

Quiz 2 (4월 8일 금 7, 8 교시)

[2016년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) $|x| < 1$ 인 실수 x 에 대하여 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{3n-2}$$

2. (8점) 수열 (a_n) 의 각 항이 1 부터 9 까지의 자연수 중 하나라고 하자.
즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \in \{1, 2, \dots, 9\}$ 이다.
 $|x| \leq \frac{1}{10}$ 인 실수 x 에 대하여 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

이 수렴함을 보이시오.

3. (6점) 구간 $(0, \pi/2)$ 에서 정의된 함수 $y = \csc x$ 의 역함수가 존재함을 보이고, 그 역함수의 도함수를 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $|x| < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \implies \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} nx^{3(n-1)} = \frac{1}{(1-x^3)^2} \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} nx^{3n-2} = \frac{x}{(1-x^3)^2}\end{aligned}$$

이다.(6점)

2. 모든 $n \geq 0$ 에 대하여

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| \leq 9 \cdot \frac{1}{10} < 1$$

이므로 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_nx^n|$$

는 수렴한다.(5점) 이는 주어진 거듭제곱급수가 주어진 범위에서 절대수렴함을 의미하고, 따라서 수렴한다.(3점)

3. 주어진 구간 $(0, \pi/2)$ 에서

$$y' = -\csc x \cot x \neq 0$$

이므로, 역함수 정리에 의하여 역함수 $x = g(y)$ 가 존재한다.(3점)
역함수 정리에 의해

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$$

이다.(3점)