Лекция 2-3. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли

Велищанский Михаил Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Москва, 2023

"Наводящие соображения".
Рассмотрим классическую схему. Пусть *событиям* A и B *благоприятствуют* N_A и N_B *элементарных исходов*. Пусть известно, что событие B произошло. Что можно сказать о вероятности наступления события A?

Поскольку событие B произошло, то это значит, что произошел один из N_B элементарных исходов. Значит при определении степени возможности события A необходимо выбирать только из N_B исходов, а благоприятными A будут N_{AB} исходов, при которых происходят оба события A, и B.

Условную вероятность при классической схеме вводят как

$$P(A|B) = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично можно поступить и при использовании геометрической и статистической схем.

Пример

Из полной колоды карт в 52 карты, наудачу извлекаются 2 карты.

События $A = \{$*карты бубновой масти*$\}$,

$B = \{$*карты с картинкой*$\}$ *(валет, дама, король),*

$C = \{$*карты с картинкой, если они бубновой масти*$\}$. $P(C) = ?$

$$N_A = C_{13}^2 = \frac{13!}{2!11!},\ N_C = C_3^2 = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{N_C}{N_A} = \frac{3}{13 \cdot 6} = \frac{1}{26}.$$

$P(C)$ *принято обозначать* $P(B|A)$ *и называть условной вероятностью события* B *при условии того, что событие* A *произошло* $\Rightarrow P(B|A) = \dfrac{1}{26}$.

$$P(A) = \frac{C_{13}^2}{C_{52}^2},\ P(AB) = \frac{C_3^2}{C_{52}^2} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{26}.$$

Определение

Условной вероятностью события A при условии наступления события B называют следующее число:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \ P(B) \neq 0.$$

Пример

Из колоды в 36 карты последовательно извлекли 2 карты. Найти вероятность, что вторая карта туз (событие A), если первая карта – туз (событие B).

1: $P(A|B) = \dfrac{(4-1)}{(36-1)} = \dfrac{3}{35}.$

2: $P(AB) = \dfrac{4}{36} \cdot \dfrac{3}{35}, \ P(B) = \dfrac{4}{36} \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{3}{35}.$

Замечание

Условную вероятность $P(A|B)$ можно рассматривать как безусловную вероятность, если в качестве Ω использовать пространство элементарных исходов события B.

Пример

Из урны, в которой $a = 7$ белых и $b = 3$ черных шаров, наугад без возвращения извлекают два шара,
$A_1 = \{$ *1-й извлеченный из урны шар является белым* $\}$,
$A_2 = \{$*белым является 2-й шар*$\}$. $P(A_2|A_1) = ?$

Первый способ

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{C_7^2/C_{10}^2}{C_7^1/C_{10}^1} = \frac{2}{3}.$$

Второй способ

$\Omega_1 = A_1 \Rightarrow N_{\Omega_1} = a + b - 1 = 9$, $N_{A_2} = a - 1 = 6 \Rightarrow$
$P(A_2|A_1) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

Теорема

Условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной вероятности $P(A)$.

Доказательство.

Покажем, что условная вероятность удовлетворяет аксиомам:

1. $P(A|B) \geqslant 0$, т. к. $P(AB) \geqslant 0$ и $P(B) > 0$.
2. $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.
3. Пусть $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i \neq j,\ i,j \geqslant 1$.
   Тогда $(A_1 + \ldots + A_n + \ldots)B = A_1 B + \ldots + A_n B + \ldots \Rightarrow$
   $$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots|B) = \frac{P((A_1 + \ldots + A_n + \ldots)B)}{P(B)} =$$
   $$= \frac{P(A_1 B + \ldots + A_n B + \ldots)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B) + \ldots + P(A_n B) + \ldots}{P(B)} =$$
   $= \{$св-во умножения сходящегося ряда на число$\} =$
   $= P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots$

Теорема (формула умножения вероятностей)

Пусть событие $A = A_1 A_2 \ldots A_n$ *и* $P(A) > 0$. *Тогда справедливо равенство*

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Доказательство.

