Équipe 3

Agossou Aziel
111225718

Cayenna Sarah Khoulalene
111 151 254

Mustapha Bouhsen
910 201 346

Gestion du risque financier II

ACT-2011

Travail pratique

Travail présenté à

Thomas Landry

École d'actuariat

Université Laval

Hiver 2021

Numéro 1 :

Approximation des paramètres à utiliser dans un modèle d'arbre binomial à terme (arbre forward)

En nous basant sur les données mensuelles historiques dans le fichier Excel du travail pratique, on trouve les approximations suivantes :

- L'écart type des rendements mensuels : Std = $\left(\sum_{i=1}^{517} \frac{(r_i-\bar{r})^2}{517-1}\right)^{0,5}$
- Pour l'annualiser, on a : σ = Std * $\sqrt{12}$ = 0,1564

En nous basant sur les taux de rendement des bons du trésor d'échéance un an du Canada du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2019, on obtient une force de rendement dans un endroit neutre au risque de :

- $r = 0{,}0112$

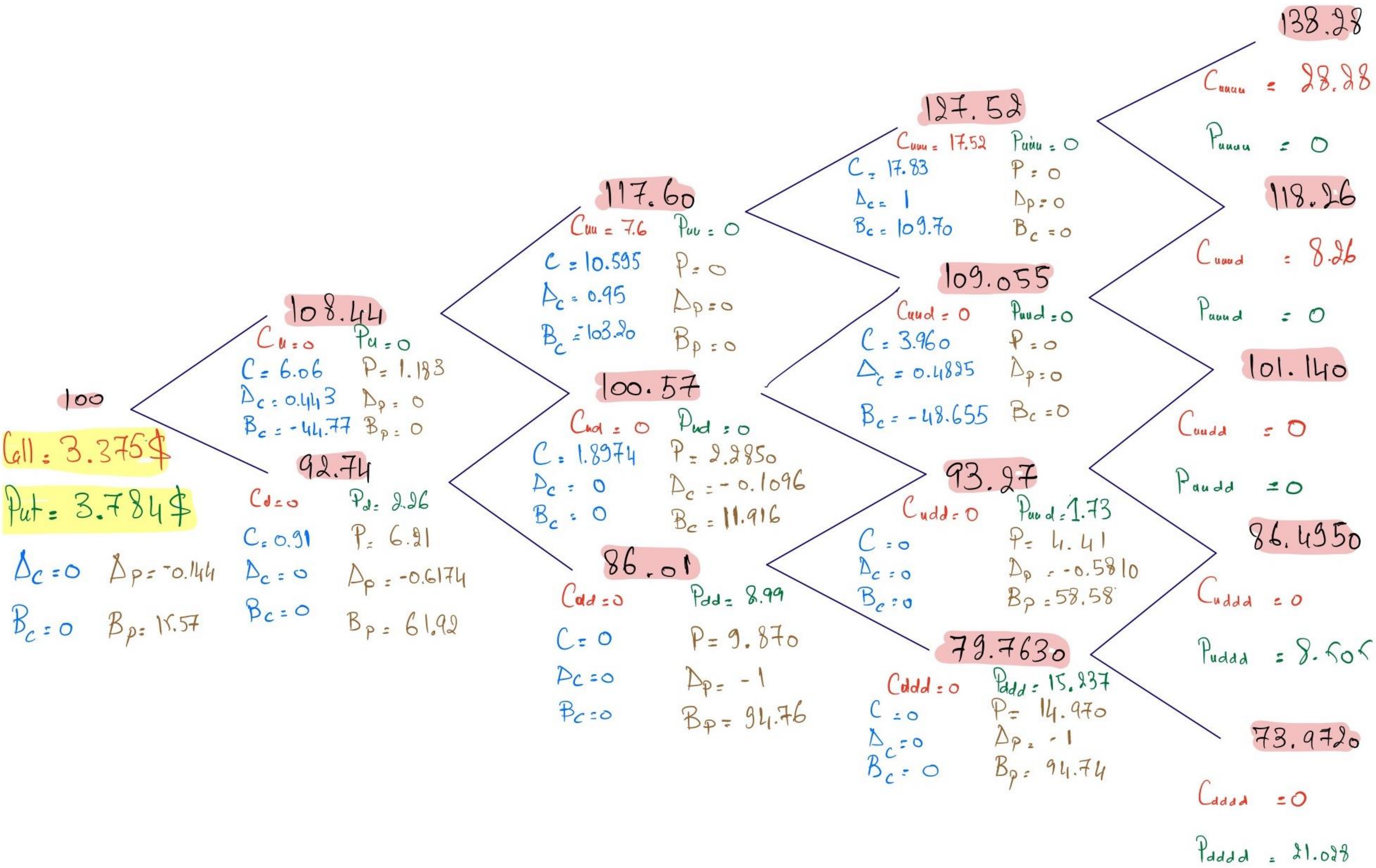
Numéro 2 :

