Señales periódicas complejas

Teorema de Fourier

Instrumento 1 - UNTREF

Suma de sinusoides
Repaso

de **igual** f

- obtenemos como resultado una sinusoide de la misma f
- si las fases son iguales, se suman las amplitudes
- si están en contrafase (Δϕ=180º), se restan las amplitudes

Suma de sinusoides
Repaso

de **diferente** f ($\Delta f < 16$ Hz)

se producen batidos de primer orden y tenemos:

- $f_b = f_1 - f_2$

  frecuencia de batido, indica la frecuencia con la cual la señal resultante es modulada en amplitud

- $f_r = (f_1 + \ldots + f_n) / n$

  frecuencia resultante (promedio de las frecuencias que intervienen), es la frecuencia que tiene la señal modulada en amplitud

Suma de sinusoides

en relación armónica

una sucesión armónica es un caso particular de sucesión aritmética cuya constante es igual a la base, es decir que todos los elementos son múltiplos del 1ro.

-sucesión de base 6:

6, 12, 18, 24, 30, 36, […]   *n* x 6

-sucesión de base 300:

300, 600, 900, 1200, 1500, 1800, […]   *n* x 300

la diferencia entre dos valores consecutivos de una sucesión es igual al valor de la base, un ejemplo según la sucesión anterior:

1800 - 1500 = 300

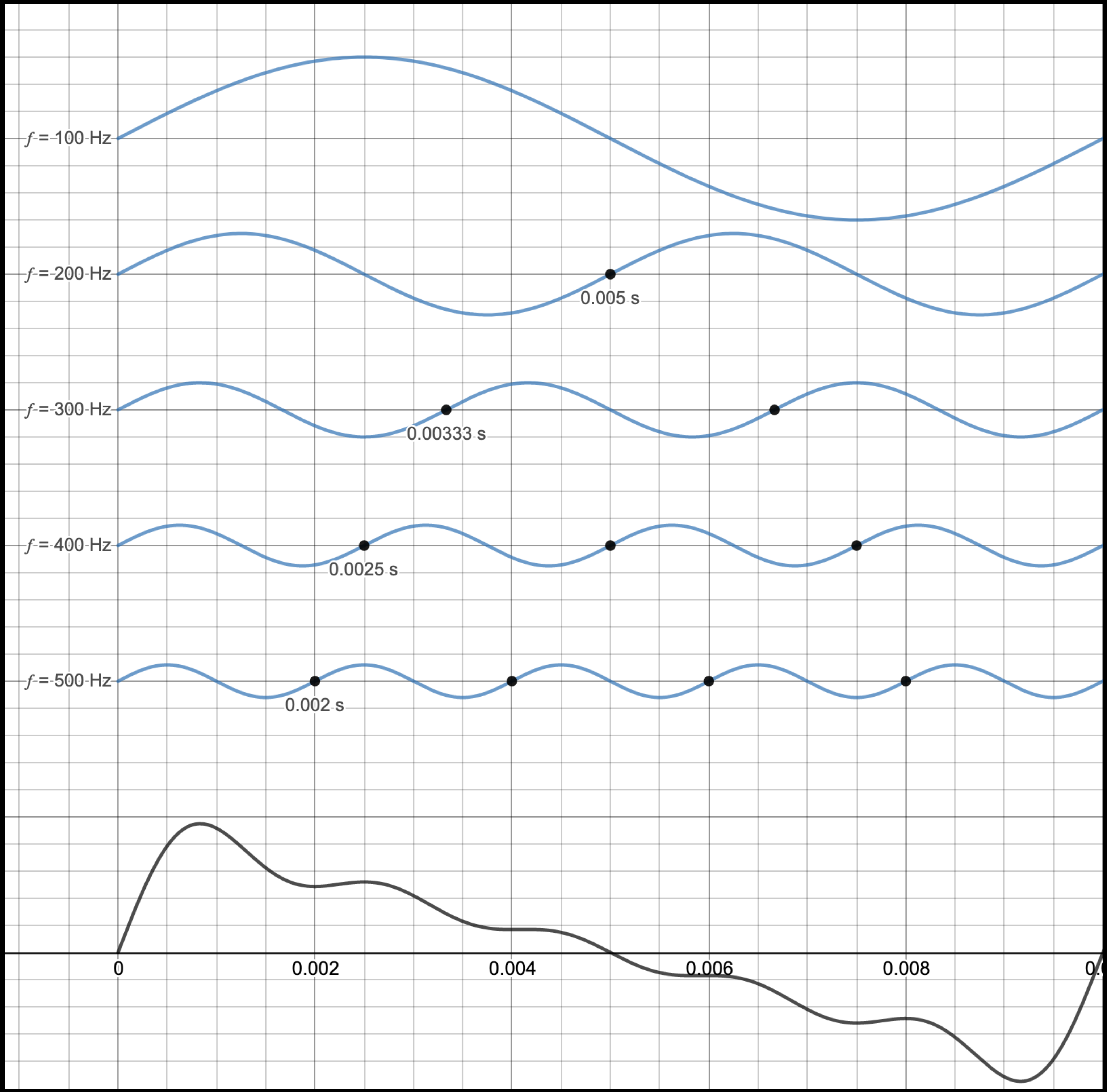
Suma de sinusoides armónicas

Gráfico temporal (primeros 5 armónicos de onda diente de sierra de f = 100 Hz)

observemos los periodos de los armónicos:

- 2º armónico: 1/2 que el 1º
- 3º armónico: 1/3 que el 1º
- 4º armónico: 1/4 que el 1º
- 5º armonico: 1/5 que el 1º
- […]

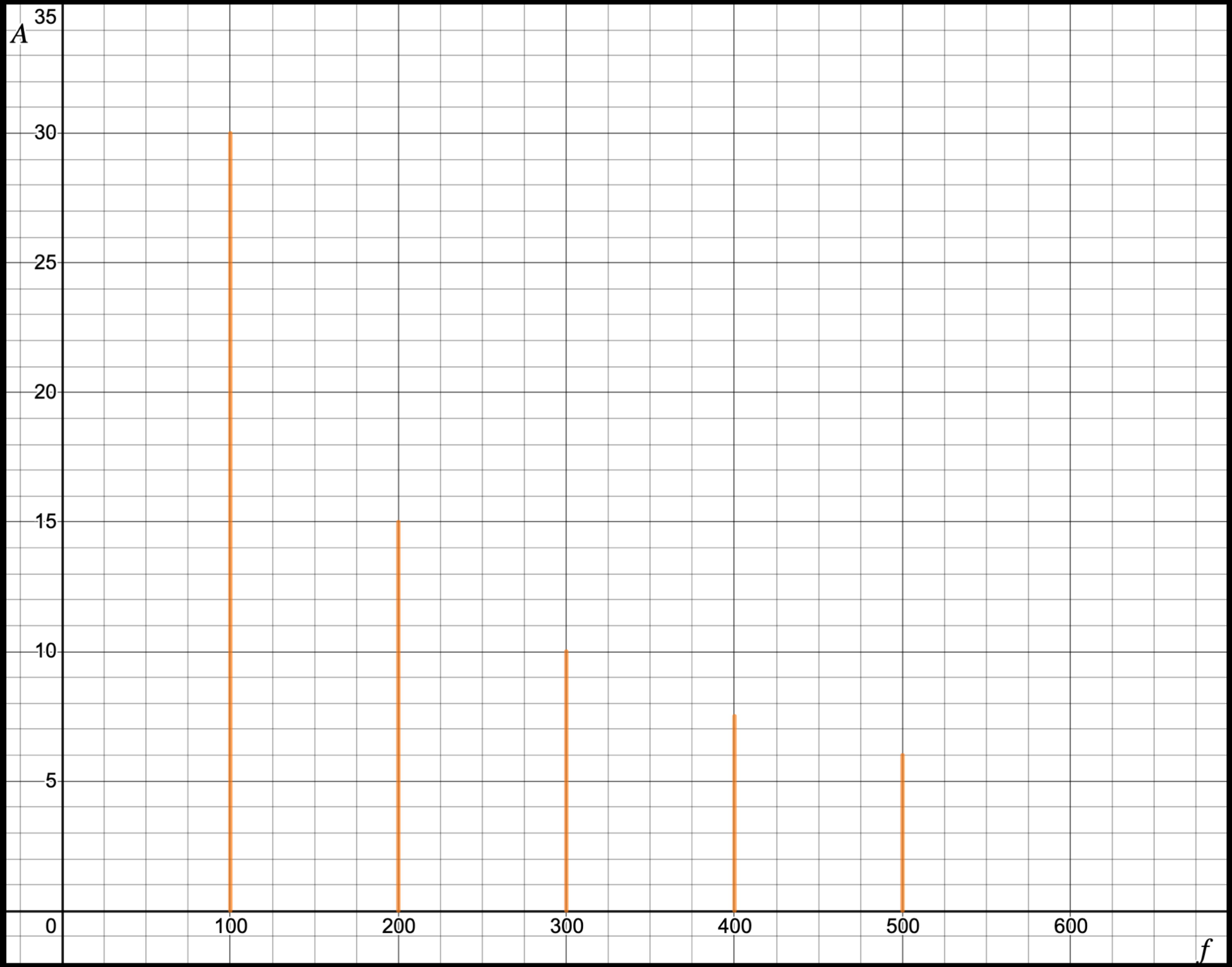
la suma de los armónicos da como resultado una señal cuyo periodo es igual al del 1º armónico



