

Analisi

Samuele Musiani

September 19, 2022 - January 31, 2023

1 Introduzione agli appunti

2 Insiemi

2.1 Simbologia

Per indicare gli insiemi si utilizzano lettere maiuscole (A, B, X, Y, \dots). Per indicare gli elementi appartenenti ad un insieme si usano le lettere minuscole (a, b, x, y, \dots). Di seguito una lista di simboli necessari per lavorare con gli insiemi:

- \in Appartiene
- \notin Non appartiene
- \forall Per ogni
- $: \text{ or } |$ Tale che
- \exists Esiste (almeno)
- \nexists Non esiste
- $\exists!$ Esiste ed è unico
- \subseteq Inclusione insiemi
- \subsetneq Inclusione stretta (cioè $A \subseteq B$ e $A \neq B$)
- $\not\subseteq$ Non incluso
- \cup Unione
- \cap Intersezione
- \emptyset Insieme vuoto
- \setminus Meno tra insiemi
- \mathbb{U} Insieme universale
- $\mathbb{C}(A)$ Complementare di A in \mathbb{U} , cioè tutti gli elementi di \mathbb{U} che non sono in A ($\mathbb{C}(A) = \mathbb{U} \setminus A$).
- \vee OR logico
- \wedge AND logico
- \implies Implica
- \iff Coimplica, "se e solo se"

2.2 Preposizioni e utilizzo di simboli logici

Le **preposizioni** sono "frasi" che posso essere vere o false. Per legare due o più preposizioni si utilizzano i simboli logici \wedge (and) e \vee (or).

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \implies q$
false	false	false	false	true
false	true	false	true	true
true	false	false	true	false
true	true	true	true	true

Table 1: Tabella di verità per AND, OR e IMPLICAZIONE

Nell'implicazione ($p \implies q$) p è condizione sufficiente per q , mentre q è condizione necessaria per p .

Se si vuole negare una preposizione si utilizza il simbolo di negazione (\neg), quindi p negato risulta \bar{p} . Di seguito alcune negazioni di simboli generali:

- $\bar{\forall} = \exists$
- $\bar{\exists} = \forall$

Un esempio classico che si porta per comprendere la negazione: $p = \text{lavoro tutti i giorni della settimana}$, $\bar{p} = \text{esiste almeno un giorno della settimana in cui non lavoro}$.

È interessante notare che se si ha un'implicazione, si negano entrambe le preposizioni e si scambiano i termini il risultato rimane invariato.

p	q	$p \implies q$	$\bar{q} \implies \bar{p}$
false	false	false	false
false	true	false	true
true	false	false	true
true	true	true	true

Table 2: Implicazione con termini negati e invertiti

Avendo la stessa tabella di verità $p \implies q = \bar{q} \implies \bar{p}$. Da qui nasce la **dimostrazione per negazione** (o contronominale). Esempio: se vogliamo dimostrare che se n^2 è *pari* allora n è *pari*, ci basta dimostrare che se n è *dispari* allora n^2 è *dispari* (Dimostrazione 8.1).

2.3 Insiemi numerici noti

2.3.1 Naturali, interi e razionali

Il primo insieme che si introduce è l'insieme dei **numeri naturali**, indicato con \mathbb{N} . Non definiremo formalmente l'insieme, ci basti sapere che comprende tutti i numeri interi positivi. È generalmente scritto nella forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Gli elementi dell'insieme si indicano quindi tra parentesi graffe.

Il secondo insieme che va introdotto è quello dei **numeri interi**. Questo insieme comprende tutti i numeri che non hanno la virgola (per l'appunto interi) e si distingue da \mathbb{N} in quanto ha al suo interno anche i numeri negativi. Il suo simbolo è \mathbb{Z} e viene generalmente scritto come segue:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Non sempre però è comodo descrivere gli insiemi elencando il loro termini (in realtà non viene quasi mai fatto in quanto si creerebbero delle ambiguità). È necessario quindi utilizzare una notazione diversa per descrivere un insieme, ed è quello che si usa anche per introdurre \mathbb{Q} , l'insieme dei **numeri razionali**:

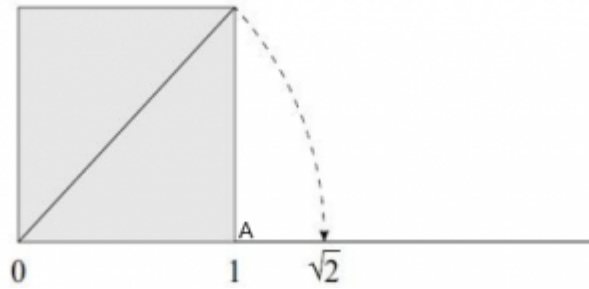
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

In questo caso l'insieme dei numeri razionali indica appunto l'insieme di tutte le frazioni (matematici rigorosi abbiate pietà della mia anima). E per esplicitarlo non cominciamo ad elencare tutte le frazioni, ma bensì utilizziamo una preposizione (?).

2.3.2 Reali

L'ultimo insieme che introduciamo è l'insieme dei **numeri reali**. Viene indicato con il simbolo \mathbb{R} ed è l'insieme più importante di tutti i precedenti. Questo insieme viene introdotto perché all'insieme dei numeri razionali (\mathbb{Q}) mancano dei numeri.

Proviamo infatti a prendere una retta e a inserirci tutti i numeri che conosciamo per ora (cioè quelli contenuti in \mathbb{Q}). Costruiamo ora un quadrato di lato 1, e proviamo a calcolare la lunghezza della sua diagonale con il teorema di Pitagora. Il numero che otterremo sarà $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Se proiettiamo questo numero sulla retta vediamo chiaramente che esiste un punto che corrisponde a $\sqrt{2}$.



Questo punto è contenuto nell'insieme \mathbb{Q} ?

Dimostrazione

Ipotesi: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Se $\sqrt{2}$ è contenuta in \mathbb{Q} , questo significa che:

$$\exists m, n, \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

Cioè esistono due numeri appartenenti all'insieme dei numeri naturali tali che il loro rapporto è esattamente $\sqrt{2}$.

Ovviamente essendo una frazione possiamo semplificare m e n fino ad eliminare tutti i loro fattori comuni, cioè fino a farli diventare **coprimi** o meglio $\text{M.C.D}(m, n) = 1$.

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \implies \frac{m^2}{n^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

Possiamo quindi dedurre che m^2 è pari, e quindi m è pari (Dimostrazione 8.1). Quindi $\exists k \in \mathbb{N} : m = 2k$.

$$m^2 = 2n^2 \implies (2k)^2 = 2n^2 \implies 4k^2 = 2n^2 \implies 2k^2 = n^2$$

Quindi se n^2 è pari, anche n è pari (Dimostrazione 8.1).

Conclusione: Abbiamo dimostrato che sia m che n sono pari, eppure per ipotesi m e n non hanno fattori in comune. **CONTRADDIZIONE!**

Tesi: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Q.e.d.

Come abbiamo dimostrato $\sqrt{2}$ non appartiene all'insieme dei numeri razionali. Inoltre si può dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} : n$ non è un quadrato perfetto $\implies \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Ne consegue che esistono infiniti punti sulla retta che non appartengono a \mathbb{Q} , e anzi è molto più probabile che facendo la radice di un numero si ottenga un numero che non è incluso in \mathbb{Q} piuttosto che il contrario. Quindi se si vuole formalizzare una teoria dei limiti è necessario lavorare su un insieme non "bucato", cioè un insieme **continuo**.

La proprietà che infatti distingue e differenzia \mathbb{R} da \mathbb{Q} è proprio la continuità (non ci sono "buchi") e la completezza (tutti i punti sulla retta hanno associato un unico numero reale). Esiste infatti una

corrispondenza biunivoca che associa tutti i punti della retta ai numeri reali.¹ Per definire meglio la proprietà di completezza è necessario introdurre alcuni concetti:

Definizione

Dato $A \neq \emptyset$ e $A \subseteq \mathbb{R}$

1. $M \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di A se: $\forall a \in A : a \leq M$.
2. $m \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** di A se: $\forall a \in A : m \leq a$.
3. Se A ammette un maggiorante è **superiormente limitato**.
4. Se A ammette un maggiorante è **inferiormente limitato**.
5. Se A ammettere un maggiorante e un minorante è **limitato**.
6. $b \in A$ si dice **massimo** di A se $\forall a \in A : a \leq b$.
7. $c \in A$ si dice **minimo** di A se $\forall a \in A : c \leq a$.
8. Il più piccolo dei maggioranti si chiama **estremo superiore** di A . Si indicato con **sup** A . Se il massimo esiste coincide con l'estremo superiore. Se l'insieme è superiormente illimitato si scrive **sup** $A = +\infty$.
9. Il più grande dei minoranti si chiama **estremo inferiore** di A . Si indicato con **inf** A . Se il minimo esiste coincide con l'estremo inferiore. Se l'insieme è inferiormente illimitato si scrive **inf** $A = -\infty$.
10. L'**insieme dei maggioranti** di A si indica come $\text{Mg}(A) = \{n \in \mathbb{R} \mid n \text{ è un maggiorante di } A\}$. Il minimo di questo insieme coincide con l'estremo superiore di A .
11. L'**insieme dei minoranti** di A si indica come $\text{Mn}(A) = \{n \in \mathbb{R} \mid n \text{ è un minorante di } A\}$. Il massimo di questo insieme coincide con l'estremo inferiore di A .

La proprietà di **completezza** di \mathbb{R} è quindi formalizzata nella seguente forma:

Dato un insieme limitato, esiste sempre un estremo inferiore e un estremo superiore.

Per esempio, dato l'insieme $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ non è possibile trovare un estremo superiore e un estremo inferiore in quanto l'intervallo (sezione 2.4) dell'insieme sarebbe $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ e, come dimostrato precedentemente, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Se invece si considera l'insieme $B = \{q \in \mathbb{R} \mid q^2 < 2\}$, è facile notare che $\sup A = \sqrt{2}$ e che $\inf A = -\sqrt{2}$.

2.4 Intervalli

Per indicare gli intervalli generalmente si utilizza una notazione con le parentesi. Viene utilizzata la parentesi quadra ($[$ e $]$) per indicare rispettivamente se un estremo dell'intervallo è compreso o no. In particolare se l'apertura della parentesi è rivolta verso il numero, allora tale numero è compreso. Di seguito degli esempi per chiarire. Gli intervalli sono comunque un insieme di punti e quindi questo si può tradurre:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

¹Per approfondire il concetto di *corrispondenza biunivoca* è necessario fare riferimento al capitolo legato alla funzioni.

- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $[b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$
- $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Con infinito si utilizza sempre la parentesi di esclusione. In alcuni libri viene utilizzata però la parentesi tonda: al posto di $[a, +\infty[$ viene scritto $[a, +\infty)$.

2.5 Prodotto cartesiano

Definizione

Dati due insiemi A e B , il **prodotto cartesiano tra A e B** si definisce come:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

È quindi l'insieme di coppie ordinate $((1, 0) \neq (0, 1))$. Attenzione che non vale la proprietà commutativa: $A \times B \neq B \times A$. Un prodotto cartesiano con lo stesso insieme si può abbreviare come $A^2 = A \times A$.

\mathbb{R} = Retta. \mathbb{R}^2 = Piano cartesiano. \mathbb{R}^3 = Sistema di coordinate a tre dimensioni.

2.6 Cardinalità

La cardinalità per essere introdotta ha bisogno di alcune nozioni riguardo le funzioni. È consigliato quindi andare a vedere la sezione 3 e poi tornare qui.

Definizione

Dati due insiemi A e B , se esiste una funzione biunivoca $f : A \rightarrow B$ si dice che **A e B sono equipotenti**.

Definizione

Due insiemi hanno la stessa cardinalità se sono equipotenti. Per indicare la cardinalità dell'insieme A si scrive:

$$|A|$$

La cardinalità, in parole povere, è un modo per "misurare" e classificare gli insiemi in base a quanti elementi contengono. Se infatti abbiamo tre insiemi *finiti* $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ e $C = \{1, 2\}$ possiamo dire che A e C NON hanno la stessa cardinalità ($|A| = 3 \neq |C| = 2$), mentre A e B hanno la stessa cardinalità ($|A| = |B| = 3$). Quindi la cardinalità riguardo insiemi *finiti* si limita a misurare gli elementi che contengono gli insiemi stessi, mentre la cardinalità con insiemi *infiniti* ci permette di capire quali insiemi contengono più elementi di altri (nonostante siano infiniti).

2.6.1 Cardinalità del numerabile

La cardinalità infinita *più piccola* è la **cardinalità del numerabile**, cioè la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali ($|\mathbb{N}| = \text{numerabile}$).

