Quiz 2 (4월 6일 금 3, 4교시)

[2012년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 멱급수로 정의된 함수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, (0 < x < 1, a_n > 0)$ 에 대하여, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ 일 때, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 을 구하시오.

2. (6점) 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^{n+1}}$ 이 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

3. (1)(3점) 2 이상의 자연수 n 에 대하여 다음을 보이라.

$$\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n-1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

(Hint : $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$)

(2)(4점) (1)을 이용하여, $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$ 을 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$ 로 두고 양변을 적분하면,

$$\log f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + C \quad (C = \log a_0) \qquad (3점)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) x^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C = 1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \log(1-x) + C$$

$$\Rightarrow \log f(\frac{1}{2}) = 1 + \log \frac{1}{2} + \log a_0 = \log \frac{a_0 e}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = f(\frac{1}{2}) = \frac{a_0 e}{2}. \qquad (7점)$$

*적분상수 구하지 않으면 1점 감점.

2. $y := x - 3 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n2^{n+1}}$ 의 수렴반경 $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+2}}{n2^{n+1}} = 2$, (3점)

$$y = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty, \qquad (1점)$$

$$y = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} : 수렴 \qquad (1점)$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n2^{n+1}}$ 은 $-2 \le y < 2 \Leftrightarrow 1 \le x < 5$ 에서 수렴. (1점)

3. (1) $\arctan\left(\dfrac{2}{n^2}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{(n-1)(n+1)}}\right)$

$$= \arctan\left(\frac{1}{n-1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right). \qquad (3점)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$

$$= \arctan(2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\arctan\left(\frac{1}{n-1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \right) \qquad (1점)$$

$$= \arctan 2 + \arctan 1 + \arctan \frac{1}{2}\,(3\text{점}) = \frac{3\pi}{4}\,(4\text{점}).$$