Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Исправленные номера Типовика №1-2
Математический Анализ

Выполнил:
Студент группы Р3116
Брагин Роман Андреевич
Практик:
Попов Арсений Михайлович
Лектор:
Трифанова Екатерина Станиславовна

г. Санкт-Петербург,
2024 г

Типовик 1

Задание № 7

Исследуем $\int_5^\infty \frac{\ln\frac{x-5}{x+5}}{x}\,dx$

Заметим, что подынтегральная функция не меняет знак, так как $\ln\frac{x-5}{x+5} = \ln(1-\frac{10}{x+5}) \le 0$, $\frac{1}{x} \ge 0$.

Заметим, также, что у нас есть 2 особые точки: 5 и ∞.

Пусть $f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{x-5}{x+5}$

$$\int_5^\infty f dx = \int_5^6 f dx + \int_6^\infty f dx$$

Сходимость исходного интеграла $\Leftrightarrow$ сходимости обоих интегралов.
1) Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_5^6 f dx = \int_5^6 \frac{1}{x}\ln\frac{x-5}{x+5}dx = \int_5^6 \frac{\ln(x-5)}{x}dx - \int_5^6 \frac{\ln(x+5)}{x}dx$$

Опять же, сходимость этого интеграла $\Leftrightarrow$ сходимости обоих интегралов. Правый интеграл в сумме, очевидно, сходится, исследуем левый интеграл на сходимость.

$$\int_5^6 \frac{\ln(x-5)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+5}dt$$

Заметим, что получившийся интеграл знакоопределённый, тогда воспользуемся признаком сходимости и найдём эквивалент.

$$\frac{\ln t}{t+5} \sim \frac{\ln t}{5} \text{ при } t \to 0$$

$\frac{1}{5}\int_0^1 \ln t dt$, как известно, сходится, значит сходится и $\int_5^6 f dx$.

2) Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_6^\infty f dx = \int_6^\infty \frac{1}{x}\ln\frac{x-5}{x+5}dx = \int_6^\infty \frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{10}{x+5}\right)dx$$

$$\frac{-10}{x+5} \to 0 \text{ при } x \to +\infty$$

Тогда воспользуемся эквивалентом

$$\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{10}{x+5}\right)\sim\frac{1}{x}\cdot\frac{-10}{x+5}\sim\frac{-10}{x^2}$$

$\int_6^\infty \frac{dx}{x^2}$, как известно, сходится, значит сходится и $\int_6^\infty f dx$.
Итого, каждый интеграл в сумме сходится, значит сходится и $\int_5^\infty f dx$.

Задание № 8

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак – на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_0^1 x\ln\ln\frac{1}{x}\,dx$$

Заметим, что у этого интеграла две особые точки: 0 и 1. Поэтому разобьем наш интеграл в сумму двух и рассмотрим их по отдельности:

$$\int_0^1 x\ln\ln\frac{1}{x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{e}} x\ln\ln\frac{1}{x}\,dx+\int_{\frac{1}{e}}^1 x\ln\ln\frac{1}{x}\,dx$$

1) Первая часть интеграла ($0\leq x\leq\frac{1}{e}$)

Заметим, что при $x\in[0,\frac{1}{e}]$ наша функция неотрицательна, а значит, мы можем пользоваться оценками:

$$x\cdot\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\leq x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)\leq x\cdot\frac{1}{x}=1$$

Логарифмическая функция действительно меньше степенной. Следовательно, наша функция меньше константы, интеграл которой, очевидно, сходится. Из этого следует, что интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{e}} x\ln\ln\frac{1}{x}\,dx$$

также сходится. Поскольку функция на данном промежутке неотрицательна, это автоматически означает абсолютную сходимость функции.

2) Вторая часть интеграла ($\frac{1}{e}\leq x\leq 1$)
Теперь рассмотрим интеграл на $[\frac{1}{e},1]$:

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 x\ln\ln\frac{1}{x}\,dx$$

Пусть $t = \ln \frac{1}{x}$. Тогда $dt = -\frac{1}{x}dx$ и границы интегрирования изменяются следующим образом: - при $x = \frac{1}{e}$, $t = 1$ - при $x = 1$, $t = 0$

Перепишем интеграл:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln \ln \frac{1}{x} \, dx = \int_{1}^{0} -\frac{e^{-t}}{t} \ln t \, dt = \int_{0}^{1} \frac{e^{-t}}{t} \ln t \, dt$$

Здесь функция $\frac{e^{-t}}{t} \ln t$ достаточно быстро убывает при $t \to 0$, поэтому интеграл сходится. Сходится также и интеграл на этом промежутке.

Итак, каждый из интегралов на соответствующих промежутках сходится, следовательно, исходный интеграл

$$\int_{0}^{1} x \ln \ln \frac{1}{x} \, dx$$

тоже сходится.

Типовик 2

Задание № 5(а)

Исследуем на равномерную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{n + x + n^2 x}, \quad D = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

1. Частичная сумма $A_N(x)$:

$$A_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x \sin nx}{n + x + n^2 x}$$

2. Выражение для $A_N(x)$: Заметим, что

$$\frac{x}{n + x + n^2 x} \leq \frac{x}{n^2 x} = \frac{1}{n^2}$$

Таким образом,

$$|A_N(x)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin nx|}{n^2}$$

3. Равномерная ограниченность: Так как $|\sin nx| \leq 1$ для всех x,

$$|A_N(x)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, и сумма его конечна, следовательно, последовательность $A_N(x)$ равномерно ограничена.

4. Анализ функции $g_n(x)$:

$$g_n(x) = \frac{x}{n + x + n^2 x}$$

Для $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$g_n(x) \leq \frac{\frac{\pi}{3}}{n + \frac{\pi}{3} + n^2 \cdot \frac{\pi}{3}}$$

Так как n^2 растет быстрее, чем n, и x ограничен,

$$g_n(x) \leq \frac{\frac{\pi}{3}}{n^2 \cdot \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{n^2}$$

Таким образом, $g_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно для всех $x \in D$.

Так как $A_N(x)$ равномерно ограничена, и $g_n(x) \to 0$ равномерно на D, то по признаку Дирихле данный функциональный ряд сходится равномерно на $D = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Задание № 6

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2 x} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)$$

Так как x находится под корнем, то $x \geq 0$. Докажем, что данный ряд равномерно сходится на $x \in (\delta, \infty)$, $\delta > 0$.

Для этого рассмотрим выражение:

$$\frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2 x} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{1 + n^2 x} \leq \frac{1}{1 + n^2 \delta}$$

Теперь рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 \delta}$$

Данный ряд сходится, так как сходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Следовательно, мы нашли мажоранту и по теореме Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $x \in (\delta, \infty)$, $\delta > 0$. Значит, выбрав конкретный $x > 0$, мы можем говорить о поточечной сходимости.

Тогда исходная функция сходится на промежутке $(0, \infty)$. Это и есть область определения.

Вследствие равномерной сходимости рядов получаем:

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0+0} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x_0}}{1+n^2x_0} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x_0}}\right)$$

Аналогично:

$$f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0-0} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x_0}}{1+n^2x_0} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x_0}}\right)$$

Таким образом, данная функция непрерывна на области определения $(0, \infty)$.