OND TEAM

МИНИСТЕРСТВО НЕ ТВОИХ СОБАЧЬИХ ДЕЛ

ЛУЧШИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ НИКОЛАЯ ЭРНЕСТОВИЧА БАУМАНА

«ЛУЧШИЙ ВУЗ РОССИИ»

Информатика, искусственный интеллект и системы управления

Ответы на теоретические вопросы к экзамену по теоретической механике

Специалитет

Для факультетов СМ, РК, МТ, кафедры ИУ2

Допущено к использованию 16.01.2023

Перед началом использования убедительная просьба поставить звезду нашей репе
на GitHub, это поможет нам становиться лучше!
ссылка: `https://github.com/muslimitsuhide/ics2_bmstu`

Над созданием этого чуда работали:
Muslim Mitsuhide (ссылки: GitHub, VK)
Александр Шмигельский (ссылки: GitHub, VK)
Артемий Иванов, Ренат Сидоренко
Роман Макаров, Стас Хиониди

Суровый январь 2023

1 Аксиомы динамики. Инерциальная система отсчета.

1. Существуют системы отсчета, называемые инерциальными, по отношению к которым материальная точка, не испытывающая действия сил или находящаяся под действием уравновешенной системы сил, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Таким образом, первая аксиома постулирует возможность существования тел и связанных с ними систем отсчета, движущихся без ускорения, т. е. поступательно, равномерно и прямолинейно, причем любая из таких систем отсчета может быть принята за неподвижную при решении задач динамики.Никакое тело во Вселенной не является полностью изолированным от воздействий, поэтому инерциальные системы отсчета являются воображаемыми и могут быть введены с той или иной степенью приближения.

2. Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы от-счета пропорционально приложенной к точке силе и совпадает с ней по направлению. Если $\vec{F}$ — приложенная к точке сила, $\vec{a}$ — ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета, то

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ или $m\vec{a} = \vec{F}$

3. Силы взаимодействия двух материальных точек направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны и равны по модулю, т. е.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Следовательно, третья аксиома определяет условие взаимодействия между двумя материальными точками. Ее называют еще законом о равенстве сил действия и противодействия, хотя здесь имеет место только равенство модулей сил, сами же силы противоположны по направлению.

4. Ускорение, полученное точкой под действием системы сил, равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил, т. е. если ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_k, ..., \vec{F}_N$) — система сил, приложенных к точке, то

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} \vec{a}_k$$

где $\vec{a}_k = \vec{F}_k/m$ Таким образом, четвертая аксиома постулирует принцип суперпозиции сил, или принцип независимого действия. В качестве четвертой аксиомы динамики может быть принята аксиома статики о векторном сложении сил. Тогда принцип независимости действия сил превращается в следствие: для системы сходящихся сил справедливо выражение

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N) \backsim \vec{F}$ где $\vec{F} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k$

Разделив на массу, получаем

$\vec{a} = \vec{F}/m$ = $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k$/m= $\sum_{k=1}^{N} \vec{a}_k$

2 Дифференциальные уравнения движения материальной точки в векторной форме и в проекциях на декартовы и естественные оси координат.

Из второй и четвертой аксиом следует уравнение движения точки в инерциальной системе отсчета

$$\mathrm{m}\vec{a} = \vec{F}, \qquad (1)$$

где $\vec{F} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

Так как ускорение точки связано с ее радиусом-вектором соотношением $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$, а сила в рамках классической механики может быть функцией времени, положения и скорости точки, из (1) получаем векторное дифференциальное уравнение движения точки

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dr}\right) \qquad (2)$$

В проекциях на декартовы оси (базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) дифференциальные уравнения движения точки имеют вид:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \qquad .$$
$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \qquad (3)$$
$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \qquad .$$

В частных случаях дифференциальных уравнений движения точки может быть меньше. Так, при движении точки в плоскости Oxy уравнений движения будет два:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}); \qquad m\ddot{y} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y});$$

В случае движения точки по прямой будем иметь одно дифференциальное уравнение, например:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x})$$

В проекциях на естественные оси (базис $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$) уравнения движения точки имеют вид:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau; \quad m\frac{\nu^2}{\rho} = F_n; \quad F_b = 0, \qquad (4)$$

где $\nu = |\nu_\tau|$ $\nu_\tau = ds/dt, \rho$ - радиус кривизны траектории. Первое уравнение (4) является дифференциальным уравнением второго порядка относительно дуговой (естественной) координаты s, второе уравнение имеет первый порядок, а третье является условием равновесия для проекций сил на бинормаль. Проекции силы могут быть функциями переменных t, s, ds/dt.

В проекциях на оси криволинейной системы координат, например цилиндрической, уравнения движения будут такими:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r; \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}^2) = F_p; \quad m\ddot{z} = F_z \qquad (5)$$

3 Две основные задачи динамики материальной точки. Интегралы уравнений движения.

На основе дифференциальных уравнений движения материальной точки решают две задачи динамики точки.

Первая задача состоит в том, чтобы по заданному закону движения точки массой m определить силу, под действием которой происходит это движение. Часто первую задачу рассматривают как задачу управления движением, в рамках которой требуется установить характеристики воздействия, обеспечивающие заданный закон движения материальной точки.

Вторая задача состоит в определении движения точки по заданным силам и начальным условиям движения, при этом силы должны быть выражены как функции переменных, используемых для задания движения. Решение этой задачи сводится к интегрированию дифференциальных уравнений второго порядка, в процессе которого в решениях появляются произвольные постоянные, подлежащие определению. Так, в задаче о движении точки в трехмерном пространстве, решаемой на основе дифференциальных уравнений (3), общие решения будут содержать шесть произвольных постоянных :

$$mx = x(t, C_1, ..., C_6); \quad y = y(t, C_1, ..., C_6); \quad z = z(t, C_1, ..., C_6),$$

для определения которых потребуется постановка дополнительных условий. Из математики известно, что если эти условия поставлены для начальных (при t = 0) значений функций и их первых производных, т. е. в виде

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0,$$
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$

то задача (задача Коши) при некоторых ограничениях, налагаемых на правые части дифференциальных уравнений, имеет решение и причем единственное. Таким образом, приложенные к точке силы определяют только ее ускорение, движение же точки помимо сил зависит от начальных условий — положения точки в рассматриваемой инерциальной системе отсчета и ее скорости.

Замечание. Первым интегралом системы дифференциальных уравнений (13.3) называется функция $\Phi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, зависящая от координат, скоростей и времени, сохраняющая постоянное значение для любого конкретного решения системы. Выражение

$$\langle\frac{d\Phi}{dt}\rangle = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\dot{z} + \frac{1}{m}(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}F_x + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}F_y + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}F_z)$$

называется **производной по времени функции** $\Phi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ вычисленной в силу дифференциальных уравнений (13.3). Аналогичные определения можно дать для любой произвольной системы дифференциальных уравнений.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается, что функция Φ будет первым интегралом системы дифференциальных уравнений тогда и только тогда, когда её производная, вычисленная в силу этих уравнений, будет тождественно равняться нулю.

Для того, чтобы полностью найти закон движения материальной точки, достаточно найти шесть функционально независимых первых интегралов.Действительно, пусть

$$\Phi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_1$$
$$...$$
$$\Phi_6(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_2$$

4 Диф.уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета.

Неинерциальной является система отсчета, которая с ускорением движется относительно другой, инерциальной системы отсчета. Движение точки рассматривается одновременно по отношению к двум системам отсчета, т. е. является сложным (рис. 13.6). При этом предполагается:

1) движение неинерциальной системы отсчета O'XYZ относительно инерциальной Oxyz, или переносное для точки движение, задано и от движения материальной точки не зависит;

2) приложенные к точке силы в соответствии с уравнением динамики (13.1) определяют абсолютное ускорение точки — ускорение относительно инерциальной системы отсчета;

3) предметом изучения является движение точки относительно неинерциальной системы O'XYZ , т. е. относительное движение.

Представим абсолютное ускорение точки в виде трех составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_K}$$

где $\vec{a_r}, \vec{a_e}, \vec{a_K}$ - соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения, и подставим в уравнение (13.1). Разрешая полученное выражение относительно $\vec{a_r}$, находим:

$$m\vec{a_r} = \vec{F} + (-m\vec{a_r}) + (-m\vec{a_K})$$

Произведения, содержащиеся в скобках, имеют единицу измерения силы, хотя силами в истинном смысле этого термина, т. е. характеристиками взаимодействия с другими материальными телами, они не являются, а выступают в качестве некоторых поправок на неинерциальность системы от-счета. Их называют соответственно перенос-ной силой инерции $\vec{\Phi_e} = -m\vec{a_e}$ и кориолисовой силой инерции $\vec{\Phi_K} = -m\vec{a_K}$. Поскольку переносное движение предполагается заданным, то силы инерции являются известны-ми функциями времени, относительных координат и скорости точки. Формулы для ускорений в общем случае переносного движения известны из кинематики:

$$\vec{a_e} = \vec{a_{o'}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho});$$
$$\vec{a_K} = 2\vec{\omega} \times \vec{\nu_r}.$$

Таким образом, векторное уравнение движения точки в неинерциальной системе отсчета, или основной закон динамики относительного движения, имеет следующий вид:

$$m\vec{a_r} = \vec{F} + \vec{\Phi_e} + \vec{\Phi_K} \qquad (13.12)$$

Если учесть кинематические соотношения $\vec{a_r} = \tilde{d}\vec{\nu_r}/dt = \tilde{d}^2\vec{\rho}/dt^2$, уравнение (13.12) можно представить в форме дифференциального уравнения относительного движения точки, причем если точка является несвободной, то к активным силам добавится реакция связи:

$$\tilde{d}^2\vec{\rho}/dt^2 = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi_e} + \vec{\Phi_K} \qquad (13.13)$$

Записывая векторное уравнение (13.13) в проекциях на те или иные оси неинерциальной системы отсчета, получают соответствующие скалярные дифференциальные уравнения:

$$m\ddot{x} = F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{Kx}$$
$$m\ddot{y} = F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{Ky}$$
$$m\ddot{z} = F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{Kz}$$

5 Принцип относительности Галилея-Ньютона.

Рассмотрим частные случаи относительного движения точки в динамике (r)

1. Подвижная система отсчета движется поступательно: $\omega_e = 0$; $\varepsilon_e = 0 \Rightarrow a_k = 2\omega_e \times V_r = 0$; $a_e = a_0$

Тогда относительное движение точки определяем уравнением:

$$m\vec{a_e} = \vec{F} + \vec{\Phi_e} + \vec{R} \quad \text{где} \quad \vec{\Phi_e} = -ma_e\ ; \wr a_e = a_0 \wr \Rightarrow \vec{\Phi_e} = -m\vec{a_0}$$

2. Движение подвижной (неинерциальной) системы отсчета поступательное, прямолинейное, равномерное

$$\begin{cases} \omega_e = 0, \\ \varepsilon_e = 0, \\ a_0 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad a_e = 0; \quad a_k = 0$$

Т.е. в результате имеем:

$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R} \rightarrow$ совпадает с уравнением динамики для неподвижной системы отсчета.

Принцип относительности Галилея:

Никакими опытами нельзя обнаружить, движется ли инерциальная система отсчета или покоится (потому что законы динамики одинаково выполняются в обеих системах отсчета)

3. Относительное равновесие

$\vec{a}_r = 0$ (подвижной системе a=0) $\Rightarrow \vec{V}_r = const = 0, a_k = 0$(покой)

$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0$ - уравнение относительного равновесия или относительного покоя.

4. Материальная точка в подвижной системе отсчета в равновесии, но не покоится.

$$a_r = 0, \quad V_r \neq 0$$

Движение точки равномерное, прямолинейное

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k = 0$$

6 Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс. Частные случаи.

Для механической системы важное значение имеет центр масс, характеризующий распределение масс материальных точек в системе. Центр масс системы - это геометрическая точка С, положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r}_c$, проведённым из точки О (см. рис. 14.1).

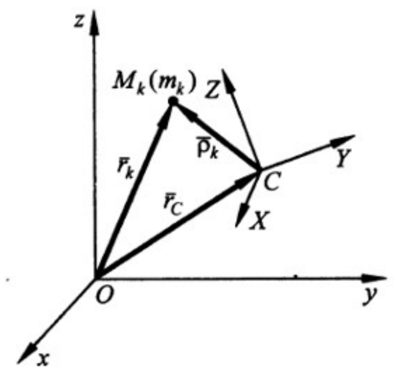


Рис. 14.1

Статический момент массы механической системы относительно какой-либо точки О равен произведению массы системы $M = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k$ на радиус вектор центра масс $\vec{r}_c$:

$$\vec{S}_o = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c,$$

откуда

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{M}.$$

Центр масс - это материальная точка, как бы обладающая массой системы.

Теорема:

Центр масс механической системы движется как материальная точка, как бы обладающая массой системы, под действием системы всех внешних сил, действующих на точки системы.

$$\frac{Md^2r_e}{dt^2} = \vec{F}^e$$

15.3. Теорема о движении центра масс механической системы

Запишем уравнения движения механической системы в виде

$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k = 1, 2, ..., N), \qquad (15.14)$$

где $\vec{a}_k$ - ускорение k-й точки, $\vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i$ равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на k-ю точку.Просуммируем уравнения (15.14) по всем точкам механической системы:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{a}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i.$$

Здесь главный вектор внутренних сил $\vec{R}^i = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i = 0.$

Продифференцировав дважды по времени выражение (14.1) для определения радиуса-вектора центра масс системы, получим

$$M\vec{\nu}_c = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{\nu}_k; \qquad (15.16)$$

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{a}_k, \qquad (15.17)$$

где $\vec{\nu}_c$ - абсолютная скорость центра масс системы.С учетом (15.17) уравнение (15.15) примет вид

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e = \vec{R}^e, \qquad (15.18)$$

где $\vec{R}^e = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e$ - главный вектор внешних сил, действующих на механическую систему.

Теорема о движении центра масс механической системы формулируется так: центр масс механической системы движется как материальная точка, как бы обладающая массой системы, под действием системы всех внешних сил, действующих на точки системы. В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат уравнения (15.18) имеют вид

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{N} F_k x^e; \quad M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^e; \quad M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^e, \qquad (15.19)$$

где $\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c$ - проекции ускорения $\vec{a}_c$ центра масс механической системы.

Из теоремы о движении центра масс вытекают два следствия.

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т. е. $\vec{R}^e = 0$, то из (15.18) следует, что $\vec{a}_c = \frac{d\vec{\nu}_c}{dt} = 0$, откуда после интегрирования получаем

$$\vec{\nu}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = C_1. \qquad (15.20)$$

Интегрируя (15.20) находим $\vec{r}_c = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2. \qquad (15.21)$ Постоянные $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ определяем из начальных условий: при t=0 $\vec{r}_c = \vec{r}_{co}, \vec{\nu}_c = \vec{\nu}_{c0}/$. Для текущего момента времени при $\vec{R}^e = 0$ окончательно имеем

$$\vec{\nu}_c = \vec{\nu}_{co}; \quad \vec{r}_c = \vec{r}_{co} + \vec{\nu}_{co}t.$$

Таким образом, если главный вектор внешних сил, действующих на точки механической системы, равен нулю, то центр масс механической системы движется прямолинейно и равномерно.

Если $\vec{\nu}_c o = 0$, т.е. центр масс в начальный момент времени находится в покое, то

$$\vec{\nu}_c = 0, \quad \vec{r}_c = \vec{r}_c o, \qquad (15.22)$$

т. е. центр масс покоится в течение всего времени движения системы при условии, что $\vec{R}^e = 0$.

2. Пусть теперь проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему, на одну из осей (например, ось Ox) равна нулю $R_x^e = \sum\limits_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)} = 0$, тогда из первого уравнения (15.19) следует $a_{cx} = \ddot{x}_c = 0$, а значит

$$\nu_{cx} = \dot{x}_c = C_1, \quad x_c = C_1 t + C_2.$$

Постоянные определяем из начальных условий: при t=0 $x_c = x_c o, \quad \nu_c x = \dot{x}_c = \dot{x}_c o$. Для любого момента времени при $R_x^e = 0$ окончательно имеем

$$\dot{x}_c = \dot{x}_c o, \quad x_c = \dot{x}_c o t + x_c o.$$

Если $\dot{x}_c o = 0$, т.е. проекция скорости центра масс на ось Ox в начальный момент времени равна нулю, то

$$\dot{x}_c = 0, \quad x_c = x_{co} \qquad (15.23)$$

в любой момент времени.

7 Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах. Частные случаи.

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в виде:

$$M\frac{d\vec{\nu_c}}{dt} = \vec{R}^{(e)}$$

откуда получим

$$\frac{d(M\vec{\nu_c})}{dt} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)}$$

Окончательно имеем:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} = \vec{R}^{(e)} \qquad (15.29)$$

Уравнение (15.29) выражает теорему об изменении количества движения механической системы: первая производная по времени от вектора количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на материальные точки этой системы.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат уравнение (15.29) имеет вид:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)}; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^{(e)}; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^{(e)} \qquad (15.30)$$

т.е. первые производные по времени от проекций количества движения механической системы на оси координат равны сумме проекций внешних сил, действующих на точки системы, на эти же оси координат.

Из уравнения (15.29) получим еще одну дифференциальную форму теоремы:

$$d\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} dt = \sum_{k=1}^{N} d\vec{S}(\vec{F}_k^{(e)}) \qquad (15.31)$$

Таким образом, дифференциал количества движения механической си-стемы равен сумме элементарных импульсов внешних сил, действующих на материальные точки системы.В проекциях на оси координат имеем:

$$dQ_x = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)} dt, \quad dQ_y = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^{(e)} dt, \quad dQ_z = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^{(e)} dt.$$

Проинтегрируем (15.31) по времени в пределах от 0 до t и поменяем места-ми операции интегрирования и суммирования:

$$(\int_{\vec{Q}_0}^{\vec{Q}} d\vec{Q}) = \int_0^t \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} dt = \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \vec{F}_k^{(e)} dt = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^{(e),}$$

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^{(e)} \qquad (15.32)$$

Здесь $\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\nu}_k, \quad \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\nu}_{k0}$ - соответственно количества движения механической системы в произвольный и начальный моменты времени; $\vec{S}_k^{(e)}$ - полный импульс внешней силы, действующей на k-ю материальную точку.

Выражение (15.32) представляет собой математическую запись теоремы об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: изменение количества движения системы за время t равно векторной сумме полных импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы за то же время.

В проекциях на оси координат имеем:

$$Q_x - Q_{x0} = \sum_{k=1}^{N} S_{kx}^{(e)}; \quad Q_y - Q_{y0} = \sum_{k=1}^{N} S_{ky}^{(e)}; \quad Q_z - Q_{z0} = \sum_{k=1}^{N} S_{kz}^{(e)}$$

Законы сохранения количества движения следуют из теоремы об изменении количества движения механической системы как частные случаи описания ее движения.

1. Пусть главный вектор всех внешних сил, приложенных к точкам системы, равен нулю: $\vec{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} = 0$

Тогда из уравнения (15.29) следует, что:

$$\vec{Q} = \vec{C} \qquad (15.33)$$

Этот результат (закон сохранения $\vec{Q}$) формулируется так: если главный вектор внешних сил, приложенных к точкам механической системы, равен нулю, то вектор количества движения системы постоянен при движении системы.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем:

$$Q_x = C_1; \quad Q_y = C_2; \quad Q_z = C_3 \qquad (15.34)$$

В (15.34) входят производные от координат точек не выше первого порядка (проекции скоростей точек), т. е. эти выражения являются первыми интегралами системы дифференциальных уравнений (15.30).

