**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники**

Исправленные номера Типовика №2
Математический Анализ

Выполнил:
Студент группы P3116
Брагин Роман Андреевич
Практик:
Попов Арсений Михайлович
Лектор:
Трифанова Екатерина Станиславовна

г. Санкт-Петербург,
2024 г

Задание 1

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!e^n}{n^{n+2}} \sin\frac{\pi}{2^n}$$

Для исследования ряда используем признак Даламбера:
Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:
1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1))!!e^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{(2n-1)!!e^n}{n^{n+2}} \sin\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\varepsilon n^{n+2} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{(n+1)^{n+3} \sin\frac{\pi}{2^n}} = 2.$$

Следовательно, наш ряд расходится.

Задание 2

Исследовать ряд на сходимость :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos\frac{1}{n}}{n\sqrt{\ln n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}\cos n}{n\sqrt{\ln n}}.$$

1 Часть:

а)

$$\frac{\cos\frac{1}{n}}{n\sqrt{\ln n}} \quad \text{монотонно стремится к 0 (при } n\to\infty)$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}}\right), |A_n| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{по признаку Дирихле сходится}$$

б)

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n\ln n}} \quad \text{монотонно стремится к 0 (при } n\to\infty)$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}, \quad |A_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|}$$

$$\Rightarrow \text{по признаку Дирихле сходится}$$

$$\Rightarrow \text{ сходится} + \text{сходится} = \text{сходится}$$

2 Часть:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{\ln n}} \right| \ge \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n+\frac{1}{n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(2n+\frac{2}{n})}{2n}$$

Замены

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = (\text{расходится}) + \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+\frac{2}{n})}{2n} \right)$$

тоже, что и с начальным, то есть тоже сходится

Следовательно нет абсолютной сходимости, а значит условная сходимость.

Задание 4

Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности функций $f_n(x)$ при $n \to \infty$ и определить, является ли это сходство равномерным на заданных множествах $E_1 = (0,2)$ и $E_2 = (2,+\infty)$.

Дана последовательность функций:

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

Найдем предел функциональной последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x}\cos(x)$$

Проверка равномерной сходимости на $E_1 = (0,2)$, возьмем $x = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{x}\cos(x)\right| = \lim_{n\to\infty} n\left|\cos\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)-\cos(\frac{1}{n})\right| = 0{\cdot}\infty$$

Следовательно равномерная сходимости нет на $E_1 = (0,2)$, теперь проверим на $E_2 = (2,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{x}\cos(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left|\cos\left(x-\frac{1}{n}\right)-\cos(x)\right| = 0$$

Следовательно на $E_2 = (2,+\infty)$ сходится.

Задание 5

Исследовать на равномерную сходимость ряда на данных промежутках:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin x}{n+x+n^2x}, D = [0;\frac{\pi}{3}]$$

Докажем через признак Вейштрасса, проведем оценку:

Рассмотрим $\left|\frac{x\sin x}{n+x+n^2x}\right|$:

$|\sin x| \le 1$ для всех $x \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, поэтому $|x| \le \frac{\pi}{3}$.

Теперь оценим $\left|\frac{x\sin x}{n+x+n^2x}\right|$:

$$\left|\frac{x\sin x}{n+x+n^2x}\right| \le \frac{x}{n+x+n^2x}.$$

Так как $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, то:

$$\left|\frac{x}{n+x+n^2x}\right| \le \frac{\frac{\pi}{3}}{n+0+n^2\cdot 0} = \frac{\pi}{3n}.$$

Таким образом, мы получили оценку:

$$\left|\frac{x\sin x}{n+x+n^2x}\right| \le \frac{\pi}{3n}.$$

но, это гармонический ряд, который расходится. Поэтому и не будет равномерной сходимости.

$$\left|\frac{x}{n+x+n^2x}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{3}}{n+0+n^2\cdot 0} = 0.$$

Теперь второй пункт:

$$b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}, D_1 = (0;1); D_2 = (1,+\infty)$$

Поскольку $\arctan\theta \leq \theta$ для всех $\theta \geq 0$, тогда: $\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}} \leq \sqrt{\frac{x}{n^3}}$.

$$\left|\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right| \leq \frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\cdot\sqrt{\frac{x}{n^3}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}\cdot n^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{(x+n^2)\cdot n^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}n^2}{(x+n^2)n^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2}.$$

Для $x \in (0,1)$ $n^2 \geq x$, то $x+n^2 \geq n^2$, и тогда:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2} \leq \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}$ - этот ряд сходится.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}$ сходится равномерно на промежутке $D_1 = (0,1)$.

Теперь для $x \in (1,+\infty)$:

Если $n^2 \geq x$, то $x+n^2 \geq n^2$, и имеем:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2} \leq \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Если $n^2 < x$, то $x+n^2 \geq x$, и имеем:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2} \leq \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}.$$

Таким образом, для $x \in (1,+\infty)$:

$$\left|\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right| \leq \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}$ также сходится.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2} \arctan \sqrt{\frac{x}{n^3}}$ сходится равномерно на промежутке $D_2 = (1, +\infty)$.

