

## 0.1 Системы теплообмена с одним нагреваемым потоком

### Двухпоточный теплообмен

Для получения оценок будем предполагать, что один из контактирующих потоков (для определенности, горячий) имеет фиксированную температуру  $T_0$  на входе и водяной эквивалент  $W_0$ , а температура холодного потока  $T$  подлежит выбору (управление). Тогда в каждом сечении теплообменника  $l$  имеем

$$\frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T)}{W_0}; \quad T_0(0) = T_0^0. \quad (1)$$

Общую поверхность аппарата обозначим через  $L$ . Производство энтропии

$$\sigma = \int_0^L q(T_0, T) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dl \rightarrow \min, \quad (2)$$

при этом фиксируем  $L$  и тепловую нагрузку

$$\int_0^L q(T_0, T) dl = \bar{q}. \quad (3)$$

Условия оптимальности задачи (1) – (2) запишем в форме принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона

$$H = q(T_0, T) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W} \right) \quad (4)$$

Условия оптимальности:

1. На оптимальном решении функция  $H$  постоянна для любого  $l$

$$H = q(T_0, T) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W} \right) = \text{const} = m. \quad (5)$$

2. Так как  $q$  дифференцируема и на  $T$  нет ограничений, то

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial T} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi}{W} \right) - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0. \quad (6)$$

Из (5), (6) следует после исключения  $\lambda$  и  $\Psi$ , что в оптимальном процессе в любом сечении должно быть выполнено условие минимальной диссипации двухпоточного теплообмена:

$$\left[ \frac{q(T_0, T)}{T} \right]^2 = m \frac{\partial q}{\partial T}. \quad (7)$$

Обозначим через  $\sigma_0 < 0$  уменьшение энтропии горячего потока. Оно равно

$$\sigma_0(\bar{q}, W, T_0^0) = \int_0^L -q(T_0, T_x) \frac{dl}{T_0} = \int_{T_0^0}^{T_0^0 - \bar{q}/W} W \frac{dT_0}{T_0} = W \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0} \right). \quad (8)$$

Отметим, что  $\sigma_0$  не зависит от  $\alpha$ .

В свою очередь,

$$\bar{q} = WT_0^0 \left( 1 - e^{\sigma_0/W} \right). \quad (9)$$

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда поток теплообмена пропорционален разности температур

$$q = \alpha(T_0 - T), \quad (10)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплопередачи, отнесенный к единице поверхности контакта.

В случае (10) из условия (7) следует, что в любом сечении

$$\begin{cases} \frac{T}{T_0} = \text{const} = m^0, \\ q(T_0) = \alpha T_0(1 - m^0). \end{cases} \quad (11)$$

После подстановки в (8) получим

$$\sigma_0 = \alpha L(m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) - 1). \quad (12)$$

Обозначим  $\alpha L$  через  $\bar{\alpha}$ .

Из сравнения равенств (12) и (8) можно выразить  $m^0(\bar{q}, \bar{\alpha})$  через тепловую нагрузку и коэффициент теплопередачи

$$m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0} \right) = 1 + \frac{\sigma_0}{\bar{\alpha}}. \quad (13)$$

По формуле (2) минимальная диссипация

$$\sigma_{min} = \frac{\bar{\alpha}(1 - m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}))^2}{m^0(\bar{q}, \bar{\alpha})}. \quad (14)$$

Если в это равенство подставить выражение (13), то получим

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 + \bar{\alpha}}. \quad (15)$$

Так как  $\sigma_{min} > 0$ , то  $\bar{\alpha} > -\sigma_0$ . Неравенство  $\sigma \geq \sigma_{min}$  приводит к условию физической реализуемости теплообменника.

Фактическое значение  $\sigma$  для теплообменника с водяными эквивалентами горячего и холодного потоков  $W$  и  $W_x$  соответственно, их температурами

Рис. 1: Зависимость  $\bar{\alpha}$  от  $\bar{q}$  для теплообменника из примера 1.

на входе  $T_0^0$  и  $T_x^0$  и тепловой нагрузкой  $\bar{q}$  может быть для несжимаемых жидкостей рассчитано как

$$\sigma = W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0}. \quad (16)$$

Получим условие физической реализуемости

$$\begin{aligned} W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0} &\geq \\ &\geq \frac{W^2 \ln^2 \left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right)}{W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right) + \bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (17)$$

Или, после разрешения относительно  $\bar{\alpha}$ , приходим к неравенству

$$\bar{\alpha} \geq - \frac{W_x W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right)}{W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right) + W_x \ln \left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right)} \quad (18)$$

Таким образом, чтобы обеспечить тепловую нагрузку  $\bar{q}$  при заданных температурах потоков на входе и их водяных эквивалентах в любом теплообменнике интегральный коэффициент теплообмена должен быть не меньше чем правая часть неравенства (18).

