0.1 Системы теплообмена с одним нагреваемым потоком

Двухпоточный теплообмен

Для получения оценок будем предполагать, что один из контактирующих потоков (для определенности, горячий) имеет фиксированную температуру T_0 на входе и водяной эквивалент W_0, а температура холодного потока T для каждого элемента l поверхности контакта подлежит выбору. Изменение температуры горячего потока определяется уравнением:

$$\frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T)}{W_0}; \quad T_0(0) = T_0^0. \tag{1}$$

Общую поверхность аппарата обозначим через L. Производство энтропии

$$\sigma = \int\limits_0^L q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dl \to \min_T, \tag{2}$$

при этом фиксируем L и тепловую нагрузку

$$\int\limits_0^L q(T_0, T) dl = \bar{q}. \tag{3}$$

Условия оптимальности задачи (1) – (2) запишем в форме принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона

$$H = q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W} \right) \tag{4}$$

Условия оптимальности:

1. На оптимальном решении функция H постоянна для любого l

$$H = q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W} \right) = const = m. \tag{5}$$

2. Так как q дифференцируема и на T нет ограничений, то

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial T} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi}{W} \right) - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0. \tag{6}$$

Из (5), (6) следует после исключения λ и Ψ, что в оптимальном процессе в любом сечении должно быть выполнено условие минимальной диссипации двухпоточного теплообмена:

$$\left[\frac{q(T_0, T)}{T} \right]^2 = m \frac{\partial q}{\partial T}. \tag{7}$$

Обозначим через $\sigma_0 < 0$ уменьшение энтропии горячего потока. Оно равно

$$\sigma_0(\bar{q}, W, T_0^0) = \int\limits_0^L -q(T_0, T_x)\frac{dl}{T_0} = \int\limits_{T_0^0}^{T_0^0-\bar{q}/W} W\frac{dT_0}{T_0} = W\ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right). \quad (8)$$

Отметим, что σ_0 не зависит от α.

В свою очередь,

$$\bar{q} = WT_0^0\left(1 - e^{\sigma_0/W}\right). \quad (9)$$

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда поток теплообмена пропорционален разности температур

$$q = \alpha(T_0 - T), \quad (10)$$

где α — коэффициент теплопередачи, отнесенный к единице поверхности контакта.

В случае (10) из условия (7) следует, что в любом сечении

$$\begin{cases} \frac{T}{T_0} = const = m^0, \\ q(T_0) = \alpha T_0(1 - m^0). \end{cases} \quad (11)$$

После подстановки в (8) получим

$$\sigma_0 = \alpha L(m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) - 1). \quad (12)$$

Обозначим αL через $\bar{\alpha}$.

Из сравнения равенств (12) и (8) можно выразить $m^0(\bar{q}, \bar{\alpha})$ через тепловую нагрузку и коэффициент теплопередачи

$$m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}}\ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right) = 1 + \frac{\sigma_0}{\bar{\alpha}}. \quad (13)$$

По формуле (2) минимальная диссипация

$$\sigma_{min} = \frac{\bar{\alpha}(1 - m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}))^2}{m^0(\bar{q}, \bar{\alpha})}. \quad (14)$$

Если в это равенство подставить выражение (13), то получим

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 + \bar{\alpha}}. \quad (15)$$

Так как $\sigma_{min} > 0$, то $\bar{\alpha} > -\sigma_0$. Неравенство $\sigma \geq \sigma_{min}$ приводит к условию физической реализуемости теплообменника.

Фактическое значение σ для теплообменника с водяными эквивалентами горячего и холодного потоков W и W_x соответственно, их температурами на входе T_0^0 и T_x^0 и тепловой нагрузкой $\bar{q}$ может быть для несжимаемых жидкостей рассчитано как

$$\sigma = W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0}. \tag{16}$$

Получим условие физической реализуемости

$$\begin{aligned} & W \ln \tfrac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \tfrac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0} \geq \\ & \geq \frac{W^2 \ln^2\left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right)}{W \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right) + \bar{\alpha}} \end{aligned} \tag{17}$$

Или, после разрешения относительно $\bar{\alpha}$, приходим к неравенству

$$\bar{\alpha} \geq -\frac{W_x W \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right) \ln\left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right)}{W \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_0^0}\right) + W_x \ln\left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right)} \tag{18}$$

Таким образом, чтобы обеспечить тепловую нагрузку $\bar{q}$ при заданных температурах потоков на входе и их водяных эквивалентах в любом теплообменнике интегральный коэффициент теплообмена должен быть не меньше чем правая часть неравенства (18).

