Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Типовик №1
Математический Анализ

Выполнил:
Студент группы P3116
Брагин Роман Андреевич
Практик:
Попов Арсений Михайлович
Лектор:
Трифанова Екатерина Станиславовна

г. Санкт-Петербург,
2024 г

Задание №1

Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве пользуясь определением:

$f(x) = 2x + \frac{1}{1-3x} \quad a)X = [1;+\infty) \quad b)X = (\frac{1}{3};1)$

Для доказательства по определению необходимо найти $\delta = \delta(\varepsilon)$: $|x' - x''| < \delta$ и $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для $\forall\ x', x''$,из промежутка.

$a)X = [1;+\infty)$

Докажем, что на промежутке $X = [1;+\infty)$ функция равномерно непрерывна. Пусть ε произвольное положительное число. Возьмем два значения x'и x'' из промежутка и рассмотрим их разность

$|f(x') - f(x'')| = |2x' + \frac{1}{1-3x'} - 2x'' - \frac{1}{1-3x''}| = |2(x'-x'') + \frac{1-3x''-1+3x'}{(1-3x')(1-3x'')}| = |(x'-x'')(2 + \frac{3}{(1-3x')(1-3x'')})|$, и так как $x', x'' \in [1;+\infty)$, то справедливо $\leq 3|(x'-x'')|$.

Следовательно, если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, то из условия $\rightarrow |x' - x''| < \delta$ будет следовать $\rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Что и доказывает что $f(x)$ на $[1;+\infty)$ равномерна непрерывна.

$b)X = (\frac{1}{3};1)$

Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на промжутке, если можно найти число $\varepsilon > 0$ такое, что какое бы число $\delta > 0$ мы ни взяли, всегда можно найти значения аргумента x' и x, лежащие наэтом промежутке, которые будут удовлетворять неравенству $|x' - x''| < \delta$ и для которых будет выполняться неравенство $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$.

Рассмотрим 2 последовательности $x'_n = \frac{3}{1+n}$ и $x''_n = \frac{1}{1+n}$, для $\forall\ n$, верно неравенство $|x' - x''| = |\frac{2}{1+n}| < \delta$,но

$|f(x') - f(x'')| = |2\frac{3}{1+n} + \frac{1}{1-3\frac{3}{1+n}} - 2\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-3\frac{1}{1+n}}| = |\frac{2n^3-2n^2-58n+54}{(n+1)(n-8)(n-2)}|$,при $n \rightarrow \infty$, то будет выполняться неравенсто,
$|f(x') - f(x'')| > 2$, т.к $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-2n^2-58n+54}{(n+1)(n-8)(n-2)} = 2$, т.е нужное нам $\varepsilon = 2$.

Таким образом наша $f(x)$ не является равномерно непрерывной на интервале $(\frac{1}{3};1)$.

Задание №2

Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти его предел.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$$

Сначала определим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \text{интегральная сумма, где}$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta_i = [x_{i-1},\ x_i], i \in \{1,2,...,n\}, \int\limits_a^b f\, dx = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$ где $\lambda(\tau) = \max\limits_{i\in\{1,2,\ ...,n\}} \Delta x_i$.

Преобразуем наш предел:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{4}{n^2}}}+...+\frac{1}{\sqrt{4-1}})) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4n^2}}}$.

Заметим, что $\Delta x_i = \frac{1}{2n}$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{\pi}{6}$.

Теперь докажем существование интегралла и найдем его предел:

Докажем через критерий Дарбу, напомним его:

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}(S_\tau(f) - s_\tau(f)) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall\tau :\ \lambda(\tau) < \delta$$
$S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.

