Параметрическая неустойчивость периодических решений системы с центробежным регулятором

Shayak Bhattacharjee, Krishna Kumar

22 декабря 2013 г.

Аннотация

В этой работе мы исследовали возможные источники неустойчивости регулятора Ватта. Эта неустойчивость может возникать при периодическом изменении нагрузки регулятора. Для получения условия существования неустойчивых решений была использована теория Флоке. Полученные результаты дополняют привычные условия устойчивости (Максвелла-Вышнеградского) для регулятора. Работа может быть полезна для студентов старших курсов соответствующих ВУЗов. В ней представлено детальное, но в то же время простое описание классической теории Флоке, которая часто не включается в предмет университетских курсов, несмотря на то, что близко связанная с ней теорема Блоха весьма часто используется в курсах квантовой механики. В то же время, работа представляет практическую инженерную ценность.

Введение

В классической механике широко распространены задачи, рассматривающие системы, в которых один или два параметра зависят от времени. Одним из примеров такой системы является пружина, чья жесткость изменяется во времени (допустим, от нагревания) или ракета, чья масса уменьшается после сгорания топлива. Важным подклассом таких задач являются задачи, где эта зависимость от времени периодическая, то есть параметры системы принимают одни и те же значения как в момент времени t, так и в момент времени $t + kT$, где период T фиксирован. В качестве примера можно привести игрушку, состоящую из груза на веревке, которая намотана на шпильку. Эта система похожа на обычный маятник, за исключением того, что длину веревки можно менять, сматывая, либо наматывая ее на шпильку. Было обнаружено, что при периодическом сматывании и наматывании веревки с определенной частотой, груз начинал раскачиваться чересчур сильно. Для описания систем такого типа была разработана теория Флоке.

Теория регулирования не связана с теорией Флоке. Цель этой теории состоит в том, чтобы так управлять поведением динамической системы, чтобы ее состояние не сдвигалось с некоторой заданной точки. К примеру, если мы установили регулятор в печке на 200 градусов, он должен выключать нагревательные элементы, если температура поднимается, например, выше 205 градусов и включать их, если она опускается ниже 195 градусов. Это один из простейших вариантов регулирования, называемый гистерезисом или переключательным регулированием. Другая стратегия называется пропорциональным регулированием. При этом выход регулятора пропорционален подсчитанной ошибке. Такой подход более точен чем переключательное регулирование.

Понятия обратной связи и регулирования применимы не только к электронике, но также к механическим, химическим и биологическим системам. В механике, классическим примером является центробежный регулятор[?], используемый для управления скоростью машин. Изначально он был разработан неизвестными изобретателям для управления водяными насосами, после чего значительно улучшен и применен к паровым машинам Джеймсом Прескоттом Ваттом. Центробежный регулятор состоит из двух металических шаров на рычагах, прикрепленных к валу, соединенном с машиной. Вращение вала заставляет шары отклоняться наружу, а соответствующий механизм определяет количество поступающего в машину топлива по углу отклонения шаров. Соответствующая втулка двигает муфту и уменьшает подачу топлива при слишком большой скорости вала и увеличивает — при слишком малой.

Условие устойчивости для этого регулятора было впервые получено Максвеллом[?] и уточнено Вышнеградским[?][?], поэтому в литературе оно обычно называется условием Максвелла-Вышнеградского. Расширенное условие, с использованием анализа нелинейностей было получено Денни[?]. Сотомайор с коллегами[?] обнаружили с этой системе бифуркацию Хопфа. Эти работы рассматривают только те системы, в которых функция крутящего момента гладкая и устойчивая. В реальности, машины часто бывают несовершенными, и их крутящий момент подвержен колебаниям. Мы будем рассматривать устойчивость центробежного регулятора при наличии подобных колебаний. В частности, мы рассмотрели случай, когда эти колебания являются периодическими и для их описания применима теория Флоке. Было обнаружено, что существует верхняя граница амплитуды этих колебаний, при пересечении которой регулятор становится неустойчивым даже при выполнении условий Максвелла-Вышнеградского.

1 Центробежный регулятор

Схема центробежного регулятора изображена на рисунке 1.

В силу симметричности системы, уравнение движения может быть получено при допущении, что существует только один шар. Поскольку в модели центробежного регулятора предполагается, что он бесконечно тяжелее втулки, динамика системы сводится к динамике простого конического маятника. Можно записать

$$lp^2\theta + kp\theta + \sin\theta\left(g - \omega^2 l\cos\theta\right) = 0, \tag{1}$$

где l — это длина рычагов, на которых крепятся шары, θ — угол между рычагами и вертикалью, g — ускорение свободного падения, ω — угловая скорость вращающегося вала, k — коэффициент затухания, а p обозначает дифференцирование по времени (запись Хэвисайда). В этой системе есть два положения равновесия, $\theta = 0$ и $\theta = \arccos(g/\omega^2 l)$. Второе положение является устойчивым, если арккосинус определен ($\omega^2 l > g$), а первое является устойчивым в противном случае.

