SİNYALLER SİSTEMLER – I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
03.07.2003 Süre: 90 dak.

1) $x[n] = u[n+2] - u[-1-n] - 3u[n-2]$ sinyalini çiziniz.

2) Giriş-çıkış ilişkisi $y[n+2] - 1.1y[n+1] + 0.3y[n] = 2x[n]$ denklemi ile verilen bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ bulunurken $h[-1] = h[0] = 0$ kabul edilir. Buna göre

a) $h[n]$ 'i bulmak için gereken fark denklemini yazınız.

b) $n = -1$ için bu denklemi kullanarak $h[1]$ 'i bulunuz.

$n = 0$ için bu denklemi kullanarak $h[2]$ 'yi bulunuz.

c) $h[n]$ için fark denklemini $n > 0$ için yazınız ve bu denklemi (b) şıkkında bulunan başlangıç şartları için çözünüz.

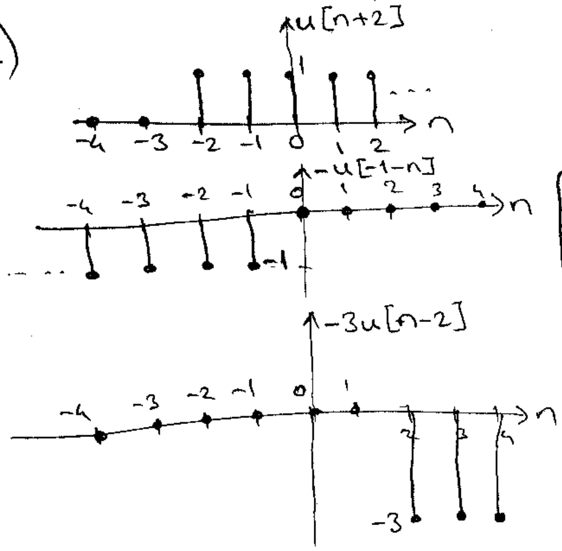
3) $u(t) * \delta(t-4)$ konvolüsyon işlemini çözünüz.

4) $x(t) = |\sin t|$ sinyalinin Fourier serisinden yalnızca 1. harmonik terimini bulunuz.

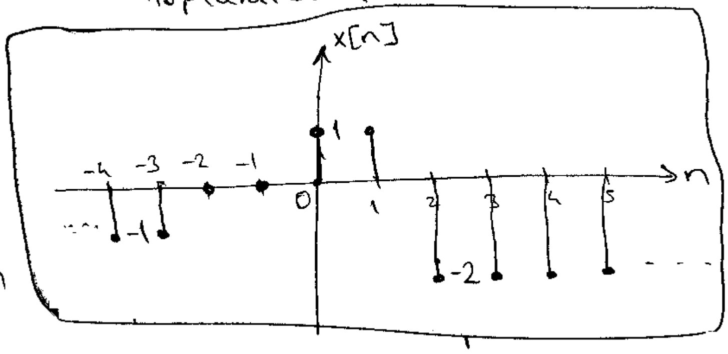
5) $x(t) = e^{-5t}u(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

SİNYALLER & SİSTEMLER-I BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI:

1)



x[n], soldaki üç sinyalin toplamıdır:



2) a) x[n] yerine δ[n], y[n] yerine h[n] yazılır ve

$$\boxed{h[n+2]-1.1h[n+1]+0.3h[n]=2\delta[n]}$$

bulunur.

b) $n=-1 \Rightarrow h[1]-1.1\underbrace{h[0]}_{0}+0.3\underbrace{h[-1]}_{0}=2\underbrace{\delta[-1]}_{0}$

↳ Buradan $\boxed{h[1]=0}$ bulunur.

$n=0 \Rightarrow h[2]-1.1\underbrace{h[1]}_{0}+0.3\underbrace{h[0]}_{0}=2\underbrace{\delta[0]}_{1}$

↳ Buradan $\boxed{h[2]=2}$ bulunur.

c) $n>0$ için $\delta[n]=0$ olduğundan:

$$\boxed{h[n+2]-1.1h[n+1]+0.3h[n]=0 \quad n>0}$$

denklemi, $h[1]=0$ ve $h[2]=2$ için çözülecektir.

Karakteristik denklem: $\lambda^2-1.1\lambda+0.3=0$

$\lambda_1=0.5 \quad \lambda_2=0.6$ bulunur. Denklem homojen olduğundan özel çözüm yoktur (sıfırdır):

$h[n]=A_1(0.5)^n+A_2(0.6)^n \quad n>0$ bulunur.

$h[1]=A_1 \times 0.5+A_2 \times 0.6=0 \rightarrow A_1=-1.2A_2$

$h[2]=0.25A_1+0.36A_2=2 \rightarrow -0.3A_2+0.36A_2=2$

↳ $A_2=\frac{2}{0.06}=\frac{100}{3}$

$A_1 = -\frac{120}{3} = -40 \longrightarrow \boxed{n>0 \text{ için} \; h[n] = -40 \times (0.5)^n + \frac{100}{3} \times (0.6)^n}$

$n \leqslant 0 \Rightarrow h[n] = 0$

$h[n] = \left\{ -40 \times (0.5)^n + \frac{100}{3} \times (0.6)^n \right\} u[n-1]$

$\downarrow$

$u[n-2]$ de olurdu.

$h[1] = 0$ olduğu için.

3) $u(t) * \delta(t-4) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, \underbrace{\delta(t-4-\tau)}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-4)\, \delta(t-4-\tau)\, d\tau$

Sadece $\tau = t-4$ 'de sıfırdan farklı olduğu için, $u(\tau)$ 'nun diğer yerlerdeki değeri integrali değiştirmez.

$= \underbrace{u(t-4)} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-4-\tau)\, d\tau$

τ'ya göre sabit olduğu için integral dışına çıkar.

τ 'nun değişken olduğu uzayda bu sinyalin $\tau = -\infty \rightarrow \tau = +\infty$ aralığındaki integrali 1 'dir.

$= u(t-4) \cdot 1$

Sonuç: $\boxed{u(t) * \delta(t-4) = u(t-4)}$

5) $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t} u(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-5t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$

$= \int_{0}^{\infty} e^{-(5+j\omega)t}\, dt = \frac{-1}{5+j\omega} \left(e^{-(5+j\omega)t} \right) \Big|_0^{\infty}$

$= \frac{-1}{5+j\omega} \left(e^{-(5+j\omega)\infty} - \underbrace{e^{0}}_{=1} \right) = \frac{+1}{5+j\omega} - \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(5+j\omega)t}}{5+j\omega}$

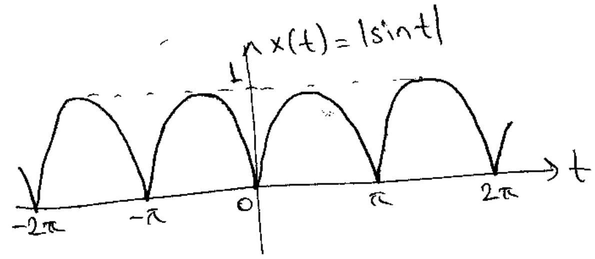
$\lim_{t \to \infty} e^{-(5+j\omega)t} = \lim_{t \to \infty} e^{-5t} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}} = 0 \times \text{sonlu} = 0$

Sıfıra gider

Mutlak değerce hep 1 'dir, yani sonludur.

$\Rightarrow \boxed{X(\omega) = \frac{1}{5+j\omega}}$

4)



x(t) çift singal olduğundan reel serisinde yalnızca dc bileşen ve cos terimleri vardır.

Periyodu $T_0 = \pi$ olduğundan $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$ 'dir.

Yani birinci harmonik terimi = $c_1 \cos 2t$ 'dir.

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{|\sin t|}_{\substack{=\sin t \\ \text{(bu aralıkta)}}} \cdot \cos k\omega_0 t \, dt$$

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{j2}$$

$$\cos 2t = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2}$$

$$c_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cos 2t \, dt$$

$$\frac{\pi}{2}c_1 = \frac{1}{j4}\int_0^\pi \left(e^{jt} - e^{-jt}\right)\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) dt$$

$$\frac{\pi}{2}c_1 = \frac{1}{j4}\int_0^\pi \left(e^{j3t} + e^{-jt} - e^{jt} - e^{-j3t}\right) dt$$

$$\frac{e^{j3t} - e^{-j3t}}{j4} = \frac{1}{2}\sin 3t \qquad \frac{+e^{-jt} - e^{jt}}{j4} = -\frac{1}{2}\sin t$$

$$\frac{\pi}{2}c_1 = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 3t \, dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin t \, dt = \left(-\frac{1}{6}\cos 3t + \frac{1}{2}\cos t\right)\Big|_0^\pi$$

$$\frac{\pi}{2}c_1 = -\frac{1}{6}\underbrace{\cos 3\pi}_{-1} + \frac{1}{2}\underbrace{\cos \pi}_{-1} + \frac{1}{6}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos 0$$

$$\frac{\pi}{2}c_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow \boxed{\frac{-4}{3\pi} = c_1}$$

Yani 1. harmonik terimi = $\boxed{-\frac{4}{3\pi}\cos 2t}$

Karmaşık seride ise 1. harmonik = $a_{-1}e^{-j2t} + a_1 e^{j2t}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin t| e^{-jk2t} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \, e^{-jk2t} dt = \frac{1}{j2\pi}\int_0^\pi \left(e^{jt} - e^{-jt}\right)e^{-j2kt} dt$$

$$a_k = \frac{1}{j2\pi}\int_0^\pi e^{-j(2k-1)t} dt - \frac{1}{j2\pi}\int_0^\pi e^{-j(2k+1)t} dt = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{e^{-j(2k-1)t}}{2k-1} - \frac{e^{-j(2k+1)t}}{2k+1}\right\}\Big|_0^\pi$$

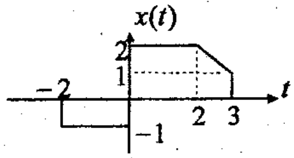
$e^{-j(2k\mp1)\pi} = -1 \qquad e^0 = 1 \qquad \Rightarrow a_k = \frac{-2}{2\pi}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{4}{4k^2-1}\cdot\frac{-1}{2\pi} \quad \Rightarrow a_{-1} = a_1 = \frac{-2}{3\pi}$

2004 yılı arasınavında gizli grup uygulaması yapılmış ve 4 grup halinde sorular sorulmuştur. Hepsinin cevapları soru kâğıdı üzerinde olup 5. sorunun çözümü açıklamalı olarak ayrı bir sayfada yapılmıştır. 5. soru tüm gruplarda aynı biçimde fakat farklı *a* ve *b* değerleri için sorulmuştur. *a* ve *b* değerleri yerine yazıldığında soru kâğıdı üzerine yazılmış sonuç bulunmaktadır.

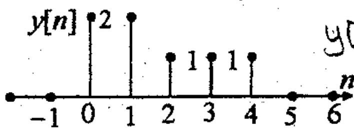
A

SİNYALLER VE SİSTEMLER – I ARASINAV SORULARI
29.04.2004 Süre: 90 dakika

1) Yandaki şekilde verilen $x(t)$ sinyalini tek ve çift bileşenlerine ayırınız. (20 puan)



2) Yandaki şekilde verilen $y[n]$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (15 puan)



$y[n] = 2u[n] - u[n-2] - u[n-5]$
$= u[4-n] + u[1-n] - 2u[-1-n]$

3) Aşağıda verilen sinyaller periyodik midir? Periyodik iseler periyodlarını bulunuz. (18 puan)

a) $x[n] = \sin(3\pi n) + \cos(6\pi n)$ $N = 1$

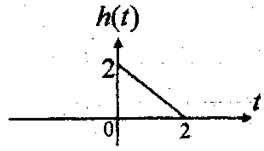
b) $y(t) = \tan(3\pi t) + 2\sin(5t)$ periyodik değil

4) Girişi $u(t)$ ile çıkışı $y(t)$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olan bir sistem, bellekli midir, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birine ayrı ayrı cevap veriniz. (22 puan)

$$y(t+1) = 3x(t) + x(t+1)$$

Bellekli, doğrusal, kararlı, nedensel, zamanla değişmez

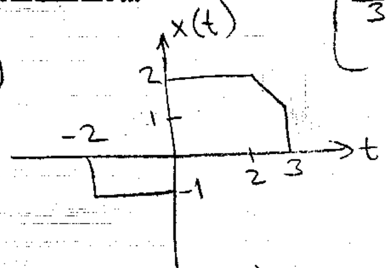
5) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ yandaki şekilde verilmiştir. Bu sistemin girişine $x(t) = h(t)$ sinyali uygulanırsa sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Bulunuz ve çiziniz. (25 puan)

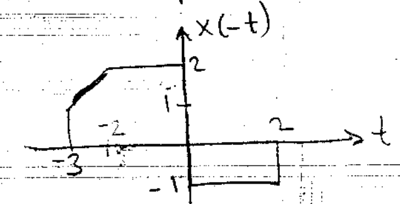


$$y = \begin{cases} 0 \\ 4t - 2t^2 + \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{32}{3} - 8t + 2t^2 - \frac{1}{6}t^3 \\ 0 \end{cases}$$

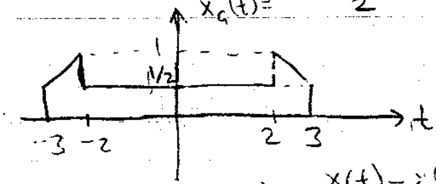
BAŞARILAR ... **Yrd.Doç.Dr. Ata SEVİNÇ**

1)

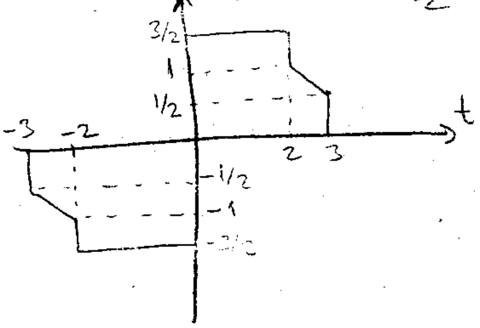




$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$



$x_T(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$



2) $y[n] = 2u[n] - u[n-2] - u[n-5]$

3) a) $\sin(3\pi(n+N_1)) = \sin(3\pi n + 3\pi N_1)$

$3\pi N_1 = 2k_1\pi \Rightarrow$ $k_1 = 3$, $\underline{\underline{N_1 = 2}}$

$\cos(6\pi(n+N_2)) = \sin(6\pi n + 6\pi N_2)$

$6\pi N_2 = 2k_2\pi$ $k_2 = 3$, $\underline{\underline{N_2 = 1}}$

N_1 ve N_2 OKEK $\rightarrow$ $\boxed{N = 2}$ ile periyodiktir

b) $\tan(3\pi(t+T_1)) = \tan(3\pi t + 3\pi T_1)$

$3\pi T_1 = \pi$ $\rightarrow$ $T_1 = \frac{1}{3}$

$2\sin(5(t+T_2)) = 2\sin(5t + 5T_2)$

$5T_2 = 2\pi$ $\rightarrow$ $T_2 = \frac{2}{5}\pi$

$\frac{T_1}{T_2}$: irrasyonel.

T_1 ve T_2 için OKEK yok.

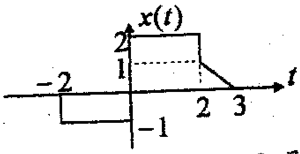
periyodik değildir.

B

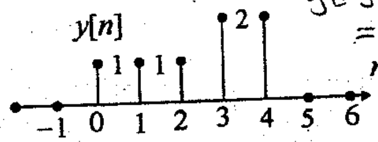
SİNYALLER VE SİSTEMLER – I ARASINAV SORULARI

29.04.2004 Süre: 90 dakika

1) Yandaki şekilde verilen $x(t)$ sinyalini tek ve çift bileşenlerine ayırınız. (20 puan)



2) Yandaki şekilde verilen $y[n]$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (15 puan)



$y[n] = u[n] + u[n-3] - 2u[n-5]$
$= 2u[4-n] - u[2-n] - u[-1-n]$

3) Aşağıda verilen sinyaller periyodik midir? Periyodik iseler periyodlarını bulunuz. (18 puan)

a) $x[n] = \sin(3n) + \cos(6n)$ periyodik değil

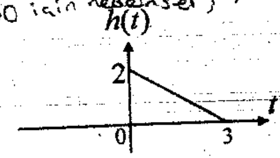
b) $y(t) = \tan(3t) + 2\sin(5t)$ $T = 2\pi$

4) Girişi $u(t)$ ile çıkışı $y(t)$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olan bir sistem, bellekli midir, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birine ayrı ayrı cevap veriniz. (22 puan)

$$y(t) = 3x(t) + t\,x(0)$$

Bellekli, doğrusal, kararsız, nedensel değil ($t>0$ için nedensel); zamanla değişen

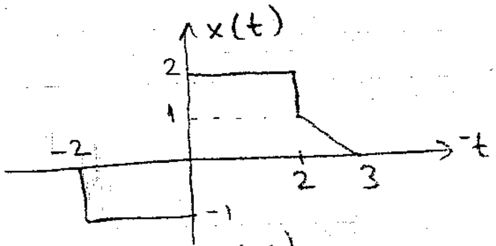
5) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ yandaki şekilde verilmiştir. Bu sistemin girişine $x(t)=h(t)$ sinyali uygulanırsa sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Bulunuz ve çiziniz. (25 puan)

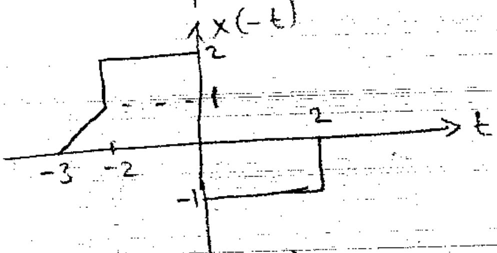


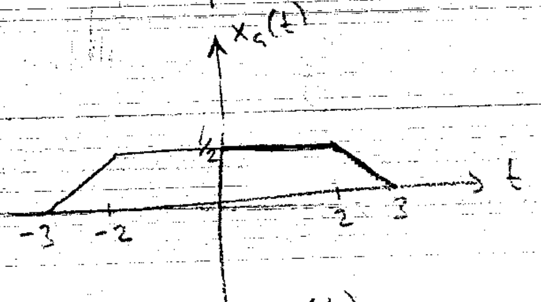
BAŞARILAR ...

