Лабораторная работа 5

Модель хищник-жертва

Греков Максим Сергеевич

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть модель - хищник-жертва.

Повысить навыки работы с открытым программным обеспечением для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем - OpenModelica.

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также график изменения численности хищников и численности жертв.

2 Описание задачи

2.1 Общее описание задачи

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

2.2 Формулы

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников.

Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy).

Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

2.3 Теоретический материал

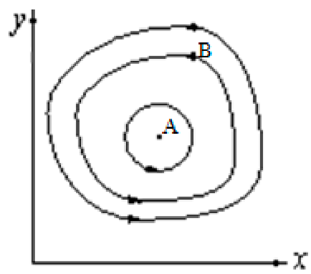

Figure 2.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$.

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \epsilon f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \epsilon g(x, y), \epsilon << 1$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 (рис. 2,3,4).

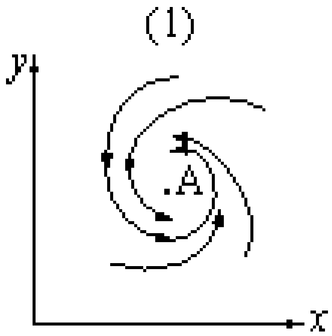

Figure 2.2: Первый случай

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

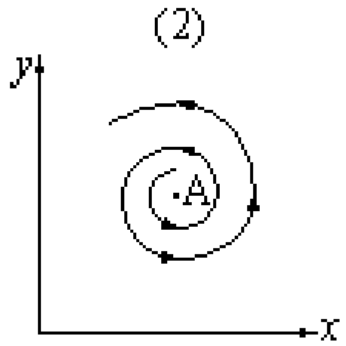

Figure 2.3: Второй случай

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

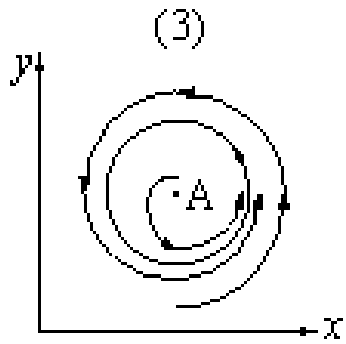

Figure 2.4: Третий случай

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием А с течением времени устанавливается периодический режим.

В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия.

Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния А приводит не к малым колебаниям около А, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды.

Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле).

Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

3 Постановка задачи

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.81x(t) + 0.048x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.76y(t) - 0.038x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:

$$x_0 = 7, y_0 = 29$$

Найдите стационарное состояние системы.