Следующим шагом необходимо линеаризовать (1) в точке равновесия, которую мы обозначим как θ^*. Записав $\Delta\theta = \theta - \theta^*$, получим следующее линейное уравнение относительно $\Delta\theta$

$$p^2\Delta\theta + kp\Delta\theta + (\omega^2\sin^2\theta^*)\Delta\theta = 0. \tag{2}$$

Для применения условий Максвелла-Вышнеградского мы должны записать крутящий момент машины в виде функции от положения регулятора. Обычно выбирается пропорциональное соотношения

$$\Gamma = -\beta\Delta\theta, \tag{3}$$

где Γ — это крутящий момент, а β — положительная константа. Через момент инерции I_e и нагрузку вышезаписанное уравнение можно переписать как

$$I_e p\omega + \beta\Delta\theta = 0. \tag{4}$$

В этой работе мы не будем рассматривать динамику потока топлива. Мы будем иметь дело с ситуацией, когда система уже находится в установившемся состоянии, то есть машина работает при некоторой заданной скорости, но, из-за колебаний, эта скорость имеет периодическое слагаемое

$$\omega = \omega^* + \Delta\omega\cos\alpha t, \tag{5}$$

где α — частота колебаний скорости. Подставляя (5) в (2) получим уравнение (с точностью до первой степени $\Delta\omega/\omega$)

$$p^2\Delta\theta + kp\Delta\theta + {\omega^*}^2\sin^2\theta^*\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega^*}\cos\alpha t\right)\Delta\theta = 0, \tag{6}$$

называемое уравнением Матьё. В следующем разделе статьи мы покажем, как решить уравнение Матьё с помощью теории Флоке.

2 Уравнение Матьё

Здесь мы будем рассуждать так же, как Кумар в работе[**?**], которая, вместе с [**?**]–[**?**] может служить дополнительным источником информации.

Стандартная форма уравнения Матьё имеет вид, для функции $x(t)$:

$$p^2x + 2\lambda px + \omega_0^2(1 + a\cos\omega t)x = 0, \tag{7}$$

где ω_0 обозначает нормальную частоту системы, а ω — частоту внешнего воздействия. Теорема Флоке утверждает, что решение $x(t)$ имеет следующий вид:

$$x(t) = e^{st}e^{i\gamma\omega t} \sum_{-\infty,\ldots,-3,-2,-1}^{0,1,2,\ldots,\infty} X_n e^{jn\omega t}, \tag{8}$$

где γ — некоторое действительное число, s — действительное число, которое может быть как положительным, так и отрицательным, а i — мнимая единица. Получим ограничение на значение γ. Можно показать, что только для двух значений $\gamma = 0$ и $1/2$ возможно представить этот ряд в таком виде, чтобы его мнимые компоненты взаимоуничтожились. В гармоническом случае $\gamma = 0$ и решение имеет такую же частоту как внешнее воздействие, в субгармоническом случае $\gamma = 1/2$ и решение имеет частоту равную половине частоты внешнего воздействия.

Подставляя (8) в (7) мы можем получить решение, приравнивая коэффициенты при $e^{(s+(k+\gamma)\omega i)t}$ для кажого k. Однако, записав в (7) $\cos\omega t$ в виде суммы двух комплексных экспонент мы можем увидеть, что коэффициент при $e^{(s+(k+\alpha)\omega i)t}$ (γ???) включает в себя не только X_k, но и $X_{k\pm1}$. Таким образом, мы получим не набор независимых уравнений для каждого X_k, а рекурсивную зависимость между X_k, X_{k+1} и X_{k-1}. Поэтому мы можем записать:

$$a\left(X_{k+1} + X_{k-1}\right) = -\frac{2}{\omega_0^2}\left[(s + i(k+\gamma)\omega)^2 + 2\lambda(s + i(k+\gamma)\omega) + \omega_0^2\right]X_k. \tag{9}$$

Обозначив коэффициент при X_k за A_k мы можем записать следующее матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \cdots & & & & & & \\ & A_{-2} & & & & & \\ & & A_{-1} & & & & \\ & & & A_0 & & & \\ & & & & A_1 & & \\ & & & & & A_2 & \\ & & & & & & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ X_{-2} \\ X_{-1} \\ X_0 \\ X_1 \\ X_1 \\ X_2 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & & & & & \\ \cdots & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & \cdots \\ & & & & & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ X_{-2} \\ X_{-1} \\ X_0 \\ X_1 \\ X_1 \\ X_2 \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{10}$$