Suma de sinusoides armónicas

Gráfico espectral (primeros 5 armónicos de onda diente de sierra de f = 100 Hz)

si observamos esos 5 armónicos en un gráfico espectral podemos ver con precisión sus amplitudes



Series de Fourier

- Fourier desarrolló el concepto trabajando en resolver la ecuación del calor (transferencia de calor), sobre estudios previos de *Euler*, *d'Alembert* y *Bernoulli*

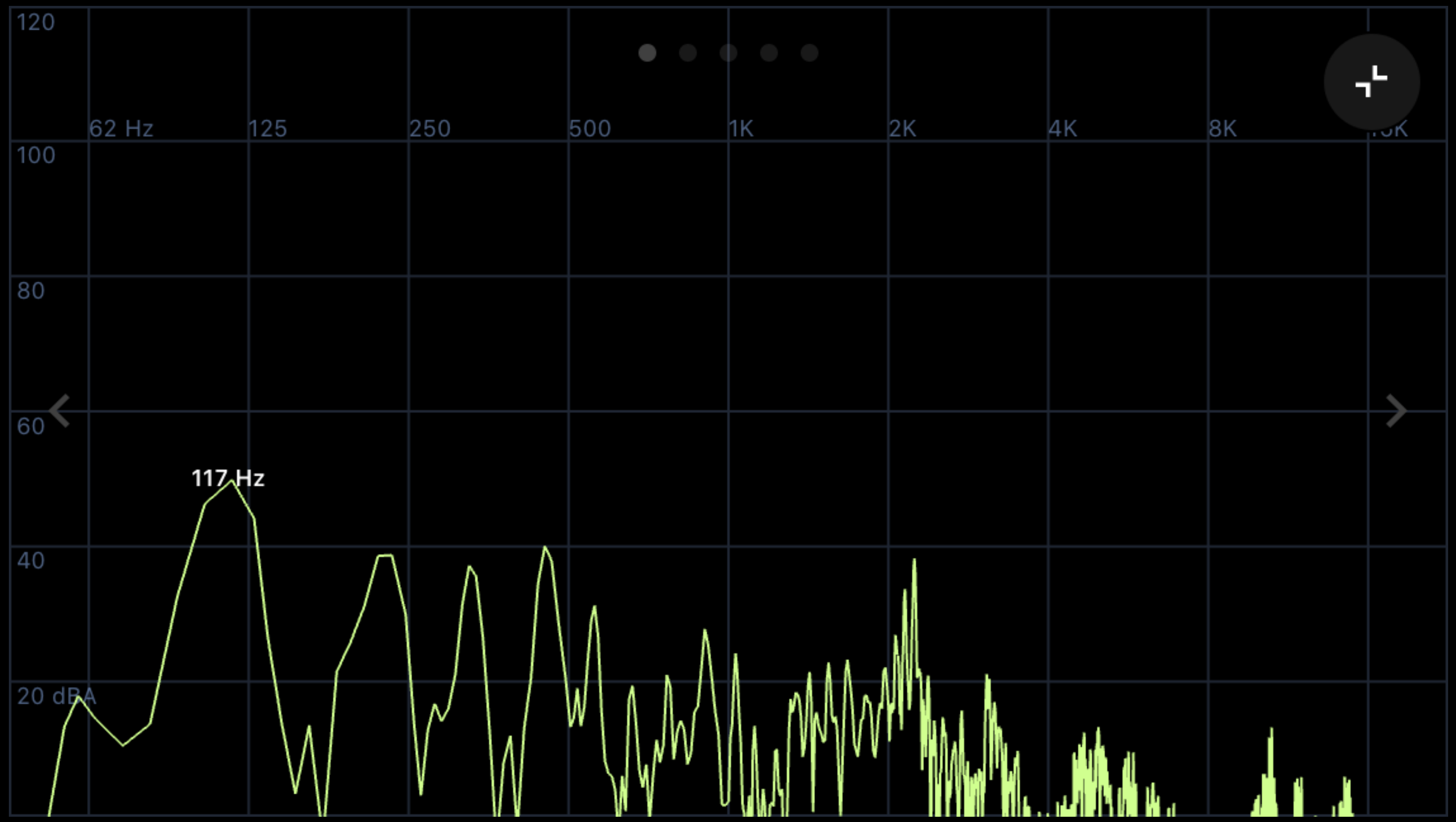
- luego *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* y *Bernhard Riemann* mejoraron la expresión de Fourier, con más herramientas matemáticas disponibles

- la Transformada de Fourier descompone cualquier señal en una suma de sinusoides. La Transformada Discreta de Fourier trabaja con valores acotados y la Transformada Rápida de Fourier es un algoritmo que la calcula en el campo digital (FFT - fast Fourier transform)

«Toda función periódica de periodo P puede descomponerse en una suma de sinusoides armónicas, de amplitudes y fases adecuadas, cuyo primer armónico o fundamental posea periodo P»

Teorema de Fourier, BASSO (2001)

- FFT permite pasar una señal del campo temporal al campo espectral, de las frecuencias (RTA)
- hoy en día está muy extendido su uso y cualquier computadora (incluyendo teléfonos) la puede realizar



