7.8] に関する命題

命題 5.10 r を非負整数とする。このとき次数付き環 $R^* = \mathbb{R}[x]/(x^{r+1})$ は次元 r のポアンカレ双対代数である。また次数写像を $\deg\colon R^r \to \mathbb{R}$ として考えると R^* は $\mathrm{HR}(x)$ を満たす。

証明 $R^* = \bigoplus_{q=0}^r \mathbb{R}x^q$ であるから，$q \geqq r/2$ を満たす勝手な非負整数 q に対し乗算写像が誘導する線型写像 $R^{r-q} \to \hom_{\mathbb{R}}(R^q, R^r)$ が同型であることを見れば十分であるが，R^{r-q} と $\hom_{\mathbb{R}}(R^q, R^r)$ の次元は共に 1 であり件の線型写像は明らかに単射であるから同型である。

R^* が $\mathrm{HR}(x)$ を満たすことを示す。q が $q \geqq r/2$ を満たす正整数のとき xL_x^q の値域は最高次数ではないので $P_x^q = \{0\}$ である。他方 $P_x^0 = R^0$ であるから Q_x^0 が R^0 上正定符号であることを示せば十分である。R^0 の非零元 a を取ると $Q_x^0(a,a) = (-1)^0\deg(ax^ra) = a^2 > 0$ である。 ∎

命題 5.11 ([AHK18, Lem. 7.8] のために) r_1 と r_2 を $r_1 \leqq r_2$ を満たす非負整数とし，次数付き環 $R_1^* = \mathbb{R}[x_1]/(x_1^{r_1+1})$ と $R_1^* = \mathbb{R}[x_2]/(x_1^{r_2+1})$ と $R^* = R_1^* \otimes_{\mathbb{R}} R_2^*$ を考え，$\ell = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$ と置くことにする。$q \leqq r_1$ を満たす勝手な非負整数 q に対し R^q のある基底に関して $(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}\det(Q_\ell^q) > 0$ が成立すると仮定する。このとき

$$\dim_{\mathbb{R}} P_\ell^q = \begin{cases} 1 & (q \leqq r_1 \text{ のとき}) \\ 0 & (q > r_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成立する。

証明 $q \leqq r_1$ を満たす非負整数 q を考える。このとき勝手な数 $i \in \{0,1,\ldots,q\}$ に対し R_1^i と R_2^{q-i} の $\mathbb{R}$ 線型空間としての次元は共に 1 であるので $\dim_{\mathbb{R}} R^q = q+1$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} R^{r_1+r_2-q} = q+1$ である。仮定より Q_ℓ^q は非退化であるから [AHK18, Prop. 7.5] の証明より L_ℓ^q は同型である。ゆえに $\dim_{\mathbb{R}} P_\ell^q = \dim_{\mathbb{R}} \ker\left(R^{r_1+r_2-q} \xrightarrow{\ell\cdot(-)} R^{r_1+r_2-q+1}\right)$ であるが，$\dim_{\mathbb{R}} R^{r_1+r_2-q} > \dim_{\mathbb{R}} R^{r_1+r_2-q+1}$ が成立するので $\dim_{\mathbb{R}} P_\ell^q \geqq 1$ である。他方レフシェッツ分解 $R^q = P_\ell^q \oplus \ell P_\ell^{q-1} \oplus \cdots \oplus \ell^q P_\ell^0$ が成立するので $\dim_{\mathbb{R}} P_\ell^q = 1$ でなければならない。

---

13) ここでいう内積とは非退化正定値双線型写像のことをいう。

$r_1 < q \leqq (r_1 + r_2)/2$ を満たす非負整数 q を考える。勝手な番号 $i \in \{r_1 + 1, \dots, q\}$ について $R_1^i \oplus R_2^{q-i} = 0$ であるから $\dim_{\mathbb{R}} R^q = r_1 + 1$ である。したがって勝手な番号 $i \in \{r_1 + 1, \dots, q\}$ について L_ℓ^q は同型であることから $R^q = \ell^q P_\ell^0 \oplus \ell^{q-1} P_\ell^1 \oplus \cdots \oplus \ell^{q-r_1} P_\ell^{r_1}$ である。勝手な番号 $i \in \{r_1 + 1, \dots, q\}$ に対し，$\ell^{q-i} a \in P_\ell^q \cap \ell^{q-i} P_\ell^i$ を満たす元 $a \in P_\ell^i$ を考えると，$(r_1 + r_2 - 2q + 1) + (q - i) \geqq r_1 + r_2 - 2i$ であるから，$\ell L_\ell^q(\ell^{q-i} a) = 0$ であることは $L_\ell^i(a) = 0$ であることを含意し，$a = 0$ であることが従う。これは $P_\ell^q = 0$ であることを意味する。 ∎

