Révison GRF

#10

$$\Delta = e^{-\delta T}\left(\frac{C_u - C_d}{U - D}\right) \qquad B = e^{-rT}\left(\frac{uC_d - dC_u}{u - d}\right)$$

$$p = \frac{e^{(r-\delta)T} - d}{u - d}$$

- Si l'option est surévaluée ⟶ vent de l'option et achat réplique
- Si l'option est sousévaluée ⟶ achat " et vente "

↳ si $\Delta > 0$ Call

$B<0$

- si surévaluée ⟶ achat $\Delta S + B$ ⟶ $\Delta > 0$ achat action et Emprunt B
- sousévaluée ⟶ vent $\Delta S + B$ ⟶ $\Delta < 0$ ⟶ vente action, $B > 0$ et prêt B

↳ si $\Delta < 0$ Put

- surévaluée ⟶ achat $\Delta S + B$ ⟶ $\Delta < 0$ vent action, $B > 0$ prêt B
- sousévaluée ⟶ vent $\Delta S + B$ ⟶ $\Delta > 0$ achat action, $B < 0$ emprunt B

$$u = e^{(r-\delta)h + \sigma\sqrt{h}}, \quad d = e^{(r-\delta)h - \sigma\sqrt{h}}$$

$$S_{t+h} = S_t e^{\Sigma r} \qquad \sigma = \frac{\ln(u/d)}{2\sqrt{h}}$$

* devise ⟶ $u = e^{(r_D - r_E)h + \sigma\sqrt{h}}$ $\quad d = e^{(r_D - r_E)h - \sigma\sqrt{h}}$

$$p = \frac{e^{(r_D - r_E)h} - d}{u - d}$$

* future

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & f_0 e^{\sigma\sqrt{h}} \\ f_0 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\ & f_0 e^{-\sigma\sqrt{h}} \end{tikzcd}$$

$$u_F = e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d_F = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

#11

- neutre au risque $p^* = \dfrac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d}$

α : force de rendement espéré

- Vrai prob : $p = \dfrac{e^{\alpha h} - d}{u-d}$

$$\begin{Bmatrix} u \\ d \end{Bmatrix} = e^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}$$

$$\Delta S e^{\alpha h} + B e^{rh} = e^{\gamma h} \theta$$

pour actualiser $\to \gamma$

$$e^{\gamma h} = \frac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\Delta S + B} e^{rh}$$

$$e^{\gamma h} = \frac{\Delta S e^{\alpha h} + B e^{rh}}{\theta} \to \theta = \frac{\Delta S e^{\alpha h} + B e^{rh}}{e^{\gamma h}}$$

$$\theta = e^{-\gamma h} \left(\theta_u \frac{e^{\alpha h} - d}{u-d} + \theta_d \cdot \frac{u - e^{\alpha h}}{u-d} \right)$$

$$\theta = \frac{\theta_u \dfrac{e^{\alpha h} - d}{u-d} + \theta_d \dfrac{u - e^{\alpha h}}{u-d}}{\dfrac{\Delta S e^{\alpha h}}{\Delta S + B} + e^{rh} \dfrac{B}{\Delta S + B}}$$

avec δ :

$$p = \frac{e^{(\alpha-\delta)h} - d}{u-d}$$

$$\Delta S = e^{-\delta h} \left(\frac{\theta_u - \theta_d}{U - D} \right)$$

$$B = e^{-rh} \left(\frac{u\theta_d - d\theta_u}{u-d} \right)$$

u, d, p, p^* ne changent pas

γ : change à chaque noeud

#12

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left((r - \sigma^2/2)t \,,\ \sigma^2 t\right)$$