Т.к. $P(A) = P(A_1 A_2 \ldots A_n) > 0$, и
$A_1 A_2 \ldots A_n \subset A_1 A_2 \ldots A_k \ \forall k = \overline{1, n-1}$, то $P(A_1 A_2 \ldots A_k) > 0$.

$$P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) = \frac{P(A_1 A_2 \ldots A_n)}{P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1})} \Leftrightarrow$$
$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$

Аналогично $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) =$
$$= P(A_1 A_2 \ldots A_{n-2}) P(A_{n-1}|A_1 A_2 \ldots A_{n-2}).$$

Тогда

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1 A_2 \ldots A_{n-2}) P(A_{n-1}|A_1 A_2 \ldots A_{n-2}) \cdot$$
$$\cdot P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \text{ и т.д.}$$

Пример

На семи карточках написаны буквы, образующие слово СОЛОВЕЙ. Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки, $A = \{$*получится слово ВОЛ*$\}$, $P(A) = ?$

$A_1 = \{$*на 1-й выбранной карточке написана буква В*$\}$;

$A_2 = \{$*на 2-й выбранной карточке написана буква О*$\}$;

$A_3 = \{$*на 3-й выбранной карточке написана буква Л*$\} \Rightarrow$

$$A = A_1 A_2 A_3 \Rightarrow$$

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2).$$

$$P(A_1) = \frac{1}{7},\ P(A_2|A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ P(A_3|A_1 A_2) = \frac{1}{5}.$$

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105} \approx 0.0095.$$

Определение

События A и B, имеющие ненулевую вероятность, называют независимыми, если их условные вероятности совпадают с безусловными, т.е. $P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$.
В противном случае события A и B называют зависимыми.

Замечание

Для независимых событий A и B теорема умножения вероятностей примет вид: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Теорема

События A и B ($P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$) являются независимыми т. и т.т., когда $P(AB) = P(A)P(B)$.

Доказательство.

Необходимость:

Пусть A и B ($P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$) — *независимые события.* Пусть $P(B|A) = P(B)$. По формуле умножения вероятностей: $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$. Аналогично, если выполнено $P(A|B) = P(A)$.

Достаточность:

Пусть верно $P(AB) = P(A)P(B)$. Тогда по определению условной вероятности

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B).$$

□

Замечание

Иногда используют следующее определение независимости: События A и B называют независимыми если $P(AB) = P(A)P(B)$.
(в этом определении нет ограничений $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$).

Теорема

Если события A и B независимые, то независимыми так же являются пары событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Доказательство.

$P\left(\overline{A}|B\right) = 1 - P\left(A|B\right) = 1 - P\left(A\right) = P\left(\overline{A}\right) \Rightarrow \overline{A}$ и B — независимые события и т.д. $\square$

Определение

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называются попарно-независимыми, если* $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j$,
и независимыми в совокупности, если
$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)\ \forall i, j = \overline{1, n}$;
$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)\ i, j, k = \overline{1, n}\ i < j < k$;
$\cdots$
$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$.

Теорема

Если события A_1, A_2, $\ldots$, A_n *независимы в совокупности то и события* $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\ldots$, $\overline{A}_n$ *независимы в совокупности.*

Замечание

Из попарной независимости событий независимость в совокупности не следует.

Замечание

Для независимых в совокупности событий теорема умножения вероятностей примет вид: $P(A) = P(A_1) \ldots P(A_n)$.

Пример

Из колоды $n = 36$ карт, наугад извлекают 1 карту,
$A = \{$*извлеченная карта будет пиковой масти*$\}$,
$B = \{$*появление дамы*$\}$. *Зависимы ли* A *и* B*?*

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(AB) = \frac{1}{36},$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/36}{9/36} = \frac{1}{9} = P(B) \Rightarrow A \text{ и } B \text{ независимы.}$$

Изменим условия опыта, добавив в колоду, $N = 100$ *пустых карт (без рисунка).*

$$\text{Тогда} \quad \left.\begin{aligned} P(B) &= \frac{4}{136} = \frac{1}{34}, \\ P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/136}{9/136} = \frac{1}{9} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{безусловная}$$

вероятность B *уменьшилась, но условная вероятность не изменилась* $\Rightarrow$ A *и* B *стали зависимыми.*

Замечание

Когда говорят о независимости событий $A_1, \dots, A_n$ то подразумевают именно независимость в совокупности.

Формула для вероятности объединения независимых событий:

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1 + \ldots + A_n}) = 1 - P(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdot \ldots \cdot [1 - P(A_n)] \,.$$

Утверждение

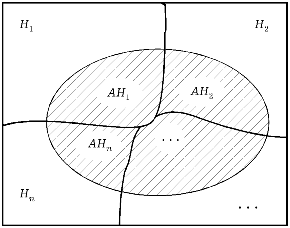
Связь между совместными и зависимыми событиями:

1. *Если A и B несовместные события и $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$) то они зависимые.*
2. *Если A и B совместные события то они могут быть и зависимыми и независимыми.*
3. *Если A и B зависимые события, то они могут быть и совместными и несовместными.*

Определение

Совокупность случайных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют гипотезами, если они удовлетворяют следующим условиям:

1. $H_i \neq \varnothing \ \forall i = \overline{1, n}$;
2. $H_i \cap H_j = \varnothing \ i \neq j$;
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.



