Decomposição LU

Processo de resolução:

$$Ax = b$$

Fazendo $A = LU$ temos

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

Resolvendo o sistema triangular inferior

$$Ly = b$$

achamos y
e
resolvendo o sistema triangular superior

$$Ux = y$$

achamos x

Decomposição LU

Processo de decomposição LU:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Decomposição LU

Para calcular os elementos da primeira linha de A temos que multiplicar a primeira linha de L por cada coluna de U. Como a primeira linha de L só tem um elemento, é possivel calcular cada elemento da primeira linha de U.

Calculando a primeira linha de U usando a primeira linha de A:

$$a_{11} = u_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}$$

$$a_{12} = u_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$

$$\ldots$$

$$a_{1n} = u_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}$$

Decomposição LU

Calculando a primeira coluna de L usando a primeira coluna de A:

$$a_{21} = l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$a_{31} = l_{31}u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$\dots$$

$$a_{n1} = l_{n1}u_{11} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

A seguir calcula-se:

- segunda linha de U
- segunda coluna de L
- terceira linha de U
- terceira coluna de L
- ...

Resolver o sistema a seguir usando o método de decomposição LU:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema a seguir usando o método de decomposição LU:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\overline{x} = (-3, 5, 0)^t$$

Decomposição LU

Cálculo do termo genérico de U:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1 \ldots n, i \leq j$$

Cálculo do termo genérico de L:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad i, j = 1 \ldots n, i > j$$

Algoritmo da decomposição:

for $p \leftarrow 1$ **to** n **do**
  $l_{pp} \leftarrow 1$
  for $j \leftarrow p$ **to** n **do**
    $u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{kj}$
  end
  for $i \leftarrow p+1$ **to** n **do**
    $l_{ip} = \frac{1}{u_{pp}} \left(a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} u_{kp} \right)$
  end
end