クルルの高度定理の「逆」

2025 年 11 月 7 日 23 時 19 分更新

クルルの高度定理と呼ばれる有名な定理がある。

定理 1　R をネーター環とし，r 個の R の元 $a_1, \dots, a_r$ で生成されるイデアルを $(a_1, \dots, a_r)$ とする。このとき $(a_1, \dots, a_r)$ に属す極小素イデアルの高さは r 以下である。

この定理の「逆」も成立する。

定理 2　R をネーター環とし，その素イデアル $\mathfrak{p}$ を一つ取る。定理 1 から $\mathfrak{p}$ の高さは有限である。$\mathfrak{p}$ の高さを r と置く。このとき $\mathfrak{p}$ が $(a_1, \dots, a_r)$ に属す極小素イデアルであるような r 個の元 $a_1, \dots, a_r$ が存在する。

証明　r に関する帰納法で示す。$r = 0$ のとき $\mathfrak{p}$ は零イデアルに属す極小素イデアルであるから主張が成り立つ。$r > 0$ のときを考える。R がネーターであるから，$\mathfrak{p} = (p_1, \dots, p_m)$ と表せる。$\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R : \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}\}$ を S と置くとき，勝手な S の元 $\mathfrak{q}$ に対して $p_i \notin \mathfrak{q}$ となる番号 i がある。なんとなれば，このような番号が無かったとし，$p_i \in \mathfrak{q}_i \in S$ なる $\mathfrak{q}_i$ を各番号で取ると，$\mathfrak{p} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i$ となるので，素イデアル回避よりある番号について $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_i$ である。これは $\mathfrak{q}_i \subsetneqq \mathfrak{p}$ であることに反する。この条件を満足する番号 i を取り p_i を a_r と置く。S の中から高さ $r-1$ の素イデアル $\mathfrak{q}$ を取ると，帰納法の仮定から $\mathfrak{q}$ が $(a_1, \dots, a_{r-1})$ に属す極小素イデアルであるような $r-1$ 個の元 $a_1, \dots, a_{r-1}$ を取れる。すると $\mathfrak{p}$ に狭義に包含される素イデアルに a_r が属さないので，$\mathfrak{p}$ は $(a_1, \dots, a_r)$ に属す極小素イデアルである。

証明終