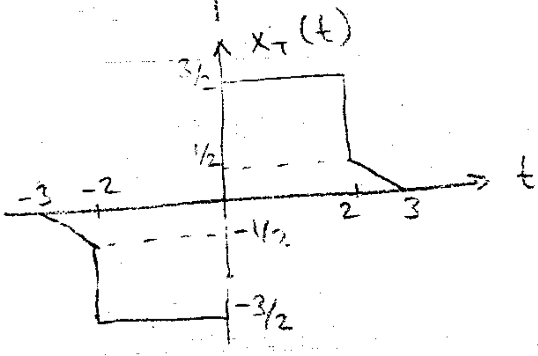
Yrd.Doç.Dr. Ata SEVİNÇ

5)
$$y = \begin{cases} 0 \\ 4t - \frac{4}{3}t^2 + \frac{2}{27}t^3 \\ 16 - 8t + \frac{4}{3}t^2 - \frac{2}{27}t^3 \\ 0 \end{cases}$$







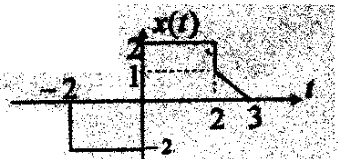


SİNYALLER VE SİSTEMLER – I ARASINAV SORULARI

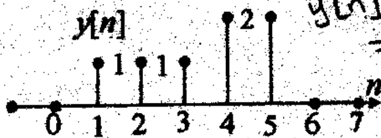
29.04.2004 Süre: 90 dakika

C

1) Yandaki şekilde verilen $x(t)$ sinyalini tek ve çift bileşenlerine ayırınız. (20 puan)



2) Yandaki şekilde verilen $y[n]$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (15 puan)



$y[n] = u[n-1] + u[n-4] - 2u[n-6]$

$= 2u[5-n] - u[3-n] - u[n]$

3) Aşağıda verilen sinyaller periyodik midir? Periyodik iseler periyodlarını bulunuz. (18 puan)

a) $x[n] = \sin(3\pi n) + \cos(7\pi n)$ b) $y(t) = \tan(3t) + 2\sin(5\pi t)$

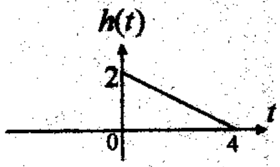
$N = 2$ periyodik değil

4) Girişi $u(t)$ ile çıkışı $y(t)$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olan bir sistem, bellekli midir, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birine ayrı ayrı cevap veriniz. (22 puan)

$$y(t) = 3x(t) + e^{t+1}x(t-1)$$

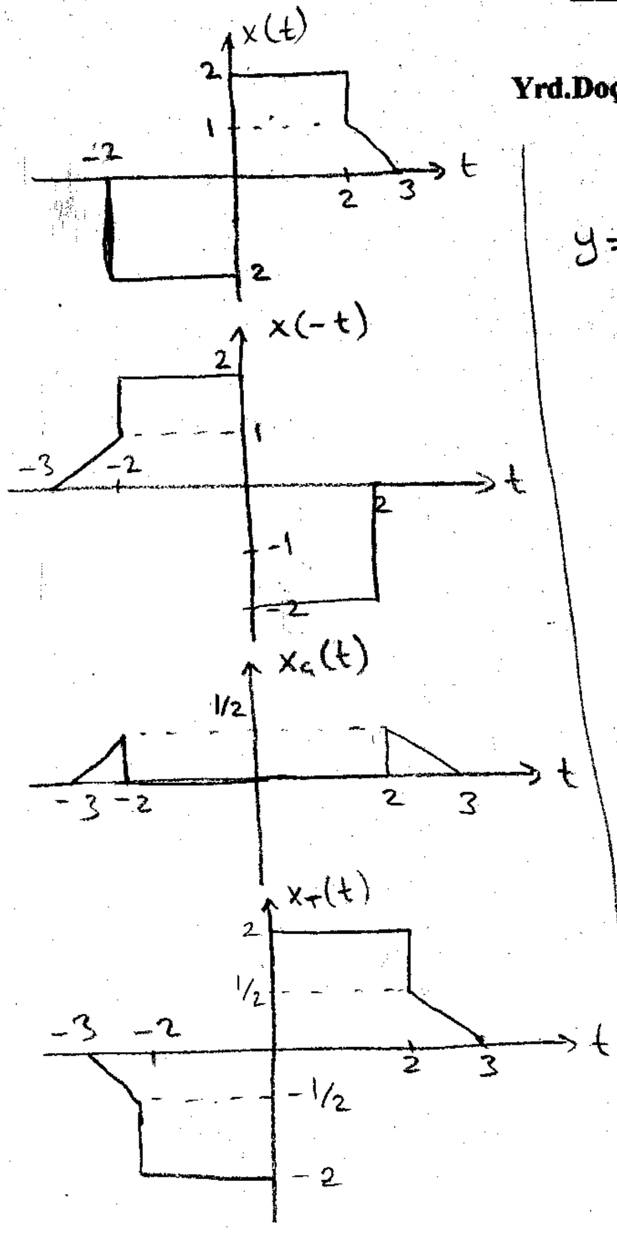
Bellekli, doğrusal, kararsız, nedensel, zamanla değişen

5) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ yandaki şekilde verilmiştir. Bu sistemin girişine $x(t) = h(t)$ sinyali uygulanırsa sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Bulunuz ve çiziniz. (25 puan)



BAŞARILAR ...

Yrd.Doç.Dr. Ata SEVİNÇ



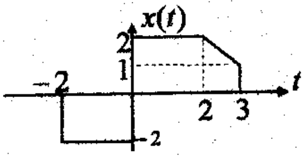
$$y = \begin{cases} 0 \\ 4t - t^2 + \frac{1}{24}t^3 \\ \frac{64}{3} - 8t + t^2 - \frac{1}{24}t^3 \\ 0 \end{cases}$$

D

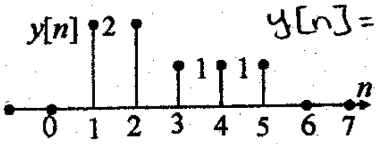
SİNYALLER VE SİSTEMLER – I ARASINAV SORULARI

29.04.2004 Süre: 90 dakika

1) Yandaki şekilde verilen $x(t)$ sinyalini tek ve çift bileşenlerine ayırınız. (20 puan)



2) Yandaki şekilde verilen $y[n]$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (15 puan)



$y[n] = 2u[n-1] - u[n-3] - u[n-6]$
$= u[5-n] + u[2-n] - 2u[-n]$

3) Aşağıda verilen sinyaller periyodik midir? Periyodik iseler periyodlarını bulunuz. (18 puan)

a) $x[n] = \sin(3\pi n) + \cos(6n)$ — periyodik değil

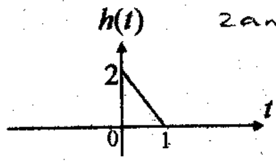
b) $y(t) = \tan(3\pi t) + 2\sin(5\pi t)$ — $T=2$

4) Girişi $u(t)$ ile çıkışı $y(t)$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olan bir sistem, bellekli midir, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birine ayrı ayrı cevap veriniz. (22 puan)

$$y(t) = 3x(t)x(t-1) + (t+1)$$

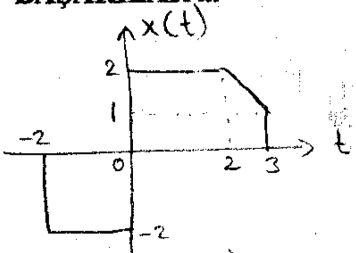
Bellekli, doğrusal değil, kararsız, nedensel, zamanla değişen

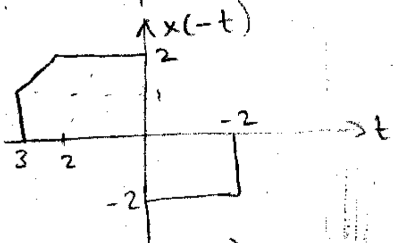
5) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ yandaki şekilde verilmiştir. Bu sistemin girişine $x(t) = h(t)$ sinyali uygulanırsa sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Bulunuz ve çiziniz. (25 puan)

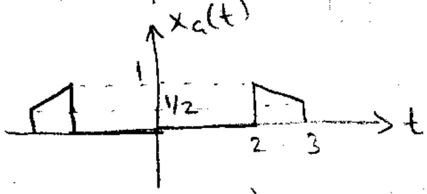


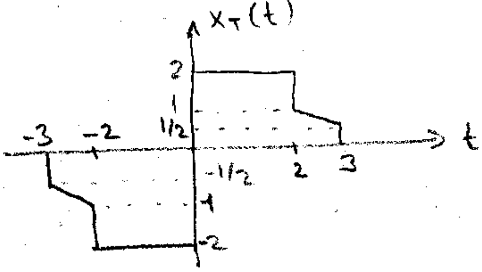
BAŞARILAR ...

Yrd.Doç.Dr. Ata SEVİNÇ





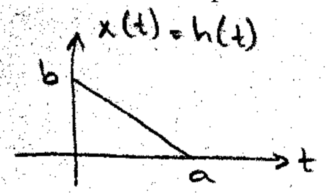




5)

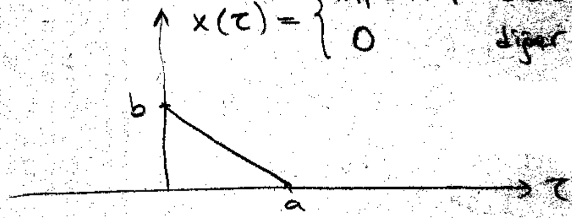
$$y = \begin{cases} 0 \\ 4t - 4t^2 + \frac{2}{3}t^3 \\ \frac{16}{3} - 8t + 4t^2 - \frac{2}{3}t^3 \\ 0 \end{cases}$$

5)

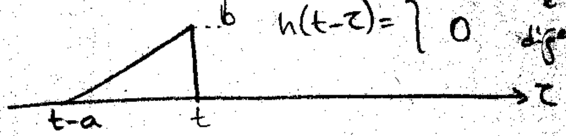


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(\tau) = \begin{cases} m_1\tau + n_1 & 0 \le \tau \le a \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$



$$h(t-\tau) = \begin{cases} m_2\tau + n_2 & t-a \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$



$$m_1\tau + n_1\Big|_{\tau=0} = b = n_1$$

$$m_1\tau + n_1\Big|_{\tau=a} = 0 = m_1 a + b$$

$$m_1 = -\frac{b}{a}$$

$$m_1\tau + n_1 = -\frac{b}{a}\tau + b$$

$$m_2\tau + n_2\Big|_{\tau=t-a} = 0 = m_2 t - m_2 a + n_2$$

$$n_2 = m_2(a-t)$$

$$m_2\tau + n_2\Big|_{\tau=t} = b = m_2 t + n_2$$

$$= \cancel{m_2 t} + m_2 a - \cancel{m_2 t}$$

$$m_2 = \frac{b}{a} \rightarrow n_2 = b - \frac{b}{a}t$$

$$m_2\tau + n_2 = \frac{b}{a}(\tau - t) + b$$

$$(m_1\tau+n_1)(m_2\tau+n_2) =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\tau^2 + \frac{b^2}{a^2}t\tau - \cancel{\frac{b^2}{a}\tau} + \cancel{\frac{b^2}{a}\tau} - \frac{b^2}{a}t + b^2$$

$$(m_1\tau+n_1)(m_2\tau+n_2) = b^2 - \frac{b^2}{a}t + \frac{b^2}{a^2}t\tau - \frac{b^2}{a^2}\tau^2$$

$$\int (m_1\tau+n_1)(m_2\tau+n_2)\,d\tau = b^2\tau - \frac{b^2}{a}t\tau + \frac{b^2}{2a^2}t\tau^2 - \frac{b^2}{3a^2}\tau^3$$

$t<0$ ve $t>2a$ için:

$x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

$0 \le t \le a$ için:

$$y(t) = \int_0^t (m_1\tau+n_1)(m_2\tau+n_2)\,d\tau$$

$$y(t) = b^2 t - \frac{b^2}{a}t^2 + \frac{b^2}{6a^2}t^3$$

$a \le t \le 2a$ için:

$$y(t) = \int_{t-a}^{a} (m_1\tau+n_1)(m_2\tau+n_2)\,d\tau = ab^2 - b^2 t + \frac{b^2}{2}t - \frac{ab^2}{3}$$

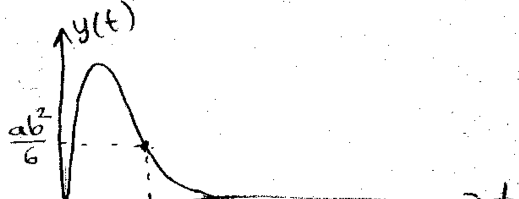
$$- b^2(t-a) + \frac{b^2}{a}t(t-a) - \frac{b^2}{2a^2}t(t^2-2at+a^2)$$

$$+ \frac{b^2}{3a^2}(t^3 - 3at^2 + 3a^2 t - a^3)$$

$$y(t) = \frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{2}b^2 t - b^2 t + ab^2 + \frac{b^2}{a}t^2 - b^2 t - \frac{b^2}{2a^2}t^3 + \frac{b^2}{a}t^2 - \frac{b^2}{2}t$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}t^3 - \frac{b^2}{a}t^2 + b^2 t - \frac{ab^2}{3}$$

$$y(t) = \frac{4}{3}ab^2 - 2b^2 t + \frac{b^2}{a}t^2 - \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}t^3$$



Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ b^2 t - \frac{b^2}{a}t^2 + \frac{b^2}{6a^2}t^3 & 0 \le t \le a \text{ ise} \\ \frac{4}{3}ab^2 - 2b^2 t + \frac{b^2}{a}t^2 - \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}t^3 & a \le t \le 2a \text{ ise} \\ 0 & t > 2a \text{ ise} \end{cases}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 FİNAL SINAVI SORULARI
15.06.2004 Süre: 100 dakika

1) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi şöyledir:

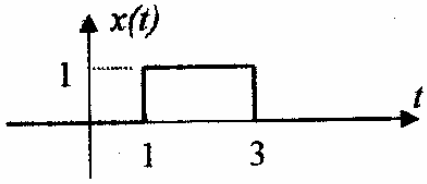
$$y_b(t)=\begin{cases}0 & t<0 \text{ ise}\\ 1-e^{-3t} & t\geq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

Bu sistemin girişine şekilde verilen $x(t)$ sinyali uygulanırsa:

a) $x(t)$ sinyalini sağ taraflı basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (4 puan)

b) Bu ifadeden faydalanarak, $x(t)$ girişi için sistemin çıkışını bulunuz. (8 puan)

c) Sistemin birim darbe tepkisini hesaplayınız. (8 puan)

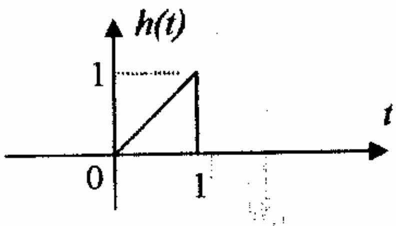


---

2) $x[n]*h[n]=y[n]$ dersek, $x[n-1]*h[n-1]$ ne olur? (15 puan)

---

3)



$h(t)*u(t)=?$ (25 puan)

---

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=2x(t)$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. (15 puan)

---

5) $y[n+2]-y[n+1]+0.24y[n]=x[n]$ fark denklemini,

$y[0]=y[1]=1$ ve $x[n]=\begin{cases}0 & n<2 \text{ ise}\\ 0.96 & n\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$

verildiğine göre tüm n zamanları için çözünüz. (25 puan)

BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

CEVAP ANAHTARI (2004 Final, S&S-1)

1) a) $x(t) = u(t-1) - u(t-3)$

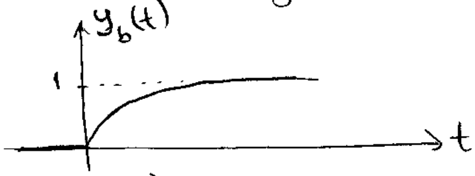
b) $u(t) \longrightarrow y_b(t)$

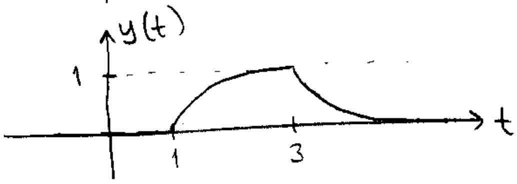
$x(t) = u(t-1) - u(t-3) \longrightarrow y(t) = y_b(t-1) - y_b(t-3)$

Çünkü girişler arasındaki doğrusal ve zamanla kaymalı ilişkinin aynısı çıkışlar arasında da olacaktır.

Buna göre: $y_b(t) = (1 - e^{-3t})u(t)$

$$y(t) = (1 - e^{-3(t-1)})u(t-1) - (1 - e^{-3(t-3)})u(t-3)$$

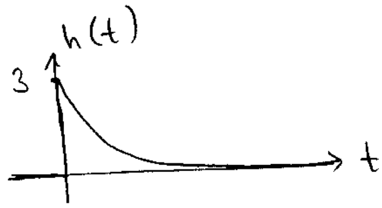




c) $u(t) \longrightarrow y_b(t)$

$\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt} \longrightarrow h(t) = \dfrac{dy_b(t)}{dt}$ (Aynı nedenden dolayı)

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ ise} \\ 3e^{-3t} & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$



$h(t) = 3e^{-3t}u(t)$

2) $h[n]$, DZD bir sistemin birim darbe tepkisi, $x[n]$ girişi, $y[n]$ de çıkışı olarak düşünülebilir.

