Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Типовик №2
Математический Анализ

Выполнил:
Студент группы P3116
Брагин Роман Андреевич
Практик:
Попов Арсений Михайлович
Лектор:
Трифанова Екатерина Станиславовна

г. Санкт-Петербург,
2024 г

Задание 1

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!e^n}{n^{n+2}} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

Для исследования ряда используем признак Даламбера:
Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:
1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(2n+1))!!e^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{(2n-1)!!e^n}{n^{n+2}} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)\varepsilon n^{n+2} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{(n+1)^{n+3} \sin \frac{\pi}{2^n}} = 0.$$

Следовательно, наш ряд сходится.

Задание 2

Исследовать ряд на сходимость :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin{(n + \frac{1}{n})}}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Используем признак Дирихле. Признак Дирихле : если a_n и b_n — две последовательности, такие что:

1.Последовательнось частичных сумм $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - ограничена.
2.Последовательнось b_n - монотонно убывает к 0.
то исходный ряд сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin{(n + \frac{1}{n})}}{n\sqrt{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin{(n + \frac{1}{n})}}{n\sqrt{\ln n}} \frac{(1 - \frac{1}{n^2})}{(1 - \frac{1}{n^2})}$$

Сначала докажем что $\sum_{n=1}^{\infty} \sin{(n + \frac{1}{n})}(1 - \frac{1}{n^2})$ - ограничена.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin{(n+\frac{1}{n})}(1-\frac{1}{n^2}) \iff \int\limits_1^{+\infty} \sin{(n+\frac{1}{n})}(1-\frac{1}{n^2})\ \mathrm{dn} =$

$\int\limits_1^{+\infty} \sin{(n+\frac{1}{n})}\ \mathrm{d}(n+\frac{1}{n}) = -\cos{(n+\frac{1}{n})}\Big|_1^{+\infty} \leq 2 \rightarrow$ ограниченна.

Теперь $b_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}(1-\frac{1}{n^2})} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$

А значит наш ряд сходится. И сходится он условно, так как если взять модуль, то $\sin{(n+\frac{1}{n})} \leq 1$ и по интегральному признаку Коши $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = 2\sqrt{\ln n}\Big|_1^{+\infty}$ - расходится.

Итог: исходный ряд сходится условно.

Задание 3

Исследовать ряд на сходимость (для знакопеременных рядов - на абсолютную и условную) :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^1 x^n \arctan\frac{x}{n}dx.$$

Этот ряд является знакопеременным, поэтому сначала проверим его на абсолютную сходимость, а затем на условную сходимость.

Для абсолютной сходимости рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 x^n \arctan\frac{x}{n}\,dx\right|.$$

Исследуем интеграл $\int\limits_0^1 x^n \arctan\frac{x}{n}\,dx$.

Для $\frac{x}{n} \leq 1$ (так как $x \in [0,1]$ и $n \geq 1$), можно воспользоваться неравенством $\arctan y \leq y$ для $y \geq 0$. Следовательно:

$$\arctan\frac{x}{n} \leq \frac{x}{n}.$$

Отсюда:

$$\left|\int\limits_0^1 x^n \arctan\frac{x}{n}\,dx\right| \leq \int\limits_0^1 x^n\frac{x}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 x^{n+1}\,dx.$$

Теперь вычислим интеграл:

$$\int_0^1 x^{n+1}\,dx = \left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^1 = \frac{1}{n+2}.$$

Таким образом:

$$\left|\int_0^1 x^n \arctan\frac{x}{n}\,dx\right| \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n(n+2)}.$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}.$$

Мы можем упростить данный ряд, заметив, что $\frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{n^2}$ для всех $n \geq 1$. Ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ является сходящимся (мы доказывали на лекции).

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ сходится абсолютно.

Задание 4

найти предельную функцию $f(x)$ последовательности функций $f_n(x)$ при $n \to \infty$ и определить, является ли это сходство равномерным на заданных множествах $E_1 = (0,2)$ и $E_2 = (2,+\infty)$.