A. Construction d'un arbre binomiale avec 4 périodes pour une échéance de 1 an, avec les résultats trouvés au numéro 1

Les paramètres à utiliser ici sont :

- $u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{(0.0112-0)*\frac{1}{4}+\sigma\sqrt{1/4}} = 1{,}0844$
- $d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{(0.0112-0)*\frac{1}{4}-\sigma\sqrt{1/4}} = 0{,}9270$
- $p = \frac{e^{rh}-d}{u-d} = 0{,}4805$
- $1-p = 0{,}5195$

Pour une option de vente européenne avec prix d'exercice de 95\$ et une option d'achat européenne avec prix d'exercice de 110\$, on a l'arbre binomial suivant :



Où :

- Détail des calculs pour l'arbre à 4 périodes de l'option d'achat

P_{4u} = max (0; 95 – S_{4u}) = max (0, 95 – 138.28) = 0

P_{3u1d} = max (0; 95 – S_{3u1d}) = max (0, 95 – 118.26) = 0

P_{2u2d} = max (0; 95 – S_{2u2d}) = max (0, 95 – 101.14) = 0

P_{3d1u} = max (0; 95 – S_{3d1u}) = max (0, 95 – 86.495) = 8.505

P_{4d} = max (0; 95 – S_{4d}) = max (0, 95 – 73.972) = 21.028

$P_{3u} = \{ P_{4u} \; * p + P_{3u1d} * (1-p)\}e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 0 * 0.5195\}e^{-\frac{0.0112}{4}} = 0$

$P_{2u1d} = \{ P_{3u1d} \; * p + P_{2u2d} * (1-p)\}e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 0 * 0.5195\}e^{-\frac{0.0112}{4}} = 0$

$P_{1u2d} = \{ P_{2u2d} \ \ * p + P_{3d1u} * (1-p)\} e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 8.505 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 4.4060$

$P_{3d} = \{ P_{1u3d} * p + P_{4d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{8.505 * 0.4805 + 21.028 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 14.8687$

$P_{2u} = \{ P_{3u} \ \ * p + P_{2u1d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 0 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 0$

$P_{2d} = \{ P_{2d1u} * p + P_{3d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{4.4060 * 0.4805 + 14.8687 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 9.870$

$P_{ud} = \{ P_{2u1d} \ \ * p + P_{u2d} * (1-p)\} e^{-rh} == \{0 * 0.4805 + 4.4060 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 2.2850$

$P_{u} = \{ P_{2u} \ \ * p + P_{ud} * (1-p)\} e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 2.2850 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 1.1834$

$P_{d} = \{ P_{du} \ \ * p + P_{2d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{2.2850 * 0.4805 + 9.8700 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 6.2080$

$P(95\$, 1) = \{ P_{u} \ \ * p + P_{d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{1.1834 * 0.4805 + 6.21 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 3.7841$

- Détail des calculs pour l'arbre à 4 périodes de l'option d'achat

C_{4u} = max (0; S_{4u} - 110) = max (0, 138.28 - 110) = 28.28

C_{3u1d} = max (0; S_{3u1d} - 110) = max (0, 118.26 - 110) = 8.26

C_{2u2d} = max (0; S_{2u2d} - 110) = max (0, 101.14 - 110) = 0

C_{3d1u} = max (0; S_{3d1u} - 110) = max (0, 86.495 - 110) = 0

C_{4d} = max (0; S_{4d} - 110) = max (0, 73.972 - 110) = 0

$C_{3u} = \{ C_{4u} \ \ * p + C_{3u1d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{28.28 * 0.4805 + 8.26 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 17.83$

$C_{2u1d} = \{ C_{3u1d} \ \ * p + C_{2u2d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{8.26 * 0.4805 + 0 * 0.5195\} e^{-0.0112/4} = 3.96$

$C_{1u2d} = \{ C_{2u2d} \ \ * p + C_{3d1u} * (1-p)\} e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 0 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 0$

$C_{3d} = \{ C_{1u3d} * p + C_{4d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 0 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 0$

$C_{2u} = \{ C_{3u} \ \ * p + C_{2u1d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{17.83 * 0.4805 + 3.96 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 10.5950$

