

Quiz 2 (4월 8일 화 7.5, 8.5교시)

[2014 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. 다음 멱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

(a) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}$

(b) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}4^{n+1}} x^{2n}$

2. (5점) 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$$

3. (5점) $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ 일 때, $(f^{-1})'(0)$ 의 값을 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ 이다.
따라서 수렴반경은 $R = 1$ 이다. (2점)

$x = -1$ 일 때는 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ 에서 수렴함을
안다. $x = 1$ 일 때는 절대급수 수렴판정법, 혹은 교대 급수 수렴
판정법에 의해 수렴한다.
주어진 급수가 수렴하는 x 의 범위는 $-1 \leq x \leq 1$ 이다. (5점)

($x = 1, x = -1$ 둘 중 한 점에서만 수렴, 발산 여부가 맞은 경우
2점 감점)

- (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}4^{n+1}}$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}$ 이다.
따라서 x 의 수렴반경은 2 이다. (2점)

$x = 2, -2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}}$ 은 발산한다.
주어진 급수가 수렴하는 x 의 범위는 $-2 < x < 2$ 이다. (5점)

($x = 2, x = -2$ 둘 중 한 점에서만 수렴, 발산 여부가 맞은 경우
2점 감점)

2. $|x| < 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ (2점)

$$\int_0^x \log(1-t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (|x| < 1)$$

$$\int_0^x \log(1-t)dt = (1-x)\log(1-x) + x$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ 대입 } \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)3^{n+1}}$$

$$\text{따라서, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n} = 1 + 2 \log \frac{2}{3} \quad (5점)$$

3. $y = f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ 라고 두면 역함수 정리에 의해

$$(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^{-x^2}} \quad (3\text{점})$$

$$f(1) = 0 \text{ 이므로, } (f^{-1})'(0) = \frac{1}{e^{-1}} = e \text{ 이다.} \quad (5\text{점})$$