$$\frac{S_t}{S_0} \sim LN\left((r - \sigma^2/2)t \,,\ \sigma^2 t\right)$$

$$S_t \sim LN\left(\ln(S_0) + (r - \sigma^2/2)t ,\ \sigma^2 t \right)$$

$$\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{rt}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_T/K) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma \sqrt{t}} \ , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{\ln(Se^{-\delta t}) - \ln(Ke^{-rt})}{\sigma\sqrt{T}} + \dfrac{\sigma\sqrt{T}}{2} \\ d_2 = \dfrac{\ln(Se^{-\delta T}) - \ln(Ke^{-rT})}{\sigma\sqrt{T}} - \dfrac{\sigma\sqrt{T}}{2} \end{cases}$$

$$Call(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Se^{-\delta T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$Put(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Ke^{-rT} N(-d_2) - Se^{-\delta T} N(-d_1)$$

* forward p

$$Call = \underbrace{Se^{-\delta T}}_{F_{0,T}^P} N(d_1) - \underbrace{Ke^{-rT}}_{F_{0,T}^P} N(d_2) \qquad (F_{0,T} = K)$$

* div discrete:

$$Call = S(1-d)^n N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

* div fixo

$$Call = (S - \Sigma\, div)\, N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\left(S - \Sigma d_i \ldots\right)/K\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

* <u>devise</u>

$$Call = X_0 e^{r_f t} N(d_1) - K e^{rt} N(d_2)$$

* <u>future</u>

$$T < T'$$

$$Call = Q e^{(r-\delta)T'} e^{-rT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(Q e^{(r-\delta)T' - rT} / K e^{-rT}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(Q e^{(r-\delta)T'} / K\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}/2$$

<u>Grecks</u> :

. Δ : $\frac{\partial \theta}{\partial S}$ si $\Delta \uparrow \rightarrow S \uparrow \rightarrow \uparrow$ valeur de l'option

. Γ : $\frac{\partial \Delta}{\partial S}$: si $\Delta > 0 \rightarrow \Delta \uparrow$ si $s \cdot g$ augmente

. V : $\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} / 100$: volatilité grande $\rightarrow$ prix élevé

. Θ : $-\frac{\partial \theta}{\partial T} / 365$: perd de valeur avec le temps (pas tjrs)

. Greek ptf feuille : $G_{ptf} = \sum n_i G_i$

. Élasticité d'une option : % ↑ prix option suite à % ↑ action

$$\Omega_c = \left(\epsilon \frac{\Delta c}{c}\right) / \left(\epsilon S_0\right) = S_0 \frac{\Delta c}{c} \geq 0$$

$$\Omega_p = S_0 \frac{\Delta p}{p} \leq 0$$

. Volatilité de l'option : $\sigma_{op} = \sigma_{s-j} |\Omega|$

$$\Omega_{ptf} = \sum \omega_i \Omega_i \qquad \omega_i = \frac{n_i O_i}{\sum n_i O_i}$$

. Prime de risque

$$e^{rh} = \frac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\Delta S + B} e^{rh}$$

$$e^{rh} = \frac{\Delta S e^{\alpha h}}{\theta} + \frac{B}{\theta} e^{rh}$$

$$r = \left(\frac{\Delta S}{\theta}\right)\alpha + \left(1 - \frac{\Delta S}{\theta}\right) r = \Omega \alpha + (1 - \Omega) r$$

$$r - r = \Omega(\alpha - r) \qquad \text{prime de risque}$$

$$r_{ptf} - r = \Omega_{ptf}(\alpha_s - r)$$

Ratio sharpe action : $(\alpha - r)/\sigma_{ac}$

" " option : $(r - r)/\sigma_{op}$

Calander spread

achat et vente de l'option de l'option T_2 T_1 et une fois rendu à t_1 on veut Call(t_2)

si θ -> me rapporte de l'argent avec le temps qui passe

13

. Teneur du marché veulent se couvrir → delta neutre (voir Exemple)

. new Call = $\text{Call} + \epsilon\,\Delta + \epsilon^2 \frac{\Gamma}{2} + h\,\theta$

