0.1 Системы теплообмена с одним нагреваемым потоком

Двухпоточный теплообмен

Для получения оценок будем предполагать, что один из контактирующих потоков (для определенности, горячий) имеет фиксированную температуру T_0 на входе и водяной эквивалент W_0, а температура холодного потока T подлежит выбору (управление). Тогда в каждом сечении теплообменника l имеем

$$\frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T)}{W_0}; \quad T_0(0) = T_0^0. \tag{1}$$

Общую поверхность аппарата обозначим через L. Производство энтропии

$$\sigma = \int\limits_0^L q(T_0, T)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) dl \to \min_T, \tag{2}$$

при этом фиксируем L и тепловую нагрузку

$$\int\limits_0^L q(T_0, T) dl = \bar{q}. \tag{3}$$

Условия оптимальности задачи (1) – (2) запишем в форме принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона

$$H = q(T_0, T)\left(\frac{1}{T}) - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W}\right) \tag{4}$$

Условия оптимальности:

1. На оптимальном решении функция H постоянна для любого l

$$H = q(T_0, T)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W}\right) = const = m. \tag{5}$$

2. Так как q дифференцируема и на T нет ограничений, то

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial T}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi}{W}\right) - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0. \tag{6}$$

Из (5), (6) следует после исключения λ и Ψ, что в оптимальном процессе в любом сечении должно быть выполнено условие минимальной диссипации двухпоточного теплообмена:

$$\left[\frac{q(T_0, T)}{T}\right]^2 = m\frac{\partial q}{\partial T}. \tag{7}$$

Обозначим через $\sigma_0 < 0$ уменьшение энтропии горячего потока. Оно равно

$$\sigma_0(\bar{q}, W, T_0^0) = \int\limits_{T_0^0}^{T_0^0 - \bar{q}/W} W \frac{dT_0}{T_0} = W \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right). \tag{8}$$

Отметим, что σ_0 не зависит от α.

В свою очередь

$$\bar{q} = WT_0^0\left(1 - l^{\sigma_0/W}\right). \tag{9}$$

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда поток теплообмена пропорционален разности температур

$$q = \alpha(T_0 - T), \tag{10}$$

где α — коэффициент теплопередачи, отнесенный к единице поверхности контакта.

В случае (10) из условия (7) следует, что в любом сечении

$$\begin{cases} \frac{T}{T_0} = const = m^0, \\ q(T_0) = \alpha T_0(1 - m^0). \end{cases} \tag{11}$$

После подстановки в (8) получим

$$\sigma_0 = \alpha L(m^0 - 1). \tag{12}$$

Обозначим αL через $\bar{\alpha}$.

Из сравнения равенств (12) и (8) можно выразить m^0 через тепловую нагрузку и коэффициент теплопередачи

$$m^0 = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right) = 1 + \frac{\sigma_0}{\bar{\alpha}}. \tag{13}$$

По формуле (2) минимальная диссипация

$$\sigma_{min} = \frac{\bar{\alpha}(1 - m^0)^2}{m^0}. \tag{14}$$

Если в это равенство подставить выражение (13), то получим

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 + \bar{\alpha}}. \tag{15}$$

Так как $\sigma_{min} > 0$, то $\bar{\alpha} > -\sigma_0$. Неравенство $\sigma \geq \sigma_{min}$ приводит к условию физической реализуемости теплообменника.

Фактическое значение σ для теплообменника с водяными эквивалентами горячего и холодного потоков W и W_x соответственно, их температурами

Рис. 1: Зависимость α от $\bar{q}$

на входе T_0^0 и T_x^0 и тепловой нагрузкой $\bar{q}$ может быть для несжимаемых жидкостей рассчитано как

$$\sigma = W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0}. \tag{16}$$

Получим условие физической реализуемости

$$\begin{aligned} & W \ln \tfrac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \tfrac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0} \geq \\ & \geq \frac{W^2 \ln^2\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right)}{W \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right) + \bar{\alpha}} \end{aligned} \tag{17}$$

Или, после разрешения относительно $\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} \geq \frac{W \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right) + W_x \ln\left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right)}{W_x W \ln\left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right) \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right)}. \tag{18}$$

Таким образом, чтобы обеспечить тепловую нагрузку $\bar{q}$ при заданных температурах потоков на входе и их водяных эквивалентах в любом теплообменнике интегральный коэффициент теплообмена должен быть не меньше чем правая часть неравенства (18).

На рис. 1 показана зависимость $\alpha_{min}(\bar{q})$ соответствующая границе реализуемости. Область физической реализуемости теплообменников на этом рисунке заштрихована.

Возможности реализации «идеального» двухпоточного теплообмена

Чтобы достичь полученной выше оценки минимальной диссипации σ_{min} (см. (14)) для кинетики теплообмена линейной относительно разности температур требуется, чтобы в любой точке контакта отношение температур потоков было постоянно

$$T_x/T_0 = m^0 = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right). \tag{19}$$

Рис. 2: Характер зависимости минимального производства энтропии в двухпоточном теплообменнике от $\bar{\alpha}$

Изменение каждой из температур в противоточном теплообменнике вытеснения для любой кинетики теплообмена характеризуется уравнением

$$\frac{dT_x}{dl} = -\frac{q(T_0, T_x)}{W_x}; \quad \frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T_x)}{W}. \tag{20}$$

В этом выражении учтены противоположные направления движения потоков, а за сечение $l = 0$ принято сечение, в котором $T_0 = T_0^0$. Из условий (20) следует, что

$$\frac{dT_x}{dT_0} = \frac{W}{W_x} = const. \tag{21}$$

Таким образом, если для некоторого значения l обеспечить, чтобы условие (19) было выполнено и чтобы константа в (21) была равна m^0, то условие (19) окажется выполнено для всех l.