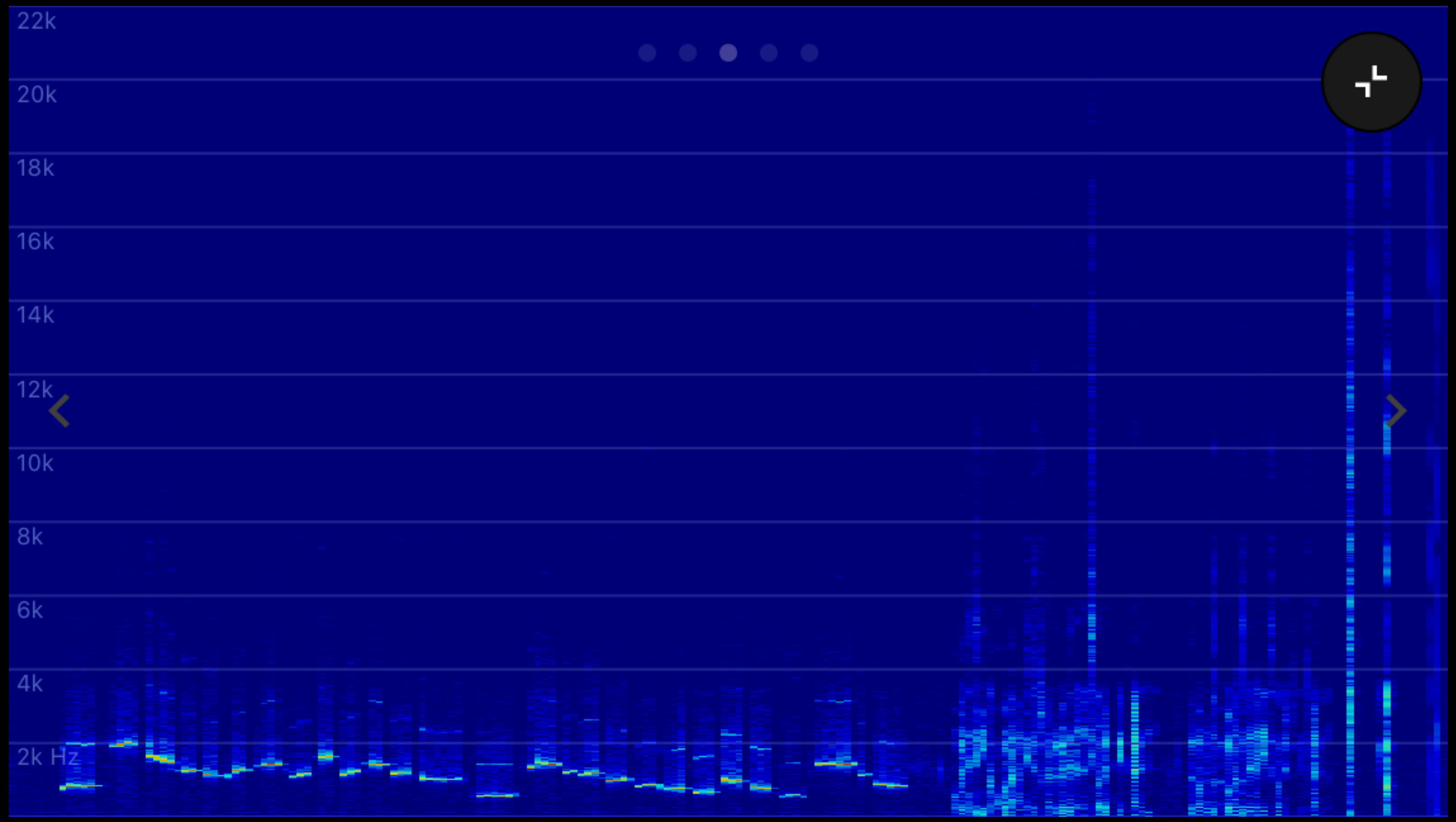
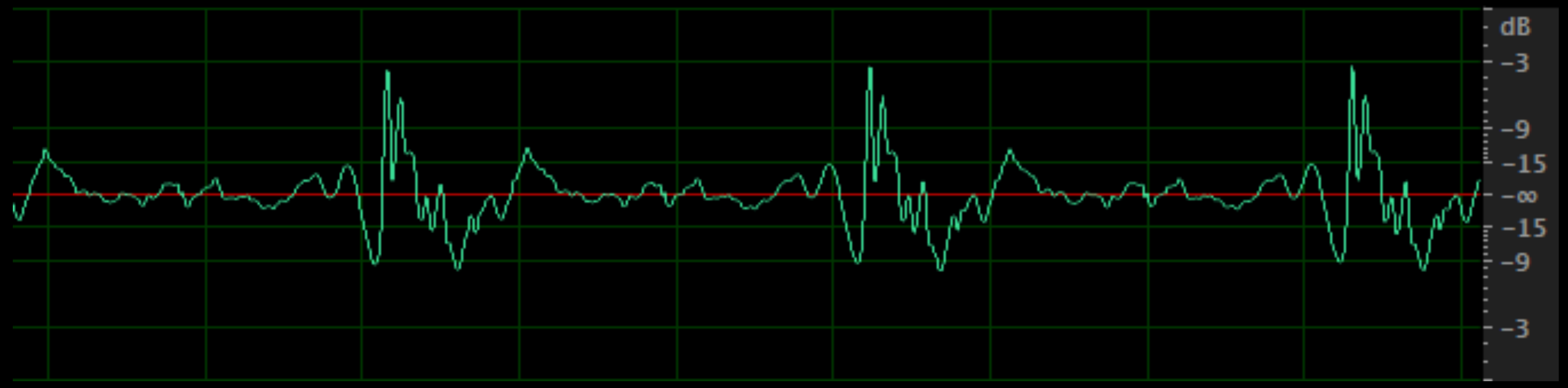
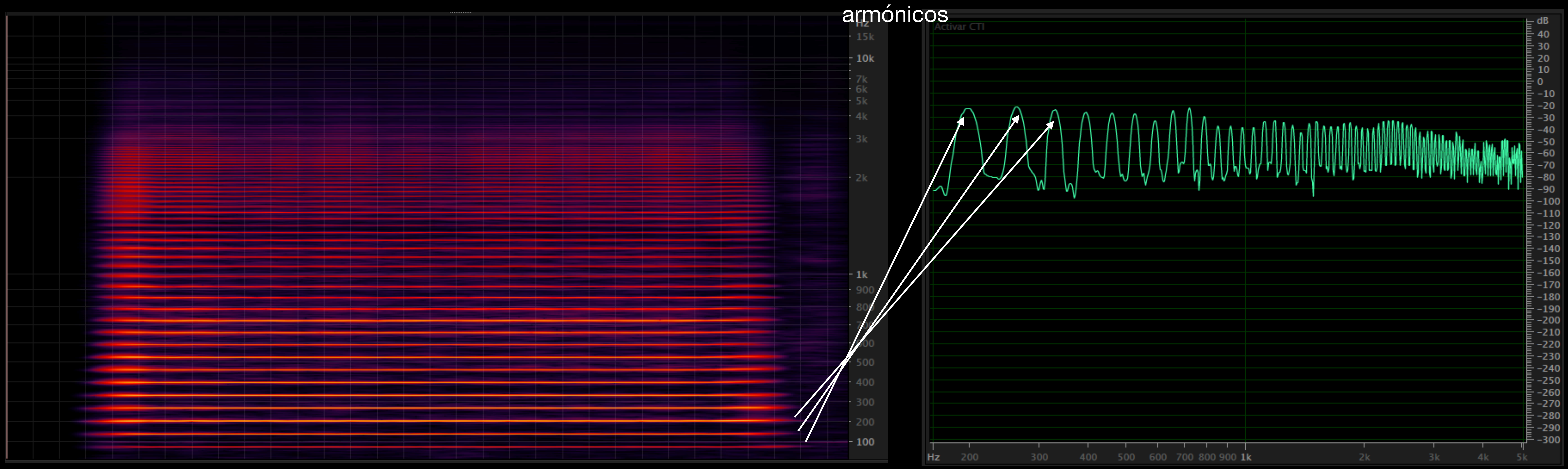


gráfico temporal



sonograma

gráfico espectral



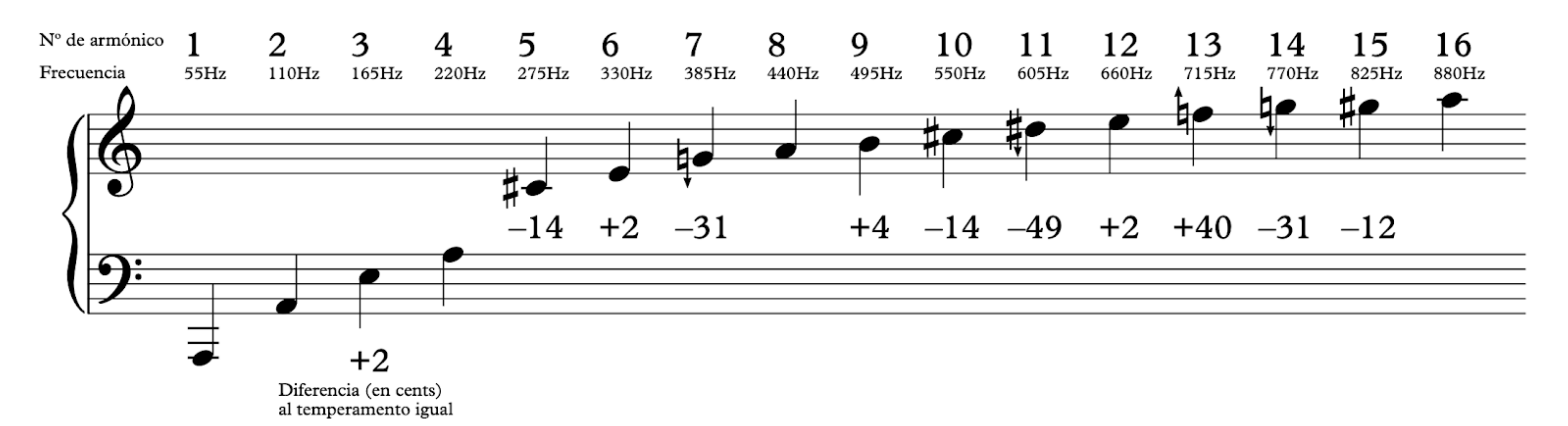
Análisis y síntesis
Fourier

- de la misma forma en que la herramienta de Fourier permite analizar señales, podemos proceder a la inversa y sintetizarlas
- si sumamos sinusoides en relación armónica, obtendremos señales periódicas complejas, cuya frecuencia será la de la fundamental

