Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №4

Вариант 2

Аппроксимация Функций

Выполнил:

Брагин Роман Андреевич

Проверил:

Рыбаков Степан Дмитриевич

г. Санкт-Петербург

2025

Цель работы

1. Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.
2. Лабораторная работа состоит из двух частей: вычислительной и программной.
    2.1. <u>В вычислительной части</u> :
        2.1.1. Сформировать таблицу табулирования заданной функции на указанном интервале.
        2.1.2. Построить линейное и квадратичное приближения по 11 точкам заданного интервала.
        2.1.3. Найти среднеквадратические отклонения для каждой аппроксимирующей функции. Ответы дать с тремя знаками после запятой.
        2.1.4. Выбрать наилучшее приближение.
        2.1.5. Построить графики заданной функции, а также полученные линейное и квадратичное приближения.
    2.2. <u>В программной части :</u>
        2.2.1. Для исследования использовать:
            2.2.1.1. линейную функцию,
            2.2.1.2. полиномиальную функцию 2-й степени,
            2.2.1.3. полиномиальную функцию 3-й степени,
            2.2.1.4. экспоненциальную функцию,
            2.2.1.5. логарифмическую функцию,
            2.2.1.6. степенную функцию.

Решение

1) Вычислительная часть :

Решение

Линейная аппроксимация

$f(x) = \frac{15x}{x^4+2}$; $n=11$; $x \in [0;4]$, $h=0,4$.

4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3.2	3,6	4
y_i	0	2,96	4,98	4,41	2,8	1,66	1,02	0,66	0,44	0,31	0,23

$\Sigma x_i = 0,+0,4+\ldots+4=22$; $\Sigma y_i = 0,0+\ldots+0,23=19,52$

$\Sigma x_i^2 = 0^2+0,4^2+\ldots+4^2 = 61,6$; $\Sigma y_i \cdot x_i = 0^2+\ldots+0,23 \cdot 4 = 26,1$

$$\begin{cases} n \cdot a + \Sigma x_i \cdot b = \Sigma y \\ \Sigma x_i \cdot a + \Sigma x_i^2 \cdot b = \Sigma xy \end{cases} = \begin{cases} n \cdot a + S_x \cdot b = S_y \mid \cdot 2 \\ S_x \cdot a + S_{x^2} \cdot b = S_{xy} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 11 \cdot a + 22b = 19,52 \\ 17,6 \cdot b = -12,924 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -0,73 \\ a = 3,24. \end{cases}$$

$\varphi(x) = 3,2431 - 0,7343 \cdot x$

$\varphi(x_i)$	3,2	2,9	2,6	2,3	2,06	1,7	1,4	1,18	0,89	0,6	0,3
$(\varphi(x_i)-y_i)^2$	10,51	0	5,4	4,2	0,54	0,012	0,21	0,27	0,15	0,07	0

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}} \approx 1,3972.$

Квадратичная аппроксимация:

у нас те же данные → таже таблица 1

$\varphi(x) = a + bx + cx^2;$

$\Sigma x_i = 22 = S_x;\ \Sigma_{x^2} = 61,6 = S_{x^2};\ S_{x^3} = 193,6$

$S_{x^4} = 648,52;\ \Sigma_y = 19,52;\ \Sigma_{xy} = S_{xy} = 26,11;$

$S_{x^2y} = 47,4.$

$$\begin{cases} n \cdot a + S_x b + S_{x^2} \cdot c = S_y \\ S_x \cdot a + S_{x^2} + S_{x^3} \cdot c = S_{xy} \\ S_{x^2} \cdot a + S_{x^3} + S_{x^4} \cdot c = S_{x^2 y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 \cdot a + 22b \cdot 61,6 \cdot c = 19,52 \\ 22 \cdot a + 61,6b + 193,6c = 26,116 \\ 61,6 \cdot a + 193,6 \cdot b + 648,52 \cdot c = 47,405 \end{cases}$$

Применим мет Крамера

$det = 4251,456$;

1) заменим ~~[illegible]~~ 1 столб. на правую часть →

$det_1 = 9043,805$

2) заменим 2 столбец.

$det_2 = 4785,476$;

3) заменим 3 столбец → $det_3 = -1976$.