Ora prendiamo in considerazione il secondo insieme che abbiamo introdotto subito dopo \mathbb{N} , cioè \mathbb{Z} . L'intuito ci dice che la cardinalità dell'insieme dei numeri interi dovrebbe essere doppia rispetto a quella dei naturali, in quanto ci sono esattamente il doppio dei numeri (cioè anche i negativi oltre ai positivi). Proviamo però a definire una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

I valori della funzione risultano quindi:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0 & f(1) = -1 \\ f(2) = 1 & f(3) = -2 \\ f(4) = 2 & f(5) = -3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

È facile notare che f è biunivoca e, conseguentemente alle definizioni appena date, possiamo affermare che \mathbb{Z} ha cardinalità del numerabile:

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$$

Prendiamo ora in analisi l'insieme dei numeri razionali, ovvero \mathbb{Q} . Elenchiamo tutte le frazioni (e di conseguenza tutti i suoi elementi) nel seguente ordine:

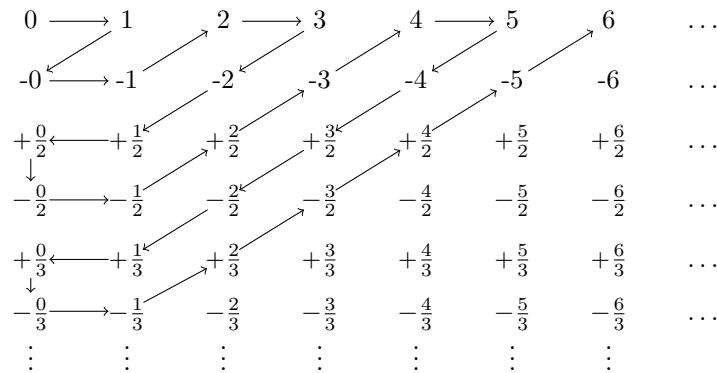


Figure 1: Tabella numeri razionali

Non dimostreremo rigorosamente la cosa, però è facile notare che si può costruire una funzione biunivoca da \mathbb{N} a \mathbb{Q} che segua esattamente l'ordine delle frecce nella figura 1. Di conseguenza anche l'insieme dei numeri razionali ha **cardinalità del numerabile**:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

2.6.2 Cardinalità del continuo

Concludiamo con l'analisi dei numeri reali, ovvero l'insieme \mathbb{R} . Se volessimo dimostrare che $|\mathbb{R}|$ non è numerabile, ci basterebbe dimostrare che un suo sottoinsieme non è numerabile. Proviamo quindi a dimostrare che l'intervallo $[0, 1[$ non è numerabile, cioè ha cardinalità maggiore dell'insieme dei numeri naturali (\mathbb{N}). Prendiamo tutti i numeri contenuti nell'intervallo $[0, 1[$ e cominciamo ad elencarli senza un ordine preciso:

0.1298417824611040752...
0.3793921999397529387...
0.2384798342293874812...
0.0073820271308387362...
0.4579468274062944976...
0.7432686162126636901...
 \vdots

Immaginiamo una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1[$ che associ ad ogni numero elencato un numero naturale. Ora indichiamo con b_{ij} la cifra j (partendo dai decimali) del numero i e creiamo un nuovo numero r secondo la regola:

$$r_{jj} = \begin{cases} 5 & \text{se } b_{jj} \neq 5 \\ 6 & \text{se } b_{jj} = 5 \end{cases}$$

È facile notare che r è un numero diverso per almeno una cifra da tutti quelli elencati in precedenza. Ne consegue che non c'è nessun numero in \mathbb{N} associato ad r , quindi $|\mathbb{R}|$ **non è numerabile**, infatti:

\mathbb{R} ha **cardinalità del continuo**.

3 Funzioni

Definizione

Dati due insiemi $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, una **funzione** f da A a B ($f : A \rightarrow B$) è una corrispondenza univoca da A a B , ovvero associa ogni $x \in A$ uno e un solo $y \in B$ (**legge di associazione**: $\forall x \in A, \exists! y \in B : f(x) = y$). Tale elemento è il **valore della funzione** in x e si scrive $f(x) = y$.

L'insieme A è il **dominio** della funzione, mentre l'insieme B è il **codominio** della funzione. L'insieme dei valori di una funzione è invece l'**immagine** (si ottiene proiettando la funzione sull'asse y):

$$\text{Im}f = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$$

Una funzione può essere anche chiamata *corrispondenza* oppure *mappa*. Essa è definita quindi da tre cose:

1. Un **dominio**
2. Un **codominio**
3. Una **legge di associazione**

Affinché due funzioni siano uguali, il dominio, il codominio e la legge di associazione devono corrispondere. In altri termini date due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : A' \rightarrow B'$, le funzioni risultano uguali se e solo se:

$$\begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ f = g \end{cases}$$

Esempio: data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad g(x) = x^2$, le due funzioni sono diverse in quanto la seconda ha un codominio diverso dalla prima ($\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$).

Il **dominio naturale** di una funzione è il più grande sottoinsieme in cui quella funzione è definita.

3.1 Funzione iniettiva (1-1)

Definizione

Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta **iniettiva** se e solo se:

$$\forall x, y \in A : x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

o equivalentemente:

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \implies x = y$$

Spesso l'iniettività di una funzione viene più brevemente indicata con (1-1). Inoltre questa proprietà dipende strettamente da come viene "scelto il dominio":

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 & \text{È iniettiva} \\ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 & \text{Non è iniettiva} \\ f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 & \text{È iniettiva} \end{array}$$

La seconda funzione infatti non è iniettiva ($f(-2) = f(2) = 4$), mentre la terza lo è in quanto il dominio è stato ristretto.

3.2 Funzione suriettiva (Su)

Definizione

Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta suriettiva se e solo se:

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

Spesso la suriettività di una funzione viene più brevemente indicata con (Su). Inoltre questa proprietà dipende strettamente da come viene "scelto il codominio":

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 & \text{È suriettiva} \\ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 & \text{Non è suriettiva} \\ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad f(x) = x^2 & \text{È suriettiva} \end{array}$$

La seconda funzione infatti non è iniettiva ($f(x) = -2$ non ha soluzione per esempio), mentre la terza lo è in quanto il codominio è stato ristretto.

3.3 Funzione biunivoca

Definizione

Una funzione viene detta **biunivoca** (o **riettiva**) se è **iniettiva (1-1)** e **suriettiva (Su)**.

3.4 Funzione invertibile

Una funzione, affinché risulti invertibile, è necessario che sia **biunivoca**.

Definizione

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **invertibile** se $\exists f^{-1} : B \rightarrow A$ tale che:

$$\begin{array}{l} \forall a \in A : f^{-1}(f(a)) = a \\ \forall b \in B : f(f^{-1}(b)) = b \end{array}$$

3.5 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$:

1. f si dice **crescente** (o **monotona**) se:

$$\forall x, y \in I : x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

Se al posto del *minore o uguale* (\leq) avessimo usato un *minore stretto* ($<$) la proprietà era più forte, e in quel caso la funzione sarebbe stata **strettamente crescente**.

2. f si dice **decrescente** (o **monotona decrescente**) se:

$$\forall x, y \in I : x < y \implies f(x) \geq f(y)$$

Se al posto del *maggiore o uguale* (\geq) avessimo usato un *maggiore stretto* ($>$) la funzione sarebbe stata **strettamente decrescente**.

3.6 Funzioni pari e dispari

Un modo per classificare una funzione è vedere se è pari, dispari, o nessuna delle due. Ne consegue che non per forza una funzione deve essere pari o dispari. E inoltre se una funzione non è pari non è detto che sia dispari.

Definizione

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, se:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A \quad (1)$$

La funzione si dice **pari**. Mentre se:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A \quad (2)$$

La funzione si dice **dispari**.

La nomenclatura pari o dispari deriva dalle potenze, in quanto $(-a)^n = a^n$ se n è pari, mentre $(-a)^n = -a^n$ se n è dispari.

Le funzioni pari hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine.

3.7 Valore assoluto

Definizione

Dato un numero $a \in \mathbb{R}$ si dice **valore assoluto di a** :

$$|a| := \max(a, -a)$$

Il valore assoluto si espande nel seguente modo:

- $|a| \leq b$ con $b > 0 \iff -b \leq a \leq b$
- $|a| \geq b$ con $b > 0 \iff a \leq -b \vee a \geq b$

3.8 Fattoriale

Definizione

Dato un numero $n \in \mathbb{N}$, il **fattoriale** di n è definito:

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

oppure in maniera ricorsiva:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Un modo per ricordarselo è che rappresenta il numero di permutazioni di n oggetti, cioè in quanti modi diversi posso disporre n elementi.

3.9 Coefficiente binomiale

Definizione

Dati due numeri $n, m \in \mathbb{N} : m \leq n$ si definisce **coefficiente binomiale**:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ \frac{n!}{(n-m)!m!} & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

Un modo per ricordarselo è pensare che il coefficiente binomiale di n su m rappresenta il numero di sottoinsiemi di m elementi in un insieme di n elementi.

Gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\ 2) \quad & \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

3.10 Binomio di Newton

Il binomio di Newton è metodo per esprimere lo sviluppo della potenza n -esima di un binomio qualsiasi mediante una formula.

3.10.1 Sommatoria

Prima però di introdurlo è necessario introdurre una notazione spesso usata in matematica per scrivere in maniera più agevole somme di un certo numero di addendi:

Definizione

La **sommatoria** si indica con la lettera sigma maiuscola (Σ), prevede un indice (generalmente i, j o k), un'espressione algebrica a destra della lettera sigma in cui viene usato l'indice e due valori per l'indice: uno di partenza e l'altro di terminazione, rispettivamente indicati sotto e

sopra sigma. La notazione generale diventa quindi:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Da notare che la sommatoria espande il termine $f(k)$ sostituendo a k ogni singolo numero naturale compreso tra m ed n per poi sommare tutti i termini insieme. **È necessario quindi che $m \leq n$.**

3.10.2 Binomio di Newton (effettivo)

L'idea alla base del binomio di Newton è cercare di trovare una formula che semplifichi lo sviluppo in potenza di un binomio qualsiasi. Esiste quindi un modo per sviluppare $(a+b)^n$ senza dover per forza fare tutte le moltiplicazioni intermedie? Proviamo ad elencare gli sviluppi del binomio per i primi valori di n :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\&\vdots\end{aligned}$$

Tralasciando momentaneamente i coefficienti è facile notare un certo schema nelle potenze di a e di b :

$$(a+b)^n = a^n b^0 + a^{n-1} b^1 + \cdots + a^1 b^{n-1} + a^0 b^n$$

Per i coefficienti non faremo la dimostrazione ma sono legati al coefficiente binomiale (Sezione 3.9), infatti:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{2} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{0} b^2 = \\&= \frac{2!}{(2-2)!2!} a^2 + \frac{2!}{(2-1)!1!} ab + \frac{2!}{(2-0)!0!} b^2 = \\&= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2\end{aligned}$$

Di conseguenza il caso generale diventa:

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n b^0 + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{0} a^0 b^n =$$

Introducendo la notazione di sommatoria (3.10.1) per semplificare e utilizzando qualche proprietà del coefficiente binomiale (3.9):

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Definizione

Il **binomio di Newton** esprime lo sviluppo della potenza n -esima di un binomio qualsiasi

mediante la formula:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

3.11 Radice aritmetica

Teorema

La radice di un numero reale positivo esiste sempre ed è unica:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists! b \in \mathbb{R}_+ : b^n = a$$

b si chiama radice **aritmetica n -esima** di a e si scrive $\sqrt[n]{a} := b$. In quanto $b \in \mathbb{R}_+$ la radice aritmetica è **sempre positiva**.