$C_{2d} = \{ C_{2d1u} * p + C_{3d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{0 * 0.4805 + 0 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 0$

$C_{ud} = \{ C_{2u1d} \ \ * p + C_{u2d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{3.96 * 0.4805 + 0 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 1.8974$

$C_{u} = \{ C_{2u} \ \ * p + C_{ud} * (1-p)\} e^{-rh} = \{10.5950 * 0.4805 + 1.8974 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 6.0596$

$C_{d} = \{ C_{du} \ \ * p + C_{2d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{1.8974 * 0.4805 + 0 * 0.5195\} e^{-\frac{0.0112}{4}} = 0.9091$

$C(110\$, 1) = \{ C_{u} \ \ * p + C_{d} * (1-p)\} e^{-rh} = \{6.0596 \ \ * 0.4805 + 0.9091 * 0.5195\} e^{-0.0112/4} = 3.3745$

B. Construction d'un arbre binomiale avec 52 périodes pour une échéance de 1 an, avec les résultats trouvés au numéro 1

Les paramètres à utiliser ici sont :

- $u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{(0.0112-0)*\frac{1}{52}+0.1564\sqrt{1/52}} = 1{,}0221$
- $d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{(0.0112-0)*\frac{1}{52}-0.1564\sqrt{1/52}} = 0{,}9788$
- $p = \frac{e^{rh}-d}{u-d} = \frac{e^{0.0112/52}-0.9788}{1.0221-0.9788} = 0{,}4847$
- $1-p = 0{,}5153$

Dans le fichier « equipe3_TP_ACT2011.R » attaché à ce rapport, nous avons écrit le code R qui nous donne les détails sur les résultats suivants :

i. Calcul des prix d'options européennes d'achat et de vente d'échéance 1 an, avec prix d'exercice de respectivement 110$ et 95$. On trouve :

$$C(K = 110, T = 1) = 3.0187$$

$$P(K = 95, T = 1) = 3.5147$$

ii. Calcul du prix d'une option asiatique de type « option d'achat sur moyenne arithmétique », avec prix d'exercice de 110$.

Pour ce faire, nous avons simulé à chacune des 52 embranchements, une valeur du sous-jacent qui est soit supérieure à celui de la période précédente de u avec probabilité *p*, soit inférieure à celui de la période précédente d avec probabilité *(1 – p)*. Nous avons ensuite répété 5000 fois la même procédure. La moyenne arithmétique des prix de l'option pour les 52 semaines d'une simulation, est obtenue par la formule

$$C_j = max\left(\left(\sum_{i=1}^{52} \frac{S_{ji}}{52}\right) - K, 0\right), \ avec\ j = 1, \dots, 5000;\ K = 110\ et\ r = 0.0112$$

Nous avons ensuite calculé la moyenne arithmétique des 5000 résultats de C_j. On a :

$$C(K = 110, T = 1) = e^{-rT} * \sum_{i=1}^{5000} \frac{C_j}{5000} = 0.7916\ \$$$

iii. Calcul du prix d'une option asiatique de type « option de vente sur moyenne arithmétique », avec prix d'exercice de 95$.

Avec les résultats obtenus à la simulation précédente, nous pouvons calculer, pour chacune des 5000 simulations, la moyenne arithmétique des prix de l'option de vente pour les 52 prix simulés de l'indice boursier. On a :

$$P_j = max\left(K - \left(\sum_{i=1}^{52} \frac{S_{ji}}{52}\right), 0\right), \ avec\ j = 1, \dots, 5000;\ K = 95\ et\ r = 0.0112$$

La moyenne arithmétique des 5000 P_j nous donne :

$$P(K = 95; T = 1) = e^{-rT} * \sum_{i=1}^{5000} \frac{P_j}{5000} = 1.3365\ \$$$

iv. Calcul du prix d'une option asiatique de type « option d'achat à barrière désactivante », avec des prix d'exercice de 110$, et dont la barrière est établie à 105$.

L'option d'achat que nous avons ici n'est pas exercée si la valeur de l'indice boursier est inférieure à 110$. De plus, l'option est de type à barrière désactivante avec une barrière de 105$. Ceci implique que lorsque la valeur de l'indice boursier dépasse 105$, l'option devient non exerçable. Il n'y a pas de possibilité de faire du profit avec cette option. Donc son prix est nul.

$$C(K = 110, B = 105, T = 1) = 0$$

v. Calcul du prix d'une option asiatique de type « option de vente à barrière désactivante », avec des prix d'exercice de 95$, et dont la barrière est établie à 105$.

