

y

Tronc commun

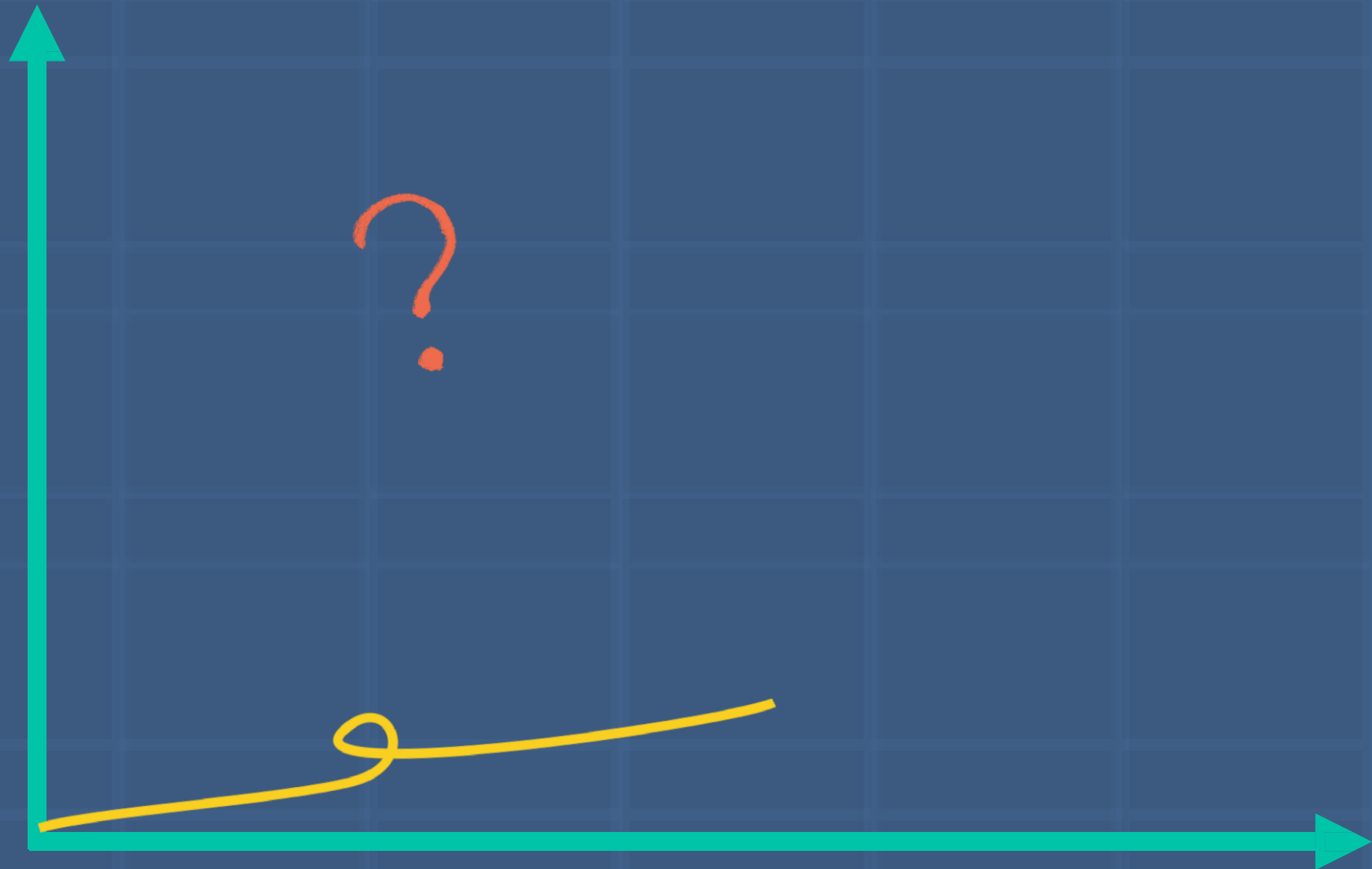
# *PRODUIT SCALAIRE*

?

?

