

2016년 여름학기 수학 및 연습 2 001 강좌 네 번째 퀴즈

7월 25일(월) 12:30-12:50

- ⊙ 시험시간 = 20분, 총점 = 20점.
- ⊙ 모든 답안에 가능한 자세히 풀이 과정을 적으시오.

1. (6점) 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 반시계 방향으로 한바퀴 도는 곡선을 C 라고 할 때, 선적분 $\int_C 3y^2 dx + x dy$ 를 구하시오.

2. (7점) xy -평면에 있는 곡선

$$C(u) = \left(\int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt, e^{-u}, 0 \right), \quad 0 \leq u \leq 1$$

를 x 축 주위로 회전시킨 곡면의 넓이를 구하시오.

3. (7점) 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -2x, z)$ 와 곡면

$$S : z = 2 - 2x^2 - y^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

에 대하여 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 을 계산하시오. (단, S 의 향을 정하는 단위 법벡터 \mathbf{n} 은 $(0, 0, 2)$ 에서 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 주어진다.)

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1.

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-6y) \, dx \, dy \quad (2\text{점}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-6r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \quad (4\text{점}) \\ &= \pi \quad (6\text{점}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad X(u, v) &= \left(\int_0^u \sqrt{1-e^{-2t}} \, dt, e^{-u} \cos v, e^{-u} \sin v \right) \\ & \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi) \quad (2\text{점}) \\ \Rightarrow dS &= |X_u \times X_v| \, du \, dv = e^{-u} \, du \, dv \quad (4\text{점}) \\ \Rightarrow \text{area}(X) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-u} \, du \, dv = 2\pi(1-e^{-1}). \quad (7\text{점}) \end{aligned}$$

3. 곡면 S 를 $X(x, y) = (x, y, 2 - 2x^2 - y^2)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ 로 매개화하자.
 $\mathbf{N} = X_x \times X_y = (4x, 2y, 1)$ 으로 두면 (3점)
 $(0, 0, 2)$ 에서 \mathbf{N} 과 \mathbf{n} 의 방향이 일치한다. 그러므로 (5점)

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2 - 2x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} - y^2 \right) dy = 1 \quad (7\text{점}) \end{aligned}$$