На  $\bar{q}$  при этом наложено следующее ограничение

$$\bar{q} < \frac{(T_0^0 - T_x^0) W_x W}{W + W_x} \quad (19)$$

### Пример 1

Рассмотрим пример теплообменника со следующими параметрами:

1. Температура горячего потока на входе  $T_0^0 = 500K$ , а его водяной эквивалент  $W = 200 \text{ кВт/К}$ ;

2. Температура холодного потока на входе  $T_x^0 = 300K$ , а его водяной эквивалент  $W = 150 \text{ кВт/К}$ ;
3. Тепловая нагрузка равна  $\bar{q} = 1000 \text{ кВт}$ ;
4. Интегральный коэффициент теплообмена равен  $\bar{\alpha} = 10 \text{ кВт/К}$ .

Получим, что  $m^0$  равно

$$m^0 = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0} \right) = 0,8.$$

Отсюда, уменьшение энтропии горячего потока

$$\sigma_0 = \bar{\alpha}(m^0 - 1) = -2 \text{ кДж/К},$$

а минимальная диссипация

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 + \bar{\alpha}} = 0,333 \text{ кДж/К}.$$

Фактическое значение энтропии равно

$$\sigma = W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0} = 1,216 \text{ кДж/К}$$

Из условия (17) видно, что теплообменник физически реализуем.

Данный теплообменник также будет реализуем при следующих условиях (из (18), (19)):

$$\begin{aligned} \bar{q} &< 8000 \text{ кВт}, \\ 5,33 \text{ кВт/К} &\leq \bar{\alpha} \leq 75,9 \text{ кВт/К}, \end{aligned}$$

На рис. 1 показана зависимость  $\bar{\alpha}_{min}(\bar{q})$ , соответствующая границе реализуемости. Область физической реализуемости теплообменника на этом рисунке заштрихована.

#### **Возможности реализации «идеального» двухпоточного теплообмена**

Чтобы достичь полученной выше оценки минимальной диссипации  $\sigma_{min}$  (см. (14)) для кинетики теплообмена линейной относительно разности температур требуется, чтобы в любой точке контакта отношение температур потоков было постоянно

$$T_x/T_0 = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0} \right). \quad (20)$$

Изменение каждой из температур в противоточном теплообменнике вытеснения для любой кинетики теплообмена характеризуется уравнением

$$\frac{dT_x}{dl} = -\frac{q(T_0, T_x)}{W_x}; \quad \frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T_x)}{W}. \quad (21)$$

Рис. 2: Характер зависимости минимального производства энтропии в двух-поточном теплообменнике от  $\bar{\alpha}$

В этом выражении учтены противоположные направления движения потоков, а за сечение  $l = 0$  принято сечение, в котором  $T_0 = T_0^0$ . Из условий (21) следует, что

$$\frac{dT_x}{dT_0} = \frac{W}{W_x} = \text{const.} \quad (22)$$

Таким образом, если для некоторого значения  $l$  обеспечить, чтобы условие (20) было выполнено и чтобы константа в (22) была равна  $m^0(\bar{q}, \bar{\alpha})$ , то условие (20) окажется выполнено для всех  $l$ .

Получим для  $l = 0$

$$\frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_0^0} = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}); \quad \frac{W}{W_x} = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}). \quad (23)$$

Если заданы  $T_0^0$  и  $W$  для горячего потока, то из условий (23) имеем

$$\begin{cases} W_x = \frac{W}{m^0(\bar{q}, \bar{\alpha})}, \\ T_x^0 = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha})(T_0^0 - \bar{q}/W). \end{cases} \quad (24)$$

При выполнении условий (24) зависимость между  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{q}$  соответствует границе, показанной на рис. 1.

#### **Распределение поверхностей и выбор структуры**

Согласно (15) зависимость  $\sigma_{min}(\bar{\alpha})$  имеет вид, показанный на рис. 0.1.

Она выпукла вниз, и решение задачи минимальной диссипации

$$\sum \sigma_{i_{min}}(\bar{\alpha}_i) \rightarrow \min / \sum \bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}. \quad (25)$$

единственно.

При постановке задачи (25) предполагается, что для каждого теплообменника в системе изменение энтропии горячего потока  $\sigma_{0i}(\bar{q}_i, W, T_{0i}^0)$  фиксировано. В этом случае условие стационарности функции Лагранжа

$$L = \sum_i [\sigma_{i_{min}}(\bar{\alpha}_i) + \lambda \bar{\alpha}_i] \quad (26)$$

Рис. 3: Параллельная структура теплообменников

по  $\bar{\alpha}_i$  приводит к требованию

$$\frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{0i} + \bar{\alpha}_i} = \lambda,$$

откуда

$$\bar{\alpha}_i / \sigma_{0i} = \text{const}, \forall i. \quad (27)$$

Так как сумма  $\bar{\alpha}_i$  задана, то

$$\bar{\alpha}_i^* = \bar{\alpha} \frac{\sigma_{0i}}{\sum_i \sigma_{0i}} \quad (28)$$

**Параллельная структура** Нетрудно показать, что при распределении поверхностей по условиям (28) минимальное производство энтропии имеет вид (15) с той разницей, что вместо  $\sigma_0$  фигурирует  $\bar{\sigma}_0 = \sum_i \sigma_{0i}$

$$\sigma_{min} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}_0 + \bar{\alpha}}. \quad (29)$$