> «Toda función periódica de periodo P puede construirse a partir de una suma de sinusoides cuyas frecuencias formen una serie armónica de fundamental $f_1 = 1/P$. Cada sinusoide debe poseer la adecuada amplitud y fase, que se determinará a partir de la función periódica a sintetizar»

Basso (2001)

Serie armónica
notación musical

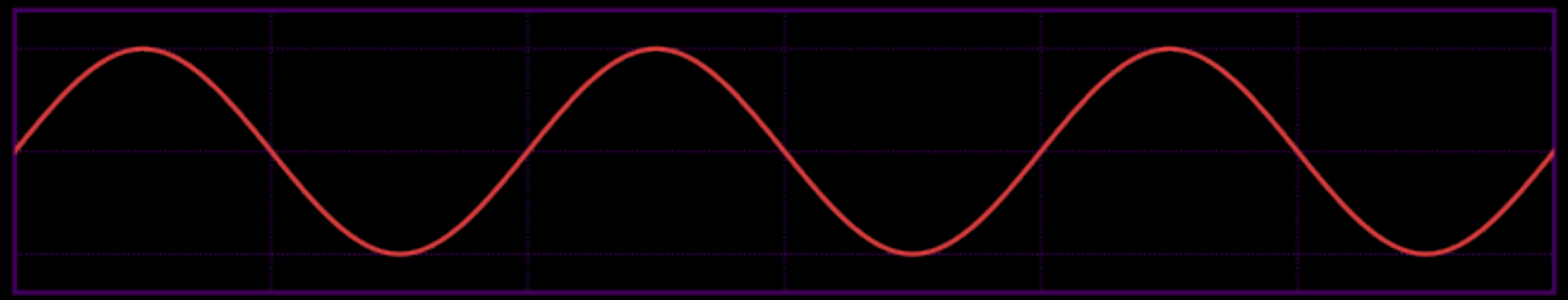


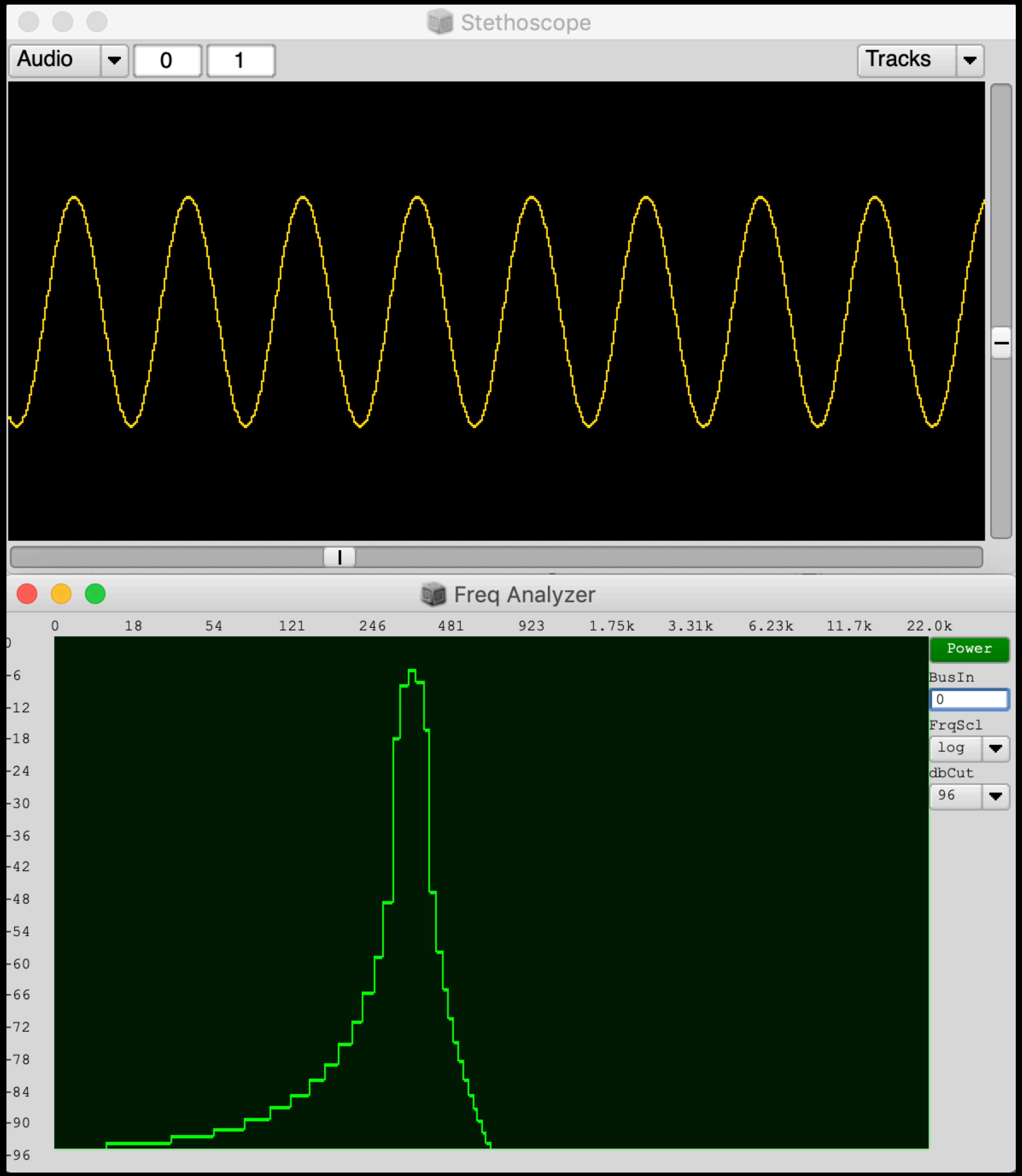
Prototipos de señales periódicas

Señales prototipo

sinusoide

- una única componente de frecuencia





Señales prototipo

