Лекция 1. Случайные события. Вероятность

Велищанский Михаил Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Москва, 2023

Определение

Случайное испытание (случайный эксперимент) — испытание (опыт, эксперимент), наблюдаемые результаты которого случайны, т.е. их нельзя с уверенностью предсказать исходя из начальных условий испытаний.

Пример

Невозможно точно предсказать точку падения снаряда т.к. невозможно полностью учесть параметры атмосферы по траектории полета, параметры заряда и т.п.

Определение

Элементарный исход (или элементарное событием) — любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного испытания) исход испытания (обозначается ω). Множество всех элементарных исходов образуют пространство элементарных исходов и обозначается Ω.

Замечание

Множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов если выполнено:

1. *В результате опыта один из исходов обязательно происходит;*
2. *Появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;*
3. *В рамках данного опыта нельзя разделить элементарные исходы на более мелкие составляющие.*

Пример

При 1-кратном бросании игральной кости возможен любой из 6 элементарных исходов $\omega_1, \ldots, \omega_6$, *где* ω_i, $i = \overline{1,6}$, *означает появление* i *очков на верхней грани, т.е.* $\Omega = \{\omega_i,\ i = \overline{1,6}\}$ *и* $|\Omega| = 6$.

При 2-кратном бросании игральной кости каждый из 6 возможных исходов при 1-м бросании может сочетаться с каждым из 6 исходов при 2-м бросании, т. е. $\Omega = \{\omega_{ij},\ i,j = \overline{1,6}\}$, *где* ω_{ij} *— исход, при котором сначала выпало* i, *а затем* j *очков. Т.о.* $|\Omega| = 36$.

Пример

Стрелок производит единственный выстрел по плоской мишени. В этом случае Ω *естественно отождествить с множеством точек на плоскости или множеством пар* (x, y). *Т.о.,* $\Omega = \{(x,\ y):\ -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\}$.

Пример

Опыт заключается в определении числа вызовов, поступивших на телефонную станцию в течение заданного промежутка времени. Это число не превышает некоторого значения (определяемого, например, пропускной способностью линий связи), но, поскольку это значение может быть достаточно большим, в качестве пространства элементарных исходов можно принять множество целых неотрицательных чисел $\Omega = \{0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$

Определение

Любой набор элементарных исходов, или, иными словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов, называют случайным событием.

Замечание

В дальнейшем данное определение будет уточнено, однако данное определение вполне применимо для решения практических задач.

Определение

Элементарные исходы, которые являются элементами события, называют элементарными исходами, благоприятствующими данному событию, или образующими это событие. Событие A наступило, если в результате опыта появился какой-либо из элементарных исходов $\omega \in A$.

Пример

Опыт заключающийся в 1-кратном бросании игральной кости.
Тогда $\Omega = \{\omega_i,\ i = \overline{1,6}\}$, *где* ω_i *– выпадение i-очков.*
Рассмотрим следующие события:
$A = \{$*Выпадение четного числа очков*$\}$,
$B = \{$*Выпадение нечетного числа очков*$\}$,
$C = \{$*Выпадение числа очков, кратного 3*$\}$.
Тогда $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_3, \omega_6\}$

Определение

Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называется достоверным событием.

Определение

Событие, не содержащее ни 1-го элементарного исхода, т.е. событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называют невозможным событием.

Обозначения

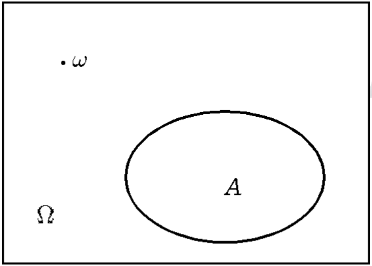
$\Omega = \{$Достоверное событие$\}$, $\varnothing = \{$Невозможное событие$\}$

Пример

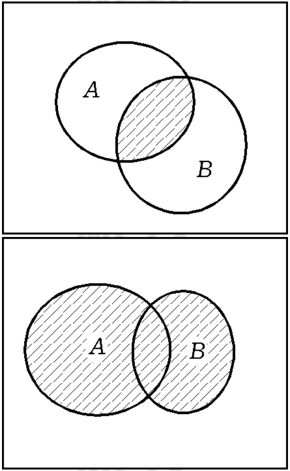
При 1-кратном бросании игральной кости
$\Omega = \{$*Выпадение хотя бы одного очка*$\}$ *и, например,*
$\varnothing = \{$*Выпадение 7 очков*$\}$.

Диаграммы Эйлера–Венна

Поскольку в рамках данного определения события мы "отождествили" событие и некоторое подмножество Ω, то операции над событиями совпадают с операциями над подмножествами.



