

BIL516 - Oyun Teorisi ve Uygulamaları

Oyunların Analizi: Nash Dengesi ve Pareto Optimum

Feyza M. Hafızoğlu
fmhafizoglu@ticaret.edu.tr

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Ajanda

- Nash Dengesi
- Pareto Optimum

Dominant stratejisiz 2-oyunculu oyun

		Player #2		
		L	C	R
Player #1	T	(0, 6)	(6, 0)	(4, 3)
	M	(6, 0)	(0, 6)	(4, 3)
	B	(3, 3)	(3, 3)	(5, 5)

- Player 2, Player 1'in T seçeceğini bilseydi, L stratejisini seçerdi.
- Player 1, Player 2'in L seçeceğini bilseydi, M stratejisini seçerdi.
- Player 2, Player 1'in M seçeceğini bilseydi, C stratejisini seçerdi.
- Player 1, Player 2'in C seçeceğini bilseydi, T stratejisini seçerdi.
- Player 2, Player 1'in B seçeceğini bilseydi, R stratejisini seçerdi.
- Player 1, Player 2'in R seçeceğini bilseydi, B stratejisini seçerdi.

Saf Strateji Nash Dengesi

Nash Dengesi (Equilibrium)

Bir strateji vektörü, $s^* = s_1^*, \dots, s_n^*$, bir **Nash dengesidir**, ancak ve ancak, tüm oyuncu i 'ler için $s_i^* \in BR(s_{-i})$ ise.

- Diğer oyuncuların stratejileri göz önüne alındığında, hiçbir oyuncu faydasını artıracak şekilde stratejisini değiştiremez.

Oyunlarda Nash Dengesi: The Prisoner's Dilemma

	<i>Defect</i>	<i>Cooperate</i>
<i>Defect</i>	(1, 1)	(5, 0)
<i>Cooperate</i>	(0, 5)	(4, 4)

- Tek Nash dengesi **(Defect, Defect)**: her iki oyuncu da itiraf eder
- Kesin domine edilen stratejilerin elenmesiyle aynı sonuç

Nash Dengesi: Coordination Game

- Yolun hangi tarafından gitmelisin?

	<i>Left</i>	<i>Right</i>
<i>Left</i>	(1, 1)	(0, 0)
<i>Right</i>	(0, 0)	(1, 1)

- İki Nash dengesi: **(Left, Left)**, **(Right, Right)**

Nash Dengesi: The Battle of the Sexes

		Woman	
		<i>Football</i>	<i>Concert</i>
Man	<i>Football</i>	(2, 1)	(0, 0)
	<i>Concert</i>	(0, 0)	(1, 2)

- İki Nash dengesi: **(Football, Football)**, **(Concert, Concert)**

Nash Dengesi: The Security Dilemma

- Tercihleri benzer iki oyuncunun **koordinasyon** oyunu.
- Eylemler: Produce Nuclear Weapons, Don't Produce Nuclear Weapons

		US	
		<i>Produce</i>	<i>Not Produce</i>
USSR	<i>Produce</i>	(2, 2)	(3, 1)
	<i>Not Produce</i>	(1, 3)	(4, 4)

- İki Nash dengesi: **(Produce, Produce), (Not Produce, Not Produce)**

Nash Dengesi: The Matching Pennies

	<i>Head</i>	<i>Tails</i>
<i>Head</i>	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
<i>Tails</i>	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

- Nash dengesi yok!

Nash Dengesi: Cournot Duopoly Competition

- Aynı ürünü üreten 2 üretici
- Her bir üretici üreteceği ürün miktarını belirliyor, $s_i \in [0, \infty]$ ($s_1 + s_2$ toplam ürün miktarı)
- Her bir üreticinin elde edeceği fayda ($kâr$) satış geliri eksi maliyet:
 - Fiyat fonksiyonu: $p(q) = \max(0, 2 - s_1 - s_2)$
 - Ürün maliyetleri: c_1 ve c_2
 - Faydalar: $u_i(s_1, s_2) = s_i p(s_1 + s_2) - c_i s_i$

Nash Dengesi: Cournot Duopoly Competition

- $u_1(s_1, s_2) = s_1(2 - s_1 - s_2) - s_1c_1 = s_1(2 - s_1 - s_2 - c_1)$
- Birinci üreticinin en iyi tepkisi (best response):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial s_1}(s_1, s_2) &= 0 \\ s_1 &= \frac{2 - c_1 - s_2}{2}\end{aligned}\tag{1}$$

- $u_2(s_1, s_2) = s_2(2 - s_1 - s_2) - s_2c_2 = s_2(2 - s_1 - s_2 - c_2)$
- İkinci üreticinin en iyi tepkisi (best response):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial s_2}(s_1, s_2) &= 0 \\ s_2 &= \frac{2 - c_2 - s_1}{2}\end{aligned}\tag{2}$$

Nash Dengesi: Cournot Duopoly Competition

- Denklem (1) ve (2) çözüldüğünde:

$$s_1^* = \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3}$$
$$s_2^* = \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3}$$

- Varsayım: $c_1 = c_2 = 1$:
- Tek Nash dengesi:

$$s_1^* = s_2^* = \frac{1}{3}$$
$$u_1(s_1^*, s_2^*) = u_2(s_1^*, s_2^*) = \frac{1}{9}$$