2. Пусть проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось координат равна нулю:

$R_x^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)} = 0$. Тогда из первого уравнения (15.30) следует, что:

$$Q_x = const$$

Формулируется это так: если проекция главного вектора внешних сил, действующих на точки механической системы, на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на ту же ось постоянна при движении системы.

8 Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e = \vec{R}^e, \qquad (15.18)$$

где $\vec{R}^e = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e$ - главный вектор внешних сил, действующих на механическую систему.

При поступательном движении тела его угловая скорость, а следовательно, и главный момент количеств движения относительно центра масс тождественно равны нулю. На основании теоремы о движении центра масс механической системы, уравнение (15.18) применительно к рассматриваемому случаю имеет вид:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} \qquad (16.1)$$

где m — масса тела; $\vec{a}$ — ускорение центра масс тела, равное ускорению любой его точки при поступательном движении.

Уравнение (16.1) можно также записать в виде векторного дифференциального уравнения поступательного движения твердого тела:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} \qquad (16.2)$$

В общем случае поступательного движения тело имеет три степени свободы и его движение можно задать, определив движение центра масс тела в декартовой системе координат. В проекциях на оси декартовой системы ко-ординат для (16.2) получаем:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)}; \qquad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^{(e)}; \qquad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^{(e)}$$

Начальные условия в данном случае имеют вид:

при $t = t_0 \quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0 \quad \dot{x} = x_0 \quad \dot{y} = y_0 \quad \dot{z} = z_0.$

В проекциях на оси естественной системы координат (при естественном способе задания движения центра масс в данном случае тело имеет одну степень свободы) уравнения (16.2) записывают так:

$$m\ddot{s} = \sum_{k=1}^{N} F_{k\tau}^{(e)}; \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{N} F_{kn}^{(e)}; \quad 0 = \sum_{k=1}^{N} F_{kb}^{(e)};$$

где $s = s(t)$ — закон движения центра масс тела по траектории. Начальные условия в этом случае принимают следующий вид: при $t = t_0 \quad s = s_0 \quad \dot{s} = \dot{s}_0.$

Аналогичным образом можно записать дифференциальные уравнения движения твердого тела в проекциях на оси любой другой инерциальной си-стемы координат и сформулировать начальные условия. Видно, что эти уравнения подобны дифференциальным уравнениям движения материальной точки в соответствующей системе координат.

9 Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси.

Момент количества движения материальной точки

Для характеристики движения материальной точки используют еще одну векторную меру движения — **момент количества движения**, или **кинетический момент относительно центра (точки)**.

Моментом количества движения материальной точки массой m относительно центра O называют векторную величину, равную векторному произведению радиус-вектора материальной точки, проведенного из этого центра, на количество движения точки:

$$\vec{k}_0 = \vec{M}_0(q) = \vec{r}_0 \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{\nu} \qquad (15.36)$$

Вектор момента количества движения материальной точки строят в точке O по правилу векторного произведения (рис. 15.10).

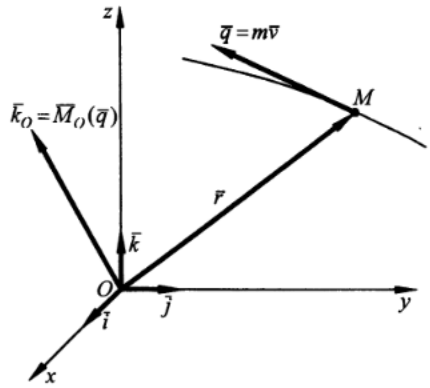


Рис. 15.10

Проекции вектора момента количества движения материальной точки относительно центра O на оси координат равны моментам количества движения относительно соответствующих осей координат, т.е.

$$(\vec{k}_0)_x = k_x, \vec{k}_0)_y = k_y, \vec{k}_0)_z = k_z$$

Так как

$$\vec{k}_0 = \vec{M}_0(\vec{q}) = \vec{r} \times m\vec{\nu} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \nu_x & \nu_y & \nu_z \end{vmatrix},$$

то моменты количества движения материальной точки относительно осей координат имеют вид:

$$k_x = M_x(m\vec{\nu}) = m(y\nu_z - z\nu_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \qquad ....$$
$$k_y = M_y(m\vec{\nu}) = m(z\nu_x - x\nu_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \quad (15.37)$$
$$k_z = M_z(m\vec{\nu}) = m(x\nu_y - y\nu_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \qquad ....$$

Единица измерения момента количества движения в СИ — килограмм-метр в квадрате на секунду (кг $\cdot$ м$^2/c$)

Главный момент количеств движения механической системы

Главным моментом количеств движения, или кинетическим моментом механической системы, относительно центра O называют геометрическую сумму векторов моментов количеств движения материальных точек системы относительно того же центра O:

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{k}_{0k} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{q}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{\nu}_k. \qquad (15.38)$$

Вектор главного момента количеств движения $\vec{K}_0$ механической системы относительно центра O строят в точке O (рис. 15.11).

Проекции главного момента количеств движения $\vec{K}_0$ системы на оси ко-ординат равны главным моментам количеств движения системы относительно соответствующих осей координат:

$$(\vec{K}_0)_x = K_x, \quad (\vec{K}_0)_y = K_y, \quad (\vec{K}_0)_z = K_z$$

С учетом (15.38) запишем главные моменты количеств движения механической системы относительно осей координат:

$$K_x = \sum_{k=1}^{N} M_x(m_k\vec{\nu}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k); \qquad .$$
$$K_y = \sum_{k=1}^{N} M_y(m_k\vec{\nu}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k); \qquad (15.39)$$
$$K_z = \sum_{k=1}^{N} M_z(m_k\vec{\nu}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k). \qquad .$$

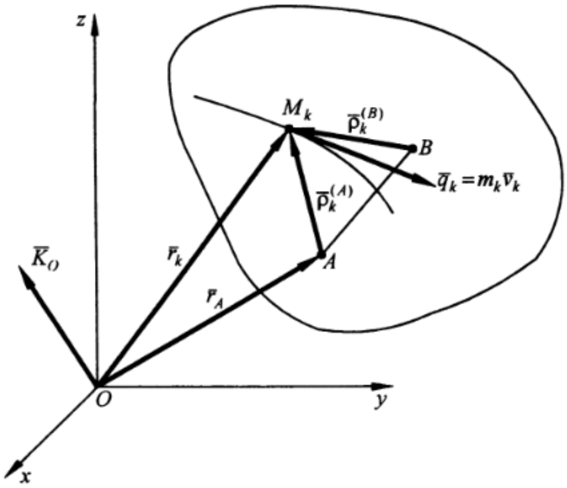


Рис. 15.11

Главный момент количеств движения относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 15.12). Определим главный момент количеств движения этого тела относительно оси Oz. Согласно определению:

$$K_z = \sum_{k=1}^{N} M_z(m_k \vec{\nu}_k) \qquad (15.43)$$

Проекция скорости точки A_k тела на касательную к траектории ее движения:

$$\nu_{k_\tau=\omega_z h_k,}$$

а момент количества движения относительно оси Oz:

$$M_z(m_k \vec{\nu}_k) = m_k \nu_{k_\tau} \ h_k = \omega_z m_k h_k^2,$$

где $\omega_z \neq 0 \quad (\omega_x = \omega_y = 0)$. Подставим $M_z(m_k \vec{\nu}_k)$ в выражение (15.43) и получим:

$$K_z = \omega_z \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2 = \omega_z J_z,$$

где $J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2$ - момент инерции тела относительно оси вращения Oz. Окончательно имеем:

$$K_z = J_z \omega_z \qquad (15.44)$$

Знак K_z— главного момента количеств движения твердого тела относительно оси вращения — определяется знаком проекции угловой скорости ω_z.

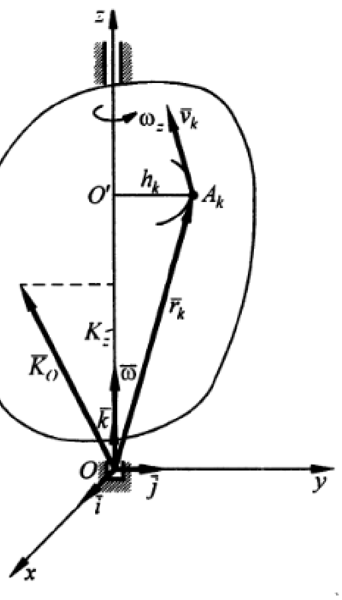


Рис. 15.12

Таким образом, главный момент количеств движения вращающегося тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на проекцию угловой скорости вращения тела на ось вращения.

10 Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы материальных точек. Законы сохранения кинетического момента.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Запишем уравнение движения материальной точки:

$$m\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \vec{F}$$

и умножим его векторно слева на радиус-вектор $\vec{r}$ (15.15)

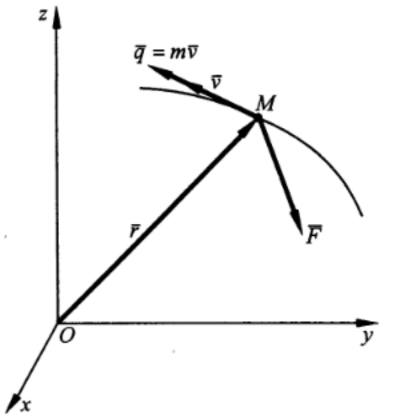


Рис. 15.15

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{\nu}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{\nu}$$

Векторное произведение коллинеарных векторов $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{\nu} = \vec{\nu} \times m\vec{\nu} = 0$, поэтому получаем:

$$\frac{d(\vec{r} \times m\vec{\nu})}{dt} = \frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0(\vec{F})$$

или

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}) \quad (15.54)$$

Уравнение (15.54) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки: первая производная по времени от момента количества движения точки относительно центра O равна моменту равнодействующей силы относительно того же центра O.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеем:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\vec{F}) \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\vec{F}) \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\vec{F}) \qquad (15.55)$$

Теорема об изменении главного момента количеств движения механической системы

Рассмотрим механическую систему M_k (k=1,2,...,N), состоящую из N материальных точек, к каждой из которых приложены равнодействующие внешних $\vec{F}_k^{(e)}$ и внутренних $\vec{F}_k^{(i)}$ сил. Для каждой точки M_k запишем теорему об изменении момента количества движения относительно неподвижного центра O (рис. 15.16):

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k\vec{\nu}_k) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)} + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} \qquad (15.56)$$

Просуммировав (15.56) по всем точкам:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k\vec{\nu}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)}$$

и преобразовав левую часть уравнения, получим:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k\vec{\nu}_k) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_k \times m_k\vec{\nu}_k) = \frac{d\vec{K}_0}{dt}$$

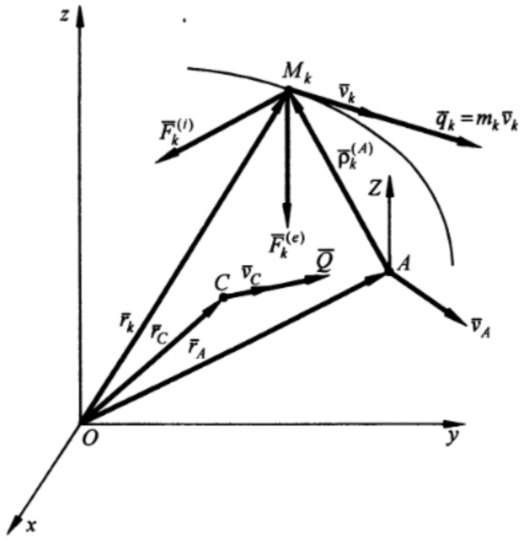


Рис. 15.16

$\sum\limits_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{\nu}_k$ - главный момент количеств движения механической системы относительно центра О.

Главный момент внутренних сил:

$$\vec{L}_0^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} = 0 \qquad (15.57)$$

а главный момент внешних сил:

$$\vec{L}_0^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}) \qquad (15.58)$$

Окончательно имеем:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}) = \vec{L}_0^{(e)} \qquad (15.59)$$

Уравнение (15.59) выражает теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы: первая производная по времени от главного момента количеств движения механической системы относительно неподвижного центра О равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем соотношения, выражающие теоремы об изменении главного момента количеств движения системы относительно осей координат:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_x(\vec{F}_k^{(e)}) = L_x^{(e)}; \qquad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_y(\vec{F}_k^{(e)}) = L_y^{(e)}; \qquad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^{(e)}) = L_z^{(e)} \qquad (15.60)$$

Законы сохранения главных моментов количеств движения системы

Законы сохранения моментов количества движения и главных моментов количеств движения при движении материальной точки и механической системы записываются одинаково, так как материальная точка есть механическая система, состоящая из одной точки. Рассмотрим частные случаи теоремы об изменении главного момента количеств движения механической системы.

1. Пусть главный момент внешних сил системы относительно центра О равен нулю, т.е. $\vec{L}_0^{(e)} = 0$. Тогда, согласно (15.59),

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = 0 \qquad (15.65)$$

Интегрируя (15.65), получаем:

$$\vec{K}_0 = \overrightarrow{const},$$

т.е. главный момент количеств движения механической системы относительно центра О постоянен по модулю и направлению. Это уравнение выражает закон сохранения главного момента количеств движения механической системы относительно центра О в векторной форме: если главный момент внешних сил относительно неподвижного центра О равен нулю, то главный момент количеств движения механической системы относительно этого центра постоянен по модулю и направлению.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем уравнения:

$$K_x = C_1; \quad K_y = C_2; \quad K_z = C_3,$$

которые выражают законы сохранения главных моментов количеств движения системы относительно осей координат (частные случаи теоремы об изменении главного момента количеств движения системы относительно осей координат) и представляют собой первые интегралы дифференциальных уравнений для механической системы.

2. Пусть сумма моментов внешних сил, действующих на механическую систему, относительно оси Ox равна нулю, т.е. $L_x^{(e)} = 0$. Тогда, согласно (15.60),

$$\frac{dK_x}{dt} = 0; \quad K_x = const$$

Следовательно, если главный момент внешних сил, действующих на механическую систему, относительно какой-либо оси равен нулю, то главный момент количеств движения механической системы относительно этой оси постоянен.

Если рассматривается тело или система тел, вращающихся вокруг непод-вижной оси Oz с угловой скоростью ω_z и $L_z^{(e)} = 0$, то $K_z = J_z\omega_z = const$. Если в начальном состоянии угловая скорость и момент инерции системы относительно оси Oz будут соответственно ω_{0z} и J_{0z}, то

$$J_{0z}\omega_{0z} = const \quad \text{и} \quad J_z\omega_z = J_{0z}\omega_{0z}$$

Можно рассказать про скамью Жуковского, но это уж явно на ваше усмотрение и желательно устно:)

11 Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения.

Главный момент количеств движения относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 15.12). Определим главный момент количеств движения этого тела относительно оси Oz. Согласно определению:

$$K_z = \sum_{k=1}^{N} M_z(m_k\vec{\nu}_k) \qquad (15.43)$$

Проекция скорости точки A_k тела на касательную к траектории ее движения:

$$\nu_{k_\tau} = \omega_z h_k,$$

а момент количества движения относительно оси Oz:

$$M_z(m_k\vec{\nu}_k) = m_k\nu_{k_\tau}\, h_k = \omega_z m_k h_k^2,$$

где $\omega_z \neq 0 \quad (\omega_x = \omega_y = 0)$. Подставим $M_z(m_k\vec{\nu}_k)$ в выражение (15.43) и получим:

$$K_z = \omega_z \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2 = \omega_z J_z,$$

где $J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2$ - момент инерции тела относительно оси вращения Oz. Окончательно имеем:

$$K_z = J_z\omega_z \qquad (15.44)$$

Знак K_z— главного момента количеств движения твердого тела относительно оси вращения — определяется знаком проекции угловой скорости ω_z.

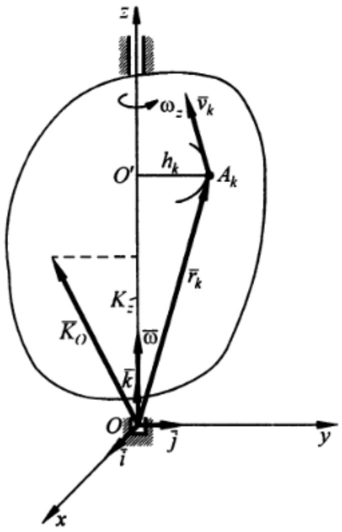


Рис. 15.12

Таким образом, главный момент количеств движения вращающегося тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на проекцию угловой скорости вращения тела на ось вращения.

12 Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси.

(15.60) $\frac{dK_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N} M_x(\vec{F}_k^{(e)}) = \vec{L}_x^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N} M_y(\vec{F}_k^{(e)}) = \vec{L}_y^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^{(e)}) = \vec{L}_z^{(e)};$

В случае вращения вокруг неподвижной оси тело имеет одну степень свободы. Для получения дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно оси вращения Oz, записав (15.60) в виде:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^{(e)})$$

где для твердого тела $K_z = J_z\omega_z = J_z\dot{\varphi}$. Тогда

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^{(e)}) \qquad (16.3)$$

Выражение (16.3) называется дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Его можно также записать в виде

$J_z\frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^{(e)})$ или $J_z\varepsilon_z = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^{(e)})$

Начальные условия для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси следующие: $t = t_0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \omega_z = \dot{\varphi}_0$

13 Моменты инерции системы и твердого тела. относительно оси и полюса. Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления.

При рассмотрении вращательных движений твердых тел вводят понятия моментов инерции, которые характеризуют распределение массы тела по отношению к точке (полюсу) оси или плоскости.
Моментом инерции материальной точки M относительно точки O называется произведение массы m этой точки на квадрат расстояния r до точки O:

$$j_0 = mr^2$$

Рассмотрим механическую систему,состоящую из N материальных точек с массами $m_k(k=1,2,...,N)$.Момент инерции механической системы, состоящей из N материальных точек M_k, относительно точки (полюса) О равен сумме моментов инерции этих точек (рис.14.2) (Будет внизу)

$$J_0=\sum_{k=1}^{N} j_0^{(k)}=\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2$$

Момент инерции относительно точки называют полярным моментом инерции.

Моментом инерции механической системы материальных точек относительно оси Ol называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до оси Ol (см.рис.14.2):

$$J_i=\sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2$$

Для тела, имеющего непрерывное распределение массы, имеем соответственно интегралы по массе М:

$$J_0=\int_{(M)} r^2dm \; ; J_i=\int_{(M)} h^2dm$$

Величина

$$\rho_i=\sqrt{\frac{J_i}{M}} \qquad (14.4)$$

называется радиусом инерции тела относительно оси Ol. Тогда момент инерции можно представить как

$$J_i=M\rho_i^2$$

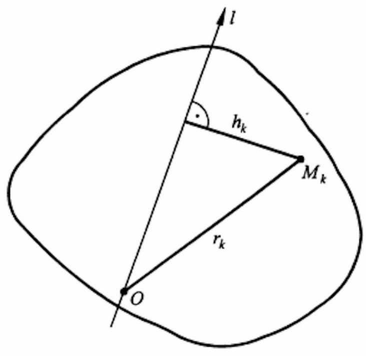


Рис. 14.2

Значения ρ_i можно вычислить по формуле (14.4), при этом М M и J_i определяют экспериментально.