Flux = + changement capacité d'emprunt − argent utilisé pour new action − intérêt sur emprunt.

$$\text{flux} = \left[(\Delta_i S_i - C_i) - (\Delta_{i-h} S_{i-h} - C_{i-h})\right] - S_i(\Delta_i - \Delta_{i-h}) - (S_{i-h}\Delta_{i-h} - C_i)(e^{hr} - 1)$$

. Gamma : pour des gros mouvement s.t le teneur perd de l'argent → sinon il gagne → plus le mouvement est grand → Δ mois adéquate

↳ si $S_T \uparrow$ → $\Delta \uparrow$ → Call prend de la valeur

↳ si $S_T \downarrow$ → $\Delta \downarrow$ → gagne moins vite

. theta : perd avec le temps

. intérêt : paie intérêt sur emprunt

$$\begin{cases} \text{Gain en Capital} = \Delta_{i-h}(S_i - S_{i-h}) - (C_i - C_{i-h}) \\ \text{intérêt} = -MV\,(e^{rt} - 1) \end{cases}$$

$$\text{profit} = \Delta_t(S_{t+h} - S_t) - \left[\text{Call}(S_{t+h}) - \text{Call}(S_t)\right] - \left[(\Delta_t S_t - \text{Call}(S_t))(e^{rh} - 1)\right]$$

$$\Delta_t(S_{t+h} - S_t) - \left[\Delta_t(S_{t+h} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma_c(S_{t+h} - S_h)^2 + \theta h\right] - (\Delta_t S_t - \text{Call}(S_t))\,rh$$

$$-\left[\frac{1}{2}\Gamma_c(S_{t+h} - S_h)^2 + \theta h\right) - rh(\Delta_s S_t - \text{Call}(S_t)]$$

($\theta_t h \to \theta_t h \times 365$) $\quad \sigma \pm \quad (S_{t+h} - S_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 h$

$$R_{ih} = \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \Gamma (x_i^2 - 1) h \qquad \text{Var}(R_{ih}) = \frac{1}{2}(S^2 \sigma^2 \Gamma h)^2$$

#14

$$\begin{cases} A(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{ih}}{n} & h = \frac{T}{n} \\ G(T) = \prod_{i=1}^{n} (S_{ih})^{\frac{1}{N}} \end{cases}$$

option asiatique : $\max\left(0; \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{ih}}{n} - K\right)$

$$Call_G \leq Call_A() \leq \frac{\sum Call(S_{i/2}, K)}{n} \leq Call(K_1)$$

option Barrière → (1) désactivante, (2) activante, (3) avec Remise

Activante + désactivante = Classique

* Option sur Option

Call on Call : $\max\left(0; Call(K_2, T_2 - T_1) - K_1\right)$

Put on Call : $\max\left(0; K_1 - Call(K_2, T_2 - T_1)\right)$

⋮

Parité :

$$\begin{cases} CoC - PoC = Call(K_2, T_2) - K_1 e^{-rT_1} \\ CoP - PoP = Put(K_2, T_2) - K_1 e^{-rT_1} \end{cases}$$