Пространство элементарных исходов — прямоугольник. Элементарный исход ω — точка внутри прямоугольника, событие A — некоторое подмножество точек этого прямоугольника. Трактовка диаграммы Эйлера–Венна — опыт с бросанием случайным образом частицы в прямоугольник. Элементарный исход ω — попадание частицы в точку ω прямоугольника, событие A — в часть прямоугольника, задаваемую подмножеством A.



Определение

Пересечением 2х событий A и B называется событие $C = A \cap B = AB = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$.

Определение

Объединением 2х событий A и B называется событие $C = A \cup B = A + B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$.

Данные операции обобщаются на любое конечное число событий и для бесконечных последовательностей событий:

$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ и}$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Операции над событиями

Определение

События A и B называются несовместными, если $A\,B = \varnothing$.
События A_1, A_2, ..., A_n называются попарно несовместными $\Leftrightarrow$ $A_iA_j = \varnothing\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j$.
События A_1, A_2, ..., A_n называются несовместные в совокупности $\Leftrightarrow$ $A_1A_2\ldots A_n = \varnothing$

Определение

Разностью событий A и B называется событие
$C = A \setminus B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}$.

Определение

Дополнение события A: $\overline{A} = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$.

Определение

$A \subset B \Leftrightarrow \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$

Операции над событиями

Теорема

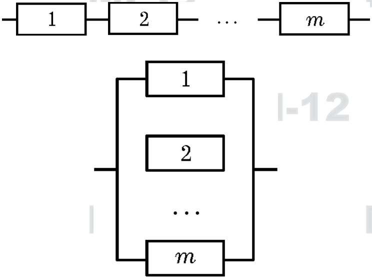
Свойства операций над событиями

1. $A + B = B + A$, $AB = BA$
   //Коммутативность суммы и произведения
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(AB)C = A(BC)$
   //Ассоциативность суммы и произведения
3. $(A + B)C = AC + BC$
   Дистрибутивность относительно сложения
4. $AB + C = (A + C)(B + C)$
   //Дистрибутивность относительно умножения, не выполняющаяся для чисел
5. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
6. $\overline{\overline{A}} = A$ *//Рефлексивность дополнения*
7. $A + A = AA = A$
8. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ *//Законы Де Моргана*

Замечание

Законы де Моргана верны для произвольного конечного числа событий:

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}$$
$$\overline{A_1\, A_2\, \ldots\, A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}$$



Рассмотрим техническое устройство (ТУ), состоящее из m элементов, событие $A = \{$Отказ ТУ$\}$, а $A_i = \{$отказ i-го эл-та$\}$. Тогда, для приведенных рисунков

$A = A_1 + \ldots + A_m$ и $A = A_1\, \ldots\, A_m$.

Говоря о событиях, мы с различной степенью уверенности относимся к возможности их наступления.

Очевидно, что с большей уверенностью можно сказать, что при 1-кратном подбрасывании монеты выпадет орел, чем при однократном бросании игральной кости — 6 очков.

Говорят, что 1-е событие более вероятно, чем 2-е. Вероятность события — число, являющееся мерой возможности его появления.

Пусть:

1. *Элементарные исходы* в некотором опыте — *равновозможные*, т.е. в силу условий проведения опыта можно считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие. Подобный опыт называется *классической схемой*
2. *Пространство элементарных исходов* Ω конечно.

Определение

Вероятностью события A *называют отношение числа* N_A *благоприятствующих событию* A *элементарных исходов к общему числу* N *элементарных исходов в* Ω *т.е.* $P(A) = \dfrac{N_A}{N}$.

Замечание

Данное определение называется классическим определением вероятности.

Свойства

1. $\forall A \subset \Omega\ P(A) \geqslant 0.$
2. $P(\Omega) = 1.$
3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ *если* $AB = \varnothing$.

Доказательство.

1. Очевидно, т. к. N_A и N не могут быть отрицательными.
2. $P(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1.$
3. Событию A благоприятствуют N_A исходов, а событию B — N_B, т.к. события A и B несовместные, то событию $A + B$ благоприятствуют $N_A + N_B$ исходов. Тогда $$P(A + B) = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B).$$

$\square$

Из данных свойств можно получить и другие свойства, в частности: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(\varnothing) = 0$, $A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$.

Замечание

Недостаток классического определения заключается в требовании конечности пространства элементарных исходов, а так же требование равновозможности элементарных исходов.