Единица измерения момента инерции килограмм на квадратный метр (кг ^{2})

Моменты инерции относительно декартовых осей Ox,Oy,Oz и полюса О определяют по формулам (рис.14.3)

$$J_x=\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2)$$
$$J_y=\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+z_k^2) \qquad (14.5)$$
$$J_z=\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2)$$
$$J_{()}=\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2=\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2+z_k^2) \qquad (14.6)$$

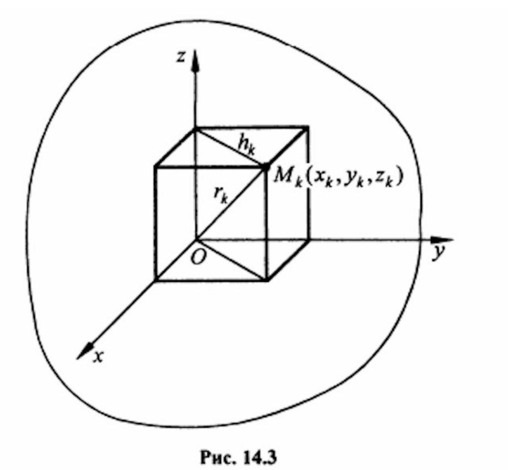


Рис. 14.3

Сложив левые и правые части уравнений системы (14.5), получим

$$2J_{()}=J_x+J_y+J_z \qquad (14.7)$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей Oxy,Oyz,Oxz соответственно равны:

$$J_{Oxy} = \sum_{k=1}^{N} m_k z_k^2 \; J_{Oyz} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2 \; J_{Oxz} = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2 \qquad (14.8)$$

Для тела,имеющего непрерывное распределение массы, осевые моменты инерции относительно осей координат определяются интегралами по массе M:

$$J_x = \int_M (y^2 + z^2) dm \; J_y = \int_M (x^2 + z^2) dm \; J_z = \int_M (x^2 + y^2) dm$$

Зависимость моментов инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

Найдем зависимость между моментами инерции механической системы относительно параллельных осей Oz и Cz (рис 14.4)

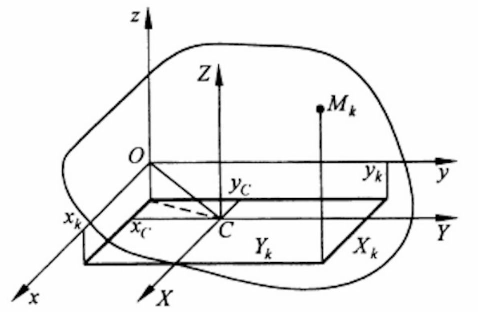


Рис. 14.4

Выберем две системы прямоугольных декартовых координат Oxyz и CXYZ оси параллельны, а точка C- центр масс системы. Моменты инерции относительно осей Oz и Cz будут соответсвенно равны

$$j_{Oz} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2); \, j_{CZ} = \sum_{k=1}^{N} m_k (X_k^2 + Y_k^2)$$

Координаты точки M_k в рассматриваемых системах связаны уравнениями

$$x_k = X_k + x_c \; ; \, y_k = Y_k + y_c$$

Подставив выражение для J_{Oz} эти соотношения, получим $J_{Oz} = \sum_{k=1}^{N} m_k [(X_k + x_c)^2 + (Y_k + y_c)^2] = \sum_{k=1}^{N} m_k (X_k^2 + Y_k^2) + 2x_c \sum_{k=1}^{N} m_k X_k + 2y_c \sum_{k=1}^{N} m_k Y_k + (x_c^2 + y_c^2) \sum_{k=1}^{N} m_k$

Здесь $\sum_{k=1}^{N} m_k = M$ - масса системы; $\sum_{k=1}^{N} m_k X_k = M X_c = 0 \; \sum_{k=1}^{N} m_k Y_k = M Y_c = 0$, так как $X_c = Y_c = 0; x_c^2 + y_c^2 = d^2$, d - расстояние между осями Oz и CZ

Окончательно имеем

$$J_{Oz} = J_{CZ} + Md^2$$

Полученное выражение представляет собой математическую запись теоремы Гюйгенса-Штейнера, которую можно сформулировать так: момент инерции системы относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс системы, и произведения массы системы на квадрат расстояния между параллельными осями

14 Эллипсоид инерции. Главные оси инерции симметричных твердых тел.

Эллипсоид инерции — поверхность второго порядка, построенная в любой точке — характеризует спектр моментов инерции тела относительно осей, проходящих через эту точку. Для построения этой поверхности на каждой оси Ol, проходящей через точку O, откладывают от этой точки отрезок

$$OK = \frac{1}{\sqrt{J_l}}$$

Геометрическое место концов отрезков OK (точек K) и является эллипсо-идом инерции.Получим уравнение эллипсоида инерции в системе координат Oxyz (рис. 14.18). Подставив выражения $\cos\alpha = \frac{x}{OK} = \sqrt{J_l}x, \quad \cos\beta = \frac{y}{OK} = \sqrt{J_l}y, \quad \cos\gamma = \frac{z}{OK} = \sqrt{J_l}z$ в формулу (14.13), получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_x yxy - 2J_x zxz - 2J_y zyz = 1 \qquad (14.15)$$

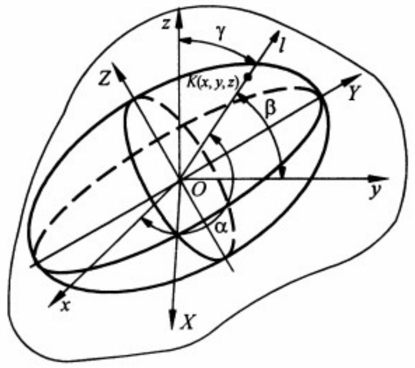


Рис. 14.18

Для каждой точки тела существует свой эллипсоид инерции. Если оси ко-ординат направить по взаимно перпендикулярным главным осям эллипсоида инерции (OX, OY, OZ на рис. 14.18), то его уравнение будет иметь следующий вид:

$$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = 1 \qquad (14.16)$$

Главные оси (оси симметрии) эллипсоида инерции, построенного в точке твердого тела, называются **главными осями инерции** для данной точки тела. Следовательно, в каждой точке тела имеются три главные оси инерции, которые являются главными осями эллипсоида инерции, построенного в данной точке.Эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела, называется **центральным эллипсоидом инерции**, а его главные оси — главными центральными осями инерции тела. Моменты инерции тела относительно главных осей инерции в точке называются **главными моментами инерции** для этой точки тела. В формуле (14.16) это J_X, J_Y, J_Z.

Моменты инерции относительно главных центральных осей инерции называют главными центральными моментами инерции тела и обозначают $J_C X, J_C Y, J_C Z$. Сравнив уравнение (14.16) с уравнением эллипсоида инерции, записанным в канонической форме:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad (14.17)$$

получим

a = $\frac{1}{\sqrt{J_X}}; \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_Y}}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_Z}},$

т. е. большей оси эллипсоида инерции соответствует меньший главный момент инерции тела для данной точки.Эллипсоид инерции называется **трехосным**, если все главные моменты инерции для точки тела различны, и **эллипсоидом**вращения, если два главных момента инерции для точки тела равны. Все прямые, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси вращения, являются главными осями инерции тела в точке.

Эллипсоид инерции становится сферой, если все главные моменты инерции тела в точке равны. Все оси инерции, проходящие через центр сферы, являются главными.Уравнения эллипсоида инерции (14.16), (14.17) не содержат центробежных моментов инерции, т. е. центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю:

$$J_X Y = J_X Z = J_Y Z = 0. \qquad (14.18)$$

Справедливо и обратное утверждение: чтобы оси прямоугольной системы координат были главными осями инерции, необходимо и достаточно выполнить условия (14.18).Запишем формулу (14.13), когда оси OX, OY, OZ являются главными осями инерции в точке O. В этом случае все центробежные моменты инерции равны нулю и

$$J_l = J_X \cos^2\alpha + J_Y \cos^2\beta + J_Z \cos^2\gamma. \qquad (14.19)$$

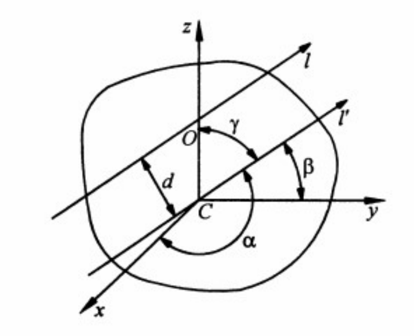


Рис. 14.19

С помощью этой формулы при известных главных моментах инерции в точке O определяют момент инерции относительно оси Ol.Моменты инерции относительно произвольной оси Ol (рис. 14.19), согласно выражению (14.19) и теореме Гюйгенса — Штейнера, вычисляют по формуле

$$J_l = J_Y + Md^2 = J_C X \cos^2\alpha + J_C Y \cos^2\beta + J_C Z \cos^2\gamma + Md^2,$$

где $J_C X, J_C Y, J_C Z, M, d$ — главные центральные моменты инерции тела, его масса и расстояние между осью Ol и параллельной ей осью Cl′, проходящей через центр масс тела.

15 Кинетический момент твердого тела при сферическом движении.

Твёрдое тело с закреплённой точкой при движении в любой момент времени имеет угловую скорость $\vec{\omega}$.

Главный момент количеств движения тела относительно неподвижной точки

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{\nu}_k,$$

где $\vec{\nu}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$.

Тело разбито на N элементов с массой m_k и абсолютной скоростью $\vec{\nu}_k$ (рис. 15.13).

Проекция $\vec{K}_O$ на оси $O_x yz$, а следовательно, и главные моменты количеств движения тела относительно осей координат, и проекции скорости точки $\vec{\nu}_k$ на оси координат определяются формулами (15.39) и (4.7). С учётом (15.39) и (4.7) для оси O_z получаем

$$K_x = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k \nu_k z - z_k \nu_k y) = \sum_{k=1}^{N} m_k [y_k(\omega_x y_k - \omega_y x_k) - z_k(\omega_z x_k - \omega_x z_k)] =$$

$$\omega_x \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + z_k^2) - \omega_y \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k - \omega_z \sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k.$$

Проекции угловой скорости здесь являются кинематическими инвариантами и вынесены за знаки сумм, а суммы есть осевой J_x и центробежные $J_x y, J_x z$ моменты инерции. Аналогично можно получить зависимости для K_y, K_z.

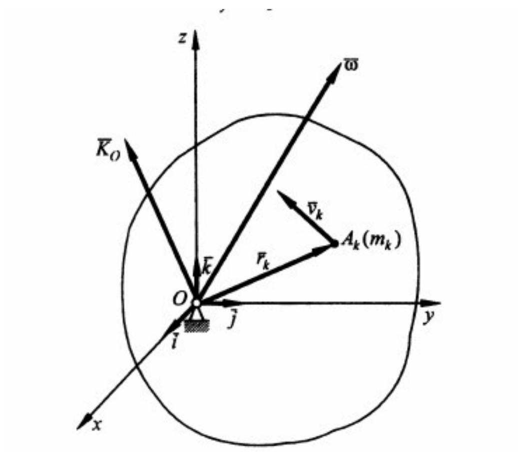


Рис. 15.13

Окончательно формулы для главных моментов количеств движения тела относительно осей координат с началом в неподвижной точке примут вид

$$K_x = J_x\omega_x - J_xy\omega_y - J_xz\omega_z;$$

$$K_y = -J_yx\omega_x + J_y\omega_y - J_yz\omega_z;$$

$$K_z = -J_zx\omega_x - J_zy\omega_y + J_z\omega_z.$$

Уравнения (15.46) имеют одинаковый вид как для неподвижных, так и для подвижных, например, жёстко связанных с телом, осей. Главный момент количеств движения твёрдого тела относительно точки О определяется по формуле

$$\vec{K}_O = K_z\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}$$

независимо от того, какие оси координат выбраны. Использовав выражение для тензора инерции (14.14) и правило умножения тензора на вектор-столбец проекций мгновенной угловой скорости тела, получим

$$\vec{K}_O = J\vec{\omega},$$

где

$$\vec{K}_O = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix}$$

;

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

.

Выражения (15.46) упрощаются, если для тела выбранные оси являются главными осями инерции в точке О (т.е. $J_XY = J_XZ = J_YZ = 0$). Тогда

$$K_X = J_X\omega_X; \quad K_Y = J_Y\omega_Y; \quad K_Z = J_Z\omega_Z.$$

16 Кёнигова система отсчета. Кинетический момент системы материальных точек при сложном движении.

Введём подвижную систему координат CXYZ, которая движется поступательно по отношению к инерциальной системе отсчёта O_{xyz} и начало которой связано с центром масс С системы. Подвижную систему CXYZ называют кёнинговой системой координат (рис. 15.14).

Для краткости движение механической системы по отношению к CXYZ будем называть движением системы относительно её центра масс. Запишем выражение $\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k$, справедливое в любой момент времени движения механической системы, и продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_k}{dt}.$$

Тогда

$$\vec{\nu}_k = \vec{\nu}_C + \vec{\nu}_k^r.$$

Здесь $\vec{\nu}_k$ - абсолютная скорость точки M_k, а $\vec{\nu}_C$ - абсолютная скорость центра масс механической системы. Докажем, что $\vec{\nu}_k^r$ - относительная скорость точки M_k по отношению к системе координат CXYZ.

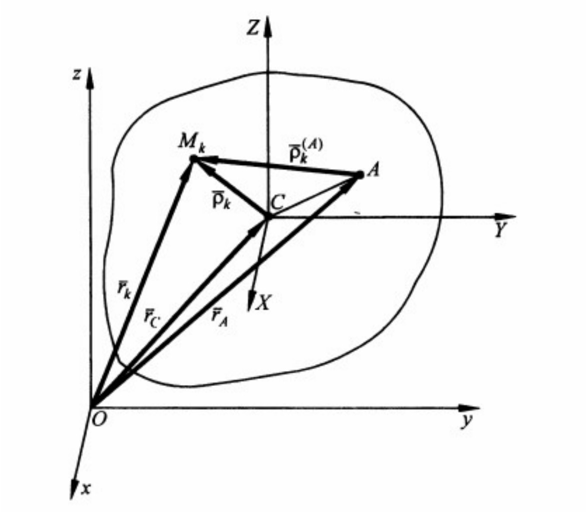


Рис. 15.14

Согласно формуле Бура,

$$\frac{d\vec{\rho}_k}{dt} = \frac{\widetilde{d\vec{\rho}_k}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k,$$

где $\frac{\widetilde{d\vec{\rho}_k}}{dt}$ - локальная производная в подвижной системе координат. Но при поступательном движении системы CXYZ

$$\frac{\widetilde{d\vec{\rho}_k}}{dt} = \vec{\nu}_k^r = \frac{d\vec{\rho}_k}{dt}.$$

Главный момент количеств движения механической системы относительно неподвижного центра O для абсолютного движения системы относительно неподвижной (инерциальной) системы координат O_{xyz} равен (см. рис. 15.11)

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{\nu}_k. \qquad (15.50)$$

Подставляя в (15.50) выражения для $\vec{r}_k$ и $\vec{\nu}_k$, после некоторых преобразований получаем

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_C + \vec{\rho}_k) \times m_k(\vec{\nu}_C + \vec{\nu}_k^r) = \vec{r}_C \times \vec{\nu}_C \sum_{k=1}^{N} m_k + \vec{r}_C \times \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\nu}_k^r + \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\rho}_k \times \vec{\nu}_C + \sum_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times m_k \vec{\nu}_k^r. \qquad (15.51)$$

Здесь $\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\rho}_k = M\vec{\rho}_C = 0$, так как радиус вектор центра масс относительно центра масс $\vec{\rho}_C = 0$, а следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\nu}_k^r = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\rho}_k\right) = 0,$$

т.е. количество движения системы в её движении относительно центра масс равно нулю. Таким образом, уравнение (15.51) принимает вид

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M\vec{\nu}_C + \vec{K}_C^r = \vec{M}_O(\vec{Q}) + \vec{K}_C^r, \qquad (15.52)$$

где $\vec{K}_C^r = \sum_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times m_k \vec{\nu}_k^r$ - главный момент количеств движений механической системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к уентру масс (по отношению к системе координат CXYZ, движущейся поступательно вместе с центром масс).

Таким образом, главный момент количеств движения механической системы относительно неподвижного центра O для обсолютного движения системы равен векторной сумме момента вектора количества абсолютного движения системы (приложенного в центре масс) относительно того же центра, и главного момента количеств движения системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к центру масс. В проекции на ось O_z(CZ) формула (15.52) принимает вид

$$K_z = M_z() + K_{CZ}^r, \qquad (15.53)$$

где K_{CZ}^r - главный момент количеств движения системы относительно оси CZ, проходящей через центр масс системы праллельно оси O_z.

При плоскопараллельном движении твёрдого тела, если ось CZ перпендикулярна плоскости движения тела, $K_{CZ}^r = J_{CZ}\omega_Z$, где J_{CZ} - момент инерции тела относительно оси CZ (относительным движением тела является его вращение вокруг оси CZ).

17 Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс.

Пусть подвижная система координат CXYZ связана с цент ром масс и движется поступательно относительно неподвижной системы O_{xyz} (рис. 15.17). Согласно теореме об изменении главного момента количеств движения системы относительно центра O для абсолютного движения механической системы,

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^r$$

,

а также с учётом (15.52) и $\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k$ запишем

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_C \times \vec{Q} + \vec{K}_C^r] = \frac{d\vec{r}_C}{dt} \times \vec{Q} + \vec{r}_C \times \frac{d\vec{Q}}{dt} + \frac{d\vec{K}_C^r}{dt} = \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_C + \vec{\rho}_k) \times \vec{F}_k^e$$

.

Но $\frac{d\vec{r}_C}{dt} \times \vec{Q} = \vec{\nu}_C \times M\vec{\nu}_C = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов. Используя теорему об изменении количества движения механической системы $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e$, получаем

$$\frac{d\vec{K}_C^r}{dt} = \vec{r}_C \times (\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e - \frac{d\vec{Q}}{dt}) + \sum_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^e$$

.

Окончательно имеем

$$\frac{d\vec{K}_C^r}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^e = \vec{L}_C^e, \qquad (15.63)$$

где $\sum\limits_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^e = \vec{L}_C^e$ - главный момент внешних сил относительно центра масс C.