Вспомним определения сумм Дарбу:

Верхняя сумма Дарбу:

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i, M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x), i \in \{1,2,...,n\}$$

Нижняя сумма Дарбу:

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x), i \in \{1,2,...,n\}$$

Найдем их:

Начнем с вехней:

$$\Delta x_i = \frac{1}{2n}, M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(\xi_i), \text{ где } \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}}, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{4n^2}}}, \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{4n^2}}}, \ \dots\ , \xi_n = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n^2}{4n^2}}} \to$$

$S_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \frac{1}{2n}(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{4n^2}}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n^2}{4n^2}}}).$

Теперь с нижней:

$$\Delta x_i = \frac{1}{2n}, m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(\xi_i), \text{где}\, \xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}}, \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{4n^2}}}, \ \dots\ , \xi_n = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{4(n-1)^2}}} \to$$

$s_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \frac{1}{2n}(0 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{4n^2}}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{4(n-1)^2}}})).$

Теперь проверка:

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} (S_\tau(f) - s_\tau(f)) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2n} = 0$$

Тем самым доказав интегрируемость функции.

Задание №3

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; [a, b] = [1, 2],$$

Аналитический этап:

Разобьем наш отрезок [1,2] на $[\frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, ..., \frac{2n}{n}]$

Рассмотрим нижнюю сумму Дарбу, где

$$\Delta x_i = \frac{n+2}{n} - \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n},\ m_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(\xi_i), \text{где}\, \xi_1 = \frac{n^2}{(n+1)^2}, \xi_2 = \frac{n^2}{(n+2)^2}, \xi_3 = \frac{n^2}{(n+3)^2}, \ \dots\ , \xi_n = \frac{n^2}{(n+n)^2}.$$

Тогда:

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \frac{1}{n}(\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \frac{n^2}{(n+3)^2} + ... + \frac{n^2}{(n+n)^2})).$$

Рассмотрим верхную сумму Дарбу, где

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \frac{n+2}{n} - \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n},\ M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(\xi_i),$$
$$\xi_1 = 1, \xi_2 = \frac{n^2}{(n+1)^2}, \xi_3 = \frac{n^2}{(n+2)^2}, \xi_4 = \frac{n^2}{(n+3)^2},\ \dots, \xi_n = \frac{n^2}{(n+n-1)^2}.$$

Тогда:

$$= \frac{1}{n}(1 + \frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \frac{n^2}{(n+3)^2} + ... + \frac{n^2}{(n+(n-1))^2})).$$

Через критерий Римана:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\tau : S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{n^2}{(n+n)^2} = \frac{3}{4n} < \varepsilon.$$

Тогда :$\forall\varepsilon > 0\ \exists\tau : S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.

Найдем предел интегральной суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}(\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \frac{n^2}{(n+3)^2} + ... + \frac{n^2}{(n+n)^2})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{n^2}{(n+i)^2};$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{n^2}{(n+i)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{(*)} \frac{1}{2}.$$

(*)получили это преобразовав выражение под сумматором с помощью ряда Тейлора $\frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + \frac{7}{48n^2} + ...$ (заметим, что n дальше будет только в знаменателе и с легкостью вычислим предел).

Проверка черех формулу Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f\ dx = F(b) - F(a),$$

Подставив, получим:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ dx = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно все верно.

Практический этап:

График - смотреть Рис.1.

Сложность вычислений равна $O(n)$, где n - количество разбиений от-

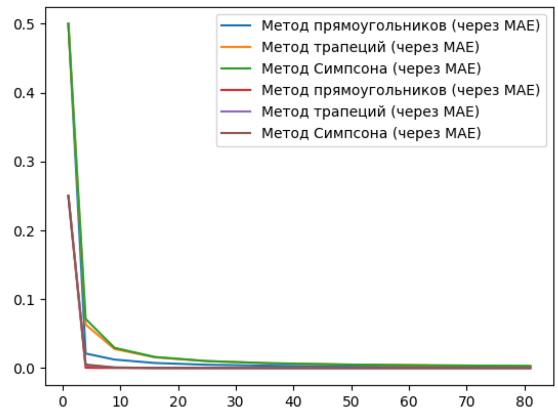

Рис. 1: График

резка $[0;\pi]$. Время вычисления $\approx$ 1с. Точность вычислений методом прямоугольника $\approx 10^{-2}$, а точность вычислений методом трапеции и Симпсона $\approx 10^{-15}$.

