Лекция 5. Случайные векторы

Велищанский Михаил Александрович

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана

Москва, 2023

МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12

Определение

Совокупность случайных величин $X_1 = X_1(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega)$, *заданных на одном и том же вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$, *называют многомерной (n-мерной) случайной величиной, или n-мерным случайным вектором.*
При этом СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *— координаты случайного вектора.*

Пример

Отклонение точки разрыва снаряда от точки прицеливания при стрельбе по плоской цели можно задать 2-мерной СВ (X, Y), *где* X *— отклонение по дальности, а* Y *— отклонение в боковом направлении. При стрельбе по воздушной цели необходимо рассматривать 3-мерную СВ* (X, Y, Z), *где* X, Y, Z *— координаты отклонения точки разрыва зенитного снаряда от точки прицеливания в некоторой пространственной СК.*

МГТУ ФН-12

Пример

При испытании прибора на надежность совокупность внешних воздействий в некоторый момент времени можно описать случайным вектором $(X, Y, Z, \ldots)$. Здесь, например, X — температура окружающей среды, Y — атмосферное давление, Z — амплитуда вибрации платформы, на которой установлен прибор и т. д. Размерность этого вектора зависит от количества учитываемых факторов и может быть достаточно большой.

Замечание

Закон распределения n-мерной СВ так же может быть задан с помощью функции распределения.

Замечание

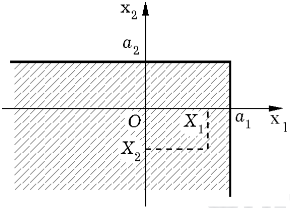
Далее, для краткости, для пересечения событий $\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\} \cap \ldots \cap \{X_n < x_n\}$ будем использовать запись: $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}$.

МГТУ ФН-12

Определение

Функцией распределения (вероятностей) $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ *(n-мерного) случайного вектора* $(X_1, \ldots, X_n)$ *называют функцию, значение которой в точке* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *равно вероятности совместного осуществления событий* $\{X_1 < x_1\}, \ldots, \{X_n < x_n\}$*, т.е.*
$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$.
Данную функцию также называют совместной (n-мерной) функцией распределения СВ $(X_1, \ldots, X_n)$.

Замечание



Значение $F_{X_1,X_2}(a_1, a_2)$ *равно вероятности попадания точки с координатами* (X_1, X_2) *в квадрант с вершиной в точке* (a_1, a_2).

МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12 МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12 МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12

МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12

Теорема

Двумерная функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0 \leqslant F(x_1, x_2) \leqslant 1$.
2. $F(x_1, x_2)$ — *неубывающая функция по каждому из аргументов* x_1 *и* x_2.
3. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$.
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.
5. $P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = $
   $= F(b_1,\ b_2) - F(b_1,\ a_2) - F(a_1,\ b_2) + F(a_1,\ a_2)$.
6. $F(x_1, x_2)$ — *непрерывная слева в любой точке* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *по каждому из аргументов* x_1 *и* x_2 *функция.*
7. $F_{X_1,X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x)$, $\quad F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$.

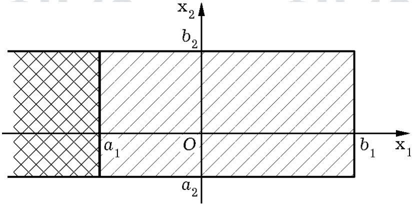
Доказательство.

Свойства 1, 2 и 6 доказываются аналогично 1-мерному случаю.

3. События $\{X_1 < -\infty\}$ и $\{X_2 < -\infty\}$ являются невозможными $\Rightarrow F(-\infty, x_2) = P\{X_1 < -\infty, X_2 < x_2\} = 0$, $F(x_1, -\infty) = P\{X_1 < x_1, X_2 < -\infty\} = 0$.

4. Т.к. $\{X_1 < +\infty\}$ и $\{X_2 < +\infty\}$ достоверные события, то $\{X_1 < +\infty\} \cap \{X_2 < +\infty\}$ достоверное событие и, следовательно, $F(+\infty, +\infty) = P\{X_1 < +\infty, X_2 < +\infty\} = 1$.

