

Quiz 2 (4월 4일 금 7,8 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 다음 급수의 수렴반경 R 을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! 8^n} x^n$$

2. (5점) 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

3. (5점) 멱급수 함수 $f(x)$ 가 모든 $n = 0, 1, 2, \dots$ 에 대하여

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{3^n (n+1)}$$

을 만족한다. 이 때, 멱급수 함수가 수렴하는 실수 x 의 범위를 구하시오.

4. (5점) 함수 $f(x) = \tanh x$ 의 역함수를 $f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x$ 라고 할 때,

$$h(x) = \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x)$$

를 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! 8^n}$ 이라면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n+1}{8(n+1)} = \frac{1}{4}.$$

따라서 $R = 4$ 이다. (5점)

(부분 점수 없음)

2.

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

양변을 미분한 후, x 를 곱하면 $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \quad (|x| < 1).$

다시 양변을 미분한 후, x 를 곱하면 $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \quad (|x| < 1)$

을 얻는다. (3점)

$x = \frac{1}{3}$ 을 대입하면 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{3}{2}$ 이다. (5점)

3. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)} x^n.$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{(n+1)}}{3^{(n+1)}(n+2)}}{\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}} \right| = \frac{1}{3}$ 이므로, 수렴반경은 3 이다. (2점)

$f(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 은 수렴한다.

$\because 0 < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \ \forall n = 0, 1, 2, \dots$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ 이므로

교대급수판정법에 의하여 수렴한다.

$f(-3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 은 발산한다.

따라서 수렴범위는 $-3 < x \leq 3$ 이다. (5점)

($x = 3$, $x = -3$ 둘 중 한 점에서만 수렴, 발산 여부가 맞으면 2점 감점)

4. $y = \tanh^{-1} x \iff x = \tanh y$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\tanh y)} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\left(\frac{\sinh y}{\cosh y}\right)} \text{ (역함수 정리)} (2\text{점}) \\ &= \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} (5\text{점}) \end{aligned}$$