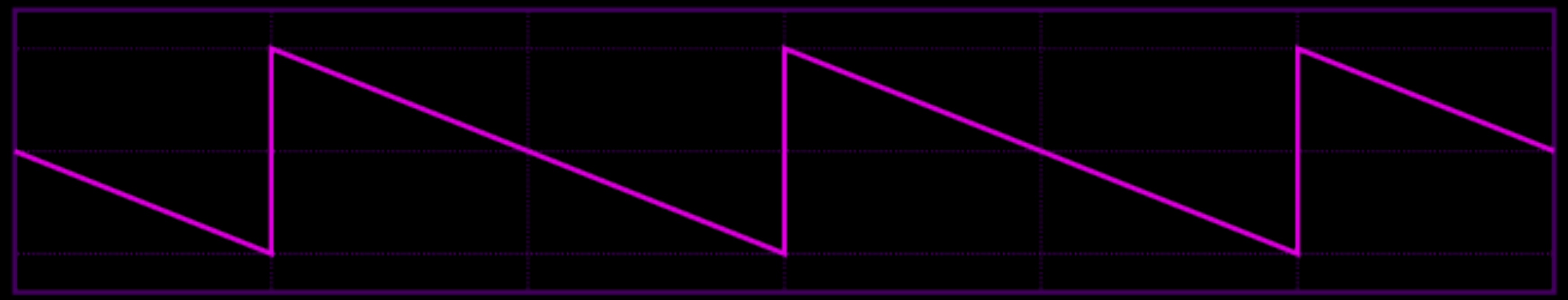
diente de sierra

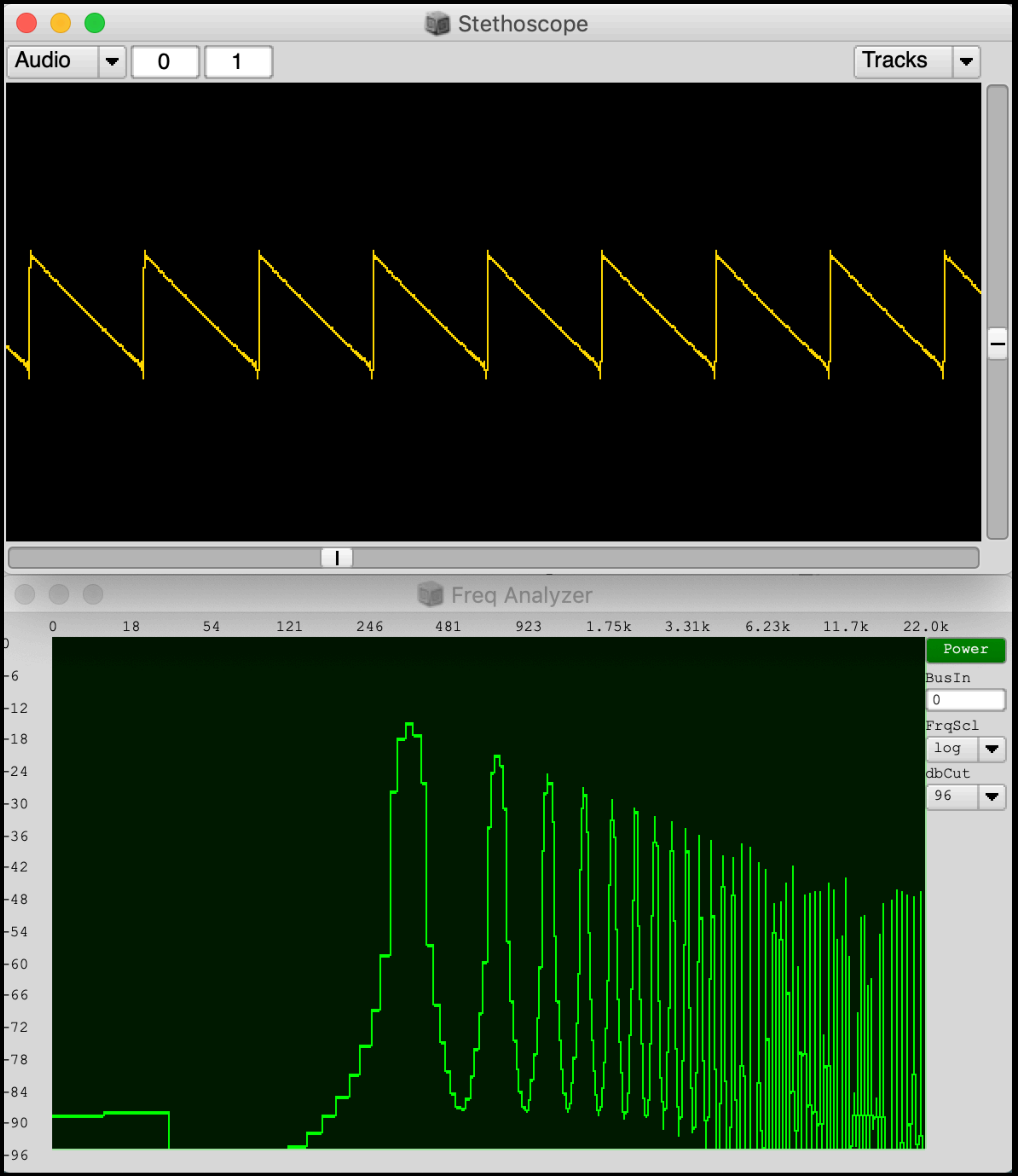
- infinitos armónicos
- su amplitud decrece hacia los armónicos superiores

$$A_n = A_1 / n$$

(decae 6 dB por octava)

https://www.desmos.com/calculator/ajyhkyav6n?lang=es





Señales prototipo

cuadrada

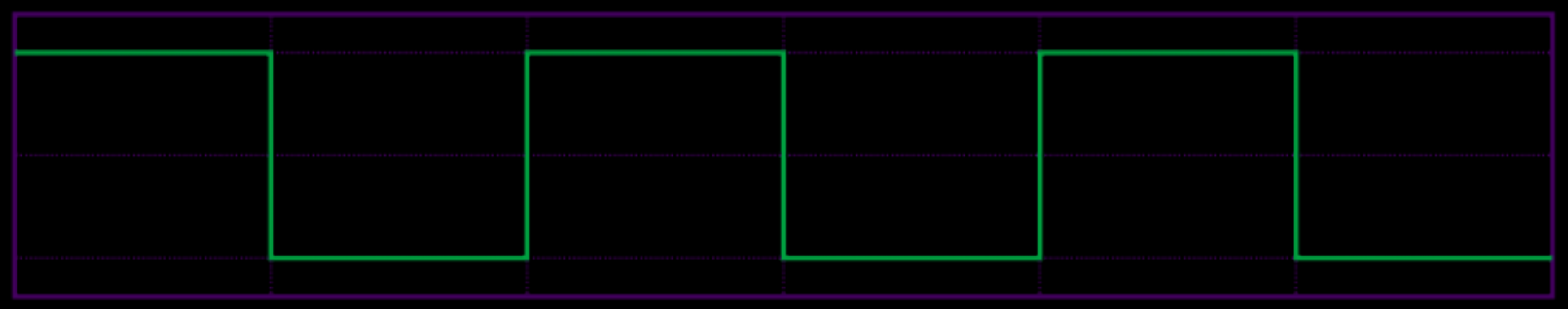
- infinitos armónicos (impares)
- su amplitud decrece hacia los armónicos superiores

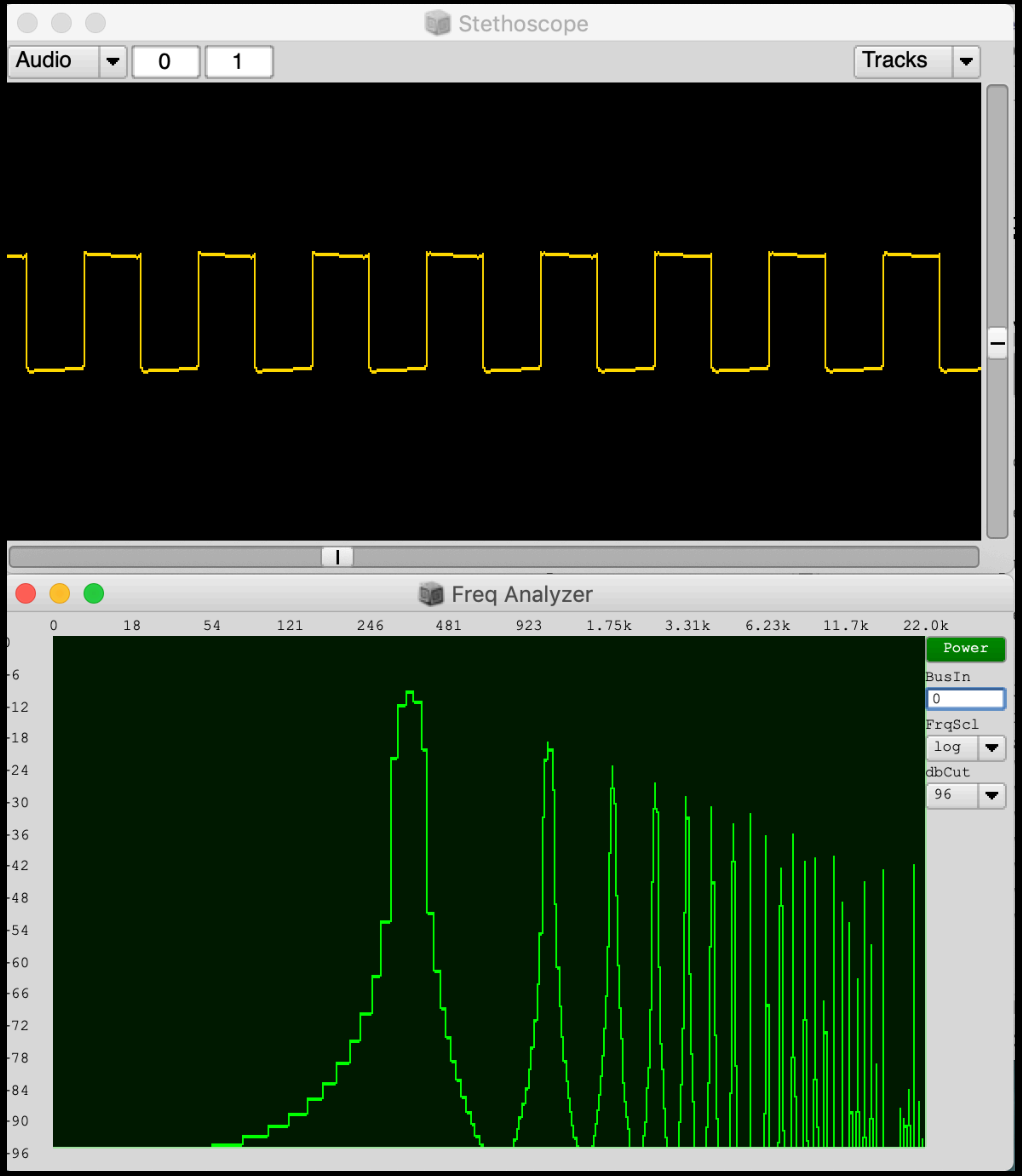
$$A_{n\ (\mathrm{impar})} = A_1 / n$$

$$A_{n\ (\mathrm{par})} = 0$$

(decae 6 dB por octava)

