

Лабораторная работа 2

Греков Максим Сергеевич

2021 Москва

RUDN University, Moscow, Russian Federation

Цель работы

Рассмотреть задачу о погоне.

Освоить базовые навыки работы с высокоуровневым языком программирования, созданным для математических вычислений - Julia.

Научиться с помощью него решать ДУ, строить графики, что позволит проектировать математические модели.

Постановка задачи

Постановка задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 19,1 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,2 раза больше скорости браконьерской лодки.

Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

Решение задачи

1. Примем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_0 ($\theta = x_0 = 0$).

Решение задачи

Полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. 1) нахождения катера береговой охраны.

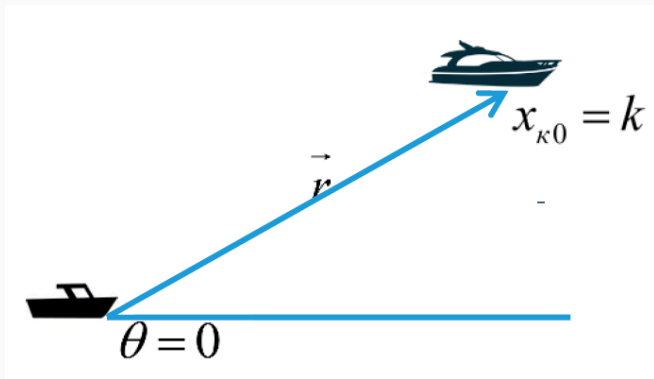


Figure 1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки.

Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса).

Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/2v$ (во втором случае $x + k/2v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы.

Решение задачи

Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{nv}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k + x}{nv}.$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{19.1}{6.2}$ и $x_2 = \frac{19.1}{4.2}$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v .

Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость.

Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса

$$v_r = \frac{dr}{dt},$$

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса

$$v_{\tau} = r * \frac{d\theta}{dt}$$

Так как $v_{\tau} = v_l$, то $\frac{dr}{dt} = v_l$.

Решение задачи

Из рисунка (учитывая, что радиальная скорость равна v) видно (рис. 2), что $v_\tau = \sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3}v$.

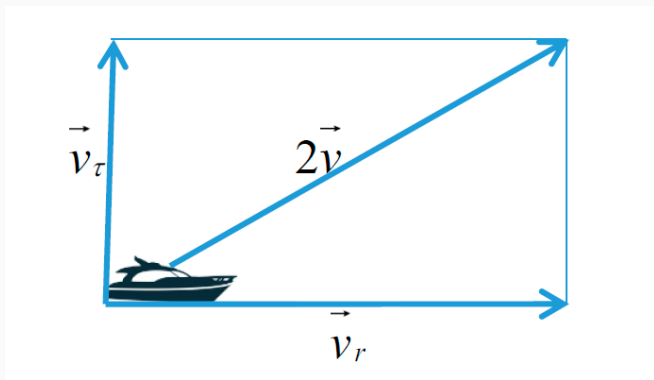


Figure 2: Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

6. Решение задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{d\theta}{dt} * r = \sqrt{3}v \end{cases}$$

С начальными условиями $\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = 6.2 \end{cases}$ и $\begin{cases} \theta_1 = -\pi \\ r_1 = 4.2 \end{cases}$.

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Результаты решения

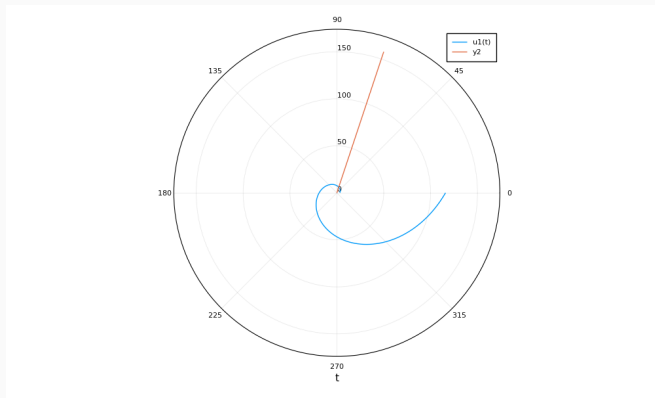


Figure 3: График: 1 случай

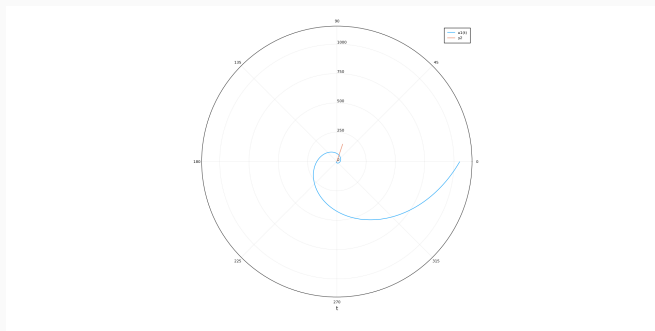


Figure 4: График: 2 случай

Вывод

Рассмотрели задачу о погоне.

Освоили базовые навыки работы с высокоуровневым языком программирования, созданным для математических вычислений - Julia.

Научились с помощью него решать ДУ, строить графики.

