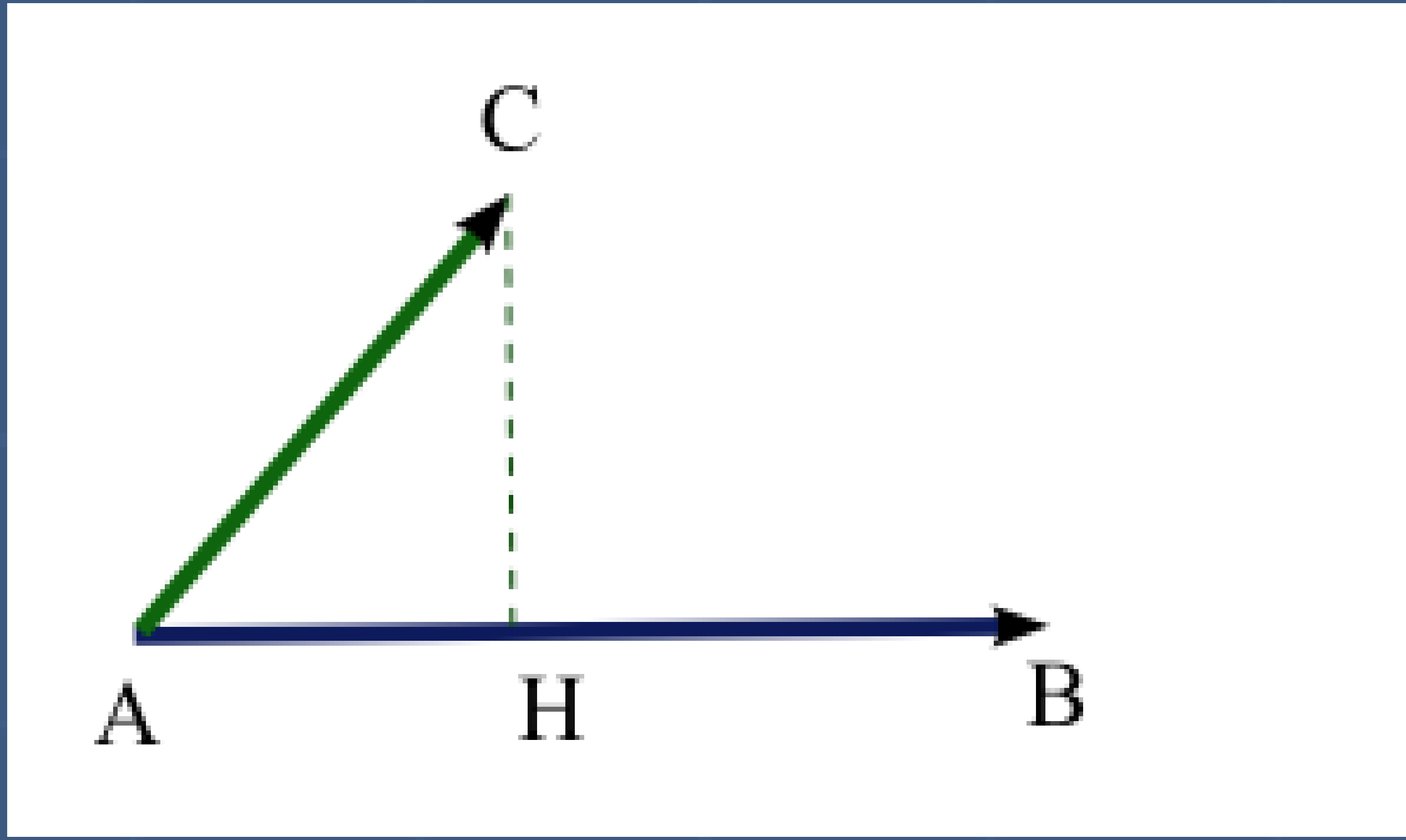
Tron commun

PRODUIT SCALAIRE

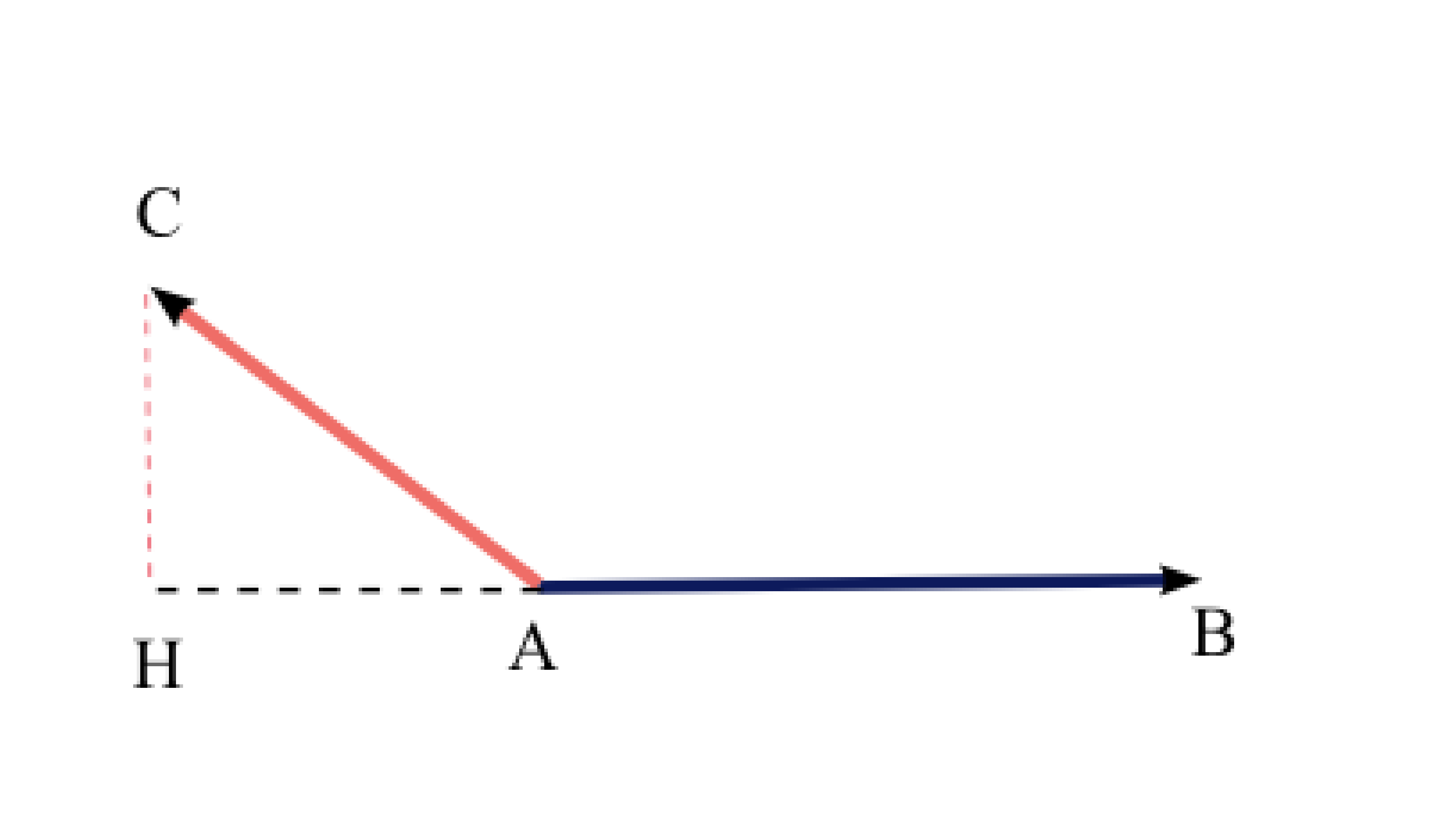
I) Produit scalaire de deux vecteurs

cas1



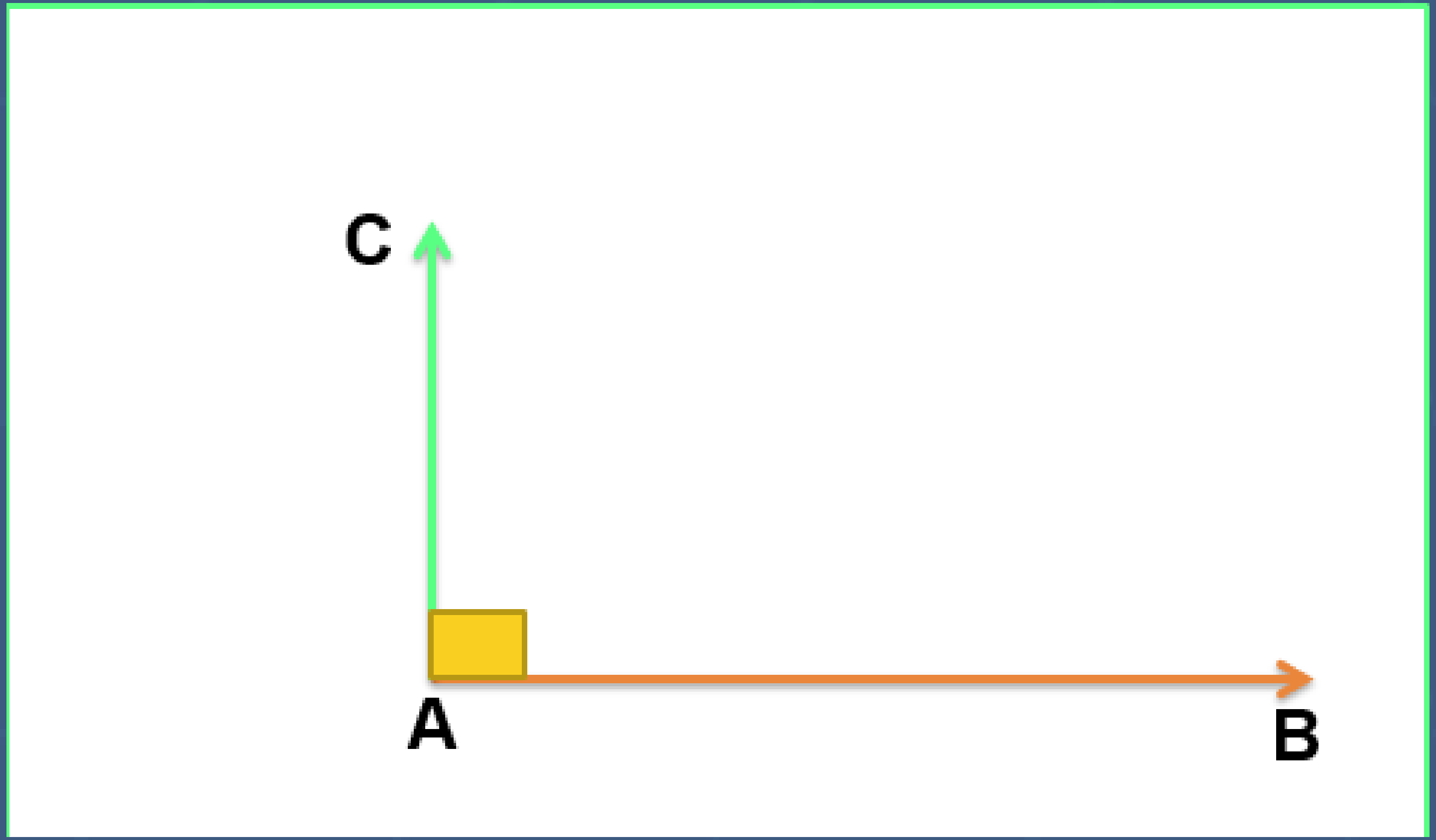
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

cas2



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

Cas 3



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ =AB x AA= 0

Définition:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan P tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

On appelle le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur (AB)

  - Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont **le même sens** alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB \times AH$$

  - Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont **deux sens contraires** alors:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB \times AH$$

La norme d’un vecteur:

- $\vec{u}\,.\,\vec{u}$ = AB x AB=AB^2
- $\vec{u}\,.\,\vec{u} = ||\,\vec{u}||^2$
- $||\,\vec{u}||=\sqrt{||\,\vec{u}||^2} = \sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}}$
- On pose $\overrightarrow{(u)}^2 = \vec{u}\,.\,\vec{u}$ (Le carré scalaire de $\vec{u}$)

Donc AB^2= $\overrightarrow{AB}^2 = ||\,\overrightarrow{AB}||^2$

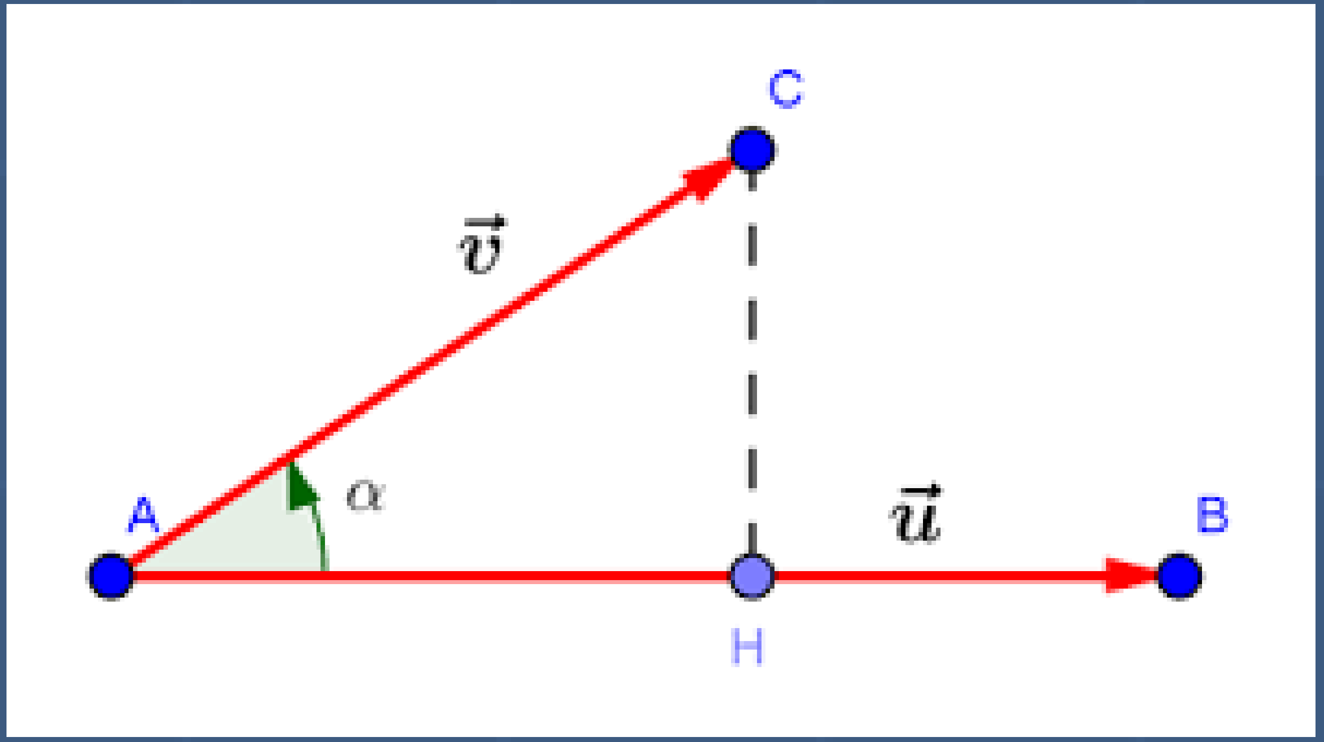
Formule trigonométrique du produit scalaire:

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC} = \alpha$

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\alpha$$

ou encore

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$



Propriétés:

1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

On dit que le produit scalaire est **Symétrique**

2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout k∈ $\mathbb{R}$, on a :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\, \vec{u} \cdot \vec{v}$

On dit que le produit scalaire est **bilinéaire**

Les identités remarquables:

Quels que soit deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ on a:

- ❖ $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- ❖ $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- ❖ $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Deux vecteurs orthogonaux

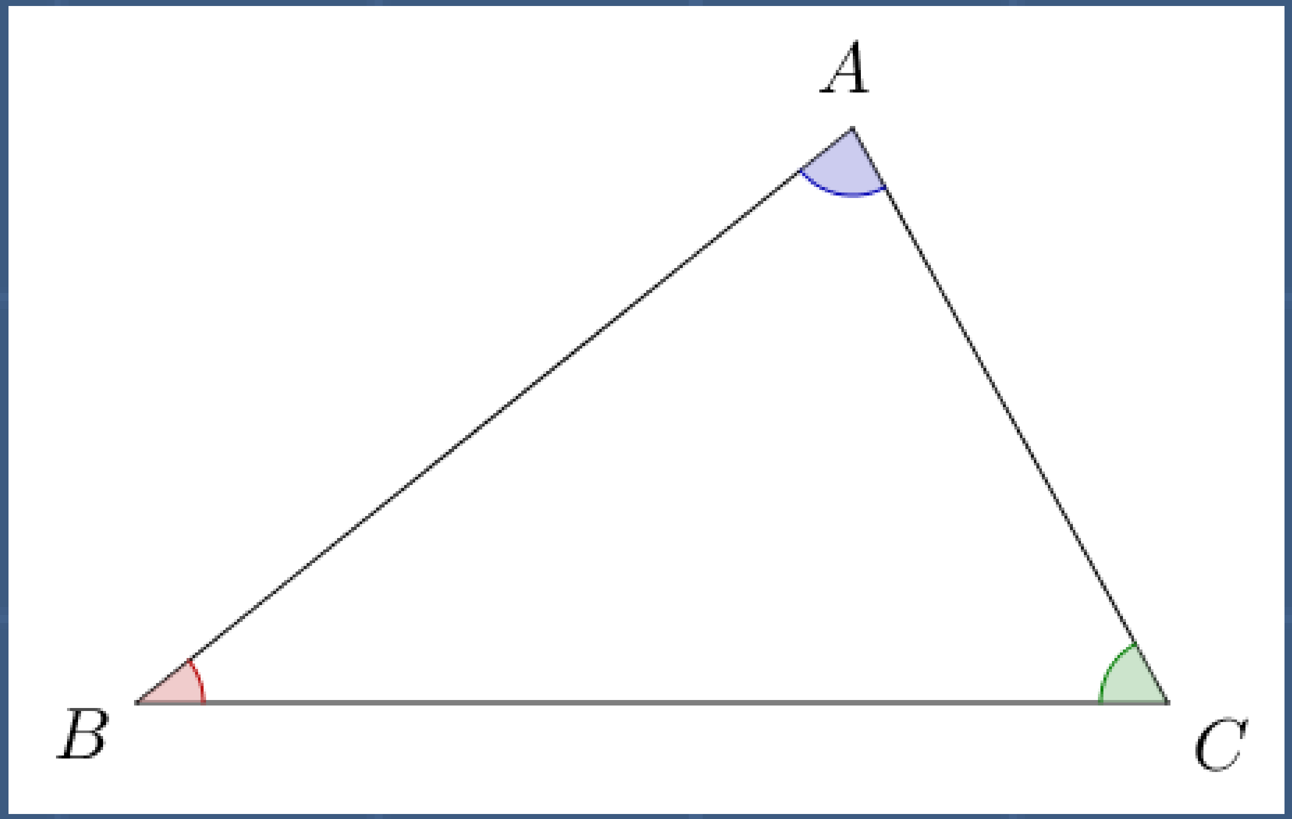
- **Pour que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** soient **orthogonaux il faux et il suffit que $\vec{u}.\vec{v}=0$**