Dimostriamo il teorema della radice n -esima semplificato, cioè solo per il caso in cui $n = 2$:

Dimostrazione

Ipotesi: $\forall a \in \mathbb{R}_+$

Lemma

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x, y \geq 0$$

$$\text{A) } x^2 \leq y^2 \iff x \leq y$$

$$\text{B) } x^2 \geq y^2 \iff x \geq y$$

$$\text{C) } x^2 = y^2 \iff x = y$$

$$\text{D) } x^2 < y \implies \exists \epsilon > 0 : (x + \epsilon)^2 < y$$

$$\text{E) } x^2 > y \implies \exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon)^2 < y$$

Prima di procedere con la dimostrazione è necessario prima dimostrare il lemma. Dimostriamo il punto **A** del lemma:

Dimostrazione

Ipotesi: $x^2 \leq y^2$

$$x^2 \leq y^2$$

$$x^2 - y^2 \leq 0$$

$$(x + y)(x - y) \leq 0$$

Ovviamente essendo $x, y \geq 0 \implies x + y \geq 0$, quindi possiamo dividere da ambo i lati:

$$x - y \leq 0$$

$$x \leq y$$

Tesi: $x \leq y$

La dimostrazione del punto **B** del lemma è identica al punto **A** e di conseguenza non verrà riportata. Dimostriamo il punto **C**:

Dimostrazione

Ipotesi: $x^2 = y^2$

$$x^2 = y^2 \iff \begin{cases} x^2 \leq y^2 \iff x \leq y \\ x^2 \geq y^2 \iff x \geq y \end{cases} \iff x = y$$

Tesi: $x = y$

Dimostriamo ora il punto **D** del lemma:

Dimostrazione

Ipotesi: $x^2 < y$

Prendiamo $0 < \epsilon < 1$ in modo che $\epsilon^2 < \epsilon$:

$$(x + \epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2$$

Sostituendo ora ϵ^2 con ϵ possiamo affermare che:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 &\leq \\ &\leq x^2 + 2x\epsilon + \epsilon = \\ &= x^2 + \epsilon(2x + 1) \end{aligned}$$

È possibile ora scegliere y in modo da soddisfare $x^2 + \epsilon(2x + 1) < y$?

$$\begin{aligned} x^2 + \epsilon(2x + 1) &< y \\ \epsilon(2x + 1) &< y - x^2 \\ \epsilon &< \frac{y - x^2}{2x + 1} \end{aligned}$$

Si ricorda che $(2x + 1) > 0$ per ipotesi del lemma ($x \geq 0$). Anche $y - x^2 > 0$ per ipotesi, quindi è possibile scegliere ϵ in maniera tale da verificare la tesi:

$$0 < \epsilon < \frac{y - x^2}{2x + 1}$$

Tesi: $\exists \epsilon > 0 : (x + \epsilon)^2 < y$

Dimostriamo ora il punto **E** del lemma:

Dimostrazione

Ipotesi: $x^2 > y$

$$(x - \epsilon)^2 = x^2 - 2x\epsilon + \epsilon^2$$

Essendo $\epsilon^2 > 0$ e dovendo dimostrare un maggiore possiamo anche toglierlo in quanto se $x^2 - 2x\epsilon > y$ sicuramente $x^2 - 2x\epsilon + \epsilon^2 > y$

$$x^2 - 2x\epsilon > y$$

$$x^2 - y > 2x\epsilon$$

$$2x\epsilon < x^2 - y$$

$$\epsilon < \frac{x^2 - y}{2x}$$

Sempre per il lemma $x > 0$ e per ipotesi $x^2 - y > 0$. È quindi possibile scegliere un ϵ affinché la tesi si verifichi:

$$0 < \epsilon < \frac{x^2 - y}{2x}$$

Tesi: $\exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon)^2 < y$

Torniamo ora alla nostra dimostrazione principale. Utilizzando la proprietà di completezza di \mathbb{R} (Sezione: 2.3.2) definiamo un insieme A tale che:

$$A = \{c \in \mathbb{R} | c \geq 0 \wedge c^2 \leq a\}$$

È facile notare che $0 \in A \implies A \neq \emptyset$.

$$\forall c \in A : c^2 \leq a \leq (a+1) \leq (a+1)^2$$

Da lemma **A** $\implies c \leq a+1$. $a+1$ quindi è un *maggiorante* di A e conseguentemente A è *superiormente limitato*. Dalla proprietà di completezza:

$$\exists \sup A =: b \in \mathbb{R}_+$$

Ci riduciamo quindi a dimostrare che $b^2 = a$, cosicché $\sqrt{a} = b$. Dimostriamo ora per assurdo che non può essere $b^2 < a$ e $b^2 > a$. Procediamo per casi dimostrando prima $b^2 < a$. Dal lemma **D**:

$$\exists \epsilon > 0 : (b + \epsilon)^2 < a \implies b + \epsilon \in A \implies b + \epsilon \leq \sup A = b \implies \epsilon \leq 0$$

Assurdo!

Procediamo con il secondo caso. Da lemma **E**:

$$\exists \epsilon > 0 : (b - \epsilon)^2 > a \implies \forall c \in A : c^2 \leq a < (b - \epsilon)^2 \implies c^2 \leq (b - \epsilon)^2$$

Da lemma **A**:

$$c \leq b - \epsilon \quad \forall c \in A$$

Questo implica che $b - \epsilon$ sia un *maggiorante* di A . Ma $b = \sup A$ e $b - \epsilon$ è un maggiorante ancora più piccolo. **Assurdo!**

Quindi $b^2 = a$.

Proviamo ora l'unicità della radice. Supponiamo $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$b_1^2 = a = b_2^2 \implies b_1 = b_2$$

Da lemma **A**: $b_1 = b_2$

Tesi: $\exists! b \in \mathbb{R}_+ : b^2 = a$

Q.e.d.

Facciamo alcune osservazioni:

- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \leq -2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$

La radice si riscrive molto facilmente come una potenza. Infatti: $b^n = a \implies (b^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \implies b = a^{\frac{1}{n}}$. Ma essendo b la radice di a :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Si ricava con lo stesso procedimento che:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

3.12 Funzioni goniometriche

3.12.1 Introduzione

L'idea alla base goniometria nasce da quella che viene chiamata **circonferenza goniometrica**. Questa circonferenza non ha nulla di speciale se non avere il *centro nell'origine* degli assi cartesiani e avere *raggio 1*. In particolare il suo grafico sarà:

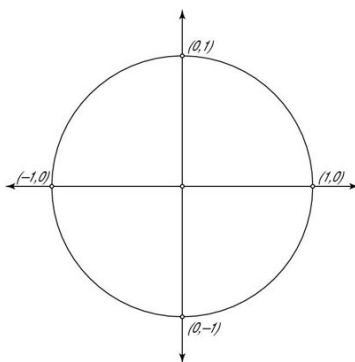


Figure 2: Circonferenza goniometrica

E l'equazione associata sarà:

$$x^2 + y^2 = 1$$

L'idea ora è di tracciare un raggio qualsiasi nella circonferenza, e indicare con $P(x_p, y_p)$ il punto in cui tocca la circonferenza. Ovviamente il raggio formerà un angolo rispetto all'asse delle ascisse che chiameremo per comodità α . E ora arriva la domanda che ci potrà inevitabilmente alla funzioni goniometriche: *è possibile trovare x_p e y_p soltanto sapendo α ?* La risposta sta proprio nelle funzioni goniometriche.

3.12.2 Radianti

Prima di continuare con le funzioni goniometriche è necessario fare alcune precisazioni sugli angoli. Infatti l'unità di misura che si è sempre adottata per misurare gli angoli è il grado sessagesimale (30° , 180° , 90° ...), ma questa, nonostante sia molto intuitiva, risulta poco pratica per indicare gli angoli. I matematici hanno quindi deciso di introdurre una nuova misura, chiamandola **radianti**.

L'idea alla base dei radianti è utilizzare una circonferenza: data infatti una circonferenza con centro nel vertice dell'angolo è facile notare che quest'ultimo delimita sulla circonferenza stessa un arco. L'angolo in radianti è definito proprio dal **rapporto tra l'arco intercettato dall'angolo e il raggio della circonferenza**.

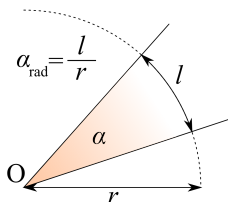


Figure 3: Definizione dell'angolo in radianti

In realtà, nonostante i radianti semplifichino di molto gli angoli, questa definizione sembra effettivamente molto più complessa dei semplici gradi. Se però si comincia a fare qualche osservazione è facile vedere la bellezza dietro a questa misurazione degli angoli:

1. La prima osservazione è notare che questa definizione **non dipende dal raggio** della circonferenza. Proviamo infatti a calcolare angolo giro in radianti:

$$t_{\text{rad}} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

2. La seconda osservazione è che un angolo espresso in radianti è **un numero puro** (cioè non ha unità di misura), in quanto rapporto di due lunghezze.
3. La terza osservazione si basa sul girare la formula è arrivare a $l = t_{\text{rad}} \cdot r$. In questo caso è facile vedere che avendo l'angolo e il raggio è possibile determinare la lunghezza dell'arco di circonferenza. Ma in una circonferenza goniometrica (dove per definizione il raggio è 1) **l'angolo è uguale alla misura dell'arco di circonferenza che intercetta**.

È abbastanza immediato ricavare una proporzione per convertire gli angoli da radianti a gradi:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = t : 2\pi$$

Riporto di seguito gli angoli più usati sia in gradi che in radianti:

0°	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
360°	2π

3.12.3 Convenzione sul segno degli angoli

Esiste una convenzione per indicare gli angoli sulla circonferenza goniometrica. Gli angoli si iniziano a contare dalla semiretta positiva dell'asse delle ascisse e se ci muoviamo in senso antiorario gli angoli aumentano, mentre se ci muoviamo in senso orario gli angoli diminuiscono. Questo è importante perché sulla circonferenza goniometrica è possibile rappresentare anche angoli negativi. Per esempio $-\frac{\pi}{4}$ è un angolo ampio $\frac{\pi}{4}$, ma si trova nel quarto quadrante invece che nel primo. Si noti che in realtà andando solo in senso antiorario (e cioè considerando solo angoli positivi) si può ottenere "lo stesso angolo", che in questo caso varrà $\frac{7}{4}\pi$.

3.12.4 Seno, coseno e tangente

Eravamo rimasti a cerca di calcolare le coordinate di un punto P che giace sulla circonferenza goniometrica dato semplicemente l'angolo. È proprio da questo problema quindi che nascono le funzioni goniometriche:

Definizione

Dato un angolo t formato da un raggio sulla circonferenza goniometrica e indicato con $P(x_p, y_p)$ l'estremo del raggio che non è il centro della circonferenza, definiamo:

$$\sin t := y_p$$

$$\cos t := x_p$$

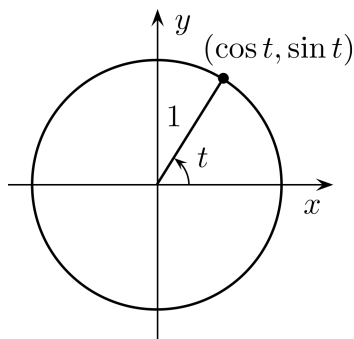


Figure 4: Circonferenza goniometrica con seno e coseno

Grazie quindi alla funzione **seno** e alla funzione **coseno** possiamo calcolare le coordinate di qualsiasi punto sulla circonferenza goniometrica sapendo semplicemente l'angolo che il punto forma con la semiretta positiva dell'asse delle ascisse.

Proviamo a fare alcuni esempi: se volessimo calcolare le coordinate del punto che forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ ci basterebbe calcolare per l'ascissa $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e per l'ordinata $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Il punto infatti ha coordinate $(0, 1)$.

Oltre al seno e al coseno esiste un'ulteriore funzione goniometrica chiamata **tangente**. La definizione geometrica della tangente richiede l'introduzione di una retta di equazione $x = 1$. Una retta quindi verticale tangente alla circonferenza nel punto $(1, 0)$. Se proviamo ora a prendere un qualsiasi punto su questa retta e a tracciare un segmento che collega il punto al centro della circonferenza delimitiamo un angolo. La tangente di questo angolo sarà l'ordinata del punto.

Definizione

Preso un punto $Q(1, y_q)$ qualsiasi sulla retta $x = 1$ tangente alla circonferenza goniometrica in $(1, 0)$, tracciando il segmento che ha come estremi il punto e il centro della circonferenza si trova un angolo θ . La *tangente* di quell'angolo è l'ordinata del punto Q :

$$\tan \theta := y_q$$

Per lavorare con seno, coseno e tangente è estremamente utile sapere dei valori "notevoli" che riporterò nella seguente tabella:

3.12.5 Identità fondamentali

Esistono due identità fondamentali nella goniometria. La prima si ricava dalla formula stessa della circonferenza goniometrica ($x^2 + y^2 = 1$). Essendo infatti $x = \cos t$ e $y = \sin t$ possiamo scrivere:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Per la seconda bisogna fare qualche piccolo traffico geometrico che verrà tralasciato. Si noti però che questa NON è la definizione della tangente ma solo una conseguenza.

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

3.12.6 Dominio, codominio e immagine

Il dominio di seno e coseno è \mathbb{R} , il codominio è $[-1, 1]$.

Il dominio della tangente è $D(\tan) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$, il codominio è \mathbb{R} .

3.12.7 Periodicità e parità delle funzioni goniometriche

Il seno, il coseno e la tangente sono funzioni periodiche, cioè riassumono gli stessi valori dopo un intervallo chiamato appunto periodo. Per il **seno** e il **coseno** il periodo è 2π , mentre per la **tangente**

il periodo è π . Ne consegue che:

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan(x + k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre il seno e la tangente sono funzioni **dispari** mentre il coseno è una funzione **pari**.