4 Решение задачи

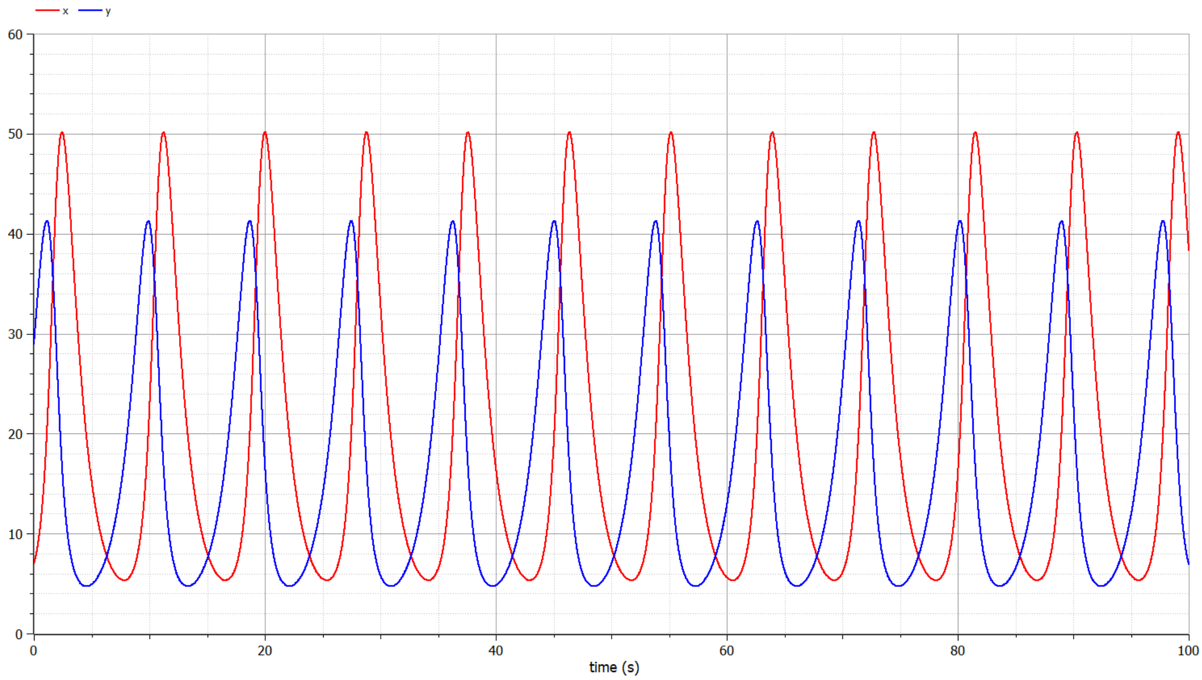

Figure 4.1: График изменения численности хищников и численности жертв

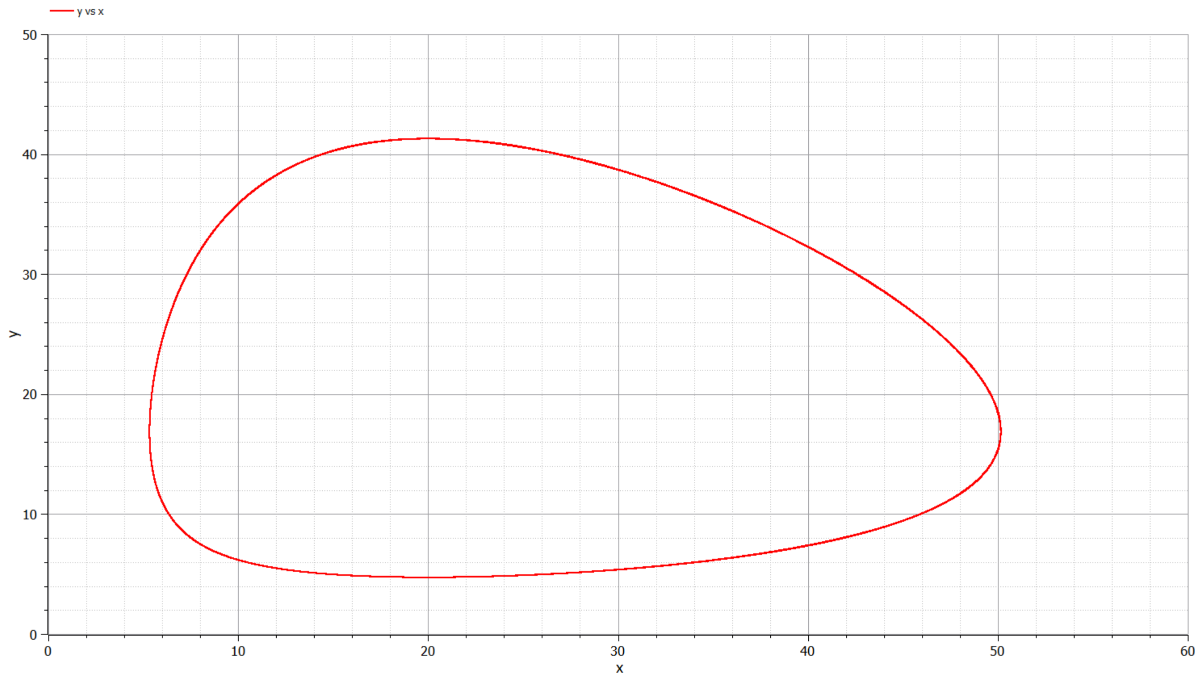

Figure 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв

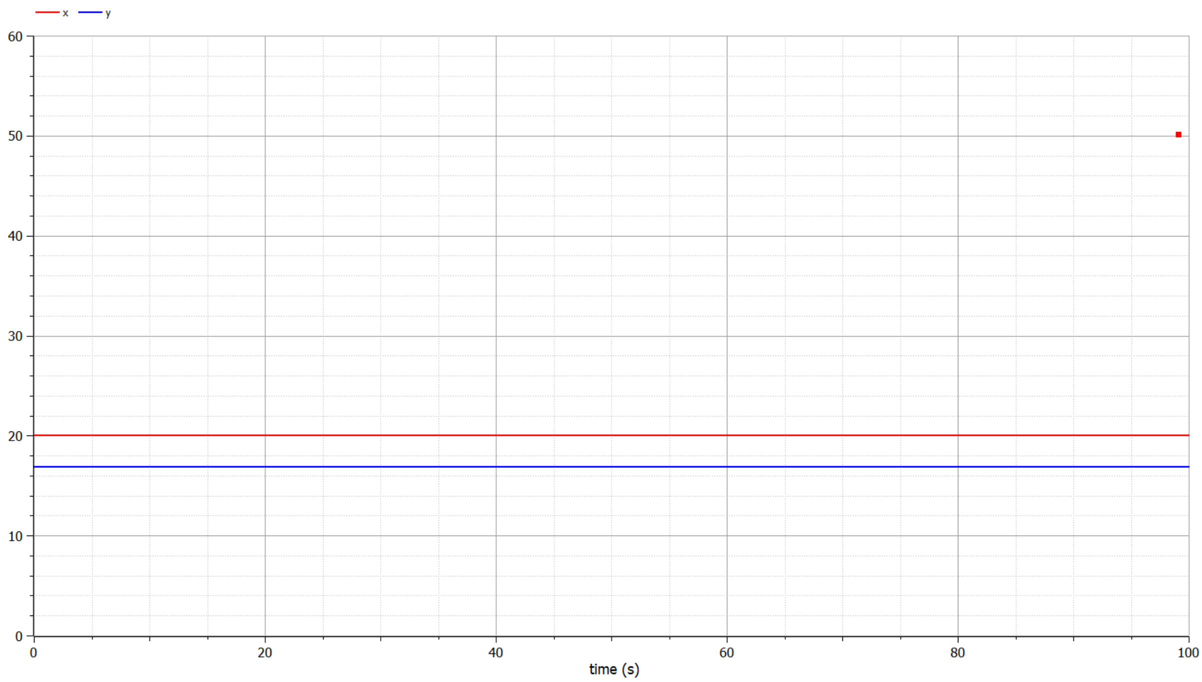

Figure 4.3: График стационарного состояния системы.

5 Код программы

```
model var1

parameter Real a=-0.81;
parameter Real b=-0.048;
parameter Real c=-0.76;
parameter Real d=-0.038;

Real x(start=7);
Real y(start=29);

//Real x(start=c/d);
//Real y(start=a/b);

equation
  der(x)=a*x-b*x*y;
  der(y)=-c*y+d*x*y;

end var1;
```

6 Вывод

Рассмотрели модель - хищник-жертва.

Повысили навыки работы с открытым программным обеспечением для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем - OpenModelica.

Построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также график изменения численности хищников и численности жертв.