График из Python:

Задание №4

Найдите площадь фигуры, ограниченной фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Сделать рисунок.

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \mathrm{a}\cos(t) \\ y(t) = \mathrm{tg}(t) + \mathrm{a}\sin(t) \end{cases}, (a > 1)$$

Сначала вспомним формулу выведенную на практике для площади:

$$2S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\ dt - \int\limits_{\alpha}^{\beta} y'(t)x(t)\ dt$$

Сначала вычислим производную для $x(t)$ и $y(t)$:

$$x'(t) = -a\sin(t);\ y'(t) = \frac{1}{cos^2(t)} + a\cos(t);$$

Теперь осталось определить промежутки интегрирования:

Заметим, что $x(t)$ и $y(t)$ схожи, действительно, возьмем $y(t)$ и поделим на $\sin(t)$ и получим $\frac{1}{cos(t)} + a$

Посмотрим когда у нас $x(t) = 0$, $x(t) = 1 + a\cos(t) = 0$, $\cos(t) = -\frac{1}{a}$, тогда $t = 2\pi n - \arccos -\frac{1}{a}$, где $n \in Z$, получим, что наши границы

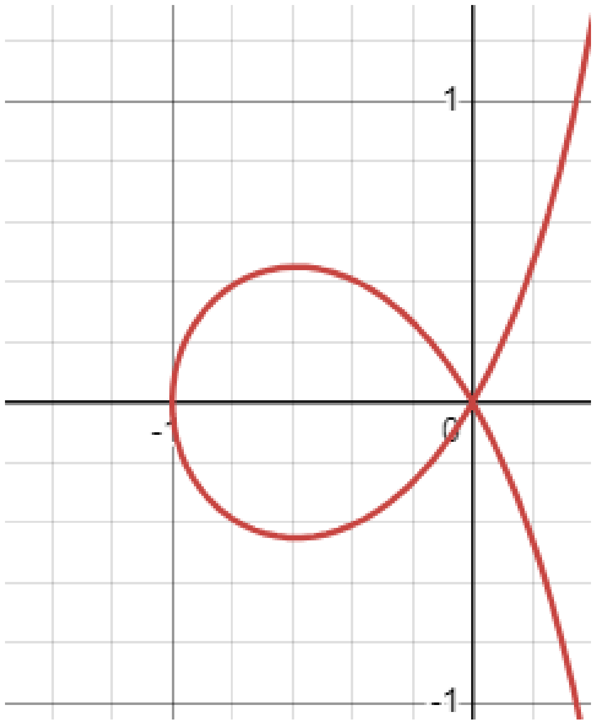

Рис. 2: Рисунок для задания №4

$\alpha = \arccos -\frac{1}{a}$ и $\beta = 2\pi - \arccos -\frac{1}{a}$. Подставим в формулу:

$$S = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\arccos -\frac{1}{a}}^{2\pi - \arccos -\frac{1}{a}} (\mathrm{tg}(t) + \mathrm{a}\sin(t))(-a\sin(t)))\ dt -$$

$$\int\limits_{\arccos -\frac{1}{a}}^{2\pi - \arccos -\frac{1}{a}} (\frac{1}{cos^2(t)} + a\cos(t))(1+\mathrm{a}\cos(t)))\ dt = \frac{1}{4a}(-2at + a\sin 2t + 4\sin t +$$

$$4\ln(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}) - 4\ln(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2})) - (\frac{at^2}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + a\sin t - a\ln(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})) +$$

$$a\ln(\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}))\Big|_{\alpha}^{\beta} \approx 0,3265a.$$