3.12.8 Grafici

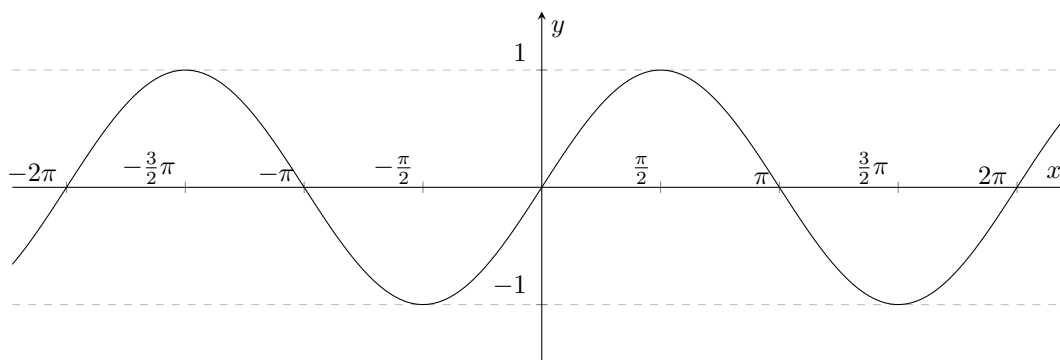


Figure 5: Grafico di $y = \sin x$

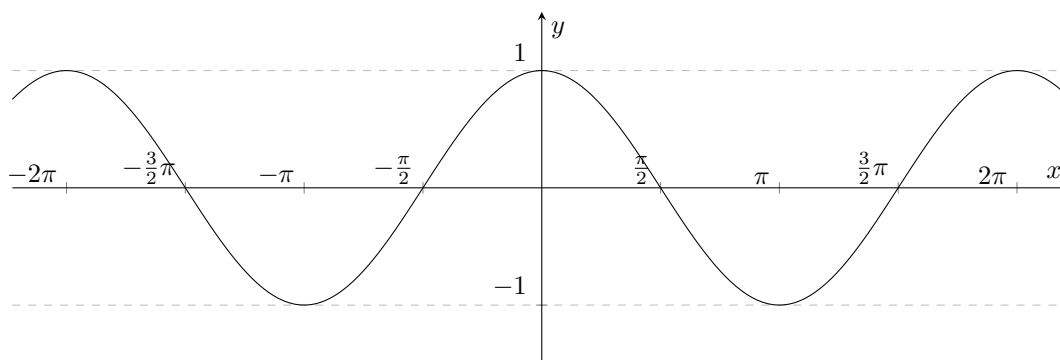


Figure 6: Grafico di $y = \cos x$

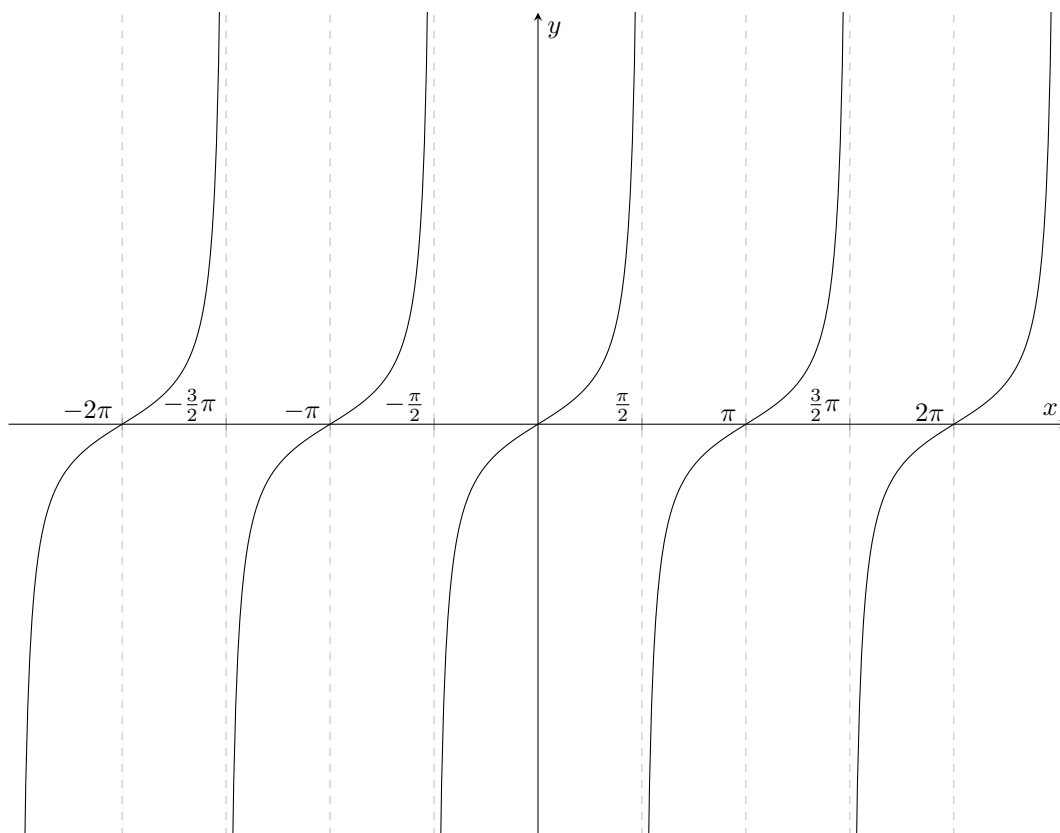


Figure 7: Grafico di $y = \tan x$

3.12.9 Formule utili

Dalla prima identità è possibile ricavare una formula per passare dal seno al coseno, il problema è che per farlo bisogna prima sapere in che quadrante ci si trova e, di conseguenza, decidere il segno della radice:

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Di seguito le formule di **addizione** e **sottrazione**:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Formule di **duplicazione**:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Le ultime due formule per la duplicazione del coseno sono ricavate sostituendo a $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ la prima identità fondamentale ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Si noti come la formula di duplicazione del coseno permette di passare **da un quadrato a una funzione lineare** e viceversa.

Ulteriore formula:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha\end{aligned}$$

3.12.10 Funzioni goniometriche inverse

Essendo seno e coseno periodiche ovviamente non sono invertibili, in quanto per essere invertibili dovrebbero essere iniettive e suriettive. In realtà seno e coseno sono suriettive, ma non iniettive. È quindi necessario restringere il loro dominio per renderle iniettive.

Per convenzione il dominio del **seno** si restringe all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si noti che si potrebbe scegliere un qualsiasi altro intervallo purché il seno "ristretto" sia ancora iniettivo (es. si può prendere come intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ ma non $[0, \pi]$).

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

Essendo diventata biunivoca è possibile invertirla:

Definizione
<p>La funzione inversa al seno è l'arcoseno:</p> $\left(\sin _{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}(y) = \arcsin y$ $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Essendo che il codominio dell'arcoseno è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1] \\ \sin(\arcsin x) = x \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ (non } \mathbb{R}) \\ \arcsin(\sin x) = x \end{cases}$$

Per esempio: $\arcsin(\sin \pi) = \arcsin 0 = 0 \neq \pi$.

Lo stesso discorso vale per il **coseno** e la **tangente**. Mente però per la tangente possiamo tenere lo stesso intervallo del seno come dominio ristretto, per il coseno è necessario usare un altro intervallo in quanto $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ non lo renderebbe iniettivo:

Definizione
<p>La funzione inversa al coseno è l'arcocoseno:</p> $(\cos _{[0, \pi]})^{-1}(y) = \arccos y$ $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1] \\ \cos(\arccos x) = x \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in [0, \pi] \text{ (non } \mathbb{R}) \\ \arccos(\cos x) = x \end{cases}$$

Definizione

La funzione inversa alla tangente è l'**arcotangente**:

$$\left(\tan|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}(y) = \arctan y$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \tan(\arctan x) = x \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (non } \mathbb{R}) \\ \arctan(\tan x) = x \end{cases}$$

I grafici delle funzioni inverse sono i seguenti:

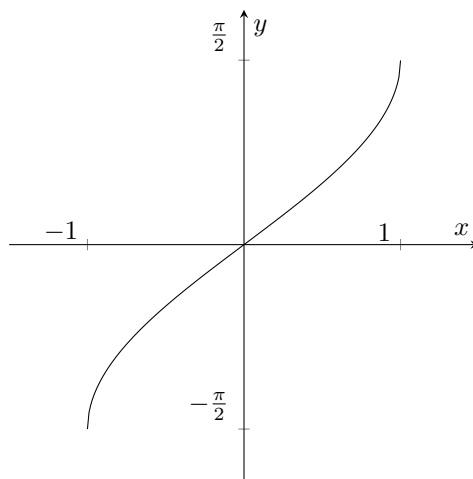


Figure 8: Grafico di $y = \arcsin x$

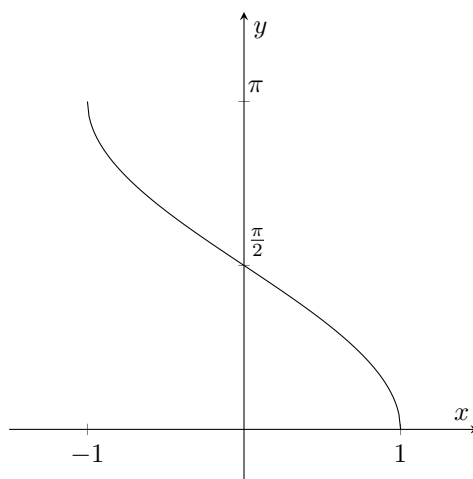


Figure 9: Grafico di $y = \arccos x$

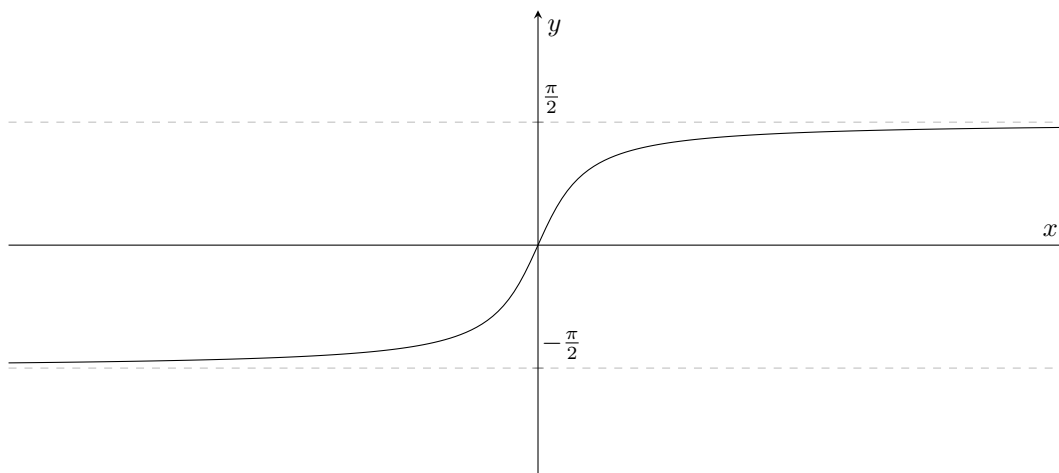


Figure 10: Grafico di $y = \arctan x$

3.13 Esponenziale

Come abbiamo ricavato dalla radice aritmetica (sezione 3.11), siamo in grado di definire l'esponenziale per un qualsiasi esponente razionale positivo. Infatti qualsiasi numero razionale positivo è esprimibile nella forma $q = \frac{m}{n}$ e quindi, sempre per la radice aritmetica:

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \forall q \in \mathbb{Q}_+, \forall a \in \mathbb{R}_+, \text{ con } n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0$$

La base dell'esponenziale è necessario che sia positiva in quanto se non lo fosse la definizione arriverebbe ad una contraddizione. Per esempio se volessi calcolare $(-2)^3 = -8$ come un esponenziale seguendo la definizione che abbiamo:

$$(-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-2)^6} = \sqrt{64} = 8 \neq -8$$

Il primo passo per estendere questa definizione è chiederci come possiamo definire l'esponenziale per tutto l'insieme dei razionali, cioè anche per esponenti razionali negativi. La risposta è abbastanza semplice perché ci basta dire che se l'esponente è negativo calcoliamo il reciproco con l'esponente positivo:

$$a^{-q} = a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \forall q \in \mathbb{Q}_+, \forall a \in \mathbb{R}_+, \text{ con } n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0$$

Siamo quindi riusciti a definire l'esponenziale per tutti gli esponenti razionali, sia positivi che negativi. Ora ci manca estendere questa definizione ai numeri reali. Purtroppo per farlo sono necessarie due nozioni non ancora introdotte: quella di successione e quella di limite. Per comprendere quindi a pieno i passaggi successivi è necessario andare prima guardarsi le sezioni relative (cioè la sezione 4 per le successioni e la sezione 5 per i limiti).

La domanda è come facciamo a definire $3^{\sqrt{2}}$ o $5^{\sqrt{27}}$? Cioè come facciamo a definire l'esponenziale per gli esponenti appartenenti all'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? L'idea è di **approssimare l'esponente con una successione** di numeri razionali. Se per esempio voglio calcolare $3^{\sqrt{2}}$, ho come esponente $\sqrt{2}$, quindi

la successione diventa:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= 1,4 \\ q_3 &= 1,41 \\ q_4 &= 1,414 \\ q_5 &= 1,4142 \\ q_6 &= 1,41421 \\ &\vdots \end{aligned}$$

È facile vedere che questa successione è **crescente** ($3^{q_n} \leq 3^{q_{n+1}}$) visto che il termine successivo ha sempre una cifra in più e inoltre questa successione è **superiormente limitata** visto che $3^{q_n} \leq 3^2 = 9$. Essendo crescente e superiormente limitata questa successione ha limite e quindi $3^{\sqrt{2}}$ si definisce proprio come il limite di questa successione:

$$3^{\sqrt{2}} := \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{q_n}$$

Arriviamo quindi a definire il caso generale dell'esponenziale:

Definizione

Si definisce **esponenziale** in base a di x ($\exp_a x$) e si indica con a^x , $\forall a > 0 \in \mathbb{R}$:

1. Se $x \in \mathbb{Q}_+$:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N} : x = \frac{m}{n} \text{ e } n \neq 0$$

2. Se $x \in \mathbb{Q}_-$:

$$a^x = a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N} : x = -\frac{m}{n} \text{ e } n \neq 0$$

3. Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

Data $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q} : q_n \nearrow, q_n \rightarrow x$:

$$a^x := \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{q_n}$$

L'esponenziale in **base naturale** è quello in base e

Il numero e è descritto nella sezione relativa al numero di Eulero (Sezione 5.2) e si dice che l'esponenziale in questa base è "naturale" perché ha moltissime proprietà che vedremo in seguito.

