

0.1 Системы теплообмена с одним нагреваемым потоком

Двухпоточный теплообмен

Для получения оценок будем предполагать, что один из контактирующих потоков (для определенности, горячий) имеет фиксированную температуру T_0 на входе и водяной эквивалент W_0 , а температура холодного потока T подлежит выбору (управление). Тогда в каждом сечении теплообменника l имеем

$$\frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T)}{W_0}; \quad T_0(0) = T_0^0. \quad (1)$$

Общую поверхность аппарата обозначим через L . Производство энтропии

$$\sigma = \int_0^L q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dl \rightarrow \min, \quad (2)$$

при этом фиксируем L и тепловую нагрузку

$$\int_0^L q(T_0, T) dl = \bar{q}. \quad (3)$$

Условия оптимальности задачи (1) – (2) запишем в форме принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона

$$H = q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W} \right) \quad (4)$$

Условия оптимальности:

1. На оптимальном решении функция H постоянна для любого l

$$H = q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi(l)}{W} \right) = \text{const} = m. \quad (5)$$

2. Так как q дифференцируема и на T нет ограничений, то

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial T} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\Psi}{W} \right) - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0. \quad (6)$$

Из (5), (6) следует после исключения λ и Ψ , что в оптимальном процессе в любом сечении должно быть выполнено условие минимальной диссипации двухпоточного теплообмена:

$$\left[\frac{q(T_0, T)}{T} \right]^2 = m \frac{\partial q}{\partial T}. \quad (7)$$

Обозначим через $\sigma_0 < 0$ уменьшение энтропии горячего потока. Оно равно

$$\sigma_0(\bar{q}, W, T_0^0) = \int_{T_0^0}^{T_0^0 - \bar{q}/W} W \frac{dT_0}{T_0} = W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0} \right). \quad (8)$$

Отметим, что σ_0 не зависит от α .

В свою очередь

$$\bar{q} = WT_0^0 \left(1 - l^{\sigma_0/W} \right). \quad (9)$$

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда поток теплообмена пропорционален разности температур

$$q = \alpha(T_0 - T), \quad (10)$$

где α — коэффициент теплопередачи, отнесенный к единице поверхности контакта.

В случае (10) из условия (7) следует, что в любом сечении

$$\begin{cases} \frac{T}{T_0} = \text{const} = m^0, \\ q(T_0) = \alpha T_0(1 - m^0). \end{cases} \quad (11)$$

После подстановки в (8) получим

$$\sigma_0 = \alpha L(m^0 - 1). \quad (12)$$

Обозначим αL через $\bar{\alpha}$.

Из сравнения равенств (12) и (8) можно выразить m^0 через тепловую нагрузку и коэффициент теплопередачи

$$m^0 = 1 + \frac{W}{\bar{\alpha}} \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0} \right) = 1 + \frac{\sigma_0}{\bar{\alpha}}. \quad (13)$$

По формуле (2) минимальная диссипация

$$\sigma_{min} = \frac{\bar{\alpha}(1 - m^0)^2}{m^0}. \quad (14)$$

Если в это равенство подставить выражение (13), то получим

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 + \bar{\alpha}}. \quad (15)$$

Так как $\sigma_{min} > 0$, то $\bar{\alpha} > -\sigma_0$. Неравенство $\sigma \geq \sigma_{min}$ приводит к условию физической реализуемости теплообменника.

Фактическое значение σ для теплообменника с водяными эквивалентами горячего и холодного потоков W и W_x соответственно, их температурами

на входе T_0^0 и T_x^0 и тепловой нагрузкой \bar{q} может быть для несжимаемых жидкостей рассчитано как

$$\sigma = W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0}. \quad (16)$$

Получим условие физической реализуемости

$$\begin{aligned} & W \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W}{T_0^0} + W_x \ln \frac{T_x^0 + \bar{q}/W_x}{T_x^0} \geq \\ & \geq \frac{W^2 \ln^2 \left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right)}{W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right) + \bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (17)$$

Или, после разрешения относительно $\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} \geq \frac{W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right) + W_x \ln \left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right)}{W_x W \ln \left(1 + \frac{\bar{q}}{W_x T_x^0}\right) \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{WT_0^0}\right)}. \quad (18)$$

Таким образом, чтобы обеспечить тепловую нагрузку \bar{q} при заданных температурах потоков на входе и их водяных эквивалентах в любом теплообменнике интегральный коэффициент теплообмена должен быть не меньше чем правая часть неравенства (18).