$x[n] * h[n] = y[n] \implies \boxed{x[n-1] * h[n] = y[n-1]}$ olacaktır.
(Zamanla değişmezlikten)

Şimdi $x[n-1] = \rho[n]$ başka bir DZD sistemin birim darbe tepkisi, $h[n] = v[n]$ de o sistemin girişi, $y[n-1] = z[n]$ de çıkışı olarak düşünülebilir.

$\rho[n] * v[n] = z[n] \implies \rho[n] * v[n-1] = z[n-1]$ olacaktır.
(zamanla değişmezlikten)

Yani $x[n-1] * h[n-1] = z[n-1] = \underline{\underline{y[n-2]}}$ olur.

2) Diğer bir yol:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

$$x[n-1] * h[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k-1]\,h[n-1-k]$$

$m = k-1$ dönüştürmesi yaparsak, $k = m+1$

$k = -\infty \Rightarrow m = -\infty$

$k = +\infty \Rightarrow m = +\infty$ olur. Yani

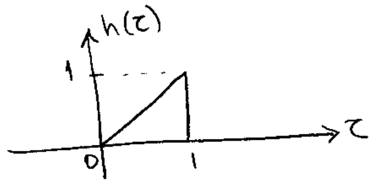
$$x[n-1] * h[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,h[n-1-m-1]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,h[n-2-m] \quad \text{olur.}$$

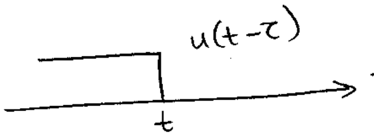
Bu sonuç, en yukarıdaki $y[n]$ ifadesinde n yerine $n-2$ yazılmasıyla bulunacak sonuca, yani $y[n-2]$'ye eşittir. O halde:

$$\boxed{x[n-1] * h[n-1] = y[n-2]}$$

3) $$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$



$$h(\tau) = \begin{cases} \tau & 0<\tau<1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$



$$\text{Sonuç:} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ t^2/2 & 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ 1/2 & t \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

<u>$t<0$ ise:</u> $h(\tau)u(t-\tau) = 0$ her τ için.

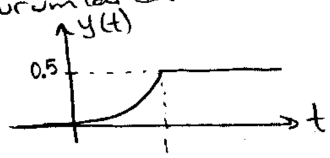
Yani $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

<u>$0 \le t < 1$ ise:</u> $h(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} \tau & 0<\tau<t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

Yani $y(t) = \int_0^t \tau \cdot d\tau = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^t = \frac{1}{2}t^2 = y(t)$

<u>$t \geq 1$ ise:</u> $h(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} \tau & 0<\tau<1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

Yani $y(t) = \int_0^1 \tau \cdot d\tau = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} = y(t)$



4) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2x$

$t>0$ için $\ddot{h} + 3\dot{h} + 2h = 0$

$h(0^+) = 0 \quad , \quad \dot{h}(0^+) = \frac{2}{1} = 2$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = -2$

$h = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= A_1 + A_2 = 0 \\ \dot{h}(0) &= -A_1 e^{-0} - 2A_2 e^{-2\times 0} = -A_1 - 2A_2 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_2 &= -A_1 \\ -A_1 + 2A_1 &= 2 \end{aligned}$$

$A_1 = 2 \quad , \quad A_2 = -2$

$t>0$ için $h(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$

$t<0$ için $h(t) = 0$ (nedensellikten)

Yani: $h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$ her t için

5) <u>$n<2$ ise:</u> $y[n+2] - y[n+1] + 0.24\,y[n] = 0$

$\lambda^2 - \lambda + 0.24 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0.4 \quad , \quad \lambda_2 = 0.6$

$y[n] = A_1 (0.4)^n + A_2 (0.6)^n$

$$\left.\begin{aligned} y[0] &= A_1 + A_2 = 1 \\ y[1] &= 0.4A_1 + 0.6A_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_2 &= 1 - A_1 \\ 0.4A_1 + 0.6 - 0.6A_1 &= 1 \\ -0.2A_1 &= 0.4 \end{aligned}$$

$A_1 = -2 \quad , \quad A_2 = 3 \rightarrow y[n] = -2\times(0.4)^n + 3\times(0.6)^n$

<u>$n \geqslant 2$ için</u> başlangıç şartları üretmeliyiz.

$n+2 = 2$ yani $n=0$ için fark denklemi:

$y[2] - \underbrace{y[1]}_{1} + 0.24\underbrace{y[0]}_{1} = x[0] = 0$

$\boxed{y[2] = 0.76}$

$n+2 = 3$ yani $n=1$ için fark denklemi:

$y[3] - \underbrace{y[2]}_{0.76} + 0.24\underbrace{y[1]}_{1} = x[1] = 0$

$\boxed{y[3] = +0.52}$ bulunur.

5) (Devamı)

Yani $n \geq 2$ için

$$y[n+2] - y[n+1] + 0.24y[n] = 0.96$$

denklemi $y[2] = 0.76$, $y[3] = 0.52$ için çözülmelidir

Karakteristik denklem ve homojen çözüm aynı biçimdedir

$$y_h[n] = \underbrace{B_1 (0.4)^n + B_2 (0.6)^n}_{\text{katsayılar değişir.}}$$

0.96 için özel çözüm $y_ö[n] = c \times 1^n = c$

Fark denkleminde yazılırsa:

$$y_ö[n+2] - y_ö[n+1] + 0.24\, y_ö[n] = 0.96$$

$$\cancel{c} - \cancel{c} + 0.24c = 0.96$$

$$c = 4 = y_ö[n]$$

Yani

$$y[n] = B_1 (0.4)^n + B_2 (0.6)^n + 4$$

$$y[2] = 0.16\, B_1 + 0.36\, B_2 + 4 = 0.76$$

$$y[3] = 0.064\, B_1 + 0.216\, B_2 + 4 = +0.52$$

$$\left.\begin{aligned} 0.16B_1 + 0.36B_2 &= -3.24 \\ 0.064\, B_1 + 0.216\, B_2 &= -3.48 \end{aligned}\right\}$$

$$(0.216 - 0.4 \times 0.36)B_2 = -3.48 + 0.4 \times 3.24$$

$$0.072 B_2 = -3.48 + 1.296$$

$$= -2.184$$

$$B_2 = \frac{-2184}{72} = \frac{-91}{3}$$

$$0.16\, B_1 = -3.24 + 0.36 \times \frac{91}{3}$$

$$16B_1 = -324 + 12 \times 91 = -324 + 1092 = 768 = 16B_1$$

$$B_1 = \frac{768}{16} = 48$$

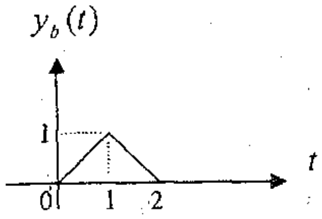
Sonuç:

$$y[n] = \begin{cases} -2 \times (0.4)^n + 3 \times (0.6)^n & n < 2 \text{ ise} \\ 48\,(0.4)^n - \frac{91}{3}(0.6)^n + 4 & n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

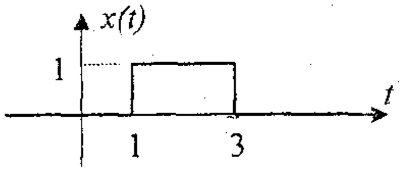
29.06.2004 Süre: 100 dakika

1) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi $y_b(t)$ şöyledir:



Bu sistemin girişine yandaki şekilde verilen $x(t)$ sinyali uygulanıyor.

a) $x(t)$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (4 puan)

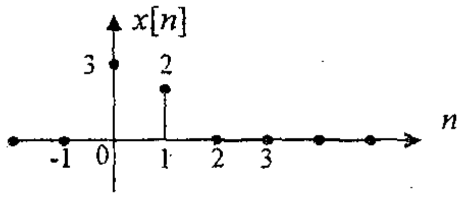


b) $x(t)$ girişi için sistemin çıkışını çiziniz. (8 puan)

c) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. (8 puan)

---

2) Yandaki şekilde verilen $x[n]$ sinyali için $x[n] * x[n-1]$ konvolüsyon işlemini hesaplayınız. (15 puan)



---

3) Birim darbe tepkisi $h(t) = e^{at}u(t)$ olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine $x(t) = e^{bt}u(t)$ sinyali uygulanıyor. Sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? $a \neq b$ kabul edilecektir. (25 puan)

---

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = x[n]$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. (15 puan)

---

5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$ türevsel denklemiyle tanımlanmış sistemin çıkışını, $y(0) = 0$ başlangıç şartı ve

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ ise} \\ \cos t & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

girişi için hesaplayınız. (25 puan)

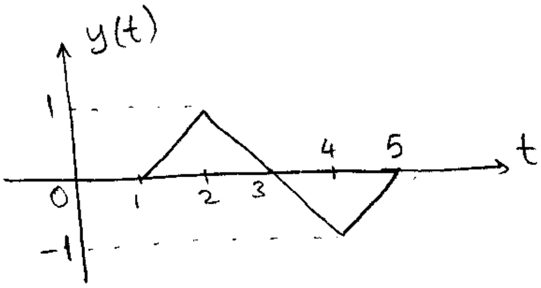
BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

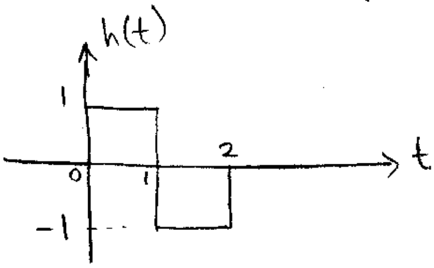
1) a) $x(t) = u(t-1) - u(t-3)$

b) $u(t) \longrightarrow y_b(t)$ ise

$x(t) = u(t-1) - u(t-3) \longrightarrow y(t) = y_b(t-1) - y_b(t-3)$



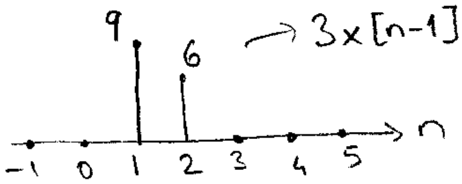
c) Birim darbe tepkisi $h(t) = \dfrac{dy_b}{dt}$



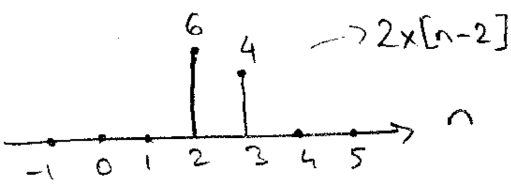
2) $x[n] * x[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[n-k-1] = \sum_{k=0}^{1} x[k]\, x[n-k-1]$

$k<0$ ve $k>1$ için sıfır.

$= x[0]\, x[n-1] + x[1]\, x[n-2] = 3x[n-1] + 2x[n-2]$

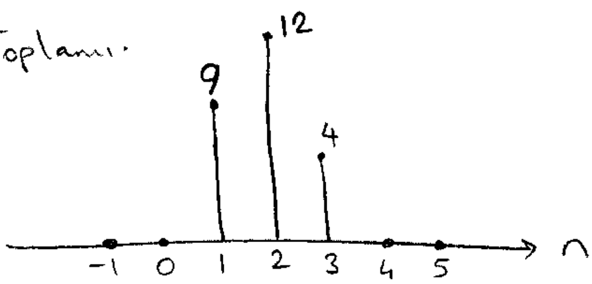


$\rightarrow 3x[n-1]$



$\rightarrow 2x[n-2]$

Toplam:



3) $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{a\tau}\underbrace{u(\tau)}_{\tau<0 \text{ ise sıfır.}} \cdot e^{b(t-\tau)} u(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{+\infty} e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} \underbrace{u(t-\tau)}_{t<0 \text{ ise } 0\leqslant\tau<+\infty \text{ aralığında sıfırdır.}} d\tau$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ \int_{\tau=0}^{+\infty} \underbrace{e^{bt}}_{\tau\text{'ya göre sabit}} e^{(a-b)\tau} \underbrace{u(t-\tau)}_{\tau>t \text{ ise sıfırdır. } \tau\leqslant t \text{ ise 1'dir.}} d\tau & t\geqslant 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ e^{bt}\int_{\tau=0}^{t} e^{(a-b)\tau} \cdot 1 \cdot d\tau & t\geqslant 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$t \geqslant 0$ ise $\quad y(t) = e^{bt} \cdot \frac{1}{a-b} e^{(a-b)\tau}\Big|_{\tau=0}^{t} = \frac{e^{bt}}{a-b}\left(e^{(a-b)t} - 1\right)$

$$= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b} & t\geqslant 0 \text{ ise} \end{cases}$$

4) $n<0$ ise $h[n]=0$ (nedensellikten)

$h[0]=0$ Çünkü $n=-2$ için fark denklemi:

$$h[0] - 2\underbrace{h[-1]}_{0} + \underbrace{h[-2]}_{0} = \underbrace{x[-2]}_{0}$$

$n>0$ ise $\quad h[n+2] - 2h[n+1] + h[n] = 0$

$h[1] = 0 \qquad h[2] = \frac{1}{1} = 1$

Denklem homojen. $\quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$h[n] = A_1 \cdot 1^n + A_2 n 1^n = A_1 + A_2 n$

$$\left.\begin{aligned} h[1] &= A_1 + A_2 = 0 \\ h[2] &= A_1 + 2A_2 = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A_2 &= 1 \\ A_1 &= -1 \end{aligned}$$

Sonuç: $h[n] = (-1+n)\underbrace{u[n-2]}_{\text{Buraya } u[n-1] \text{ de yazılabilirdi.}}$

5) $\dot{y} + y = x$ $\qquad x(t) = \cos t \cdot u(t)$ ve $y(0) = 0$

olduğundan ve denklem 1. mertebeli olduğundan $t<0$ için $y(t) = 0$ 'dır. Ama yine de gösterelim:

$t<0$ için $\quad \dot{y} + y = 0 \qquad \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = -1$

$$y = y_h = A_1 e^{-t} \qquad y(0) = y(0^-)$$

(denklemin sağ tarafında darbe olmadığı için)

$$0 = A_1 e^0 \longrightarrow A_1 = 0$$

$t<0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$

$t \geqslant 0$ için: $\dot{y} + y = \cos t$

$$\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = -1$$

$$y_h = B_1 e^{-t}$$

$\cos t$ için $\quad y_ö = c_1 \cos t + c_2 \sin t \qquad$ (çünkü $\mp j \notin \{\lambda\}$)

$$\dot{y}_ö = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

$$\dot{y}_ö + y_ö = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{1} \cos t + \underbrace{(c_2 - c_1)}_{0} \sin t = \cos t \quad \text{olur.}$$

$$c_2 = c_1 \longrightarrow 2c_1 = 1 \qquad c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_ö = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

$$y = y_h + y_ö = B_1 e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \qquad t \geqslant 0 \text{ için}$$

$$y(0) = 0 = B_1 + \frac{1}{2} \longrightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t & t \geqslant 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Yani:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left(-e^{-t} + \cos t + \sin t\right) u(t)} \qquad \text{her } t \text{ için.}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER – 1 ARASINAV SORULARI
30.04.2005 Süre: 90 dakika

1) $x(t) = 3u(t+2) - u(t-1) - 4u(t-3)$ sinyalini,

a) Çiziniz. **(8 puan)**
b) Tek ve çift bileşenlerini ayrı ayrı çiziniz. **(17 puan)**
(Süreksizlik noktalarındaki değerleri önemsemeyebilirsiniz.)