Пусть имеется возможность распределить между теплообменниками тепловые нагрузки  $\bar{q}_i$  при условии, что суммарная тепловая нагрузка задана

$$\sum_i \bar{q}_i = \bar{q}. \quad (30)$$

Так как  $\sigma_{min}$  монотонно зависит от  $\bar{\sigma}_0$ , то задача распределения тепловых нагрузок примет форму

$$\bar{\sigma}_0 = \sum_i \sigma_{0i} = \sum_i W_i \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}_i}{W_i T_0^0} \right) \rightarrow \min_{q_i} \quad (31)$$

Рис. 4: Последовательное соединение теплообменников

при условии (30).

Условие оптимальности задачи (30), (31) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{0i}}{\partial q_i} = \text{const} = \frac{W_i}{(W_i T_0^0 - \bar{q}_i)}. \quad (32)$$

После очевидных преобразований получаем, что  $\bar{q}_i$  надо выбирать так, чтобы все температуры потоков на выходе были одинаковы.

$$\bar{T}_{0i} = T_0^0 - \frac{\bar{q}_i}{W_i} = \text{const} = \bar{T}_0, \quad (33)$$

Температура

$$\bar{T}_0 = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\sum_i W_i}, \quad (34)$$

а оптимальная нагрузка

$$\bar{q}_i^* = \bar{q} \frac{W_i}{\sum W_i}. \quad (35)$$

После того, как найдены  $\bar{q}_i^*$  и соответствующие им  $\sigma_{0i}$ , поверхности теплообмена можно рассчитать по формуле (28).

#### **Последовательная структура**

При последовательном соединении между  $\sigma_{01}$  и  $\sigma_{02}$  есть связь, так как

$$T_{01} = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W},$$

а значит

$$\sigma_{02} = W \ln \left[ 1 - \frac{\bar{q}_2}{W(T_0^0 - \frac{\bar{q}_1}{W})} \right] = W \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}_2}{WT_0^0 - \bar{q}_1} \right) \quad (36)$$

при условии (30).

Суммируя  $\sigma_{01}$  и  $\sigma_{02}$ , нетрудно показать, что  $\bar{\sigma}_0$  не зависит от распределения тепловых нагрузок и равна

$$\bar{\sigma}_0 = W \ln \left( \frac{WT_0^0 - \bar{q}}{WT_0^0} \right). \quad (37)$$

Это позволяет в (24) изменять  $\bar{q}_1$  и  $\bar{q}_2$  так, чтобы их сумма оставалась заданной, а температура первого из холодных потоков

$$T_{x1}^0 = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) \left( T_0^0 - \frac{\bar{q}_1}{W} \right)$$

была ближе к фактически имеющейся. Для второго потока

$$T_{x2}^0 = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) \left( T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W} \right).$$

Все сказанное относится и к последовательному соединению трех и более теплообменников. В этом случае

$$\begin{cases} T_{xi}^0 = m^0 \left( T_0^0 - \frac{\sum_{\nu=1}^i \bar{q}_\nu}{W} \right), & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ T_{xn}^0 = m^0 \left( T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W} \right). \end{cases} \quad (38)$$

#### Общая структура с одним горячим потоком

Для теплообменников с одним горячим потоком структура может состоять из последовательно соединенных параллельных блоков (рис. 0.1). В этом случае каждая из параллельных систем должна удовлетворять полученным выше условиям оптимальности, а последовательные блоки должны иметь такие тепловые нагрузки, которые приспособлены к температурам охлаждающих потоков.

#### ПРИМЕР ПОТОКА С РАЗВЕТВЛЕНИЕМ.

В АНУ, РАЗНИЦА МЕЖДУ ТЕПЛООБМЕНОМ С ОДНИМ ПОТОКОМ И СИСТЕМОЙ ОХЛАЖДЕНИЯ ТА, ЧТО ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ ТЕПЛОВЫЕ НАГРУЗКИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ОХЛАЖДАЕМЫХ УСТРОЙСТВ ЗАДАНЫ (ПОСЛЕДНИЕ НЕРАВЕНСТВОМ) МОЖЕМ ВЫБИРАТЬ ТОЛЬКО АЛЬФЫ (ПОВЕРХНОСТИ РАДИАТОРОВ ПРИ ЗАДАННОЙ СУММЕ). УСЛОВИЕ, ЧТОБЫ ОТНОШЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР БЫЛО ПОСТОЯННО ТОЖЕ ВЫПОЛНИТЬ НЕЛЬЗЯ, ТАК КАК ПОТОК НАГРЕВАЕТСЯ, А ПЛАТЫ ИМЕЮТ ТЕМПЕРАТУРУ НЕ ВЫШЕ ЗАДАННОЙ

Очевидно, что те же выводы справедливы, когда общий поток не горячий, а холодный, который нагревается в системе.



Рис. 5: Пример последовательной структуры с распараллеливанием