Пример

Из урны, содержащей $k = 10$ *белых и* $l = 20$ *черных шаров, наугад вынимают один шар.* $A = \{$*извлечен белый шар*$\}$, $P(A) = ?$

$$N = k + l = 30,\ N_A = k = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{k}{k+l} = \frac{1}{3}$$

Пример

Бросают 2 игральные кости.

$A = \{$*сумма выпавших очков больше 10*$\}$, $P(A) = ?$

Т.к. $\Omega = \{(1,1),(1,2)\dots(6,5),(6,6)\} \Rightarrow N = 36$,

$A = \{(6,5),(5,6),(6,6)\} \Rightarrow N_A = 3$. *Тогда* $P(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

Определение (геометрическое определением вероятности)

Вероятность события $A \subset \Omega$ *есть число* $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, *где* $\mu(A)$ *и* $\mu(\Omega)$ *— меры множеств* A *и* Ω *соответственно.*

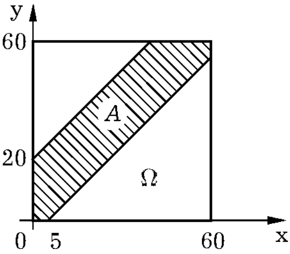
Геометрическая вероятность удовлетворяет свойствам классической вероятности.

Замечание

1. *Если размерность множества* A *меньше размерности множества* Ω, *т.е.* $\dim A < \dim \Omega$, *то* $\mu(A) = 0$ *и* $P(A) = 0$ *— проявление парадокса нулевой вероятности.*
2. *В данном определении так же присутствует требование "равновероятности", которое проявляется в том, что* $P(A)$ *не зависит ни от "геометрии" множества* A, *ни от его расположения в* Ω.

Пример

Ромео и Джульетта договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Приход каждого в течение часа происходит наудачу, Ромео ждет Джульетту ровно 20 минут, а Джульетта Ромео — 5 минут, $A = \{$*они встретились*$\}$. $P(A) = ?$



Пусть x *— время прихода Ромео, а Джульетты —* y.
Тогда условие встречи:

$$\begin{cases} y - x \leqslant 20 \\ x - y \leqslant 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(A) = 60^2 - \frac{(60-5)^2}{2} - \frac{(60-20)^2}{2} =$$

$$= 1287.5 \Rightarrow P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1287.5}{3600} \approx 0.36$$

Пусть произведено n повторений опыта, в n_A из них появилось событие A. Обозначим $r_A(n) = n_A/n$ наблюдаемая частота события A.

Определение (статистическое определение вероятности)

Вероятностью события A называют (эмпирический) предел $P(A)$, к которому стремится частота r_A события A при неограниченном увеличении числа опытов n: $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} r_A(n)$.

Замечание

1. *С практической точки зрения это определение наиболее разумное, однако нельзя провести бесконечное число испытаний, а при конечном числе опытов частота будет разной.*
2. *Можно показать, что сохраняются свойства вероятности события, справедливые при классической схеме, т.е.* $P(A) \geqslant 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$ *при* $AB = \varnothing$.

Аксиоматическое определение вероятности

Рассмотрим *классическую схему* $\Rightarrow$ вероятность любого *элементарного исхода* ω_i, $i = 1, \ldots, N$ одинакова и равна $P(\omega_i) = 1/N$, поэтому $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = N_A/N$.

Задать вероятность события по такому принципу в случае *геометрической схемы* нельзя, т.к. $P(\omega_i) = 0$. Поэтому необходимо дать определение вероятности события для любого Ω, не связанное с вероятностями элементарных исходов, а учитывающее свойства вероятности событий, которые имеют место для всех предыдущих определений вероятности.

Кроме того, в случае несчетного множества элементарных исходов нельзя построить логически непротиворечивую теорию, называя событием произвольное подмножество Ω. Поэтому событиями в этом случае называют не любые подмножества элементарных исходов, а только подмножества из Ω, принадлежащие некоторому классу, который принято называть σ-алгеброй событий.

Определение

Сигма-алгеброй (σ-алгебра) $\mathfrak{B}$ называют непустую систему подмножеств множества U, удовлетворяющую следующим условиям:

1. *Если подмножество $A \in \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathfrak{B}$*
2. *Если подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{B} \Rightarrow$ $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots \in \mathfrak{B}$ и $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots \in \mathfrak{B}$*

Следствие

1. *Так как $U = A + \overline{A}$ то $U \in \mathfrak{B}$*
2. *Так как $\varnothing = \overline{U}$ то $\varnothing \in \mathfrak{B}$*

Элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}$, заданной на пространстве элементарных исходов Ω называют событиями, а саму σ -алгебру $\mathfrak{B}$ называют *σ-алгеброй событий.*

Любая σ-алгебра событий содержит *достоверное событие* Ω и *невозможное событие* $\varnothing$.