Nous reprenons les résultats de notre simulation pour calculer le prix d'une option de vente à barrière désactivante, avec prix d'exercice de 95$. L'option n'est pas exercée si la valeur de l'indice boursier est supérieure à 95$. Si la valeur d'un indice boursier est supérieure à 105$, on lui affecte une valeur de 0$. Par la suite, en calcule la valeur à l'échéance des autres indices boursiers parmi les 5000 qui ont une valeur strictement positive après les 52 semaines avec la formule

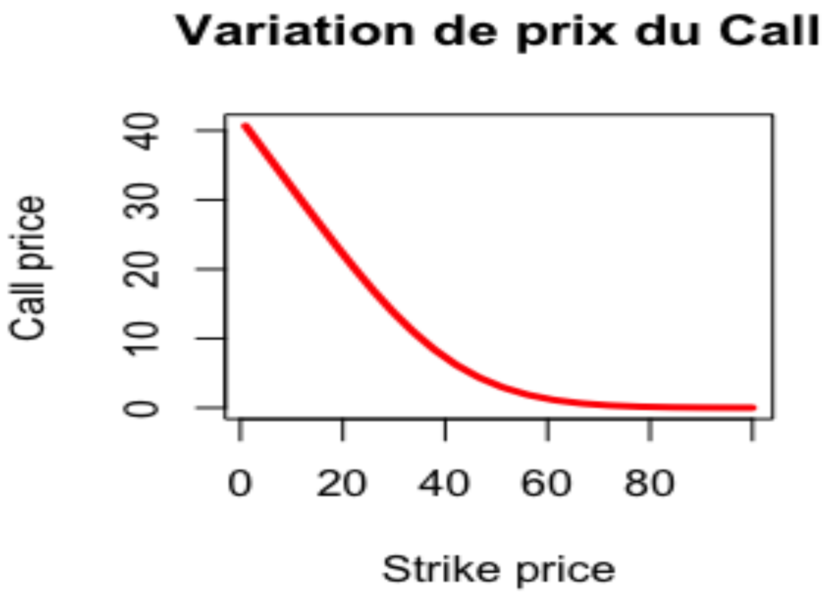
$$(Valeur \text{ à } l'\text{é}ch\text{é}ance)_j = max(95 - S_j, 0)$$

Enfin, le prix de l'option se trouve en faisant la moyenne des 5000 valeurs à l'échéance que nous avons. On a :

$$P(K = 95; B = 105; T = 1) = e^{-rT} * \sum_{i=1}^{5000} \frac{(Valeur \text{ à } l'\text{é}ch\text{é}ance)_j}{5000} = 2.6593 \text{ \$}$$

Numéro 3 :

A. Graphique illustrant la relation entre le prix à payer pour l'option d'achat européenne avec le modèle binomial à 52 périodes du numéro 2 en fonction du prix d'exercice.

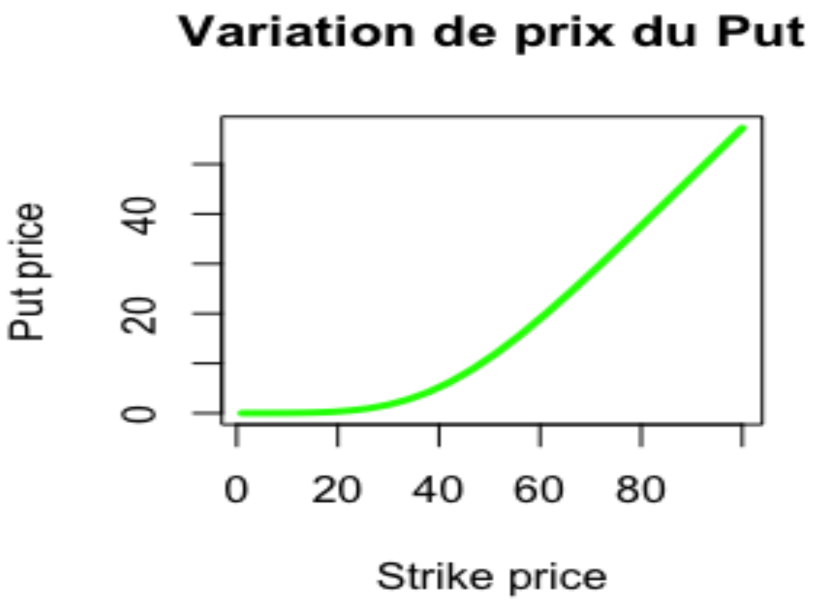


En variant le prix d'exercice k = 110$ de ±50$ avec des pas de 1$ (voir le code R) nous obtenons ce graphique. Nous remarquons le prix de l'option est décroissant.