Так как

$$T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W} > T_x^0 + \frac{\bar{q}}{W_x},$$

то на тепловую нагрузку $\bar{q}$ наложено следующее ограничение

$$\bar{q} < \frac{\left(T_0^0 - T_x^0\right) W_x W}{W + W_x} \tag{19}$$

На рис.1 показана область реализуемых значений коэффициента теплопереноса в функции тепловой нагрузки. При выбранном значении $\bar{\alpha}$ (поверхности контакта) эта область ограничивает термодинамически реализуемые значения тепловой нагрузки.

Пример 1

Рассмотрим пример теплообменника со следующими параметрами:

1. Температура горячего потока на входе $T_0^0 = 320K$, а его водяной эквивалент $W = 200\,$кВт/К;

2. Температура холодного потока на входе $T_x^0 = 300K$, а его водяной эквивалент $W_x = 150\,$кВт/К;

3. Тепловая нагрузка равна $\bar{q} = 500\,$кВт;

4. Интегральный коэффициент теплообмена равен $\bar{\alpha} = 40\,$кВт/К.

Рис. 1: Зависимость минимально-возможного $\bar{\alpha}$ от $\bar{q}$ для теплообменника из примера 1.

Требуется оценить термодинамическую реализуемость теплообменника и возможности его усовершенствования.

Для данных примера значение m^0 равно

$$m^0 = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right) = 0,96.$$

Уменьшение энтропии горячего потока

$$\sigma_0 = \bar{\alpha}(m^0 - 1) = -1568,6\,\text{Дж/К},$$

а минимальная диссипация

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 + \bar{\alpha}} = 64,02\,\text{Дж/К}.$$

Производство энтропии в теплообменнике

$$\sigma = W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0} = 88,83\,\text{Дж/К}$$

Из условия (17) видно, что теплообменник физически реализуем. Соответствующая данным примера точка показана на рис.1

При термодинамически совершенной организации теплообмена его тепловая нагрузка может быть повышена до $648,7$ кВт, или при неизменной тепловой нагрузке коэффициент теплопереноса снижен до $\bar{\alpha} = 29,3$ кВт/К.

Предельная тепловая нагрузка и соответствующий ей коэффициент теплопереноса, как следует из (19), равны $\bar{q}^* < 1714,3$ кВт,$\bar{\alpha} \geq 171,2$ кВт/К.

Возможности реализации «идеального» двухпоточного теплообмена

Чтобы достичь полученной выше оценки минимальной диссипации σ_{min} (см. (14)) для кинетики теплообмена линейной относительно разности температур требуется, чтобы в любой точке контакта отношение температур потоков было постоянно

$$T_x/T_0 = m^0(\bar{q},\bar{\alpha}) = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln\left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right). \tag{20}$$

Изменение каждой из температур в противоточном теплообменнике вытеснения для любой кинетики теплообмена характеризуется уравнением

$$\frac{dT_x}{dl} = -\frac{q(T_0,T_x)}{W_x}; \quad \frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0,T_x)}{W}. \tag{21}$$

В этом выражении учтены противоположные направления движения потоков, а за сечение $l = 0$ принято сечение, в котором $T_0 = T_0^0$. Из условий (21) следует, что

$$\frac{dT_x}{dT_0} = \frac{W}{W_x} = const. \tag{22}$$

Таким образом, если для некоторого значения l обеспечить, чтобы условие (20) было выполнено и чтобы константа в (22) была равна $m^0(\bar{q},\bar{\alpha})$, то условие (20) окажется выполнено для всех l.

Получим для $l = 0$

$$\frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_0^0} = m^0(\bar{q},\bar{\alpha}); \quad \frac{W}{W_x} = m^0(\bar{q},\bar{\alpha}). \tag{23}$$

Если заданы T_0^0 и W для горячего потока, то из условий (23) имеем

$$\begin{cases} W_x = \frac{W}{m^0(\bar{q},\bar{\alpha})}, \\ T_x^0 = m^0(\bar{q},\bar{\alpha})(T_0^0 - \bar{q}/W). \end{cases} \tag{24}$$

При выполнении условий (24) зависимость между $\bar{\alpha}$ и $\bar{q}$ соответствует границе, показанной на рис. 1.

Распределение поверхностей и выбор структуры

Согласно (15) зависимость $\sigma_{min}(\bar{\alpha})$ имеет вид, показанный на рис. 0.1.