2) Giriş (x) ile çıkış (y) arasındaki ilişki, $y(t+1) = e^{-|t+2|}x(t) + \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)d\tau$ ile verilen bir sistem, doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır?
(5×3 = 15 puan)

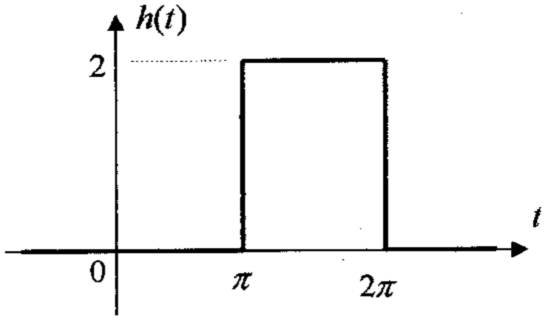
3) Aşağıdaki sinyaller periyodik midir? Periyodik iseler periyotları nedir? **(12 puan)**

a) $x[n] = (-1)^n + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$

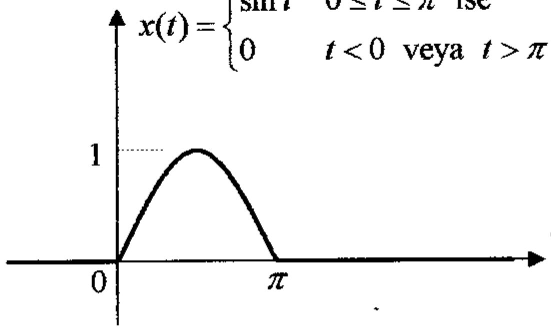
b) $h[n] = \sin\left(\frac{4}{3}n\right) + \sin\left(\frac{3}{4}n\right)$

c) $y(t) = \sin t + \cos(\pi t)$

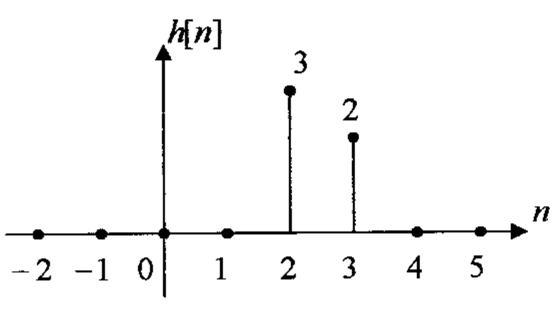
4) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ aşağıda gösterilmiştir. Bu sistemin girişine, şekilde verilen $x(t)$ sinyali giriş olarak uygulanırsa sistem çıkışı ne olur? Bulunuz ve çiziniz. **(25 puan)**

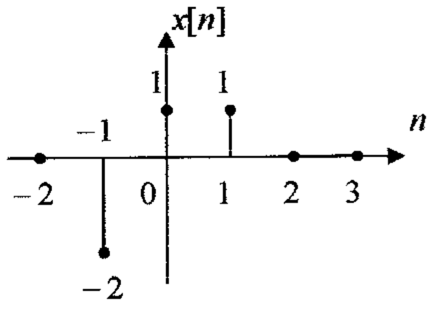


$$x(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \pi \text{ ise} \\ 0 & t < 0 \text{ veya } t > \pi \text{ ise} \end{cases}$$



5) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ aşağıda gösterilmiştir. Bu sistemin girişine, şekilde verilen $x[n]$ sinyali giriş olarak uygulanırsa sistem çıkışı ne olur? Bulunuz ve çiziniz. **(23 puan)**

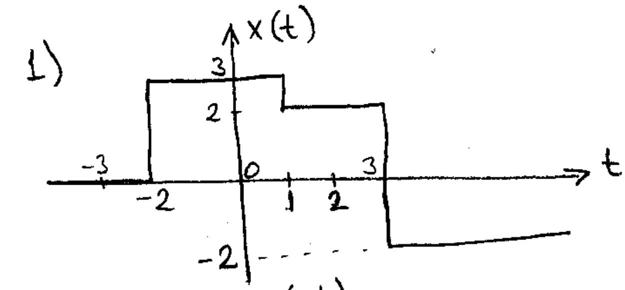


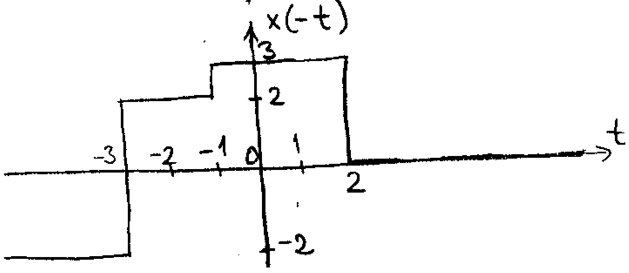


BAŞARILAR... **Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

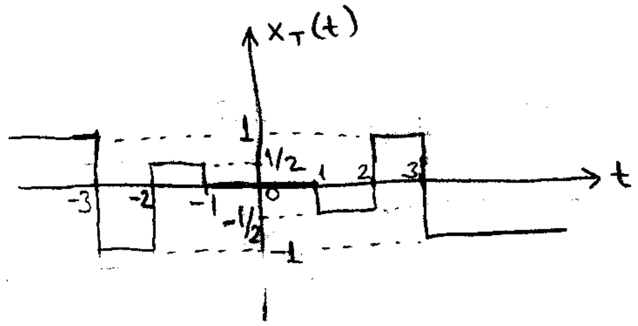
SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 ARASINAV CEVAP ANAHTARI
30.04.2005

1)

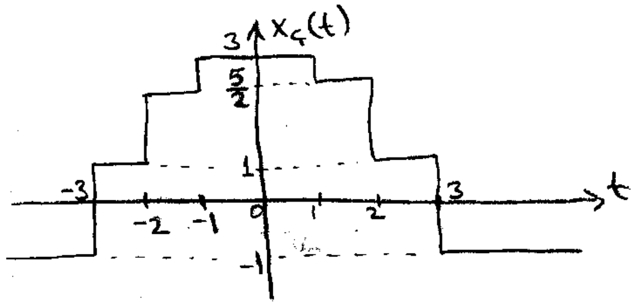




$x_T(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$: Tek bileşen



$x_Ç(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$: Çift bileşen



2) Her iki tarafı zamanda 1 birim kaydırarak

$$y(t) = e^{-|t+1|} x(t-1) + \int_{t-2}^{t} x(\tau)\,d\tau$$ yazılabilir.

Doğrusaldır → çünkü $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ için

$$y(t) = e^{-|t+1|}\big(a_1 x_1(t-1) + a_2 x_2(t-1)\big) + \int_{t-2}^{t}\big(a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)\big)d\tau$$

$$y(t) = a_1 \underbrace{\Big[e^{-|t+1|} x_1(t-1) + \int_{t-2}^{t} x_1(\tau)\,d\tau\Big]}_{y_1(t)} + a_2 \underbrace{\Big[e^{-|t+1|} x_2(t-1) + \int_{t-2}^{t} x_2(\tau)\,d\tau\Big]}_{y_2(t)}$$

$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ ✓

Belleklidir → çünkü $y(t)$, $x(t-1)$'e bağlı

Nedenseldir → çünkü girişin sadece $(t-2)$ ile t arası zamanlardaki değerlerle $y(t)$ bulunuyor. $e^{-|t+1|}$ (veya $e^{-|t+2|}$) katsayıdır, aldanmayın.

Zamanla değişendir → Çünkü $x(t-1)$ (veya $x(t)$) 'nin katsayısı zamana bağlı.

Kararlıdır → Çünkü giriş sonluysa sonlu aralıktaki integral sonludur ve $e^{-|t+1|}$ (veya $e^{-|t+2|}$) katsayısı sınırlıdır.

3) a) $(-1)^n \rightarrow 2$ ile periyodik

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \rightarrow 3$ ile periyodik

$x[n]$ bunların ortak tam katlarının en küçüğü ile periyodiktir. OKEK = 6 mevcut $N=6$ ile periyodik.

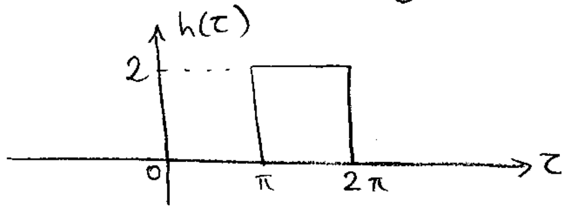
b) $\sin\left(\frac{4}{3}n\right)$ periyodik değil. Çünkü $\left(\frac{4}{3}\right)/(2\pi)$ rasyonel değil. $\sin\left(\frac{3}{4}n\right)$ de periyodik değil. Dolayısıyla $h[n]$ periyodik değil.

c) $\sin t \rightarrow 2\pi$ ile periyodik

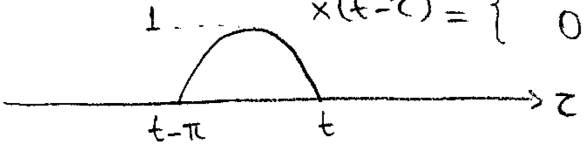
$\cos \pi t \rightarrow 2$ ile periyodik

2π ile 2 arasındaki oran irrasyonel olduğundan ortak tam katı mevcut değildir. $y(t)$ periyodik değil.

4) Sistem çıkışı $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$



$$x(t-\tau) = \begin{cases} \sin(t-\tau) & t-\pi \leq \tau \leq t \text{ için} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$



$t < \pi$ ise:

Her τ için $h(\tau)x(t-\tau) = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

$\pi \leq t < 2\pi$ ise:

$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin(t-\tau) & \pi \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=\pi}^{t} 2\sin(t-\tau)\, d\tau = 2\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=\pi}^{t}$$

$$y(t) = 2\cos 0 - 2\cos(t-\pi) = 2 - 2(-\cos t)$$

$$y(t) = 2 + 2\cos t$$

$2\pi \leq t < 3\pi$ ise:

$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin(t-\tau) & t-\pi \leq \tau \leq 2\pi \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\pi}^{2\pi} 2\sin(t-\tau)\, d\tau = 2\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=t-\pi}^{2\pi}$$

$$y(t) = 2\cos(t-2\pi) - 2\cos(t-t+\pi)$$

$$y(t) = 2\cos t - 2\cos\pi = 2 + 2\cos t$$

Öncekiyle aynı çıktı. Çoğu örnekte aynı olmaz.

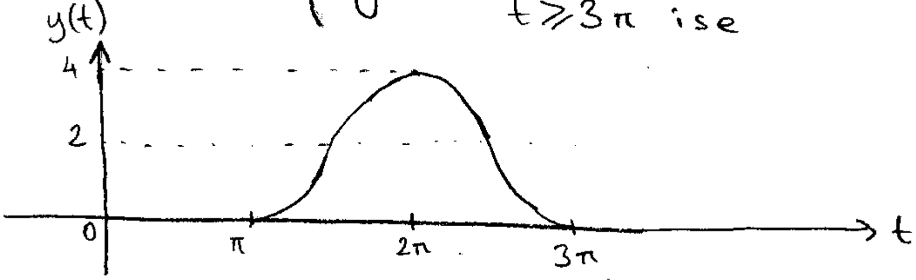
$t \geq 3\pi$ ise:

Her τ için $h(\tau)x(t-\tau) = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

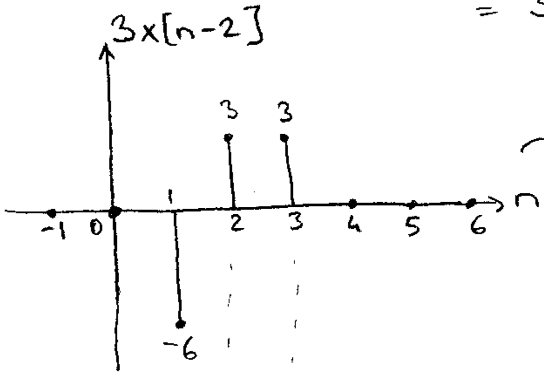
Sonuç:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<\pi \text{ ise} \\ 2+2\cos t & \underbrace{\pi\le t<2\pi \text{ veya } 2\pi\le t<3\pi}_{\text{kısaca}} \text{ ise} \quad \pi\le t<3\pi \text{ ise} \\ 0 & t\geq 3\pi \text{ ise} \end{cases}$$

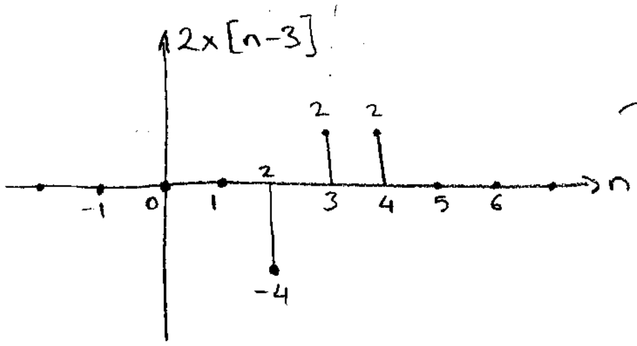


5) Sistem çıkışı $= y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]$

$$= y[n] = h[2]\,x[n-2] + h[3]\,x[n-3]$$
$$= 3x[n-2] + 2x[n-3]$$

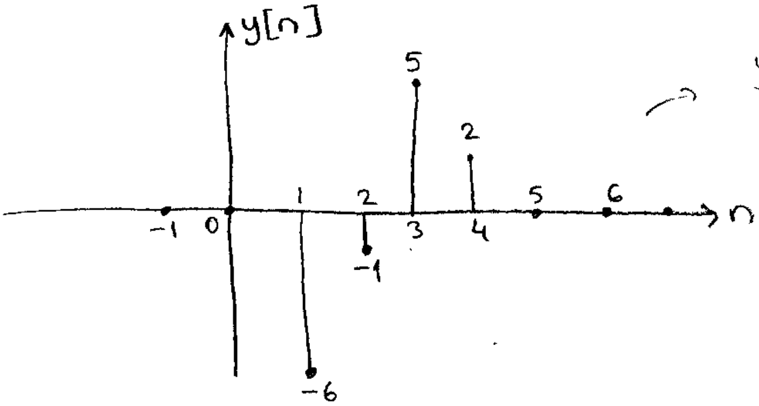


$\rightarrow \; -6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$



$\rightarrow \; -4\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4]$

+



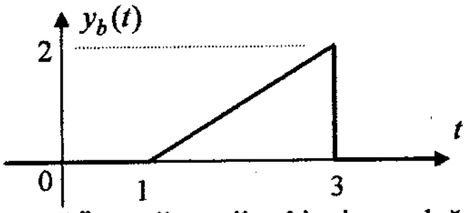
$\rightarrow \; y[n] = -6\delta[n-1] - \delta[n-2] + 5\delta[n-3] + 2\delta[n-4]$

(Çizilmesi yeterli, fonksiyonu yazılmasa da olur.)

SİNYALLER VE SİSTEMLER – 1 FİNAL SINAVI SORULARI

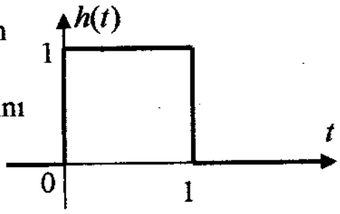
Normal Öğretim, 13.06.2005, Süre: 90 dakika

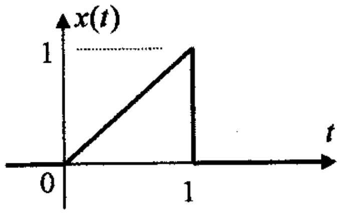
1) Birim basamak tepkisi $y_b(t)$ şekildeki gibi olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(15 puan)**



2) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n]=(n+1)\cdot x[n]+(-1)^n$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5×3=15 puan)**

3) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekilde verilmiştir. Buna göre sistem çıkışını bulunuz ve çiziniz. **(25 puan)**





4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=3x(t)$$

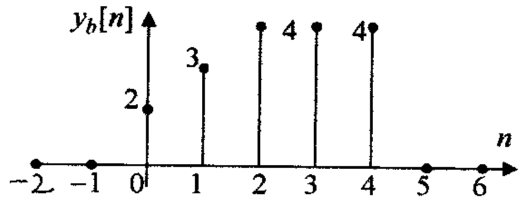
ile verilen <u>nedensel</u> sisteminbirim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

5) $y[n+2]-y[n]=(0,5)^n\cdot u[n]$ fark denkleminin bütün zamanlardaki çözümünü, $y[-2]=y[-1]=1$ şartları için bulunuz. **(25 puan)**

SİNYALLER VE SİSTEMLER – 1 FİNAL SINAVI SORULARI

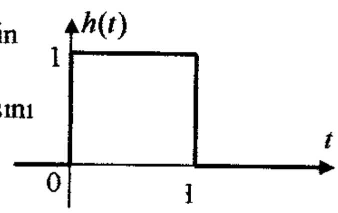
İkinci Öğretim, 13.06.2005, Süre: 90 dakika

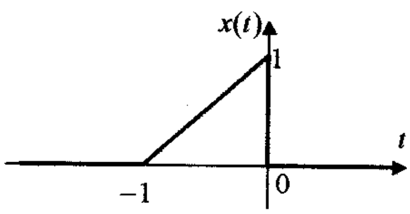
1) Birim basamak tepkisi $y_b[n]$ şekildeki gibi olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(15 puan)**



2) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y(t)=\int_{t-1}^{t}x(\tau)d\tau+(t+1)\cdot x(t)$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5×3=15 puan)**

3) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekilde verilmiştir. Buna göre sistem çıkışını bulunuz ve çiziniz. **(25 puan)**





4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2]-2y[n+1]+y[n]=2x[n]$$

ile verilen <u>nedensel</u> sisteminbirim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

5) $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)=2e^{-t}u(t)+3$ diferansiyel denkleminin bütün zamanlardaki çözümünü, $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=1$ şartları için bulunuz. **(25 puan)**

SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI

Normal Öğretim, 13.06.2005

1) $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$ olduğundan birim darbe tepkisi de $h(t) = \dfrac{dy_b(t)}{dt}$

$$y_b(t) = \begin{cases} t-1 & 1 \le t < 3 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} = (t-1)\cdot\big(u(t-1) - u(t-3)\big)$$

$$h(t) = \frac{dy_b(t)}{dt} = 1\cdot\big(u(t-1) - u(t-3)\big) + (t-1)\big(\delta(t-1) - \delta(t-3)\big)$$

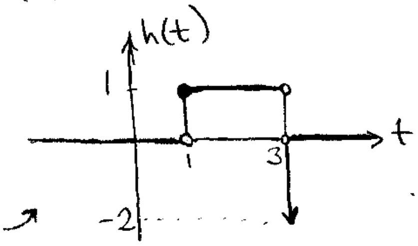
$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$ formülünü $x(t) = t-1$ için kullanırsak:

$(t-1)\,\delta(t-1) = 0\cdot\delta(t-1) = 0$

$(t-1)\,\delta(t-3) = (3-1)\cdot\delta(t-3) = 2\,\delta(t-3)$

Dolayısıyla:

$h(t) = \big(u(t-1) - u(t-3)\big) - 2\,\delta(t-3)$. Çizersek



2) Doğrusal Değildir – çünkü $(-1)^n$ terimi girişle çarpım halinde olmadığından doğrusallığı bozar.

Belleksizdir – çünkü $y[n]$ sadece n anındaki girişe ($x[n]$'e) bağlı.

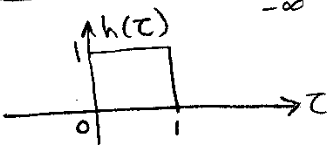
Nedenseldir – zaten tüm belleksizler nedenseldir.

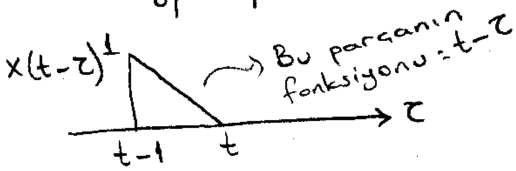
Kararsızdır – çünkü n zamanı ilerlerken sonlu bir $x[n]$ için $(n+1)x[n]$, dolayısıyla $y[n]$ çıkışı sonsuza gidiyor.