5.5 [AHK18, Lem. 7.11] に関する命題

命題 5.12 ([AHK18, Lem. 7.11] の (1) のために) R^* を次元 r のポアンカレ双対代数としその次数付き部分空間 V_1^* と V_2^* を考える。$V_1^* \perp_{Q_\ell^*}$ かつ V_1^* と V_2^* が共に HL(ℓ) を満たすとき $V_1^* \oplus V_2^*$ も HL(ℓ) を満たす。

証明 $q \leqq r/2$ を満たす非負整数 q を勝手に取り固定する。Q_ℓ^q が誘導する $\mathbb{R}$ 線型写像 $(V_1^* \oplus V_2^*)^q \to \hom_{\mathbb{R}}((V_1^* \oplus V_2^*)^q, \mathbb{R})$ が同型であることを示せば良い。$(V_1^* \oplus V_2^*)^q$ の元は V_1^q の元 a と V_2^q の元 b を用いて $a + b$ と表すことができるのであった。$Q_\ell^q(a + b, -)$ が零写像であると仮定すると $V_1^* \perp_{Q_\ell^*}$ であるから勝手な元 $c + d \in (V_1^* \oplus V_2^*)^q$ に対し $Q_\ell^q(a, c) = -Q_\ell^q(b, d)$ が成立する。$d = 0$ として c を勝手に動かすことで V_1^* が HR(ℓ) を満たすことから $a = 0$ が従う。同様に $c = 0$ として d を勝手に動かすことで V_2^* が HR(ℓ) を満たすことから $b = 0$ も従う。ゆえに件の線型写像は単射である。$(V_1^* \oplus V_2^*)^q$ は有限次元 $\mathbb{R}$ 線型空間であるから件の線型写像は同型である。 ∎

命題 5.13 ([AHK18, Lem. 7.11] の (2) のために) R^* を次元 r のポアンカレ双対代数としその次数付き部分空間 V_1^* と V_2^* を考える。$V_1^* \perp_{Q_\ell^*}$ かつ V_1^* と V_2^* が共に HR(ℓ) を満たすとき $V_1^* \oplus V_2^*$ も HR(ℓ) を満たす。

証明 $q \leqq r/2$ を満たす非負整数 q に対し Q_ℓ^q が $(V_1^* \oplus V_2^*)^q$ 上非退化であることは命題 5.12 で既に示した。 ∎

5.6 [AHK18, Prop. 7.7] に関する命題

命題 5.14 ([AHK18, Prop. 7.7] のために) R_1^* と R_2^* をそれぞれ次元 r_1 と r_2 のポアンカレ双対代数とし，それぞれ HR(ℓ_1) と HR(ℓ_2) を満たすと仮定する。$p \leqq r_1/2$ を満たす非負整数 p に対し非零元 $v \in P_{\ell_1}^p (\subset R_1^p)$ を取り，$q \leqq r_2/2$ を満たす非負整数 q に対し非零元 $w \in P_{\ell_2}^q (\subset R_2^q)$ を取り，二つの次数付き部分空間

$$B^*(v) = \langle v \rangle \oplus \ell_1 \langle v \rangle \oplus \cdots \oplus \ell_1^{r_1 - 2p} \langle v \rangle \left(\subset R_1^p\right),$$

$$B^*(w) = \langle w\rangle \oplus \ell_2\langle w\rangle \oplus \cdots \oplus \ell_2^{r_1-2q}\langle w\rangle \left(\subset R_2^q\right)$$

のテンソル積 $B^*(v,w) = B^*(v) \otimes_{\mathbb{R}} B^*(w)$ を考える。$S^*_{p,q}$ を截頭多項式環 $\mathbb{R}[x_1,x_2]/(x_1^{r_1-2p+1}, x_2^{r_2-2q+1})$ とするとき，$k \leqq (r_1+r_2-2p-2q)/2$ を満たす勝手な非負整数 k に対して，$\left(B^{k+p+q}(v,w), Q_\ell^{k+p+q}\right)$ と $\left(S^k_{p,q}, (-1)^{p+q}Q^k_{x_1+x_2}\right)$ は等長同型な内積空間である。