В случае конечного или счетного пространства элементарных исходов Ω в качестве σ-алгебры событий рассматривают множество всех подмножеств Ω.

Замечание

Если в условии 2 счетное множество событий заменить на конечное, то получим определение алгебры событий.
Любая σ-алгебра событий — алгебра событий. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример

Опыт состоит в подбрасывании один раз тетраэдра, каждая грань которого помечена одним из чисел 1, 2, 3 и 4

$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$, *где* ω_i *— падение тетраэдра на грань с числом* i, $i = 1, \ldots, 4$

В рассматриваемом опыте может происходить одно из следующих событий

$$\begin{aligned}
&\varnothing,\\
&\{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \{\omega_3\},\ \{\omega_4\},\\
&\{\omega_1,\omega_2\},\ \{\omega_1,\omega_3\},\ \{\omega_1,\omega_4\},\ \{\omega_2,\omega_3\},\ \{\omega_2,\omega_4\},\ \{\omega_3,\omega_4\},\\
&\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\ \{\omega_1,\omega_2,\omega_4\},\ \{\omega_1,\omega_3,\omega_4\},\ \{\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\\
&\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *алгебра событий будет содержать все подмножества* Ω, *включая* Ω *и* $\varnothing$

Определение

Пусть каждому событию A (т.е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω, принадлежащих σ-алгебре $\mathfrak{B}$) поставлено в соответствие число $P(A)$. Числовую функцию P, заданную на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, называют вероятностью (или вероятностной мерой), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 1 $P(A) \geqslant 0$ *(аксиома неотрицательности);*

Аксиома 2 $P(\Omega) = 1$ *(аксиома нормированности);*

Аксиома 3 $\forall$ *попарно несовместных событий* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$*:*

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

(расширенная аксиома сложения).

Значение $P(A)$ называют вероятностью события A.

Определение

Тройку $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$, состоящую из пространства элементарных исходов Ω, с σ-алгеброй событий $\mathfrak{B}$ и определенной на $\mathfrak{B}$ вероятности P, называют вероятностным пространством.

Замечание

Иногда, вместо расширенной аксиомы сложения рассматривают 2 другие аксиомы:

Аксиома $3'$ —*аксиома сложения: для всех попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$:*

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

Аксиома $3''$ —*аксиома непрерывности: если последовательность событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ такова, что $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $A_1 + \ldots + A_n + \ldots = A$, то $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$.*

Теорема (свойства вероятности)

Вероятность удовлетворяет следующим свойствам:

1. *Вероятность противоположного события:* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. *Вероятность невозможного события:* $P(\varnothing) = 0$.
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
4. *Ограниченность:* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
5. *Вероятность объединения 2-х событий:* $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
6. *Вероятность объединения любого конечного числа событий:*

$$\begin{aligned} P(A_1 + \ldots + A_n) = & P(A_1) + \ldots + P(A_n) - \\ & - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \ldots - P(A_{n-1} A_n) + \\ & + P(A_1 A_2 A_3) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n). \end{aligned}$$

Доказательство.

1. Т.к. $\Omega = A + \overline{A} \Rightarrow$ из расширенной аксиомы сложения $P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow$ т.к. $P(\Omega) = 1$, то $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
2. Т.к. $A = A + \varnothing \Rightarrow P(A) = P(A + \varnothing) = P(A) + P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$.
3. $A \subset B \Rightarrow B = A + (B \setminus A) \Rightarrow$ $P(B) = P(A + B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A)$.
4. Т.к. $\forall A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.
5.

$$\begin{cases} A + B = A + (B \setminus A) \\ B = (B \setminus A) + AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A) \\ P(B) = P(B \setminus A) + P(AB) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$\square$

Доказательство (продолжение).

6. Можно доказать с помощью метода математической индукции по n. Для трех событий A, B и C

$$
\begin{aligned}
P(A+B+C) &= P(A) + P(B+C) - P(A(B+C)) = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB+AC) = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - \\
&- P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)
\end{aligned}
$$

Доказательство для произвольного количества событий производится аналогично... $\square$

Пример

Опыт состоит в двукратном подбрасывании симметричной монеты. События $A = \{$*появление герба хотя бы один раз*$\}$, $A_i = \{$*появление герба при* i*-м подбрасывании*$\}$, $i = 1, 2$.

$P(A) = ?$

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, *что неверно, поскольку* A *не является достоверным событием.*

Применяя теорему сложения для двух событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$