Zamanla değişendir – çünkü $x[n]$'in katsayısı zamana bağlı

3) Sistem çıkışı $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

1. Yol: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$





$t<0$ ise: $h(\tau)x(t-\tau) = 0$ her τ için

$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

$0 \le t < 1$ ise:

$$h(\tau)\,x(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(t-\tau) & 0 \le \tau \le t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\,d\tau = -\frac{(t-\tau)^2}{2}\Bigg|_0^t = \frac{t^2}{2} = y(t)$$

$1 \le t < 2$ ise:

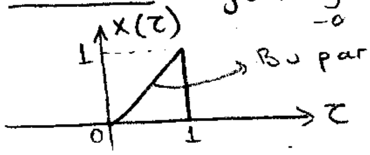
$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(t-\tau) & t-1 \le \tau \le 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

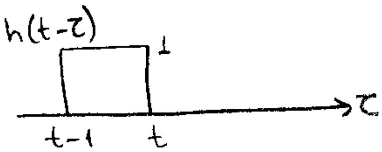
$$y(t) = \int_{t-1}^{1} (t-\tau)\,d\tau = -\frac{(t-\tau)^2}{2}\Bigg|_{t-1}^{1} = -\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{1}{2} = t - \frac{t^2}{2} = y(t)$$

$t \geqslant 2$ ise: $h(\tau)x(t-\tau) = 0$ her τ için

$$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

2. Yol: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$





$t < 0$ ise:

$x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

$0 \le t < 1$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot\tau & 0 \le \tau \le t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} \tau\,d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{0}^{t} = \frac{t^2}{2} = y(t)$$

$1 \le t < 2$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot\tau & t-1 \le \tau \le 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-1}^{1} \tau \cdot d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{t-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{(t-1)^2}{2} = t - \frac{t^2}{2} = y(t)$$

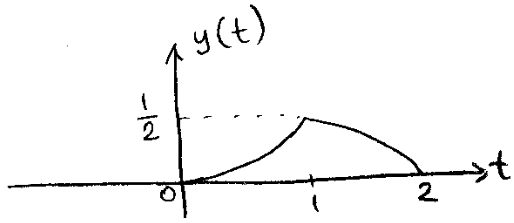
$t \geqslant 2$ ise: $x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ ise} \\ t^2/2 & 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ t - \frac{t^2}{2} & 1 \le t < 2 \text{ ise} \\ 0 & t \geqslant 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Çizersek ↗



4) Nedensellikten dolayı $t < 0$ için birim darbe tepkisi $h(t) = 0$

$t \geqslant 0$ için $\ddot{h}(t) + 3\dot{h}(t) + 2h(t) = 0$

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = \frac{3}{1} = 3$$

$\lambda^2+3\lambda+2=0 \rightarrow \lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$

$h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t} \rightarrow \dot{h}(t)=-A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t}$

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=A_1+A_2=0 \\ \dot{h}(0)=-A_1-2A_2=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A_1=3 \\ A_2=-3 \end{array}$$

$$h(t)=3(e^{-t}-e^{-2t}) \qquad t\geq 0 \text{ için.}$$

Genel olarak: $\boxed{h(t)=3(e^{-t}-e^{-2t})u(t)}$

5) $y[n+2]-y[n]=0{,}5^n\cdot u[n] \rightarrow \lambda^2-1=0 \rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$

<u>$n<0$ için:</u> $y[n+2]-y[n]=0 \rightarrow y[n]=y_h[n]=A_1\cdot 1^n+A_2\cdot(-1)^n=A_1+A_2(-1)^n$

$$\left.\begin{array}{l} y[-1]=A_1-A_2=1 \\ y[-2]=A_1+A_2=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A_2=0 \\ A_1=1 \end{array} \rightarrow \boxed{y[n]=1}\ \boxed{n<0 \text{ ise.}}$$

$n=-2$ için fark denklemi: $y[-2+2]-\underbrace{y[-2]}_{1}=\underbrace{0{,}5^{-2}u[-2]}_{0}$

$\hookrightarrow y[0]=1$ bulunur.

$n=-1$ için fark denklemi: $y[-1+2]-\underbrace{y[-1]}_{1}=\underbrace{0{,}5^{-1}u[-1]}_{0}$

$\hookrightarrow y[1]=1$ bulunur.

Bulunan bu şartlar ($y[0]=y[1]=1$) $n\geq 0$ çözümünde kullanılacak

<u>$n\geq 0$ için:</u>

$$y[n+2]-y[n]=0{,}5^n \rightarrow y_h[n]=B_1+B_2\cdot(-1)^n$$

Sağdaki $0{,}5^n$ için özel çözüm: $y_ö[n]=c\cdot(0{,}5)^n$ çünkü $0{,}5\notin\{\lambda_1,\lambda_2\}$

$$y_ö[n+2]-y_ö[n]=c\cdot(0{,}5)^n\underbrace{(0{,}5^2-0{,}5^0)}_{-\frac{3}{4}}=0{,}5^n \longrightarrow c=-\frac{4}{3}$$

$y_ö[n]=-\frac{4}{3}(0{,}5)^n$

$y[n]=B_1+B_2(-1)^n-\frac{4}{3}\cdot(0{,}5)^n$

$$\left.\begin{array}{l} y[0]=B_1+B_2-\frac{4}{3}=1 \\ y[1]=B_1-B_2-\frac{2}{3}=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B_2=\frac{1}{3} \\ B_1=2 \end{array} \rightarrow \boxed{y[n]=2+\frac{1}{3}(-1)^n-\frac{4}{3}(0{,}5)^n}\ \boxed{n\geq 0 \text{ ise}}$$

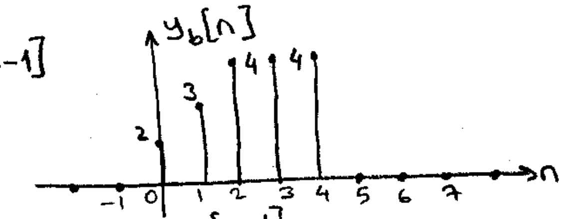
Genel olarak $\boxed{y[n]=1+\left(1+\frac{(-1)^n}{3}-\frac{4}{3}(0{,}5)^n\right)u[n]}$ biçiminde tüm zamanlar için yazılabilir.

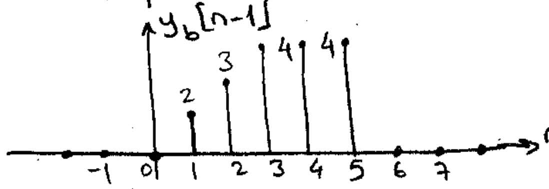
SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI

İkinci Öğretim, 13.06.2005

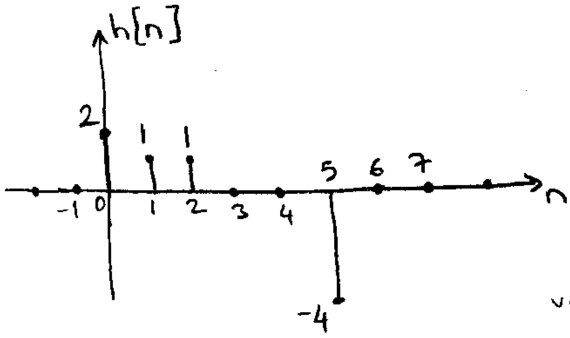
1) Birim darbe tepkisi : $h[n] = y_b[n] - y_b[n-1]$

(Çünkü $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$)





Farkını alırsak



veya $h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] - 4\delta[n-5]$

2) Doğrusaldır — çünkü integral ve toplama doğrusal işlemlerdir ($x(t)$'lerin katsayıları zamana bağlı olsa bile).

Bellekli̇dir — çünkü $y(t)$'yi bulmak için $(t-1, t)$ aralığındaki yani t'den önceki anlardaki giriş değerleri gerekiyor.

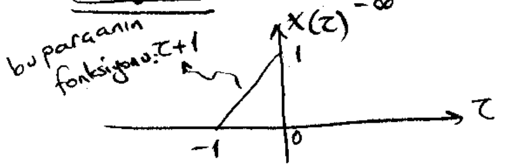
Nedenseldir — çünkü $y(t)$, t'den sonraki bir andaki girişe bağlı değil.

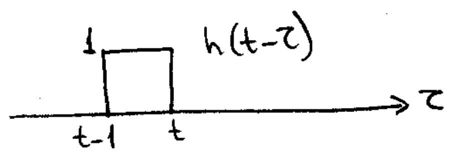
Kararsızdır — çünkü $x(t)$ sonlu bile olsa $(t+1)$ çarpanı zaman ilerlerken sonsuza gidiyor. Böylece $y(t)$ sonsuza gidiyor.

Zamanla değişendir — çünkü $x(t)$'nin katsayısı zamana bağlı.

3) Çıkış : $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

<u>1. yol :</u> $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$





<u>$t < -1$</u> $\Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

<u>$-1 \le t < 0$</u> $\Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1 \cdot (\tau+1) & -1 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y(t) = \int_{-1}^{t} (\tau+1)d\tau = \left.\frac{(\tau+1)^2}{2}\right|_{-1}^{t} = \frac{(t+1)^2}{2}$$

$0 \le t < 1$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(\tau+1) & t-1 \le \tau \le 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-1}^{0} (\tau+1)\,d\tau = \left.\frac{(\tau+1)^2}{2}\right|_{t-1}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} = \frac{1-t^2}{2}$$

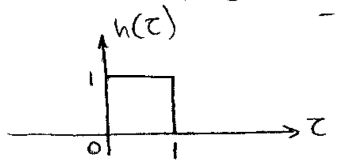
$t \geq 1$ ise:

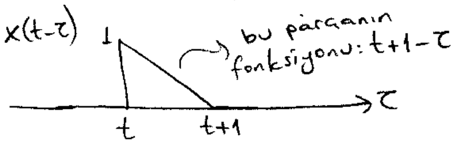
$x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$ her τ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

2. Yol:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$





$t < -1$ $\Rightarrow h(\tau)x(t-\tau) = 0$ her τ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

$-1 \le t < 0$ ise:

$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(t+1-\tau) & 0 \le \tau \le t+1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{0}^{t+1} (t+1-\tau)\,d\tau = -\left.\frac{(t+1-\tau)^2}{2}\right|_{\tau=0}^{t+1}$$

$$y(t) = \frac{(t+1)^2}{2}$$

$0 \le t < 1$ ise:

$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(t+1-\tau) & t \le \tau \le 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\rightarrow\ y(t) = \int_{t}^{1} (t+1-\tau)\,d\tau = -\left.\frac{(t+1-\tau)^2}{2}\right|_{t}^{1}$$

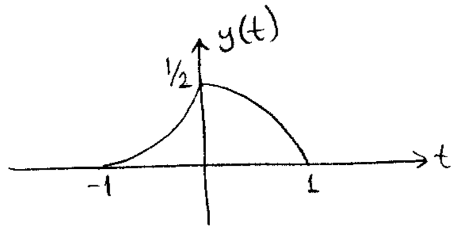
$$y(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-t^2}{2}$$

$t \geq 1$ ise: $h(\tau)x(t-\tau) = 0$ her τ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \text{ ise} \\ \dfrac{(t+1)^2}{2} & -1 \le t < 0 \text{ ise} \\ \dfrac{1-t^2}{2} & 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ 0 & t \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$



4) $n < 0$ için $h[n] = 0$ (nedensellikten)

$h[0] = 0$ (sistem 0. mertebeden olmadığı için)

$n > 0$ için: $h[n+2] - 2h[n+1] + h[n] = 0$ (denklem homojen)

2. mertebeden olduğundan $h[1] = 0$, $h[2] = \frac{2}{1} = 2$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$	$h[n] = A_1 + A_2 n$	$h[n] = -2 + 2n$ $\quad n > 0$ için
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$h[1] = A_1 + A_2 = 0$	Genel olarak:
$h[n] = A_1 \cdot 1^n + A_2 n \cdot 1^n$	$h[2] = A_1 + 2A_2 = 2$	$h[n] = (2n-2)\underbrace{u[n-1]}_{\text{veya } u[n-2]}$
	$A_1 = -2,\ A_2 = 2$	

5) $\ddot{y}+3\dot{y}=2e^{-t}u(t)+3 \rightarrow \lambda^2+3\lambda=0 \rightarrow \lambda_1=-3,\ \lambda_2=0$

$t<0$ için $\ddot{y}+3\dot{y}=3 \rightarrow y_h=A_1e^{-3t}+A_2e^{0\cdot t}=A_1e^{-3t}+A_2$

Sağdaki $3=3\cdot e^{0\cdot t}$ için $0=\lambda_2$ olduğundan $y_{ö1}=c_1t\cdot e^{0\cdot t}=c_1t$

$\dot{y}_{ö1}=c_1,\quad \ddot{y}_{ö1}=0 \rightarrow \ddot{y}_{ö1}+3\dot{y}_{ö1}=0+3c_1=3 \rightarrow c_1=1$

$y_{ö1}=t \rightarrow y=y_h+y_{ö1}=A_1e^{-3t}+A_2+t$

$y(0)=A_1+A_2=1 \qquad \dot{y}=-3A_1e^{-3t}+1$

$\dot{y}(0)=-3A_1+1=1 \rightarrow A_1=0,\quad A_2=1$

$t<0$ için $\boxed{y(t)=1+t}$

$t\geq 0$ için $\ddot{y}+3\dot{y}=3+2e^{-t} \rightarrow y_h=B_1e^{-3t}+B_2$

Sağdaki 3 için özel çözüm aynıdır: $y_{ö1}=t$

Sağdaki $2e^{-t}$ için özel çözüm: $y_{ö2}=c_2e^{-t}$ $\quad (-1\notin\{\lambda_1,\lambda_2\})$

$\dot{y}_{ö1}=-c_2e^{-t},\quad \ddot{y}_{ö2}=c_2e^{-t} \rightarrow \ddot{y}_{ö2}+3\dot{y}_{ö2}=c_2e^{-t}(1-3)=2e^{-t}$

$c_2=-1 \rightarrow y_{ö2}=-e^{-t}$

$y=y_h+y_{ö1}+y_{ö2}=B_1e^{-3t}+B_2+t-e^{-t}$

$y(0)=B_1+B_2-1=1 \qquad \dot{y}=-3B_1e^{-3t}+1+e^{-t}$

$\dot{y}(0)=-3B_1+1+1=1 \rightarrow B_1=\frac{1}{3},\quad B_2=\frac{5}{3}$

$t\geq 0$ için $\boxed{y(t)=\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{5}{3}+t-e^{-t}}$

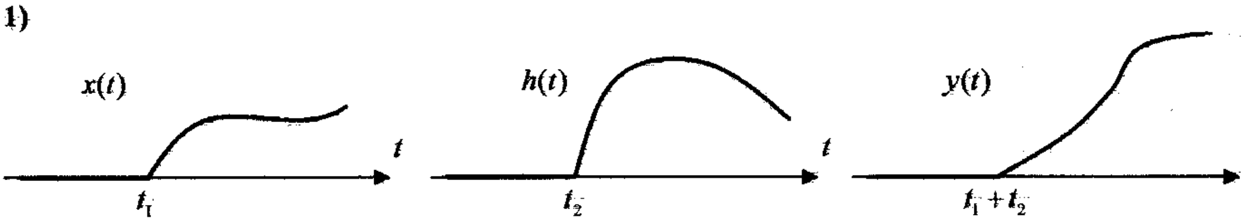
Genel olarak:

$$y(t)=\begin{cases}1+t & t<0 \text{ ise}\\ \frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{5}{3}+t-e^{-t} & t\geq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

Dikkat: Denklemin sağında darbe bulunmadığı için $y(0^-)=y(0)$, $\dot{y}(0^-)=\dot{y}(0)$ alarak katsayıları bulduk.

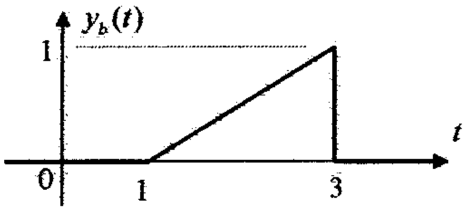
SİNYALLER VE SİSTEMLER – 1 BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
Normal Öğretim, 27.06.2005, Süre: 90 dakika

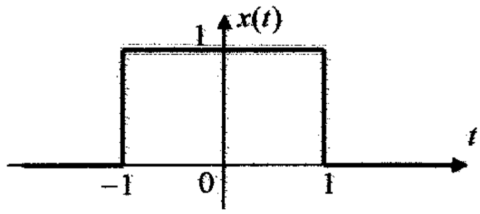
1)



Her $t < t_1$ için $x(t) = 0$ ve her $t < t_2$ için $h(t) = 0$ olsun. Bu iki sinyalin konvolüsyonu da $y(t) = x(t) * h(t)$ olsun. Her $t < (t_1 + t_2)$ için $y(t) = 0$ olduğunu ispatlayınız. **(15 puan)**
Yol gösterme: Verilen şartlar için $x(t) = x(t) \cdot u(t - t_1)$ ve $h(t) = h(t) \cdot u(t - t_2)$ yazılabilir.

2) Birim basamak tepkisi $y_b(t)$ şekildeki gibi olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine şekildeki gibi bir $x(t)$ giriş sinyali uygulanıyor.