3.14 Logaritmo

Come molte funzioni anche l'esponenziale ha una sua funzione inversa, e cioè che permette di trovare l'esponente data la base e il risultato. La funzione inversa all'esponenziale è il **logaritmo**:

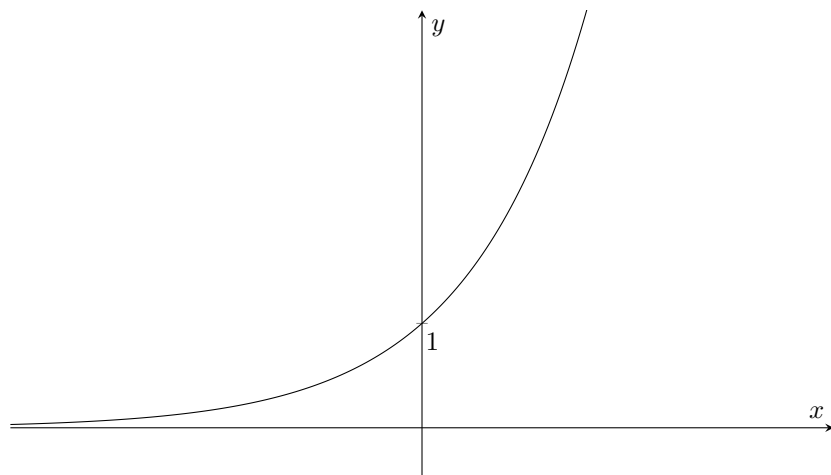


Figure 11: Grafico di $y = a^x$ con $a > 1$

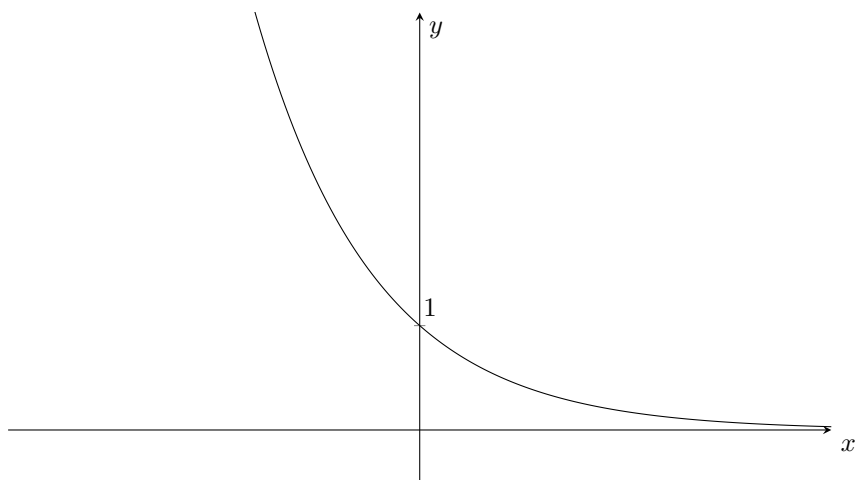


Figure 12: Grafico di $y = b^x$ con $0 < b < 1$

Teorema

Dato $a \in \mathbb{R} : a > 0, a \neq 1, \forall y \in \mathbb{R} : y > 0, \exists! x \in \mathbb{R} : a^x = y$. Definiamo **logaritmo** in base a di y :

$$\log_a(y) := x$$

La funzione logaritmo ha come dominio $\mathbb{R}_+^* = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ e come codominio \mathbb{R} :

$$\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Essendo quindi il logaritmo l'inverso dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} a^{\log_a(y)} &= y & \forall y \in \mathbb{R}_+^* \\ \log_a(a^x) &= x & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

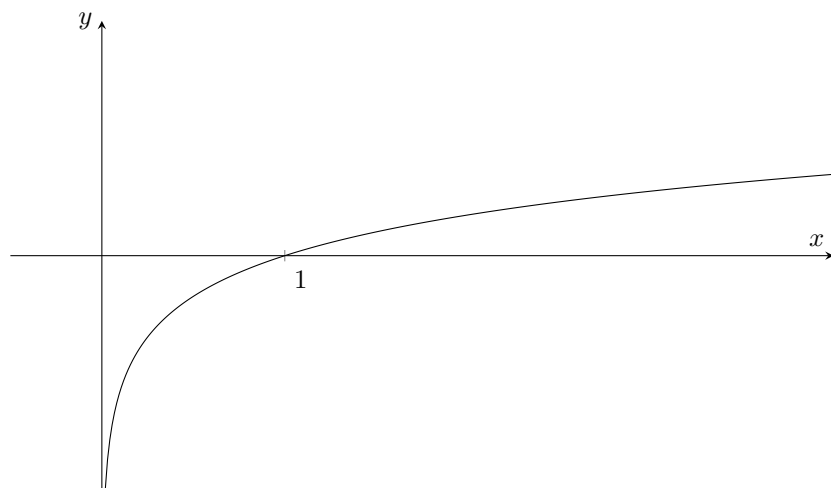


Figure 13: Grafico di $y = \log_a(x)$ con $a > 1$

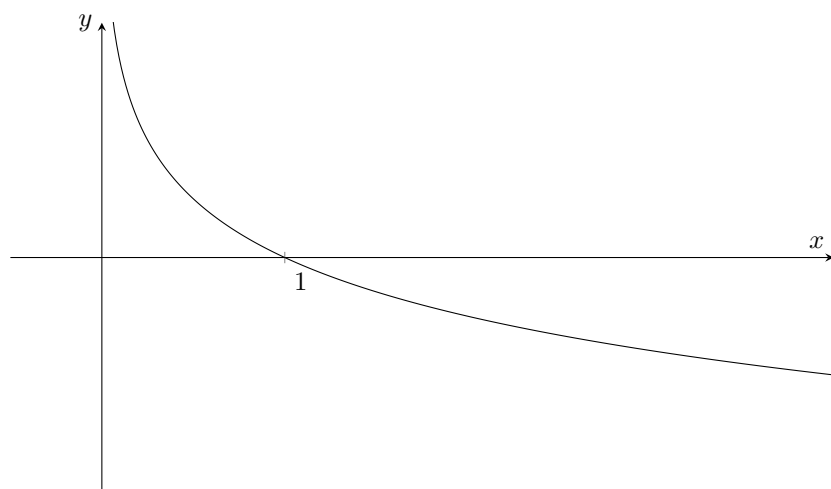


Figure 14: Grafico di $y = \log_b(x)$ con $0 < b < 1$

4 Successioni e serie

Definizione

Una successione di numeri reali è una funzione:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow f(n) =: a_n \end{aligned}$$

E si indicato in tre possibili modi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_n)_n \quad \text{oppure} \quad (a_n)$$

L'idea alla base delle successione matematiche è poter scrivere una lista di numeri che però abbiano un ordine. Avendole infatti definite come funzioni si può tenere l'ordine dei termini della successione semplicemente:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f(1) &= a_1 \\ f(2) &= a_2 \\ f(3) &= a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Il poter scrivere numeri in successione e dare loro un ordine sembra apparentemente sembra inutile, ma in realtà si rivela estremamente utile in moltissime definizioni di funzioni che però vanno estese. Per esempio, come è spiegato nella sezione 3.13 riguardo all'esponenziale, per definire tale funzione per tutti i numeri reali è necessario utilizzare una successione.

Definizione

Data una successione $(a_n)_n$ e un insieme $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. (a_n) si dice:

- **Superiormente limitata** se A è superiormente limitato.
- **Inferiormente limitata** se A è inferiormente limitato.
- **Limitata** se A è limitato.

4.1 Successioni monotone

Per capire quanto segue è necessario prima guardare la sezioni sui limiti delle successioni (5.1).

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **crescente** e si indica con $(a_n \nearrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **strettamente crescente** e si indica sempre con $(a_n \nearrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **decescente** e si indica con $(a_n \searrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **strettamente decrescente** e si indica sempre con $(a_n \searrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Una successione crescente o decrescente si dice **monotona**. Le successioni monotone **hanno sempre limite**.

Teorema

Se $(a_n)_n$ è **crescente**, allora:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Se $(a_n)_n$ è **decescente**, allora:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Dimostriamo il teorema appena enunciato:

Dimostrazione

Dimostreremo il teorema soltanto per $(a_n)_n \nearrow$. Si tratta quindi di provare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Poniamo $L := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ Bisogna dimostrare due casi: $L = +\infty$ e $L \in \mathbb{R}$

1. **L = +∞** Ci riduciamo a provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

cioè

$$\forall K > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} : a_n > K$$

Dato $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

- A non è superiormente limitato in quanto $L = +\infty$
- A di conseguenza non ammette maggioranti
- Ne consegue che K non è un maggiorante $\implies \exists \bar{n} \in A : a_{\bar{n}} > K$
- Siccome per ipotesi $(a_n)_n \nearrow \implies \forall n \geq \bar{n} : a_n \geq a_{\bar{n}} > K$

2. $L \in \mathbb{R}$ Ci riduciamo a provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = L$$

cioè

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall \bar{n} \geq n : |a_n - L| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

$a_n < L + \epsilon$ è ovvio per ipotesi in quanto L è un maggiorante, quindi $\forall n : a_n \leq L < L + \epsilon$.
Ci rimane quindi solo da trovare \bar{n} tale che:

$$\forall n \geq \bar{n} : a_n > L - \epsilon$$

Essendo $L = \sup A = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

- L è il più piccolo dei maggioranti di A
- $L - \epsilon$ non è quindi un maggiorante di $A \implies \exists a_{\bar{n}} \in A : L - \epsilon < a_{\bar{n}}$
- Essendo $(a_n)_n \nearrow$ si ha che $\forall n > \bar{n} \quad L - \epsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n$

quindi

$$a_n > L - \epsilon$$

Q.e.d.

Corollari

1. Se $(a_n)_n \nearrow$ e $(a_n)_n$ è **superiormente limitata**, allora $(a_n)_n$ è **convergente**, cioè

$$\exists r \in \mathbb{R} : a_n \longrightarrow r$$

2. Se $(a_n)_n \searrow$ e $(a_n)_n$ è **inferiormente limitata**, allora $(a_n)_n$ è **convergente**, cioè

$$\exists r \in \mathbb{R} : a_n \longrightarrow r$$

5 Limiti

Prendiamo una successione abbastanza semplice da definire, tipo:

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

Cominciamo ora ad elencare i suoi termini e calcoliamo i suoi valori:

$$a_1 = \frac{0}{1} = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$a_3 = \frac{2}{3} = 0.\bar{6}$$

$$a_4 = \frac{3}{4} = 0.75$$

\vdots

$$a_{1000} = \frac{999}{1000} = 0.999$$

\vdots

$$a_{100000} = \frac{99999}{100000} = 0.99999$$

È facile notare che più n diventa grande più il valore della successione *tende* a 1. Come si formalizza questa cosa? Con il concetto di limite.

5.1 Limite di una successione

Definizione

Data una successione $(a)_n$, e un numero $L \in \mathbb{R}$, si dice che $(a)_n$ è **convergente** e si indica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad \text{oppure} \quad (a)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} : |a_n - L| < \epsilon$$

Definizione

Data una successione $(a)_n$, si dice che $(a)_n$ è **divergente** e si indica:

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad (a)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} : a_n \geq \epsilon$$

•

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \quad \text{oppure} \quad (a)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} : a_n \leq -\epsilon$$

Se esiste il limite di una successione esso è **unico**

Esistono successioni che non hanno limite (non sono né convergenti né divergenti).

$$a_n = (-1)^n$$
$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1 \dots$$

La successione è limitata in quanto i suoi valori sono $-1 \leq a_n \leq 1$, eppure non ha limite in quanto oscilla.

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$
$$a_0 = 0, a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -3, a_4 = 4 \dots$$

La successione in questo caso non è limitata e non ha un limite in quanto "salta" tra valori positivi e valori negativi.

5.2 Numero di Eulero (o Nepero)

Prendiamo in considerazione la serie

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dimostriamo che è una serie **convergente**, e chiamiamo il suo limite e . Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

Per dimostrare che una successione è convergente ci basta dimostrare che è (strettamente) crescente e limitata. Questo dal corollario della dimostrazione nella sezione 4.1.

