Quiz 2 (4월 4일 금 5, 6교시)

[2014 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\frac{x}{4})^n}{4n^2}$ 이 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

2. (6점) 멱급수로 정의된 함수 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ $(|x| < 1)$ 에 대하여, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ 를 구하시오.

3. (4점) 양수 x 에 대하여, $2014\tanh x > \tanh(2014x)$ 임을 보이시오.

4. (5점) $\arctan(0.01)$ 의 근삿값을 1.5×10^{-15} 이내의 오차로 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. 주어진 급수는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-x)^n}{n^2 4^{n+1}}$ 으로 바꿀 수 있고

$$y := 4-x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2 4^{n+1}} \text{ 의 수렴반경 } r = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 4^{n+2}}{n^2 4^{n+1}} = 4, \text{(2점)}$$

$$y = 4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2 4^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2} < \infty,$$

$$y = -4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2 4^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2} : \text{수렴}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2 4^{n+1}} \text{은} -4 \le y \le 4 \Leftrightarrow 0 \le x \le 8 \text{ 에서 수렴.} \qquad \text{(5점)}$$

($x = 0$, $x = 8$ 둘 중 한 점에서만 수렴, 발션 여부가 맞으면 2점 감점, 범위를 x 에 대해서 표현하지 않으면 1점 감점)

2. $$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{t^n}{n+2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad \text{(3점)}$$

$$= 1 + \left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = 1 - \left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x) \qquad \text{(5점)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt = 1 - \log 2. \qquad \text{(6점)}$$

3. $f(x) := 2014\tanh x - \tanh(2014x)$ 라고 하면,
$f'(x) = 2014\left(\dfrac{1}{\cosh^2 x} - \dfrac{1}{\cosh^2(2014x)}\right) > 0$
($\because \cosh x < \cosh(2014x)\,(x>0)$).
또한 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) > 0\,(x>0)$. (4점)

(부분 점수 없음)

4. $\arctan(0.01) = 0.01 - \dfrac{0.01^3}{3} + \dfrac{0.01^5}{5} - \dfrac{0.01^7}{7} + \cdots$ 이므로 (2점)

$$\left|\arctan(0.01) - (0.01 - \frac{0.01^3}{3} + \frac{0.01^5}{5})\right| < \frac{0.01^7}{7} = \frac{1}{7 \times 10^{14}}$$

$$< \frac{1.5}{10^{15}} = 1.5 \times 10^{-15}$$

따라서 구하는 근삿값은 $0.01 - \frac{0.01^3}{3} + \frac{0.01^5}{5}$ 이다. (5점)

(단, 근삿값이 주어진 오차 이내임을 보이지 않으면 2점 감점)