II) Applications du produit scalaire

Les relations métriques dans un triangle

Soit ABC un triangle. On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

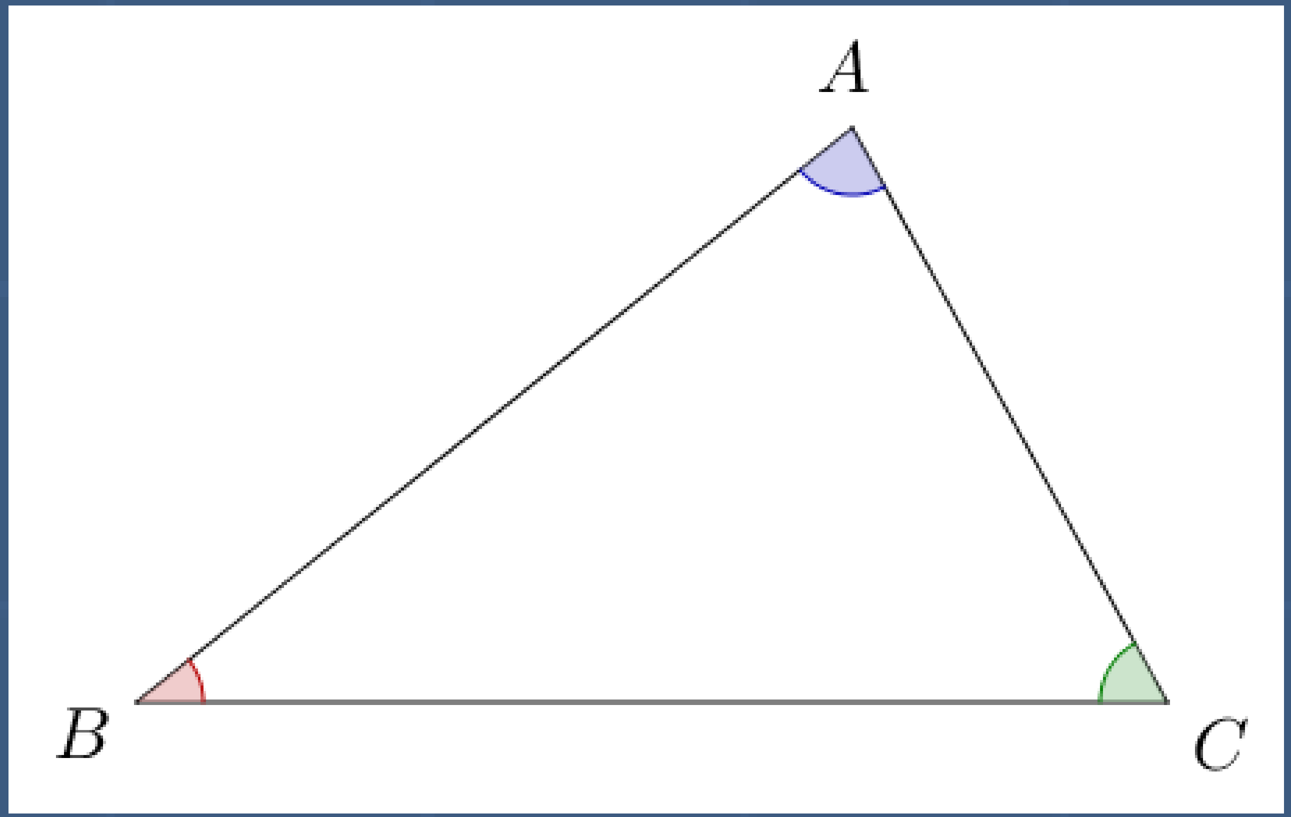


Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle on a:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABACcos(\hat{A})$