1. Dimostriamo che (a_n) è (strettamente) crescente:

Lemma

È necessario, per questa dimostrazione, introdurre la *disuguaglianza di Bernoulli*. Tuttavia non la dimostreremo.

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$$

Per dimostrare che $(a_n)_n \nearrow$ ci basta dimostrare che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$
$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n =$$
$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)\right)^n$$

Usiamo la disuguaglianza di Bernulli. Però assicuriamoci prima di poterla usare:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{n^2 + 2n + 1} \geq -1 \\ \frac{1}{n^2 + 2n + 1} &\leq 1 \\ &\leq n^2 + 2n + 1 \\ n^2 + 2n &\geq 0\end{aligned}$$

Verificato! Ora usiamola:

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)\right)^n &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 + n\left(-\frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)\right) = \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + 2n + 1 - n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} = \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 1}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = 1 + \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1\end{aligned}$$

2. Dobbiamo provare ora che $(a_n)_n$ è limitata. Usiamo il binomio di newton:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} =\end{aligned}$$

È facile notare che:

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \leq 1$$

In quanto il denominatore sarà sempre più grande del numeratore (tranne per il primo termine) e quindi ogni singolo termine sarà ≤ 1 ed essendo tutti moltiplicati tra di loro il risultato sarà anch'esso ≤ 1 . Possiamo quindi concludere che:

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$$

Possiamo notare che:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1 \geq k(k-1) > 0 \quad \text{per } k \geq 2$$

$$\implies k! > k(k-1) \implies \frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Quindi sostituendo

$$< 2 + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] =$$

Le coppie di termini dentro la parentesi quadre condividono il primo elemento con il secondo della coppia precedente. Se si espandono le somme si cancellano tutti tranne il primo e l'ultimo:

$$= 2 + \left[1 - \frac{1}{n} \right] = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

Quindi:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque $(a_n)_n \nearrow$ *esuperiormentelimitata*. Ne consegue che, dal corollario presente nella sezione 4.1:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Si può dimostrare che $e \notin \mathbb{Q}$, quindi è un numero irrazionale e il suo valore è approssimativamente:

$$e \approx 2,71828182845904523536 \dots$$

5.3 Limite di una funzione

Definizione

Intorno sferico di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio r :

$$x_0 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} : r > 0$$

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

Che in pratica risulta:

$$I_r(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[$$

Definizione

x_0 si dice **punto di accumulazione** di $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ se:

$$\forall r > 0 : A \cap (I_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

Comunque prendo piccolo r c'è sempre un elemento di \mathbb{A} diverso da x_0 . L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme è indicato come segue (la D dovrebbe essere celtica??):

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un punto di accumulazione di } \mathbb{A}\}$$

Posso in pratica avvicinarmi indefinitivamente ad x_0 sempre rimanendo in \mathbb{A}

Proposizione:

$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 è un punto di accumulazione per \mathbb{A} se e solo se $\exists (a_n)_n \subseteq \mathbb{A}$ t.c.

$$1. a_n \neq x_0 \forall n$$

$$2. a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$$

Esempio: $\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \mathcal{D}(\mathbb{A}) = 0$$

Un insieme con $\mathcal{D} = \emptyset$ è un **insieme discreto**

5.3.1 SCHEMA RIASSUNTIVO LIMITI:

lim

- (i) $x \rightarrow x_0$
- (ii) $x \rightarrow x_0^+$
- (iii) $x \rightarrow x_0^-$
- (iv) $x \rightarrow +\infty$
- (v) $x \rightarrow -\infty$

$f(x)$

- 1. $l \in \mathbb{R}$
- 2. $+\infty$
- 3. $-\infty$

Tradotto:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}(f) : \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta & \text{(i)} \\ x_0 < x < x_0 + \delta & \text{(ii)} \\ x_0 - \delta < x < x_0 & \text{(iii)} \\ x > \delta & \text{(iv)} \\ x < -\delta & \text{(v)} \end{cases} \implies \begin{cases} |f(x) - l| < \epsilon & 1 \\ f(x) > \epsilon & 2 \\ f(x) < \epsilon & 3 \end{cases}$$

5.4 Algebra dei limiti

L'algebra dei limiti vale sia per le successioni che per le funzioni. Per comodità in seguito è riportata con il caso delle funzioni:

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tale che

$$f(x) \longrightarrow l_1 \quad g(x) \longrightarrow l_2$$

Allora:

$$f(x) + g(x) \longrightarrow \begin{cases} l_1 + l_2 & \text{se } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } l_1 = +\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R} \vee l_2 = +\infty) \\ -\infty & \text{se } l_1 = -\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R} \vee l_2 = -\infty) \\ \text{Stessa cosa se si scambia } l_1 \text{ con } l_2 \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x) \longrightarrow \begin{cases} l_1 \cdot l_2 & \text{se } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } l_1 = +\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}_+^* \vee l_2 = +\infty) \\ +\infty & \text{se } l_1 = -\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}_-^* \vee l_2 = -\infty) \\ -\infty & \text{se } l_1 = +\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}_-^* \vee l_2 = -\infty) \\ -\infty & \text{se } l_1 = -\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}_+^* \vee l_2 = +\infty) \\ \text{Stessa cosa se si scambia } l_1 \text{ con } l_2 \end{cases}$$

con $g(x) \neq 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \begin{cases} \frac{l_1}{l_2} & \text{se } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } l_1 \in \mathbb{R} \wedge l_2 = \pm\infty \\ \pm\infty & \text{se } l_1 = \pm\infty \wedge l_2 \in \mathbb{R}_+^* \\ \mp\infty & \text{se } l_1 = \pm\infty \wedge l_2 \in \mathbb{R}_-^* \\ \text{Stessa cosa se si scambia } l_1 \text{ con } l_2 \end{cases}$$

5.4.1 Forme indeterminate

Non essendo presenti tutti i casi nell'algebra dei limiti nascono quelle che vengono chiamate **forme indeterminate** in quanto corrispondono a situazione non univoca dove il risultato non si può stabilire a priori, ma è necessario trattare ogni caso singolarmente. Di seguito una lista di queste forme:

- $+\infty - \infty$
- $-\infty + \infty$
- $0 \cdot \pm\infty$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\frac{0}{0}$

NOTA: Le espressioni che contengono i simboli $+\infty$ e $-\infty$ sono solo **espressioni formali**, non hanno alcun valore matematico!

5.5 Teoremi dei limiti

Teorema

Teorema di **permanenza del segno**. Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad l > 0$$

Allora:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in A, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0 \implies f(x) > 0$$

Vale anche nel caso di $l < 0$.

Teorema

Teorema del **confronto**. $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \epsilon > 0 : g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [A \cup I_r(x_0)] \setminus x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Il limite per $x \rightarrow x_0$ esiste soltanto se sia il limite dx e il limite sx esistono e sono uguali.
Gerarchia degli infiniti e limite di un polinomio + dimostrazione. (27-10-2022)

5.6 Limiti Notevoli

I limiti notevoli sono particolari limiti che nonostante siano una forma indeterminata, il loro valore è conosciuto. In realtà molti limiti con forme indeterminate hanno un valore conosciuto perché attraverso tecniche e metodi di calcolo si riesce a ricavare. La differenza con i limiti notevoli però è che questi ultimi sono estremamente fondamentali per molte dimostrazioni e per molti esercizi. Inoltre comprendono solo funzioni elementari e vengono dimostrati una volta per tutte e poi vengono dati per buoni nel calcolo dei limiti.

Il limite notevole più famoso e sicuramente più importante è:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

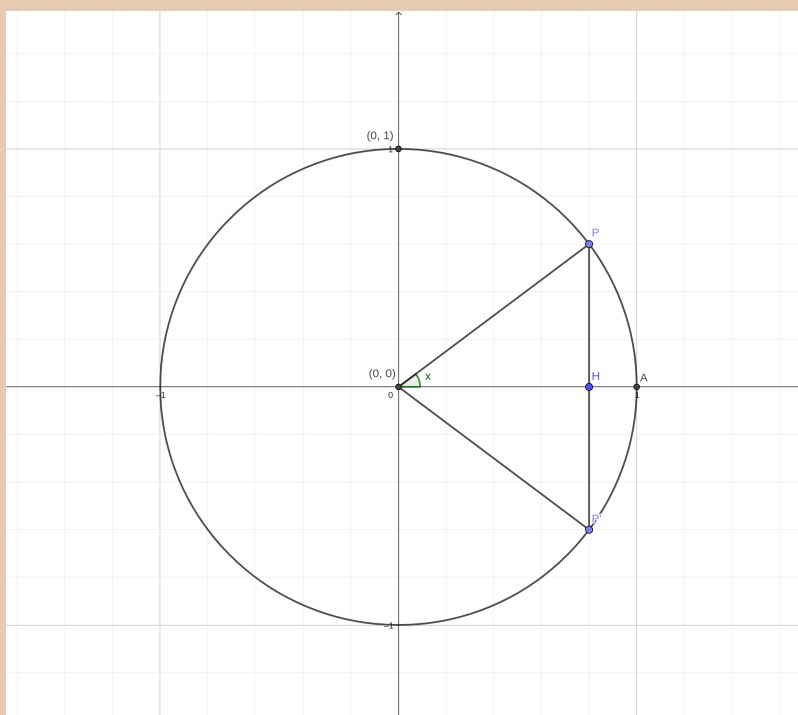
Per dimostrarlo è prima necessario dimostrare 2 lemmi:

Lemma

Dobbiamo dimostrare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

Costruiamo una circonferenza goniometrica come in figura:



Per la definizione di seno e coseno: $\sin x = \overline{HP}$ e $\cos x = \overline{OH}$. Inoltre $\overline{PP'} < \widehat{PP'}$ perché il "percorso" più breve tra due punti in geometria euclidea è il segmento che li congiunge. Facendo qualche semplificazione:

$$\begin{aligned} \overline{PP'} &< \widehat{PP'} \\ 2\overline{HP} &< 2\widehat{PA} \\ \overline{HP} &< \widehat{PA} \end{aligned}$$

Essendo segmenti, ed essendo quindi sempre positivi, riscriviamo la nostra disuguaglianza con il valore assoluto.

$$|\overline{HP}| < |\widehat{PA}|$$

Si noti che per la precedente definizione di seno, per la definizione di angolo in radianti e per il fatto che siamo sulla circonferenza goniometrica che ha raggio pari a 1:

$$|\sin x| < |x|$$

Ed essendo il valore assoluto sempre maggiore o uguale a zero:

$$0 \leq |\sin x| < |x|$$

Dal teorema del confronto (Sezione: 5.5) si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$$

e quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

Qed.

Lemma

Dobbiamo dimostrare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Facciamo qualche trasformazione algebrica e usiamo la duplicazione del coseno (Sezione: 3.12.9):

$$\cos x = \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

Ne consegue che:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

Dal lemma precedente abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin x| < |x| \\ 0 &\leq \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| < \left| \frac{x}{2} \right| \\ 0 &\leq \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) < \frac{x^2}{4} \\ 0 &\leq 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) < \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

E quindi facendo una sostituzione:

$$0 \leq 1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) < \frac{x^2}{2}$$

Sempre per il teorema del confronto (in quanto $x \rightarrow 0$ implica $\frac{x^2}{2} \rightarrow 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

Sostituendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x = 0$$

E quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Qed.

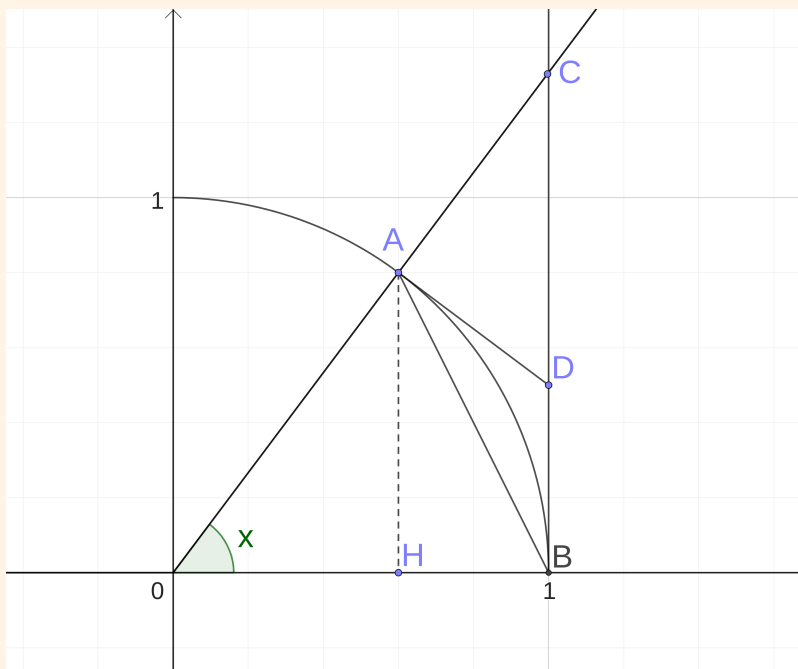
Finito di dimostrare i lemmi possiamo ora a dimostrare il limite notevole vero e proprio:

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Disegniamo un arco di circonferenza goniometrica (quindi con centro nell'origine e raggio 1). Il segmento \overline{AH} è perpendicolare a \overline{OB} . Il segmento \overline{AD} è perpendicolare a \overline{AC} .