Nash Dengesinin Özellikleri

- İstikrar (stability)
- Kendi kendini gerçekleştiren bir anlaşma
- Denge ve gelişim (evolution)
- Normatif açıdan denge
- Kesin domine edilen stratejilerin elenmesiyle elde edilen sonuç aynı zamanda Nash dengesidir.
- Nash dengesi, oyunların analizinde nihai ve her şeye yeten değildir.
 - Örnek: Birden çok Nash dengesinin olması, hiç denge olmaması, Nash dengesinin iyi bir tavsiye olmaması

Oyunların Analizi

- Oyunları **dışarıdan** bir gözle inceleyelim
- Dışarıdan bir gözlemcinin bakış açısından, bir oyunun bazı sonuçları diğerlerinden **daha iyi** olabilir mi?
 - Bir oyuncunun çıkarlarının diğerininkinden daha önemli olduğunu söyleyemeyiz
 - Mesela, her bir oyuncunun faydasını ifade etmek için hangi birimin kullanıldığını bilmediğinizde kazanımı en üst düzeye çıkaran sonucu bulmaya çalıştığınızı düşünün
- Hâlâ bir sonucu diğerine tercih edebileceğimiz durumlar var mı?

Oyunların Analizi

- **Fikir:** Bazen bir o sonucu her oyuncu için en az başka bir o' sonucu kadar iyidir ve o sonucunu o' sonucuna kesin olarak tercih eden bir oyuncu vardır.
 - Bu durumda, o sonucunun o' sonucundan daha iyi olduğunu söylemek mantıklıdır.
 - o sonucu, o' sonucunu **Pareto-domine** eder.

Pareto-optimum

Bir o^* sonucu **Pareto-optimumdur**, ancak ve ancak, o^* 'ı Pareto-domine eden başka bir sonuç yoksa.

- Bir oyunun birden fazla Pareto-optimum sonucu olabilir mi?
- Her oyunun en az bir Pareto-optimum sonucu var mı?

Oyunlarda Pareto Optimum Sonuçlar

	D	C
D	(1, 1)	(5, 0)
C	(0, 5)	(4, 4)

The Prisoner's Dilemma

	$Left$	$Right$
$Left$	(1, 1)	(0, 0)
$Right$	(0, 0)	(1, 1)

Coordination Game

	F	C
F	(2, 1)	(0, 0)
C	(0, 0)	(1, 2)

Battle of the Sexes

	$Head$	$Tails$
$Head$	(1, -1)	(-1, 1)
$Tails$	(-1, 1)	(1, -1)

The Matching Pennies

- The Prisoner's Dilemma paradoksu: Nash dengesi, Pareto-optimum olmayan tek sonuçtur!

Örnek

	L	M	R
U	$(3, 8)$	$(2, 0)$	$(1, 2)$
D	$(0, 0)$	$(1, 7)$	$(8, 2)$

- Dominant strateji dengesi?
- Nash dengesi?

Örnek

	L	M	R
U	$(6, 6)$	$(10, 7)$	$(3, 9)$
M	$(7, 10)$	$(8, 11)$	$(1, 10)$
D	$(9, 3)$	$(7, 1)$	$(0, 0)$

- Nash dengesi?
- Pareto optimum?

Örnek

	α	β	γ
A	$(-1, 8)$	$(5, 12)$	$(6, 6)$
B	$(0, -6)$	$(8, 0)$	$(8, -3)$
C	$(2, 2)$	$(5, -1)$	$(9, 1)$

- Nash dengesi?
- Pareto optimum?

Yıpratma Savaşı

- İki oyuncu arasında bir nesne ile ilgili anlaşmazlık söz konusudur.
 - i oyuncusu, $i \in \{1, 2\}$, için nesnenin değeri $v_i > 0$ 'dır.
 - Zaman, 0'dan başlayan ve sonsuza kadar çalışan sürekli bir değişken olarak modellenir.
 - Herbir oyuncu, nesneyi diğer oyuncuya ne zaman teslim edeceğini seçer: t_1 ve t_2
 - t zamanında vermeyi kabul eden ilk oyuncu bunu yaparsa, diğer oyuncu o anda nesneyi alır (Daha erken teslim zamanı seçen oyuncu, nesneyi diğer oyuncuya teslim etmiş olur ve oyun sonlanır).
 - Her iki oyuncu da aynı anda kabul ederse, nesne aralarında eşit olarak bölünür: oyuncu i , $v_i/2$ 'lik bir fayda elde eder.
 - Zaman değerlidir: ilk kabul edilene kadar her oyuncu zaman birimi başına bir birim kazanç kaybeder.
1. Yıpratma savaşı oyununu **stratejik formda** (oyuncular, eylemler, fayda fonksiyonları) *belirtiniz*.
 2. **Nash dengelerini** (varsa) *bulunuz*.

Yıpratma Savaşı Çözüm

- $N = \{1, 2\}$
- Her oyuncu, nesneyi diğer oyuncuya teslim etme zamanını seçer: t_1, t_2
- Fayda fonksiyonu:

$$u_i(t_1, t_2) = \begin{cases} -t_i & \text{eger } t_i < t_j \\ v_i/2 - t_i & \text{eger } t_i = t_j \\ v_i - t_j & \text{eger } t_i > t_j \end{cases}$$

- İki Nash dengesi mevcut:
 1. $0 = t_1 < t_2$ ve $t_2 > v_1$
 2. $0 = t_2 < t_1$ ve $t_1 > v_2$