Analisi

Samuele Musiani

September 19, 2022 - January 31, 2023

1 Teoremi generali

Questa sezione vuole raccogliere alcuni teoremi importanti che però non appartengono a nessuna sezione precedente in particolare in quanto richiedono l'uso di molti argomenti presi da sezioni differenti. Ho quindi congegnato che era meglio dedicare loro una sezione a parte, sperando che il mio intento di organizzazione possa essere apprezzato da quelli che leggeranno.

1.1 Teorema degli zeri

Il teorema degli zeri è estremamente importante in analisi. In pratica afferma che se una funzione è continua e ha un punto in cui è positiva (quindi è sopra l'asse delle ascisse) e un punto in cui è negativa (quindi è sotto l'asse delle ascisse), per forza tra quei due punti ce ne sarà un terzo in cui la funzione tocca l'asse delle ascisse. È abbastanza facile verificare che è vero in quanto se si vuol tracciare una linea continua che in punto è sopra l'asse delle ascisse e in un altro è sotto, per forza si è costretti ad intersecare tale asse. Per dimostrare questo teorema abbiamo però bisogno di due lemmi preliminari:

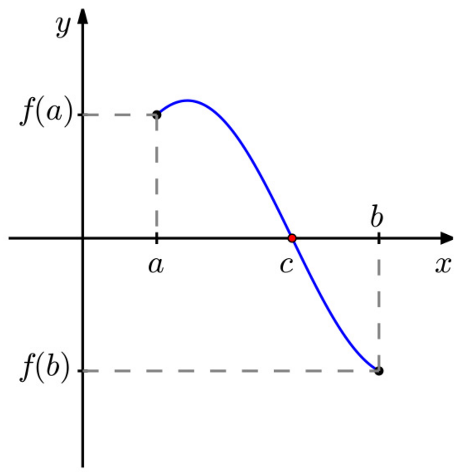

Figure 1: Rappresentazione grafica del teorema degli zeri

Lemma

Data una successione $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, se

$$\forall n, a_n < 0 \implies \lim_{x \to +\infty} a_n = l \in R \ \wedge \ l \leqslant 0$$

Si noti che questo lemma vale anche per il caso in cui $\forall n, a_n > 0$, che implica $l \geqslant 0$. Dimostriamo ora il lemma[a]. Dobbiamo provare che:

$$\forall n, a_n < 0 \implies \lim_{x \to +\infty} a_n = l \leqslant 0$$

Fisso n numero t.c $\forall n, a_n < 0$ (H) per dimostrare:

$$\lim_{x \to +\infty} a_n = l \leqslant 0$$

Per assurdo assumiamo[b] $l > 0$ (H2) e riduciamoci a dimostrare il falso. Grazie alla definizione di limite possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \overline{n} \implies |q_n - l| < \epsilon$$

Se espandiamo $|q_n - l| < \epsilon$ ci troviamo con:

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

Ed essendo che questa condizione delle valere $\forall \epsilon > 0$, scegliamo $\epsilon = \frac{l}{2}$. Quindi deve valere che:

$$a_n > l - \epsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$$

Per (H2) $\frac{l}{2} > 0$ ma per (H) $\forall n, a_n < 0$. ASSURDO in quanto a_n non può contemporaneamente essere maggiore di 0 e minore di 0.

Qed.

[a] La seguente dimostrazione è stata fatta dal prof in maniera imbarazzante, quindi la esplicito secondo la logica classica per renderla più formale

[b] Abbiamo usato il potere sconfinato della RAA (Coen approves)

Lemma

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A \cap \mathcal{D}(A)$ e inoltre f deve essere continua in x_0:

$$\forall (a_n)_n \subseteq A : a_n \to x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$$

Teorema

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continua}, \ \ f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in]a, b[: f(c) = 0$$

Un paio di osservazioni utili sul teorema:

- La continuità di f è fondamentale in quanto se non lo fosse il teorema non potrebbe valere. Si consideri infatti il caso di una funzione definita a tratti nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (0 \leqslant x \leqslant 2) \\ 1 & (2 < x \leqslant 4) \end{cases}$$

  Quest'ultima rispetta tutte le specifiche del teorema ($f(0) \cdot f(4) < 0$) tranne la continuità (non è infatti continua in $x = 2$). Se si osserva il grafico (Figura: 2) si nota subito che questa funzione non ammette nessun punto in cui si annulla come vorrebbe il teorema degli zeri.