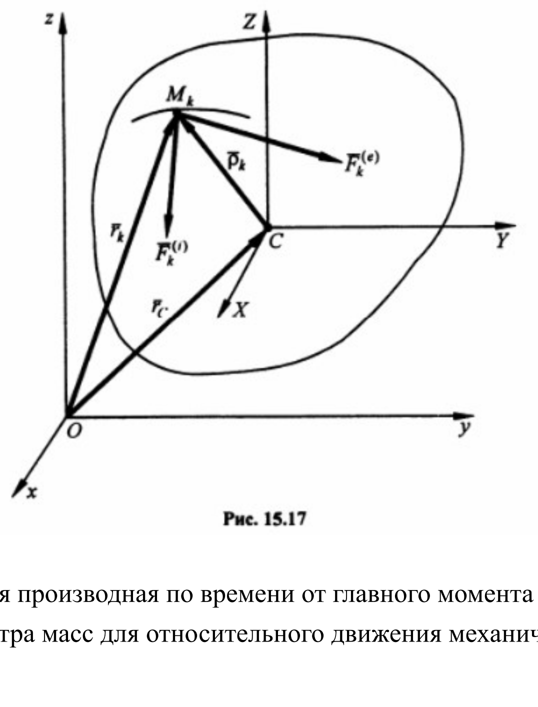


Рис. 15.17

Сформулируем теорему: первая производная по времени от главного момента количеств движения системы, вычисленного относительно центра масс для относительного движения механической системы по отношению к центру масс (по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс), равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы, относительно центра масс.

В проекциях на оси подвижной системы координат CXYZ имеем

$$\frac{dK^r_{CX}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_{CX}(\vec{F}^e_k) = L^e_{CX};$$

$$\frac{dK^r_{CY}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_{CY}(\vec{F}^e_k) = L^e_{CY}; \qquad (15.64)$$

$$\frac{dK^r_{CZ}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_{CZ}(\vec{F}^e_k) = L^e_{CZ}$$

.

Уравнения (15.64) выражают теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно осей, проходящих через центр масс, при относительном движении механической системы по отношению к центру масс.

18 Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Плоское движение твердого тела

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} = \vec{R}^{(e)} \qquad (15.18)$$

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела получим на основании теорем о движении центра масс и об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру масс.

Введем неподвижную систему координат, например Oxyz, которой, согласно (15.18), для центра масс тела будем иметь

$$m\ddot{\vec{r}_c} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)}, \quad (16.4)$$

а также подвижную систему координат CXYZ, имеющую начало в центре масс тела и перемещающуюся относительно системы Oxyz поступательно, причем плоскости CXY и Oxy указанных систем координат будем считать совпадающими с плоскостью, в которой движется центр масс тела (рис. 16.2). Теорема об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру масс для твердого тела в проекции на ось CZ подвижной системы координат выражается уравнением (15.64)

$$\frac{\mathrm{d}K_{CZ}^{(r)}}{\mathrm{d}} = \sum_{k=1}^{N} M_{CZ}(\vec{F}_k^{(e)})$$

в котором главный момент количеств движения тела в его относительном вращении вокруг оси CZ подвижной системы координат

$$K_{CZ}^{(r)} = J_{CZ}\omega_z$$

Здесь J_{CZ} — момент инерции тела относительно оси CZ, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения тела.

Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее вращение твердого тела относительно оси CZ, имеет вид

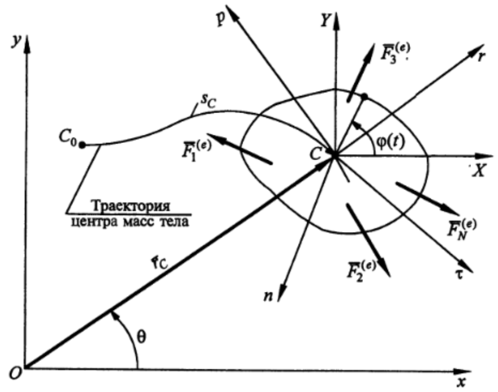


Рис. 16.2

$$J_{CZ}\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} M_{CZ}(\vec{F}_k^{(e)}). \quad (16.5)$$

Дифференциальные уравнения (16.4) и (16.5) полностью описывают плоское движение твердого тела.Векторное уравнение (16.4) можно записать в проекциях на оси любой инерциальной системы координат. Так, в проекциях на оси Ox и Oy декартовой системы координат получаем

$$m\ddot{x_C} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)}; m\ddot{y_C} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^{(e)}. \quad (16.6)$$

В проекциях на оси полярной системы координат имеем

$$m(\ddot{r_C} - r_C\dot{\theta}^2) = \sum_{k=1}^{N} F_{kr}^{(e)}; m(r_C\ddot{\theta} + 2\dot{r_C}\dot{\theta}) = \sum_{k=1}^{N} F_{k\rho}^{(e)}, \quad (16.7)$$

где r_C и θ — полярные координаты центра масс тела в неподвижной системе отсчета (на рис. 16.2 полярная ось совмещена с осью Ox, а полярная координата $r_C = OC = |\vec{r}_C|$).

Наконец, в проекциях на касательную и нормальную оси естественной системы координат уравнение (16.4) принимает следующий вид:

$$m\ddot{s_C} = \sum_{k=1}^{N} F_{k\tau}^{(e)}; m\frac{\dot{s_c^2}}{\rho} = \sum_{k=1}^{N} F_{kn}^{(e)}. \quad (16.8)$$

Здесь $s_C = s_C(t)$ — закон движения центра масс по траектории (на рис. 16.2 начало отсчета S_C принято в точке C_0); ρ — радиус кривизны траектории центра масс тела.

Системы уравнений (16.5) и (16.6), (16.5) и (16.7), (16.5) и (16.8) называются дифференциальными уравнениями плоского движения твердого тела в со-ответствующей системе координат.Начальные условия в общем случае можно задать, например, так:

при $t = t_0$

$$x_C = x_0, y_C = y_0, \varphi = \varphi_0, \dot{x_C} = \dot{x_0}, \dot{y_C} = \dot{y_0}\dot{\varphi} = \dot{\varphi_0}$$

или

$$r_C = r_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0, \dot{r_C} = \dot{r_0}, \dot{\theta} = \dot{\theta_0}, \dot{\varphi} = \dot{\varphi_0}$$

или

$$s_C = s_0, \varphi = \varphi_0, \dot{s_c} = \dot{s_0}, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$$

В зависимости от числа степеней свободы тела для описания его плоского движения можно использовать от одной до трех обобщенных координат, при необходимости выражая через них координаты, используемые в приведенных выше уравнениях и начальных условиях

19 Элементарная и полная работа силы. Мощность. Работа равнодействующей силы.

Изменение кинетической энергии механической системы связано с работой сил, приложенных к этой системе. **Элементарная работа силы.** Пусть точка приложения силы $\vec{F}$ перемещается по криволинейной траектории из положения M_O в положение M_1 (рис. 15.29). Разобьём перемещение точки М по дуге $M_o M_1$ на элементарные (бесконечно малые) перемещения ds и определим работу силы на каждом та-ком перемещении

$$d'A(\vec{F}) = Fds \cdot cos\alpha, \qquad (15.85)$$

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{\nu}$ в точке М.

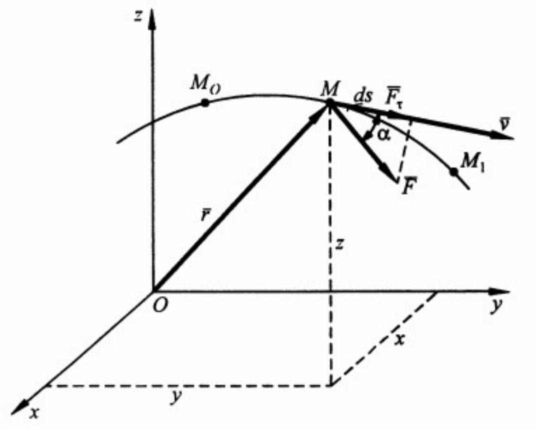


Рис. 15.29

Формула (15.85) определяет элементарную работу силы, обозначение d' используется для того, чтобы подчеркнуть, что выражение для элементарной работы не всегда является полным дифференциалом. Величина d'A скаляр-ная, ее знак определяется знаком функции $\cos\alpha$. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то d'A = 0, если проекция силы направлена в сторону, противолежащую перемещению, то d'A < 0. Так как $F\cos\alpha = F_\tau$, то формулу (15.85) можно представить в виде

$$d'A = F_\tau ds. \qquad (15.86)$$

Таким образом, элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.

Поскольку $ds = |d\vec{r}|$, то согласно (15.85),

$$d'A = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha,$$

или

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (15.87)$$

Следовательно, элементарная работа силы равна скалярному произведению векторов силы и дифференциала радиуса-вектора точки ее приложения.

Так как $d\vec{r} = \vec{\nu}dt$, представим выражение (15.87) в виде

$$d'A = \vec{F} \cdot \vec{\nu}dt = (\vec{F}dt) \cdot \vec{\nu}. \qquad (15.88)$$

Таким образом, элементарная работа силы равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки ее приложения.Если скалярное произведение записать в аналитическом виде, то форму-лу (15.87) можно представить в следующем виде:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Полная работа силы. Полную рабоу силы $\vec{F}$ на перемещении точки из положения M_O в положение М определяют как предел суммы её элементарных работ, т.е.

$$A(\vec{F}) = \lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{N} d'A_k,$$

где $d'A_k$ - работа силы $\vec{F}$ на k-м элементарном перемещении, на которые разбита криволинейная дуга $M_O M$. Сумма (15.89) является интегральной суммой определения криволиней-ного интеграла, поэтому

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^{M} d'A.$$

Используя различные формулы для определения элементарной работы, получаем

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^{M} F_\tau ds,$$

или

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^{M} \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_0}^{M} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Если же сила является функцией времени, то, согласно (15.88), работа силы $\vec{F}$ на промежутке времени от 0 до t, соответствующем точкам M_0 и М, определяется выражением

$$A(\vec{F}) = \int_{0}^{t} \vec{F} \cdot \vec{\nu}dt. \qquad (15.90)$$

Работа силы зависит от характера движения точки приложения силы. Так, A=0 , если сила приложена к неподвижной точке или к точке, скорость которой во время движения равна нулю (например, в МЦС).

Работа равнодействующей силы. Рассмотрим систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$, приложенную к рассматриваемой точке. Эта система имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, причём

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N.$$

Тогда работа силы $\vec{R}^*$ на перемещении точки из положения M_0 в текущее положение M равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:

$$A = \int\limits_{M_0}^{M} d'A = \int\limits_{M_0}^{M} \vec{R}^* d\vec{r} = \int\limits_{M_0}^{M} \vec{F}_1 d\vec{r} + \int\limits_{M_0}^{M} \vec{F}_2 d\vec{r} + ... + \int\limits_{M_0}^{M} \vec{F}_N d\vec{r} = \sum_{k=1}^{N} A_k.$$

Единицей измерения работы в СИ является джоуль.

Мощность. Отношение приращения работы силы к элементарному промежутку времени, за которое оно произошло, называется мощностью:

$$W = \frac{d'A}{dt}.$$

Так как $d'A = \vec{F} \cdot \vec{\nu} dt$, то

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\nu}.$$

Таким образом, мощность силы равна скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения.Единицей измерения мощности в СИ является ватт.

20 Работа сил, приложенных к твердому телу, при его различных движениях.

Работа силы при поступательном движении твердого тела.

При поступательном движении твердого тела векторы скоростей, а также элементарные перемещения всех точек тела одинаковы.

Тогда элементарная работа силы

$$dA'(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_k dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Полная работа силы на каком-либо перемещении будет

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^{M} \vec{F} d\vec{r}.$$

Работа силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Разложим силу $\vec{F}$, приложенную в произвольной точке M тела, по осям τ, n, b естественного трехгранника (рис. 15.32):

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n + \vec{F}_b$$

Работы составляющих силы по нормали и бинормали равны нулю, ибо они направлены всегда перпендикулярно к вектору скорости точки М приложения силы. Следовательно, элементарная работа силы $\vec{F}$ совершается только ее составляющей F_τ по касательной к траектории, т. е.

$$d'A(\vec{F}) = F_\tau ds$$

Поскольку d$s = h$dϕ, то

$$d'A(\vec{F}) = F_\tau h d\varphi$$

где h — кратчайшее расстояние от точки приложения силы до оси вращения.

Учитывая, что $F_\tau h = M_z(\vec{F})$ — момент силы относительно оси Oz, получаем

$$d'A(\vec{F}) = M_z(\vec{F}) d\varphi$$

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела.

Полная работа

$$A(\vec{F}) = \int_0^\varphi M_z(\vec{F}) d\varphi.$$

В случае, когда момент силы относительно оси вращения тела постоянен, полная работа $A = M_z\varphi$.

Мощность силы в рассматриваемом случае

$$W = \frac{d'A}{dt} = \frac{M_z(\vec{F})d\varphi}{dt} = M_z(\vec{F})\omega_z$$

$\omega_z = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ — проекция на ось Oz угловой скорости тела.

Работа силы в общем случае движения свободного твердого тела. Скорость точки М приложения силы $\vec{F}$ (рис. 15.33) в рассматриваемом случае равна

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

где $\vec{v}_A$ — скорость полюса A; $\vec{r} = \vec{AM}$. Тогда

$$d'A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$$

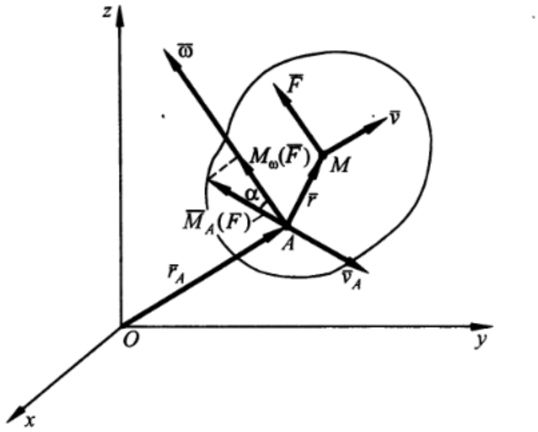


Рис. 15.33

Так как

$$\vec{v}_A dt = d\vec{r}_A, \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_A(\vec{F}),$$

то

$$d'A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \omega \cdot \vec{M}_A(\vec{F})dt$$

или

$$d'A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \vec{M}_\omega(\vec{F})d\varphi$$

где $M_\omega(\vec{F})$ — проекция $\vec{M}_A(\vec{F})$ на вектор $\vec{\omega}$; dφ — элементарный угол поворота тела вокруг мгновенной оси относительного вращения.Таким образом, элементарная работа силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, в общем случае его движения равна сумме элементарных работ на элементарном поступательном перемещении вместе с полюсом и элементарном вращательном перемещении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

21 Кинетическая энергия точки и системы материальных точек. Теорема Кёнига.

Кинетическая энергия точки и системы. Кинетическую энергию материальной точки массой m, движущейся с абсолютной скоростью v, определяют по формуле

$T = \frac{mv^2}{2}$, где $v^2 = v^{-2}$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех точек этой системы:

$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2}$ (15.78)

Кинетическая энергия — положительная скалярная величина. Единицей измерения кинетической энергии в СИ является джоуль.

Рассмотрим движение механической системы в неподвижной системе отсчета Oxyz (рис. 15.27). В качестве подвижной выберем систему CXYZ с началом в центре масс — точке C, движущуюся поступательно вместе с центром масс. Абсолютное движение механической системы при этом можно рассматривать как совокупность переносного (вместе с центром масс) и относительного (по отношению к центру масс) движений системы.Для любого момента времени положение произвольной точки M_k системы по отношению к неподвижному центру O определяет радиус-вектор

$\vec{r_k} = \vec{r_c} + \vec{\rho_k}$

где $\vec{\rho_k}$ — радиус-вектор точки M_k по отношению к центру масс C (см. рис. 15.27). Продифференцировав это равенство по времени, найдем абсолютную скорость произвольной точки системы

$\vec{v_k} = \vec{v_c} + \vec{v}_k^{(r)}$

где $\vec{v}_k^{(r)} = \frac{d\vec{\rho}_k}{dt}$ — относительная скорость точки (в данном случае полная производная по времени от $\vec{\rho}_k$ равна локальной, так как система CXYZ движется поступательно, т. е. $\vec{\omega}_e = 0$).

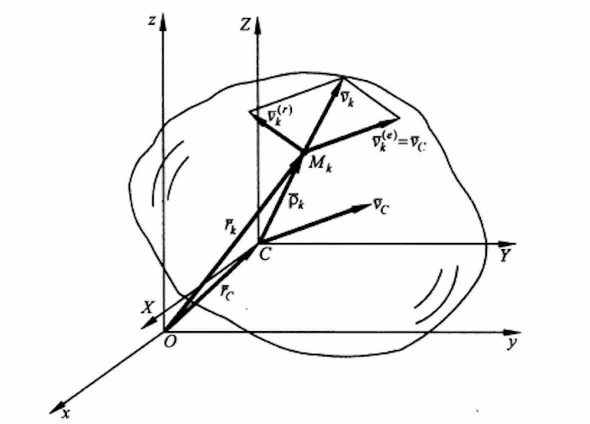


Рис. 15.27

Учитывая, что квадрат вектора равен квадрату его модуля, преобразуем выражение (15.78) к виду

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k v_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{v_k}^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_c^2+\sum_{k=1}^N m_k\vec{v}_c\vec{v}_k^{(r)}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k(\vec{v}_k^{(r)})^2$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^N m_k\vec{v}_c\vec{v}_k^{(r)}=\vec{v}_c\sum_{k=1}^N m_k\vec{v}_k^{(r)}=\vec{v}_c\sum_{k=1}^N m_k\frac{d\vec{\rho}_k}{dt}=\vec{v}_c\frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^N m_k\vec{\rho}_k)=0$$

поскольку сумма статических моментов масс точек относительно центра масс $\sum_{k=1}^N m_k\vec{\rho}_k=0$

Таким образом,

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k(v_k^{(r)})^2 \qquad (15.79),$$

где $M=\sum_{k=1}^N m_k$ - масса механической системы.

Формула (15.79) выражает теорему Кенига: кинетическая энергия механической системы в ее абсолютном движении равна сумме кинетической энергии центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.

22 Кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения.

При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек одинаковы и равны скорости центра масс, поэтому

$T=\sum_{k=1}^N\frac{m_k\nu_k^2}{2}=\sum_{k=1}^N\frac{m_k\nu_c^2}{2}=\frac{\nu_c^2}{2}\sum_{k=1}^N m_k=\frac{1}{2}M\nu_c^2$, где M - масса твёрдого тела.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси скорость его произвольной точки.

$\nu_k=\omega h_k$, где h_k — кратчайшее расстояние от точки M_k до оси вращения.

Тогда $T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k\nu_k^2=\frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^N m_k h_k^2=\frac{1}{2}J_z\omega^2$,

где $J_z=\sum_{k=1}^N m_k h_k^2$ — момент инерции тела относительно оси вращения O_z.

При плоском движении твердого тела, которое можно рассматривать как совокупность поступательного движения вместе с центром масс C и вращения вокруг подвижной оси C_z, движущейся поступательно вместе с центром масс, относительная скорость произвольной точки тела $\nu_k^r=\omega H_k$, и, следовательно, согласно формуле Кенига, $T=\frac{1}{2}M\nu_C^2+\frac{1}{2}J_{CZ}\omega$, где C_{CZ} — момент инерции тела относительно оси C_Z.

При сферическом движении твердого тела скорость произвольной точки определяется формулой Эйлера

$$\vec{\nu_k}=\omega\times\vec{r_k}.$$

$$T=\sum_{k=1}^N\frac{m_k\vec{\nu}^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k\vec{\nu_k}(\vec{\omega}\times\vec{r_k})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N\vec{\omega}(\vec{r_k}\times m_k\vec{\nu_k})=\frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_{k=1}^N\vec{r_k}\times m_k\vec{\nu_k}=\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{K_0}$$

где $K_0=\sum_{k=1}^N\vec{r_k}\times m_k\vec{\nu_k}$- главный момент количеств движения системы относительно неподвижной точки 0.