Амплитуда a отделена от коэффициентов A_k по причине, которую мы укажем позже. Матрица слева — диагональная матрица с ненулевыми коэффициентами A_k, а матрица в правой части имеет нули на главной диагонали и единицы на двух побочных диагоналях. В теории эти матрицы имеют бесконечный размер, но на практике их можно усечь до необходимого числа элементов. Чем больше элементов будет в этих матрицах, тем больше будет точность вычислений. В гармоническом случае ($\gamma = 0$) число индексов элементов слева и справа от нуля должно совпадать. В субгармоническом случае число индексов слева от нуля должно быть на единицу больше чем справа. Это означает, что в гармоническом случае матрицы имеют нечетное число строк и столбцов, а в субгармоническом — четное.

Теперь мы можем переписать (10) как

$$AX = aBX, \tag{11}$$

Теперь нам необходимо определить, что мы хотим получить. У нас есть две переменных величины, s и ω, внутри коэффициентов A_k и третья величина, амплитуда a, в явном виде входящая в уравнение. Разумно зафиксировать две из этих величин и находить третью. Значение s важно при определении типа решения: $s < 0$ дает затухающее решение, $s > 0$ — экспоненциально растущее решение, а $s = 0$ — периодическое решение. Конкретное ненулевое значение s не несет большой важности. Важно определить границу, на которой $s = 0$, на плоскости a–ω. Эта кривая будет сепаратрисой между ограниченными и неограниченными решениями, а также позволит найти значения ω при которых движение будет чисто периодическим. Любая меньшая амплитуда приведет к затухающему решению, а любая большая — к нежелательному возрастающему решению.

Зафиксируем $s = 0$, после чего зафиксируем ω, чтобы получить соответствующее значение амплитуды a. Мы можем записать (11) как

$$A^{-1}BX = \frac{1}{a}X, \tag{12}$$

откуда следует, что $1/a$ — собственное число матрицы $A^{-1}B$. Поскольку размеры матриц велики, собственных чисел также будет много. Какие из них важны для нас? Во-первых, комплексные значения однозначно не подходят, поскольку амплитуда может быть только действительным числом. Отрицательные значения тоже не подходят, поскольку колебания в системе происходят с положительной амплитудой. Среди положительных собственных чисел нам будет интересно наименьшее значение амплитуды, при котором могут быть получены чисто периодические решения, а наибольшее значение этой амплитуды имеет важное практическое значение. Поскольку матрицы имеют большой размер подсчет их собственных значений разумно проводить на вычислительной машине. Результаты вычисления показаны на рис. 1 (2???), где система имеет небольшой коэффициент затухания ($\lambda = 0.01$). Минимальная амплитуда для гармонического случая достигается при частоте воздействия равной частоте маятника, а для субгармонического — при частоте равной удвоенной частоте маятника.

В дальнейших вычислениях применялись различные значения λ. Как и ожидалось, минимальная амплитуда, необходимая для достижения чисто периодического движения становится больше с увеличением λ, а положения минимумов сдвигаются относительно незатухающего случая, как и в обычном случае резонанса затухающего маятника. На рис. 3 показан график для $\lambda = 1$.

Вычисления показывают, что субгармонический режим легче достижим, нежели гармонический. Следовательно, при проектировании системы необходимо помнить, что амплитуда внешнего воздействия должна быть меньше критического значения, чтобы были достигнуты достигнуты субгармонические колебания. На рис.4 показаны гармонические составляющие колебаний в критической точке. Можно видеть, что очень малое затухание дает фактически фундаментальные колебания, в то время как более высокие значения коэффициента затухания приводят к увеличению гармонической составляющей.

Также необходимо помнить, что условие неустойчивости Флоке зависит от амплитуды и частоты внешнего воздействия, в то время как условия Максвелла-Вышнеградского зависят только от внутреннего состояния системы. Поэтому, даже в областях, где условия Максвелла-Вышнеградского выполняются, система может находиться в состоянии резонанса Флоке. Наша работа расширяет условия Максвелла-Вышнеградского для случаев периодической нагрузки.

Выводы

В этой работы мы применили теорию Флоке к исследованию устойчивости центробежного регулятора в случае периодического изменения скорости машины. Высокий шанс перехода системы в неустойчивое состояние возникает если частота внешнего воздействия на системы вдвое больше собственной частоты конического маятника. Простым способом избавиться от резонанса Флоке является увеличение коэффициента затухания маятника регулятора.