Задание 8

$$f(x) = 1 - x^2, \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)^2}$$

Ряд Фурье:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n и b_n вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Начнем подсчет коэфицентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2)\, dx = \frac{-2\pi^3}{3} + 2\pi = -\frac{2}{3}(\pi^2 - 3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-x^2) \cos(nx)\, dx = \frac{(-4n\pi \cos(n\pi) + 2(2 - n^2(-1 + \pi^2))sin(n\pi))}{\pi n^3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) \sin(nx)\, dx = 0$$

Итого общиий ряд тригонометрический ряд Фурье:

$$-\frac{1}{3}(\pi^2 - 3) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-4n\pi \cos(n\pi) + 2(2 - n^2(-1 + \pi^2))sin(n\pi))}{\pi n^3} \cos nx\right)$$

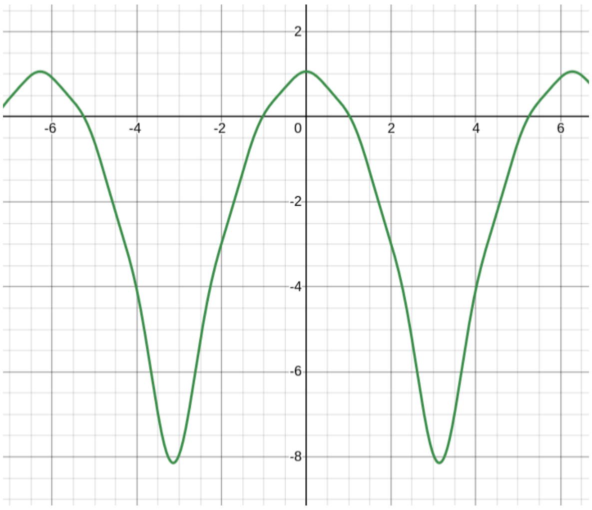

Рис. 1: S = 5

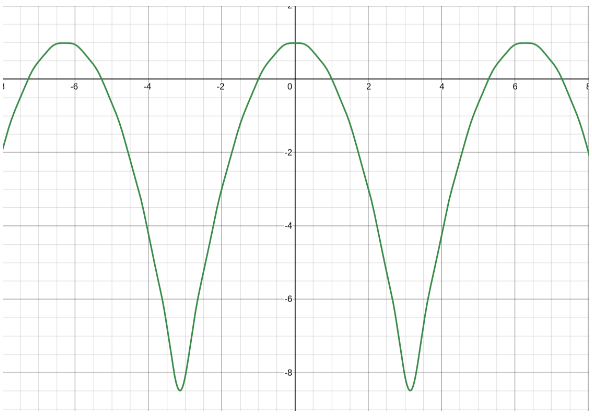

Рис. 2: S = 10

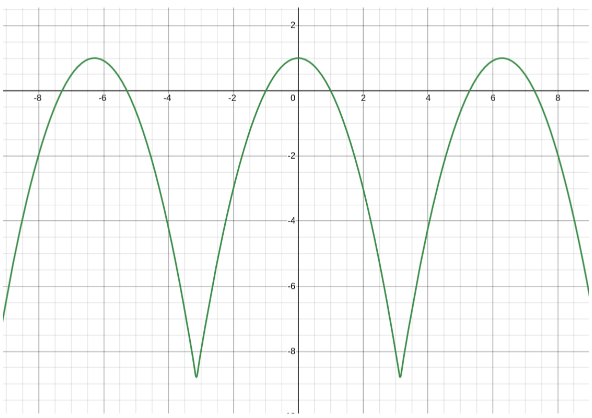

Рис. 3: S = 50

Теперь докажем равнство ряда и функциии, при зафиксированном x_0, пусть он равен 0.

$$1-x^2 = -\frac{1}{3}(\pi^2-3)+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-4n\pi\cos(n\pi)+2(2-n^2(-1+\pi^2))sin(n\pi))}{\pi n^3}\cos nx)$$

Тогда левая частть равна 1.

Теперь рассмотрим правую часть:

Упростим:

1. Учитывая, что $\sin(n\pi)=0$ для всех целых n, ряд упрощается до:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4n\pi\cos(n\pi)\cos(nx)}{\pi n^3}$$

Подставляя $\cos(n\pi)=(-1)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4n\pi(-1)^n\cos(nx)}{\pi n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$$

2. Теперь уравнение имеет вид:

$$-\frac{1}{3}(\pi^2-3)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$$

Учитывая, что $\cos(0)=1$, ряд становится:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Этот ряд является рядом Лейбница для $\pi^2/12$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

Поэтому:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}=4\cdot\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{3}$$

Подставляя это в уравнение:

$$-\frac{1}{3}(\pi^2-3)+\frac{\pi^2}{3}=-\frac{1}{3}\pi^2+1+\frac{\pi^2}{3}=1$$

Таким образом, $x=0$ удовлетворяет уравнению.