Algo de Panjer

Pt de départ

$$f_X(0) = P_N(f_B(0))$$

Récursive: $$f_X(k) = \frac{1}{1 - a f_B(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + b\frac{j}{k}\right) f_B(j) f_X(n-j)$$

$k = 1, 2, \dots$

(1) il faut manipuler FGP

(2) On rappelle que:

$$P_X(t) = P_N(P_B(t)) \quad \text{(composition)}$$

(3) On commence:

$$P_X'(t) = P_B'(t) P_N'(P_B(t))$$

Puis, on utilise $P_N'(t)$ Qd la loi de N appartient à la famille (a,b,0)

$$P_N'(t) = a t P_N'(t) + (a+b) P_N(t)$$

On combine:

$$P_X'(t) = P_B'(t) \{ a P_B(t) P_N'(P_B(t)) + (a+b) P_N(P_B(t)) \}$$

$$= a P_B'(t) P_B(t) P_N'(P_B(t)) + (a+b) P_B'(t) P_N(P_B(t))$$

(6)

$$P_X'(t) = a P_B(t) P_X'(t) + (a+b) P_B'(t) P_X(t)$$

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty} k f_X(k)\, t^{k-1} = a\left(\sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1) t^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=1}^{\infty} m_2 f_X(m_2) t^{m_2-1}\right)$$
$$+ (a+b)\left(\sum_{l_1=1}^{\infty} l_1 f_{B_1}(l_1) t^{l_1-1}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2) t^{l_2}\right)$$

(8) on multiplie par t pour enlever le terme -1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k f_X(k)\, t^{k} = a\left(\sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1) t^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=1}^{\infty} m_2 f_X(m_2) t^{m_2}\right)$$
$$+ (a+b)\left(\sum_{l_1=1}^{\infty} l_1 f_B(l_1) t^{l_1}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2) t^{l_2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k)\, t^{k} = a\left(\sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1) t^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=0}^{\infty} m_2 f_X(m_2) t^{m_2}\right)$$
$$+ (a+b)\left(\sum_{l_1=0}^{\infty} l_1 f_B(l_1) t^{l_1}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2) t^{l_2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} f_B(m_1) t^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=0}^{\infty} m_2 f_X(m_2) t^{m_2}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j_1=0}^{k} f_B(j_1)(k-j_1) f_X(k-j_1)\right) t^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k = \left(\sum_{l_1=0}^{\infty} l_1 f_B(l_1) t^{l_1}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{\infty} f_X(l_2) t^{l_2}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j_2=0}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2)\right) t^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = a \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k + (a+b) \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k$$

Pour $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$c_k = a d_k + (a+b) e_k$$

où c_k, d_k, e_k sont les coefficients des séries de puissance.

$$k f_X(k) = a \sum_{j_1=0}^{k} f_B(j_1)(k-j_1) f_X(k-j_1) + (a+b) \sum_{j_2=0}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2)$$

On isole $f_X(k)$

$$k f_X(k) - a k \underset{f_B(0)}{f_X(k)} = a \sum_{j=1}^{\cancel{k}} f_B(j_1)(k-j_1) f_X(k-j_1) + (a+b) \sum_{j_2=1}^{k} j_2 f_B(j_2) f_X(k-j_2)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (a(k-j) + (a+b) j) f_B(j) f_X(k-j)$$

$k f_X(x)(1 - a f_B(0))$