- La seconda osservazione riguarda la quantità di punti in cui si può annullare la funzione. Come si legge dal teorema, il punto c è garantito che esista ($\exists$) ma nessuno garantisce che è unico. Ci possono essere infatti un numero arbitrario di punti in cui la funzione si annulla, basti pensare al grafico delle funzioni goniometriche $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Dimostrazione

Questa dimostrazione a differenza delle altre è di tipo *costruttivo*, cioè oltre a dimostrare il teorema fornisce un algoritmo di calcolo per trovare il punto c.

Assumiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. L'idea dietro questa dimostrazione è appunto trovare un

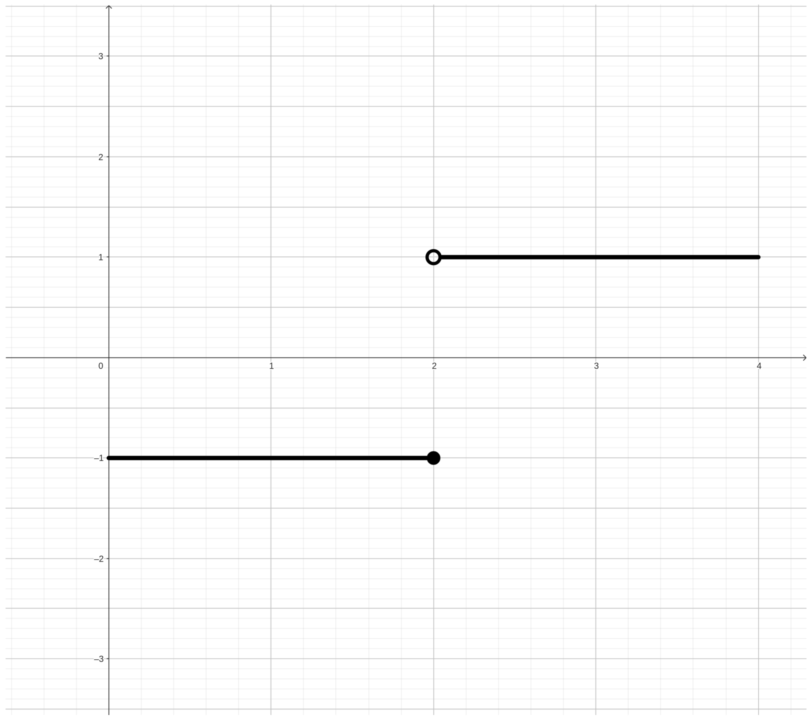

Figure 2: Funzione definita a tratti per far vedere che la continuità nel teorema degli zeri è una condizione necessaria

algoritmo di calcolo che permetta di determinare il punto c. Avendo un punto a in cui la funzione è **negativa** e un punto b in cui la funzione è **positiva** ci deve essere un punto che giace tra a e b in cui la funzione si annulla. Per trovarlo andiamo a "tentativi" dividendo l'intervallo a metà con la formula:

$$\frac{a+b}{2}$$

Da qui possiamo avere 3 casi:

1. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. In questo caso abbiamo trovato il punto c proprio perché la funzione si annula. Quindi abbiamo finito!

$$c = \frac{a+b}{2}$$

2. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. In questo caso non abbiamo trovato il punto c, ma bensì la funzione ci ha restituito un punto negativo. Essendo il punto $f(b)$ ancora maggiore di 0 per ipotesi, possiamo applicare nuovamente questa procedura (cioè di suddividere l'intervallo a metà), però cambiando il punto a, in quanto adesso diventa:

$$a_2 := \frac{a+b}{2}$$

3. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$. L'idea di questo punto è identica a quella del punto 2, semplicemente invece che assegnare un valore diverso ad a, lo assegnamo a b perché questa volta il valore

della funzione è positivo invece che negativo.

$$b_2 := \frac{a+b}{2}$$

Con i punti 2 e 3, riassegnando il valore ad a o b, restringiamo l'intervallo su cui vogliamo applicare questo algoritmo per trovare il punto c. Ed essendo che ad ogni iterazione ci avviciniamo sempre di più, a forza di stringere l'intervallo prima o poi arriveremo a c.
Nota: Ad ogni iterazione, se la funzione non si annulla, dobbiamo sostituire il valore del punto al corrispettivo punto a o b in modo che la funzione mantenga lo stesso segno. Questo perché se invertissimo i punti ci troveremmo in un caso in qui $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$, cosa che ovviamente annullerebbe il teorema. Quindi nel caso del punto 2 in cui sostituiamo il nuovo punto ad a, lo facciamo soltanto perché per ipotesi $f(a) < 0$ e la funzione nel nuovo punto è negativa. Se per ipotesi avessimo scelto $f(a) > 0$ avremmo dovuto sostituire il nuovo punto in b, e vice versa.