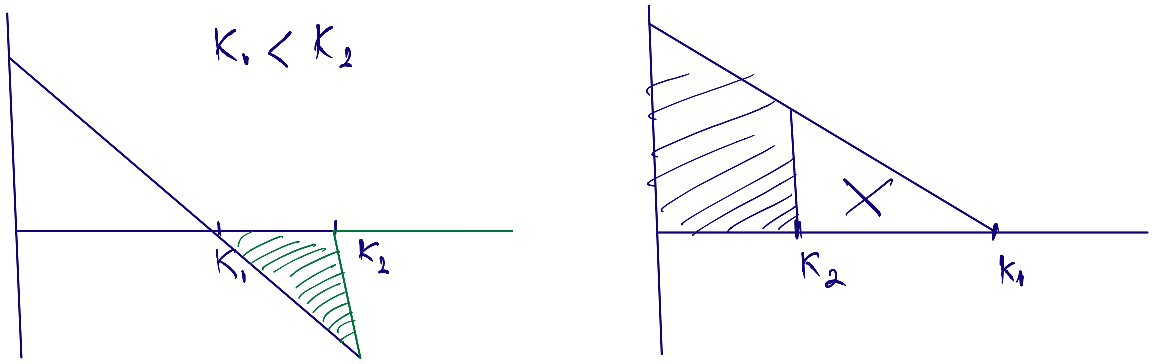
* Option avec écart

$$\begin{cases} Call : & si\ S_T > K_2 \to S_T - K_1 \\ Put : & si\ S_T < K_2 \to K_1 - S_T \end{cases}$$

$$Call(S, K_1, K_2) = Se^{-\delta T} N(d_1) - K_1 N(d_2)$$

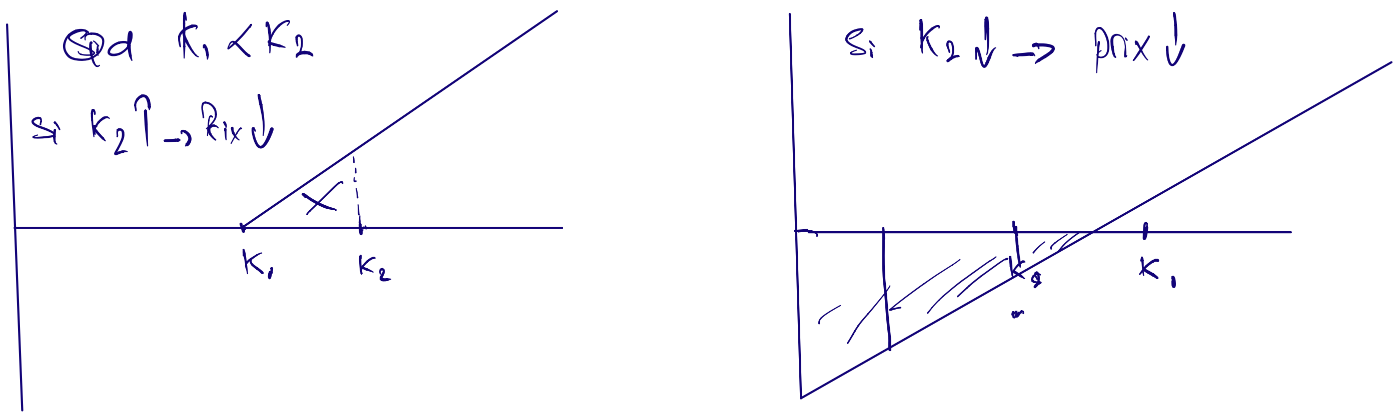
$$d_1 = \frac{\ln(S/K_2) + (r + \sigma^2/2) + }{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Put :



Prix $\downarrow$ Qd $|K_2 - K_1|$ $\uparrow$

Call :



* Option d'échange

$\max(0 ; S_T - K_T)$

$$Call(S, K) = S e^{-\delta_S T} N(d_1) - K_1 e^{-\delta_K T} N(d_2)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_K^2 - 2\rho\, \sigma_S \sigma_K}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (\delta_K - \delta_S + \sigma^2/2)t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$Put(S, K) = K_1 e^{-\delta_K T} N(-d_2) - S e^{\delta_S T} N(-d_1)$$

$$Put(S, K) = Call(K, S)$$

18

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

$$\mathbb{E}[R(0,t)] = n\,\alpha_R$$

$$Var(R(0,t)) = n\,\sigma_R^2$$

$$S_{t_1} = S_0 e^{R(0,t_1)}$$

$$R(0,t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left((\alpha - \delta - \sigma^2/2)t,\ \sigma^2 t\right)$$

$$R(0,t) = (\alpha - \delta - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}\, Z$$

