Analisi II

Samuele Musiani

February 20, 2023 - February 25, 2023

Contents

1 Integrali **3**
- 1.1 Calcolo dell'area sottesa ad una curva . . . 3
- 1.2 Somme di Riemann . . . 3
  - 1.2.1 Scomposizione di un intervallo . . . 3
- 1.3 Integrale dalle somme di Riemann . . . 4
  - 1.3.1 Proprietà dell'integrale . . . 7
- 1.4 Media integrale . . . 8
- 1.5 Primitiva . . . 9
- 1.6 Funzioni integrali . . . 10
  - 1.6.1 Teoremi fondamentali del calcolo integrale . . . 10

1 Integrali

1.1 Calcolo dell'area sottesa ad una curva

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a, b]$. IL suo **sottografico** è:

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Il sottografico è quindi un insieme e corrisponde e tutti i punti che soddisfano per le ordinate le disuguaglianza $a \leqslant x \leqslant b$ e per le ascisse $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

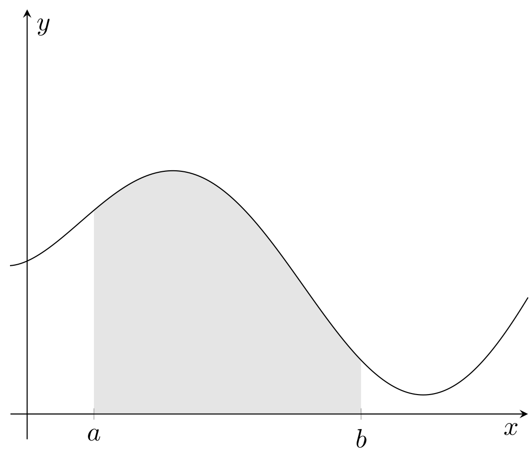

Figure 1: Area del sottografico rappresentata in grigio

Come si calcola il sottografico?

1.2 Somme di Riemann

1.2.1 Scomposizione di un intervallo

Sia dato un interallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ lo divido in $n \in \mathbb{N}$ intervalli uguali:

$$\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{n} \\
x_2 &= x_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n} \\
&\vdots \\
x_k &= a + k \cdot \frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

Il primo punto corrisponde all'inizio dell'intervallo $x_0 = a$, l'ultimo punto alla fine dell'intervallo $x_n = b$ in quanto:

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = a + b - a = b$$

Posso inoltre scegliere dei punti all'interno di questi intervalli:

$$\forall k \in \mathbb{N} : 0 < k \leqslant n \quad \text{scelgo} \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

È importante notare alcune cose:

1. ξ_k è un semplicissimo punto, lo si indica con la lettera greca ξ (xi) per evitare di far confuzione successivamente.

2. La scelta della posizione del punto ξ_k è **totalmente arbitraria**. Può quindi essere il punto medio, coincidere con un estremo o essere completamente casuale purché rispetti la condizione imposta, cioè: $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

3. Abbiamo una serie di punti, non solo 1, in quanto questo vale *per ogni k*.

$$\begin{aligned}
\xi_1 &\in [x_0, x_1] = \left[a, a + \frac{b-a}{n}\right] \\
\xi_2 &\in [x_1, x_2] = \left[a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}\right] \\
&\vdots \\
\xi_n &\in [x_{n-1}, x_n] = \left[a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b\right]
\end{aligned}$$

Definizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$. Sia inoltre $n \in \mathbb{N}$ e siano $x_0, x_1, \cdots x_n$ e $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ i punti introdotti precedentemente. Si definisce **La somma di Riemann *n-esima*** è il numero:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Notando che il termine $(x_k - x_{k-1})$ è sempre uguale si può riscrivere la somma come segue:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$$

La somma dipende dalla scelta dei punti ξ_k, non è quindi sempre la stessa. Rappresenta inoltre la somma delle aree dei rettangoli che approssimano il sottografico della funzione f nell'intervallo $[a, b]$.

1.3 Integrale dalle somme di Riemann

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di somme di Riemann[a].