Задание №5

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Перейдем к полярным координатам. Введем параметр t и выразим x и y. Пусть $x = r\cos(\sigma)$ и $y = r\sin(\sigma)$, где r - раудиус вектор точки, а σ - угол между вектором и OX, где x положительный. И так как это полярные координаты, справеливо следующее $x^2 + y^2 = r^2$. Тогда:

$$(r\cos(\sigma))^3 + (r\sin(\sigma))^3 = 3ar\cos(\sigma)r\sin(\sigma) =$$

$= r^3(\cos(\sigma)^3 + \sin(\sigma)^3) = 3ar\cos(\sigma)r\sin(\sigma) =$

$= r^2(\cos(\sigma)^3 + \sin(\sigma)^3) = 3a\cos(\sigma)\sin(\sigma) \Rightarrow$

$r = \sqrt{\frac{3a\cos(\sigma)\sin(\sigma)}{(\cos(\sigma)^3+\sin(\sigma)^3)}}.$

Тогда посчитаем площадь, в интервале $[0; \frac{\pi}{2}]$

$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3a\cos(\sigma)\sin(\sigma)}{(\cos(\sigma)^6+\sin(\sigma)^3)})^2\ d(\sigma) = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(\sigma)\sin^2(\sigma)}{(\cos(\sigma)^6+\sin(\sigma)^6}\ d(\sigma) = \frac{2\pi}{3}\frac{9a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$

Задание №6

Кривая задана как пересечение поверхностей, заданных данными упралениями в декартовых координатах. Задайте кривую параметрически и найдите длину кривой.

$2\arctan(\frac{z}{x}) = \ln y, x^2 + z^2 = y^2.$

Сделаем замену $z = xt$, $2\arctan(\frac{z}{x}) = \ln y$; $e^{2\arctan(\frac{z}{x})} = y$, тогда:

$x^2+y^2 = e^{4\arctan(\frac{z}{x})}$; $x^2+x^2(t^2) = e^{4\arctan(\frac{z}{x})}$; $x^2 = \frac{e^{4\arctan(\frac{z}{x})}}{1+t^2}$, и теперь:

$x'(t) = \frac{\frac{e^{4\arctan(t)}4\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}}{2\sqrt{e^{4\arctan(t)}}} - \frac{2t\sqrt{e^{4\arctan(t)}}}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{(2-t)e^{\arctan t}}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$

$y'(t) = e^{2\arctan t}\frac{2}{1+t^2} = \frac{2e^{arctgt}}{1+t^2}$, тогда
$z'(t) = x'(t)t + x(t) = \frac{(2-t)e^{\arctan t}}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}t + \frac{e^{2\arctan(t)}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{(2+t)e^{\arctan t}}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$, теперь:

$(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2 = (\frac{(2-t)e^{\arctan t}}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}})^2+(\frac{(2+t)e^{\arctan t}}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}})^2+(\frac{(2+t)e^{\arctan t}}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}})^2 = |e^2\arctan t = u| = \frac{4u^2-4u^2t+u^2t^2+4u^2-4t^2u^2+4t^2u^2+4u^2t^2+u^2}{(1+t^2)(1+t^2)^2} = \frac{9u^2t^2+9u^2}{(1+t^2)^3} = \frac{9u^2}{(1+t^2)^2}.$

$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \frac{3u}{1+t^2}$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3e^{2\arctan t}}{1+t^2}\,dt = \frac{3}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\arctan t}\,d\arctan t = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2\arctan x}-e^{\arctan -x}) = \frac{3}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi}) \approx 34,6.$

И из - за симметричности умножим на 2, тем самым получим длину ≈ 68.

Задание №7

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке.Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость.

$$\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x-5}{x+5}\ dx.$$

Не трудно заметить, что при $x > 5$, функция < 0 , следовательно исследуем только на сходимость и не сходимость. Воспользовавшись знаниями из 1 семестра, и разложим функцию в ряд Тейлора.

$\frac{1}{x} \ln \frac{x-5}{x+5} = \frac{1}{5} \ln \frac{x-5}{10} + \frac{1}{50}(x-5)(-2\ln(x-5)-1+\ln(100)) + O((x-5)^2)$, - он расходится, при $x \to +\infty$. Следовательно исходный тоже расходится.

Задание №8

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость.

$$\int\limits_{0}^{1} x \ln \ln \frac{1}{x}\ dx = \text{Увы}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}}$