Analisi II

Samuele Musiani

February 20, 2023 - February 20, 2023

Contents

1 Integrali

1.1 Calcolo dell'area sottesa ad una curva

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $f(x) \geqslant 0 \; \forall x \in [a, b]$. IL suo **sottografico** è:

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Il sottografico è quindi un insieme e corrisponde e tutti i punti che soddisfano per le ordinate le disuguaglianza $a \leqslant x \leqslant b$ e per le ascisse $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Come si calcola il sottografico?

1.2 Somme di Riemann

1.2.1 Scomposizione di un intervallo

Sia dato un interallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ lo divido in $n \in \mathbb{N}$ intervalli uguali:

$$\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + \frac{b-a}{2} = a + \frac{b-a}{n} \\
x_2 &= x_1 + \frac{b-a}{2} = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n} \\
&\vdots \\
x_k &= a + k \cdot \frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

Il primo punto corrisponde all'inizio dell'intervallo $x_0 = a$, l'ultimo punto alla fine dell'intervallo $x_n = b$ in quanto:

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = a + b - a = b$$

Posso inoltre scegliere dei punti all'interno di questi intervalli:

$$\forall k \in \mathbb{N} : 0 < k \leqslant n \quad \text{scelgo} \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

È importante notare alcune cose:

1. ξ_k è un semplicissimo punto, lo si indica con la lettera greca ξ (xi) per evitare di far confuzione successivamente.

2. La scelta della posizione del punto ξ_k è **totalmente arbitraria**. Può quindi essere il punto medio, coincidere con un estremo o essere completamente casuale purché rispetti la condizione imposta, cioè: $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

3. Abbiamo una serie di punti, non solo 1, in quanto questo vale *per ogni k*.

$$\begin{aligned}
\xi_1 &\in [x_0, x_1] = \left[a, a + \frac{b-a}{n}\right] \\
\xi_2 &\in [x_1, x_2] = \left[a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}\right] \\
&\vdots \\
\xi_n &\in [x_{n-1}, x_n] = \left[a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b\right]
\end{aligned}$$

Definizione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$. Sia inoltre $n \in \mathbb{N}$ e siano $x_0, x_1, \cdots x_n$ e $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ i punti introdotti precedentemente. Si definisce **La somma di Riemann *n-esima*** è il numero:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Notando che il termine $(x_k - x_{k-1})$ è sempre uguale si può riscrivere la somma come segue:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$$

La somma dipende dalla scelta dei punti ξ_k, non è quindi sempre la stessa. Rappresenta inoltre la somma delle aree dei rettangoli che approssimano il sottografico della funzione f nell'intervallo $[a,b]$.

1.3 Integrale dalle somme di Riemann

Teorema

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di somme di Riemann[a].

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

Inoltre **il valore NON dipende dalla scelta dei punti** ξ_k. Tale limite si chiama **integrale di** f:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

[a] Si noti che questa famiglia in realtà è una successione

Note importanti:

- Il valore del limite, essendo in $\mathbb{R}$ è finito.
- a e b si chiamo **estremi di integrazione**.
- La varibile dentro la funzione è una *variabile muta*. Non indica effettivamente nulla. Le seguenti notazioni sono equivalenti:

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f$$

  Si adotta generalmente la variabile muta è il termine $\mathrm{d}x$ che NON ha alcune defінzione o qualsivoglia introduzione matematica per comodità.

Vediamo come è definita questa somma in alcuni esempi particolari:

- Se $f(x) \leqslant 0 \;\; \forall x \in [a,b]$

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(\text{area del sottografico})$$

- Se (*DA fare il disegno: in pratica si ha un area positiva (A_1) e una negativa (A_2)*):

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{area}(A_1) - \text{area}A_2$$

- Se (*Il sottografico è fatto da due aree positive divise da un punto che tocca lo 0*):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{area}(A_1) + \text{area}A_2$$

- Se $f(x) = k \quad \forall x \in [a,b]$, cioè in pratica la funzione è costante. Consideriamo prima la somma di Riemann:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n} k \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = n \cdot k \cdot \frac{b-a}{n} = k \cdot (b-a)$$

  Ne consegue che:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} S_n = k \cdot (b-a)$$

  Coindice con infatti l'area di un rettangolo di base $b-a$ e di altezza k.

- Se $a = b$ allora:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

  In quanto:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot \left(\frac{a-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot 0 = 0$$

1.3.1 Proprietà dell'integrale

1. **Linearità**: Date due funzioni $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$. Deti inoltre due punti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b c_1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b c_2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x =$$

2. **Additività** Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e dato $c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

   In generale si tende ad adottare la **convenzione** che se $b < a$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Ne consegue quindi che si può **generalizzare la seconda proprietà** a: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ implica:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$ allora:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

   Si può **generalizzare**[1]: data un'ulteriore funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, se $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ allora:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

[1] Questo si dimostra con il caso non generalizzato e una funzione ausiliaria $h(x) = f(x) - g(x)$

1.4 Media integrale

Teorema

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$, allora:

$$\exists c \in [a,b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$$

Il valore di $f(c)$ si definisce **media integrale di f in** $[a,b]$.

Il nome media deriva dal datto che:

$$\frac{1}{b-a} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}$$

Che non è altro che una media aritmetica.

Dimostrazione

Dimostraimo il teorema della media integrale: per il teorema di Weierstrass $\exists x_1, x_2$ punti di minimo e massimo assoluti:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

Usando la proprietà della monotonia degli integrali:

$$\int_a^b f(x_1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x_2)\,\mathrm{d}x$$

Ed essendo $f(x_1)$ e $f(x_2)$ valori costanti:

$$(b-a)f(x_1) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f(x_2)$$

Che quindi dividendo per $(b-a)$

$$f(x_1) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_2)$$

Dal teorema dei valori intermedi[a]:

$$\exists x \in [a,b] : f(x) = y$$

Cioè:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Qed.

[a] Non mi ricordo di averlo fatto ne di averlo copiato. È sugli appunti del 2023-02-20. CONTROLLARE! :)