Essendo che dobbiamo ripete l'algoritmo, il caso n-arrio diventa:

1. $$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0 \qquad \text{Fine:} \qquad c = \frac{a_n+b_n}{2}$$
2. $$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \qquad \text{Ieriamo nuovamente:} \qquad a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$$
3. $$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \qquad \text{Ieriamo nuovamente:} \qquad b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$$

Se l'algoritmo termina al passo $p \in \mathbb{N}$ significa che:

$$f\left(\frac{a_p+b_p}{2}\right) = 0 \qquad \text{e quindi:} \qquad c = \frac{a_n+b_n}{2}$$

Altrimenti la procedura non termina: in quaso avremo costrutito due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ contenute in $[a, b]$. Scriviamo di seguito le proprietà di queste 2 successioni:

i. $a_n \leqslant a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \leqslant b_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

ii. $a_n \leqslant b_n \forall n \in \mathbb{N}$

iii. $f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iv. $$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \qquad \forall n$$

Se si espandono i vari passaggi si vede che in realtà ad ogni itarazione si divide l'intervallo iniziale $[a, b]$ in 2:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^3} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

A questo punto vogliamo dimostrare che:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c \\ \\ f(c) = 0 \end{cases}$$

Dal punto (i) e (ii) ricaviamo che sia $(a_n)_n$ sia $(b_n)_n$ sono **limitate**.

$$(a_n)_n \subseteq [a,b] \implies a_n \nearrow \ \forall n \implies \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(b_n)_n \subseteq [a,b] \implies b_n \nearrow \ \forall n \implies \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$$

Dal punto (iv) e da quanto abbiamo ricavato possiamo fare il limite che tende a $+\infty$ di $b_n - a_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$
$$\beta - \alpha = 0$$

Quindi $\beta = \alpha$ e le due successioni hanno lo stesso limite! Abbiamo quindi provato che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n := c$$

Ci resta da dimostrare che $f(c) = 0$. Da quanto appena dimostrato e dal primo lemma di questa prova:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$$

Poiché $a_n \to c$. Inoltre dal punto (iii) sappiamo che $f(a_n) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Usando il secondo lemma preliminare alla prova:

$$f(c) \leqslant 0$$

Se facciamo lo stesso per $f(b_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c) \geqslant 0$$

Avendo contemporaneamente $f(c) \leqslant 0$ e $f(c) \geqslant 0$:

$$f(c) = 0$$

Qed.

1.2 Radici di un polinomio di grado dispari

Teorema

Ogni polinomio di grado dispari ha almeno un radice reale.

Corollario: Tutti i polinomi di grado dispari assumono **tutti i valori reali**. Questo implica che una funzione che è definita tramite un polinomio di grado dispari è una funzione **suriettiva**, in quanto ha come immagine $\mathbb{R}$.

È facile ricordarsi questo teorema perché tutti i polinomi di grado dispari hanno il termine di grado maggiore (che in quanto dispari) è soggetto al segno dell'argomento del polinomio. Cioè x^3 avrà lo stesso segno di x, mentre questo non vale per i polinomi di grado pari in quanto x^8 avrà sempre segno positivo. Se quindi si fanno i limiti per $+\infty$ e $-\infty$ di un polinomio di grado dispari, da una parte andrà sempre a $+\infty$ e dall'altra andrà sempre a $-\infty$. Ed essendo i polinomi funzioni continue, sono costretti a toccare tutti i valori dell'asse delle ordinate almeno una volta. Inoltre, visto che da una parte hanno valori positivi, dall'altra negativi e sono continui, esiste per forza un punto in cui si annullano (dal teorema degli zeri) e sarà proprio lì la loro radice.

1.3 Teorema di Weierstrass

1.3.1 Formulazione 1

Definizione

$f : A \to \mathbb{R}$

1. $x_0 \in A : x_0$ si dice punto di **massimo assoluto** di f se:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in A$$

2. $x_0 \in A : x_0$ si dice punto di **minimo assoluto** di f se:

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad \forall x \in A$$

Teorema

Una funzione continua, in un intervallo chiuso e limitato, ammette il massimo e il minimo assoluti della funzione.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x) \leqslant f(x_0) =: M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x) \leqslant f(x_1) =: m \quad \forall x \in [a, b]$$

L'immagine di f nell'intervallo $[a, b]$ corrisponderà a $[m, M]$.

1.3.2 Formulazione 2

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists M = \max f([a, b])$$

$$\exists m = \min f([a, b])$$