

Лабораторная работа 3

Греков Максим Сергеевич

2021 Москва

RUDN University, Moscow, Russian Federation

Цель работы

Рассмотреть некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера.

Освоить базовые навыки работы с открытым программным обеспечением для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем - OpenModelica.

Построить графики изменения численности войск армий в заданных случаях.

Описание задачи

В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 44 200 человек, а в распоряжении страны Y армия численностью в 54 100 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

Параметры модели

Постройте графики изменения численности войск армии X и армии Y для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dy} = -0,312x(t) - 0,456y(t) + \sin(t + 3)$$

$$\frac{dx}{dy} = -0,256x(t) - 0,34y(t) + \cos(t + 7)$$

2. Модель ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0,318x(t) - 0,615y(t) + |\cos(8t)|$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,312x(t)y(t) - 0,512y(t) + |\sin(6t)|$$

Решение задачи

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связано с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя.

Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно, $a(t)$, $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери.

Функции $P(t)$, $Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды.

Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами.

Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан.

В результате модель принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

В этой системе все величины имеют тот же смысл, что и в предыдущей системе.

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными.

Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени a солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x).

Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления.

Состояние системы описывается точкой (x,y) положительного квадранта плоскости.

Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий.

Тогда модель принимает вид

$$\begin{cases} dx = -by \\ dy = -cx \end{cases}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$$cxdx = bydy, cx^2 - by^2 = C$$

Решение задачи

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис.1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

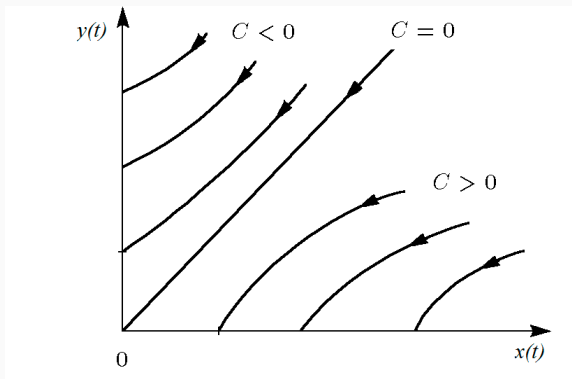


Figure 1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y .

Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время).

Армия у выигрывает, противник уничтожен.

Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия х.

В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий.

Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает длиться, когда оба противника уже обессилены.

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Стоит помнить, что эта модель сильно идеализирована и неприменима к реальной ситуации. Но может использоваться для начального анализа.

Если рассматривать второй случай (война между регулярными войсками и партизанскими отрядами) с теми же упрощениями, то эта модель принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = -by(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t)$$

Эта система приводится к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0,$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

Решение задачи

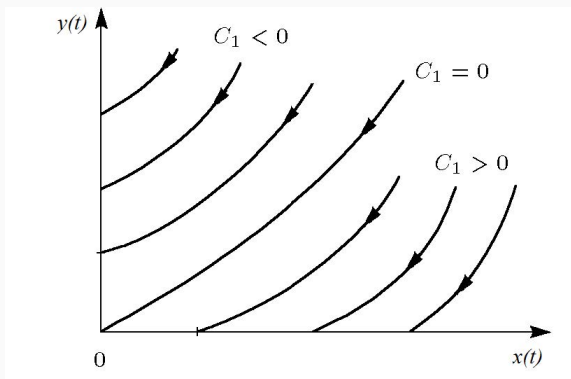


Figure 2: Фазовые траектории системы

Из рис. 2 видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны.

Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения.

При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$.

Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину.

Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск ($x(0)$), должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$.

Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.

Рассмотренные простейшие модели соперничества соответствуют системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, широко распространенным при описании многих естественно научных объектов.

Результаты решения

Результаты решения

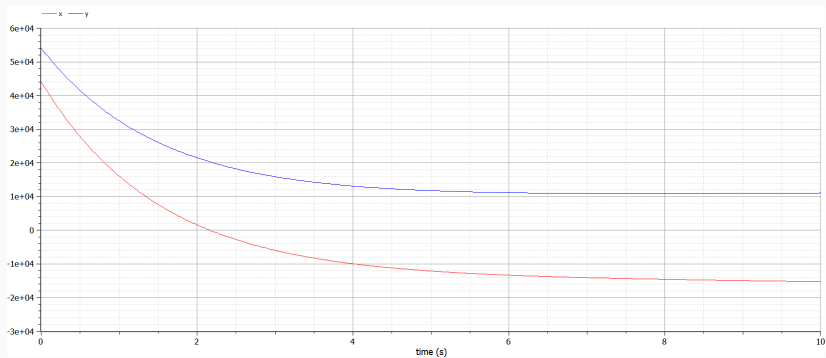


Figure 3: Модель боевых действий между регулярными войсками

Результаты решения

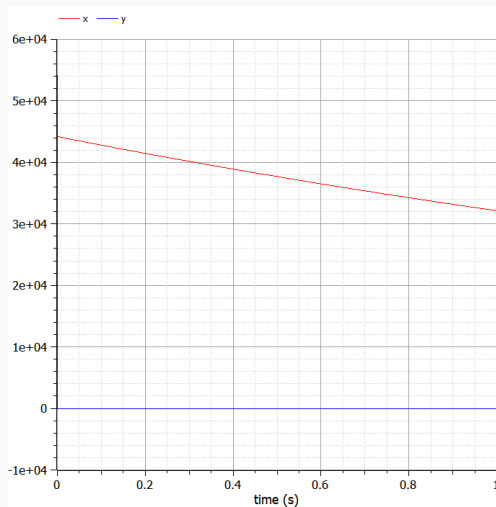


Figure 4: Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Результаты решения

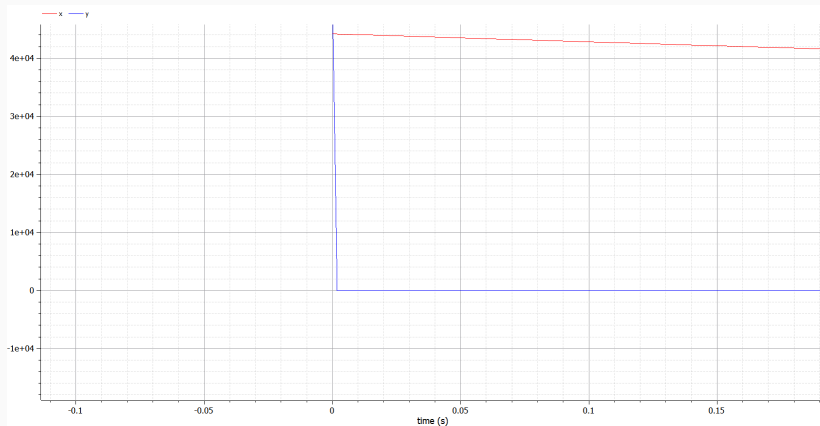


Figure 5: Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (в масштабе)

Вывод

Рассмотрели некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера.

Освоили базовые навыки работы с открытым программным обеспечением для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем - OpenModelica.

Построили графики изменения численности войск армий в заданных случаях.