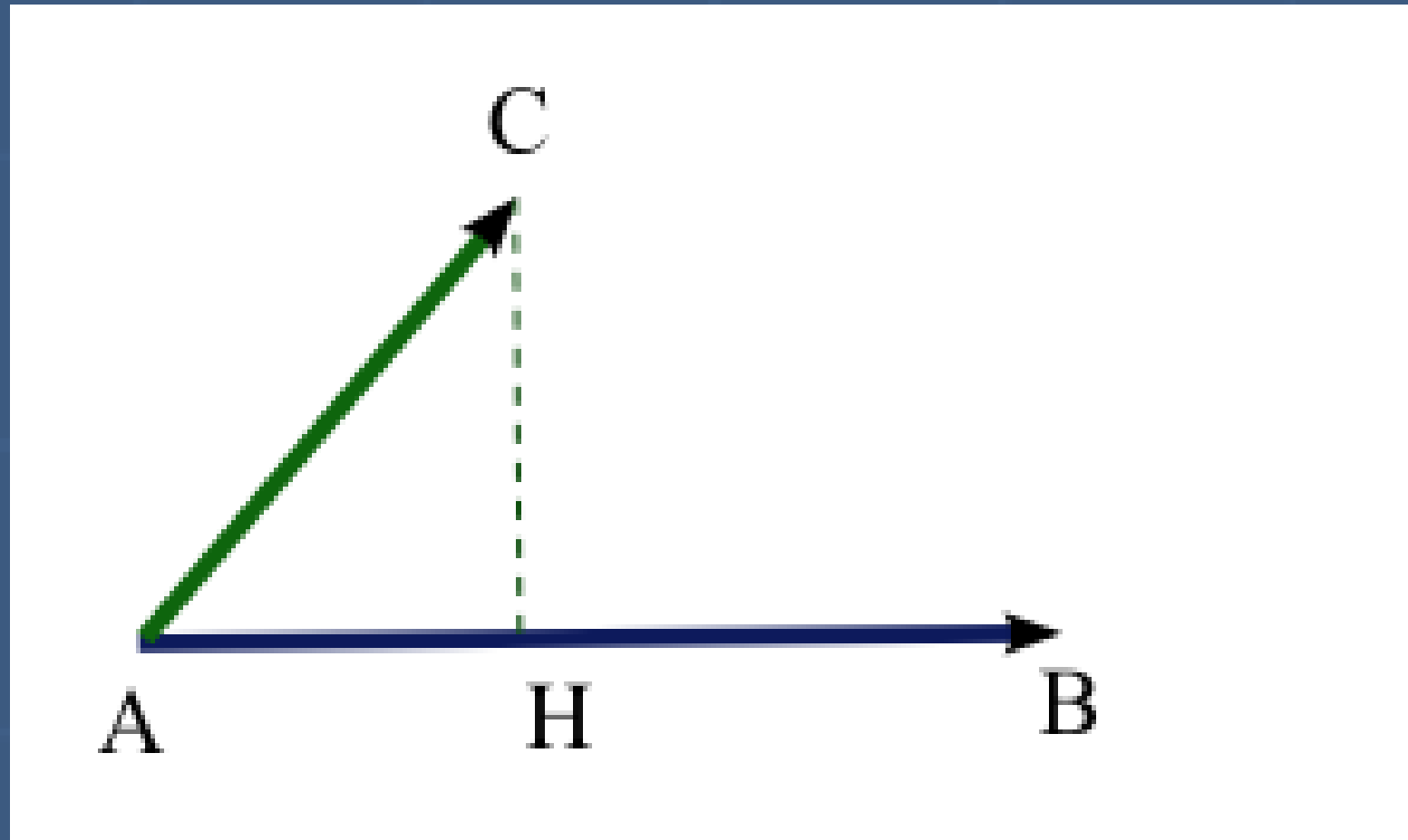
x

lll



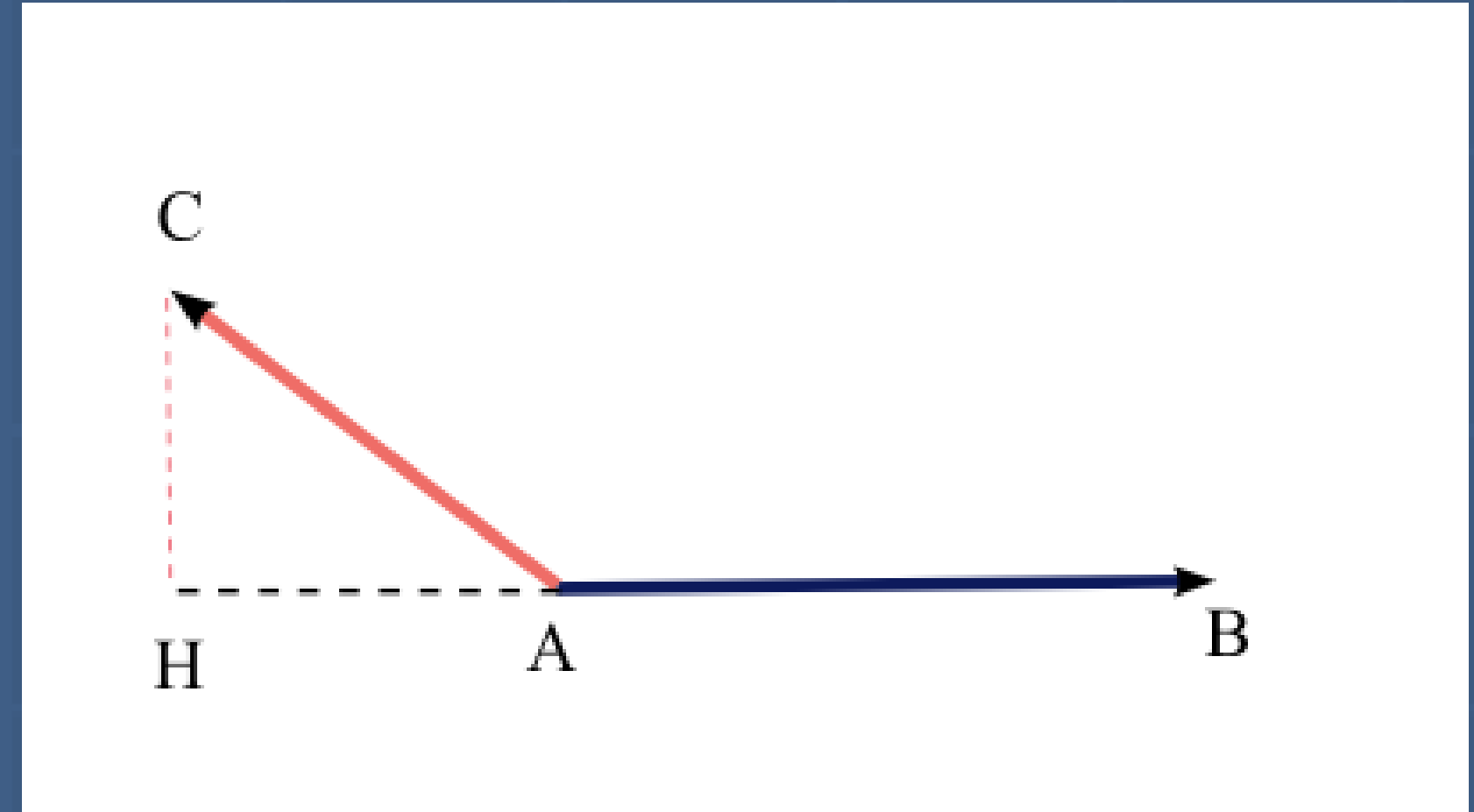
# I) Produit scalaire de deux vecteurs

cas1



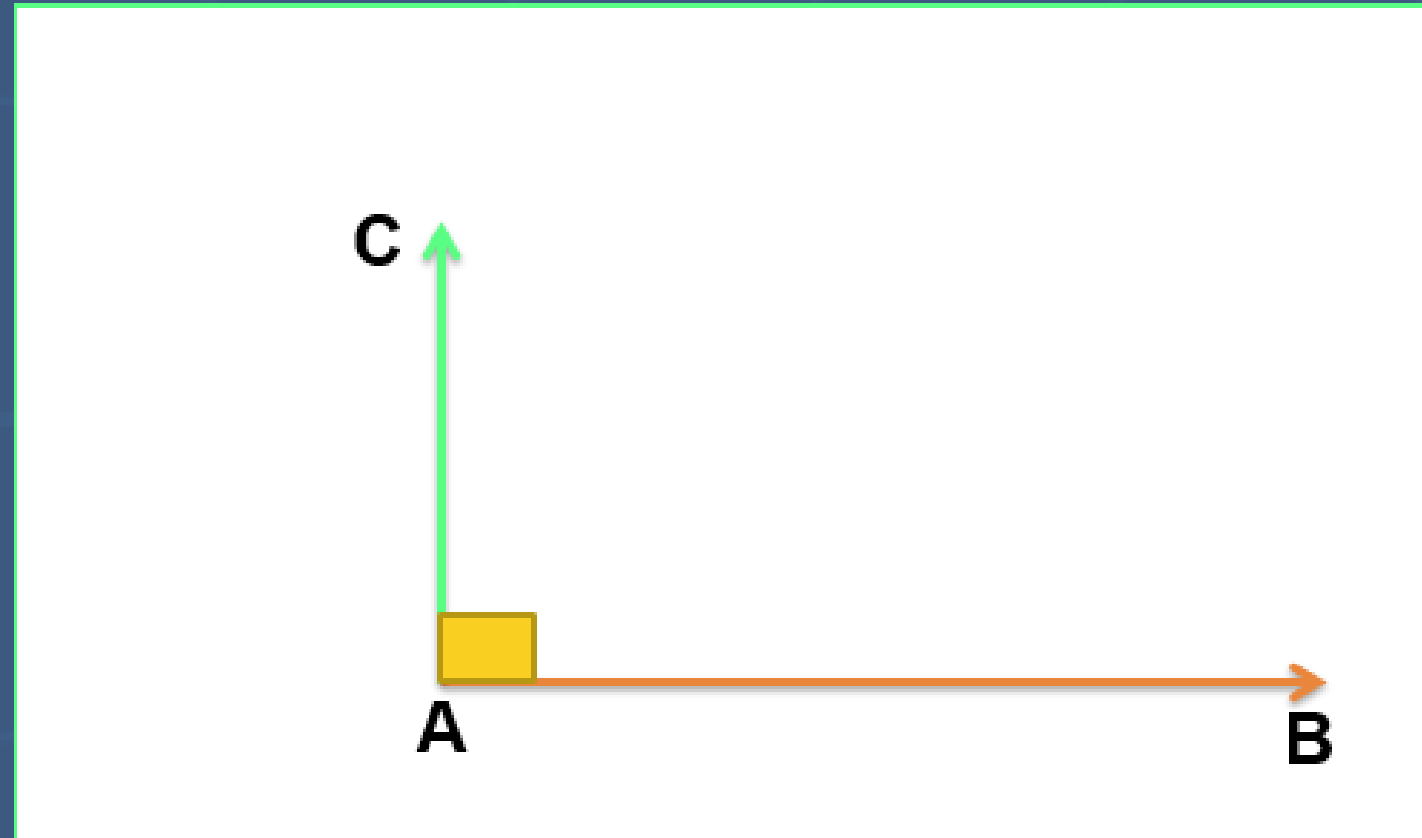
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$$

cas2



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$$

## Cas 3



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC = 0$$

# Définition:

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan P tel que :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

On appelle le produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  le nombre réel  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

❖ Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

❖ Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et H la projection orthogonale de C sur (AB)

○ Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont **le même sens** alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

○ Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont **deux sens contraires** alors:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = - AB \times AH$$

# La norme d'un vecteur:

$$\diamond \vec{u} \cdot \vec{u} = AB \times AB = AB^2$$

$$\diamond \vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$$

$$\diamond ||\vec{u}|| = \sqrt{||\vec{u}||^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$\diamond \text{On pose } (\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \text{ ( Le carré scalaire de } \vec{u} \text{ )}$$