Assumiamo per iniziare $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Per definizione di seno, coseno e tangente abbiamo che:

- $A(\cos x, \sin x)$
- $B(1, 0)$
- $C(1, \tan x)$

Notiamo che $\overline{AH} \leq \widehat{AB}$ in quanto $\overline{AB} \leq \widehat{AB}$, per il fatto che la distanza tra due punti in geometria euclidea è il segmento che li congiunge, e $\overline{AH} \leq \overline{AB}$ in quanto ABH è un triangolo rettangolo dove \overline{AB} è l'ipotenusa.

Dobbiamo inoltre notare che $\widehat{AB} \leq \overline{BC}$, in quanto $\widehat{AB} < \overline{BD} + \overline{AD}$ dalla geometria euclidea, inoltre $\overline{BD} + \overline{AD} < \overline{BD} + \overline{DC}$ in quanto \overline{AD} è un cateto del triangolo ACD dove \overline{CD} è l'ipotenusa. Basta infine notare che $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ e quindi:

$$\overline{AH} \leq \widehat{AB} \leq \overline{BC}$$

Essendo

$$\sin x = \overline{AH} \quad x = \widehat{AB} \quad \tan x = \overline{BC}$$

sostituendo diventa:

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

Visto che all'inizio abbiamo posto la condizione $0 < x < \frac{\pi}{2}$, per forza $\sin x > 0$. Possiamo quindi dividere tutto per $\sin x$:

$$\frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

Sia $\frac{x}{\sin x}$, sia $\frac{1}{\cos x}$ sono maggiori di zero per $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Possiamo quindi passare ai reciproci:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

In realtà, essendo $\sin x$ una funzione dispari e $\cos x$ una funzione pari:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

Questo vuol dire che la relazione scritta sopra vale anche per l'intervallo negativo $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Quindi:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

Per il lemma dimostrato precedentemente che prova che $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ e il teorema del confronto (Sezione: 5.5):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Qed.

Un secondo limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Un terzo limite notevole che deriva dal secondo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Dimostrazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Altri limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (0 < a, a \neq 1)$$

Il caso particolare in cui $a = e$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

5.7 Asintoti

Definizione

$x = k$ è un **asintoto verticale** per $f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \pm\infty$$

Definizione

$y = l$ si dice **asintoto orizzontale** se: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Vale ovviamente anche il caso a $-\infty$. Nella stessa funzione ci possono essere al massimo 2 asymptoti orizzontali.

5.8 Limiti di funzioni elementari

IL limite di un polinomio $p(x)$ è il polinomio calcolato nel punto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

Dimostrazione

Dimostriamo che il limite di un polinomio $p(x)$ è il polinomio calcolato nel punto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Partiamo dal caso base:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

Questo deriva direttamente dalla definizione di limite con $\delta = \epsilon$. Ora dall'algebra dei limiti:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0^2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} x^3 &= \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0^3 \\ &\vdots \\ \lim_{x \rightarrow x_0} x^j &= x_0^j \quad (j \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Se aggiungiamo un coefficiente ($a \in \mathbb{R}$) davanti al polinomio non cambia nulla, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ax^j = \lim_{x \rightarrow x_0} a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x^j = ax_0^j$$

Possiamo quindi provare una importante proprietà dei polinomi. Dato infatti un polinomio generico di grado n :

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

Vale che quello che vogliamo dimostrare, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^n \lim_{x \rightarrow x_0} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x_0^i = p(x_0)$$

Qed.

Di seguito un elenco di limiti delle funzioni elementari. Alcuni sono abbastanza ovvi quindi non ci sono dimostrazioni allegate:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$$

5.9 Confronto di infiniti

Se si hanno due funzioni che vanno a $+\infty$ si possono confrontare. Il confronto ci permette di determinare qualche delle due funzioni "va a infinito più velocemente". Si riesce quindi a stilare una sorta di "gerarchia" degli infiniti dove alcuni tendono a $+\infty$ più velocemente di altri. Questo è molto utile negli esercizi e soprattutto in analisi della complessità computazionale.

Date quindi due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendono entrambe a $+\infty$ se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & g \text{ cresce più velocemente di } f \\ +\infty & f \text{ cresce più velocemente di } g \\ l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \end{cases}$$

La gerarchia degli infiniti risulta quindi (dal più "lento" al più "veloce"):

1. $\ln_a x$ con $a > 1$
2. $\sqrt[n]{x}$
3. $p(x)$
4. a^x
5. x^x

Ne consegue quindi che, per esempio, $x^{100^{100}^{100}}$ è "più lento" di $(1,000001)^x$, cioè che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100^{100}^{100}}}{(1,000001)^x} = 0$$

5.10 Continuità di una funzione

Definizione

$x_0 \in A$ si dice **punto isolato** di $A \subseteq \mathbb{R}$ se $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$. In pratica se non è un punto di accumulazione

Definizione

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **continua** in $x_0 \in A$ se:

1. $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$ (cioè x_0 è un punto isolato di A)
2. $x_0 \in \mathcal{D}(A) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(Si noti che le due opzioni non possono valere contemporaneamente, sono quindi congiunte da un *or* invece che un *and*).

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua $\forall x \in A$, allora è continua su A . Si scrive

$$f \in \mathcal{C}(A)$$

dove $\mathcal{C}(A)$ è l'insieme delle funzioni continue su A , ed è definito come:

$$\mathcal{C}(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } x, \forall x \in A\}$$

La continuità è un grado molto importante per "classificare" la regolarità di una funzione. Inoltre moltissimi teoremi che riguardano una o più funzioni richiedono che queste siano continue. L'idea che ci sta dietro alla continuità è il voler classificare rigorosamente tutte quelle funzioni "belle" che puoi disegnare senza staccare la mano dal foglio².

Come vi diranno tutti i professori di analisi però, la definizione di continuità che si basa sul disegnare una funzione senza staccare la mano dal foglio è sbagliata. Questo perché vale solo per quelle funzioni che sono continue su tutto \mathbb{R} , mentre per quelle che sono continue nel loro dominio, ma proprio questo dominio è composto dall'unione di molteplici intervalli disgiunti, allora restano continue, ma per disegnarle è necessario comunque staccare la mano dal foglio.

²In realtà non è esattamente così, però è un buon modo per iniziare a capire l'argomento

Definizione

Il **dominio naturale** è il più grande sottoinsieme in cui una funzione è definita

Dai teoremi di algebra dei limiti segue che date due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in A \cap B$ allora:

- $f \pm g$ è continua in x_0
- $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 (se $g(x_0) \neq 0$)
- $c \in \mathbb{R} : c \cdot f$ è continua in x_0
- $|f|$ è continua in x_0
- $f \cdot g$ è continua in x_0
- $g(f(x_0))$ è continua in x_0 se $x_0 \in A \wedge f(x_0) \in B$ e f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$

Dimostrazione

Dimostriamo che $|x|$ è una funzione continua.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Prendiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, abbiamo due casi:

- Caso $x_0 \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \begin{cases} \text{se } x_0 > 0 : \lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = |x_0| \\ \text{se } x_0 < 0 : \lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} -x = -x_0 = |x_0| \end{cases}$$

- Caso $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| &= \lim_{x \rightarrow x^-} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| &= \lim_{x \rightarrow x^+} x = 0 \end{aligned}$$

Questo implica che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$$

E quindi dalla definizione di continuità, $|x|$ è una funzione continua su tutto \mathbb{R} .

Qed.

Dimostrazione

Dimostriamo che $\sin(x)$ è una funzione continua. In pratica dobbiamo provare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \quad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Possiamo riscrivere $\sin(x)$ come $\sin(x_0 + (x - x_0))$. Chiamiamo h il fattore $h := (x - x_0)$. Quando $x \rightarrow x_0$, $h \rightarrow 0$. Quindi possiamo riscrivere il limite da dimostrare nel seguente modo:

$$\lim_{x \rightarrow h} \sin(x_0 + h) = \sin(x_0) \quad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Avendo riscritto l'argomento del seno attraverso una somma, possiamo applicare le formule di

addizione del seno:

$$\sin(x_0 + h) = \sin(x_0) \cos(h) + \sin(h) \cos(x_0)$$

Sostituendo quindi nel limite (in quanto per $h \rightarrow 0$, $\cos(h) \rightarrow 1$ e $\sin(h) \rightarrow 0$):

$$\lim_{x \rightarrow h} \sin(x_0 + h) = \lim_{x \rightarrow h} \sin(x_0) \cos(h) + \sin(h) \cos(x_0) = \sin(x_0)$$

Qed.

Dimostrazione

Dimostriamo che $\cos(x)$ è una funzione continua. In pratica dobbiamo provare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0) \quad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Con lo stesso trucco usato nella dimostrazione precedente ci riduciamo dimostrare:

$$\lim_{x \rightarrow h} \cos(x_0 + h) = \cos(x_0) \quad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Usando le formule di addizione del coseno:

$$\cos(x_0 + h) = \cos(x_0) \cos(h) - \sin(x_0) \sin(h)$$

Sostituiamo nel limite e calcoliamo (in quanto per $h \rightarrow 0$, $\sin(h) \rightarrow 0$ e $\cos(h) \rightarrow 1$):

$$\lim_{x \rightarrow h} \cos(x_0 + h) = \lim_{x \rightarrow h} \cos(x_0) \cos(h) - \sin(x_0) \sin(h) = \cos(x_0)$$

Qed.

La **continuità della tangente** nel suo dominio naturale è dovuta dal fatto che la tangente può essere definita come rapporto tra *seno* e *coseno*, e il rapporto di funzioni continue è anch'esso continuo. L'**esponenziale** è continuo. Tutte le **funzioni inverse delle funzioni elementari** sono continue ($\ln x$, \sqrt{x} , $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$).

5.10.1 Funzioni definite a tratti

Per le funzioni definite a tratti il caso è un po' più particolare perché non si sa a priori se sono continue o no. In generale il metodo per scoprire se sono continue è il seguente. Prendiamo una funzione f definita a tratti in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \leq a) \\ h(x) & (x > a) \end{cases}$$

Di solito sia g che h sono funzioni formate da composizioni di funzioni elementari, che rendono automaticamente continue le due funzioni. Il problema sorge quindi nel punto di separazione a . Per verificare che sia continua la funzione f bisogna fare in modo che sia g sia h si avvicinino ad a con lo stesso valore, cioè che abbiano lo stesso limite per $x \rightarrow a$.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x)$$

Inoltre è richiesto che il limite coincida con il valore della funzione $f(a)$. In questo caso non abbiamo fatto il test perché il valore della funzione era compreso nella funzione g in quanto era definito per \leq invece che un minore stretto. Se però questo non fosse il caso va inserito $f(a)$ nelle uguaglianze dei limiti scritti sopra.

6 Teoremi generali

Questa sezione vuole raccogliere alcuni teoremi importanti che però non appartengono a nessuna sezione precedente in particolare in quanto richiedono l'uso di molti argomenti presi da sezioni differenti. Ho quindi congegnato che era meglio dedicare loro una sezione a parte, sperando che il mio intento di organizzazione possa essere apprezzato da quelli che leggeranno.

6.1 Teorema degli zeri

Il teorema degli zeri è estremamente importante in analisi. In pratica afferma che se una funzione è continua e ha un punto in cui è positiva (quindi è sopra l'asse delle ascisse) e un punto in cui è negativa (quindi è sotto l'asse delle ascisse), per forza tra quei due punti ce ne sarà un terzo in cui la funzione tocca l'asse delle ascisse. È abbastanza facile verificare che è vero in quanto se si vuol tracciare una linea continua che in punto è sopra l'asse delle ascisse e in un altro è sotto, per forza si è costretti ad intersecare tale asse. Per dimostrare questo teorema abbiamo però bisogno di due lemmi preliminari:

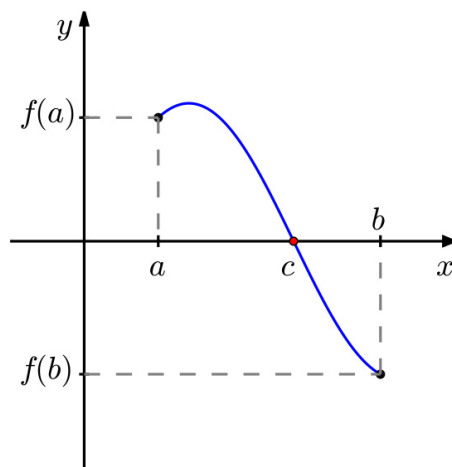


Figure 15: Rappresentazione grafica del teorema degli zeri

Lemma

Data una successione $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, se

$$\forall n, a_n < 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \wedge l \leq 0$$

Si noti che questo lemma vale anche per il caso in cui $\forall n, a_n > 0$, che implica $l \geq 0$. Dimostriamo ora il lemma^a. Dobbiamo provare che:

$$\forall n, a_n < 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \leq 0$$

Fisso n numero t.c $\forall n, a_n < 0$ (H) per dimostrare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \leq 0$$

Per assurdo assumiamo^b $l > 0$ (H2) e riduciamoci a dimostrare il falso. Grazie alla definizione di limite possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} \implies |a_n - l| < \epsilon$$

Se espandiamo $|q_n - l| < \epsilon$ ci troviamo con:

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

Ed essendo che questa condizione deve valere $\forall \epsilon > 0$, scegliamo $\epsilon = \frac{l}{2}$. Quindi deve valere che:

$$a_n > l - \epsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$$

Per (H2) $\frac{l}{2} > 0$ ma per (H) $\forall n, a_n < 0$. ASSURDO in quanto a_n non può contemporaneamente essere maggiore di 0 e minore di 0.

