逻辑回归算法

1.逻辑斯蒂分布（logistic distribution）

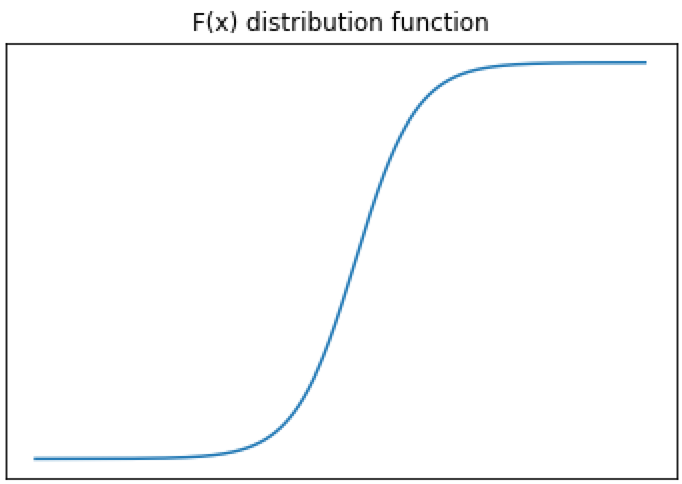
假设X是连续随机变量，X如果满足以下条件:

$$F(x)=P(X\leq x)=\frac{1}{1+e^{\frac{-(x-\mu)}{\gamma}}}$$

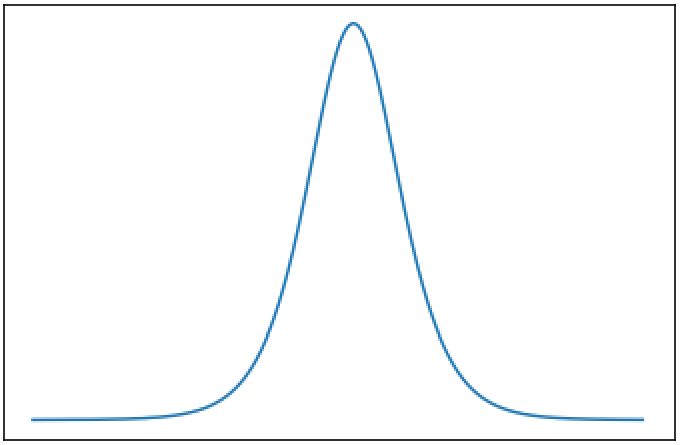
$$f(x)=F'(x)=\frac{e^{\frac{-(x-\mu)}{\gamma}}}{\gamma(1+e^{\frac{-(x-\mu)}{\gamma}})^2}$$

则X服从逻辑斯蒂分布，其中μ为位置参数，$\gamma>0$为形状参数。

其中概率分布函数$F(x)$形状如下：



概率密度函数形状如下:



2.二项逻辑斯蒂回归模型

一般来说，回归模型是对连续值计算得到最近似的拟合函数。但是逻辑斯蒂回归模型不一样，虽然叫回归模型，但是实际上是计算分类的模型，用于计算二分类。

二项逻辑斯蒂回归模型是如下的概率分布:

$$P(Y=1|x)=\frac{exp(w\cdot x+b)}{1+exp(w\cdot x+b)}$$

$$P(Y=0|x)=\frac{1}{1+exp(w\cdot x+b)}$$

其中$x\in R^n$,即为n维实数向量；$Y\subset\{0,1\}$是输出，即为类别；$w\in R^n$和$b\in R$分别为权重和偏置，$w\cdot x$是两个向量的内积。

3. 模型参数的计算

回顾上一章节的课程，SGD(批量梯度下降)算法，需要有很多的样本去计算参数。这里也是一样，对于给定的训练数据集$T=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$,其中$x_i\in R^n,y_i\in\{0,1\}$。

在这里计算参数w和b的时候，需要用到极大似然估计法计算。至于为什么要用极大似然估计法计算，这个可以自己去研究一下，作为遗留问题。

接下来，我们先设:

$$P(y_i=1|x_i)=\pi(x_i),P(y_i=0|x_i)=1-\pi(x_i)$$

合起来可以写为:

$$P(y_i|x_i;w) = \pi(x_i)^{y_i}[1-\pi(x_i)]^{1-y_i}$$

对所有的N个样本，有似然函数为:

$$\prod_{i=1}^{N}[\pi(x_i)]^{y_i}[1-\pi(x_i)]^{1-y_i}$$

此函数过于复杂，由于对数函数与原函数的单调性一致，因此这里一个技巧就是将上式取对数。则有:

$$L(w) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y_i log(\pi(x_i)) + (1-y_i)log(1-\pi(x_i))]$$

其中$\frac{1}{N}$是求平均的系数，不影响函数的单调性。求上式的最大值，即是求$-L(w)$的最小值。

于是我们得到的目标函数就为$-L(w) = J(w)$,对上述式子进行梯度下降算法计算得到参数$\tilde{w}, \tilde{b}$,就有:

$$P(y_i = 1|x_i) = \frac{exp(\tilde{w}\cdot x_i + \tilde{b})}{1+exp(\tilde{w}\cdot x_i + \tilde{b})}$$

$$P(y_i = 0|x_i) = \frac{1}{1+exp(\tilde{w}\cdot x_i + \tilde{b})}$$

我们可以得到每个样本x_i为0和1的概率，如果为1的概率大，那么x_i就被归结到1这个类别，否则就归结到0这个类别，0和1分别为类别的编码号。比如{好西瓜=1，坏西瓜=0}，或者{好房子=1，坏房子=0}。

4. 随机梯度下降计算最佳参数

对$J(w)$求其梯度函数为：

$$\frac{\partial J(w)}{\partial (w)} = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y_i\frac{\pi(x_i)'}{\pi(x_i)} + (1-y_i)\frac{-\pi(x_i)'}{1-\pi(x_i)}]$$

我们知道：

$$\pi(x_i) = \frac{exp(w\cdot x_i + b)}{1+exp(w\cdot x_i + b)}$$

令：

$$z = w \cdot x_i + b$$

所以:

$$\frac{\partial(z)}{\partial(w)} = x_i$$

则上式变为:

$$\frac{\partial J(w)}{\partial(w)} = \sum_{i=1}^{N}[y_i \frac{\pi(x_i)'}{\pi(x_i)} + (1-y_i)\frac{-\pi(x_i)'}{1-\pi(x_i)}] = \sum_{i=1}^{N}[y_i \frac{\pi(z_i)'}{\pi(z_i)} + (1-y_i)\frac{-\pi(z_i)'}{1-\pi(z_i)}]\frac{\partial(z)}{\partial(w)}$$

我们知道:

$$\pi(z)' = \pi(z)(1-\pi(z))$$

代入上式得到:

$$\frac{\partial J(w)}{\partial(w)} = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y_i - \pi(x_i)]x_i$$

于是得到梯度下降的公式为:

$$w := w - \alpha \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\pi(x_i) - y_i]x_i$$

用矩阵表示即为:

$$w := w - \alpha \frac{1}{N} X^T[\pi(X) - Y]$$

5. 随机梯度下降构造逻辑斯蒂回归模型

利用上述的推导和上一章节对梯度下降算法的理解，我们可以尝试自己构造逻辑斯蒂回归模型了。这里我们有一份关于女性乳腺癌的数据集。

具体可以查看示例代码。