Si le prix d'exercice est bas nous aurons plus de chance d'exercer l'option car le sous-jacent aura plus de chance de dépasser la valeur d'exercice donc l'option coutera plus chère. Par contre si le prix d'exercice est élevé, le sous-jacent aura moins de chance de dépasser le prix d'exercice et donc moins de chance d'exercer l'option.

Sinon, nous pourrions supposer que le prix du sous-jacent est fixe dans le temps, donc la valeur a l'échancre max(S - K ; 0) sera décroissante quand le prix d'exercice augmente

B. Graphique illustrant la relation entre le prix à payer pour l'option de vente européenne avec le modèle binomial à 52 périodes du numéro 2 en fonction du prix d'exercice.

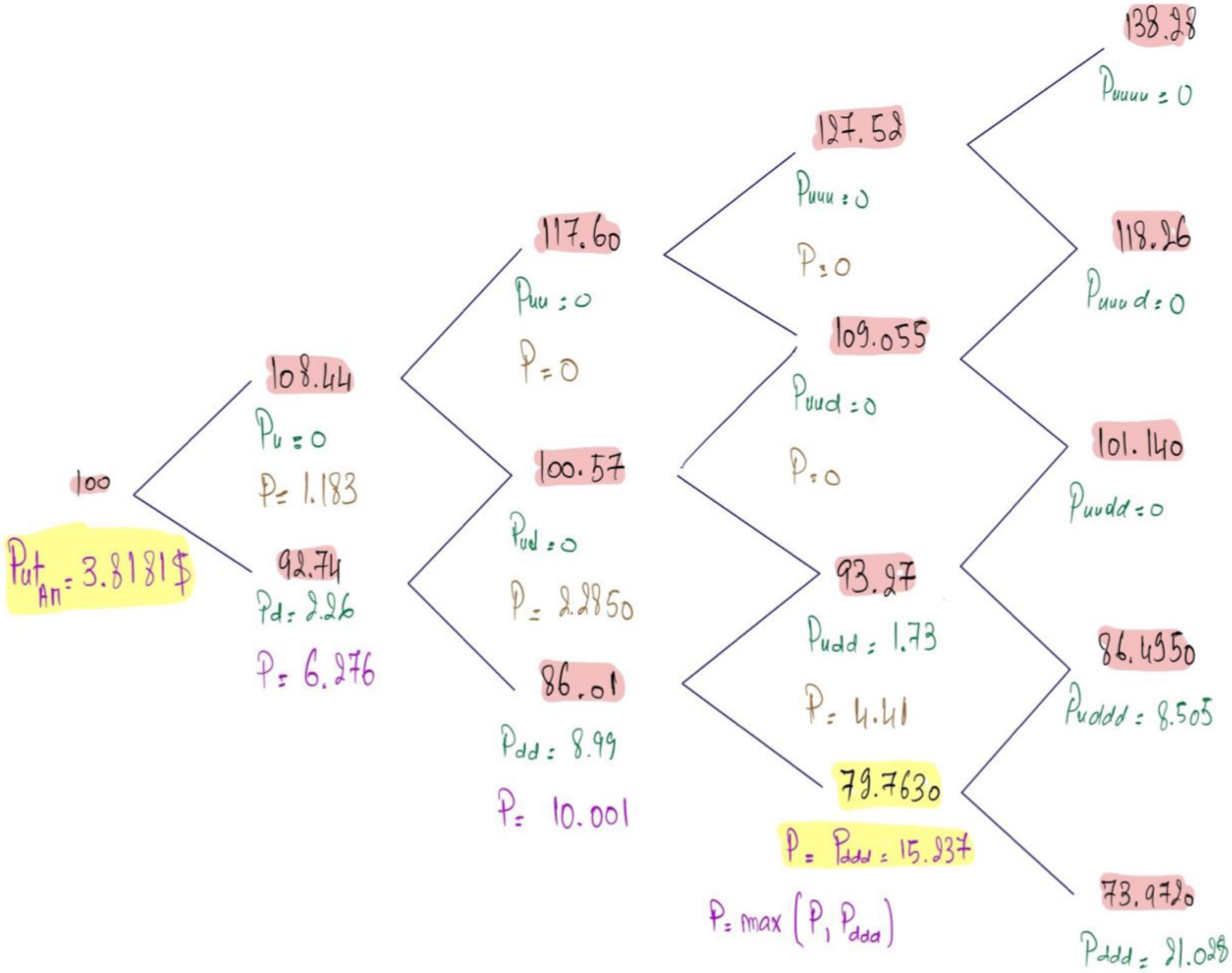


Nous avons refait la même procédure que celle de l'option d'achat mais cette fois avec un prix d'exercice k = 95 (voir le code R) nous obtenons alors ce graphique. Nous remarquons que le prix l'option est croissant.