Qed.

^aLa seguente dimostrazione è stata fatta dal prof in maniera imbarazzante, quindi la esplicito secondo la logica classica per renderla più formale

^bAbbiamo usato il potere sconfinato della RAA (Coen approves)

Lemma

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A \cap \mathcal{D}(A)$ e inoltre f deve essere continua in x_0 :

$$\forall (a_n)_n \subseteq A : a_n \rightarrow x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$$

Teorema

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, } f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in]a, b[: f(c) = 0$$

Un paio di osservazioni utili sul teorema:

- La continuità di f è fondamentale in quanto se non lo fosse il teorema non potrebbe valere. Si consideri infatti il caso di una funzione definita a tratti nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (0 \leq x \leq 2) \\ 1 & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

Quest'ultima rispetta tutte le specifiche del teorema ($f(0) \cdot f(4) < 0$) tranne la continuità (non è infatti continua in $x = 2$). Se si osserva il grafico (Figura: 16) si nota subito che questa funzione non ammette nessun punto in cui si annulla come vorrebbe il teorema degli zeri.

- La seconda osservazione riguarda la quantità di punti in cui si può annullare la funzione. Come si legge dal teorema, il punto c è garantito che esista (\exists) ma nessuno garantisce che è unico. Ci possono essere infatti un numero arbitrario di punti in cui la funzione si annulla, basti pensare al grafico delle funzioni goniometriche $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Dimostrazione

Questa dimostrazione a differenza delle altre è di tipo *costruttivo*, cioè oltre a dimostrare il teorema fornisce un algoritmo di calcolo per trovare il punto c .

Assumiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. L'idea dietro questa dimostrazione è appunto trovare un

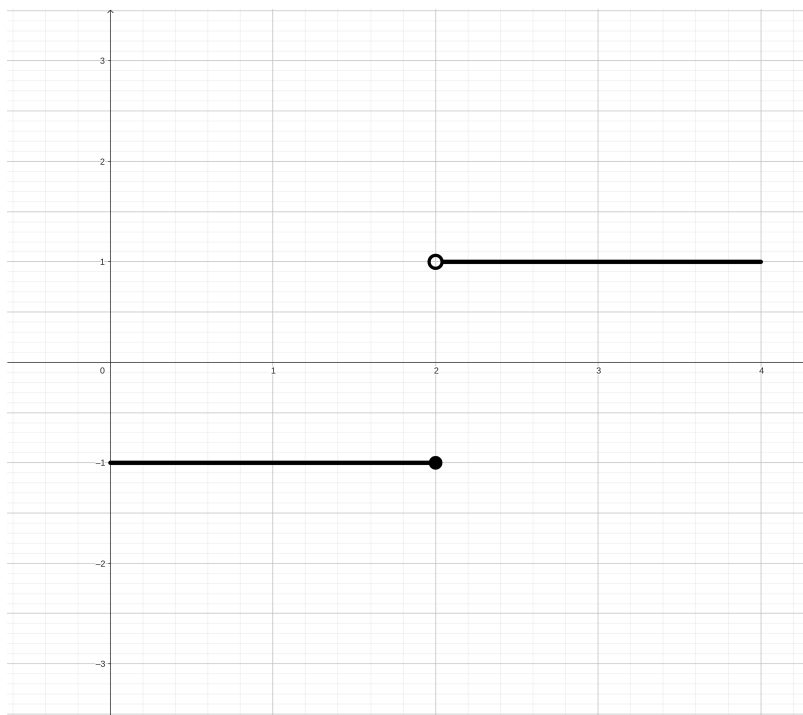


Figure 16: Funzione definita a tratti per far vedere che la continuità nel teorema degli zeri è una condizione necessaria

algoritmo di calcolo che permetta di determinare il punto c . Avendo un punto a in cui la funzione è **negativa** e un punto b in cui la funzione è **positiva** ci deve essere un punto che giace tra a e b in cui la funzione si annulla. Per trovarlo andiamo a "tentativi" dividendo l'intervallo a metà con la formula:

$$\frac{a+b}{2}$$

Da qui possiamo avere 3 casi:

1. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. In questo caso abbiamo trovato il punto c proprio perché la funzione si annulla. Quindi abbiamo finito!

$$c = \frac{a+b}{2}$$

2. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. In questo caso non abbiamo trovato il punto c , ma bensì la funzione ci ha restituito un punto negativo. Essendo il punto $f(b)$ ancora maggiore di 0 per ipotesi, possiamo applicare nuovamente questa procedura (cioè di suddividere l'intervallo a metà), però cambiando il punto a , in quanto adesso diventa:

$$a_2 := \frac{a+b}{2}$$

3. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$. L'idea di questo punto è identica a quella del punto 2, semplicemente invece che assegnare un valore diverso ad a , lo assegniamo a b perché questa volta il valore

della funzione è positivo invece che negativo.

$$b_2 := \frac{a+b}{2}$$

Con i punti 2 e 3, riassegnando il valore ad a o b , restringiamo l'intervallo su cui vogliamo applicare questo algoritmo per trovare il punto c . Ed essendo che ad ogni iterazione ci avviciniamo sempre di più, a forza di stringere l'intervallo prima o poi arriveremo a c .

Nota: Ad ogni iterazione, se la funzione non si annulla, dobbiamo sostituire il valore del punto al corrispettivo punto a o b in modo che la funzione mantenga lo stesso segno. Questo perché se invertissimo i punti ci troveremmo in un caso in cui $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$, cosa che ovviamente annullerebbe il teorema. Quindi nel caso del punto 2 in cui sostituiamo il nuovo punto ad a , lo facciamo soltanto perché per ipotesi $f(a) < 0$ e la funzione nel nuovo punto è negativa. Se per ipotesi avessimo scelto $f(a) > 0$ avremmo dovuto sostituire il nuovo punto in b , e vice versa.

Essendo che dobbiamo ripetere l'algoritmo, il caso n -ario diventa:

1. $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$ Fine: $c = \frac{a_n + b_n}{2}$
2. $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ Ieriamo nuovamente: $a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$
3. $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ Ieriamo nuovamente: $b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$

Se l'algoritmo termina al passo $p \in \mathbb{N}$ significa che:

$$f\left(\frac{a_p + b_p}{2}\right) = 0 \quad \text{e quindi:} \quad c = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Altrimenti la procedura non termina: in quaso avremo costrutito due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ contenute in $[a, b]$. Scriviamo di seguito le proprietà di queste 2 successioni:

- i. $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \leq b_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- ii. $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$
- iii. $f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- iv.

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \quad \forall n$$

Se si espandono i vari passaggi si vede che in realtà ad ogni itarazione si divide l'intervallo iniziale $[a, b]$ in 2:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^3} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

A questo punto vogliamo dimostrare che:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c \\ f(c) = 0 \end{cases}$$

Dal punto (i) e (ii) ricaviamo che sia $(a_n)_n$ sia $(b_n)_n$ sono **limitate**.

$$(a_n)_n \subseteq [a, b] \implies a_n \nearrow \forall n \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(b_n)_n \subseteq [a, b] \implies b_n \nearrow \forall n \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$$

Dal punto (iv) e da quanto abbiamo ricavato possiamo fare il limite che tende a $+\infty$ di $b_n - a_n$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \\ \beta - \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Quindi $\beta = \alpha$ e le due successioni hanno lo stesso limite! Abbiamo quindi provato che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n := c$$

Ci resta da dimostrare che $f(c) = 0$. Da quanto appena dimostrato e dal primo lemma di questa prova:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c)$$

Poiché $a_n \rightarrow c$. Inoltre dal punto (iii) sappiamo che $f(a_n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Usando il secondo lemma preliminare alla prova:

$$f(c) \leq 0$$

Se facciamo lo stesso per $f(b_n)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$$

Avendo contemporaneamente $f(c) \leq 0$ e $f(c) \geq 0$:

$$f(c) = 0$$

Qed.

6.2 Radici di un polinomio di grado dispari

Teorema

Ogni polinomio di grado dispari ha almeno un radice reale.

Corollario: Tutti i polinomi di grado dispari assumono **tutti i valori reali**. Questo implica che una funzione che è definita tramite un polinomio di grado dispari è una funzione **suriettiva**, in quanto ha come immagine \mathbb{R} .

È facile ricordarsi questo teorema perché tutti i polinomi di grado dispari hanno il termine di grado maggiore (che in quanto dispari) è soggetto al segno dell'argomento del polinomio. Cioè x^3 avrà lo stesso segno di x , mentre questo non vale per i polinomi di grado pari in quanto x^8 avrà sempre segno positivo. Se quindi si fanno i limiti per $+\infty$ e $-\infty$ di un polinomio di grado dispari, da una parte andrà sempre a $+\infty$ e dall'altra andrà sempre a $-\infty$. Ed essendo i polinomi funzioni continue, sono costretti a toccare tutti i valori dell'asse delle ordinate almeno una volta. Inoltre, visto che da una parte hanno valori positivi, dall'altra negativi e sono continui, esiste per forza un punto in cui si annullano (dal

teorema degli zeri) e sarà proprio lì la loro radice.

6.3 Teorema di Weierstrass

6.3.1 Formulazione 1

Definizione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$

1. $x_0 \in A$: x_0 si dice punto di **massimo assoluto** di f se:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A$$

2. $x_0 \in A$: x_0 si dice punto di **minimo assoluto** di f se:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

Teorema

Una funzione continua, in un intervallo chiuso e limitato, ammette il massimo e il minimo assoluti della funzione.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x) \leq f(x_0) =: M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x) \geq f(x_1) =: m \quad \forall x \in [a, b]$$

L'immagine di f nell'intervallo $[a, b]$ corrisponderà a $[m, M]$.

6.3.2 Formulazione 2

Teorema

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists M = \max f([a, b])$$

$$\exists m = \min f([a, b])$$

7 Derivate

7.1 Teorema di Fermat

Il seguente teorema enuncia che la derivata nei minimi e nei massimi si annulla.

Teorema

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, un punto di massimo o di minimo $x_0 \in]a, b[$ e inoltre f è derivabile in x_0 , allora:

$$f'(x_0) = 0$$

È essenziale che il punto x_0 si all'interno dell'intervallo! Inoltre l'annullarsi della derivata prima in un punto x_0 è condizione **necessaria** affinché x_0 sia un punto di massimo o di minimo relativo, ma **non è sufficiente** in generale (es. x^3 in $x = 0$).

7.2 Teorema di Rolle

Teorema

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1. f è continua su $[a, b]$
2. f è derivabile su $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Allora:

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

7.3 Teorema di Lagrange

Teorema

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1. f è continua su $[a, b]$
2. f è derivabile su $]a, b[$

Allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Corollario: se una funzione ha derivata sempre zero è costante.

7.4 Teorema di Cauchy

Teorema

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1. f, g è continua su $[a, b]$
2. f, g è derivabile su $]a, b[$
3. $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$

Allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

7.5 I teoremi di De L'Hôpital

8 Dimostrazioni (non essenziali)

8.1 Quadrato di un numero dispari

Dimostrazione

Ipotesi: n dispari $\implies n^2$ dispari.

n dispari $\implies \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Se sostituiamo $2k^2 + 2k$ con un qualsivoglia numero $m \in \mathbb{N} : m = 2k^2 + 2k$ l'espressione potremmo riscriverla come $2m + 1$, che è ovviamente un numero dispari.

Tesi: n dispari $\implies n^2$ dispari.

Q.e.d.

Come si vede nella sezione 2.2, questa dimostrazione ci permette di dire che, in quanto $p \implies q = \bar{q} \implies \bar{p}$, n^2 pari $\implies n$ pari.

9 Esempi degli argomenti trattati

9.1 Sommatoria

Sezione teorica di riferimento: 3.10.1

$$\sum_{k=0}^5 k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\sum_{i=4}^6 3^i = 3^4 + 3^5 + 3^6 = 1053$$

$$\sum_{i=1}^2 i^i + 5i - i^4 = 1^1 + 5 \cdot 1 - 1^4 + 2^2 + 5 \cdot 2 - 2^4 = 3$$