Получим для $l = 0$

$$\frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_0^0} = m^0; \quad \frac{W}{W_x} = m^0. \tag{22}$$

Если заданы T_0^0 и W для горячего потока, то из условий (22) имеем

$$\begin{cases} W_x = \frac{W}{m^0}, \\ T_x^0 = m^0(T_0^0 - \bar{q}/W). \end{cases} \tag{23}$$

При выполнении условий (23) зависимость между $\bar{\alpha}$ и $\bar{q}$ соответствует границе, показанной на рис. 1.

Распределение поверхностей и выбор структуры

Согласно (15) зависимость $\sigma_{min}(\bar{\alpha})$ имеет вид, показанный на рис. 0.1.

Она выпукла вниз, и решение задачи минимальной диссипации

$$\sum \sigma_{i_{min}}(\bar{\alpha}_i) \to \min_{\alpha_i} / \sum \bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}. \tag{24}$$

единственно.

Рис. 3: Параллельная структура теплообменников

При постановке задачи (24) предполагается, что для каждого теплообменника в системе изменение энтропии горячего потока $\sigma_{0i}(\bar{q}_i, W, T^0_{0i})$ фиксировано. В этом случае условие стационарности функции Лагранжа

$$L = \sum_i [\sigma_{i_{min}}(\bar{\alpha}_i) + \lambda \bar{\alpha}_i] \tag{25}$$

по $\bar{\alpha}_i$ приводит к требованию

$$\frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{0i} + \bar{\alpha}_i} = \lambda,$$

откуда

$$\bar{\alpha}_i / \sigma_{0i} = const, \ \forall i. \tag{26}$$

Так как сумма $\bar{\alpha}_i$ задана, то

$$\bar{\alpha}^*_i = \bar{\alpha} \frac{\sigma_{0i}}{\sum\limits_i \sigma_{0i}} \tag{27}$$

Параллельная структура Нетрудно показать, что при распределении поверхностей по условиям (27) минимальное производство энтропии имеет вид (15) с той разницей, что вместо σ_0 фигурирует $\bar{\sigma}_0 = \sum\limits_i \sigma_{0i}$.

$$\sigma_{min} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}_0 + \bar{\alpha}}. \tag{28}$$

Пусть имеется возможность распределить между теплообменниками тепловые нагрузки $\bar{q}_i$ при условии, что суммарная тепловая нагрузка задана

$$\sum_i \bar{q}_i = \bar{q}. \tag{29}$$

Так как σ_{min} монотонно зависит от $\bar{\sigma}_0$, то задача распределения тепловых нагрузок примет форму

$$\bar{\sigma}_0 = \sum_i \sigma_{0i} = \sum_i W_i \ln\left(1 - \frac{\bar{q}_i}{W_i T_0^0}\right) \to \min_{q_i} \qquad (30)$$

при условии (29).

Условие оптимальности задачи (29), (30) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{0i}}{\partial q_i} = const = \frac{W_i}{\left(1 - \frac{\bar{q}_i}{W_i T_0^0}\right) W_i T_0^0}. \qquad (31)$$

После очевидных преобразований получаем, что $\bar{q}_i$ надо выбирать так, чтобы все температуры потоков на выходе были одинаковы.

$$\bar{T}_{0i} = T_0^0 - \frac{\bar{q}_i}{W_i} = const = \bar{T}_0, \qquad (32)$$

Температура

$$\bar{T}_0 = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\sum\limits_i W_i}, \qquad (33)$$

а оптимальная нагрузка

$$\bar{q}_i^* = \bar{q}\frac{W_i}{\sum W_i}. \qquad (34)$$

После того, как найдены $\bar{q}_i^*$ и соответствующие им σ_{0i}, поверхности теплообмена можно рассчитать по формуле (27).

Последовательная структура

При последовательном соединении между σ_{01} и σ_{02} есть связь, так как

$$T_{01} = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W},$$

а значит

$$\sigma_{02} = W \ln\left[1 - \frac{\bar{q}_2}{W\left(T_0^0 - \frac{\bar{q}_1}{W}\right)}\right] = W \ln\left(1 - \frac{\bar{q}_2}{W T_0^0 - \bar{q}_1}\right) \qquad (35)$$

при условии (29).

Суммируя σ_{01} и σ_{02}, нетрудно показать, что $\bar{\sigma}_0$ не зависит от распределения тепловых нагрузок и равна

$$\bar{\sigma}_0 = W \ln\left(\frac{W T_0^0 - \bar{q}}{W T_0^0}\right). \qquad (36)$$

Это позволяет в (23) изменять $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ так, чтобы их сумма оставалась заданной, а температура первого из холодных потоков

$$T_{x1}^0 = m^0\left(T_0^0 - \frac{\bar{q}_1}{W}\right)$$

Рис. 4: Последовательное соединение теплообменников

была ближе к фактически имеющейся. Для второго потока

$$T_{x2}^0 = m^0 \left(T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W} \right).$$

Все сказанное относится и к последовательном соединению трех и более теплообменников. В этом случае

$$\begin{cases} T_{xi}^0 = m^0 \left(T_0^0 - \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{i} \bar{q}_\nu}{W} \right), \; i = 1, 2, ..., n-1 \\ T_{xn}^0 = m^0 \left(T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W} \right). \end{cases} \tag{37}$$