Si nous fixerons le prix du sous-jacent et que nous varions le prix d'exercice à la hausse, la valeur à l'échéance max(K - S ;0) sera croissante.

Numéro 4 :

A. Construction d'un arbre binomiale avec 4 périodes pour une échéance de 1 an, pour une option de vente américaine avec prix d'exercice 95$



B. Justification et illustration de toute différence (ou ressemblance) par rapport aux résultats obtenus avec une option de vente européenne avec les mêmes caractéristiques.

- Au nœud où l'indice boursier vaut *Sddd*, l'option américaine vaut 15,237 $, c'est-à-dire sa valeur en effectuant un exercice hâtif de l'option. Si l'option n'est pas exercée à ce nœud, sa valeur est alors identique à celle d'une option européenne avec les mêmes caractéristiques, soit 14,970 $. L'augmentation de la valeur de l'option à ce nœud, due à la possibilité d'un exercice hâtif, a un effet sur la valeur de certaines options vers la gauche de l'arbre.
- Au nœud où l'indice boursier vaut *Sdd*, La valeur de l'option américaine est égale à 10,001$ contre 9,87$ pour une option européenne avec les mêmes caractéristiques. Cette augmentation de valeur est due à l'augmentation de la valeur de l'option au nœud *Sddd*.

- Le prix de l'option américaine au nœud *Sd* vaut 6,276\$, ce qui est supérieur à 6,210\$, prix de l'option européenne au même nœud et aux mêmes caractéristiques. Cette augmentation de valeur est due à l'augmentation de la valeur de l'option au nœud *Sdd,* résultant de l'exercice hâtif au nœud *Sddd*.
- La valeur initiale de l'option de vente américaine est égale à 3,8181\$, alors que la valeur initiale de l'option de vente européenne aux mêmes caractéristiques est 3,7840\$. Cette augmentation de valeur est due à l'exercice hâtif au nœud *Sddd*.
- Les valeurs de l'option de vente américaine aux nœuds restants sont les mêmes que celles trouvées avec l'option de vente européenne aux mêmes caractéristiques. Cette situation s'explique par le fait que, dans tous les cheminements possibles qui mènent à chacun de ces nœuds, il n'y en a pas où un exercice hâtif pourrait être avantageux.

Numéro 5 :

A. Nous cherchons la valeur des options européennes (achat et vente) présentées au numéro 2 pour une échéance d'un an avec le modèle de Black-Scholes.

- Pour l'option d'achat, on a :

$$C(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Se^{-\delta T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

Comme il n'y a pas de dividendes, on a :

$$C(S, K, \sigma, r, T, 0) = S * N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left|\left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\right|^T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{ln\left(\frac{100}{110}\right) + 0{,}0112 + \frac{(0.1564)^2}{2}}{0{,}1564} = -\,0{,}460$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{ln\left(\frac{100}{110}\right) + 0{,}0112 + \frac{(0.1564)^2}{2}}{0{,}1564} - 0{,}1564 = -0{,}616$$

$$N(d_1) = N(-0{,}460) = 1 - N(0{,}460) = 1 - (0{,}6772) = 0{,}3228$$

$$N(d_2) = N(-0{,}616) = 1 - N(0{,}616) = 1 - \left(0{,}7291 + \left(\frac{0{,}7324 - 0{,}7291}{0{,}62 - 0{,}61}\right)(0.616 - 0.61)\right) = 0{,}2689$$