Дана последовательность функций:

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

Поточечное Сходимость

1. Вычисление предела:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

Поскольку $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, мы имеем:

$$\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) \to \cos(x)$$

Следовательно:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$$

Итак, поточечный предел функции:

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$$

Равномерное Сходимость на $E_1 = (0, 2)$ и $E_2 = (2, +\infty)$
2. Проверка равномерного сходимости на E_1:
Чтобы проверить равномерное сходимость, нужно выяснить:

$$\sup_{x\in E_1} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Рассмотрим:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{x}\cos(x)\right|$$

$$= \frac{1}{x}\left|\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right|$$

Используя непрерывность функции косинуса и тот факт, что x не равен нулю в E_1, мы получаем:

$$\left|\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right| \leq \left|-\frac{1}{n}\sin(x)\right| = \frac{1}{n}|\sin(x)|$$

Следовательно:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{n}|\sin(x)|$$

Поскольку x ограничен снизу на E_1, правая часть стремится к нулю равномерно на E_1, так как x не равен нулю, а выражение, содержащее n, стремится к нулю.
Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на $E_1 = (0, 2)$.
3. Проверка равномерного сходимости на E_2:
Аналогично рассмотрим $E_2 = (2, +\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{x}\cos(x)\right|$$

$$= \frac{1}{x}\left|\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right|$$

Снова, используя непрерывность функции косинуса:

$$\left|\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right| \leq \left|-\frac{1}{n}\sin(x)\right| = \frac{1}{n}|\sin(x)|$$

Следовательно:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n} |\sin(x)|$$

Так как $x \geq 2$ в E_2, мы имеем:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} |\sin(x)|$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к нулю равномерно на E_2.

Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на $E_2 = (2, +\infty)$.

Заключение Предельная функция $f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$ достигается поточечно при $n \to \infty$, и это сходство является равномерным на обоих множествах $E_1 = (0, 2)$ и $E_2 = (2, +\infty)$

Задание 5

Исследовать на равномерную сходимость ряда на данных промежутках:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin x}{n + x + n^2 x}, D = [0; \frac{\pi}{3}]$$

Чтобы исследовать ряд на равномерную сходимость на данном промежутке, используем признак Вейерштрасса:

Рассмотрим $\left|\frac{x \sin x}{n+x+n^2 x}\right|$:

$|\sin x| \leq 1$ для всех $x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, поэтому $|x| \leq \frac{\pi}{3}$.

Теперь оценим $\left|\frac{x \sin x}{n+x+n^2 x}\right|$:

$$\left|\frac{x \sin x}{n + x + n^2 x}\right| \leq \frac{x}{n + x + n^2 x}.$$

Так как $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, то:

$$\left|\frac{x}{n + x + n^2 x}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{3}}{n + 0 + n^2 \cdot 0} = \frac{\pi}{3n}.$$

Таким образом, мы получили оценку:

$$\left|\frac{x \sin x}{n + x + n^2 x}\right| \leq \frac{\pi}{3n}.$$

Последовательность $\frac{\pi}{3n}$ является положительной и убывающей, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3n}$ является сходящимся с множителем $\frac{\pi}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3n} = \frac{\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin x}{n+x+n^2 x}$ равномерно сходится на $D = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}} n^2}{x+n^2} \arctan \sqrt{\frac{x}{n^3}}, D_1 = (0;1); D_2 = (1, +\infty)$$

Промежуток $D_1 = (0;1)$, для $x \in (0,1)$:

Поскольку $\arctan \theta \le \theta$ для всех $\theta \ge 0$, тогда:
$\arctan \sqrt{\frac{x}{n^3}} \le \sqrt{\frac{x}{n^3}}$.
$\left| \frac{x^{\frac{1}{4}} n^2}{x+n^2} \arctan \sqrt{\frac{x}{n^3}} \right| \le \frac{x^{\frac{1}{4}} n^2}{x+n^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{n^3}} = \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot n^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{(x+n^2) \cdot n^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}} n^2}{(x+n^2) n^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2}$.
Теперь оценим выражение $\frac{x^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2}$.

Для $x \in (0,1)$ $n^2 \ge x$, то $x + n^2 \ge n^2$, и тогда:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2} \le \frac{x^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

И в итоге:

$$\left| \frac{x^{\frac{1}{4}} n^2}{x+n^2} \arctan \sqrt{\frac{x}{n^3}} \right| \le \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится (это ряд с показателем степени больше 1), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}$ также сходится.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}} n^2}{x+n^2} \arctan \sqrt{\frac{x}{n^3}}$ сходится равномерно на промежутке $D_1 = (0,1)$.

Промежуток $D_2 = (1, +\infty)$, для $x \in (1, +\infty)$:

2. Рассмотрим выражение:

$$\left| \frac{x^{\frac{1}{4}} n^2}{x+n^2} \arctan \sqrt{\frac{x}{n^3}} \right|.$$

Как и в предыдущем случае, используем $\arctan \theta \le \theta$:

$$\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}} \le \sqrt{\frac{x}{n^3}}.$$

Тогда,

$$\left|\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right| \le \frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\cdot\sqrt{\frac{x}{n^3}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}\cdot n^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{(x+n^2)\cdot n^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2}.$$

Теперь оценим выражение $\frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2}$.