Buna göre
a) $x(t)$ sinyalini sağ taraflı basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. **(5 puan)**
b) Bu ifadeden faydalanarak, $x(t)$ girişine karşılık gelen sistem çıkışını çiziniz. **(10 puan)**

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden yalnızca istediğiniz bir tanesini yapınız. **(25 puan)**
a) $x(t) = u(t) - u(t-2)$ ve $h(t) = e^{-2t}u(t)$ olmak üzere $y(t) = x(t) * h(t) = ?$
b) $x[n] = u[n+5] - u[n-5]$ olmak üzere $y[n] = x[n] * x[n] = ?$

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 1{,}8y[n+1] + 0{,}8y[n] = 2x[n]$$

ile verilen <u>nedensel</u> sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

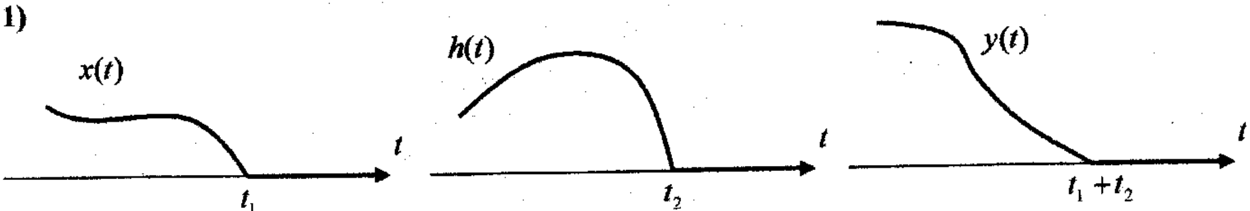
$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

ile verilen sistemin, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ başlangıç şartları için bütün zamanlardaki çıkışını bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR ... **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER – 1 BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
İkinci Öğretim, 27.06.2005, Süre: 90 dakika

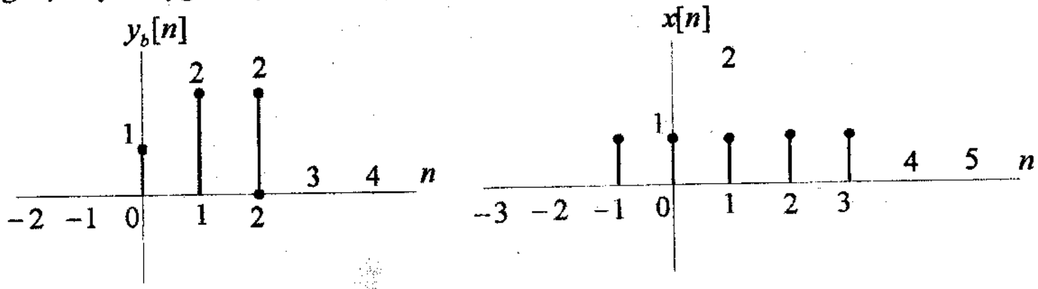
1)



Her $t > t_1$ için $x(t) = 0$ ve her $t > t_2$ için $h(t) = 0$ olsun. Bu iki sinyalin konvolüsyonu da $y(t) = x(t) * h(t)$ olsun. Her $t > (t_1 + t_2)$ için $y(t) = 0$ olduğunu ispatlayınız. **(15 puan)**

Yol gösterme: Verilen şartlar için $x(t) = x(t) \cdot u(t_1 - t)$ ve $h(t) = h(t) \cdot u(t_2 - t)$ yazılabilir.

2) Birim basamak tepkisi $y_b[n]$ şekildeki gibi olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine şekildeki gibi bir $x[n]$ giriş sinyali uygulanıyor.



Buna göre

a) $x[n]$ sinyalini sağ taraflı basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. **(5 puan)**

b) Bu ifadeden faydalanarak, $x[n]$ girişine karşılık gelen sistem çıkışını çiziniz. **(10 puan)**

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden yalnızca istediğiniz bir tanesini yapınız. **(25 puan)**

a) $x(t) = u(t) - u(t-2)$ ve $h(t) = e^{-2t}u(t)$ olmak üzere $y(t) = x(t) * h(t) = ?$

b) $x[n] = u[n+5] - u[n-5]$ olmak üzere $y[n] = x[n] * x[n] = ?$

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 3x(t)$$

ile verilen <u>nedensel</u> sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

5)
$$y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = x[n] = \begin{cases} 2 & 0 \le n \le 6 \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

fark denkleminin bütün zamanlardaki çözümünü $y[-1] = y[0] = 0$ başlangıç şartları için bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR ...

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI

Normal Öğretim, 27.06.2005

1) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

$x(\tau) = x(\tau) u(\tau - t_1)$ $\qquad h(t) = h(t) u(t - t_2)$

$h(t-\tau) = h(t-\tau) \cdot u(t-\tau-t_2)$

$$\rightarrow y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) \cdot u(\tau - t_1) \cdot u(t-\tau-t_2)\, d\tau$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau < t_1 \Rightarrow u(\tau - t_1) = 0 \\ \tau > t - t_2 \Rightarrow u(t-\tau-t_2) = 0 \end{array}\right\}$$

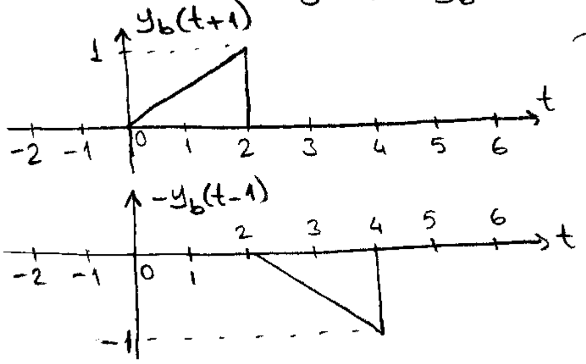
Buna göre eğer $t_1 > t - t_2$ yani $t < t_1 + t_2$ ise her τ için $u(\tau - t_1) \cdot u(t-\tau-t_2) = 0$ olur.

Yani $t < t_1 + t_2 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

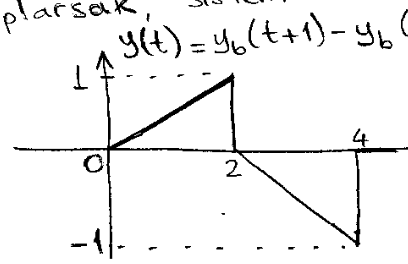
2) a) $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$

b) x ile u arasındaki doğrusal zamanla değişmez ilişki y ile y_b arasında da vardır.

$$y(t) = y_b(t+1) - y_b(t-1)$$



Toplarsak, sistem çıkışı bulunur:



4) Nedensellikten $n < 0$ için birim darbe tepkisi $h[n] = 0$

Sistem mertebesi sıfırdan büyük ve sağ taraf $x[\underline{n}]$ olduğundan $h[0] = 0$. Yani $n \leq 0$ için $h[n] = 0$

$n > 0$ için birim darbe tepkisi,

$h[n+2] - 1{,}8\, h[n+1] + 0{,}8\, h[n] = 0$ denklemini, $h[1] = 0$, $h[2] = \frac{2}{1} = 2$ başlangıç şartları ile sağlar.

$\lambda^2 - 1{,}8\lambda + 0{,}8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0{,}8 \rightarrow n > 0$ için $h[n] = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 0{,}8^n$

$$\left.\begin{array}{l} h[n] = A_1 + A_2 \cdot (0{,}8)^n \\ h[1] = A_1 + 0{,}8 A_2 = 0 \\ h[2] = A_1 + 0{,}64 A_2 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_2 = \frac{-2}{0{,}16} = \frac{-25}{2} \\ A_1 = 10 \end{array}$$

$n > 0$ için $h[n] = 10 - \frac{25}{2} \cdot (0{,}8)^n$

Genel olarak:

$$\boxed{h[n] = \left(10 - \frac{25}{2} \cdot 0{,}8^n\right) u[n-1]}$$

$u[n-2]$ de olurdu

5) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$t<0$ için $x(t)=0$, $y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t}$ (Denklem homojen; özel çözüm yok.)

$\dot{y}(t) = (-A_1 + A_2)e^{-t} - A_2 t e^{-t}$

Sağ tarafta darbe olmadığından, $\left.\begin{array}{l} y(0^-) = y(0) = 0 \\ \dot{y}(0^-) = \dot{y}(0) = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{array}$

$\boxed{t<0 \text{ için} \quad y(t) = 0}$

$0 \le t \le 1$ için homojen çözüm: $y_h(t) = B_1 e^{-t} + B_2 t e^{-t}$

Sağ taraftaki e^{-t} için $-1 = \lambda_1 = \lambda_2$ olduğundan

özel çözüm: $y_ö(t) = ct^2 e^{-t}$

$\dot{y}_ö(t) = 2cte^{-t} - ct^2 e^{-t}$

$\ddot{y}_ö(t) = 2ce^{-t} - 4cte^{-t} + ct^2 e^{-t}$

$\ddot{y}_ö(t) + 2\dot{y}_ö(t) + y_ö(t) = e^{-t}$

$ct^2 e^{-t}(\underbrace{1-2+1}_{0}) + cte^{-t}(\underbrace{-4+4}_{0}) + ce^{-t}(2) = e^{-t} \rightarrow c = \frac{1}{2}$

$y_ö(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$

$y(t) = y_h(t) + y_ö(t) = B_1 e^{-t} + B_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$

$\dot{y}(t) = (-B_1 + B_2)e^{-t} + (-B_2 + 1)te^{-t} - \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = B_1 = 0 \\ \dot{y}(0) = -B_1 + B_2 = 0 \end{array}\right\}$ $B_1 = 0$, $B_2 = 0$

$\boxed{0 \le t \le 1 \text{ için} \quad y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}}$ $\rightarrow$ $y(1) = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$

$\dot{y}(1) = e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$

$t>1$ için denklem yine homojen:

$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$ $\qquad \dot{y}(t) = (-C_1 + C_2)e^{-t} - C_2 t e^{-t}$

$\left.\begin{array}{l} y(1^+) = y(1) = C_1 e^{-1} + C_2 e^{-1} = \frac{e^{-1}}{2} \\ \dot{y}(1^+) = \dot{y}(1) = (-C_1 + C_2)e^{-1} - C_2 e^{-1} = \frac{e^{-1}}{2} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \\ -C_1 = \frac{1}{2} \end{array}$

↳ Sağda darbe olmadığı için.

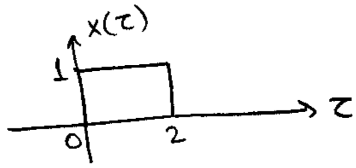
$\rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \qquad C_2 = 1$

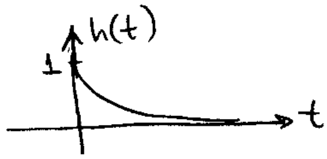
$\boxed{t>1 \text{ için} \quad y(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + te^{-t}}$

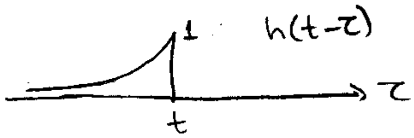
SS-1-B-2005- CA3 ve CA4, N.Ö. ve İ.Ö. için ortaktır.

SS-1-B-2005-NÖ/İÖ - CA-3

3) a) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$







$\underline{t<0 \text{ ise :}}$

$x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$\underline{0 \le t < 2 \text{ ise :}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)} & 0 \le \tau \le t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} \cdot \frac{1}{2} e^{2\tau}\Big|_0^t = \frac{e^{-2t}(e^{2t}-1)}{2}$$

$$y(t) = \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

$\underline{t \geqslant 2 \text{ ise :}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)} & 0 \le \tau < 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

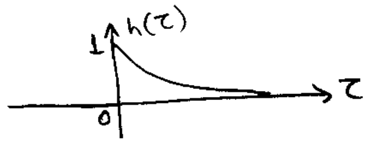
$$y(t) = \int_0^2 e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \cdot \frac{1}{2} e^{2\tau}\Big|_0^2 = \frac{e^{-2t} \cdot (e^4 - 1)}{2} = y(t)$$

<u>İkinci yol:</u>

$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

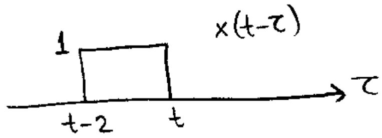
$\underline{t<0 \text{ ise :}}$ $x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$



$\underline{0 \le t < 2 \text{ ise :}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2\tau} & 0 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$



$$y(t) = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2\tau}\Big|_0^t = \frac{1-e^{-2t}}{2} = y(t)$$

$\underline{t \geqslant 2 \text{ ise :}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2\tau} & t-2 < \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-2}^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2\tau}\Big|_{t-2}^t = \frac{e^{-2t} \cdot e^4 - e^{-2t}}{2} = \frac{e^{-2t}(e^4-1)}{2} = y(t)$$

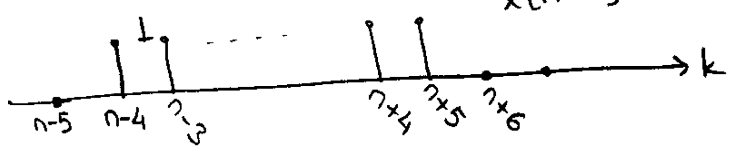
<u>Genel olarak:</u>

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) & 0 \le t < 2 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}(e^4-1)e^{-2t} & t \geqslant 2 \text{ ise} \end{cases}$$

3) b) $y[n] = x[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[n-k]$

x[k]

x[n-k]



$n+5 < -5$ ise

yani $\underline{n < -10 \text{ ise:}}$

$x[k]\,x[n-k] = 0$ her k için

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0 = 0$$

$-5 \leq n+5 \leq 4$ ise

yani $\underline{-10 \leq n \leq -1 \text{ ise:}}$

$$x[k] \cdot x[n-k] = \begin{cases} 1 & -5 \leq k \leq n+5 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-5}^{n+5} 1 = \left[(n+5) - (-5) + 1\right] \cdot 1 = n+11 = y[n]$$

$-5 \leq n-4 \leq 4$ ise

yani $\underline{-1 \leq n \leq 8 \text{ ise:}}$

$$x[k]\,x[n-k] = \begin{cases} 1 & n-4 \leq k \leq 4 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=n-4}^{4} 1 = \left[4 - (n-4) + 1\right] \cdot 1 = 9-n = y[n]$$

$n-4 > 4$ ise

yani $\underline{n > 8 \text{ ise:}}$

$x[k]\,x[n-k] = 0$ her k için.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0 = 0$$

<u>Sonuç:</u>

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < -10 \text{ ise} \\ n+11 & -10 \leq n \leq -1 \text{ ise} \\ 9-n & -1 \leq n \leq 8 \text{ ise} \\ 0 & n > 8 \text{ ise} \end{cases}$$

Dikkat $n=-1$ için $n+11 = 9-n = 10$

SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI

İkinci Öğretim, 27.06.2005

1) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

$x(\tau) = x(\tau)\cdot u(t_1-\tau)$ $\qquad h(t) = h(t)u(t_2-t)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad h(t-\tau) = h(t-\tau)\cdot u(t_2-t+\tau)$

$\rightarrow y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot u(t_1-\tau)u(t_2-t+\tau)\,d\tau$

$\tau > t_1 \Rightarrow u(t_1-\tau) = 0$

$\tau < t-t_2 \Rightarrow u(t_2-t+\tau) = 0$

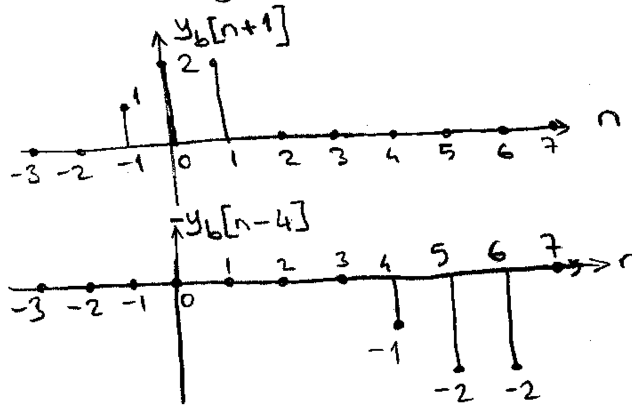
Buna göre eğer $t_1 < t-t_2$ yani $t > t_1+t_2$ ise her τ için $u(t_1-\tau)\cdot u(t_2-t+\tau) = 0$ olur. Yani,

$t > t_1+t_2 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

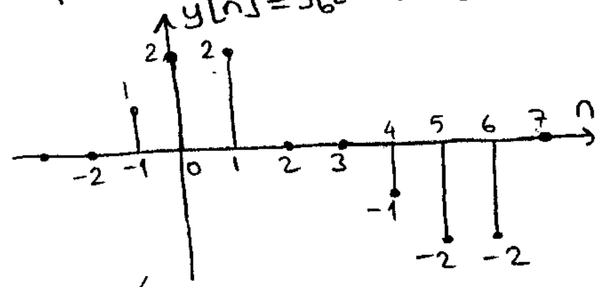
2) a) $x[n] = u[n+1] - u[n-4]$

b) x ile u arasındaki doğrusal zamanla değişmez ilişki y ile y_b arasında da vardır:

$y[n] = y_b[n+1] - y_b[n-4]$



Toplarsak: $y[n] = y_b[n+1] - y_b[n-4]$



$y[n]$: sistem çıkışı

4) Nedensellikten dolayı $t<0$ için birim darbe tepkisi $h(t)=0$

$t \geq 0$ için ise birim darbe tepkisi

$\ddot{h}(t) + 5\dot{h}(t) + 6h(t) = 0$ denklemini, $h(0)=0$, $\dot{h}(0) = \frac{3}{1} = 3$

başlangıç şartları ile sağlar.

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$

$t \geq 0$ için $\quad h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} \longrightarrow h(0) = A_1 + A_2 = 0$

$\qquad\qquad \dot{h}(t) = -2A_1 e^{-2t} - 3A_2 e^{-3t} \longrightarrow \dot{h}(0) = -2A_1 - 3A_2 = 3$

$A_2 = -A_1 \longrightarrow -2A_1 + 3A_1 = A_1 = 3 \rightarrow A_2 = -3$

$t \geq 0$ için $h(t) = 3e^{-2t} - 3e^{-3t}$

Genel olarak: $\boxed{h(t) = 3\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)}$

5) $y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = x[n]$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$n<0$ için $x[n]=0$, $y[n] = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot n \cdot 1^n = A_1 + A_2 n$

(Denklem homojen, Özel çözüm yok.)

