Quiz 2 (4월 5일 금 7, 8 교시)

[2013년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)3^{2n-1}}$$

2. (6점) 함수 $y = \arccos x$ 의 그래프에서 $x = \dfrac{1}{3}$ 일 때의 접선의 기울기를 구하시오.

3. (7점) 다음 멱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\log(n+2)}$$

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot 3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)\cdot 3^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot 3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n} \quad \cdots (*) \qquad (4\text{점})$$

$|x| < 1$ 에서 $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ \Rightarrow\ -\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}.$

따라서 $(*) = 2 \cdot \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \log 2$ 이다. (7점)

2. [역함수 정리] 에 의해서 $\dfrac{d}{dx}(\arccos x) = \dfrac{1}{\frac{d}{dy}(\cos y)} = \dfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$ (3점)

따라서 $x = \dfrac{1}{3}$ 일 때의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ 이다. (6점)

3. 수열 $a_n = \dfrac{2^n}{\log(n+2)}$ 과 $y = x - 1$ 에 대해서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\log(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$$

이고, $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\log(n+2)}{\log(n+3)} = 2$ 이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ 의 수렴반경은 $\dfrac{1}{2}$ 이다. 즉 $|x-1| < \dfrac{1}{2}$ 일 때, 주어진 급수는 수렴한다. (3점)

주어진 멱급수의 경계에서의 수렴여부를 조사해보면,

(i) $x = \frac{1}{2}$: [교대급수 정리] 에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ 은 수렴. (2점)

(ii) $x = \frac{3}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+2)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \infty$

$\Rightarrow$ [비교판정법] 에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+2)} = \infty$. (2점)

따라서 주어진 멱급수가 수렴하는 x 의 범위는 $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ 이다.