https://www.desmos.com/calculator/gutch4tc1i?lang=es





Señales prototipo

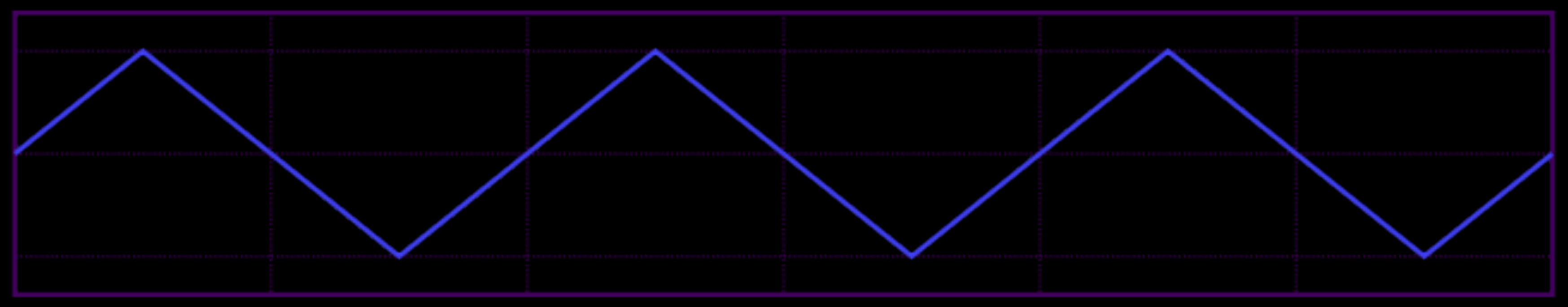
triangular

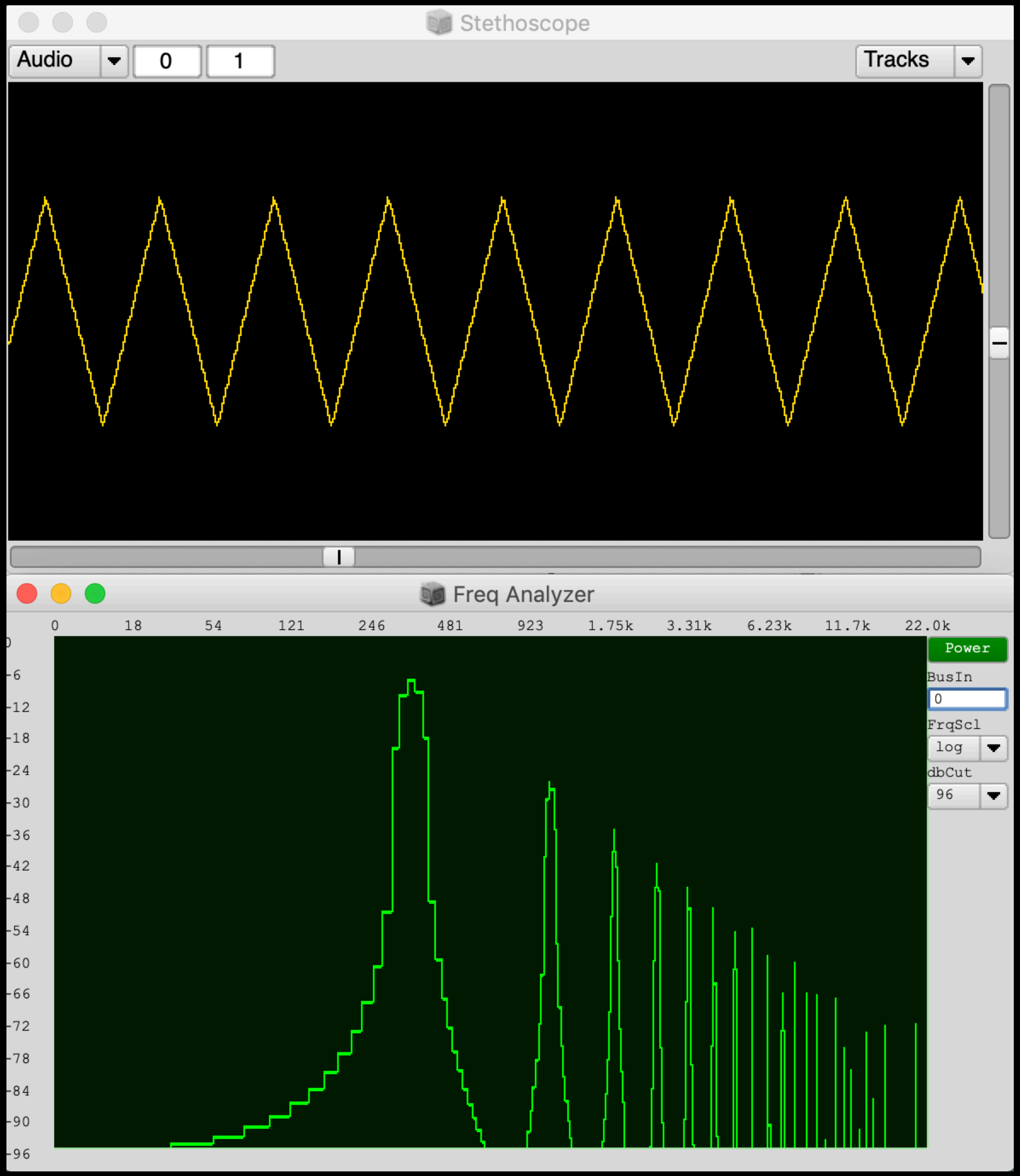
- infinitos armónicos (impares)
- su amplitud decrece hacia los armónicos superiores, en forma más pronunciada