В общем случае движения свободного твердого тела в пространстве, которое можно рассматривать как совокупность поступательного переносного движения вместе с центром масс и сферического движения по отношению к этому центру (рис.15.28), относительная скорость произвольной точки тела $\vec{\nu_k^{(r)}}=\vec{\omega}\times\vec{\rho_k}$,

кинетическая энергия тела $T=\frac{1}{2}M\nu_C^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{K}_C^{(r)}$

Где $\vec{K}_C^{(r)}$ — главный момент количеств относительного движения относительно центра масс.

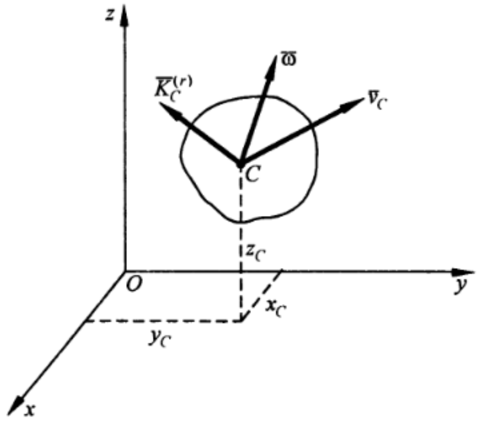


Рис. 15.28

Таким образом, в данном случае кинетическая энергия твердого тела определяется как сумма кинетической энергии тела в его переносном поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии тела в сферическом движении относительно центра масс.

23 Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы материальных точек.

Кинетическая энергия твердого тела. При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек одинаковы и равны скорости центра масс, поэтому

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k = \frac{1}{2} M v_C^2$$

где M - масса твердого тела

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси скорость его произвольной точки

$$v_k = \omega h_k$$

где h_k - кратчайшее расстояние от точки M_k до оси вращения

Тогда

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

где $J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2$ - момент инерции тела относительно оси вращения Oz

При плоском движении твердого тела, которое можно рассматривать как совокупность поступательного движения вместе с центром масс C и вращения вокруг подвижной оси CZ, движущейся поступательно вместе с центром масс, относительная скорость произвольной точки тела $v_k^{(r)} = \omega h_k$, и, следовательно, согласно формуле Кенига,

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_{CZ} \omega^2$$

$J_C Z$ - момент инерции относительно оси CZ.

При сферическом движении твердого тела скорость произвольной точки определяется формулой Эйлера

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k \qquad (15.80)$$

Преобразуем формулу (15.78) с учетом выражения (15.80)

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \vec{\omega} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{K}_O \qquad (15.81)$$

Здесь $\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$ -главный момент количества движения системы относительно неподвижной точки O.

С учетом (15.46) кинетическую энергию твердого тела при сферическом движении (15.81) можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} [\omega_x (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) + \omega_y (-J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z) + \omega_z (-J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z)] \qquad (15.82)$$

где $J_x, J_y, ..., J_{yz}$ -— осевые и центробежные моменты инерции твердого тела в системе координат Oxyz (см. гл. 14).

Если оси системы координат Oxyz направить по главным осям инерции тела для точки O, то, согласно формулам (15.47), выражение (15.82) примет вид

$T = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2)$ (15.83)

В общем случае движения свободного твердого тела в пространстве, которое можно рассматривать как совокупность поступательно-го переносного движения вместе с центром масс и сферического движения по отношению к этому центру (рис. 15.28), относительная скорость произвольной точки тела $\vec{v}_k^{(r)} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k$ и, следовательно, согласно (15.79) и (15.81), кинетическая энергия тела

$T = Mv_c^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{K}_c^{(r)}$ (15.84)

Здесь $\vec{K}_c^{(r)}$ — главный момент количеств относительного движения относительно центра масс. Отметим, что для кинетической энергии относительного (сферического вокруг центра масс) движения тела несложно получить формулы типа (15.82), (15.83).

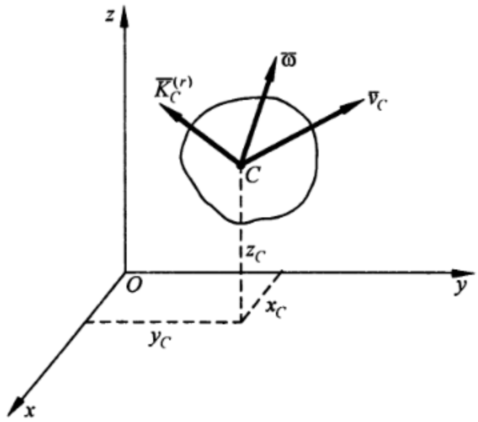


Рис. 15.28

Таким образом, в данном случае кинетическая энергия твердого тела определяется как сумма кинетической энергии тела в его переносном поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии тела в сферическом движении относительно центра масс.

24 Потенциальное силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия поля.

Силовым полем называется часть пространства, в котором на материальную точку действует сила, зависящая от координат точки и времени:$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$

Если сила явно не зависит от времени, то силовое поле называется **стационарным**.

Стационарное силовое поле называется **потенциальным**, если проекции силы F на оси Ox, Oy, Oz можно выразить через скалярную функцию $U(x, y, z)$ по формулам

$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z},$ (15.100)

т.е. $\vec{F} = gr\vec{a}dU$, где $gr\vec{a}dU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

Функция $U(x, y, z)$ называется **силовой функцией**. Из формул (15.100) следует, что силовая функция U определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Свойства стационарного потенциального поля

1. Элементарная работа силы стационарного потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции:

$d'A = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU.$ (15.101)

2. Полная работа силы стационарного потенциального поля не зависит от траектории, по которой перемещается точка, и определяется лишь начальным и конечным положением точки:

$A = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{M_0}^{M} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0).$ (15.102)

3.Работа силы $\vec{F}$ стационарного потенциального поля по любому замкнутому перемещению равна нулю (см. (15.102)), так как значение силовой функции в начальной и конечной точках одинаковы (если внутри замкнутого контура нет особых точек силовой функции), т. е.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

4. Для того чтобы стационарное силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы поле было безвихревым, т. е. сила $\vec{F}$ удовлетворяла условиям:

$$\frac{\partial F_Z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \qquad (15.103)$$

Если использовать вектор вихря

$$rot\vec{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\vec{k},$$

то условия (15.103) можно записать короче:

$$rot\vec{F} = 0.$$

Потенциальной энергией материальной точки в данной точке потенциального силового поля называют работу, производимую силой, действующей на точку в потенциальном силовом поле, при ее перемещении из рассматриваемой точки поля M в начальную M_0, условно принимаемую за нулевую:

$\Pi = A_{MM_0} = \int_M^{M_0} dU = U(M_0) - U(M)$. Поскольку $U(M_0) = C_0$,то $\Pi = C_0 - U$, (15.104)

т.е. потенциальная энергия в какой-либо точке поля с точностью до произвольной постоянной C_0 равна силовой функции в той же точке, взятой со знаком минус. На основании формул (15.100), (15,101), (15.104) имеем

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$d'A = dU = -d\Pi, A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

где U_0, Π_0 — произвольные постоянные, равные значениям силовой функции и потенциальной энергии в начальной точке.

25 Поверхности уровня и их свойства.

Поверхность $U(x, y, z) = C$, (15.105)

на которой силовая функция U имеет постоянное значение, называется **поверхностью уровня**. Для конкретного поля эти поверхности образуют семейство поверхностей с параметром C; задавая C разные значения, можно получать разные поверхности уровня, которые в случае, когда функция U однозначна, не пересекаются и разделяют потенциальное поле на слои.

Свойства поверхностей уровня

1. Если начальная и конечная точки расположены на одной и той же поверхности уровня, то работа силы стационарного потенциального поля по перемещению материальной точки из начального положения в конечное равна нулю. Действительно, из формулы (15.102) и определения поверхности уровня (15.105(в предыдущем вопросе)) следует

$$A = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

так как $U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) = C_0$ (начальная и конечная точки расположены на одной и той же поверхности уровня).

2. Сила $\vec{F}$ потенциального поля направлена по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания силовой функции U.

26 Примеры вычисления силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной силы упругости.

Однородное поле силы тяжести

Рассмотрим материальную точку массой m, находящуюся в однородном поле силы тяжести. Направим ось Oz вертикально вверх, а оси Ox и Oy произвольно в горизонтальной плоскости (рис. 15.35).Проекции силы тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ на оси координат будут равны

$$P_x = 0; P_y = 0; P_z = -mg$$

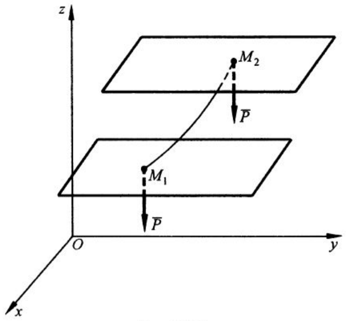


Рис. 15.35

Элементарная работа силы тяжести

$$d'A = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz = d(-mgz). \qquad (15.107)$$

Поскольку элементарная работа силы тяжести является полным дифференциалом и $d'A = dU = -d\Pi$, то, интегрируя (15.107), находим

$$U = -mgz + C_1; \Pi = mgz + C_2; A = \int_{M_1}^{M_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -mg \int_{z_1} z_2 dz = -mg(z_2 - z_1), \qquad (15.108)$$

где A - работа силы тяжести материальной точки массой m на перемещении M_1M_2.

Уравнение (15.108) можно представить в виде

$A = -mgH$, где $H = x_2 - z_1$ - высота подъема точки.

Если точка M_1 расположена выше точки M_2, т. е. при движении точка опускается, то работа силы тяжести положительная, в противном случае — отрицательная. Таким образом,

$$A = \pm mgh, \qquad (15.109)$$

где знак "+"соответствует перемещению точки вниз, а знак - перемещению вверх.

Как следует из формулы (15.109), работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой перемещается точка приложения силы. Работа силы тяжести равна нулю, если точки M_1 и M_2 совпадают (траектория — замкнутый контур) или расположены в одной и той же горизонтальной плоскости.

Поле линейной силы упругости

Линейная сила упругости (рис. 15.36) подчиняется закону Гука: $\vec{F} = -c\vec{r}$, где с — коэффициент упругости; r — радиус-вектор точки М, отсчитываемый от точки равновесия, где сила равна нулю.

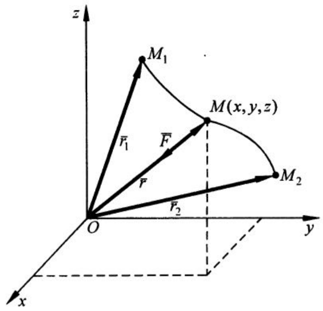


Рис. 15.36

Элементарная работа этой силы $d'A = \vec{F}d\vec{r} = -c\vec{r}d\vec{r} = d(-\frac{cr^2}{2})$ (15.110)

так как $\vec{r}d\vec{r} = d\frac{1}{2}(\vec{r}^2) = rdr$. Интегрируя (15.110), находим

$$U = -\frac{cr^2}{2} + C_1; \Pi = \frac{cr^2}{2} + C_2; A = \int_{M_1}^{M_2} (-crdr) = -c\int_{r_1}^{r_2} rdr = -\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2), \qquad (15.111)$$

т.е. $U = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C_1, \Pi = \frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C_2$

Таким образом, силовая функция и потенциальная энергия линейной силы упругости является квадратичной формой координат точки М, отсчитываемых от положения равновесия.

Как следует из формулы (15.111), работа силы упругости не зависит от формы траектории, по которой перемещается точка. При перемещении же точки из положения равновесия работа силы упругости будет отрицательной:

$$A = -\frac{c}{2}r^2$$

27 Закон сохранения полной механической энергии системы.

Пусть все силы (как внешние, так и внутренние), действующие на механическую систему, потенциальны, т. е. существует функция $U(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N)$ такая, что

$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k};$ (15.112)

где $F_{kx}\vec{i} + F_{ky}\vec{j} + F_{kz}\vec{k} = \vec{F_k}$

— равнодействующая всех сил, приложенных к k-й точке.

Теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме представим в виде

$dT = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k d\vec{r}_k$, где $\vec{F}_k d\vec{r}_k = (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i)d\vec{r}_k$ (15.113)

Так как, согласно (15.112),

$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (F_{kx}dx_k + (F_{ky}dy_k + (F_{kz}dz_k) = \sum_{k=1}^{N} (\frac{\partial U}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k}dz_k) = dU,$

то уравнение (15.113) примет вид

$dT = dU$ или $dT + d\Pi = 0$,

$\Pi = -U(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N) + const$ - потенциальная энергия системы.

Следовательно, $d(T + \Pi) = 0$, отсюда получаем $T + \Pi = const$ и $E = T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = const$ (15.114)

Сумма кинетической и потенциальной энергии называется **полной энергией E** механической системы.

Системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются **консервативными.**

Формула (15.114) выражает закон сохранения механической энергии для механической системы: **если все силы, действующие на систему, потенциальны, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна.**

Следует отметить, что закон сохранения механической энергии справедлив и в том случае, когда кроме потенциальных имеются и непотенциальные силы, но которые при движении системы не совершают работы.

28 Принцип Даламбера для точки и системы материальных точек. Сила инерции материальной точки. Главный вектор и главный момент сил инерции в общем и частных случаях движения твердого тела. Метод кинетостатики.

В соответствии с аксиомами динамики основное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \qquad (17.1)$$

где $\vec{F}$ - равнодействующая активных сил; $\vec{R}$ - равнодействующая реакций связей; $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ - абсолютное ускорение точки.

Уравнение (17.1) можно также записать в виде

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0$$

Слагаемое $(-m\vec{a})$ обозначают $\vec{\Phi}$ и называют **даламберовой силой инерции** (или просто силой инерции).

Основное уравнение динамики материальной точки при использовании силы инерции принимает следующий вид:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \qquad (17.2)$$

Так как указанные выше силы образуют систему сходящихся сил, то урав-нение (17.2) можно рассматривать как условие равновесия системы сил $(\vec{F}, \vec{R}, \vec{\Phi})$. В этом и состоит принцип Даламбера для материальной точки. Формулируется он так: при движении материальной точки в любой момент времени приложенные к ней активные силы и реакции связей вместе с силой инерции образуют систему сил, эквивалентную нулю (уравновешенную систему сил), т. е.

$$(\vec{F}, \vec{R}, \vec{\Phi}) \sim 0. \qquad (17.3)$$

Отметим, что в формулировке принципа Даламбера речь идет об уравновешенности определенной системы сил, а не о равновесии (покое) материальной точки. Таким образом, дополняя систему активных сил и реакций связей, приложенных к точке, силой инерции, получаем уравновешенную систему сходящихся сил, для которой должно выполняться условие равновесия (17.2). В проекциях на оси декартовой системы координат имеем

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0; \quad F_y + R_y + \Phi_y = 0; \quad F_z + R_z + \Phi_z = 0,$$

где $\Phi_x = -m\ddot{x}; \quad \Phi_y = -m\ddot{y}; \quad \Phi_z = -m\ddot{z}$; в проекциях на оси естественной системы координат получаем

$$F_\tau + R_\tau + \phi_\tau = 0; \quad F_n + R_n + \phi_n = 0; \quad F_b + R_b = 0,$$

где $\Phi_\tau = -ma_\tau = -m\frac{d\nu_\tau}{dt}; \quad \Phi_n = -ma_n = -m\frac{\nu^2}{\rho}$.

Принцип даламбера для механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получаем

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0, k = 1, 2, ..., N, \qquad (17.4)$$

где $\vec{\Phi}_k = -m_k\vec{a}_k; quad\vec{F}_k$ и $\vec{R}_k$ — равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к k-й точке. Условие (17.4) можно представить в виде

$$(\vec{F}_k, \vec{R}_k, \vec{\Phi}_k) \sim 0, \quad k = 1, 2, ..., N.$$

Таким образом, для системы материальных точек принцип Даламбера формулируется так: при движении механической системы в любой момент времени приложенные к каждой точке системы активные силы и реакции связей вместе с силами инерции образуют систему сил, эквивалентную нулю. Суммируя левые части уравнений (17.4) по всем точкам системы, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{\Phi}_k = 0. \qquad (17.5)$$

Умножив каждое уравнение в (17.4) векторно слева на радиус-вектор $\vec{r}_k$ k-й точки и просуммировав их, имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{F}_k)+\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{R}_k)+\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{\Phi}_k)=0. \qquad (17.6)$$

Из (17.5) и (17.6) следует, что равны нулю главный вектор и главный момент относительно произвольного центра приведения O активных сил, реакций связей, приложенных ко всем точкам механической системы, и сил инерции. В проекциях на оси декартовой системы координат, начало которых совпадает с центром O, эти условия принимают вид известных уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\sum_{k=1}^{N}F_{kx}+\sum_{k=1}^{N}R_{kx}+\sum_{k=1}^{N}\Phi_{kx}=0;$$
$$\sum_{k=1}^{N}F_{ky}+\sum_{k=1}^{N}R_{ky}+\sum_{k=1}^{N}\Phi_{ky}=0;$$
$$\sum_{k=1}^{N}F_{kz}+\sum_{k=1}^{N}R_{kz}+\sum_{k=1}^{N}\Phi_{kz}=0; \qquad (17.7)$$
$$\sum_{k=1}^{N}M_x(\vec{F}_k)+\sum_{k=1}^{N}M_x(\vec{R}_k)+\sum_{k=1}^{N}M_x(\vec{\Phi}_k)=0;$$
$$\sum_{k=1}^{N}M_y(\vec{F}_k)+\sum_{k=1}^{N}M_y(\vec{R}_k)+\sum_{k=1}^{N}M_y(\vec{\Phi}_k)=0;$$
$$\sum_{k=1}^{N}M_z(\vec{F}_k)+\sum_{k=1}^{N}M_z(\vec{R}_k)+\sum_{k=1}^{N}M_z(\vec{\Phi}_k)=0.$$

Если силы, приложенные к k-й точке системы, разложить не на активные и реакции связей, а на внешнюю $\vec{F}_k^e$, и внутреннюю $\vec{F}_k^i$, то уравнение (17.4) принимает вид

$$\vec{F}_k^{(e)}+\vec{F}_k^{(i)}+\vec{\Phi}_k=0.$$

Поскольку главный вектор и главный момент относительно произвольного центра приведения внутренних сил системы равен нулю, то для (17.5) и (17.6) имеем соответственно

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^{(e)}+\sum_{k=1}^{N}\vec{\Phi}_k=0;\quad \sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{F}_k^{(e)})+\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{\Phi}_k)=0. \qquad (17.8)$$

Проецируя (17.8) на оси декартовой системы координат, получаем шесть уравнений равновесия системы сил, аналогичных уравнениям (17.7). Особенность этих уравнений состоит в том, что в них не входят внутренние силы.

Понятие о силе инерции и принцип Даламбера составляют основу метода кинетостатики, который ставит своей целью применение методов статики, в частности, к задачам динамики машин и механизмов.