Замечание

Если условие 2 не выполнено, то события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют полной группой событий.

$$\forall A \subset \Omega: \ A = A\Omega = A(H_1 + \ldots + H_n) =$$
$$= AH_1 + \ldots + AH_n.$$

Теорема (формула полной вероятности)

Пусть событие A и гипотезы $H_1, \ldots, H_n$ заданы на одном и том же вероятностном пространстве и известны:

1. $P(H_1) > 0, \ldots, P(H_n) > 0$,
2. $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$.

Тогда вероятность $P(A)$ можно определить по формуле:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n),$$

называемой формулой полной вероятности.

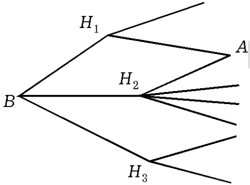
Доказательство.

Т.к. $A = A\Omega = A(H_1 + \ldots + H_n) = AH_1 + \ldots + AH_n$, и т.к. $(AH_i) \cap (AH_j) = \varnothing \ \forall i \neq j$, то

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(AH_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

$\square$

Пример



Путник должен попасть из пункта B в пункт A в соответствии с приведенной схемой дорог. Выбор любой дороги в любом пункте равновозможен, $A = \{$*путник достиг намеченной цели*$\}$, $P(A) = ?$

Чтобы попасть в пункт A, путник должен пройти один из пунктов H_1, H_2 или H_3. Гипотезы H_i — путник выбрал в пункте B путь, ведущий в пункт H_i, $i = 1, 2, 3$, H_i — несовместны и одно из них обязательно происходит, $P(H_i) = \dfrac{1}{3}$.

$P(A|H_1) = \dfrac{1}{2}$, $P(A|H_2) = \dfrac{1}{4}$ *и* $P(A|H_3) = 0$.

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 \right) = 0.25$$

Теорема (формула Байеса)

Пусть для некоторого события A, $P(A) > 0$, *и гипотез* $H_1, \ldots, H_n$ *известны* $P(H_i)$ $(P(H_i) > 0)$ *и* $P(A|H_i)$ $i = \overline{1, n}$.

Тогда $P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$.

Доказательство.

По определению $P(H_i|A) = \dfrac{P(AH_i)}{P(A)}$.

По формуле умножения вероятностей: $P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)$.

По формуле полной вероятности: $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$.

Тогда $P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$. □

Пример

Три охотника залпом обстреляли кабана и поразили его 2-мя пулями. Какова вероятность, что 1-й охотник попал, если вероятность попадания в цель для охотников равны 0.4, 0.3 *и* 0.5 *соответственно?*

Введем гипотезы: H_1 *– 1-й стрелок попал и* H_2 *– не попал. Событие* A *– цель поражена 2-мя пулями,* A_i *– в цель попал* i*-й охотник.*

$$P(H_1) = 0.4,\ P(H_2) = 0.6;$$
$$P(A|H_1) = P\left((A_2\overline{A_3}) \cup (\overline{A_2}A_3)\right) = P(A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_2}A_3) =$$
$$= P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_2})P(A_3) = 0.3(1 - 0.5) + (1 - 0.3)0.5 = 0.5;$$
$$P(A|H_2) = P(A_2A_3) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15;$$
$$P(H_1|A) = \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.6} = \frac{20}{29}.$$

Определение

Повторные испытания — это последовательное проведение n раз одного и того же опыта или одновременное проведение n одинаковых опытов

Пример

При контроле уровня надежности прибора могут либо проводить n испытаний с одним и тем же прибором, если после отказа полностью восстанавливают его исходные свойства, либо ставить на испытания n опытных образцов этого прибора, которые считают идентичными

Определение

Биноминальной схемой испытаний (схемой Бернулли) называют последовательность повторных испытаний, удовлетворяющую условиям:

1. *Для каждого испытания возможными являются лишь два исхода: появление некоторого события* A *("успех"), либо его дополнения* $\overline{A}$ *("неудача").*
2. *Исход любого испытания не зависит от исходов предшествующих испытаний, т.е. испытания независимы.*
3. *Вероятность успеха во всех испытаниях постоянна и равна* $P(A) = p$.