$$A_{n\ (\text{impar})} = A_1 / n^2$$

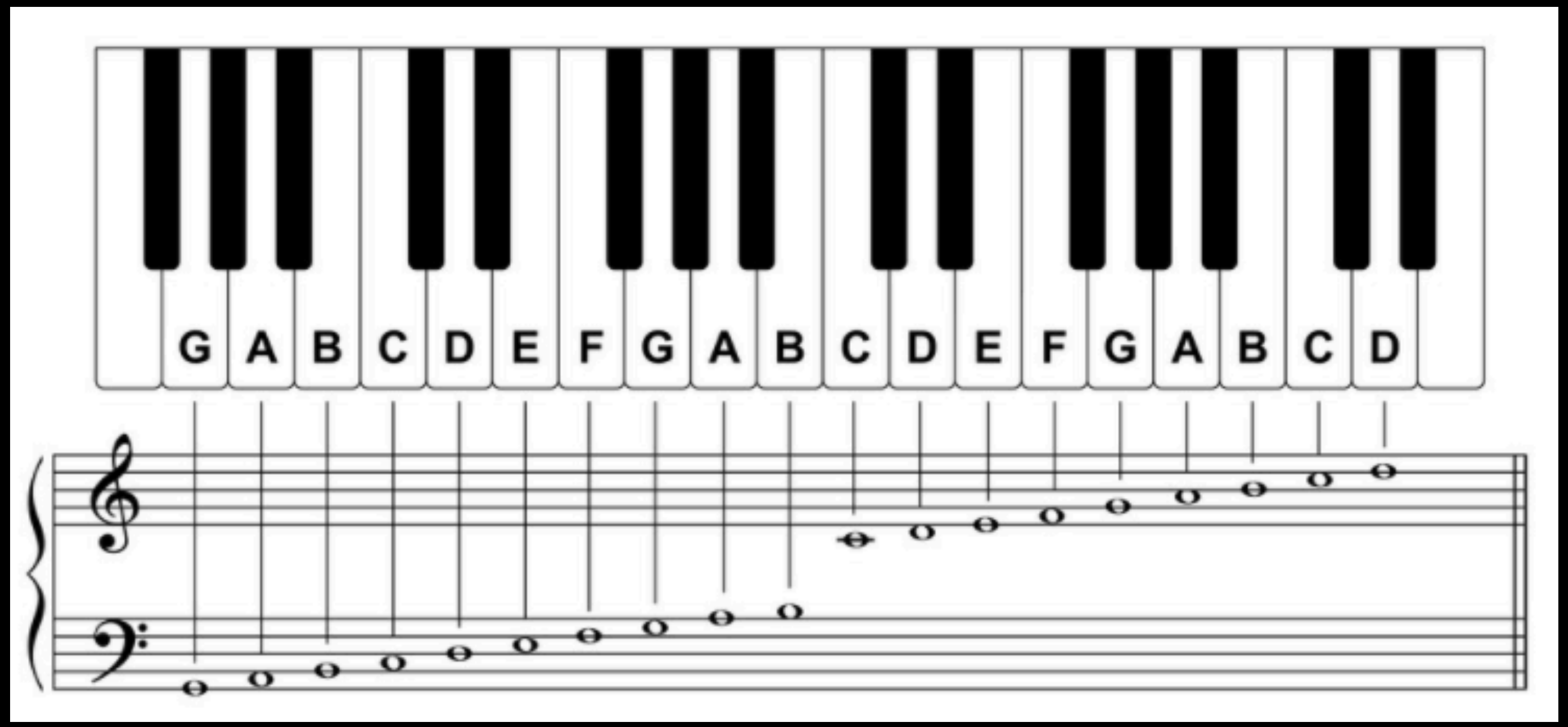
$$A_{n\ (\text{par})} = 0$$

(decae 12 dB por octava)





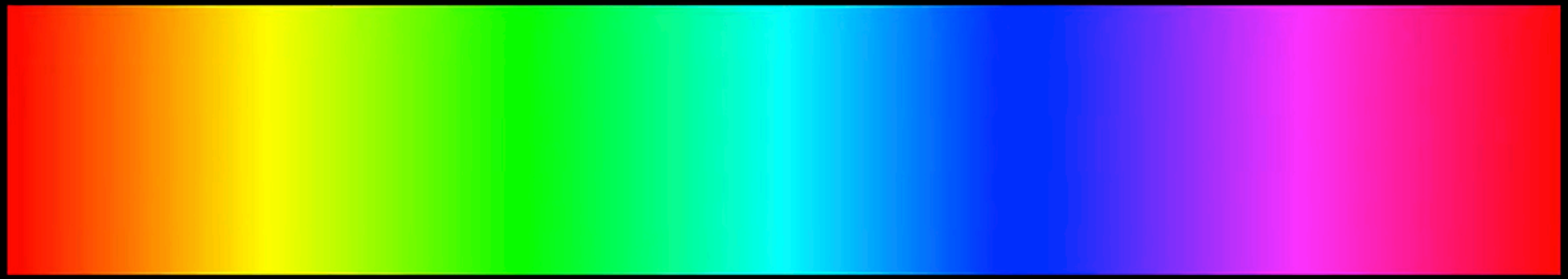
Las alturas
altura tonal



- la altura tonal de un sonido es el parámetro que nos permite asignarle un valor preciso de tono o nota musical
- asociamos la altura tonal (nota musical) con la frecuencia de la fundamental de Fourier
- es más fácil, para los humanos, reconocer la altura tonal de una señal periódica compleja que de una sinusoide (nuestro oído realiza análisis espectral al procesar las señales acústicas que le llegan)
- un sonido con alta *tonicidad* define muy bien la altura tonal