Главный вектор и главный момент сил инерции

Применяя принцип Даламбера для изучения движения механических систем, состоящих из многих или множества (например, твердое тело) точек, силы инерции целесообразно привести к какому-либо центру, например центру масс. Получим общие формулы для главного вектора и главного момента сил инерции относительно произвольно выбранного центра приведения.

Главный вектор сил инерции

В соответствии с определением главного вектора

$$\vec{R}_{UH}=\sum_{k=1}^{N}\vec{\Phi}_k=-\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{a}_k.$$

Так как ускорение точки $\vec{a}_k=\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}$, а её масса m_k постоянна, то

$$\vec{R}_{UH} = -\frac{d^2}{dt^2}(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k) = -M\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{M}) = -M\frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}.$$

Таким образом, при любом движении механической системы главный вектор сил инерции равен взятому со знаком «минус» произведению массы системы на ускорение центра масс:

$$\vec{R}_{UH} = -M\vec{a}_C. \qquad (17.9)$$

Главный момент сил инерции относительно произвольно выбранного центра приведения

Определим главный момент сил инерции относительно некоторого неподвижного центра O:

$$\vec{L}_O^{UH} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{\nu}_k}{dt}.$$

Так как $\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{\nu}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{\nu}_k)$, то

$$\vec{L}_O^{UH} = -\frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{\nu}_k) = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}.$$

Следовательно, главный момент сил инерции относительно неподвиж-ного центра приведения O равен взятой со знаком «минус» производной по времени от главного момента количеств движения механической системы от-носительно того же центра.

Если движение точек механической системы рассматривать как сложное, т.е:$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k$, то

$$\vec{K}_O = \vec{K}_C^{(r)} + \vec{r}_C \times M\vec{\nu}_C,$$

где $\vec{K}_C^{(r)} = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times m_k \vec{\nu}_k^{(r)}$ - главный момент количеств движения системы в ее относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс. В этом случае главный момент сил инерции относительно неподвижного центра приведения O

$$\vec{L}_O^{UH} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} = -\frac{d\vec{K}_C^{(r)}}{dt} - M\vec{r}_C \times \vec{a}_C. \qquad (17.10)$$

Силы инерции точек механической системы можно привести к центру масс, который может быть подвижной точкой. В этом случае главный момент сил инерции относительно центра масс C

$$\vec{L}_C^{UH} = -\frac{d\vec{K}_C^{(r)}}{dt} \qquad (17.11)$$

(производная в (17.11) полная, поскольку угловая скорость подвижной системы координат равна нулю).

29 Определение реакций подшипников твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Статические и динамические составляющие реакций.

Вывод уравнений для определения реакций опор

Рассмотрим твердое тело, закрепленное при помощи подшипника в точке B и подпятника в точке A (рис. 17.2), вращающееся вокруг неподвижной оси AZ под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$, и определим реакции опор. Масса тела M, его угловая скорость и угловое ускорение в некоторый момент времени со-ответственно равны $\vec{\omega}$ и $\vec{\mathcal{E}}$, трением в опорах пренебрегаем.

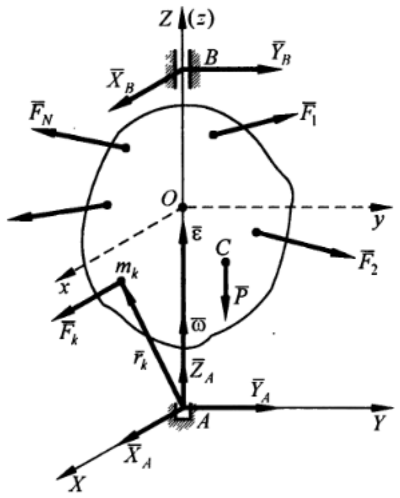


Рис. 17.2

Уравнения для определения реакций опор можно составить в проекциях на оси как неподвижной, так и подвижной системы координат, жестко связанной с вращающимся телом.

В первом случае при вращении тела будет изменяться распределение массы, а значит, и моменты инерции тела относительно осей координат. Во втором случае моменты инерции тела относительно осей связанной с ним системы координат и координаты центра масс будут некоторыми постоянными величинами. Поэтому будем полагать, что система координат $AXYZ$ жестко соединена с твердым телом

За центр приведения сил инерции твердого тела примем точку A. Определим проекции на оси координат главного вектора и главного момента относительно точки A сил инерции тела

Главный вектор сил инерции

$$\vec{R} = -M\vec{a}_c = -M\vec{a}_c^{(n)} - M\vec{a}_c^{(\tau)}$$

Касательное $\vec{a}_c^{(\tau)}$ и нормальное $\vec{a}_c^{(n)}$ ускорения центра масс тела соответственно равны

$$\vec{a}_c^{(\tau)} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{r}_c = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_z \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix};$$

$$\vec{a}_c^{(n)} = \vec{\omega} \times \vec{v}_c = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ v_{cx} & v_{cy} & v_{zc} \end{vmatrix};$$

Раскрывая определители по элементам первой строки и принимая во внимание, что $\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_c$, получаем

$$\vec{a}_c^{(\tau)} = -\mathcal{E}_z Y_C \vec{I} + \mathcal{E}_z X_C \vec{J} + 0 * \vec{K}; \quad \vec{a}_c^{(n)} = -\omega_z^2 X_c \vec{I} - \omega_z^2 Y_c \vec{J} + 0 * \vec{K}.$$

Таким образом, для проекций главного вектора сил инерции тела на оси подвижной системы координат AXYZ имеем следующие выражения:

$$R_X^{\text{ин}} = M\mathcal{E}_z Y_c + M\omega_z^2 X_c; \quad R_Y^{\text{ин}} = -M\mathcal{E}_z X_c + M\omega_z^2 Y_c; \quad R_z^{\text{ин}} = 0. \quad (17.13)$$

Так как для определения реакций опор используется связанная с вращающимся телом система координат, то главный момент сил инерции относительно точки A можно представить в соответствии с формулой Бура в виде:

$$\vec{L}_A^{\text{ин}} = -\frac{d\vec{K}_a}{dt} = -(\frac{\tilde{d}\vec{K}_a}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_a) \qquad (17.14)$$

Так как при вращении тела вокруг неподвижной оси $O_z \omega_X = \omega_Y = 0$, то главный момент количеств движения твердого тела относительно точки A определяется по формуле:

$$\vec{K}_A = -J_{XZ}\omega_Z\vec{I} - J_{YZ}\omega_Z\vec{J} + J_Z\omega_Z\vec{K} \qquad (17.15)$$

где $J_X Z = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k X_k Z_k, \quad J_Y Z = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k Y_k Z_k$ -центробежные моменты инерции тела;

$J_Z = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k(X_k^2 + Y_k^2)$ — момент инерции тела относительно оси OZ.

Принимая во внимание (17.15) и учитывая, что $\vec{\omega} \times \vec{K}_A = J_{YZ}\omega_Z^2\vec{I} - J_{XZ}\omega_Z^2\vec{J}$

из (17.14) получим следующие выражения для проекций главного момента сил инерции тела относительно точки A на оси системы координат AXYZ:

$$L_X{}^{\text{ин}} = J_X Z\mathcal{E}_Z - J_Y Z\omega_Z^2; \quad L_Y^{\text{ин}} = J_Y Z\mathcal{E}_Z + J_X Z\omega_Z^2; \quad L_Z^{\text{ин}} = -J_Z\mathcal{E}_Z \qquad (17.16)$$

В соответствии с методом кинетостатики приравняем к нулю проекции на оси координат главного вектора и главного момента относительно точки A активных сил $\vec{F}_k$, реакций связей $(\vec{R}_A, \vec{R}_B)$ и сил инерции точек тела.

Учитывая полученные выше выражения (17.13) и (17.16), запишем:

$$X_A + X_B + \sum_{k=1}^{N} F_{kX} + M\mathcal{E}_Z Y_C + M\omega_Z^2 X_C = 0; \qquad (17.17)$$

$$Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{N} F_{kY} - M\mathcal{E}_Z X_C + M\omega_Z^2 Y_C = 0; \qquad (17.18)$$

$$Z_A + \sum_{k=1}^{N} F_{kZ} = 0; \qquad (17.19)$$

$$-Y_B AB + \sum_{k=1}^{N} M_X(\vec{F}_k) + J_{XZ}\mathcal{E}_Z - J_{YZ}\omega_Z^2 = 0; \qquad (17.20)$$

$$X_B AB + \sum_{k=1}^{N} M_Y(\vec{F}_k) + J_{YZ}\mathcal{E}_Z - J_{XZ}\omega_Z^2 = 0; \qquad (17.21)$$

$$\sum_{k=1}^{N} M_Z(\vec{F}_k) - J_Z\mathcal{E}_Z = 0; \qquad (17.22)$$

Уравнение (17.22) не содержит реакций опор. При известном моменте инерции J_Z и заданных внешних силах оно позволяет определить угловое ускорение $\mathcal{E}_Z$(t) и угловую скорость $\omega_Z = \int \mathcal{E}_Z dt + C_1$ твердого тела.Уравнения (17.17) – (17.21) дают возможность вычислить проекции на оси координат реакций подшипника (X_B, Y_B) и подпятника (X_A, Y_A, Z_A) В них входят слагаемые, зависящие как от заданных сил $\vec{F}_k$, так и от сил инер-ции, обусловленных вращением тела с угловой скоростью ω_Z и угловым ускорением $\mathcal{E}_Z$. Так как эти уравнения линейны, то каждую из реакций опор можно разделить на две составляющие, называемые условно статической и динамической.Статические реакции опор вызываются только внешними силами; силы инерции при определении статических реакций полагают равными нулю. В этом случае

$$X_B^{\text{ст}} = -\frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{N} M_Y(\vec{F}_k); \quad Y_B^{\text{ст}} = \frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{N} M_X(\vec{F}_k)$$

$$X_A^{\text{ст}} = \frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{N} M_Y(\vec{F}_k) - \sum_{k=1}^{N} F_{kX}; \quad Y_A^{\text{ст}} = \frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{N} M_X(\vec{F}_k) - \sum_{k=1}^{N} F_{kY}$$

$$Z_A^{\text{ст}} = -\sum_{k=1}^{N} F_{kZ}$$

Динамические реакции опор зависят только от сил инерции. Уравнения для определения проекций динамических реакций подшипника и подпятника имеют вид

$$X_A^{\text{д}} + X_B^{\text{д}} + M\mathcal{E}_Z Y_C + M\omega_Z^2 X_C = 0 \qquad (17.23)$$

$$Y_A^{\text{д}} + Y_B^{\text{д}} + M\mathcal{E}_Z X_C + M\omega_Z^2 Y_C = 0 \qquad (17.24)$$

$$-Y_B^{\text{д}} AB + J_{XZ}\mathcal{E}_Z - J_{YZ}\omega_Z^2 = 0 \qquad (17.25)$$

$$X_B^{\text{д}} AB + J_{YZ}\mathcal{E}_Z - J_{XZ}\omega_Z^2 = 0 \qquad (17.26)$$

Определив из уравнений (17.26) и (17.25) $X_B^{\text{д}} = -\frac{1}{AB}(J_{YZ}\mathcal{E}_Z + J_{XZ}\omega_Z^2); \quad X_B^{\text{д}} = \frac{1}{AB}(J_{XZ}\mathcal{E}_Z - J_{YZ}\omega_Z^2)$

$$\text{получаем: } R_B^{\text{д}} = \frac{1}{AB}\sqrt{(\varepsilon_Z^2 + \omega_Z^4)(J_{XZ}^2 + J_{YZ}^2)}$$

Аналогично находим$R_A^{\text{д}} = \dfrac{1}{AB}(\{\mathcal{E}_Z^2 + \omega_Z^4\} \times ((J_{XZ}^2 + J_{YZ}^2) + M^2(X_C^2 + Y_C^2)AB^2 - 2M(J_{XZ}X_C + J_{YZ}Y_C)AB))^{1/2}$

Как видно, динамические реакции подшипника и подпятника зависят от угловой скорости и углового ускорения тела, а также от распределения массы тела относительно оси его вращения.

30 Понятие статической и динамической уравновешенности твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Статическая уравновешенность

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, называют **статически уравновешенным**, если ось вращения проходит через его центр масс. В этом случае главный вектор сил инерции равен нулю, и из уравнений (17.23) и (17.24) получаем $X_B^D = -X_A^D, \quad Y_B^D = -Y_A^D$. Это значит, что $\vec{R}_B^D = -\vec{R}_A^D$, т.е. динамические реакции подшипника и подпятника образуют пару. Модули сил этой пары в соответствии с (17.27) и (17.28) определяются выражением

$$R_A^D = R_B^D = \frac{1}{AB}\sqrt{(\varepsilon_Z^2 + \omega_Z^4)(J_{XZ}^2 + J_{YZ}^2)}.$$

Полученный результат не зависит от выбора центра приведения системы сил. Действительно, если в качестве центра приведения выбрать произвольную точку О на оси вращения тела (см. рис. 17.2), то уравнение (17.26) будет иметь следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{N} M_y(\vec{F}_k) = -X_A^D OA + X_B^D OB + J_{yz}\varepsilon_Z + J_x z\omega_Z^2 = 0.$$

Так как ось вращения тела - центральная, то $X_A^D = -X_B^D$ и тогда

$$X_B^D = -\frac{1}{AB}(J_{xz}\omega_z^2 + J_{yz}\varepsilon_z),$$

что аналогично выражению для X_B^D в случае, когда за центр приведения си-стемы сил была принята точка А. Такой же результат получается для Y_A^D и Y_B^D. Не меняются при изменении центра приведения и центробежные моменты инерции тела, т.е. $J_{XZ} = J_{xz}$ и $J_{YZ} = J_{yz}$. Например:

$$J_{XZ} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k = \sum_{k=1}^{N} m_k X_k (Z_k - OA) = \sum_{k=1}^{N} m_k X_k Z_k - OA\sum_{k=1}^{N} m_k X_k.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{N} m_k X_k Z_k == J_{XZ}$.

Таким образом, в случае статической уравновешенности тела динамические реакции опор приводятся к паре сил и могут быть не равны нулю. Пара сил инерции может быть уравновешена только парой — динамическими реакциями опор. Модули реакции зависят от угловой скорости ω_Z и углового ускорения ε_Z твердого тела, распределения массы по его объему (что характеризуется центробежными моментами инерции J_{XZ} и J_{YZ}), а также от расстояния между опорами.

Динамическая уравновешенность

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, называют **динами-чески уравновешенным**,если равны нулю динамические реакции подшипника и подпятника. Из уравнения (17.27) следует, что динамическая реакция $\vec{R}_B^D$ подшипника будет равна нулю, если $J_{XZ} = J_{YZ} = 0$, т.е. если ось AZ вращения тела будет его главной осью инерции в точке A. Чтобы при этом была равна нулю и динамическая реакция подпятника, необходимо, как это следует из (17.28), чтобы равнялись нулю не только центробежные моменты инерции J_{XZ} и J_{YZ}, но и координаты X_C и Y_C центра масс тела. Второе условие может быть выполнено, если ось AZ будет проходить через центр масс тела, т. е. будет центральной осью. Таким образом, вращающееся вокруг неподвижной оси твердое тело будет динамически уравновешено, если ось вращения является его главной центральной осью инерции.

В случае, когда ось OZ вращения тела является его главной осью инерции в какой-либо точке O (см. рис. 17.2), но не проходит через центр масс, центробежные моменты инерции $J_{XZ} = 0, \quad J_{YZ} = 0$ и уравнения для определения динамических реакций подпятника A и подшипника B принимают вид

$$X_A^D + X_B^D + M\varepsilon_Z Y_C + M\omega_Z^2 X_C = 0; \qquad (17.34)$$
$$Y_A^D + Y_B^D - M\varepsilon_Z X_C + M\omega_Z^2 Y_C = 0; \qquad (17.35)$$
$$Y_A^D OA - Y_B^D OB = 0; \qquad (17.36)$$
$$-X_A^D OA + X_B^D OB = 0. \qquad (17.37)$$

Отсюда находим

$$R_A^D = M\frac{OB}{AB}\sqrt{(\varepsilon_Z^2 + \omega_Z^4)(X_C^2 + Y_C^2)}; \qquad (17.38)$$
$$R_B^D = M\frac{OA}{AB}\sqrt{(\varepsilon_Z^2 + \omega_Z^4)(X_C^2 + Y_C^2)}. \qquad (17.39)$$

В этом случае главный момент сил инерции тела относительно точки O равен нулю, и система сил инерции приводится к равнодействующей, приложенной в точке O и равной по модулю $M\sqrt{(\varepsilon_Z^2 + \omega_Z^4)(X_C^2 + Y_C^2)}$. Поэтому динамическими реакциями опор будут параллельные силы $\vec{R}_A^D$ и $\vec{R}_B^D$, которые направлены противоположно равнодействующей сил инерции тела, а их модули (17.38), (17.39) обратно пропорциональны расстояниям от центра приведения O до соответствующей опоры.

На основании вышеизложенного, можно сделать следующие выводы.1. Динамические реакции могут существовать даже тогда, когда ось вращения тела проходит через его центр масс. Динамические реакции опор образуют пару сил, модули которых зависят от центробежных моментов инерции тела, угловой скорости и углового ускорения.2. Если ось вращения тела является его главной и центральной осью инерции, то динамические реакции подшипника и подпятника равны нулю, а статические реакции зависят только от внешних сил.

31 Динамические уравнения Эйлера.

Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела

Влияние внешних сил на кинематические характеристики сферического движения твердого тела вокруг точки O, неподвижной в инерциальной системе отсчета, изучим с помощью теорем об изменении главного момента количеств движения и кинетической энергии для системы материальных точек (см. 15.5, 15.6):

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{L}_O, \dot{T} = W^{(e,i)},$$

поскольку они позволяют исключить из уравнений динамики силы, сходящиеся в точке O.

Помимо инерциальной системы отсчета S0 с осями Ox, Oy, Oz и ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, введем жестко связанную с твердым телом вспомогательную систему координат S с началом в точке O, осями OX, OY, OZ и ортами $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$. Угловая скорость системы S относительно системы S0 тождественно равна угловой скорости самого тела ω. Система S удобна тем, что в ней постоянны три осевых J_x, J_y, J_z, и три центробежных J_{xy}, J_{xz}, J_{yz},момента инерции тела.

Направим оси системы S не произвольно, а так, чтобы они совпадали с главными осями инерции твердого тела в точке O. В таких осях для твердого тела упрощается расчет проекций его главного момента количеств движения относительно точки O и его кинетической энергии:

$$K_x = A\omega_X \ ; K_y = B\omega_y; K_z = C\omega_z \qquad (16.9),$$

$$T = 0.5K_0\omega\cos\alpha = 0.5(\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z) \qquad (16.10)$$

Здесь и далее буквами A, B, C обозначены соответствующие осевые моменты инерции тела относительно трех ортогональных главных осей инерции. При A = B эллипсоид инерции тела в точке O имеет форму поверхности вращения вокруг оси OZ, которую в этом случае называют осью динамической симметрии твердого тела, а само тело — динамически симметричным. На практике для выполнения равенства A = B телу из однородного материала придают форму тела вращения.