Autrement dit : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



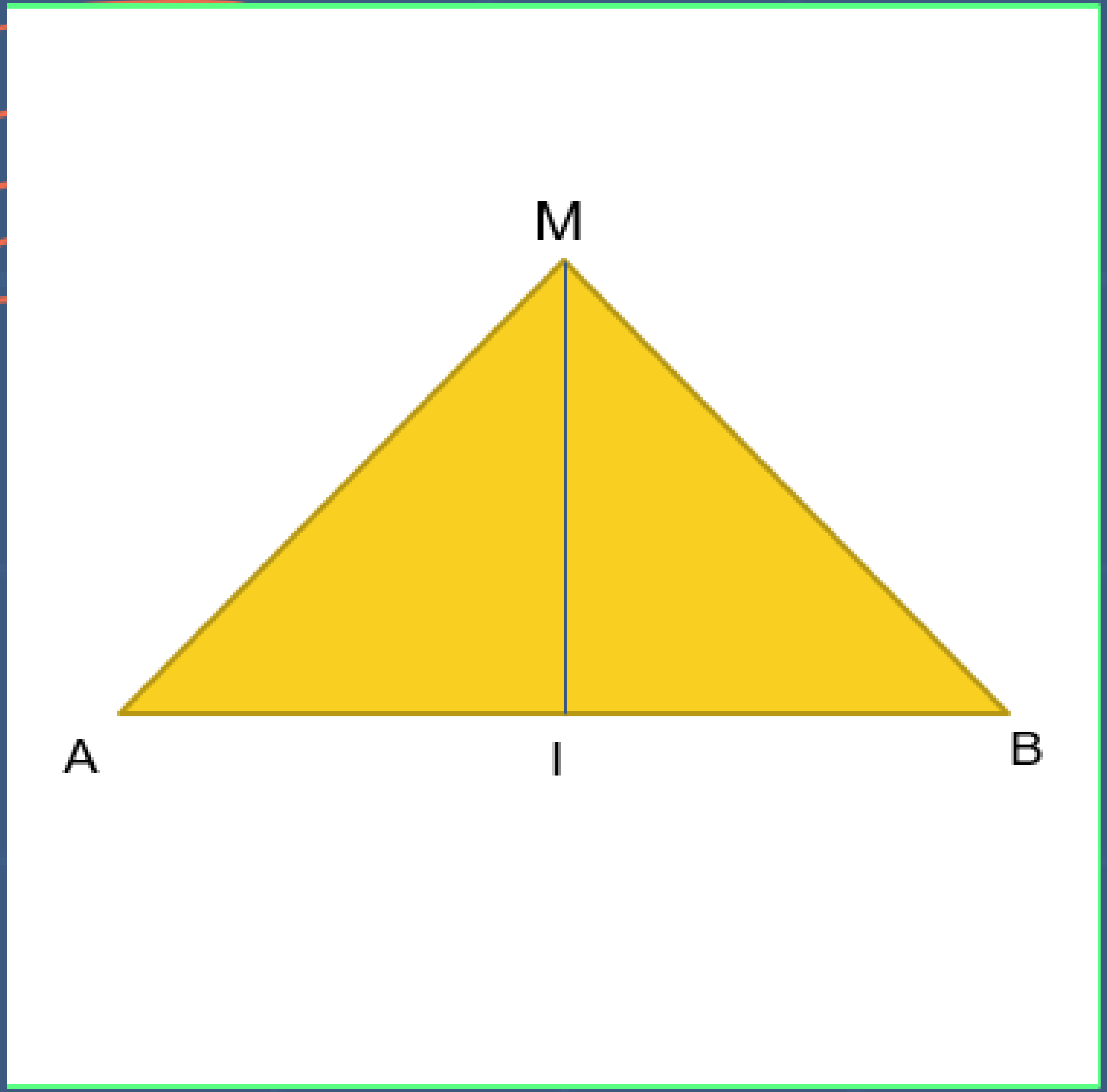
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BCACcos(\hat{C})$

Autrement dit : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BCABcos(\hat{B})$

Autrement dit : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Théorème de la médiane



Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB].Soit M un point du plan P.

On a les égalités suivantes:

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
- $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$