Método de decomposição de Cholesky

Teorema: Seja $A = (a_{ij}) \quad i,j = 1..n$ uma matriz simétrica e definida positiva, então existe uma matriz $R = (r_{ij}) \quad i,j = 1..n$ triangular superior com diagonal positiva tal que $A = R^t R$.
Observe-se que $det(A) = (det(R))^2 = (\prod_{i=1}^{n} r_{ii})^2$.

Método de Cholesky

Processo de decomposição Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & & & & \\ r_{12} & r_{22} & & & \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ & & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Método de Cholesky

Similarmente ao método de decomposição LU, para calcular os elementos da primeira linha de A temos que multiplicar a primeira linha de R^t por cada coluna de R. Como a primeira linha de R^t só tem um elemento, é possivel calcular cada elemento da primeira linha de R.

Calculando a primeira linha de R usando a primeira linha de A:

$$a_{11} = r_{11} \cdot r_{11} \Rightarrow r_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = r_{11} \cdot r_{12} \Rightarrow r_{12} = \frac{a_{12}}{r_{11}}$$

$$a_{13} = r_{11} \cdot r_{13} \Rightarrow r_{13} = \frac{a_{13}}{r_{11}}$$

$$\cdots$$

$$a_{1n} = r_{11} \cdot r_{1n} \Rightarrow r_{1n} = \frac{a_{1n}}{r_{11}}$$

Método de Cholesky

Calculando a segunda linha de R usando a segunda linha de A:

$$a_{22} = r_{12}r_{12} + r_{22}r_{22} = r_{12}^2 + r_{22}^2 \Rightarrow r_{22}^2 = a_{22} - r_{12}^2 \Rightarrow r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2}$$

$$a_{23} = r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} \Rightarrow r_{23} = \frac{a_{23} - r_{12}r_{13}}{r_{22}}$$

$$a_{24} = r_{12}r_{14} + r_{22}r_{24} \Rightarrow r_{24} = \frac{a_{24} - r_{12}r_{14}}{r_{22}}$$

$$\ldots$$

$$a_{2n} = r_{12}r_{1n} + r_{22}r_{2n} \Rightarrow r_{2n} = \frac{a_{2n} - r_{12}r_{1n}}{r_{22}}$$

Método de Cholesky

Cálculo do termo genérico de R pertencente à diagonal principal:

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2} \quad i = 1 \ldots n$$

Cálculo do termo genérico de R não pertencente à diagonal principal:

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right) \quad j = i + 1 \ldots n$$

Método de Cholesky

Resolve-se o sistema $Ax = b$ fazendo $A = R^t R$, assim temos $Ax = b \Rightarrow R^t Rx = b$.
Fazendo $Rx = y$ temos

$$R^t y = b$$

.
Assim resolve-se

$$R^t y = b$$

em y e

$$Rx = y$$

em x obtendo-se a solução.

Método de Cholesky

Resolver o sistema a seguir usando o método de Cholesky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\overline{x} = (1, -2, 1)^t$$