Quiz 4 (12월 2일)
[고급수학 및 연습 2 (003강좌) - 2016학년도 2학기]
(제한시간: 20분, 만점: 10점)

⋆ 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성 시 풀이과정을 명시하시오.

1. 곡선 $X(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $(0 \le t \le \pi)$ 와, 벡터장

$$\mathbf{A}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

에 대해,

$$\int_X \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}ds$$

를 구하시오. (단, $\mathbf{n}$은 X를 따르는 단위법벡터장이고, $\mathbf{n}$의 y 축 방향 성분은 항상 0 이상이다.) (4점)

2. 곡선 $X(t) = (\cos^3(t), \sin^4(t))$, $(0 \le t \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 그린정리를 이용하여 구하시오.(3점)

3. 곡면 S가 $z = 36 - x^2 - \dfrac{1}{2}y^2$, $(D : 4x^2 + y^2 \le 36,\ x \ge 0,\ y \ge 0)$로 주어질 때, 곡면 S의 넓이를 구하시오.(3점)

#1

$Y(t) = (3\cos t,\ 3\sin t)$ $\quad (\pi \le t \le 2\pi)$ 라 두면,

=> $X \cup Y$ 는 폐곡선 (내부에 원점 존재)

가우스 정리에 의해,

$$\int_{X\cup Y} \mathbb{A}(x,y) \circ \mathbb{n}\, ds = 2\pi$$

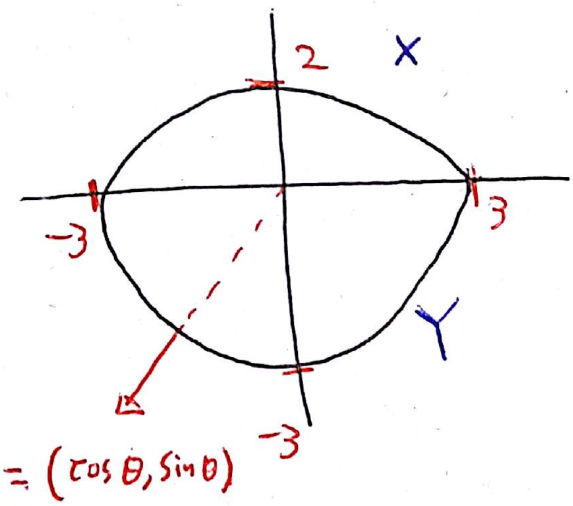
또는 발산정리

1점

$$\|$$

$$\int_X \mathbb{A}(x,y) \circ \mathbb{n}\, ds + \int_Y \mathbb{A}(x,y) \circ \mathbb{n}\, ds$$

이때, $\displaystyle\int_Y \mathbb{A} \circ \mathbb{n}\, ds$



$$\|$$

$$\int_Y \left(\frac{3\cos\theta}{9}, \frac{3\sin\theta}{9}\right) \circ (\cos\theta, \sin\theta)\, ds$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int_Y ds = \frac{1}{3} \int_{\pi}^{2\pi} |Y'(t)|\, dt = \pi.$$

$$\therefore \int_X \mathbb{A} \circ n \, ds = 2\pi - \int_Y \mathbb{A} \circ n \, ds = \pi$$

* 범위를 $(0 \le t \le 2\pi)$로 푼경우 2점 감점

* 사소한 실수 1점 감점.

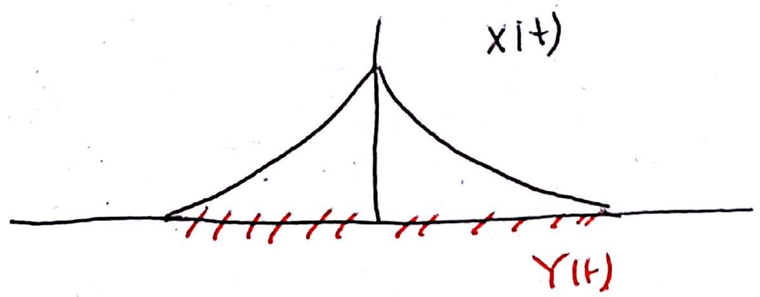
#2.

Green Theorem에 의해,

$$\text{넓이} = \int_X x \, dy + \int_Y x \, dy$$

1점.

$$Y(t) = (2t-1, 0), \quad (0 \le t \le 1)$$



이때, $\int_Y x \, dy = \int_0^1 (2t-1, 0) \circ (2, 0) \, dt = 0$

$$\therefore \text{넓이} = \int_X x \, dy = \int_0^{\pi} \cos^3 t \cdot 4\sin^3 t \cdot \cos t \, dt$$

$\underline{u = \cos t}$ $\int_{1}^{-1} 4u^4(1-u^2)\,(-du)$

$$= \int_{-1}^{1} 4u^4 - 4u^6 \, du.$$

$$= \left[\frac{4}{5}u^5 - \frac{4}{7}u^7\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{35}$$

* 사소한 실수 1점 감점.

3.

$$\text{Area}(S) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dV_2$$

$$= \iint_D \sqrt{1+4x^2+y^2}\, dx\, dy$$

넓이 공식 1점.

$$\begin{pmatrix} x = \frac{r}{2}\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix}$$

매개화 1점

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^6 \sqrt{1+r^2} \cdot \left(\frac{r}{2}\right) dr\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{6}\sqrt{1+r^2}^{\,3}\right]_0^6$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$