

Série d'exercice N° 3 (Semestre n° 1)

Exercice 1 :

1) Étudier la position relative du cercle (C) et de la droite (D) dans chaque cas, et déterminer les coordonnées des points d'intersection s'il existe :

$$\begin{array}{l|l|l} (C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 & (C) : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 2 & (C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0 \\ (D) : 2x - y = 0 & (D) : x - y - 2 = 0 & (D) : x + y - 3 = 0 \end{array}$$

2) Vérifier que A appartient au cercle (C) et déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle (C) en A dans les cas suivants :

$$\begin{array}{l|l|l} A(0;0) & A\left(\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right) & A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ (C) : x^2 + y^2 + x - 2y = 0 & (C) : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 & (C) : x^2 + y^2 + 5 = 6 \end{array}$$

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{n+1}{4n} U_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ U_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$

et (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{U_n}{n}$
Calculer : U_2, U_3, U_4 et U_5 et V_1, V_2, V_3, V_4 et V_5

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{3n-2}{4n+1}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < \frac{3}{4}$. | 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq -2$.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 3, & n \in \mathbb{N}, \\ U_0 = 2. \end{cases}$

On pose $V_n = U_n - 7$.

- 1) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et déterminer sa raison ainsi que son premier terme.
- 2) Déterminer V_n en fonction de n .
- 3) En déduire U_n en fonction de n .
- 4) Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^{10} V_k$.

Exercice 5 :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{7U_n - 25}{U_n - 3}, & n \in \mathbb{N} \\ U_0 = 2 \end{cases}$

- 1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \neq 5$
- 2) On pose $V_n = \frac{1}{U_n - 5}$
- a) Montrer que : (V_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

- b) Déterminer V_n en fonction de n .
- c) Dédire U_n en fonction de n .
- d) Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^{10} V_k$

Exercice 6 :

Soit la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2+U_n^2}{2+U_n} \end{cases}$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq 1$.
- 2) Étudier la monotonie de la suite (U_n) .
- 3) Dédire que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq 2$.
- 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1)$.
- 5) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n - 1 \leq (\frac{2}{3})^n$.
- 6) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : S_n \leq n + 3(1 - (\frac{2}{3})^n).$$

- 7) On pose $T_n = \sum_{k=0}^n 2^k U_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : T_n \geq 2^{n+1} - 1$$

Exercice 7 :

Soit la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{U_n + 5} \end{cases}$

- 1) Calculer U_1 et U_2
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > -1$.
- 3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n+1)(U_n+3)}{U_n+5}$.
- 4) Étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 5) Dédire que : $\forall n \in \mathbb{N} : -1 < U_n \leq 0$
- 6) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \frac{U_n+1}{U_n+3}$
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et calculer le premier terme V_0 .
 - b) Écrire V_n en fonction de n .
- c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{2})^n - 1}$
- d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}(U_n + 1)$
- e) Dédire que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n + 1 \leq (\frac{1}{2})^n$