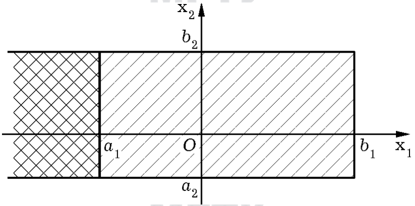
5. $P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} =$
$$= F(b_1,\, b_2) - F(b_1,\, a_2) - F(a_1,\, b_2) + F(a_1,\, a_2).$$



МГТУ ФН-12

Функция распределения случайного вектора

доказательство (продолжение).



$$P\{X_1 < a_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} =$$
$$= P\{\{X_1 < a_1, X_2 < b_2\} \backslash \{X_1 < a_1, X_2 < a_2\}\} = F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2).$$

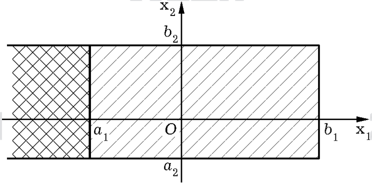
$$P\{X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} =$$
$$= P\{\{X_1 < b_1, X_2 < b_2\} \backslash \{X_1 < b_1, X_2 < a_2\}\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2).$$

Тогда

$$P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} =$$
$$= P\left\{\{X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} \backslash \{X_1 < a_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\}\right\} =$$

$\square$

доказательство (продолжение).



$$P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} =$$
$$= P\left\{\{X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\}\backslash\{X_1 < a_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\}\right\} =$$
$$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - (F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)) =$$
$$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - (F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)).$$

7. Т.к. событие $\{X_2 < +\infty\}$ является достоверным, то
$\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < +\infty\} = \{X_1 < x_1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow F(x_1, +\infty) = P\{X_1 < x_1\} = F_{X_1}(x_1).$
Аналогично $F(+\infty, x_2) = F_{X_2}(x_2)$.
$F_{X_1}(x)$ и $F_{X_2}(x)$ — одномерные (частные, маргинальные) функции распределения СВ X_1 и X_2. □

МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12

Замечание

1. *Все свойства остаются верными для функции распределения n-мерного случайного вектора.*
2. *Функция распределения случайного вектора имеет не более счетного количества точек разрыва 1-го рода.*

Определение

Двумерную случайную величину X, Y называют дискретной, если каждая из случайных величин X и Y является дискретной.

Определение (*)

n-мерный случайный вектор $\vec{X}(\omega)$, принимающий не более счетного множества возможных значений $\{X_k\}_{k=1}^{N\leqslant\infty}$ называют дискретным случайным вектором.

Дискретные двумерные случайные векторы

Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора может быть задан в виде следующей таблицы:

X	Y				
	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	P_X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1m}	p_{X1}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2m}	p_{X2}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nm}	p_{Xn}
P_Y	p_{Y1}	p_{Y2}	$\ldots$	p_{Ym}	

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

$$p_{Xi} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

$$p_{Yj} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},$$

$$F(x, y) = \sum_{\substack{i:\ x_i < x \\ j:\ y_j < y}} p_{ij}.$$

Здесь $y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_m$ – все возможные значения СВ Y, а $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ – все значения СВ X.

Дискретные двумерные случайные векторы

По схеме Бернулли с вероятностью "успеха" p и вероятностью "неудачи" $q = 1 - p$ проводятся два испытания. Распределение 2-мерного СВ (X_1, X_2), где X_i, $i = 1, 2$, — число "успехов" в i-м испытании, X_1 и X_2 могут принимать 2 значения: 0 или 1.