Согласно (16.9), (16.10), вектор $\vec{K_0}$ образует острый угол α с вектором $\vec{\omega}$. При этом $\vec{K_0}$ параллелен главной оси инерции тела, если $\vec{\omega}$ направлен по этой оси инерции тела, и $\vec{K_0}$ перпендикулярен главной оси инерции тела, если ей перпендикулярен $\vec{\omega}$.

В соответствии с формулой Бура, запись вектора $\vec{K_0}$ твердого тела в проекциях на оси системы S (см. (16.9)) влечет за собой необходимость применения теоремы о его изменении в специальном виде

$$\frac{d\vec{K_0}}{dt} + \omega \times \vec{K_0} = \vec{L_0},$$

предполагающем последующее проецирование именно на оси системы S:

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = L_x$$

$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x = L_y \qquad (16.11)$$

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = L_z$$

Систему уравнений (16.11) называют динамическими уравнениями Эйлера. Они устанавливают связь между моментами внешних сил и проекциями угловой скорости $\vec{\omega}$ тела. Каждое уравнение системы (16.11) содержит произведение проекций вектора $\vec{\omega}$, поэтому динамические уравнения Эйлера являются нелинейными дифференциальными уравнениями относительно этих проекций.

Но поскольку расчет проекций вектора $\vec{\omega}$ на подвижные оси системы S не является конечной целью анализа, ибо остается нерешенной задача о пространственной ориентации этих осей, то динамические уравнения Эйлера дополняют кинематическими уравнениями Эйлера (4.8)

32 Приближенная теория гироскопа. Основные понятия и допущения.

Приближенная теория гироскопа построена на теореме об изменении вектора $\vec{K_O}$ в форме:

$$\vec{K_O} = \vec{\Omega}_K \times \vec{K_O} = \vec{L}_0$$

Здесь приближенно считают, что неподвижный относительно твердого тела постоянный по модулю вектор $\vec{K_0}$ вращается относительно системы S_0 с угловой скоростью $\vec{\Omega}_K$.

Допущения

1. Модуль проекции вектора $\vec{\omega}$ на главную ось инерции OZ тела много больше модулей остальных проекций:

$$\omega_Z^2 >> \omega_X^2 + \omega_Y^2 \qquad (16.47)$$

Из кинематических уравнений Эйлера в этом случае следует

$$\dot{\varphi}^2 >> \dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2$$

2. Проекция вектора $\vec{\omega}$ на главную ось инерции OZ тела постоянна по модулю:

$$\omega_z = const = \omega_C > 0 \qquad (16.49)$$

3. Модуль проекции вектора $\vec{K_0}$ на OZ много больше остальных проекций (рис. 16.13):

$$K_Z^2 >> K_X^2 + K_Y^2 \qquad (16.50)$$

или $(C\omega_Z)^2 >> (A\omega_X)^2 + (B\omega_Y)^2$

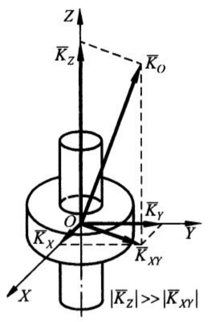


Рис. 16.13

Для тел с соотношением главных моментов инерции C>A, C>B условие (16.50) является следствием (16.47).

4. Вектор K_0^2 имеет постоянный модуль, равный его проекции на ось собственного вращения OZ:

$$K_0 = \sqrt{(A\omega_X)^2 + (B\omega_Y)^2 + (C\omega_Z)^2} = C\omega_Z = C\omega_C = K_Z = const \qquad (16.51)$$

5. Вектор $\vec{K}_0$ направлен по оси OZ тела:

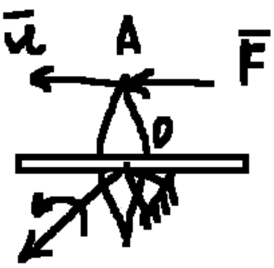
$$\vec{K}_0 = A\omega_X\vec{I} + B\omega_Y\vec{J} + C\omega_Z\vec{K} = C\omega_Z\vec{K} = C\omega_C\vec{K} \qquad (16.52)$$

6. Вектор главного момента внешних сил $\vec{L}_0$ перпендикулярен к вектору $\vec{K}_0$. Неперпендикулярность $\vec{L}_0$ и $\vec{K}_0$ приводит к изменению модуля $\vec{K}_0$, что противоречит четвертому допущению.

33 Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессии.

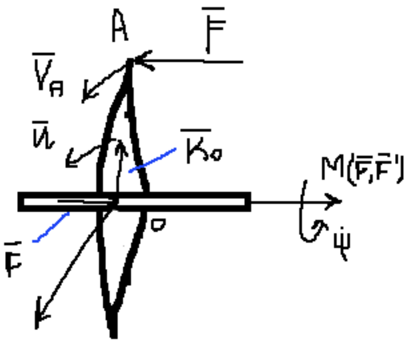
Особенности движения оси гироскопа

1)Покоится



Если тело испытывает силу, приложенную к т.A, то тело будет вращаться вокруг оси Ox. т. A двигаться в направлении действия силы. По завершению действия силы, тело по инерции продолжит вращаться вокруг оси Ox

2)Вращается



Приложенная к т.А сила F создает момент этой силы относительно точки O и в соответствии с теоремой Резаля точка A начнет перемещаться с прецессирующей осью вокруг оси Oy. По завершении действия силы, прецессия прекратится, а это значит, что прецессия не имеет инерции

$$\dot{\psi} = \frac{u}{|\vec{K}_0|} = \frac{u}{OB}$$

$$\psi = \frac{u}{OB}\tau = \frac{L^e}{K_0}\tau$$

$$\vec{L}_0 = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_0$$

$$L_0 = |\vec{\omega}_2 \times J_z\vec{\omega}_1| = J_z\,|\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1| = J_z\omega_1\omega_2 sin\theta$$

При ударе ось гироскопа практически не отклоняется от своего положения.

Теорема Резаля:

при движении механической системы скорость точки, совпадающей с концами вектора кинетического момента при движении по годографу равна по величине и направлению главному моменту всех внешних сил системы

$$\vec{L}_0^e = \vec{U}$$

Правило прецессии:

Если к вращающемуся вокруг собственной оси гироскопу приложить внешние силы, создающие момент относительно неподвижной точки, то та часть оси гироскопа по которой направлен кинетический момент $\vec{K}_0$, начнет прецессировать в направлении момента внешних сил $\vec{L}_0^{(e)}$

34 Гироскопический момент. Правило Жуковского.

Гироскопический момент.

При изучении свойств прецессии было установлено, что главная ось гироскопа движется не в направлении приложенной силы, а перпендикулярно направлению действующей силы. Такое явление может произойти только в том случае, если со стороны гироскопа возникает сила реакции, уравновешивающая приложенную к гироскопу внешнюю силу. Эта сила противодействия, препятствующая движению гироскопа по направлению действия силы, называется гироскопической реакцией, а ее момент, уравновешивающий момент внешних сил $\vec{L}$, — моментом гироскопической реакции, или гироскопическим моментом.

Правило Жуковского:

Направление угловой скорости прецессии совпадает с направлением кратчайшего поворота $\vec{K}_0$ к $\vec{L}_0$

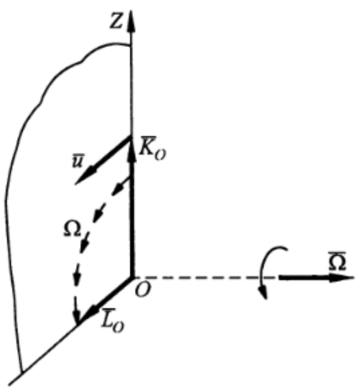


Рис. 16.17

35 Основные положения теории удара.

В излагаемой ниже теории удара рассматривают такие ударные явления, при которых происходит конечное изменение скоростей точек механической системы за весьма малый промежуток времени τ, называемый временем удара.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m в виде:

$$d(m\vec{V}) = \vec{F}dt = d\vec{S}$$

и проинтегрируем его в пределах от 0 до τ

$$m(\vec{u} - \vec{v}) = \int\limits_0^\tau \vec{F}dt = \vec{S} \qquad (20.2)$$

Здесь $\vec{V}$ — скорость точки в процессе удара; $\vec{v}\vec{u}$, — скорости точки до и после удара соответственно; $\vec{S}$ — импульс ударной силы $\vec{F}$ за время τ.

Изменение скорости точки $\Delta\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}$ за время удара есть величина конечная, что следует из эксперимента. Из предыдущего выражения следует, что им-пульс ударной силы также величина конечная.Запишем импульс ударной силы с помощью теоремы о среднем значении функции:

$$\vec{S} = \int\limits_0^\tau \vec{F}dt = \vec{F}_{cp}\tau \qquad (20.3)$$

где $\vec{F}_{cp}$ — среднее значение ударной силы за время удара.

из последних двух выражений получаем:

$$\vec{F}_{cp} = \frac{m(\vec{u}-\vec{v})}{\tau}$$

т. е. при конечном значении произведения в числителе и очень малом знаменателе ($\tau \approx 10^{-2} - 10^{-4}c$) $\vec{F}_{cp}$ очень велико (порядка $\frac{1}{\tau}$). В связи с этим при τ→0 и $\vec{F}_{cp}$→∞ импульс $\vec{S}$ есть величина конечная.

Согласно принятому допущению, в уравнениях теории удара время отсутствует, поэтому вместо ударных сил будем оперировать их импульсами.

Уравнение (20.2) выражает теорему об изменении количества движения точки при ударе. Покажем, что перемещение $\Delta\vec{r}$ точки за время удара бесконечно мало. Интегрируя уравнение

$$m\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{S} + m\vec{v}$$

от 0 до τ, получаем

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r} = (\vec{v} + \frac{\vec{S}_{cp}}{m})\tau \qquad (20.4)$$

Здесь $\vec{S}_{cp} = \int\limits_0^\tau \frac{\vec{S}dt}{\tau}$ — средний ударный импульс силы; $\vec{S}_{cp} = \int\limits_0^t \vec{F}dt$ при $0 < t \leqslant \tau$

При конечных $\vec{v}, \vec{S}_{cp}$ и τ→0 перемещение точки $\Delta\vec{r}$ за время удара пренебрежимо мало и его при ударе не учитывают

Пусть на точку действуют ударная сила $\vec{F}(t)$ и конечная сила $\vec{P}$. В качестве конечных можно рассматривать силы тяжести, упругости, а также силы, зависящие, например, от скорости точки. Суммарный импульс этих сил равен

$$\vec{S}_\Sigma = \int\limits_0^\tau \vec{F}dt + \int\limits_0^\tau \vec{P}dt = \vec{S} + \vec{P}_{cp}\tau$$

Вторым слагаемым здесь можно пренебречь, так как оно является малым того же порядка, что и τ, а $\vec{S}$ — величина конечная, поэтому при ударе действие конечных сил не учитывается.

Используя модель Ньютона, рассмотрим удар двух тел, при котором в точке контакта А возникают ударные силы. Трение не будем учитывать, поэтому ударные силы и их импульсы $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ направлены по общей нормали к соударяющимся телам в точке А (рис. 20.1)

Ударная сила, действующая на тело, изменяется во времени, как показано на рис. 20.2.

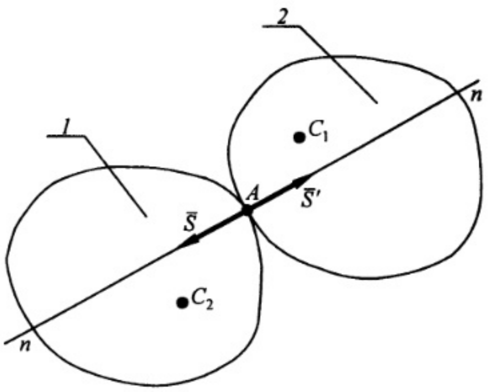


Рис. 20.1

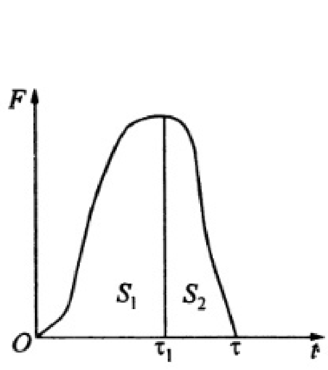


Рис. 20.2

В контакте тел образуются местные упругопластические деформации, зависящие от физических свойств тел. Процесс удара разбивается на две фазы. В первой фазе — фазе деформирования — происходит сближение тел в точке A по общей нормали до тех пор, пока нормальная составляющая относительной скорости точки контакта тел не обратится в нуль в момент времени τ_1. Фаза деформирования характеризуется импульсом ударной силы S_1. Далее начинается вторая фаза — фаза восстановления, при которой тела в месте контакта восстанавливают свою форму вследствие упругих сил. Нормальная составляющая относительной скорости точки контакта меняет знак и возрастает, но из-за пластических деформаций не достигает своего первоначального значения. Импульс ударной силы в этой фазе равен S_2

Введем коэффициент восстановления K, который характеризует свойства материалов соударяющихся тел:

$$K = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_2'}{S_1'} \qquad (20.5),$$

где S_1, S_1', S_2, S_2' — импульсы ударных сил в фазах деформирования и восстановления для первого и второго тел соответственно.

Коэффициент восстановления определяют экспериментально. Так как после удара в общем случае полного восстановления формы тел не происходит, то $0 \leqslant K \leqslant 1$. При K = 1 удар называют **абсолютно упругим**, при K=0 — **абсолютно неупругим**, а при $0 < K < 1$ — **упругим**. В случае, когда K=0 , нормальная составляющая относительной скорости точки соприкосновения тел после удара равна нулю и фаза восстановления отсутствует. Оба тела либо движутся совместно, либо одно тело скользит по другому после максимального сближения в точке контакта

36 Теорема об изменении количества движения точки и системы точек при ударе.

Для материальной точки теорема об изменении количества движения при ударе имеет вид (20.2), т. е. изменение количества движения точки за время удара равно импульсу ударной силы, действующей на точку.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем

$$mu_x - mv_x = S_x; \quad mu_y - mv_y = S_y; \quad mu_z - mv_z = S_z;$$

Для ударных внутренних сил механической системы имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(i)} = 0; \quad \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0 \vec{F}_k^{(i)} = 0.$$

Проинтегрировав по времени удара, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^{(i)} = 0; \quad \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0 \vec{S}_k^{(i)} = 0. \qquad (20.6)$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек. Применим теорему об изменении количества движения для k-й точки системы:

$$m_k \vec{u}_k - m_k \vec{v}_k = \vec{S}_k^{(e)} + \vec{S}_k^{(i)}, k = 1, \ldots, N. \qquad (20.7)$$

Здесь $\vec{u}_k, \vec{v}_k,$ — скорости k-й точки после и до удара; $\vec{S}_k^{(e)}, \vec{S}_k^{(i)}$ — импульсы внешней и внутренней ударных сил.

Суммируя уравнения (20.7) по точкам системы, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{u}_k - \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{S}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{S}_k^{(i)}$$

Обозначив $\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{u}_k, \quad \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$ с учетом свойства (20.6) из (20.7) находим

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^{(e)}, \qquad (20.8)$$

где $\vec{Q}, \vec{Q}_0$ — количества движения системы после и до удара соответственно.

Таким образом, изменение количества движения механической системы за время удара равно векторной сумме импульсов всех внешних ударных сил, действующих на точки системы.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеем

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{kx}^{(e)}; \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{ky}^{(e)}; \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{kz}^{(e)}. \qquad (20.9)$$

Запишем $\vec{Q} = M\vec{u}_c, \vec{Q}_0 = M\vec{v}_c$, где $M, \vec{u}_c, \vec{v}_c$ — соответственно масса си-стемы и скорости ее центра масс после и до удара. Согласно (20.8), выражение для теоремы о движении центра масс системы имеет вид

$$M\vec{u}_c - M\vec{v}_c = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^{(e)}. \qquad (20.10)$$

В проекциях на оси координат получаем

$$M(\vec{u}_{cx} - \vec{v}_{cx}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{kx}^{(e)}; M(\vec{u}_{cy} - \vec{v}_{cy}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{k_y}^{(e)}; M(\vec{u}_{cz} - \vec{v}_{cz}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{kz}^{(e)}. \qquad (20.11)$$

Приведем законы сохранения, вытекающие из этих теорем

1. Если $\sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^{(e)} = 0$, то из (20.8), (20.10) следует

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0, \quad \vec{u}_c = \vec{v}_c \qquad (20.12)$$

Таким образом, если векторная сумма импульсов внешних ударных сил равна нулю, то вектор количества движения и скорость центра масс системы остаются постоянными. В проекциях на оси координат имеем

$$Q_x = Q_{0x}; Q_y = Q_{0y}; Q_z = Q_{0z}$$

$$u_{cx} = v_{cx}; u_{cy} = v_{cy}; u_{cz} = v_{cz}$$

2. Если $\sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{kx}^{(e)} = 0$, то из (20.9), (20.11) получаем

$$Q_x = Q_{0x}, u_{cx} = v_{cx}.$$

37 Теорема об изменении кинетического момента точки и механической системы при ударе.

$$m(\vec{u} - \vec{v}) = \int_0^{\tau} \vec{F} dt = \vec{S} \qquad (20.2)$$

Умножим векторно равенство (20.2) слева на радиус-вектор $\vec{r}$ (рис. 20.4)

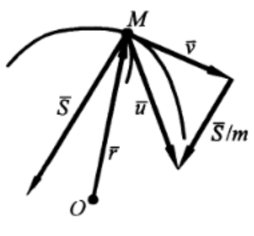


Рис. 20.4

$$\vec{r} \times m\vec{u} - \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{S}, \text{ или } \vec{M}_0(m\vec{u}) - \vec{M}_0(m\vec{v}) = \vec{M}_0(\vec{S}) \qquad (20.13)$$

где $\vec{M}_0(m\vec{u}), \vec{M}_0(m\vec{v}), \vec{M}_0(\vec{S})$ — моменты количества движения материальной точки после и до удара и момент импульса ударной силы относительно точки O соответственно.

Уравнение (20.13) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно точки O при ударе

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем

$$\vec{M}_x(m\vec{u}) - \vec{M}_x(m\vec{v}) = \vec{M}_x(\vec{S});$$
$$\vec{M}_y(m\vec{u}) - \vec{M}_y(m\vec{v}) = \vec{M}_y(\vec{S});$$
$$\vec{M}_z(m\vec{u}) - \vec{M}_z(m\vec{v}) = \vec{M}_z(\vec{S});$$

Запишем уравнение, выражающее теорему об изменении момента количества движения для любой из N точек механической системы

$$\vec{r}_k \times m\vec{u}_k - \vec{r}_k \times m\vec{v}_k = \vec{r}_k \times \vec{S}_k^{(e)} + \vec{r}_k \times \vec{S}_k^{(i)}, k = 1, \ldots, N, \qquad (20.14)$$

где $\vec{u}_k, \vec{v}_k$ — скорости k-й точки после и до удара; $\vec{S}_k^{(e)}, \vec{S}_k^{(i)}$, — импульсы внеш-ней и внутренней ударных сил, действующих на k-ю точку системы.

Суммируя (20.14) по всем точкам системы, получаем

$$\vec{K}_0 - \vec{k}_0^{(0)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{S}_k^{(e)}), \qquad (20.15)$$

где $\vec{K}_0 = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{u}_k, \vec{K}_0^{(0)} = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k$ — главные моменты количеств движения системы относительно точки O после и до удара, $\sum\limits_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{S}_k^{(e)}) = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times (\vec{S}_k^{(e)})$ — сумма моментов импульсов внешних ударных сил относительно точки O ($\sum\limits_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{S}_k^{(e)}) = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times (\vec{S}_k^{(e)})$ по свойству внутренних сил).