Она выпукла вниз, и решение задачи минимальной диссипации

$$\sum \sigma_{i_{min}}(\bar{\alpha}_i) \to \min_{\alpha_i} / \sum \bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}. \tag{25}$$

единственно.

При постановке задачи (25) предполагается, что для каждого теплообменника в системе изменение энтропии горячего потока $\sigma_{0i}(\bar{q}_i, W, T_{0i}^0)$ фиксировано. В этом случае условие стационарности функции Лагранжа

$$L = \sum_i \left[\sigma_{i_{min}}(\bar{\alpha}_i) + \lambda\bar{\alpha}_i\right] \tag{26}$$

по $\bar{\alpha}_i$ приводит к требованию

$$\frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{0i} + \bar{\alpha}_i} = \lambda,$$

Рис. 2: Характер зависимости минимального производства энтропии в двухпоточном теплообменнике от $\bar{\alpha}$

Рис. 3: Параллельная структура теплообменников

откуда

$$\bar{\alpha}_i/\sigma_{0i} = const,\ \forall i. \tag{27}$$

Так как сумма $\bar{\alpha}_i$ задана, то

$$\bar{\alpha}_i^* = \bar{\alpha}\frac{\sigma_{0i}}{\sum\limits_i \sigma_{0i}} \tag{28}$$

Параллельная структура Нетрудно показать, что при распределении поверхностей по условиям (28) минимальное производство энтропии имеет вид (15) с той разницей, что вместо σ_0 фигурирует $\bar{\sigma}_0 = \sum\limits_i \sigma_{0i}$

$$\sigma_{min} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}_0 + \bar{\alpha}}. \tag{29}$$

Пусть имеется возможность распределить между теплообменниками тепловые нагрузки $\bar{q}_i$ при условии, что суммарная тепловая нагрузка задана

$$\sum_i \bar{q}_i = \bar{q}. \tag{30}$$

Так как σ_{min} монотонно зависит от $\bar{\sigma}_0$, то задача распределения тепловых нагрузок примет форму

$$\bar{\sigma}_0 = \sum_i \sigma_{0i} = \sum_i W_i \ln\left(1 - \frac{\bar{q}_i}{W_i T_0^0}\right) \to \min_{q_i} \tag{31}$$

при условии (30).

Условие оптимальности задачи (30), (31) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{0i}}{\partial q_i} = const = \frac{W_i}{(W_i T_0^0 - \bar{q}_i)}. \tag{32}$$

После очевидных преобразований получаем, что $\bar{q}_i$ надо выбирать так, чтобы все температуры потоков на выходе были одинаковы.

$$\bar{T}_{0i} = T_0^0 - \frac{\bar{q}_i}{W_i} = const = \bar{T}_0, \tag{33}$$

Температура

$$\bar{T}_0 = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\sum\limits_i W_i}, \tag{34}$$

а оптимальная нагрузка

$$\bar{q}_i^* = \bar{q}\frac{W_i}{\sum W_i}. \tag{35}$$

После того, как найдены $\bar{q}_i^*$ и соответствующие им σ_{0i}, поверхности теплообмена можно рассчитать по формуле (28).

Пример 2

Рассмотрим пример системы из трех теплообменников, соединенных параллельно. Система характеризуется следующими параметрами:

1. Температура горячего потока на входе $T_0^0 = 320K$;

2. Водяной эквивалент горячего потока, поступающего на первый теплообменник $W_1 = 100$ кВт/K;

3. Водяной эквивалент горячего потока, поступающего на второй теплообменник $W_2 = 20$ кВт/K;

4. Водяной эквивалент горячего потока, поступающего на третий теплообменник $W_3 = 80$ кВт/K;

5. Суммарный коэффициент теплообмена $\bar{\alpha} = 100$ кВт/K;

6. Суммарная тепловая нагрузка $\bar{q} = 1000\,$кВт.

Требуется оптимальным образом распределить между теплообменниками тепловую нагрузку и поверхности теплообмена.