Замечание

В каждом испытании $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

Пример

Последовательное подбрасывание n *раз симметричной монеты (орел — успех,* $p = 0.5$*), или последовательное бросание* n *раз игральной кости* $\left(\text{шестерка — успех, } p = \dfrac{1}{6}\right)$.

Пример

Последовательность n *выстрелов стрелка по мишени можно приближенно рассматривать как схему Бернулли, т.к. независимость результатов стрельбы может нарушаться либо из-за пристрелки спортсмена, либо из-за его утомляемости.*

Пример

Испытания n изделий в течение заданного срока при контроле уровня их надежности, как правило, хорошо согласуются с моделью испытаний по схеме Бернулли, если на испытаниях идентичные образцы

Основная задача для схемы Бернулли:
$A_k = \{$в n испытаниях успех наступит ровно k-раз$\}$, $k = \overline{0, n}$,
$P_n(k) = P(A_k)$.

Теорема (формула Бернулли)

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдет ровно k "успехов" (событие A наступит ровно k раз) равна: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, *где* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = \overline{0, n}$.

Доказательство.

Пусть событие B_h состоит в том, что в испытаниях с номерами $i_1^h, i_2^h, \ldots, i_k^h$ наступило событие А (т.е. "успех"), а с номерами $j_1^h, j_2^h, \ldots, j_{n-k}^h$ — "неудача".

Тогда $\left\{i_1^h, i_2^h, \ldots, i_k^h\right\} \cup \left\{j_1^h, j_2^h, \ldots, j_{n-k}^h\right\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, а $\left\{i_1^h, i_2^h, \ldots, i_k^h\right\} \cap \left\{j_1^h, j_2^h, \ldots, j_{n-k}^h\right\} = \varnothing$.

Т.о. $B_h \Leftrightarrow \left\{(A_{i_1^h}) \wedge \ldots \wedge (A_{i_k^h})\right\} \wedge \left\{(\overline{A}_{j_1^h}) \wedge \ldots \wedge (\overline{A}_{j_{n-k}^h})\right\}$.

Поскольку испытания независимые, то

$P(B_h) = P(A_{i_1^h}) \ldots P(A_{i_k^h}) P(\overline{A}_{j_1^h}) \ldots P(\overline{A}_{j_{n-k}^h}) = p^k (1-p)^{n-k}$.

Тогда событие $B_n^k = \bigcup\limits_h B_h$ — в n испытаниях k "успехов" , где

h — кол-во способов выбрать k "успешных" мест в n испытаниях. Это число равно $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Тогда

$$P(B_n^k) = P\Big(\bigcup_h B_h\Big) = \sum_h P(B_h) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \qquad \square$$

Замечание

Формулу Бернулли называют также биномиальной, т.к. ее правая часть — $(k+1)$-й член формулы бинома Ньютона:

$$1 = (p+q)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^n p^n.$$

Набор вероятностей $P_n(k)$, $k = \overline{0, n}$ называют биномиальным распределением вероятностей.

Следствие

1. $P\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$
2. $P\{k \geqslant 1\} = 1 - q^n.$

Пример

Монету подбрасывают $n = 10$ раз, орел — У, $p = 0.5$. Найти:

1. $P_{10}(5) = ?$
2. $P\{k \leqslant 5\} = ?$
3. $P\{k \geqslant 1\} = ?$

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} = 0.246;$$

$$P\{k \leqslant 5\} = \frac{C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + C_{10}^{3} + C_{10}^{4} + C_{10}^{5}}{1024} = \frac{638}{1024} \approx 0.623;$$

$$P\{k \geqslant 1\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.999$$

Пример

Вероятность выигрыша на один лотерейный билет равна 0.01*. Определить, сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша в лотерее была не менее заданного значения $P_з = 0.9$.*

Куплено n билетов. Предположим, что общее число билетов, разыгрывающихся в лотерее велико (во много раз больше купленных билетов) $\Rightarrow$ каждый билет выигрывает независимо от остальных с вероятностью $p = 0.01 \Rightarrow$

$$P\{k \geqslant 1\} = 1 - q^n = 1 - (1-p)^n \geqslant P_з \Rightarrow$$

$$n \geqslant \frac{\ln(1-P_з)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.99} \approx 230.$$

$\Rightarrow$ *нужно купить не менее 230 лотерейных билетов.*