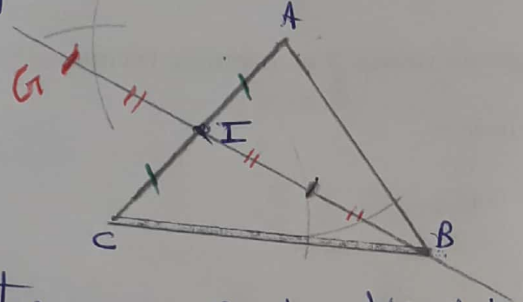
Devoir surveillé N°2 (correction)

Exercice 1 :

1) On a : $I = bary\{(A,3),(C,3)\}$
alors I est le milieu du segment $[AB]$
car le poids du point A et du point B
sont égaux.



2) Montrons que : $G = bary\{(B,-1),(I,3)\}$

On a : $G = bary\{(A,3),(B,-2),(C,3)\}$

et On a : $I = bary\{(A,3),(C,3)\}$

alors $G = bary\{(I,3+3),(B,-2)\}$

$= bary\{(I,6),(B,-2)\}$

$\Leftrightarrow 6\vec{GI} - 2\vec{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (6\vec{GI} - 2\vec{GB} = \vec{0}) \times (\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow 3\vec{GI} - \vec{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow G = bary\{(I,3),(B,-1)\}$

3) Montrons que $G \notin [IB]$ et $G \in (IB)$

On a : $G = bary\{(I,3),(B,-1)\}$

et puisque $3 \times (-1) = -3 < 0$

alors $G \notin [IB]$ et $G \in (IB)$

4) On a : $G = bary\{(I,3),(B,-1)\}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GI} - \vec{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GI} - \vec{GI} - \vec{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\vec{GI} = \vec{IB}$

$\Leftrightarrow \vec{GI} = \frac{1}{2}\vec{IB}$

5) Montrons que : $K = bary\{(A,3),(B,-2)\}$

On a : $\vec{AK} = 2\vec{BA}$

$\Leftrightarrow \vec{AK} - 2\vec{BA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AK} - 2\vec{BK} - 2\vec{KA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\vec{KA} - 2\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -3\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{KA} - 2\vec{KB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow K = bary\{(A,3),(B,-2)\}$

6) On a : $K = bary\{(A,3),(B,-2)\}$

et $G = bary\{(A,3),(B,-2),(C,3)\}$

alors $G = bary\{(K,3+(-2)),(C,3)\}$

$= bary\{(K,1),(C,3)\}$

$\Leftrightarrow \boxed{G \in (KC)}$

et On a : $G = bary\{(B,-1),(I,3)\}$

alors $\boxed{G \in (BI)}$.

d'où : les droites (CK) et (BI)
sont sécantes en G.

7) Les coordonnées du point G.

On a : G barycentre des points pondérés
$(A,3)$, $(B,-2)$ et $(C,3)$

et On a : $A(1,1)$, $B(-1,2)$ et $C(1,-1)$

alors :

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

$$\Leftrightarrow G\left(\frac{3\times1 - 2\times(-1) + 3\times1}{3-2+3} ; \frac{3\times1 - 2\times2 + 3\times(-1)}{3-2+3}\right)$$

$\Leftrightarrow G(2,-1)$.

8)

On a : $\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = \|\vec{AB} + \vec{BC}\|$

puisque $G = bary\{(A,3),(B,-2),(C,3)\}$

alors d'aprés la propriété caractéristique

$3\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = (3-2+3)\vec{MG}$

$= 4\vec{MG}$

alors : $\|4\vec{MG}\| = \|\vec{AC}\|$

$\Leftrightarrow 4MG = AC \Leftrightarrow MG = \frac{1}{4}AC$

d'où l'ensemble des points est un cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{4}AC$

9)

On a : $\vec{u} = \vec{MA} + \vec{AB} + 2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{BA} - \vec{MB}$

$= \vec{MA} + 2\vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BA} - \vec{MB} - \vec{MB}$

$= 3\vec{MA} + \vec{AA} - 2\vec{MB}$

$= 3\vec{MA} - 2\vec{MB}$

et on a : $K = bary\{(A,3),(B,-2)\}$

alors d'aprés la propriété caractéristique

$3\vec{MA} - 2\vec{MB} = (3+(-2))\vec{MK}$

$= \vec{MK}$

alors : $\vec{u} = \vec{MK}$

et on a : $\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{MA} - \frac{1}{2}\vec{MB} + \frac{3}{4}\vec{MC}$