Donc :

$$C(S, K, \sigma, r, T, 0) = S * N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$C(100, 110, 0.1564, 0.0112, 1, 0) = 100 * 0{,}3228 - 110e^{-0{,}0112} * 0{,}2689$$

$$C(100, 110, 0.1564, 0.0112, 1, 0) = 3.0355 \ \$$$

- Pour l'option de vente, on a :

$$P(S, K, \sigma, r, T, 0) = -S * N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left\|\left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\right\|^T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{ln\left(\frac{100}{95}\right) + 0{,}0112 + \frac{(0.1564)^2}{2}}{0{,}1564} = 0{,}478$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{ln\left(\frac{100}{95}\right) + 0{,}0112 + \frac{(0.1564)^2}{2}}{0{,}1564} - 0{,}1564 = 0{,}321$$

$$N(-d_1) = N(-0{,}478) = 1 - N(0{,}478) = 1 - \left(0{,}6808 + \left(\frac{0{,}6844 - 0{,}6808}{0{,}48 - 0{,}47}\right)(0.478 - 0.47)\right) = 0.3164$$

$$N(-d_2) = N(-0{,}321) = 1 - N(0{,}321) = 1 - \left(0{,}6255 + \left(\frac{0{,}6293 - 0{,}6255}{0{,}33 - 0{,}32}\right)(0.321 - 0.32)\right) = 0{,}3740$$

Donc :

$$P(100, 95, 0.1564, 0.0112, 1, 0) = -100 * 0{,}3164 + 95e^{-0{,}0112} * 0{,}3740$$

$$P(100, 95, 0.1564, 0.0112, 1, 0) = 3{,}4903 \ \$$$

B. Calcul des « Greeks » de l'option d'achat

- Delta : $\Delta_c = N(d_1) = 0{,}3229$
- Gamma : $\Gamma_c = \phi(d_1)/(S\sigma\sqrt{T}) = 0.0230$
- Vega : $\gamma_c = \frac{S*\phi(d_1)}{100} = 0.3590$
- Theta : $\Theta_c = \frac{rKe^{-rT}N(d_2) - \frac{Ke^{-rT}\phi(d_2)\sigma}{2\sqrt{T}}}{365} = -0.0086$
- Rho : $\rho_c = \frac{TKe^{-rT}N(d_2)}{100} = 0.2926$
- Psi : $\psi_c = \frac{-TSe^{-\delta T}N(d_1)}{100} = -0.3229$

C. Calcul des « Greeks » de l'option de vente

- Delta : $\Delta_p = N(d_1) = -0.3164$
- Gamma : $\Gamma_p = \phi(d_1)/(S\sigma\sqrt{T}) = 0.0228$
- Vega : $\gamma_p = \frac{S*\phi(d_1)}{100} = 0.3559$
- Theta : $\Theta_p = \frac{rKe^{-rT}N(d_2) - \frac{Ke^{-rT}\phi(d_2)\sigma}{2\sqrt{T}}}{365} + rKe^{-rT} = -0.0065$
- Rho : $\rho_p = \frac{-TKe^{-rT}N(-d_2)}{100} = -0.3513$
- Psi : $\psi_p = \frac{TKe^{-\delta T}N(-d_1)}{100} = 0.3164$

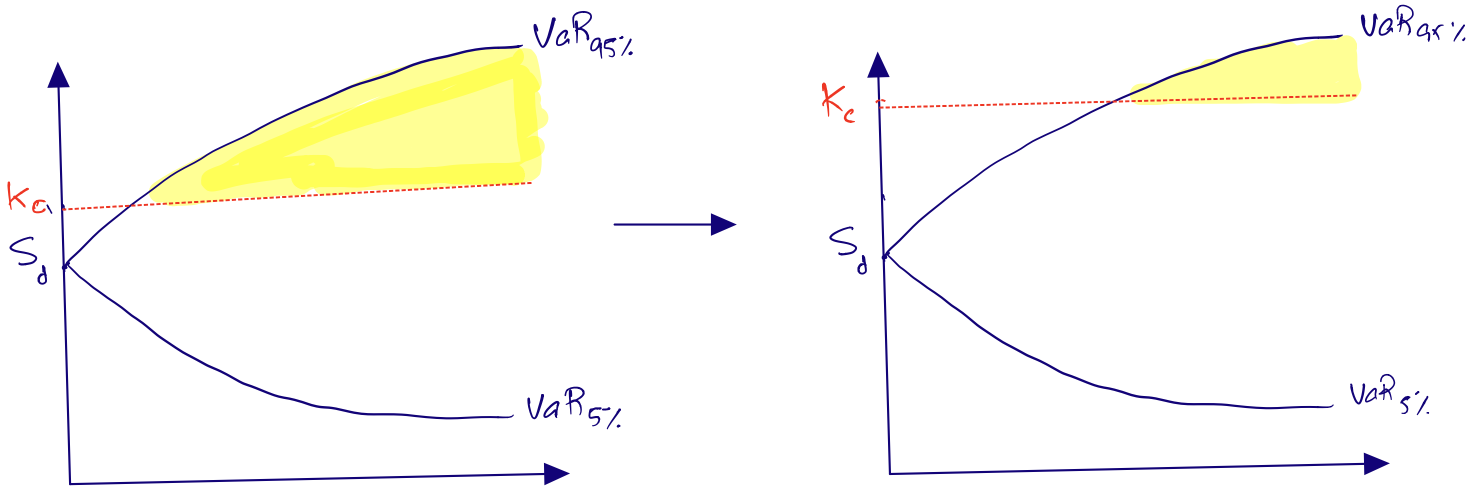
D. Commentaire de ces résultats.

