

Série d'exercice N° 1 (Semestre n° 1)

Exercice 1 :

Donner et justifier la valeur de vérité de chacune des proposition suivantes puis déterminer leur négation:

$$p_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0)$$

$$p_3 : (\forall n \in \mathbb{N})(\frac{n}{2} \in \mathbb{N})$$

$$P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}) ; |23x - 123| > 0$$

$$P_7 : (\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(x) = 2x$$

$$p_2 : (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 - 2 = 0)$$

$$p_4 : (\forall x \in \mathbb{R})(-1 \leq \sin(x) \leq 1)$$

$$P_6 : (\exists n \in \mathbb{N}) ; 4n + 2n^2 = -5$$

$$P_8 : (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\exists y \in \mathbb{R}^+) ; x + y > 6$$

Exercice 2 :

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 \geq 0$$

$$P_3 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 \geq 5y$$

$$P_5 : (\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) ; a^2 + 4b^2 \geq 4ab$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) ; x^2 \leq 0$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) ; x + y > 3$$

$$P_6 : (\exists x \in \mathbb{R}^{*+}) ; x + \frac{1}{x} < 4$$

Exercice 3 :

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P : (\forall \varepsilon > 0) ; |a| < \varepsilon \implies a = 0$$

$$Q : (\forall x \in \mathbb{R}) ; x \geq 2 \implies x^2 \geq 4$$

Exercice 4 :

En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

$$3) (\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{N}^*) ; nm = 1 \implies n = 1 \text{ et } m = 1$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) ; (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies (xy + 1 \neq x + y)$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})(\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) ; (x \neq y \implies (\frac{2x+1}{x-1} \neq \frac{2y+1}{y-1}))$$

$$4) \text{ Montrer que : } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (x \neq \frac{3y}{2} \implies \frac{3y}{3y+4} \neq \frac{2x}{2x+4})$$

Exercice 5 :

$$1) \text{ Montrer que } (\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})(\forall z \in \mathbb{R}^{*+}) ; (xy\sqrt{z} < xz\sqrt{y} < yz\sqrt{x}) \iff x < y < z$$

$$2) \text{ Montre que } (\forall (a, b) \in]2, +\infty[^2), a^2 = 4a + b^2 - 4b \implies a = b$$

$$4) \text{ Montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R}_+) (\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 2 \iff x = \frac{1}{16})$$

$$5) \text{ Montrer que : } (\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}) (3x + 2y + z = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 14}{2} \implies x = 3 \text{ et } y = 2 \text{ et } z = 1)$$

Exercice 6 :

$$1) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R}^2 \text{ l'équation: } (2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y) . (\text{Indication le cas si } (x < 1 \text{ ou } y < 4) \text{ et le cas si } (x \geq 1 \text{ et } y \geq 4))$$

$$2) \text{ Montrer par l'absurde que : } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$3) \text{ Montrer que : } (\forall n \in \mathbb{N})(4^n \geq 3n + 1)$$

$$4) \text{ Montrer que : } (13)^n - (5)^n \text{ est divisible par } 8 \text{ } (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$5) \text{ Montrer que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*)(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2})$$

$$6) \text{ Montrer que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*)(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq 2 - \frac{1}{n})$$