Для данных примера температура на выходе равна

$$\bar{T}_0 = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\sum\limits_i W_i} = 315K,$$

при этом оптимальные нагрузки: для первого теплообменника

$$\bar{q}_1^* = \bar{q}\frac{W_1}{\sum W_i} = 500\,\text{кВт},$$

для второго теплообменника

$$\bar{q}_2^* = 100\,\text{кВт},$$

для третьего теплообменника

$$\bar{q}_3^* = 400\,\text{кВт}.$$

Величины потерь энтропии, соответствующие оптимальным нагрузкам равны: для первого теплообменника

$$\sigma_{01} = W_1 \ln\left(1 - \frac{\bar{q}_1^*}{W_1 T_0^0}\right) = -1,57\,\text{кДж/К},$$

для второго теплообменника

$$\sigma_{02} = -0,31\,\text{кДж/К},$$

для третьего теплообменника

$$\sigma_{03} = -1,26\,\text{кДж/К}.$$

Суммарные потери энтропии равны

$$\bar{\sigma}_0 = -3,08\,\text{кДж/К}.$$

Получим, что для данных примера оптимальные значения коэффициентов теплообмена равны: для первого теплообменника

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}\frac{\sigma_{01}}{\bar{\sigma}_0} = 49\,\text{кВт/К},$$

для второго теплообменника

$$\bar{\alpha}_2 = 10\,\text{кВт/К},$$

Рис. 4: Последовательное соединение теплообменников

для третьего теплообменника

$$\bar{\alpha}_3 = 41\,\text{кВт/К}.$$

Последовательная структура

При последовательном соединении между σ_{01} и σ_{02} есть связь, так как

$$T_{01} = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W},$$

а значит

$$\sigma_{02} = W \ln \left[1 - \frac{\bar{q}_2}{W\left(T_0^0 - \frac{\bar{q}_1}{W}\right)} \right] = W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}_2}{WT_0^0 - \bar{q}_1} \right) \tag{36}$$

при условии (30).

Суммируя σ_{01} и σ_{02}, нетрудно показать, что $\bar{\sigma}_0$ не зависит от распределения тепловых нагрузок и равна

$$\bar{\sigma}_0 = W \ln \left(\frac{WT_0^0 - \bar{q}}{WT_0^0} \right). \tag{37}$$

Это позволяет в (24) изменять $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ так, чтобы их сумма оставалась заданной, а температура первого из холодных потоков

$$T_{x1}^0 = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) \left(T_0^0 - \frac{\bar{q}_1}{W} \right)$$

была ближе к фактически имеющейся. Для второго потока

$$T_{x2}^0 = m^0(\bar{q}, \bar{\alpha}) \left(T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W} \right).$$

Все сказанное относится и к последовательному соединению трех и более теплообменников. В этом случае

$$\begin{cases} T_{xi}^0 = m^0 \left(T_0^0 - \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{i} \bar{q}_\nu}{W} \right), \; i = 1, 2, ..., n-1 \\ T_{xn}^0 = m^0 \left(T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W} \right). \end{cases} \tag{38}$$

Общая структура с одним горячим потоком

Для теплообменников с одним горячим потоком структура может состоять из последовательно соединенных параллельных блоков (рис. 0.1). В этом случае каждая из параллельных систем должна удовлетворять полученным выше условиям оптимальности, а последовательные блоки должны иметь такие тепловые нагрузки, которые приспособлены к температурам охлаждающих потоков.

ПРИМЕР ПОТОКА С РАЗВЕТВЛЕНИЕМ.

вАНЯ, РАЗНИЦА МЕЖДУ ТЕПЛООБМЕНОМ С ОДНИМ ПОТОКОМ И СИСТЕМОЙ ОХЛАЖДЕНИЯ ТА, ЧТО ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ ТЕПЛОВЫЕ НАГРУЗКИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ОХЛАЖДАЕМЫХ УСТРОЙСТВ ЗАДАНЫ (ПОСЛЕДНИЕ НЕРАВЕНСТВОМ) МОЖЕМ ВЫБИРАТЬ ТОЛЬКО АЛЬФЫ (ПОВЕРХНОСТИ РАДИАТОРОВ ПРИ ЗАДАННОЙ СУММЕ). уСЛОВИЕ, ЧТОБЫ ОТНОШЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР БЫЛО ПОСТОЯННО ТОЖЕ ВЫПОЛНИТЬ НЕЛЬЗЯ, ТАК КАК ПОТОК НАГРЕВАЕТСЯ, А ПЛАТЫ ИМЕЮТ ТЕМПЕРАТУРУ НЕ ВЫШЕ ЗАДАННОЙ

Очевидно, что те же выводы справедливы, когда общий поток не горячий, а холодный, который нагревается в системе.

Рис. 5: Пример последовательной структуры с распараллеливанием