	B-S	N = 52	N =4
Call	3.0355	3.0187	3.375
Put	3.4903	3.5147	3.784

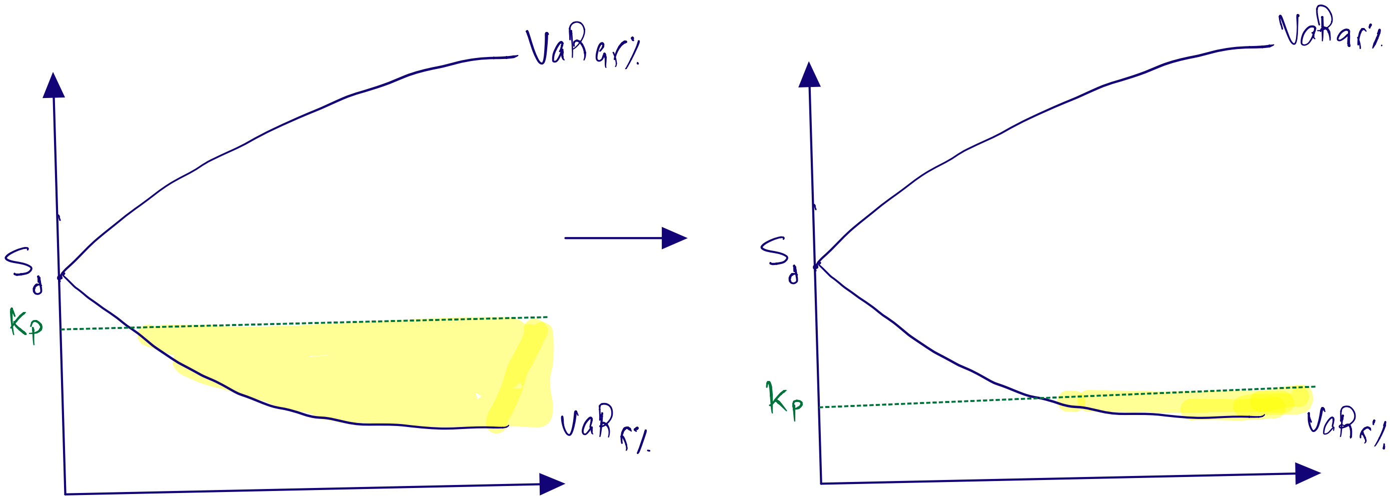
Nous remarquons que lorsque la période augmente le prix de l'option s'approche du prix du Black-Scholes, ce qui démontre que si la période de l'arbre binomial tend vers des grandes valeurs, la formule pour évaluer les prix des options est une Black-Scholes.

E. Lien entre les résultats du numéro 3 et les résultats du numéro 5

Pour l'option d'achat, nous avons un $\Delta_c > 0$ ce qui signifie que si la valeur du sous-jacent augmente, le prix de l'option diminue parce qu'il y aura une petite zone de gain. Dans l'exercice 3 nous avions varié le prix d'exercice, ce qui est équivalent à diminuer le prix du sous-jacent si nous augmentons le prix d'exercice et à augmenter le prix du sous-jacent si le prix d'exercice baisse. Donc nous pourrons conclure que le $\Delta_c < 0$ par rapport au prix d'exercice.



Pour l'option de vente, nous avons un $\Delta_p < 0$ ce qui signifie que si la valeur du sous-jacent augmente, le prix de l'option augment parce qu'il y ‘aura une grande zone de gain. Dans l'exercice 3 nous avions varié le prix d'exercice, ce qui est équivalent à diminuer le prix du sous-jacent si nous augmentons le prix d'exercice et à augmenter le prix du sous-jacent si le prix d'exercice baisse. Donc nous pourrons conclure que le $\Delta_c > 0$ par rapport au prix d'exercice.



Cayenna Sarah Khoulalene. | Agossou Aziel | Mustapha Bouhsen