Пример

$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = q^2,$
$P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = pq,$
$P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = qp,$
$P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = p^2,$
$P\{X_1 = 0\} = q^2 + pq = q(q + p) = q,$
$P\{X_1 = 1\} = pq + p^2 = p(p + q) = p.$

X_1	X_2		
	0	1	P_{X_1}
0	q^2	qp	q
1	pq	p^2	p
P_{X_2}	q	p	

МГТУ ФН-12

Дискретные двумерные случайные векторы

X_1	X_2		
	0	1	P_{X_1}
0	q^2	qp	q
1	pq	p^2	p
P_{X_2}	q	p	

Совместная функция распределения СВ X_1 и X_2:

$$F(x_1, x_2) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & : \quad x_1 \leqslant 0 \text{ или } x_2 \leqslant 0, \\ q^2 & : \quad 0 < x_1 \leqslant 1 \text{ и } 0 < x_2 \leqslant 1, \\ q^2 + qp = q & : \quad 0 < x_1 \leqslant 1 \text{ и } x_2 > 1, \\ q^2 + qp = q & : \quad x_1 > 1 \text{ и } 0 < x_2 \leqslant 1, \\ 1 & : \quad x_1 > 1 \text{ и } x_2 > 1. \end{cases}$$

МГТУ ФН-12

Определение

Непрерывной двумерной случайной величиной (X, Y) *называют такую двумерную случайную величину* (X, Y), *совместную функцию распределения которой* $F(x_1, x_2) = P\{X < x, Y < y\}$ *можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:*

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Функцию $f(x, y) = f_{XY}(x, y)$ *называют совместной плотностью распределения случайных величин* X *и* Y *или плотностью распределения случайного вектора* (X, Y).

В точках непрерывности функции $f(x, y)$ имеет место следующее равенство: $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}$.

МГТУ ФН-12

Аналогичным образом вводится понятие n-мерной непрерывной случайной величины.

Определение (*)

Непрерывным случайным вектором называют n-мерный случайный вектор $\vec{X}(\omega)$, вероятность попадания которого в любую область $\mathbb{R}^n$ бесконечно малого диаметра – бесконечно мала и $\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ определена функция:

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \lim \frac{P\{\vec{X}(\omega) \subset U(\vec{x})\}}{\mu(U(\vec{x}))},$$

где $U(\vec{x})$ – окрестность точки $\vec{x}$, $\mu(U(\vec{x}))$ – мера окрестности точки $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ – плотность распределения вероятностей n-мерного случайного вектора.

МГТУ ФН-12

Теорема

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) \geqslant 0.$
2. $P\{a_1 \leqslant X < b_1, a_2 \leqslant Y < b_2\} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy.$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$
4. $P\{x < X < x + \Delta x,\ y < Y < y + \Delta y\} \approx f(x, y)\Delta x \Delta y.$
5. $P\{X = x, Y = y\} = 0.$
6. $P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy.$
7. $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx.$

МГТУ ФН-12

Доказательство.

Свойства (1)–(5) аналогичны одномерному случаю.

Свойство (6) является обобщением свойства (2): пусть $\{D_k\}_{k=1}^N$ — разбиение, т.е. $D = \bigcup\limits_k D_k$ и $D_j \cap D_i = \varnothing\ \forall i \neq j$.

Аппроксимируем D_k элементарным прямоугольником $\Delta x_i \Delta y_j = \tilde{D}_k$. Внутри каждого прямоугольника выбираем точку $\xi_{ij}(x_i, y_j)$ и вычислим $f(\xi_{ij}) = f(x_i, y_j)$. Составим следующую сумму: $\sum\limits_{i,j} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$. При $\Delta x_i, \Delta y_j \to 0$ – это будет интегральной суммой для $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$. С другой стороны, согласно свойству 4, $\sum\limits_{i,j} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \sum\limits_k P\{(X, Y) \in \tilde{D}_k\}$.

Следовательно $P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$. $\square$

МГТУ ФН-12

доказательство (продолжение).