$y[-1]=0$ şartı $n<0$ için kullanılabilir. Bir $n<0$ şartı daha bulmak için $n=-2$ için fark denklemini yazalım:

$$\underbrace{y[-2+2]}_{=y[0]=0} - 2\underbrace{y[-2+1]}_{=y[-1]=0} + y[-2] = x[-2] = 0 \longrightarrow \boxed{y[-2]=0} \text{ bulunur.}$$

$$\left.\begin{aligned} y[-1] &= A_1 - A_2 = 0 \\ y[-2] &= A_1 - 2A_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad A_1 = A_2 = 0 \text{ yani}$$

$\boxed{n<0 \text{ için} \mid y[n]=0}$ bulunur.

$0 \leq n \leq 6$ için $y_h[n] = B_1 + B_2 n$: homojen çözüm

$2 = 2 \times 1^n$ için $1 = \lambda_1 = \lambda_2$ olduğundan $y_ö[n] = c \cdot n^2 \cdot 1^n = cn^2$

$y_ö[n+2] - 2y_ö[n+1] + y_ö[n] = 2$

$c(n+2)^2 - 2c(n+1)^2 + cn^2 = 2$

$$cn^2\underbrace{(1-2+1)}_{0} + cn\underbrace{(4-4)}_{0} + c\cdot\underbrace{(4-2)}_{2} = 2 \longrightarrow c = 1 \rightarrow y_ö[n] = n^2$$

$0 \leq n \leq 6$ için $y[n] = y_h[n] + y_ö[n] = B_1 + B_2 n + n^2$

$y[0]=0$ kullanılabilir. $y[1]$'i bulmak için $n=-1$ için fark denklemi:

$$\underbrace{y[1]}_{=0 \text{ bulunur}} - 2\underbrace{y[0]}_{0} + \underbrace{y[-1]}_{0} = x[-1] = 0 \quad \left\} \begin{aligned} y[0] &= B_1 = 0 \\ y[1] &= B_1 + B_2 + 1 = 0 \end{aligned} \right\} B_2 = -1$$

$\rightarrow \boxed{0 \leq n \leq 6 \text{ için} \mid y[n] = -n + n^2} \rightarrow y[5] = 20, \; y[6] = 30$

Buradan $n>6$ için başlangıç şartları:

$n=5 \Rightarrow y[7] - 2\underbrace{y[6]}_{30} + \underbrace{y[5]}_{20} = x[5] = 2$

$\hookrightarrow y[7] = 42$

$n=6 \Rightarrow y[8] - 2y[7] + y[6] = x[6] = 2$

$\hookrightarrow y[8] = 56$

$n>6$ için $y[n] = y_h[n] = C_1 + C_2 n$

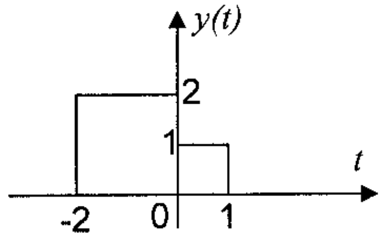
$$\left.\begin{aligned} y[7] &= C_1 + 7C_2 = 42 \\ y[8] &= C_1 + 8C_2 = 56 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} C_2 &= 14 \\ C_1 &= -56 \end{aligned}$$

$\boxed{n>6 \text{ için} \mid y[n] = -56 + 14n}$

SS-1-B-2005- CA3 ve CA4, N.Ö. ve İ.Ö. için ortaktı.

SİNYALLER VE SİSTEMLER – 1 ARASINAV SORULARI
30.04.2006 Süre:90 dakika

1. Yandaki şekilde verilen $y(t)$ sinyalini
   a) Basamak sinyaller cinsinden yazınız.**(8 puan)**
   b) Tek ve çift bileşenlerini çiziniz.**(15 puan)**
   (Süreksizlik noktalarındaki değerleri önemsemeyebilirsiniz.)



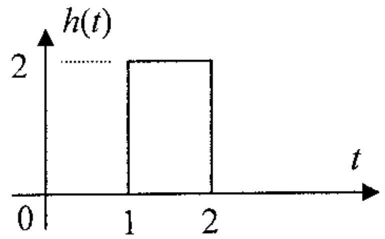
2. Girişiyle(x) çıkışı(y) arasındaki ilişki

$$y[n+1] = n \cdot x[n] + 1$$

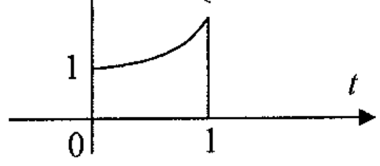
ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

3. Aşağıda verilen sinyaller periyodik midir? Periyodik olanların periyodu nedir? **(12 puan)**
   a) $h[n] = \cos(3n) + \sin(6n)$
   b) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{7}n\right) + (-1)^n$
   c) $y(t) = \cos(\sqrt{2}\, t) - \sin(3\sqrt{2}\, t)$

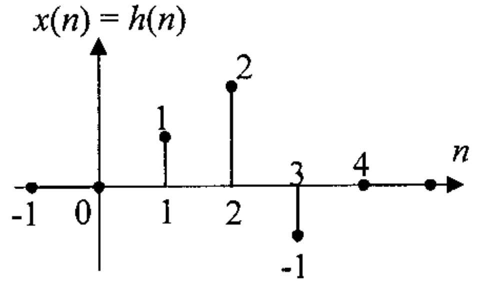
4. Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ ve sisteme uygulanan giriş $x(t)$ aşağıda gösterilmiştir. Bu girişe karşı sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Bulunuz ve çiziniz. **(25 puan)**



$$x(t) = \begin{cases} e^t & 0 < t \le 1 \\ 0 & diger \end{cases}$$



5. Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve sisteme uygulanan giriş $x[n]$ eşit olup aşağıda gösterilmiştir. Buna göre sistem çıkışı $y[n]$ ne olur? Çiziniz. **(25 puan)**



BAŞARILAR ... **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 ARASINAV CEVAP ANAHTARI:
30.4.2006

1) a) $y(t)=2u(t+2)-u(t)-u(t-1)$

Buna göre süreksizlik noktalarında: $y(-2)=2$, $y(0)=1$, $y(1)=0$ olur.

b) $y_T(t)=\dfrac{y(t)-y(-t)}{2}$: Tek bileşen

$y_Ç(t)=\dfrac{y(t)+y(-t)}{2}$: Çift bileşen

$0<t<1$ için: $y_T(t)=\dfrac{1-2}{2}=-\dfrac{1}{2}$ $\quad y_Ç(t)=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$

$1<t<2$ için $y_T(t)=\dfrac{0-2}{2}=-1$ $\quad y_Ç(t)=\dfrac{0+2}{2}=1$

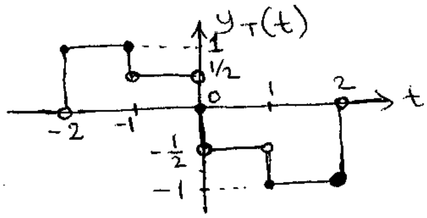
$t>2$ için $y_T(t)=\dfrac{0-0}{2}=0$ $\quad y_Ç(t)=\dfrac{0+0}{2}=1$

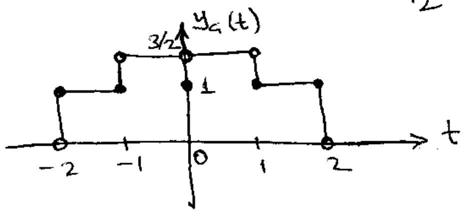
Süreksizlik noktaları için ise:

$t=0 \Rightarrow y_T(0)=\dfrac{1-1}{2}=0$ $\quad y_Ç(0)=\dfrac{1+1}{2}=1$

$t=1 \Rightarrow y_T(1)=\dfrac{0-2}{2}=-1$ $\quad y_Ç(1)=\dfrac{0+2}{2}=1$

$t=2 \Rightarrow y_T(2)=\dfrac{0-2}{2}=-1$ $\quad y_Ç(2)=\dfrac{0+2}{2}=1$





2) $y[n+1]=n\,x[n]+1 \Rightarrow y[n]=(n-1)\,x[n-1]+1$

Zamanla değişmezliği bozar ve $\lim_{n\to\infty}$ için eğer giriş sabitse $y[n]\to\infty$ yapar

Doğrusallığı bozar.

Bellekli yapar

Sonuç: Doğrusal değil
Bellekli
Nedensel
Zamanla değişen
Kararsız.

3) a) $h[n]$ periyodik değil ($3n$ veya $6n$, $2\pi n$ 'in rasyonel katı değil)

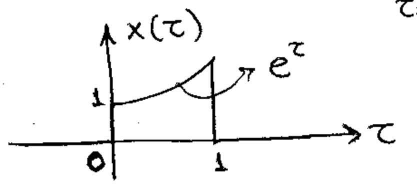
b) $\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right) \rightarrow 14$ ile periyodik, $(-1)^n \rightarrow 2$ ile periyodik

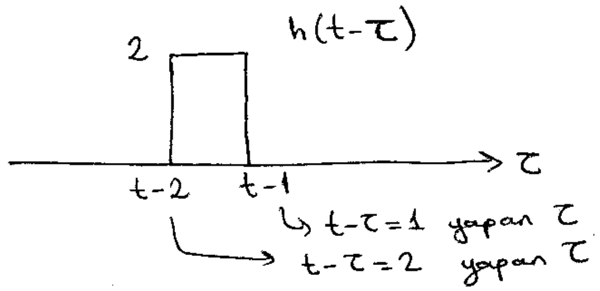
$x[n]$: $N_0=14$ ile periyodik (14 ve 2 'nin OKEK'i)

c) $\cos(\sqrt{2}t) \rightarrow \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$ ile periyodik, $=T_{01}\rightarrow$ olsun $\quad -\sin(3\sqrt{2}t)\rightarrow \dfrac{2\pi}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ ile periyodik $=T_{02}\rightarrow$ olsun

$T_{01}=3T_{02}$ (tamkatı) olduğundan $y(t)\rightarrow T_0=\sqrt{2}\pi$ ile periyodik.

4) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$





$t-1 \leq 0$ yani $\underline{t \leq 1 \text{ için:}}$

$x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için. $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$0 < t-1 \leq 1$ yani $\underline{1 < t \leq 2 \text{ için:}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{\tau} & 0 < \tau \leq t-1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^{t-1} 2e^{\tau} d\tau = 2e^{t-1} - 2e^{0}$$

$0 < t-2 \leq 1$ yani $\underline{2 < t \leq 3 \text{ için:}}$

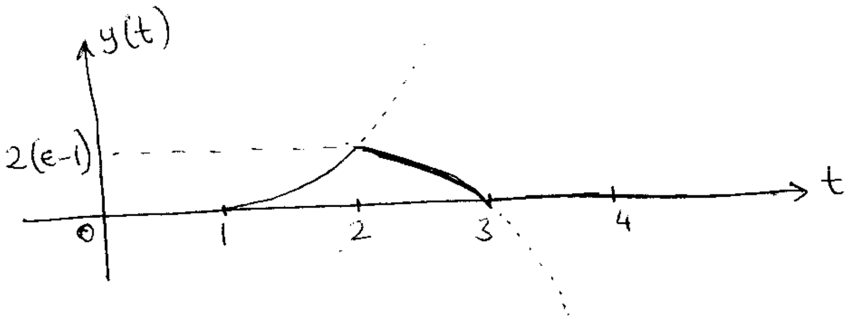
$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{\tau} & t-2 < \tau \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-2}^{1} 2e^{\tau} d\tau = 2e^{1} - 2e^{t-2}$$

$t-2 > 1$ yani $\underline{t > 3 \text{ için:}}$

$x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için. $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \text{ için} \\ 2(e^{t-1} - 1) & 1 < t \leq 2 \text{ için} \\ 2(e - e^{t-2}) & 2 < t \leq 3 \text{ için} \\ 0 & t > 3 \text{ için} \end{cases}$$

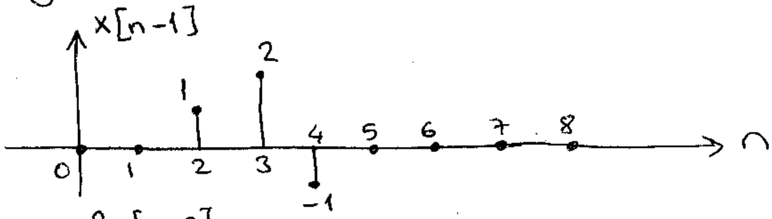


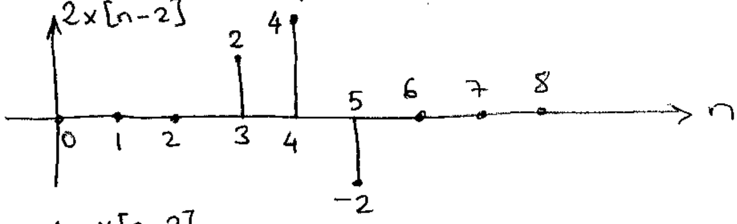
SS-1-V-2006-CA3

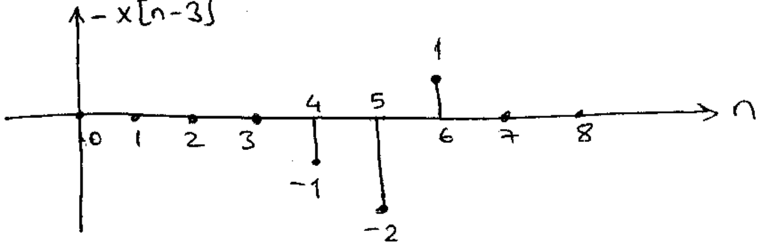
5) $h[n] = \delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] - \delta[n-3]$: Birim darbe tepkisi

δ yerine giriş (x) yazarsak h yerine çıkış (y) bulunur.

$$y[n] = x[n-1] + 2\,x[n-2] - x[n-3]$$

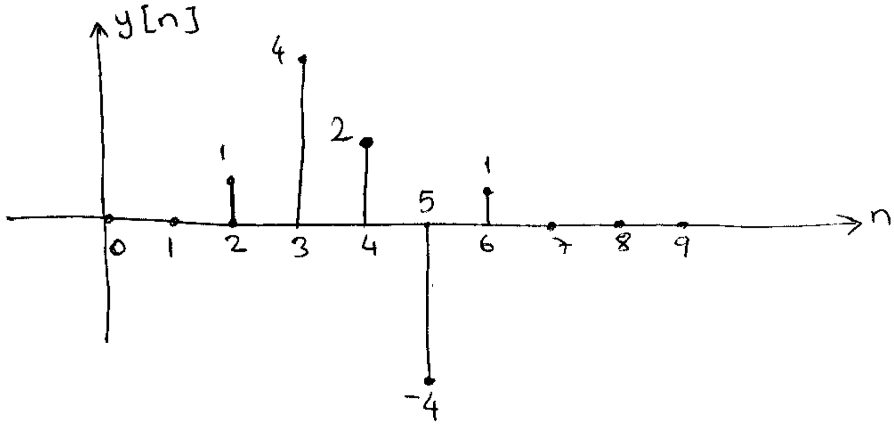






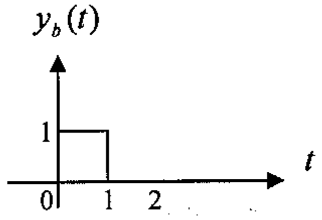
+

Toplarsak



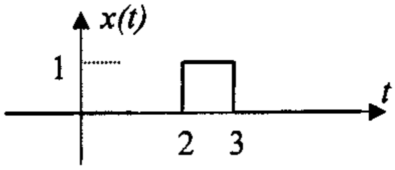
SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 FİNAL SINAVI SORULARI
22.06.2006 Normal Öğretim Süre: 90 dakika

1) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi $y_b(t)$ şöyledir:



Bu sistemin girişine yandaki şekilde verilen $x(t)$ sinyali uygulanıyor.

a) $x(t)$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (4 puan)

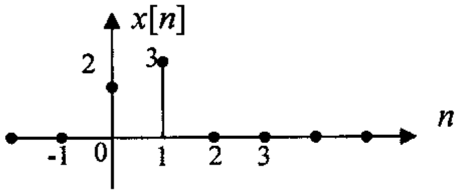


b) $x(t)$ girişi için sistemin çıkışını çiziniz. (8 puan)

c) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. (8 puan)

---

2) Yandaki şekilde verilen $x[n]$ sinyali için $x[n] * x[n+1]$ konvolüsyon işlemini hesaplayınız. (15 puan)



---

3) Birim darbe tepkisi $h(t) = e^{-t}\left(u(t) - u(t-1)\right)$ olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine $x(t) = e^{-2t}\left(u(t-2) - u(t-3)\right)$ sinyali uygulanıyor. Sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Önce bu iki sinyali çizdikten sonra çözmeye başlamanız tavsiye edilir. (25 puan)

---

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n+2] - y[n+1] + 0{,}25y[n] = 2x[n]$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. (15 puan)

---

5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$ türevsel denklemiyle tanımlanmış sistemin çıkışını, $y(0) = 0$ başlangıç şartı ve

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ ise} \\ e^{-t} & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

girişi için hesaplayınız. (25 puan)

BAŞARILAR ...

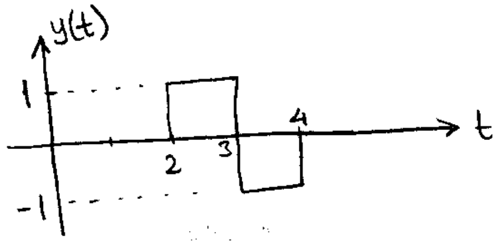
Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 FİNAL CEVAP ANAHTARI
22.06.2006 Normal Öğretim

1) a) $x(t) = u(t-2) - u(t-3)$

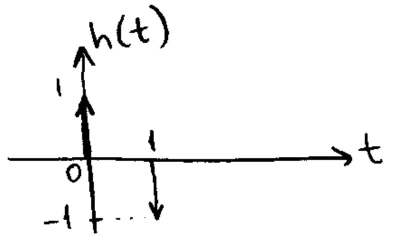
b) $y(t) = y_b(t-2) - y_b(t-3)$

(u yerine y_b yazılırsa x yerine y yazılır eğer x ile u arasındaki ilişki buradaki gibi doğrusal zamanla değişmez ise)



c) $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$ olduğu için

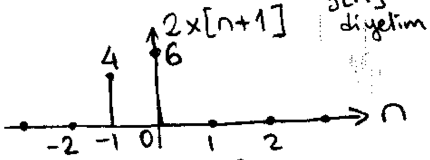
$h(t) = \dfrac{dy_b(t)}{dt}$ ile birim darbe tepkisi bulunur.