$$S_t = S_0 e^{R(0,t)} \longrightarrow \mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\alpha-\delta)t}$$

$$\mathbb{P}(S_T \leq K) = \mathbb{P}(S_T/S \leq K/S) = \mathbb{P}\left(\ln(S_T/S) \leq \ln(K/S)\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\text{v.a } N(0,1) \leq \frac{\ln(K/S) - (\alpha - \delta - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$- \left(\frac{\ln(S/K) + (\alpha - \delta - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \rightarrow N(-d_2)$$

$$\mathbb{P}(S_T > K) = N(d_2)$$

* intervalle de Confiance

$$\mathbb{P}(S^d < S_T < S^u) = 1 - p$$

$$(IC) : S_0 e^{(\alpha - \delta - \sigma^2/2)t \pm \sigma\sqrt{h}\, Z_{p/2}}$$

$$\mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}}] = S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N(-d_1)$$

$$\mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}] = S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N(d_1)$$

$$\text{Call} : e^{-rT}\mathbb{E}[(S_T - K)\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}] = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - K(d_2) e^{-rT}$$

19

$w \sim \text{unif}(0,1)$

$\Phi^{-1}(w) = Z_i$

$0 \quad h \quad 2h \quad \ldots \quad nh = T$

- $S_h = S_0 e^{(\alpha - \delta - \sigma^2/2)h + \sqrt{h}\cdot\sigma Z_1}$
- $S_{2h} = S_h e^{(\alpha - \delta - \sigma^2/2)h + \sqrt{h}\sigma \cdot Z_2}$

$\vdots$

- $S_{nh} = S_{nh-1} e^{(\alpha - \delta - \sigma^2/2)h + \sqrt{h}\sigma Z_n}$

$$S_{nh} = S_0 e^{(\alpha - \delta - \sigma^2/h)T + \sigma\sqrt{T} \sum Z_i/\sqrt{n}}$$

On simule N valeur de S_T

* si option classique $\longrightarrow$ $S_T^{(i)} = S_0 e^{(\alpha - \delta - \sigma^2/2)T + \sqrt{T}\sigma Z_i}$

$$\max(0, S_T - K) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \max(0, S_T^i - K)}{N}$$

$$\overline{Call} = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^{N} \max(0, S_T^i - K)$$

* Si option asiatique

$$\overline{Call} = e^{-rT} \frac{\sum_{i=1}^{N} \max\left(0; \sum_{j=1}^{m} S_j^{(i)}/m - K\right)}{N}$$

23

- Cash-or-nothing + : $S_T > K$ pour 1\$ $\rightarrow$ $CC = e^{-rT} \underbrace{N(d_2)}_{\mathbb{P}(S_T > K)}$

- Cash-or-nothing - : $S_T < K$ pour 1\$ $\rightarrow$ $CP = e^{-rT} N(-d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln\left(se^{-\delta T} / ke^{-rT}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- Asset-or-nothing + : $S_T > K$ $\quad AC = S_0 e^{-\delta T} N(d_1)$
- Asset-or-nothing - : $S_T < K$ $\quad AP = S_0 e^{-\delta T} N(-d_1)$

$$\text{Call} = AC - K\,CC$$
$$\text{Put} = K\,CP - AP$$

$$\text{Call}(K_1, K_2) = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - K_1 e^{-rT} N(d_2)$$
$$= AC(K_2) - \underline{K_1}\, CC(K_2)$$

$$\text{Put}(K_1, K_2) = K_1 e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-\delta T} N(-d_1)$$

$$= K_1\, CP(K_2) - AP(K_2)$$

* option rétroviseur :

$\bar{S}_T = \max(S_1, \dots, S_T) \qquad \underline{S_T} = \min(S_1, \dots, S_T)$

Val Éch Call $= S_T - \min(S_1, \dots, S_T)$

Val éch Put $= \max(S_1, \dots, S_T) - S_T$

2^n