Quiz 2 (4월 5일 목 7.5, 8.5 교시)

[2012년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 다음 급수의 합을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

2. (각 5점) 다음 멱급수들이 수렴하는 x의 범위를 구하여라.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin \frac{1}{n}\right) x^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log n} x^{2n}$

3. (5점) 구간 $I = (-1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x) = e^x + \log(1+x)$의 역함수 $x = g(y)$가 모든 실수 y에 대하여 정의되고 미분가능함을 보여라. 또한 $g'(1)$의 값을 구하여라.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (|\, x \,|< 1)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|\, x \,|< 1)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2} \qquad (|\, x \,|< 1)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \qquad (|\, x \,|< 1)$$

...(3점)

$x = \frac{1}{2}$를 대입하면 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\frac{1}{2^n} = 8.$ ...(2점)

2. (a) $a_n = (-1)^n \left(\sin\frac{1}{n}\right) x^n$ 라고 하자.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\sin\frac{1}{n}} \right| |\, x \,|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin\frac{1}{n+1}/\frac{1}{n+1}}{\sin\frac{1}{n}/\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n+1} \right| |\, x \,| \quad = \quad |\, x \,|< 1$$

...(3점)

$x = 1$ 일 때, $\sum a_n = \sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$, (모든 n에 대하여 $\sin\frac{1}{n} > \sin\frac{1}{n+1} > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$이므로) 교대급수판정법에 의하여 수렴. ...(1점)

$x = -1$ 일 때, $\sum a_n = \sum \sin\frac{1}{n}$, 모든 n에 대하여 $\sin\frac{1}{n} > \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n} > 0$ 이고 조화급수는 발산하므로 주어진 급수는 비교판정법에 의하여 발산. ...(1점)

따라서 수렴범위는 $-1 < x \le 1$.

(b) $a_n = \frac{2^n}{\log n} x^{2n}$ 이라고 하자.

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2x^2 < 1$ ...(4점)

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이면, $\sum a_n = \frac{1}{\log n}$이고, 모든 n에 대하여 $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} > 0$

이고 조화급수는 발산하므로 주어진 급수는 비교판정법에 의하여 발산. ...(1점)
따라서 수렴범위는 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. $x > -1$ 이면, $f'(x) = e^x + \frac{1}{1+x} > 0$이므로 역함수 정리에 의하여 역함수 $x = g(y)$가 존재하고 미분가능하다. (2점)

   $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이고 f는 연속함수이므로 f의 치역은 실수전체이다. 따라서 $g(y)$의 정의역은 실수전체이다. (1점)

   $y = 1$이면 $x = 0$이고, $\frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$, $\frac{dg(1)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(0)}{dx}} = \frac{1}{2}$ (2점)