$a = \frac{det_1}{det} = 2,127$; $b = \frac{det_2}{det} = 1,126$; $c = \frac{det_3}{det} =$

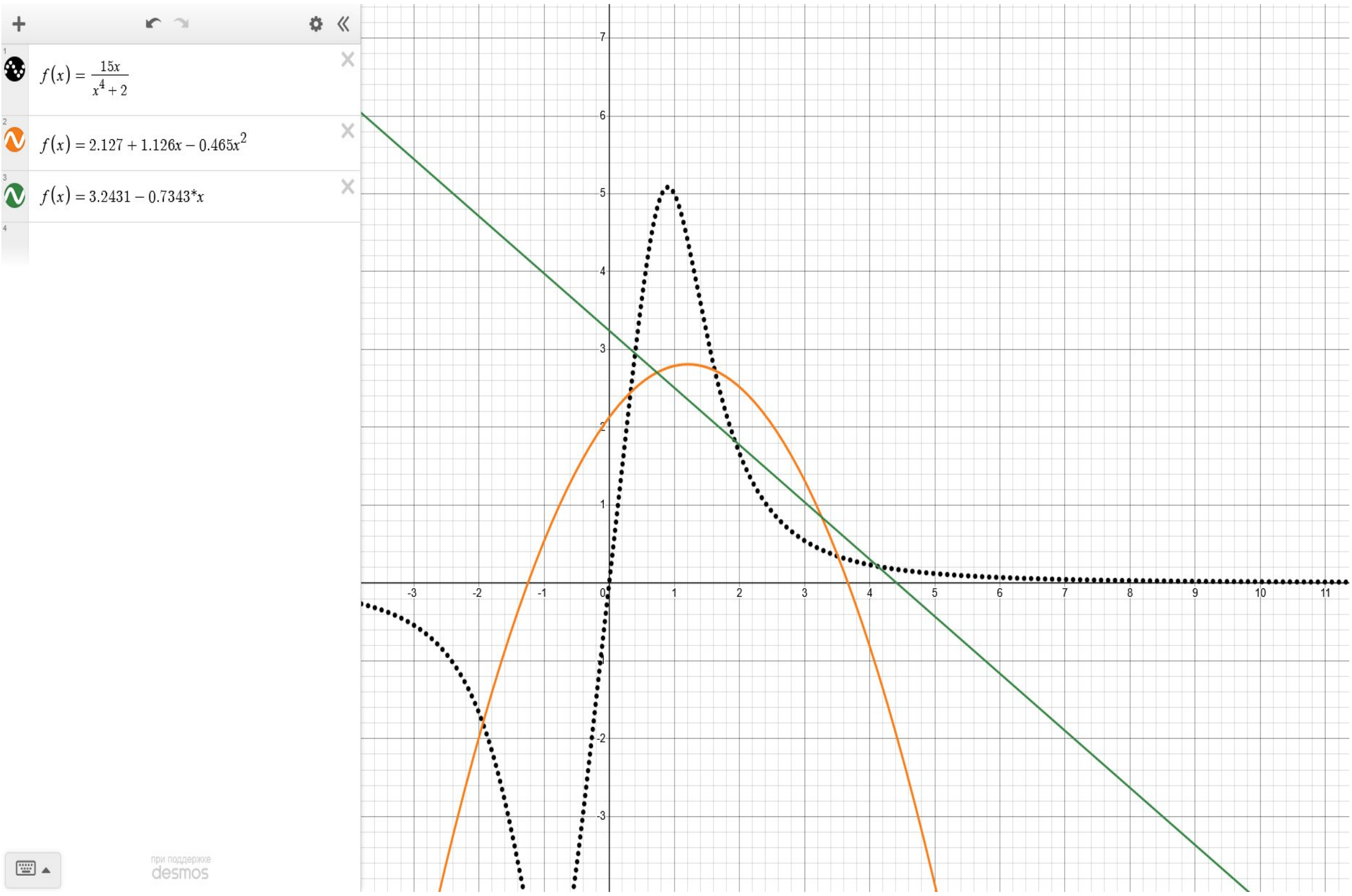
$= -0,465 \to \varphi(x) = 2,127 + 1,126x - 0,465x^2$

$\varphi(x_i)$	2,12	2,5	2,73	2,8	2,7	2,5	2,1	1,63	0,96	0,15	-0,8
$(\varphi(x_i) - y_i)^2$	4,5	0,2	5,06	2,59	0,005	0,7	1,2	0,94	0,27	0,022	1,08

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\varphi(x_i) - y)^2}{n}} \approx 1,23$$

1,23 < 1,39 → у квадр. аппр. отклонение меньше → оно лучше аппроксимирует.

<u>*Графики*</u>



2) Программная часть :

https://github.com/mushdi12/itmo/tree/main/vch-math/lab4

Вывод:

В рамках данной работы была проведена аппроксимация функций с использованием различных подходов: линейного, квадратичного, кубического, экспоненциального и логарифмического. На основе этих методов был разработана программа на языке Golang, реализующий метод наименьших квадратов и визуализирующий исходную функцию вместе с аппроксимирующими кривыми.

Проведенный анализ позволил определить наиболее точную модель аппроксимации, рассчитать среднеквадратичное отклонение, а также вычислить коэффициент корреляции Пирсона для линейной зависимости.