Quiz 2 (4월 8일 금 3, 4 교시)

[2016년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 다음 거듭제곱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{n}\right) x^n$$

2. (5점) 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n}$$

3. (5점) $\cos(0.2)$ 의 근삿값을 오차의 범위 10^{-4} 이하가 되도록 구하시오.

4. 구간 $(0, \pi/2)$ 에서 정의된 함수 $y = \csc x$ 의 역함수를 $y = \operatorname{arccsc} x$ 라 하자. $x > 1$ 일 때, $\operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x^2-1}$ 임을 보이려고 한다.

   (a) (3점) $x > 1$ 일 때, $f(x) = \operatorname{arccsc} x + \arctan\sqrt{x^2-1}$ 는 상수함수임을 보이시오.

   (b) (2점) $x > 1$ 일 때, $\operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x^2-1}$ 임을 보이시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{(n+1)}}{\tan \frac{1}{n}} = 1$$
이므로 수렴반경은 1 이다.(3점)
$x = -1$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여
$$\tan \frac{1}{n} \geq \tan \frac{1}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \tan \frac{1}{n} = 0$$
이므로 교대급수정리에 의해 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ 은 수렴한다.
$x = 1$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여
$$\tan \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$$
이므로, 비교판정법에 의해 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$ 은 발산한다. 따라서 주어진 거듭제곱급수의 수렴범위는 $-1 \leq x < 1$ 이다.(2점)

2. 등비급수
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$$
의 양변을 적분하여
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$
을 얻고(3점), 이 식에 $x = -1/4$ 를 대입하면
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n} = -\log\left(\frac{5}{4}\right)$$
을 얻는다. 따라서 주어진 급수의 합은
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} = \log\left(\frac{5}{4}\right)$$
이다.(2점)

3. $\cos x$ 를 거듭제곱급수 함수로 표현하면,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

이므로(2점) $x = 0.2$ 를 대입하면 등식

$$\cos(0.2) = 1 - \frac{1}{2!}(0.2)^2 + \frac{1}{4!}(0.2)^4 - \cdots$$

을 얻는다. 교대급수의 성질에 의해,

$$\left|\cos(0.2) - \left(1 - \frac{1}{2!}(0.2)^2\right)\right| \le \frac{1}{4!}(0.2)^4 < 10^{-4}$$

이므로(2점),

$$\cos(0.2) \approx 1 - \frac{1}{2!}(0.2)^2 = 0.98$$

를 얻는다.(1점)

4. (a) $x > 1$ 일 때, $g(x) = \operatorname{arccsc} x$ 와 $h(x) = \arctan\sqrt{x^2-1}$ 의 도함수가

$$g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad h'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

이므로 $f(x) = g(x) + h(x)$ 의 도함수는 $f'(x) = 0$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 상수함수이다.(3점)

(b) $\csc\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ 이므로,

$$f(\sqrt{2}) = \operatorname{arccsc}\sqrt{2} + \arctan\sqrt{2-1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 (a)에 의해, 모든 $x > 1$ 에 대하여 $f(x) = f(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x^2-1}$이다.(2점)