Лекция 6. Функции от случайных величин

Велищанский Михаил Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана

Москва, 2023

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$ задана СВ $X = X(\omega)$. Рассмотрим действительную функцию $y = Y(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Определение

Случайную величину Y, которая каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие число $Y(\omega) = Y(X(\omega))$ называют **функцией $Y(X)$ от случайной величины X**.

Замечание

Функция $Y = Y(X)$ от дискретной СВ так же будет дискретной СВ, т.к. она не может принимать больше значений, чем СВ X, а функция от непрерывной СВ может быть как непрерывной, так и дискретной.

Рассмотрим дискретную СВ X, имеющую следующий ряд распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n

Тогда СВ $Y = Y(X)$ будет иметь следующий ряд распределения:

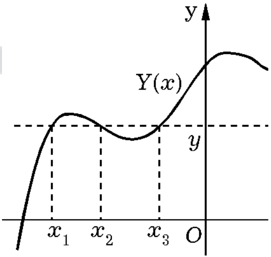
Y	$Y(x_1)$	$Y(x_2)$	$\ldots$	$Y(x_i)$	$\ldots$	$Y(x_n)$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n

Если в верхней строке таблицы появляются одинаковые значения $Y(x_i)$, то соответствующие столбцы нужно объединить в один, приписав им суммарную вероятность.

Нахождение функции распределения

Рассмотрим, как найти $F_Y(y)$, если известна $f_X(x)$.

По определению $F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{Y(X(\omega)) < y\}$. Событие $\{Y(X(\omega)) < y\}$ эквивалентно событию $\bigcup\limits_k \{X(\omega) \in \Delta_k\}$, где Δ_k — непересекающиеся промежутки из $\mathbb{R}$ (поскольку на множестве элементарных исходов из $\{Y(X(\omega)) < y\}$ СВ $X(\omega)$ будет принимать свои значения на некоторой совокупности $\{\Delta_k\}$).



Тогда по расширенной аксиоме сложения

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y(X(\omega)) < y\} = \sum_k \mathbf{P}\{X(\omega_k) \in \Delta_k\} =$$

$$= \sum_k \int\limits_{\Delta_k} f_X(x)dx = \int\limits_{\Delta} f_X(x)dx, \text{ где } \Delta = \bigcup_k \Delta_k.$$

Т.к. $\bigcup\limits_k \Delta_k$ определено как множество тех значений $X(\omega)$, для которых $Y(X(\omega)) < y$, то получаем

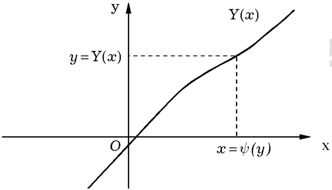
$$F_Y(y) = \int\limits_{Y(x)<y} f_X(x)dx.$$

Рассмотрим частный случай, предположив, что $Y(x)$ является непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.

Теорема

Пусть СВ X имеет плотность распределения $f_X(x)$, функция $y = Y(x) = \varphi(x)$ является монотонной и непрерывно–дифференцируемой. Тогда функция плотности СВ $Y = Y(X)$ может быть найдена по следующей формуле: $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$, где $x = \psi(y)$ функция, обратная к $y = \varphi(x)$.

Доказательство.



Т.к. функция $\varphi(x)$ непрерывна и монотонна то существует обратная функция $x = \psi(y) = \varphi^{-1}(y)$. Тогда событие $\{\varphi(X(\omega)) < y\}$ эквивалентно событию $\{X(\omega) < \psi(y)\}$ для возрастающей функции ($\{X(\omega) > \psi(y)\}$ для убывающей).

□

доказательство (продолжение).

