

Quiz 2 (4월 3일 목 7.5, 8.5 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n}) x^n$ 이 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.
2. (5점) 실수 $\log \frac{3}{2}$ 의 근삿값을 오차범위 $\frac{1}{50}$ 이내에서 구하시오.
3. (5점) 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$ 는 역함수 f^{-1} 가 존재함을 보이고 $(f^{-1})'(3)$ 의 값을 구하시오.
4. (5점) 다음 등식을 증명하시오.

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $a_n = \sin \frac{1}{n}$ 이라 하자. 이 급수의 수렴반경은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n+1}} = 1$$

이다. (2점)

$x = 1$ 일때, 주어진 멱급수는 발산하고 $x = -1$ 일때, 주어진 멱급수를 이루는 수열이 그 절대값이 감소하면서 0으로 수렴하는 교대급수이므로 수렴한다. 그러므로 수렴구간은

$$-1 \leq x < 1$$

이다. (5점)

($x = 1$, $x = -1$ 둘 중 한 점에서만 수렴, 발산 여부가 맞으면 2점 감점)

2. 로그함수의 멱급수 전개로 부터 실수 $\log \frac{3}{2}$ 는 교대급수

$$\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} - \frac{(\frac{1}{2})^4}{4} + \dots$$

로 나타남을 알 수 있다. (2점)

실수 $\log \frac{3}{2}$ 의 근삿값을

$$\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} = \frac{5}{12}$$

로 하면 참값과의 오차는 $\frac{(\frac{1}{2})^4}{4}$ 보다 작으며 이 값은 또한 $\frac{1}{50}$ 보다 작으므로 $\frac{5}{12}$ 는 이 문제의 답이 될 수 있다. (5점)

(단, 근삿값이 오차 이내인 근거를 보이지 않으면 2점 감점)

3. $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 이고 이 2차식의 판별식을 고려하면 $f'(x) > 0$ 이 항상 성립함을 알 수 있으므로 함수 f 의 역함수가 존재한다. (2점)
그리고 $f(1) = 3$ 이므로

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

이다. (5점)

4.

$$\begin{aligned} \cosh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{\cosh 2x + 1}{2}. \end{aligned}$$

(5점)

(부분 점수 없음)