証明 構成より $B^{k+p+q}(v,w) = \langle \ell_1^k v\otimes w\rangle \oplus \langle \ell_1^{k-1}v \otimes \ell_2 w\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v\otimes \ell_2^k w\rangle$ である。対応 $\ell_1^{k-l}v\otimes \ell_2^k w \mapsto x_1^{k-l}x_2^l$ により定まる線型写像 $B^{k+p+q}(v,w) \to S^k_{p,q}$ が同型であることを示す。 ∎

5.7 [AHK18, Prop. 7.13] に関する命題

命題 5.15 ([AHK18, Prop. 7.13] のために) R_1^* と R_2^* を次元 r のポアンカレ双対代数とし次数付き環の準同型 $f\colon R_1^* \to R_2^*$ を考える。このとき f が全射であるならば f は同型である。

証明 f が単射であることを示せば良く，f が次数付き環の間の準同型であることから $q \leqq r$ を満たす勝手な非負整数 q に対して $f|_{R_1^q}\colon R_1^q \to R_2^q$ が単射であることを示せば良い。元 $x\in R_1^q$ が $f(x)=0$ を満たすと仮定する。線型写像の合成 $R_1^{r-q} \xrightarrow{x\cdot(-)} R_1^r \overset{f}{\twoheadrightarrow} R_2^r$ は仮定より零写像であるので $x\cdot(-)$ も零写像である。すると R_1^* のポアンカレ双対性より $x=0$ が従う。 ∎

6 主定理など（[AHK18] の 8 節に対応）

6.1 [AHK18, Lem. 8.1]

命題 6.1 ([AHK18, Lem. 8.1] のために) Z を中心とするマトロイドフリップ $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{M,\mathscr{P}_+}$ と $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-}$ 上の強凸区分的線形関数 ℓ_- を考える。$\Sigma_{M,\mathscr{P}_-}$ の錐 $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ が $Z\notin\mathscr{F}$ を満たすとき，$0<t<\sum_{i\in Z\setminus I}\ell_-(\mathbf{e}_i)$ を満たす正数 t に対して $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ の周りで $\ell_+(t)$ は強凸である。

証明 $Z\notin\mathscr{F}$ なので $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ は $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-}$ に属す。$\ell_- + \mathrm{res}(m)$ が $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ の上で零かつ $\mathrm{link}(\sigma_{I<\mathscr{F}}, \Sigma_{M,\mathscr{P}_-})$ の上では正となるような元 $m\in \mathbf{M}_E$ を取り，$\ell_- + \mathrm{res}(m) = \sum_{i\in E\setminus I} c_i x_i + \sum_{F\in\mathscr{P}_-\setminus\mathscr{F}} c_F x_F$ と表すことにする。[AHK18, Prop. 6.6] から

$$\ell_+(t) + \mathrm{res}(m') = \sum_{i\in E\setminus I} c_i x_i + \sum_{F\in\mathscr{P}_-\setminus\mathscr{F}} c_F x_F + \left(\sum_{i\in Z\setminus I} -t\right) x_Z$$

となる元 $m' \in \mathbf{M}_E$ が存在する。$\ell_+(t) + \mathrm{res}(m')$ は $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ 上で零である。錐 $\sigma_{J<\mathscr{G}} \in \mathrm{link}\left(\sigma_{I<\mathscr{F}}, \Sigma_{M,\mathscr{P}_+}\right)$ を考えると，$\sigma_{J<\mathscr{G}} = \sigma_{J<(\mathscr{G}\setminus\{Z\})} + \sigma_{\emptyset<\{Z\}}$ と表すことができ，第一項目の錐は $\mathrm{link}\left(\sigma_{I<\mathscr{F}}, \Sigma_{M,\mathscr{P}_-}\right)$ に属す。ゆえに $\ell_+(t) + \mathrm{res}(m')$ は $\sigma_{J<(\mathscr{G}\setminus\{Z\})}$ 上で正であり，また t の取り方より $(\ell_+(t) + \mathrm{res}(m'))(\mathbf{e}_Z) = \sum_{i\in Z\setminus I} c_i - t > 0$ であるから，$\ell_+(t) + \mathrm{res}(m')$ は $\sigma_{J<\mathscr{G}}$ 上で正であることが従う。 ∎

命題 6.2 ([AHK18, Lem. 8.1] のために) Z を中心とするマトロイドフリップ $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{M,\mathscr{P}_+}$ と $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-}$ 上の強凸区分的線形関数 ℓ_- を考える。$\Sigma_{M,\mathscr{P}_-}$ の錐 $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ が $Z \in \mathscr{F}$ を満たすとき，十分小さい正数 t に対して $\sigma_{I<\mathscr{F}}$ の周りで $\ell_+(t)$ は強凸である。