Сформулируем теорему: **изменение главного момента количеств движения системы относительно какой-либо точки за время удара равно векторной сумме моментов импульсов внешних ударных сил, приложенных к материальным точкам системы, относительно той же точки**.

Для главных моментов количеств движения системы относительно осей координат имеем

$$K_x - K_x^{(0)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_x(\vec{S}_k^{(e)}); K_y - K_y^{(0)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_y(\vec{S}_k^{(e)}); \qquad (20.16)$$
$$K_z - K_z^{(0)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_z(\vec{S}_k^{(e)})$$

38 Изменение угловой скорости при ударе по вращающемуся телу.

Рассмотрим теперь, как изменяется угловая скорость вращающегося тела при ударе. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Az с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ (рис. 20.5). К телу приложены импульсы $\vec{S}_k^{(e)}(k = 1, \ldots, N)$. Определим изменение угловой скорости $\vec{\omega}$ тела после их приложения.

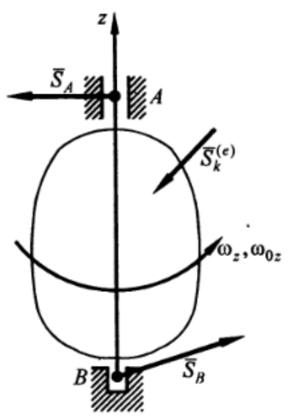


Рис. 20.5

Главные моменты количеств движения тела относительно оси Az после и до удара равны:$K_z = J_z\omega_z, K_z^{(0)} = J_z\omega_{0_z}$,, где Jz — момент инерции тела относительно оси вращения. Из третьего уравнения (20.16) имеем

$$J_z(\omega_z - \omega_{0_z}) = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{S}_k^{(e)}) \qquad (20.17)$$

откуда

$$\Delta\omega_z = \omega_z - \omega_{0_z} = \frac{\sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{S}_k^{(e)})}{J_z}$$

где $\Delta\omega_z\omega_z$, — изменение угловой скорости при ударе и проекция на ось Az угловой скорости тела после удара (см. рис. 20.5). Моменты импульсов $\vec{S}_A, \vec{S}_B$, ударных реакций относительно оси Az при этом равны нулю.

39 Центр удара. Условия отсутствия ударных реакций в опорах вращающегося твердого тела

Пусть нам заранее известны следующие уравнения (без выводов) стр.531-532 учебника

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S} + \vec{S}_A + \vec{S}_B; \qquad (20.32)$$

$$\Delta\vec{K}_0 = \vec{K}_0 + \vec{K}_0^{(0)} = \vec{M}_0(\vec{S}) + \vec{M}_0(\vec{S}_A) + \vec{M}_0(\vec{S}_B) \qquad (20.33)$$

$$\Delta\vec{Q} = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Delta\omega \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = m[\vec{i}(-y_c\Delta\omega) + \vec{j}x_c\Delta\omega + \vec{k}\cdot 0] \qquad (20.34)$$

$$K_x = -J_{xz}\omega_z, \quad K_y = -J_{yz}\omega_z, \quad K_z = -J_z\omega_z;$$

$$\Delta K_x = -J_{xz}\Delta\omega, \quad \Delta K_y = -J_{yz}\Delta\omega, \quad \Delta K_z = -J_z\Delta\omega, \qquad (20.35)$$

$$\Delta Q_x = -my_c\Delta\omega = S_x + S_{Ax} + S_{Bx}; \Delta Q_y = mx_c\Delta\omega = S_y + S_{Ay} + S_{By};$$
$$\Delta Q_z = 0 = S_z + S_{Az}; \Delta K_x = -J_{xz}\Delta\omega = M_x(\vec{S}) + M_x(\vec{S}_A) + M_x(\vec{S}_B); \qquad (20.36)$$
$$\Delta K_y = -J_{yz}\Delta\omega = M_y(\vec{S}) + M_y(\vec{S}_A) + M_y(\vec{S}_B); \Delta K_z = J_z\Delta\omega = M_z(\vec{S})$$

С помощью системы (20.36) при заданных импульсе $\vec{S}$ и точке его приложения определяют изменение угловой скорости $\Delta\omega$

Центр удара

Рассмотрим теперь задачу о нахождении условий, при которых удар, произведенный по телу, не создает ударных реакций. Положим в (20.32), (20.33) $\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$, тогда (20.36) принимает вид

$$-my_c\Delta\omega = S_x; \quad -mx_c\Delta\omega = S_y; \quad 0 = S_z$$
$$-J_{xz}\Delta\omega = M_x(\vec{S}); -J_{yz}\Delta\omega = M_y(\vec{S}); -J_z\Delta\omega = M_z(\vec{S}); \qquad (20.37)$$

Из третьего уравнения системы (20.37) следует, что импульс $\vec{S}$ должен быть перпендикулярен оси вращения тела Oz. Выберем плоскость Oxy так, чтобы в ней находился импульс $\vec{S}$, а ось Ox направим параллельно $\vec{S}$ (рис. 20.12). Тогда $S_y = 0, S_x = S, M_x(\vec{S}) = M_y(\vec{S}) = 0$. Пусть $ON = l$. Уравнения (20.37) примут вид

$$-my_c\Delta\omega = S; \quad -mx_c\Delta\omega = 0; \quad 0 = S_z,$$
$$-J_{xz}\Delta\omega = 0; \ -J_{yz}\Delta\omega = 0; \ J_z\Delta\omega = -lS$$

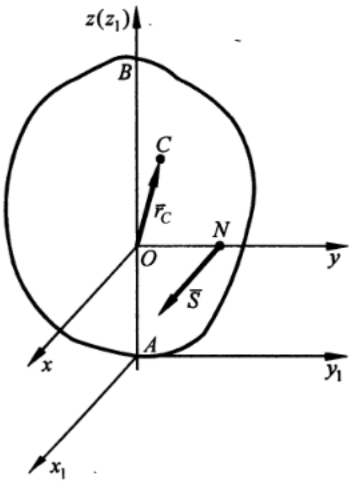


Рис. 20.12

Из второго уравнения имеем $X_c = 0$, из четвертого и пятого находим $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Это означает, что центр масс тела лежит в плоскости Oyz, ось Oz является главной для точки О, а импульс $\vec{S}$ ударной силы перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела. Из первого и последнего уравнений получаем

$$l = \frac{J_z}{(my_c)} \qquad (20.38)$$

Из (20.38) следует, что знаки y_c и l одинаковы, т. е. центр масс системы и точка N лежат в плоскости Oyz по одну сторону от оси Oz.

Точка N, в которой приложен импульс $\vec{S}$ при отсутствии ударных реакций подшипников, называется **центром удара**.

Центром удара называется та точка твердого тела, вращающегося в закрепленной подпятником и подшипником оси, при котором ударные импульсы в опорных связях не возникают.

Если центр масс системы находится на оси вращения, то $y_c = 0$ и $l = \infty$, т. е. в этом случае центр удара отсутствует (из уравнения (20.32) следует $\vec{S}_A + \vec{S}_B = -\vec{S}$). Отметим, что удары по уравновешенным вращающимся валам машин передаются на подшипники.

Итак, чтобы при приложении к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, ударного импульса не возникали ударные реакции в опорах, т. е. чтобы существовал центр удара, необходимо и достаточно выполнить следующие условия:

1) ударный импульс должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения тела и его центр масс; 2) точка N пересечения линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения тела и его центр масс, должна лежать в этой плоскости по одну сторону от оси вращения вместе с центром масс; 3) ударный импульс, произвольный по величине, должен лежать в плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку О, для которой ось вращения является главной осью инерции тела

40 Теорема Карно.

$\vec{V}$ - скорость до удара

$\vec{U}$ - скорость после удара

$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, где $\vec{S}_1$ - фаза деформации, $\vec{S}_2$ - фаза восстановления

(1) $\underline{m(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{S}}$

(1)U $\quad mU^2 - m\vec{U}\vec{V} = \vec{S}\vec{U}$

$+$

(1)V $\quad m\vec{U}\vec{V} - mV^2 = \vec{S}\vec{V}$

(2)$\underline{mU^2 - mV^2 = \vec{S}\vec{U} + \vec{S}\vec{V}}$ => $mU^2 - mV^2 = \vec{S}(\vec{U} + \vec{V})$

(1) Фаза деформации.

при ударе тела деформируются и в момент, когда деформация максимальна, скорость:

$\vec{V}$ - начальная скорость

$$\vec{U}_1 = \vec{U}_\tau \quad (\perp \vec{S}_1)$$

$$mU_1^2 - mV^2 = \vec{S}_1(\vec{U}_1 + \vec{V})$$

(*) $mU_1^2 - mV^2 = \vec{S}_1\vec{V}$

Из (1): $\quad m(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{S}_1 \quad |*\vec{S}_1$

$$m\vec{U}_1\vec{S}_1 - m\vec{V}\vec{S}_1 = \vec{S}_1^2 \quad => \vec{S}_1\vec{V} = -\frac{\vec{S}_1^2}{m}$$

Из (*) получаем:

(3)$m\vec{U}_1 - m\vec{V}_1 = -\frac{\vec{S}_1^2}{m}$

(2) Фаза восстановления.

$$\vec{S}_2 || \vec{S}_1 \qquad \vec{S}_2\vec{U}_1 = 0$$

$\vec{U}_1$ - начальная скорость

$\vec{U}$ - конечная скорость

Из (2): $mU^2 - mU_1^2 = \vec{S}_2(\vec{U} + \vec{U}_1)$

$$mU^2 - mU_1^2 = \vec{S}_2\vec{U}$$

Из (1): $m(\vec{U} - \vec{U}_1) = \vec{S} \quad | * S_2$

$$m\vec{S}_2\vec{U} - m\vec{S}_2\vec{U}_1 = S_2^2$$
$$m\vec{S}_2\vec{U} = \vec{S}_2^2$$
$$\vec{S}_2\vec{U} = \frac{S_2^2}{m}$$
$$S = S_1 + S_2; \quad S_2 = kS_1; => \quad S_1 = \frac{S}{1+k}; \quad S_1 - S_2 = \frac{1-k}{1+k}S;$$

Тогда:

$$(4) mU^2 - mU_1^2 = \frac{S_2^2}{m}$$

Сложим (3) и (4) уравнения:

$$mU^2 - mV^2 = \frac{S_2^2}{m} - \frac{S_1^2}{m}$$
$$mU^2 - mV^2 = -\frac{S_1^2 - S_2^2}{m}$$
$$mU^2 - mV^2 = -\frac{(S_1 - S_2)(S_1 + S_2)}{m}$$
$$mU^2 - mV^2 = -\frac{S^2(1-k)}{(1+k)m}$$
$$mU^2 - mV^2 = -\frac{S^2(1-k)}{(1+k)m} | * \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}mU^2 - \frac{1}{2}mV^2 = -\frac{1-k}{1+k}\frac{1}{2}\frac{S^2}{m}$$
$$\frac{1}{2}mU^2 - \frac{1}{2}mV^2 = -\frac{1-k}{1+k}\frac{1}{2}m(\vec{U} - \vec{V})^2,$$

где $m(\vec{U} - \vec{V})^2$ - кинетическая энергия точки с потерями скорости.

$$\frac{1}{2}m_kU_k^2 - \frac{1}{2}m_kV_k^2 = -\frac{1-k}{1+k}\frac{1}{2}m_k(\vec{U}_k - \vec{V}_k)^2$$
$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}mU^2 - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}mV^2 = -\frac{1-k}{1+k}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m(\vec{U} - \vec{V})^2$$

$\boxed{T - T_0 = -\frac{1-k}{1+k}T_{\text{пот.}}}$ - Теорема Карно

где T - кинетическая энергия до удара; T_0— кинетическая энергия после удара; $T_{\text{пот.}}$— кинетическая энергия с потерями скорости (потерянная кинетическая энергия при ударе)

Потери кинетической энергии при ударе равны кинетической энергии системы, которая соответствует потерянным скоростям ее точек, умноженной на $\frac{1-k}{1+k}$, k - коэффициент восстановления.

41 Движение точки переменной массы. Дифференциальные уравнения движения.

Ограничимся рассмотрением тех случаев, для которых процесс изменения массы происходит непрерывно. При скачкообразном изменении массы соответствующие задачи решаются путем непосредственного применения общих теорем динамики тел постоянной массы, а также методами теории удара

Для вывода уравнения движения ТПМ воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы. Для этого рассмотрим механическую систему, состоящую из частиц постоянной массы, которые в момент времени t составляют материальную точку **M** (обозначим массу точки , скорость v) и за время Δt присоединятся к материальной точке **M** (обозначим их массы $\mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_{N1}^{(1)}$ скорости в момент времени t — $\vec{v}^{(1)}, \ldots, \vec{v}_{N1}^{(1)}$ соответственно). Пусть $\mu_1^{(2)}, \ldots, \mu_{N2}^{(2)}$ — массы тех частиц, которые за время Δt отделятся от точки **M**, а $\vec{v}_1^{(2)}, \ldots, \vec{v}_{N2}^{(2)}$— их абсолютные скорости в момент времени $t + \Delta t$. Введем также обозначения

$$\vec{v}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{N_1}\mu_k^{(1)}\vec{v}_k^{(1)}}{\Delta m_1}; \vec{v}_2 = \frac{\sum_{k=1}^{N_2}\mu_k^{(2)}\vec{v}_k^{(2)}}{\Delta m_2} \qquad (21.1);$$

где $\Delta m_1 = \sum_{k=1}^{N_1}\mu_k^{(1)}; \Delta m_2 = \sum_{k=1}^{N_2}\mu_k^{(2)}$

Запишем количество движения этой механической системы в моменты времени t и $t + \Delta t$. С учетом (21.1) будем иметь

$$\vec{Q}(t) = M\vec{v} + \Delta m_1\vec{v}_1, \quad \vec{Q}(t + \Delta t) = (M + \Delta m_1 - \Delta m_2)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m_2\vec{v}_2,$$

$$\Delta\vec{Q}(t) = \vec{Q}(t + \Delta t) - \vec{Q}(t) = M\Delta\vec{v} + \Delta m_1(\vec{v} - \vec{v}_1) - \Delta m_2(\vec{v} - \vec{v}_2) + (\Delta m_1 - \Delta m_2)\Delta\vec{v} \qquad (21.2)$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta\vec{Q}(t)}{\Delta t}$, из (21.2) получаем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{v}_1)\frac{dm_1}{dt} - (\vec{v} - \vec{v}_2)\frac{dm_2}{dt}, \qquad (21.3)$$

так как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}\Delta m_1}{\Delta t} = 0$ и $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}\Delta m_2}{\Delta t} = 0$

Теорему об изменении количества движения системы $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)}$ с учетом (21.3) запишем в виде

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{v}_1 - \vec{v})\frac{dm_1}{dt} - (\vec{v}_2 - \vec{v})\frac{dm_2}{dt} \qquad (21.4)$$

Поскольку при Δt→0 Δm_1 и Δm_2 также будут стремиться к нулю, то в уравнении (21.4) F является равнодействующей сил, приложенных к точке **M**. Отметим, что $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в формулах (21.3) и (21.4) будет скоростью центра масс отделяющихся частиц в момент времени t (ранее $\vec{v}_2$ — скорость центра масс отделяющихся частиц в момент времени $t + \Delta t$)

Уравнение (21.4) называется **обобщенным уравнением Мещерского**. Если относительные скорости присоединяющихся и отсоединяющихся частиц обозначить соответственно

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v} \qquad \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}$$

то обобщенное уравнение Мещерского примет вид

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}_1\frac{dm_1}{dt} - \vec{u}_2\frac{dm_2}{dt} \qquad (21.5)$$

Поскольку $\Delta M = \Delta m_1 - \Delta m_2$, то после деления на Δt и перехода к пределу при Δt→0 получаем так называемое уравнение **неразрывности**

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dm_1}{dt} - \frac{dm_2}{dt} \qquad (21.6)$$

Представляет также интерес следующая форма обобщенного уравнения Мещерского, которую легко получить из (21.4) и (21.6):

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) = \vec{F} + \vec{v}_1\frac{dm_1}{dt} - \vec{v}_2\frac{dm_2}{dt} \qquad (21.7)$$

Обозначив

$$\vec{P}_1 = \vec{u}_1\frac{dm_1}{dt}, \quad \vec{P}_2 = \vec{u}_2\frac{dm_2}{dt} \qquad (21.8)$$

запишем обобщенное уравнение Мещерского (21.5) в следующей форме:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \qquad (21.9)$$

или

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{P} \qquad (21.10)$$

Сила $\vec{P}$ называется реактивной и представляет собой геометрическую сумму реактивных сил, обусловленных присоединением $\vec{P}_1$ и отделением $\vec{P}_2$ частиц

Заметим, что вывод обобщенного уравнения Мещерского применим не только к ТПМ, но и к поступательно движущемуся телу переменной массы.

42 1-я 2-я задачи К.Э. Циолковского.

Пусть ТПМ движется в безвоздушном пространстве вне силового поля, причем имеет место лишь один процесс отделения частиц. Движение такой точки моделирует движение ракеты в космическом пространстве, если пренебречь внутренним движением частиц, силами сопротивления космической среды, гравитационным притяжением, силами светового давления и т.п.

Тогда $\vec{F}$ =0 и из уравнения Мещерского получим уравнение движения ракеты:

1) $MdV = -V_r dM$

$$dV = -V_r\frac{dM}{M}$$

$V_r = const$(так как отсчитывается относительно ракеты и изменения ее минимальны => можно пренебречь, это скорость относительная скорость отделения продуктов сгорания топлива)

$$\int_{V_0}^{V} dV = -V_r\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M}$$

$$V - V_0 = -V_r ln(M)\Big|_{M_0}^{M} = -V_r ln(\frac{M}{M_0}) = V_r ln(\frac{M_0}{M})$$

$$\boxed{V = V_0 + V_r ln(\frac{M_0}{M})}$$

$$x = x_0 + V_0 t + V_r\int_0^t ln(\frac{M_0}{M})\, dt$$

а) $M = M_0(1 - \alpha t)$ - двигатель работает с постоянно тягой б) $M = M_0 e^{-\alpha t}$ - с течением времени тяга уменьшается

$M_0 = m + M_p$ (где M_0 - общая масса; m - масса топлива; M_p - масса ракеты)

$$\frac{M_0}{M_p} = \frac{m+M_0}{M_p} = 1 + \frac{m}{M_p} = 1 + z$$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{V_r}{\alpha}\left[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) + \alpha t\right]$$

$x = x_0 + V_0 t + \frac{\alpha V_r t^2}{2}$ - где первые слагаемые - стандартные, а дробь - путь

Рис. 21.2

Ракету рисуйте вертикально! => ось Oy будет направлена вверх, а сила тяжести - вниз

2) $\frac{1}{2}at^2 => \alpha V_r = const$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{V_r}{\alpha}\left[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) + \alpha t\right]$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}\alpha V_r t^2 = \frac{1}{2}(\alpha V_r - g)t^2$$