Quiz 4 (11월 27일 금 5, 6교시)

[2015년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 두 곡선 $C_1: \ x^2+y^2=1, \ C_2: \ x^2+y^2=4$ 의 향이 모두 시계 반대 방향으로 주어져 있을때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(e^{x^2}+\sin(x+y)+y, \ e^{y^2}+\sin(x+y)+x^3\right)$$

에 대하여 $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}-\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 를 계산하시오.

2. (6점) 원점에서 $x^2+y^2+(z-2)^2=3$ 로 주어진 곡면의 입체각을 구하시오.

3. (7점) 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y, \ x, \ z-2)$ 와 곡면

$$S \ : \ x^2+y^2+(z-2)^2=3$$

에 대하여 다음 적분을 계산하시오.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y^2}+\sin(x+y)+x^3\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2}+\sin(x+y)+y\right)\\
&= \cos(x+y)+3x^2-\cos(x+y)-1\\
&= 3x^2-1 \qquad\qquad (2\text{점})
\end{aligned}$$

$D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 로 두고, 그린 정리를 이용하면

$$\begin{aligned}
\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}-\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{F}\,dV_2 \qquad\qquad (2\text{점})\\
&= \iint_D (3x^2-1)\,dxdy\\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (3r^2\cos^2\theta)\,rdrd\theta-\mathrm{Area}(D)\\
&= \left(\int_1^2 3r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)-3\pi\\
&= \frac{45}{4}\pi-3\pi=\frac{33}{4}\pi \qquad\qquad (3\text{점})
\end{aligned}$$

2. 원점에서 곡면에 접선을 그리면, 접선은 z-축의 양의 방향과 $\frac{\pi}{3}$ 의 각을 이룬다. (2점)
단위구면을

$$\begin{aligned}
X(\varphi,\theta) &= (\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi)\\
&\quad 0\le\theta\le 2\pi,\qquad 0\le\varphi\le\pi
\end{aligned}$$

로 매개화하면

$$dS=\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

이고 (2점), 구하는 입체각은

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta=2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\pi\left(1-\frac{1}{2}\right)=\pi$ 이다. (2점)

3. 곡면 S를

$$\begin{aligned} X(\varphi,\theta) &= (\sqrt{3}\sin\varphi\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\varphi\sin\theta,\ 2+\sqrt{3}\cos\varphi) \\ & \qquad 0\le\theta\le 2\pi, \qquad 0\le\varphi\le\pi \end{aligned}$$

로 매개화하면 (2점)

$$\begin{aligned} X_\varphi \times X_\theta &= (\sqrt{3}\cos\varphi\cos\theta,\ \sqrt{3}\cos\varphi\sin\theta,\ -\sqrt{3}\sin\varphi)\times \\ & \qquad (-\sqrt{3}\sin\varphi\sin\theta,\ \sqrt{3}\sin\varphi\cos\theta,\ 0) \\ &= (3\sin^2\varphi\cos\theta,\ 3\sin^2\varphi\sin\theta,\ 3\sin\varphi\cos\varphi) \end{aligned}$$

이므로 (2점)

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(X(\varphi,\theta))\cdot(X_\varphi\times X_\theta) \\ &\quad = (-\sqrt{3}\sin\varphi\sin\theta,\ \sqrt{3}\sin\varphi\cos\theta,\ \sqrt{3}\cos\varphi)\cdot \\ &\qquad\qquad (3\sin^2\varphi\cos\theta,\ 3\sin^2\varphi\sin\theta,\ 3\sin\varphi\cos\varphi) \\ &\quad = 3\sqrt{3}\sin\varphi\cos^2\varphi \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\sqrt{3}\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi d\theta \\ &= 2\sqrt{3}\pi\int_0^{\pi} 3\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi \\ &= 2\sqrt{3}\pi\left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} = 4\sqrt{3}\pi \quad (3\text{점}) \end{aligned}$$