Для $x \in (1, +\infty)$:

Если $n^2 \ge x$, то $x + n^2 \ge n^2$, и имеем:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2} \le \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Если $n^2 < x$, то $x + n^2 \ge x$, и имеем:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x+n^2} \le \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{x^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}.$$

Таким образом, для $x \in (1, +\infty)$:

$$\left|\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right| \le \frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}$ также сходится.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}$ сходится равномерно на промежутке $D_2 = (1, +\infty)$.

Таким образом, мы доказали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}n^2}{x+n^2}\arctan\sqrt{\frac{x}{n^3}}$ сходится равномерно на обоих заданных промежутках D_1 и D_2.

Задание 6

Найти область определения функции $f(x)$ и доказать её непрерывность на области определения. Если пользуетесь равномерной непрерывностью, то её нужно доказать.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)$$

Определение области определения

Необходимо определить значения x, для которых данный ряд сходится.

$\sqrt{x}$ при $x \geq 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)$ определен при $1 + \frac{1}{n\sqrt{x}} > 0$, что всегда выполняется при $x > 0$, поскольку x положительны, $\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x}$ верно при условии, что $1+n^2x \neq 0$, что также всегда выполняется при $x > 0$.

Таким образом, ряд сходится при $x > 0$.

Доказательство сходимость на области определения

Для доказательства непрерывности на области определения покажем, что ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Оценка членов ряда

Рассмотрим общий член ряда:

$$a_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)$$

Используем неравенство $\ln(1 + y) \leq y$ при $y > 0$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{x}}\right) \leq \frac{1}{n\sqrt{x}}$$

Следовательно,

$$a_n(x) \leq \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x} \cdot \frac{1}{n\sqrt{x}} = \frac{1}{1 + n^2x}$$

На любом отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ для $x \geq a$ имеем:

$$a_n(x) \leq \frac{1}{1 + n^2a}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2a}$ сходится, так как $1 + n^2a$ растет с увеличением n. Таким образом, $a_n(x)$ ограничен сходящимся рядом.

3. Равномерная сходимость

Признак Вейерштрасса говорит, что если существует последовательность M_n такая, что $|a_n(x)| \leq M_n$ для всех $x \in [a, b]$ и $\sum M_n$ сходится, то ряд $\sum a_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

В данном случае $M_n = \frac{1}{1+n^2a}$, и $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$.

4. Непрерывность функции

Ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ состоит из непрерывных функций $a_n(x)$ при $x > 0$. По теореме о равномерном пределе непрерывных функций, если ряд сходится равномерно и каждый член ряда непрерывен, то и сумма ряда непрерывна.

Задание 7

Найти сумму данного числого ряда, используя приемы дифференцирования и интергрирования степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)16^n}.$$

Заметим, что множитель $\frac{1}{2n+1}$ можно выразить через интеграл:

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\,dt.$$

Подставим это в наш исходный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)16^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{16}\right)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{16}\right)^n \int_0^1 t^{2n}\,dt.$$

Теперь переставим сумму и интеграл:

(*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{t^2}{16}\right)^n = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{t^2}{16}\right)^n dt.$$

Вспомним логарифмический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x), \quad |x| < 1.$$

Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{t^2}{16}\right)^n = -\ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right).$$

Теперь подставим в (*):

$$-\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right) dt.$$

Проинтегрируем по t:

$$-\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right) dt.$$

Применим метод по частям

$$u = \ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right), \quad dv = dt.$$

Тогда:

$$du = \frac{2t/16}{1 + t^2/16} dt = \frac{2t}{16 + t^2} dt, \quad v = t.$$

Получаем:

$$-t\ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2}{16 + t^2} dt.$$

Посчитаем интеграл:

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{16 + t^2} dt = 2 - 8\arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

Подставим обратно:

$$-t\ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right)\Bigg|_0^1 + 2 - 8\arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

Первый член равен нулю при подстановке пределов:

$$-t\ln\left(1 + \frac{t^2}{16}\right)\Bigg|_0^1 = -1 \cdot \ln\left(\frac{17}{16}\right) + 0 = -\ln\left(\frac{17}{16}\right).$$

И получим в итоге:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)16^n} = -\ln\left(\frac{17}{16}\right) + 2 - 8\arctan\left(\frac{1}{4}\right) \approx -0.02$$