

Лабораторная работа 8

Целочисленная арифметика многократной точности

Греков Максим Сергеевич

Содержание

1	Цели и задачи	4
1.1	Цель лабораторной работы	4
2	Выполнение лабораторной работы	5
2.1	Длинная арифметика	5
2.2	Сложение неотрицательных целых чисел	5
2.3	Вычитание неотрицательных целых чисел	6
2.4	Умножение неотрицательных целых чисел столбиком	6
2.5	Быстрый столбик	7
2.6	Деление многоразрядных целых чисел	7
2.7	Пример работы алгоритма	8
3	Выводы	9

List of Figures

2.1 Работа алгоритма 8

1 Цели и задачи

1.1 Цель лабораторной работы

Ознакомление с алгоритмами целочисленной арифметики многократной точности, а также их последующая программная реализация.

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Длинная арифметика

Высокоточная (длинная) арифметика — это операции (базовые арифметические действия, элементарные математические функции и пр.) над числами большой разрядности (многоразрядными числами), т.е. числами, разрядность которых превышает длину машинного слова универсальных процессоров общего назначения (более 128 бит).

2.2 Сложение неотрицательных целых чисел

- Вход. Два неотрицательных числа $u = u_1 u_2 \dots u_n$ и $v = v_1 v_2 \dots v_n$; разрядность чисел n ; основание системы счисления b .
- Выход. Сумма $w = w_0 w_1 \dots w_n$, где w_0 - цифра переноса, всегда равная 0 либо 1.

1. Присвоить $j = n, k = 0$ (j идет по разрядам, k следит за переносом).
2. Присвоить $w_j = (u_j + v_j + k) \pmod{b}$, где $k = \left\lfloor \frac{u_j + v_j + k}{b} \right\rfloor$.
3. Присвоить $j = j - 1$. Если $j > 0$, то возвращаемся на шаг 2; если $j = 0$, то присвоить $w_0 = k$ и результат: w .

2.3 Вычитание неотрицательных целых чисел

- Вход. Два неотрицательных числа $u = u_1 u_2 \dots u_n$ и $v = v_1 v_2 \dots v_n$, $u > v$; разрядность чисел n ; основание системы счисления b .
 - Выход. Разность $w = w_0 w_1 \dots w_n = u - v$.
1. Присвоить $j = n, k = 0$ (k – заём из старшего разряда).
 2. Присвоить $w_j = (u_j - v_j + k) \pmod{b}$; $k = \left\lfloor \frac{u_j - v_j + k}{b} \right\rfloor$.
 3. Присвоить $j = j - 1$. Если $j > 0$, то возвращаемся на шаг 2; если $j = 0$, то результат: w .

2.4 Умножение неотрицательных целых чисел столбиком

- Вход. Числа $u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_m$; основание системы счисления b .
 - Выход. Произведение $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$.
1. Выполнить присвоения: $w_{m+1} = 0, w_{m+2} = 0, \dots, w_{m+n} = 0, j = m$ (j перемещается по номерам разрядов числа v от младших к старшим).
 2. Если $v_j = 0$, то присвоить $w_j = 0$ и перейти на шаг 6.
 3. Присвоить $i = n, k = 0$ (значение i идет по номерам разрядов числа u , k отвечает за перенос).
 4. Присвоить $t = u_i \cdot v_j + w_{i+j} + k, w_{i+j} = t \pmod{b}, k = \left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor$.
 5. Присвоить $i = i - 1$. Если $i > 0$, то возвращаемся на шаг 4, иначе присвоить $w_j = k$.
 6. Присвоить $j = j - 1$. Если $j > 0$, то вернуться на шаг 2. Если $j = 0$, то результат: w .

2.5 Быстрый столбик

- Вход. Числа $u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_m$; основание системы счисления b .
- Выход. Произведение $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$.

1. Присвоить $t = 0$.
2. Для s от 0 до $m + n - 1$ с шагом 1 выполнить шаги 3 и 4.
3. Для i от 0 до s с шагом 1 выполнить присвоение $t = t + u_{n-i} \cdot v_{m-s+i}$.
4. Присвоить $w_{m+n-s} = t \pmod{b}, t = \lfloor \frac{t}{b} \rfloor$. Результат: w .

2.6 Деление многоразрядных целых чисел

- Вход. Числа $u = u_n \dots u_1 u_0, v = v_t \dots v_1 v_0, n \geq t \geq 1, v_t \neq 0$.
- Выход. Частное $q = q_{n-t} \dots q_0$, остаток $r = r_t \dots r_0$.

1. Для j от 0 до $n - t$ присвоить $q_j = 0$.
2. Пока $u \geq vb^{n-t}$, выполнять: $q_{n-t} = q_{n-t} + 1, u = u - vb^{n-t}$.
3. Для $i = n, n - 1, \dots, t + 1$ выполнять пункты 3.1 – 3.4: 3.1. если $u_i \geq v_t$, то присвоить $q_{i-t-1} = b - 1$, иначе присвоить $q_{i-t-1} = \frac{u_i b + u_{i-1}}{v_t}$. 3.2. пока $q_{i-t-1}(v_t b + v_{t-1}) > u_i b^2 + u_{i-1} b + u_{i-2}$ выполнять $q_{i-t-1} = q_{i-t-1} - 1$. 3.3. присвоить $u = u - q_{i-t-1} b^{i-t-1} v$. 3.4. если $u < 0$, то присвоить $u = u + vb^{i-t-1}, q_{i-t-1} = q_{i-t-1} - 1$.
4. $r = u$. Результат: q и r .

2.7 Пример работы алгоритма

```
[6, 9, 1, 3, 4]
[4, 4, 4, 4, 4]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3999999999999986, 4, 0, 0]
[4, 7, 8, 3, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 0]
([0, 2, 9], -39899091)
```

Figure 2.1: Работа алгоритма

3 Выводы

Ознакомились с алгоритмами целочисленной арифметики многократной точности.

Произвели их программную реализацию.