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

Inoltre **il valore NON dipende dalla scelta dei punti ξ_k**. Tale limite si chiama **integrale di f**:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

[a]Si noti che questa famiglia in realtà è una successione

Note importanti:

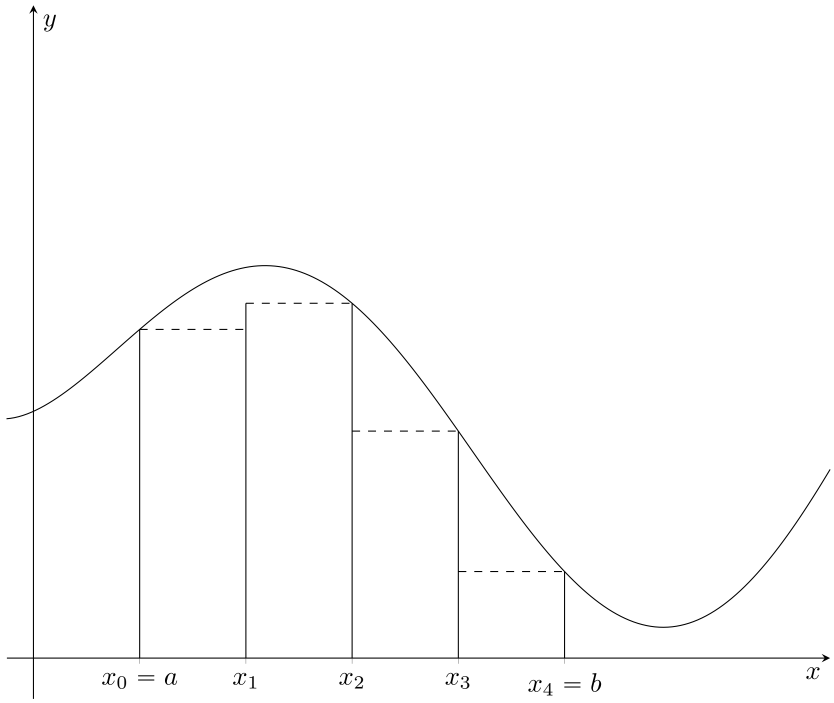

Figure 2: Somme di Riemann

- Il valore del limite, essendo in $\mathbb{R}$ è finito.
- a e b si chiamo **estremi di integrazione**.
- La varibile dentro la funzione è una *variabile muta*. Non indica effettivamente nulla. Le seguenti notazioni sono equivalenti:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f$$
Si adotta generalmente la variabile muta è il termine $\mathrm{d}x$ che NON ha alcune definzione o qualsivoglia introduzione matematica per comodità.

Vediamo come è definita questa somma in alcuni esempi particolari:

- $f(x) \leqslant 0 \ \ \forall x \in [a, b]$ come in figura 3:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(\text{area del sottografico}) = -textarea(A)$$
- Se la funzione assume sia valori positivi sia valori negativi (come in figura 4) allora l'intagrale risulta:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{area}(A_1) - \text{area}A_2$$
- Se il sottografico è formato da due aree positive ma separate (come in figura 5):
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{area}(A_1) + \text{area}A_2$$

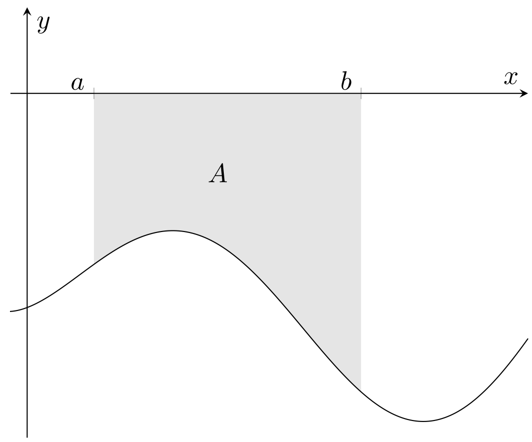

Figure 3: Visualizzazione di un integrale su una funzione negativa

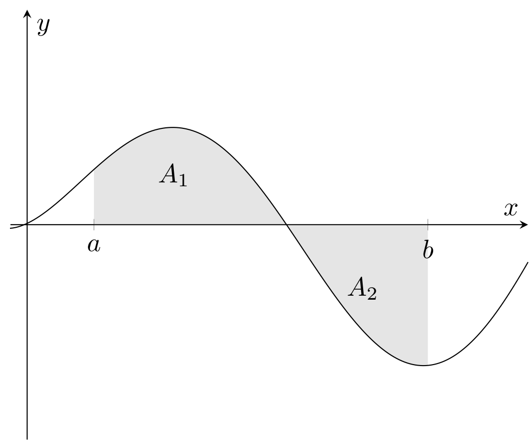

Figure 4: Visualizzazione di un integrale su una funzione che cambia segno

- Se $f(x) = k \;\; \forall x \in [a, b]$, cioè in pratica la funzione è costante (come in figura 6). Consideriamo prima la somma di Riemann:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n} k \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = n \cdot k \cdot \frac{b-a}{n} = k \cdot (b-a)$$

  Ne consegue che:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} S_n = k \cdot (b-a)$$

  Coindice con infatti l'area di un rettangolo di base $b - a$ e di altezza k.