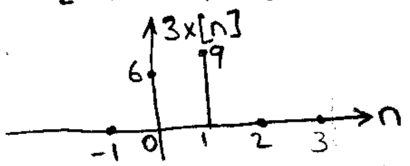


$y_b(t) = u(t) - u(t-1) \rightarrow h(t) = \dfrac{dy_b(t)}{dt} = \delta(t) - \delta(t-1) = h(t)$

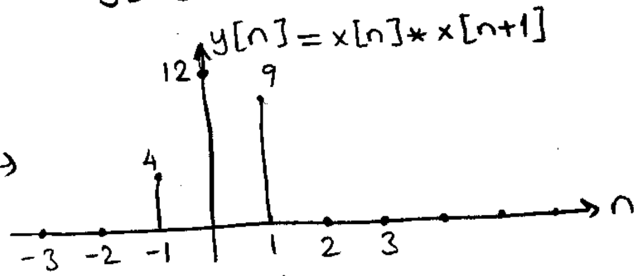
2) $\underbrace{x[n] * x[n+1]}_{y[n] \text{ diyelim}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{yalnız } k=0 \text{ ve } k=1\text{'de } \neq 0} x[n+1-k] = x[0]x[n+1-0] + x[1]x[n+1-1]$

$y[n] = 2x[n+1] + 3x[n]$

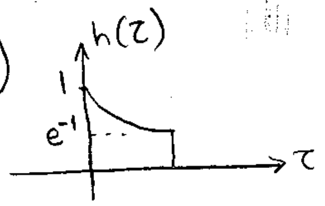


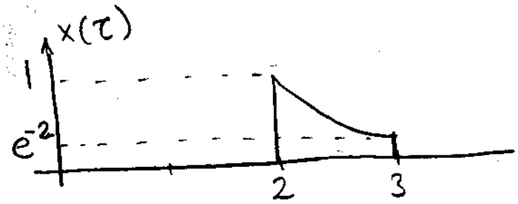


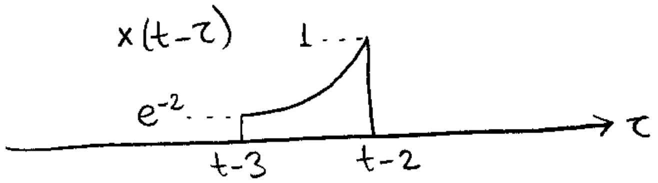
Toplamı



3)







Sistem çıkışı $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$t-2<0$ yani $t<2$ için: $h(\tau)x(t-\tau) = 0$ her τ için $\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$0 \leq t-2 < 1$ yani $\underline{2 \leq t < 3}$ için:

$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} \cdot \underbrace{e^{-2(t-\tau)}}_{= e^{-2t} \cdot e^{\tau}} & 0 \leq \tau \leq t-2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t-2} e^{-2t} \cdot e^{\tau} \, d\tau = e^{-2t} \cdot e^{\tau}\Big|_0^{t-2} = e^{-2t}\left(e^{t-2} - e^{0}\right) = \underbrace{e^{-t-2} - e^{-2t}}_{= y(t)}$$

$0 \leq t-3 < 1$ yani $\underline{3 \leq t < 4}$ için:

$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2t} \cdot e^{\tau} & t-3 \leq \tau \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-3}^{1} e^{-2t} e^{\tau} \, d\tau = e^{-2t} \cdot e^{\tau}\Big|_{t-3}^{1} = e^{-2t}\left(e^{1} - e^{t-3}\right) = \underbrace{e^{-2t+1} - e^{-t-3}}_{= y(t)}$$

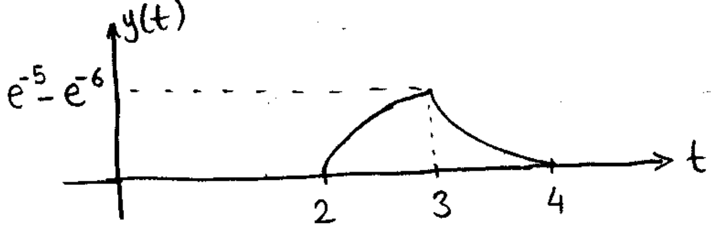
$t-3 \geq 1$ yani $\underline{t \geq 4}$ için:

$h(\tau)x(t-\tau) = 0$ her τ için $\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \text{ ise} \\ e^{-t-2} - e^{-2t} & 2 \leq t < 3 \text{ ise} \\ e^{-2t+1} - e^{-t-3} & 3 \leq t < 4 \text{ ise} \\ 0 & t \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

Sıçrama olmadığı (x veya h içinde darbe olmadığı) için, eşitlik solda veya sağda alınabilir; farketmez.



4) Karakteristik denklem: $\lambda^2 - \lambda + 0{,}25 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$

Nedensellikten, $n < 0 \Rightarrow h[n] = 0$ ve mertebe > 0 olduğundan, $h[0] = 0$

$n > 0 \Rightarrow h[n] = A_1 0{,}5^n + A_2 n \, 0{,}5^n \rightarrow$ homojen ve çakışık özdeğerli

$h[1] = 0$ ve $h[2] = \frac{2}{1} = 2$ için çözülür.

$$h[1] = A_1 \times 0{,}5 + A_2 \times 0{,}5 = 0 \rightarrow A_1 + A_2 = 0$$
$$h[2] = A_1 \times 0{,}5^2 + A_2 \times 2 \times 0{,}5^2 = 2 \rightarrow A_1 + 2A_2 = 8$$

$A_1 = -8$
$A_2 = 8$

Sonuç : $\boxed{h[n] = 8 \times (0{,}5)^n \times (n-1) \times u[n-1]}$

$\rightarrow u[n-2]$ de yazılabilirdi, farketmiyor.

5) $t<0$ için $x(t)=0$ ve $y(0)=0$ olduğu için,

$t<0 \Rightarrow y(t)=0$ olmaktadır. Yani $x(t) = e^{-t}\underline{\underline{u(t)}}$

ve $y(0)=0$ olduğu için $y(t)$ de $u(t)$ ile çarpım halinde olur.

<u>$t \geq 0$ için:</u> $\dot{y} + 2y = e^{-t} \rightarrow \lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -2$

Homojen çözüm: $y_h(t) = Ae^{-2t}$; Özel çözüm: $y_ö(t) = ce^{-t}$

$\dot{y}_ö + 2y_ö = e^{-t} \longrightarrow (-c+2c)e^{-t} = e^{-t} \rightarrow c = 1$

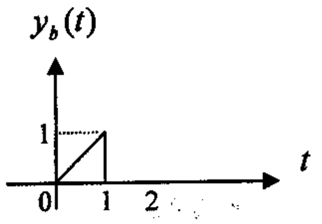
$y_ö(t) = e^{-t} \rightarrow y(t) = y_h(t) + y_ö(t)$

$y(t) = Ae^{-2t} + e^{-t}$, $\xrightarrow{t \geq 0 \text{ için,}}$ $y(0) = A + 1 = 0 \rightarrow A = -1$

$\boxed{y(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) u(t)}$ $\rightarrow$ Genel çözüm

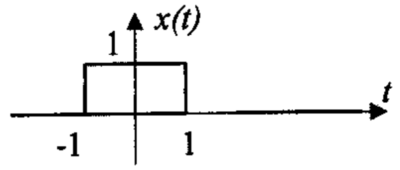
SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 FİNAL SINAVI SORULARI
22.06.2006 İkinci Öğretim Süre: 90 dakika

1) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi $y_b(t)$ şöyledir:



Bu sistemin girişine yandaki şekilde verilen $x(t)$ sinyali uygulanıyor.

a) $x(t)$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden ifade ediniz. (4 puan)

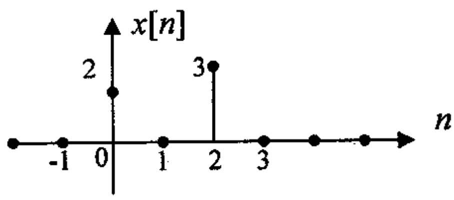


b) $x(t)$ girişi için sistemin çıkışını çiziniz. (8 puan)

c) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. (8 puan)

---

2) Yandaki şekilde verilen $x[n]$ sinyali için $x[n] * x[n-1]$ konvolüsyon işlemini hesaplayınız. (15 puan)



---

3) Birim darbe tepkisi $h(t) = e^{-2t}\big(u(t) - u(t-1)\big)$ olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine $x(t) = 2\cdot\big(u(t-2) - u(t-3)\big)$ sinyali uygulanıyor. Sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Önce bu iki sinyali çizdikten sonra çözmeye başlamanız tavsiye edilir. (25 puan)

---

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n+2] - 1{,}6y[n+1] + 0{,}64y[n] = 0{,}8x[n]$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. (15 puan)

---

5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $\dot{y}(t) + 4y(t) = x(t)$ türevsel denklemiyle tanımlanmış sistemin çıkışını, $y(0) = 0$ başlangıç şartı ve

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ ise} \\ e^{-3t} & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

girişi için hesaplayınız. (25 puan)

BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

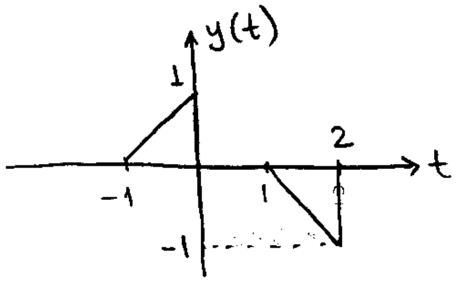
SİNYALLER VE SİSTEMLER-1 FİNAL CEVAP ANAHTARI

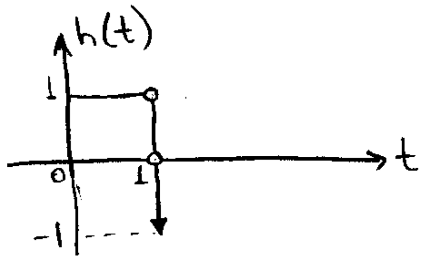
22.06.2006 İkinci Öğretim

1) a) $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$

b) $y(t) = y_b(t+1) - y_b(t-1)$

(u yerine y_b yazılırsa x yerine y yazılır eğer x ile u arasındaki ilişki doğrusal zamanla değişmez ise ki burada öyle)





c) $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$ olduğu için $h(t) = \dfrac{dy_b(t)}{dt}$ ile birim darbe tepkisi bulunur. $y_b(t) = t\cdot\left(u(t)-u(t-1)\right)$ yazılabilir.

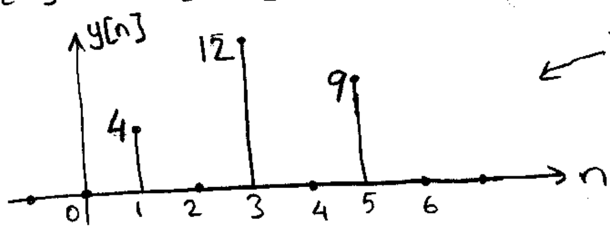
$$h(t) = \frac{dy_b(t)}{dt} = 1\cdot\left(u(t)-u(t-1)\right) + t\cdot\left(\delta(t)-\delta(t-1)\right)$$

$$t\cdot\delta(t) = 0\cdot\delta(t) = 0 \quad , \quad t\,\delta(t-1) = 1\cdot\delta(t-1)$$

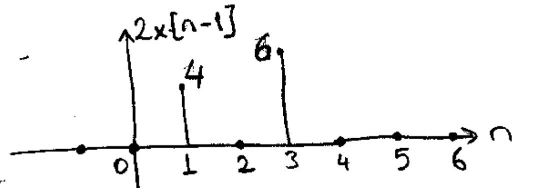
$$\rightarrow h(t) = u(t) - u(t-1) - \delta(t-1)$$

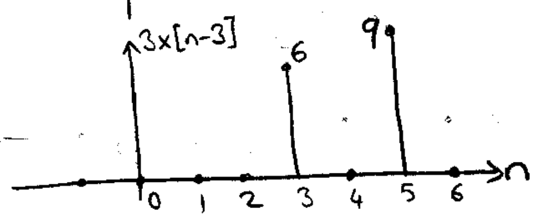
2) $\underbrace{x[n] * x[n-1]}_{y[n] \text{ olsun}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{yalnız } k=0 \text{ ve } k=2\text{'de } \neq 0} x[n-1-k] = x[0]x[n-1-0] + x[2]x[n-1-2]$

$y[n] = 2x[n-1] + 3x[n-3]$

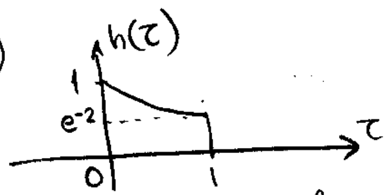


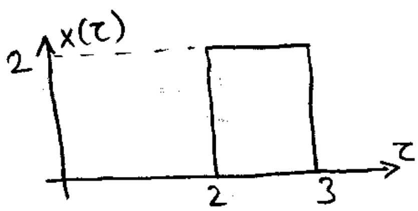
Toplamı

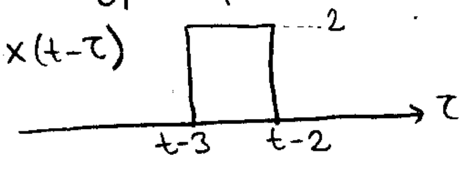




3)







SS-1-F-İ.Ö-2006-CA2

Sistem çıkışı $y(t) = x(t)*h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$

$t-2<0$ yani <u>$t<2$ için:</u>

$h(\tau)\,x(t-\tau)=0$ her τ için $\rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

$0\leq t-2<1$ yani <u>$2\leq t<3$ için:</u>

$$h(\tau)\,x(t-\tau)=\begin{cases} 2e^{-2\tau} & 0\leq\tau\leq t-2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t)=\int_0^{t-2} 2e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$y(t) = -e^{-2\tau}\Big|_0^{t-2} = 1-e^{-2(t-2)} = y(t)$$

$0\leq t-3<1$ yani <u>$3\leq t<4$ için:</u>

$$h(\tau)\,x(t-\tau)=\begin{cases} 2e^{-2\tau} & t-3\leq\tau\leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t)=\int_{t-3}^{1} 2e^{-2\tau}\,d\tau$$

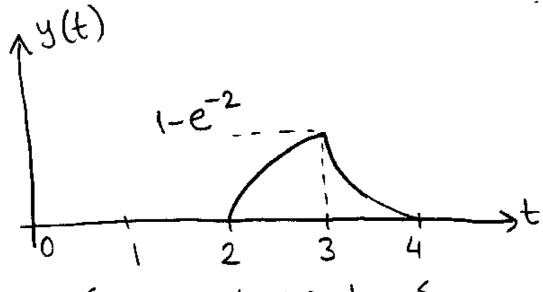
$$y(t) = -e^{-2\tau}\Big|_{t-3}^{1} = e^{-2(t-3)}-e^{-2}$$

$t-3\geq 1$ yani <u>$t\geq 4$ için:</u>

$h(\tau)\,x(t-\tau)=0$ her τ için $\rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

<u>Sonuç:</u>

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \text{ ise} \\ 1-e^{-2(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ e^{-2(t-3)}-e^{-2} & 3\leq t<4 \text{ ise} \\ 0 & t\geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$



↳ Sıçrama olmadığı (x veya h içinde δ olmadığı) için eşitlik sol ya da sağ tarafa alınabilir; farketmez.

4) Karakteristik denklem: $\lambda^2-1{,}6\lambda+0{,}64=0 \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0{,}8$

Nedensellikten, $n<0 \Rightarrow h[n]=0$ ve mertebe>0 olduğundan $h[0]=0$

$n>0 \Rightarrow h[n]=A_1\times 0{,}8^n + A_2 n\, 0{,}8^n$ → homojen ve çakışık özdeğerli

$h[1]=0$ ve $h[2]=\frac{0{,}8}{1}=0{,}8$ için çözülür.

$h[1] = A_1 \times 0{,}8 + A_2 \times 0{,}8 = 0 \longrightarrow A_1 + A_2 = 0$

$h[2] = A_1 \times 0{,}8^2 + A_2 \times 2 \times 0{,}8^2 = 0{,}8 \longrightarrow 8A_1 + 16A_2 = 10$

$A_1 = -\frac{5}{4}$

$A_2 = \frac{5}{4}$

Sonuç: $\boxed{h[n] = \frac{5}{4}(0{,}8)^n \times (n-1) \times u[n-1]}$

$u[n-2]$ de yazılabilirdi

5) $t<0$ için $x(t)=0$ ve $y(0)=0$ olduğu için $t<0$ için $y(t)=0$ 'dır. Yani $x(t) = e^{-3t}\underline{u(t)}$ olduğu ve $y(0)=0$ olduğu için $y(t)$ de $u(t)$ ile çarpım halinde olur.

<u>$t \geq 0$ için:</u> $\dot{y} + 4y = e^{-3t} \longrightarrow \lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda = -4$

$y_h(t) = A e^{-4t}$, $y_ö(t) = c\, e^{-3t}$, $y = y_h + y_ö$

$\dot{y}_ö + 4y_ö = e^{-3t} \longrightarrow (-3c + 4c)\, e^{-3t} = e^{-3t} \longrightarrow c = 1$

$y(t) = A e^{-4t} + e^{-3t} \longrightarrow y(0) = A + 1 = 0 \longrightarrow A = -1$

$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t}$ $t \geq 0$ için.

Genel olarak ise:

$\boxed{y(t) = (e^{-3t} - e^{-4t})\, u(t)}$