$= \frac{1}{4}(3\vec{MA} - 4\times\frac{1}{2}\vec{MB} + 3\vec{MC})$

$= \frac{1}{4}(3\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC})$

$= \frac{1}{4}(4\vec{MG}) = \vec{MG}$

car $G = bary\{(A,3),(B,-2),(C,3)\}$

d'où $\vec{v} = \vec{MG}$

et par suite : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

$\Leftrightarrow \|\vec{MK}\| = \|\vec{MG}\|$

$\Leftrightarrow MK = MG$

$\Rightarrow$

d'où : l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[GK]$

Exercice 2 :

1) $\vec{AB}(-2;-2)$; $\vec{AC}(-2;0)$

2) On a : $AB = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$

donc : $\cos(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\times\|\vec{AC}\|}$

$= \frac{-2\times(-2)+(-2)\times 0}{2\sqrt{2}\times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \frac{\det(\vec{AB},\vec{AC})}{\|\vec{AB}\|\times\|\vec{AC}\|}$

$= \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{2\sqrt{2}\times 2}$

$= \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3)

On a : $\cos(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pm\frac{\pi}{4})$

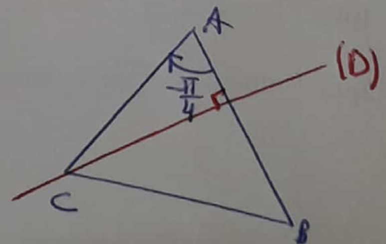
et $\sin(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4})$

donc : $(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{AC})| = \frac{1}{2}|-4|$

$= 2$

5) L'equation cartésienne de (D), la hauteur du triangle ABC passant par C.



Soit $M(x,y) \in (D)$.

$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0$

$\Leftrightarrow (x-x_c)\times(-2) + (y-y_c)\times(-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\times(-2) + (y-3)\times(-2) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 2 - 2y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 2y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 8 = 0$

6)

On a : $d(A,(D)) = \dfrac{|2x_A + 2y_A - 8|}{\sqrt{2^2+2^2}}$

$= \dfrac{|2\times3 + 2\times3 - 8|}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

7) On a : $\{M(x;y) : x^2 - 4x + y^2 - 4y + 6 = 0\}$

donc :

$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 - 8 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 = \sqrt{2}^2$

$\Leftrightarrow$ l'ensemble des points M est : $\mathcal{C}(\Omega(2,2); R=\sqrt{2})$

et on a : $AB = 2\sqrt{2}$

donc : $\dfrac{AB}{2} = \sqrt{2}$

et on a : $(x_A-2)^2 + (y_A-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow (3-2)^2 + (3-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow 1 + 1 = 2$ donc $A \in (\mathcal{C})$

et on a : $(x_B-2)^2 + (y_B-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow (1-2)^2 + (1-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow B \in (\mathcal{C})$

alors : l'ensemble des points M est un cercle de centre $\Omega(2,2)$ et de diamétrtre $[AB]$

Exercice 3

1) On a : $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5 = \sqrt{5}^2$

$\Leftrightarrow (\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ est un cercle de centre $\Omega(-2,1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$

2) une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$:

On a $\mathcal{C}(\Omega(-2,1), R = \sqrt{5})$

alors : $(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = -2 + \sqrt{5}\cos(\theta) \\ y = 1 + \sqrt{5}\sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$

3) On a $A(-1,-1)$

donc : $(-1+2)^2 + (-1-1)^2 = 5$

$\Leftrightarrow 1 + 4 = 5 \Leftrightarrow A \in (\mathcal{C})$

4) Résoudre graphiquement le système :

$$S : \begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$$

On a : $S : \begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-2x+1-1+y^2+2y+1-1-7<0 \\ -y \geq -x \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2<9 \\ y \leq x \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}) : (x-1)^2+(y+1)^2=9$ le cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon $R=3$

donc les solution de l'inéquation : $(x-1)^2+(y+1)^2<9$ sont les points situés à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$

et soit (D) la droite d'équation $(D) : y=x$

alors les solution de l'inéquation $y \leq x$ sont les points situés au-dessous de la droite (D).

Ainsi : les solution du système (S) est la partie colorée dans la figure ci-dessous.