- Se $a = b$ allora:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

  In quanto:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot \left(\frac{a-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot 0 = 0$$

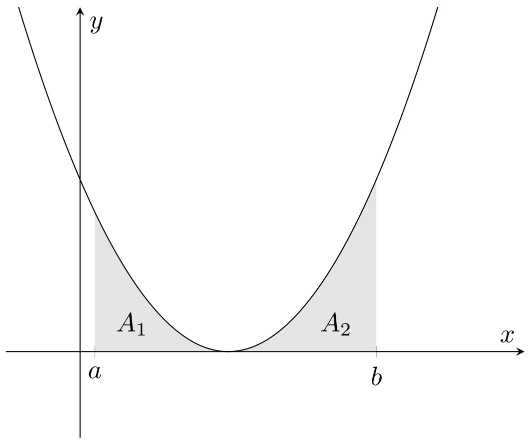

Figure 5: Visualizzazione di un integrale su una funzione che tocca l'asse delle ascisse

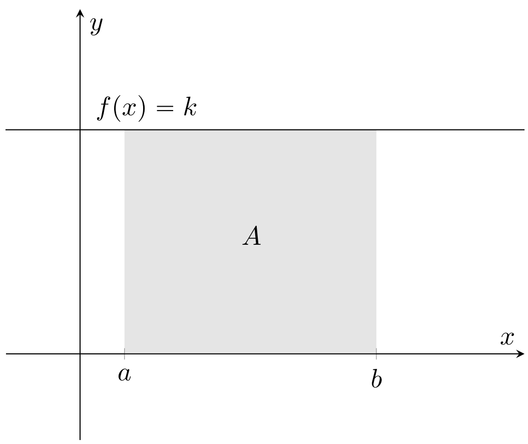

Figure 6: Visualizzazione di un integrale su una funzione costante

1.3.1 Proprietà dell'integrale

1. **Linearità**: Date due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a, b]$. Deti inoltre due punti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b c_1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b c_2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x =$$

2. **Additività** Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e dato $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

In generale si tende ad adottare la **convenzione** che se $b < a$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ne consegue quindi che si può **generalizzare la seconda proprietà** a: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

implica:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Con $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in [a, b]$ allora:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Si può **generalizzare**[1]: data un'ulteriore funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, se $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ allora:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

1.4 Media integrale

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, allora:

$$\exists c \in [a, b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$$

Il valore di $f(c)$ si definisce **media integrale di f in** $[a, b]$.

Il nome media deriva dal datto che:

$$\frac{1}{b-a} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}$$

Che non è altro che una media aritmetica.

Dimostrazione

Dimostraimo il teorema della media integrale: per il teorema di Weierstrass $\exists x_1, x_2$ punti di minimo e massimo assoluti:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

Usando la proprietà della monotonia degli integrali:

$$\int_a^b f(x_1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x_2)\,\mathrm{d}x$$

Ed essendo $f(x_1)$ e $f(x_2)$ valori costanti:

$$(b-a)f(x_1) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f(x_2)$$

Che quindi dividendo per $(b-a)$

$$f(x_1) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_2)$$

[1] Questo si dimostra con il caso non generalizzato e una funzione ausiliaria $h(x) = f(x) - g(x)$

Dal teorema dei valori intermedi[a]:

$$\exists x \in [a,b] : f(x) = y$$

Cioè:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Qed.

[a]Non mi ricordo di averlo fatto ne di averlo copiato. È sugli appunti del 2023-02-20. CONTROLLARE! :)

1.5 Primitiva

Definizione

Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$. Una funzione $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ si dice **primitiva di f su $]a,b[$** se vale:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]a,b[$$

Osservazione: Se F è primitiva di f su $]a,b[$, allora:

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad F(x) + k \text{ è una primitiva di } f \text{ su }]a,b[$$

Ci sono infinite primitive di una funzione

Teorema

Teorema di caratterizzazione delle primitive su un intervallo: Se $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $G :]a,b[\to \mathbb{R}$ sono primitive di $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, allora:

$$\exists k \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = k \qquad \forall x \in]a,b[$$

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare il teorema appena enunciato. Consideriamo la funzione ausiliaria:

$$H(x) = F(x) - G(x) \qquad \forall x \in]a,b[$$

Se faccio la derivata:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) \qquad \forall x \in]a,b[$$

Che per ipotesi:

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in]a,b[$$

Da teorema di Lagrange (in particolare dal suo corollario), se una funzione continua su un intervallo ha derivata sempre nulla allora la funzione è costante. Ne consegue:

$$\exists k \in \mathbb{R} : H(x) = k \qquad \forall x \in]a,b[$$

E quindi:

$$F(x) - G(x) = k \qquad \forall x \in]a,b[$$

Qed.