Свойство (7). Из свойства (7) функции распределения и определения непрерывного случайного вектора имеем:

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Дифференцируя интеграл по переменному верхнему пределу и учитывая, что $f(x) = F'(x)$, имеем:

$$f_X(x) = F'_X(x) = F'_{XY}(x, +\infty) = \left(\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \right)'_x =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t_1, t_2)\, dt_2.$$

Для $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t_1, t_2)\, dt_1$ доказывается аналогично. □

МГТУ ФН-12

Пример

Пусть двумерный случайный вектор распределен равномерно в круге с центром в $(0, 0)$ и радиусом R. Найдем совместную и маргинальные функции плотности распределения.
Плотность распределения равномерного СВ имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Из условия нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} A\, dxdy = \pi A R^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi R^2}.$$

Тогда

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 > R^2, \\ \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leqslant R^2. \end{cases}$$

МГТУ ФН-12

Непрерывные двумерные случайные векторы

МГТУ МГТУ МГТУ

Одномерная плотность распределения X:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\,dy = \begin{cases} 0, & |x| > R \\ \dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x| \leqslant R \end{cases}$$

Аналогично можно получить и $f_Y(y)$.

ФН-12 ФН-12 МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12 МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12

МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12

Определение

Случайные величины X и Y называются независимыми, если $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. В противном случае случайные величины называют зависимыми.

Замечание

Из данного определения следует, что для независимых СВ X и Y события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ являются независимыми.

Утверждение

Если случайные величины X и Y независимы, то независимыми являются все события $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$ и $\{y_1 \leqslant Y < y_2\}$.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
P\{x_1 \leqslant X < x_2, y_1 \leqslant Y < y_2\} &= F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + \\
+F(x_1,y_1) &= F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) + \\
+F_X(x_1)F_Y(y_1) &= [F_X(x_2) - F_X(x_1)]\,[F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] = \\
&= P\{x_1 \leqslant X < x_2\}P\{y_1 \leqslant Y < y_2\}.
\end{aligned}
$$

□

Утверждение (б/д)

Для того чтобы случайные величины X и Y были независимые н. и д. чтобы были независимыми любые события $\{X \in A\}$ и $\{Y \in B\}$, где A и B – промежутки или объединения промежутков.

Теорема

Для того чтобы случайные величины X и Y были независимые н. и д. чтобы $\forall x, y\ f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Доказательство.

Пусть X и Y независимы, тогда $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{dF_X(x)}{dx} \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(x) f_Y(y). \end{aligned}$$

МГТУ МГТУ МГТУ ФН-12 ФН-12

доказательство (продолжение).

Пусть теперь $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

$$F_{XY}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,du\,dv =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv = F_X(x)F_Y(y).$$

$\square$

Утверждение (б/д)

Дискретные СВ X и Y являются независимыми т. и т.т., когда для всех возможных значений x_i и y_j:
$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_{X_i}p_{Y_j}$.

МГТУ ФН-12

Определение

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называют независимыми в совокупности, если

$$F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n).$$

Как и для событий, из попарной независимости не следует независимость СВ в совокупности.

Определение (*)

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называют независимыми, если $\forall m \in \{2, 3, \ldots, n\}$ и для любого набора индексов $\{i_j\}_{j=1}^{m}: \ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m = n$ и для любого набора чисел $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{m}$ имеет место равенство:

$$P\{X_{i_j} < x_{i_j}, \ \forall j = \overline{1, m}\} = \prod_{j=1}^{m} P\{X_{i_j} < x_{i_j}\}.$$

МГТУ ФН-12

Пример

Опыт состоит в однократном подбрасывании тетраэдра, грани которого пронумерованы следующим образом: на 3-х гранях стоят цифры 1, 2 *и* 3 *соответственно, а на 4-й присутствуют все цифры* 1, 2 *и* 3.

СВ X_1, X_2 *и* X_3 *принимают значения* 0 *или* 1, *причем* $X_1 = 1$, *если тетраэдр упал на грань, на которой есть* 1, *и* $X_1 = 0$ *в противном случае;* X_2 *характеризует наличие* 2, *а* X_3 — *наличие* 3.

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = 0\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \frac{1}{4} = P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1\}, \quad i \neq j.$$

Таким образом X_i *попарно независимы.*

$$P\{X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1\} = \frac{1}{4} \neq$$
$$\neq P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 1\}P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{8}.$$

Следовательно X_i, $i = \overline{1, 3}$, *не являются независимыми в совокупности.*

МГТУ ФН-12