

Quiz 2 (4월 4일 금 3, 4 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. 다음 멱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

(a) (5점) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

(b) (5점) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

2. (5점) 다음 함수를 $|x| < 1$ 에서 멱급수로 나타내시오.

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x - 2}$$

3. (5점) 다음 급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$$

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $a_n = \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}$ 이라고 할때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3$$

이다. 따라서, 수렴반경은 $\frac{1}{3}$ 이다. (2점)

$x = \frac{1}{3}$ 일 때, 주어진 멱급수를 이루는 수열이 그 절대값이 감소하면서 0 으로 수렴하는 교대급수 이므로 수렴하며 $x = -\frac{1}{3}$ 일 때, 주어진 멱급수는 발산한다.

따라서, 주어진 멱급수는 $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$ 에서 수렴한다. (5점)

($x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$ 둘 중 한 점에서만 수렴, 발산 여부가 맞을 경우 2점 감점)

- (b) $a_n = \frac{n}{3^{n+1}}$ 이라고 할때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$$

이다. 따라서, 수렴반경은 3 이다. (2점)

$x + 2 = 3$, $x + 2 = -3$ 일 때, 일반항 판정법에 의하여 발산한다.

따라서, 주어진 멱급수는 $-5 < x < 1$ 에서 수렴한다. (5점)

($x = 1$, $x = -5$ 둘 중 한 점에서만 수렴, 발산 여부가 맞을 경우 2점 감점)

2. $f(x) = \frac{3}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 1}$ 이다. (2점)

기하급수에 의해서

$$\frac{1}{x - 2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \quad (|x| < 2)$$

(3점)

이고

$$-\frac{1}{x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \quad (|x| < 1)$$

(4점)

이다.

따라서

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n \quad (|x| < 1)$$

(5점)

이다.

3. $|x| < 1$ 일 때

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

(3점)

이다.

$x = \frac{1}{2}$ 를 대입하면

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n} = 4$$

(5점)

를 얻는다.