È importante che la funzione sia definita su un intervallo perché è facile prendere un esempio di funzione non definita su un intervallo e fare vedere che il teorema non funziona. Per sempio presa la funzione $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ ha come primitive:

$$F(x) = -\frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$
$$G(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Nonostante ciò:

$$F(x) - G(x) \text{ non è costante}$$

Proprio perché non stiamo considerando un intervallo.

1.6 Funzioni integrali

Definizione

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continua e sia $c \in]a, b[$. Definziamo la **funzione integrale di f con punto base c** come:

$$I_c :]a, b[\to \mathbb{R}, \qquad I_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Osservazione 1:

$$I_c(c) = \int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Osservazione 2: Consideriamo la funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continua e un punto $c_1, c_2 \in]a, b[$. Le funzioni:

$$I_{c_1}(x) = \int_{c_1}^x f \qquad \text{e} \qquad I_{c_2}(x) = \int_{c_2}^x f$$

Hanno differenza costante:

$$I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^x f - \int_{c_2}^x f = \int_{c_1}^x f + \int_x^{c_2} f = \int_{c_1}^{c_2} f$$

1.6.1 Teoremi fondamentali del calcolo integrale

Il seguente teorema è spesso indicato come secondo, ma il prof ha deciso di farlo per primo.

Teorema

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continua e sia $c \in]a, b[$. Allora vale:

$$I_c'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]a, b[$$

Cioè:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \qquad \forall x \in]a, b[$$

Esempio: Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$ se

$$I(x) = \int_0^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t$$

Allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t = e^{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Oppure un altro esempio:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_2^x \sqrt{1+t^2} \cdot e^{-t} \sin(t) \, \mathrm{d}t = \sqrt{1+x^2} \cdot e^{-x} \sin(x)$$

Non importa quindi sapere il risultato dell'integrale per sapere la sua derivata.

Perché l'estremo inferiore dell'integrale è ininfluente[2]? Se sostiutiamo l'estremo inferiore a con un qualsiasi $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_a^k f(t) \, \mathrm{d}t + \int_k^x f(t) \, \mathrm{d}t \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^k f(t) \, \mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_k^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

L'integrale $\int_a^k f$ è una semplice costante, ne consegue che dopo la derivata si annulla, quindi rimane solo l'integrale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_k^x f(t) \, \mathrm{d}t = f(x)$$

Ricordiamoci che abbiamo scelto a caso la costante k, ne consegue che è ininfluente sotto l'effetto della derivata.

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare il teorema appena enunciato. Supponiamo di avere una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e un punto $c \in]a, b[$. Vogliamo dimostrare che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^x f(t) \, \mathrm{d}t = f(x) \qquad \forall x \in]a, b[$$

Per la definzione di derivata dovremmo dimostrare che esiste sia il limite destro che il sinistro e che il loro valore coincide. Ci limitiamo a dimostrare il teorema per il limite destro in quanto è analogo nell'altro caso. Calcoliamo il limite:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_c^{x+h} f - \int_c^x f}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_c^{x+h} f + \int_x^c f \right)$$

Possiamo quindi usare la proprietà di additività degli integrali e ridurci a dimostrare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t = f(x)$$

Usiamo ora il teorema della media integrale, dove in particolare gli estremi $a = x$ e $b = x + h$ e quindi $b - a = x + h - x = h$:

$$\exists c(h) \in \;]x, x+h[\; : \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t = f(c(h))$$

[2]Questa è una mia considerazione, il prof non l'ha detta

In questo caso abbiamo scritto $c(h)$ e non semplicemente c per sottolianere che il punto dipende da h. Essendo però $c(h) \in \,]x, x+h[$ diventa che:

$$x < c(h) < x + h$$

Facendo il limite per $h \to 0^+$ e dal teorema del confronto:

$$c(h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} x$$

E quindi:

$$f(c(h)) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(x)$$

Qed.

Il seguente viene spesso indicato come il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema

Sia $f :]a_0, b_0[\to \mathbb{R}$ continua. Sia inoltre $F :]a_0, b_0[\to \mathbb{R}$ la primitiva di f su $]a_0, b_0[$, allora:

$$\forall [a, b] \subseteq]a_0, b_0[\quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_{x=a}^{x=b}$$

Esempio: $f(x) = x^2$ e $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ è primitiva di f.

$$\int_2^3 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}$$