証明 $Z \in \mathscr{F}$ なので $\sigma_{I<(\mathscr{F}\setminus\{Z\})}$ は $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-}$ に属す。よって $\ell_- + \mathrm{res}(m)$ が $\sigma_{I<\mathscr{F}\setminus\{Z\}}$ 上で零かつ $\Sigma_{M,\mathscr{P}_-}$ における $\sigma_{I<(\mathscr{F}\setminus\{Z\})}$ の接続上で正となるように元 $m \in \mathbf{M}_E$ を取ることができる。$\ell_- = \sum_{i\in E\setminus I} c_i x_i + \sum_{F\in\mathscr{P}_-\setminus\mathscr{F}} c_F x_F$ と表すと [AHK18, Prop. 6.6] から

$$\ell_+(t) + \mathrm{res}(m') = \sum_{i\in E\setminus I} c_i x_i + \sum_{F\in\mathscr{P}_-\setminus\mathscr{F}} c_F x_F - t x_Z$$

となる元 $m' \in \mathbf{M}_E$ が存在する。$\mathscr{P}_- \cup \{E\}$ のフラット J を $\min(\mathscr{F}\setminus\{Z\})$ として，

$$\mathbf{e}_i \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\#(Z\setminus I)} & (i \in Z\setminus I\text{ のとき}) \\ \frac{-t}{\#(J\setminus Z)} & (i \in J\setminus Z\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そのほかの場合}) \end{cases}$$

で定まる線形関数 $m(t) \in \mathbf{M}_E$ を考え $m''(t) = m' + m(t)$ と置く。すると $\ell_+(t) + \mathrm{res}(m''(t))$ は $\sigma_{I<(\mathscr{F}\setminus\{Z\})}$ 上で零であり，また

$$\mathrm{res}(m(t))(\mathbf{e}_Z) = \#(Z\setminus I)\cdot\frac{t}{\#(Z\setminus I)} = t$$

であるから $\left(\ell_+(t) + \mathrm{res}(m''(t))\right)(\mathbf{e}_Z) = -t + t = 0$ である。また錐 $\sigma_{K<\mathscr{G}} \in \mathrm{link}\left(\sigma_{I<\mathscr{F}}, \Sigma_{M,\mathscr{P}_+}\right)$ を勝手に取ると，$\sigma_{K<\mathscr{G}} \in \mathrm{link}\left(\sigma_{I<(\mathscr{F}\setminus\{Z\})}, \Sigma_{M,\mathscr{P}_-}\right)$ でもある。勝手なフラット $G \in \mathscr{G}$ に対し $Z \subsetneq G$ であるから $\mathrm{res}(m(t))(\mathbf{e}_G) = 0$ であり，

$$\left(\ell_+(t) + \mathrm{res}(m')\right)(\mathbf{e}_G) = (\ell_- + \mathrm{res}(m))(\mathbf{e}_G) > 0$$

であることから $\left(\ell_+(t) + \mathrm{res}(m''(t))\right)(\mathbf{e}_G) > 0$ である。また勝手な元 $k \in K$ に対し

$$\left(\ell_+(t) + \mathrm{res}(m''(t))\right)(\mathbf{e}_k) = \begin{cases} \ell_-(\mathbf{e}_k) + \frac{t}{\#(Z\setminus I)} & (k \in Z\setminus I\text{ のとき}) \\ \ell_-(\mathbf{e}_k) - \frac{t}{\#(J\setminus Z)} & (k \in J\setminus Z\text{ のとき}) \\ \ell_-(\mathbf{e}_k) & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

であるから $0 < t < \inf\left\{\ell_-(\mathbf{e}_k) \mid \mathrm{cone}(\{\mathbf{e}_k\}) \in \mathrm{link}\left(\sigma_{Z<(\mathscr{F}\setminus\{Z\})}, \Sigma_{M,\mathscr{P}_-}\right)\right\}$ を満たす正数 t に対し $\left(\ell_+(t) + \mathrm{res}(m''(t))\right)(\mathbf{e}_k) > 0$ である。ゆえに上の不等式を満たす正数 t に対し $\ell_+(t) + \mathrm{res}(m''(t))$ は $\sigma_{K<\mathscr{G}}$ 上で正である。 ∎

参考文献

[AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. "Hodge theory for combinatorial geometries". In: **Ann. of Math. (2) 188**.2 (2018), pp. 381–452.

[GG82] Robert Gordon and Edward L. Green. "Graded Artin algebras". In: **J. Algebra 76**.1 (1982), pp. 111–137.

[松村 00] 英之 松村. **復刊 可換環論**. 共立出版, 2000.