**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №2

Вариант 2

Численное решение нелинейных уравнений и систем

Выполнил:

Брагин Роман Андреевич

Проверил:

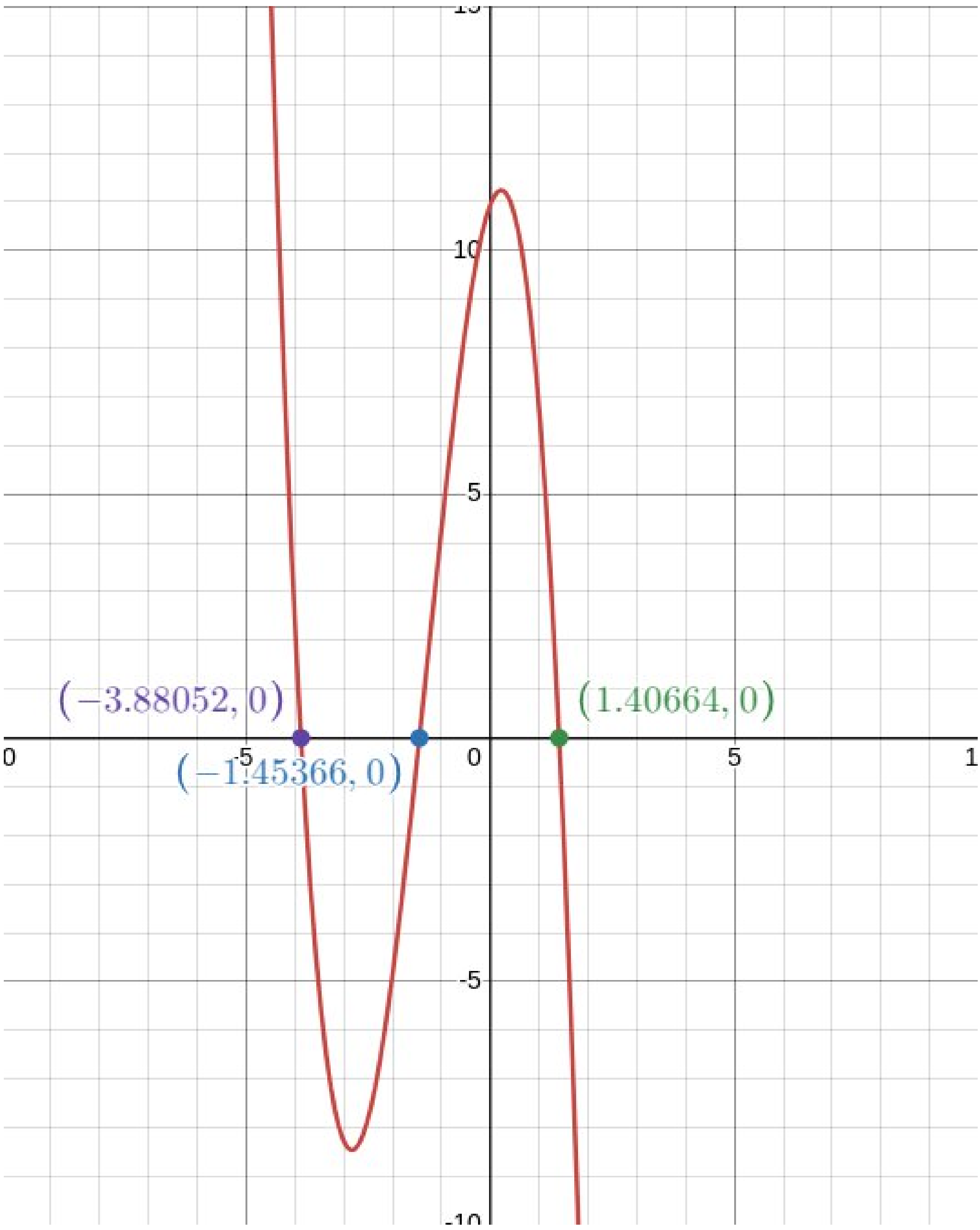
Рыбаков Степан Дмитриевич

г. Санкт-Петербург

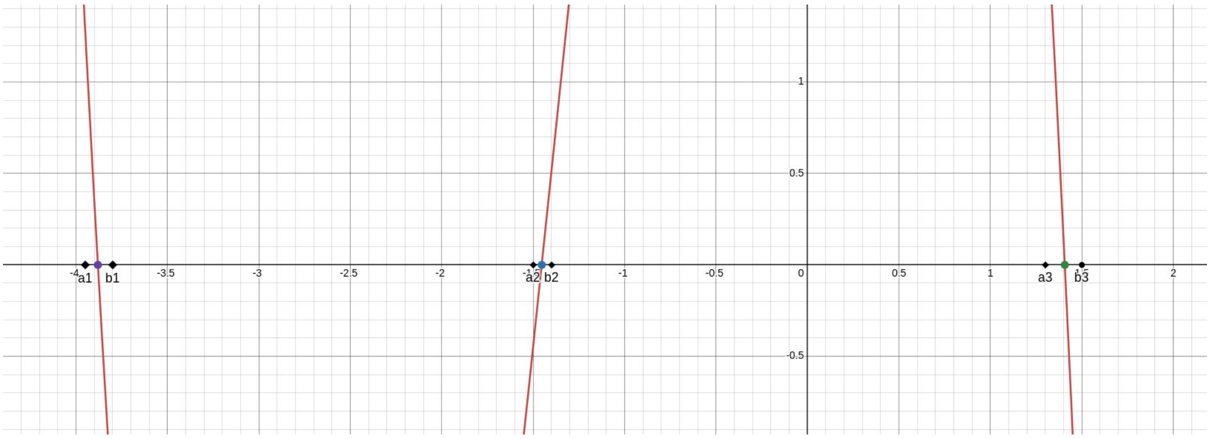
2025

1) Вычислительная реализация задачи:

Нелинейное уравнение: $f(x) = -1{,}38\,x^3 - 5{,}42\,x^2 + 2{,}57\,x + 10{,}95$



1) <u>Графическое отделение корней:</u>



<u>Определим интервалы изоляции корней табличным способом:</u>

x	$f(x)$
-4.0	2.2700
-3.5	-5.2725
-3.0	-8.2800
-2.5	-7.7875
-2.0	-4.8300
-1.5	-0.4425
-1.0	4.3400
-0.5	8.4825
0.0	10.9500
0.5	10.7075
1.0	6.7200
1.5	-2.0475
2.0	-16.63

По этой таблице мы получили 3 интервала $\underline{(-4,-3.5),(-1.5,-1),(1,1.5)}$

Уточним корни через методы:

1)Для уточнения правого корня используем метод ***Простой итерации***

Проверим условие сходимости метода на выбранном промежутке:

Правый промежуток (1,1.5)

$$f(x) = -1{,}38\,x^3 - 5{,}42\,x^2 + 2{,}57\,x + 10{,}95 = 0$$

$$f'(x) = -4.14x^2 - 10.84x + 2.57$$

$$f'(a) = -12.41 < 0, f'(b) = -23.005 < 0$$

$$max(|f'(a)|, |f'(b)|) = 23{,}005 \rightarrow \lambda = \frac{1}{max\ (|f'(x)|)} = \frac{1}{23{,}005}$$

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x + \frac{-1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57\,x + 10{,}95}{23{,}005}$$

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 + \frac{-4{,}14x^2 - 10{,}84x + 2{,}57}{23{,}005}$$

На отрезке начального приближения [1, 1.5] функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема.

$$|\varphi'(a)| = 0{,}461$$

$$|\varphi'(b)| = 0$$

$$|\varphi'(x)| \leq q, \textit{где}\ q = 0{,}461$$

$0 \leq q < 1 \rightarrow$ итерационная последовательность сходится, скорость сходимости высокая, $0 \leq q < 0{,}5 \rightarrow$ критерий окончания итерационного процесса $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$,

№	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	1.500	1.411	-0.091	0.089
2	1.411	1.40704	-0.00834798	0.00396
3	1.40704	1.40668	-0.000833168	0.00036
4	1.40668	1.40664	0.00000163104	0.00004