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{Y<y\} &= \mathsf{P}\{\varphi(X(\omega))<y\} = \\
&= \begin{cases} \mathsf{P}\{X(\omega)<\psi(y)\}, & \varphi(x)\ \text{возр}, \\ \mathsf{P}\{X(\omega)>\psi(y)\}, & \varphi(x)\ \text{убыв}, \end{cases} = \\
&= \begin{cases} F_X(\psi(y)), & \varphi(x)\ \text{возр}, \\ 1-F_X(\psi(y)), & \varphi(x)\ \text{убыв}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Функция плотности может быть найдена как производная от функции распределения, т.е.

$$\begin{aligned}
f_Y(y)=F_Y'(y) &= \begin{cases} \Big(F_X(x)\Big)'\Big|_{x=\psi(y)}\psi'(y), & \varphi(x)\ \text{возр}, \\ \Big(1-F_X(x)\Big)'\Big|_{x=\psi(y)}\psi'(y), & \varphi(x)\ \text{убыв}. \end{cases} = \\
&= \begin{cases} f_X(\psi(y))\psi'(y), & \varphi(x)\ \text{возр}, \\ -f_X(\psi(y))\psi'(y), & \varphi(x)\ \text{убыв}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Оба эти случая можно записать в виде $f_Y(y)=f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$.

Если $\varphi(x)$ является непрерывной кусочно-монотонной функцией, то $f_Y(y) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_X(\psi_i(y))|\psi_i'(y)|$,

где k – количество участков монотонности, $\psi_i(y)$ — обратная функция на i-ом участке монотонности.

Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$ двумерный случайный вектор (X_1, X_2) и числовую функцию $\varphi(x_1, x_2)$.

Определение

Случайную величину $Y = \varphi(X_1, X_2) = \varphi(X_1(\omega), X_2(\omega))$ *называют* **функцией от двумерной случайной величины (двумерного случайного вектора)** (X_1, X_2).

Замечание

Функция $Y = \varphi(X_1, X_2)$ *от двумерной дискретной СВ* (X_1, X_2) *так же будет дискретной СВ, принимающей значения* $Y = \varphi(X_1, X_2)$ *с вероятностью* $p_{ij} = \mathbf{P}\{X = x_{1i}, X = x_{2j}\}$.

Пример

Пусть Y — СВ равная суммарному числу успехов в 2-х испытаниях по схеме Бернулли, а X_i — число успехов в i-м испытании, $i = 1, 2$.
Тогда $Y = X_1 + X_2$ и $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. СВ X_i могут принимать только значения 0 или 1, а СВ Y может принимать 3 значения $(0, 1, 2)$:

$$\varphi(0,0) = 0 + 0 = 0, \quad \varphi(1,0) = 1 + 0 = 1,$$
$$\varphi(0,1) = 0 + 1 = 1, \quad \varphi(1,1) = 1 + 1 = 2$$

с вероятностями q^2, pq, qp и p^2, $q = 1 - p$.
Тогда

Y	0	1	2
P_Y	q^2	$2pq$	p^2

Следовательно СВ Y имеет биномиальное распределение.

Если (X_1, X_2) двумерная непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$, то функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1, X_2)$ можно найти по формуле:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{\varphi(X_1,X_2)<y} f_{X_1X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2,$$

где область интегрирования состоит из всех значений (x_1, x_2) для которых $\varphi(X_1, X_2) < y$.

Пример

Пусть (X_1, X_2) *— двумерный случайный вектор с функцией плотности,* $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$.

СВ $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, *следовательно* $\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ \displaystyle\iint\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}<y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}\, dx_1 dx_2, & y > 0. \end{cases}$$

Переходя к полярным координатам ρ *и* φ, *имеем*

$$F_Y(y) = \int\limits_0^y d\rho \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\rho^2/2} \rho d\varphi = \int\limits_0^y \rho e^{-\rho^2/2} d\rho = 1 - e^{-y^2/2}, \quad y > 0$$

Это распределение известно как распределение Релея.

Формула свертки

Пусть X_1 и X_2 — независимы СВ и $Y = X_1 + X_2$, т.е. $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Тогда $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ и

$$F_Y(y) = \iint\limits_{x_1+x_2<y} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = \iint\limits_{x_1+x_2<y} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\,dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2)\,dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(y - x_1) f_{X_1}(x_1)\,dx_1.$$

Тогда дифференцируя по y под знаком интеграла имеем:

$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(y - x) f_{X_1}(x)\,dx = f_{X_2} * f_{X_1}$ — **формула свертки**.