Las alturas

altura espectral

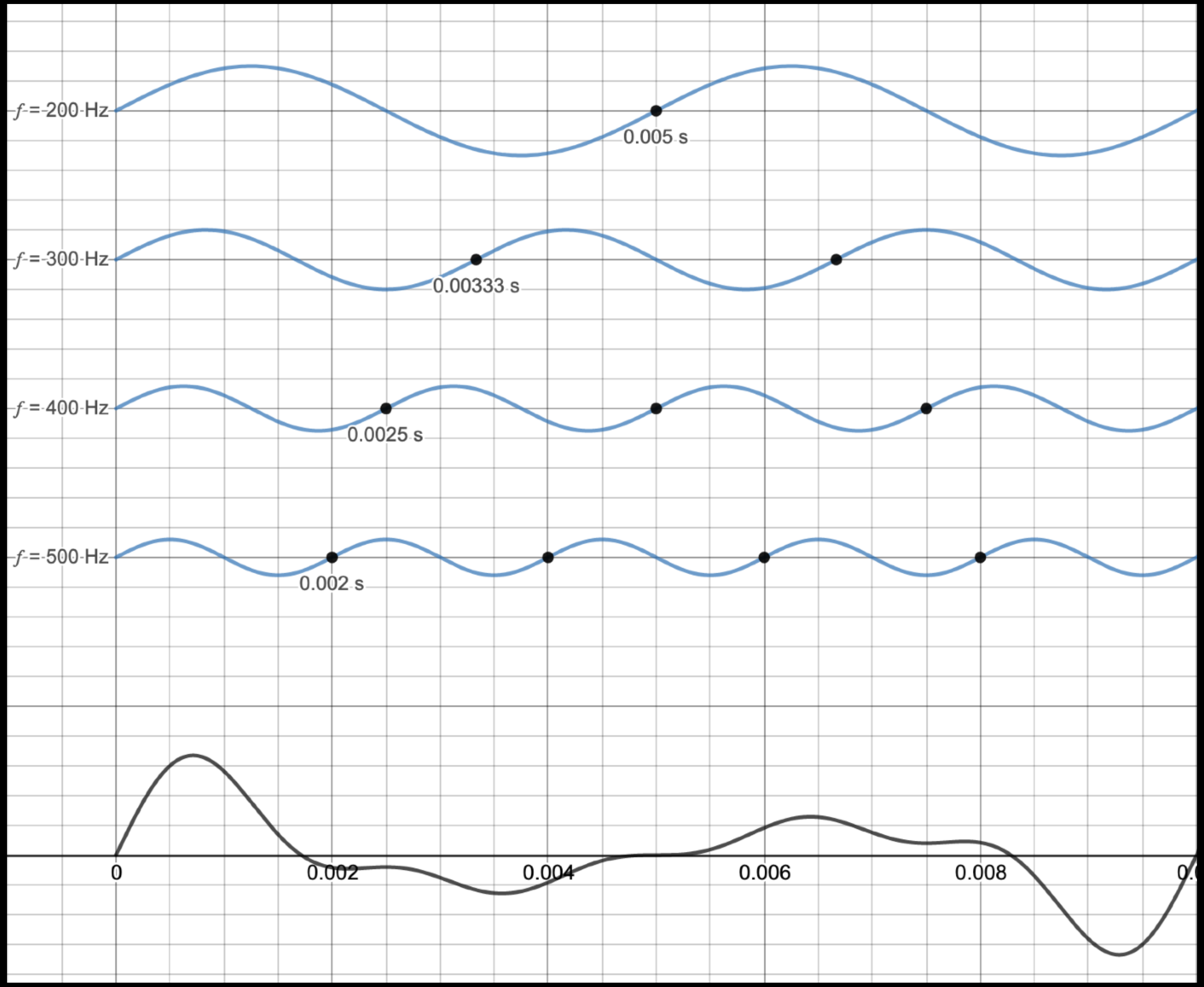


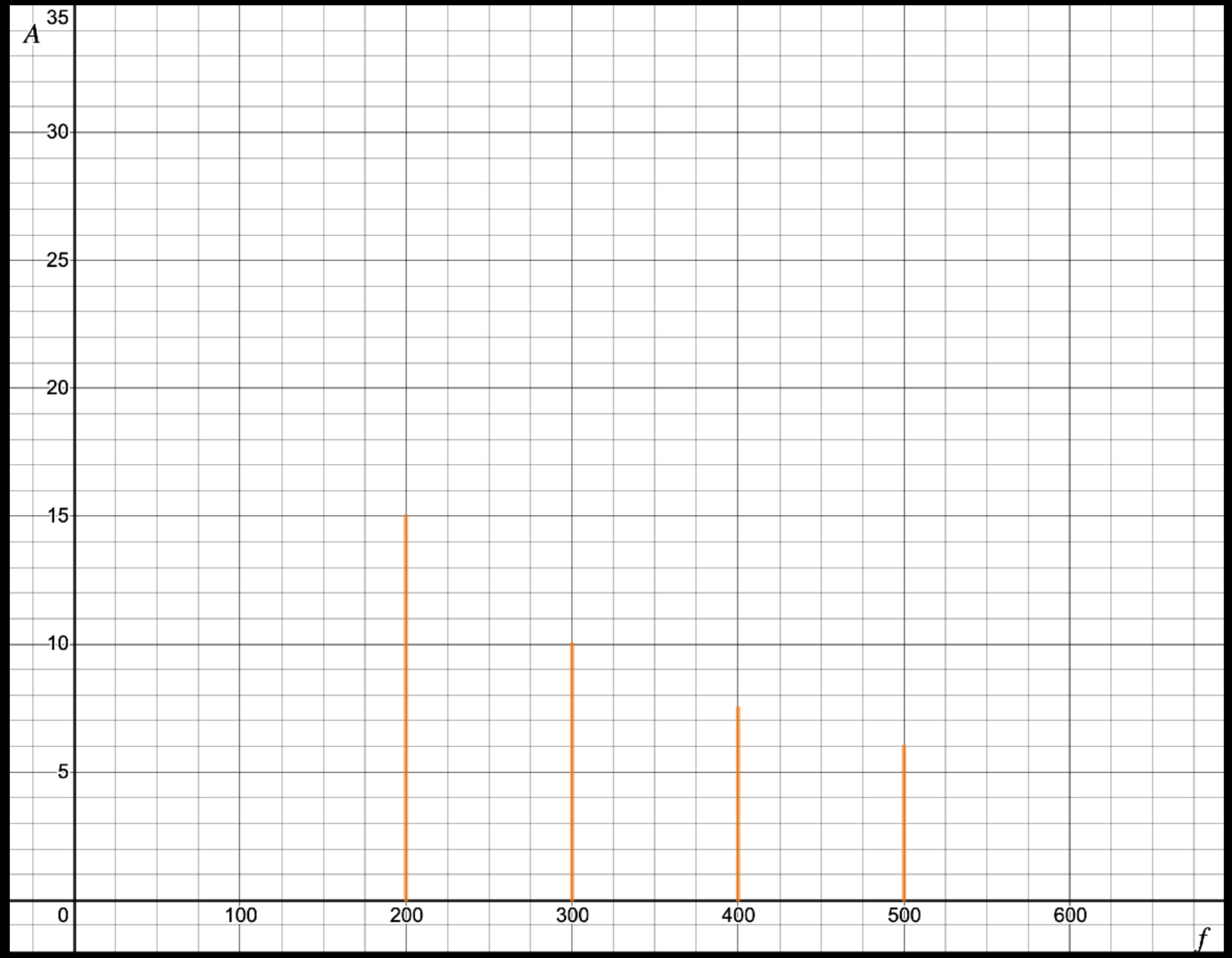
- la altura espectral de un sonido está dada por cómo se distribuye la energía de la señal en función de las frecuencias de sus componentes
- asociamos la altura espectral con ciertos aspectos del timbre
- los espectros pueden ser armónicos, como en las señales prototipo, aproximarse, o no serlo
- un alto grado de *armonicidad* define un sonido con alta *tonicidad*

Reconstrucción de fundamental

Fundamental de Fourier / fundamental ausente

- aún cuando el o los primeros armónicos de una serie de Fourier no estén presentes, la suma de los demás armónicos tendrá el periodo de la fundamental de esa serie y percibiremos la altura tonal caracterizada por la frecuencia de dicha fundamental
- esto puede ocurrir por diversas razones en la práctica: rango de frecuencias de los parlantes, poca energía presente en las fundamentales, distancia a la fuente, …



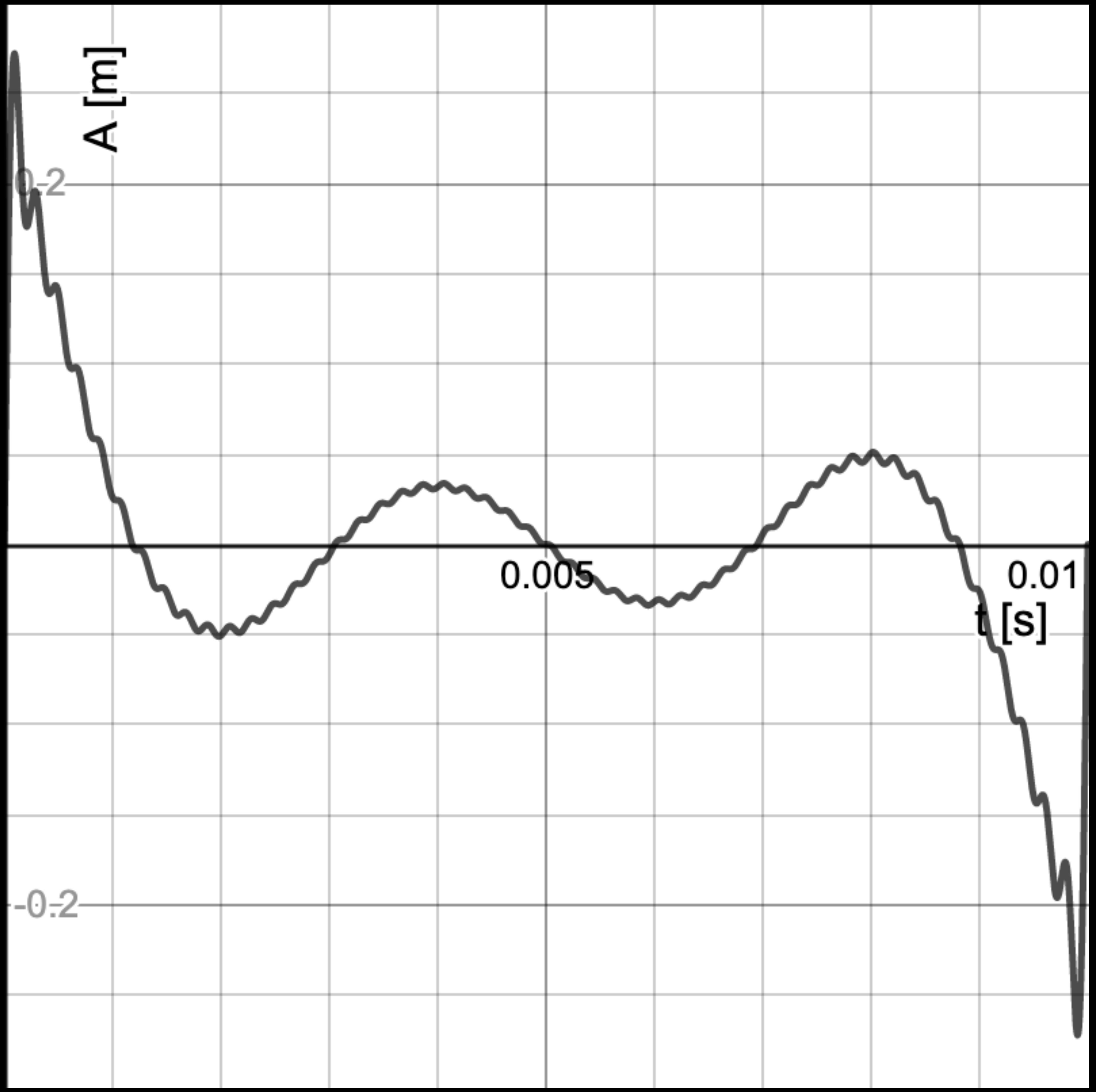


Reconstrucción de fundamental

Fundamental de Fourier / fundamental ausente

- gráfico de un ciclo de una onda diente de sierra con 50 armónicos, sin los armónicos 1 y 2

- en estos casos la altura tonal percibida no se ve afectada, sin embargo la altura espectral es drásticamente modificada



Sonidos resultantes

Diferenciales

- los *diferenciales* son uno de los sonidos de combinación más habituales
- ante cierta potencia y rango de frecuencia de dos estímulos, percibimos un tercer sonido resultante, cuya frecuencia es igual a la diferencia de frecuencias entre los sonidos de los estímulos