Правый корень $x_3 = 1.4$

2)Для уточнения левого корня используем **Метод хорд**

$(-4, -3.5)$

Используем формулу метода Хорд:

$$x_0 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a)$$

№	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$x_{k+1} - x$
1	-4.0	-3.5	-3.8495	2.27	-5.2725	-0.54	0.1505
2	-4.0	-3.8495	-3.8785	2.27	-0.54	0.01	0.0290
3	-3.8785	-3.8495	-3.879	0.01	-0.54	-0.002	0.0005
4	-3.8785	-3.879	-3.879	0.01	-0.002	0.0001	0.0000

Левый корень $x_1 = -3.87$

3)Для уточнения центрального корня используем **Метод секущих**

$(-1.5, -1)$

Используем формулу метода Секущих:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

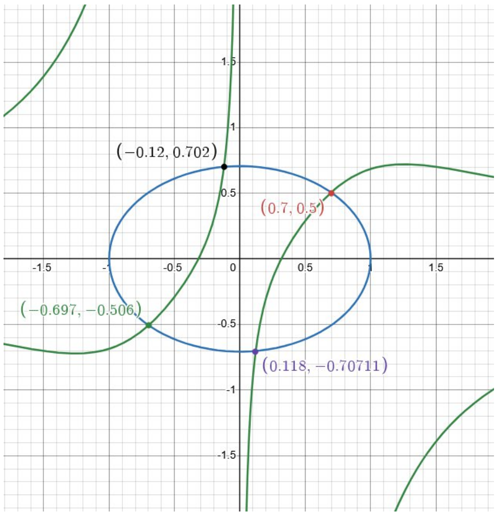
№	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	$x_{k+1} - x_k$
1	−1.5	−1.0	−1.4537	−0.4425	4.34	0.4537
2	−1.0	−1.4537	−1.4537	4.34	0.0	0.0

Центральный корень $x_1 = -1.45$

Итог: если посмотреть на график, то все корни совпадают с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

2. Решение системы нелинейных уравнений

1. $\{tg\,(xy + 0.1) = x^2\ ; x^2 + 2y^2 = 1$, Метод Ньютона



Решение:

$$\begin{cases} tg(xy+0,1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg(xy+0,1) - x^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Т.к. решением системы являются точки пересечения элипсе и $tg(xy+0,1) = x^2$, что видно на картинке сверху, $\rightarrow$ система имеет 4 корня.

Посмотрим матрицу Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,sec(xy+0,1) - 2,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\,sec(xy+0,1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial g}{\partial y} = 4y.$$

$$\begin{vmatrix} y\,sec(xy+0,1) - 2 & x\,sec^2(xy+0,1) \\ 2x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - tg(xy+0,1) \\ 1 - x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y\cdot\sec(xy+0,1)\Delta x - 2\Delta x + x\sec^2(xy+0,1)\Delta y = \\ \qquad = x^2 - tg(xy+0,1) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

$x_0 = -0,12;\ y_0 = 0,7 \to$

$$\begin{cases} \Delta x + 0,077\Delta y = 0,0154 \\ -0,2\Delta x + 2,8\Delta y = 0,01 \end{cases} \to \Delta x = -0,0014 \quad \Delta y = 0,0019$$

$x_1 = x_0 + \Delta x = -0,1214$

$y_1 = y_0 + \Delta y = 0,7019$

$|x_1 - x_0| \le \varepsilon,\ |y_1 - y_0| \le \varepsilon \Rightarrow$

$\to |-0,1214 + 0,12| \le \varepsilon,\ |0,7019 - 0,7| \le \varepsilon$

– ответ $(-0,1214;\ 0,7019)$

Аналогично

$(0,698;\ 0,506)$

$(-0,698;\ -0,506)$

$(0,1214,\ -0,7019)$

<u>Ответ</u>

$(-0.1214, 0.7019),\ (0.698, 0.506), (-0.698,\ -0.506), (0.1214,\ -0.7019)$

2) Программная реализация задачи:

<u>Решение нелинейных уравнений</u>

1. Метод половинного деления
2. Метод Ньютона
3. Метод простой итерации

<u>Решение систем нелинейных уравнений</u>

1. Метод простой итерации