$$\text{Donc } AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2$$

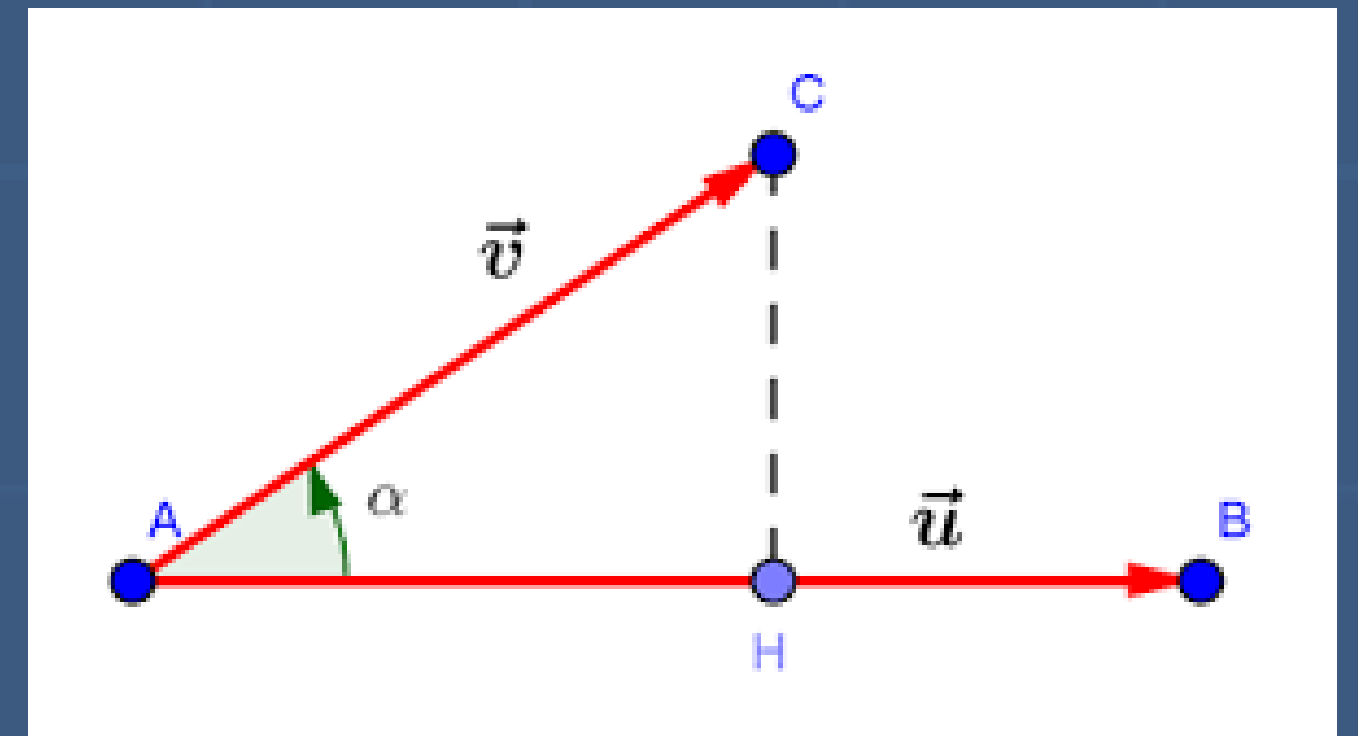
# Formule trigonométrique du produit scalaire:

Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC} = \alpha$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos \alpha$$

ou encore

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$



# Propriétés:

1) Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

On dit que le produit scalaire est **Symétrique**

2) Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et tout  $k \in \mathbb{R}$ , on a :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \vec{u} \cdot \vec{v}$

On dit que le produit scalaire est **bilinéaire**

# Les identités remarquables:

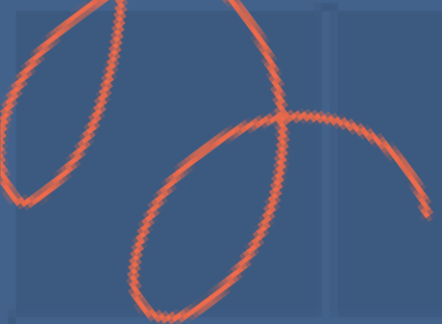
Quels que soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a:

$$\begin{aligned} \diamond \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \diamond \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \diamond \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$



# Deux vecteurs orthogonaux

- Pour que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient **orthogonaux** il faut et il suffit que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



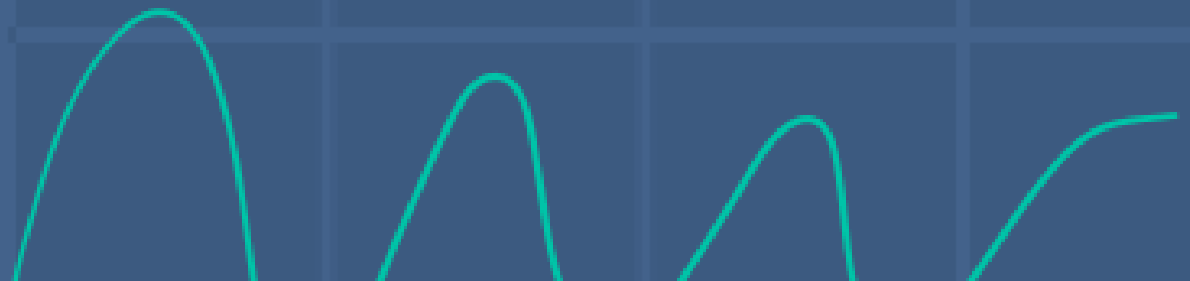
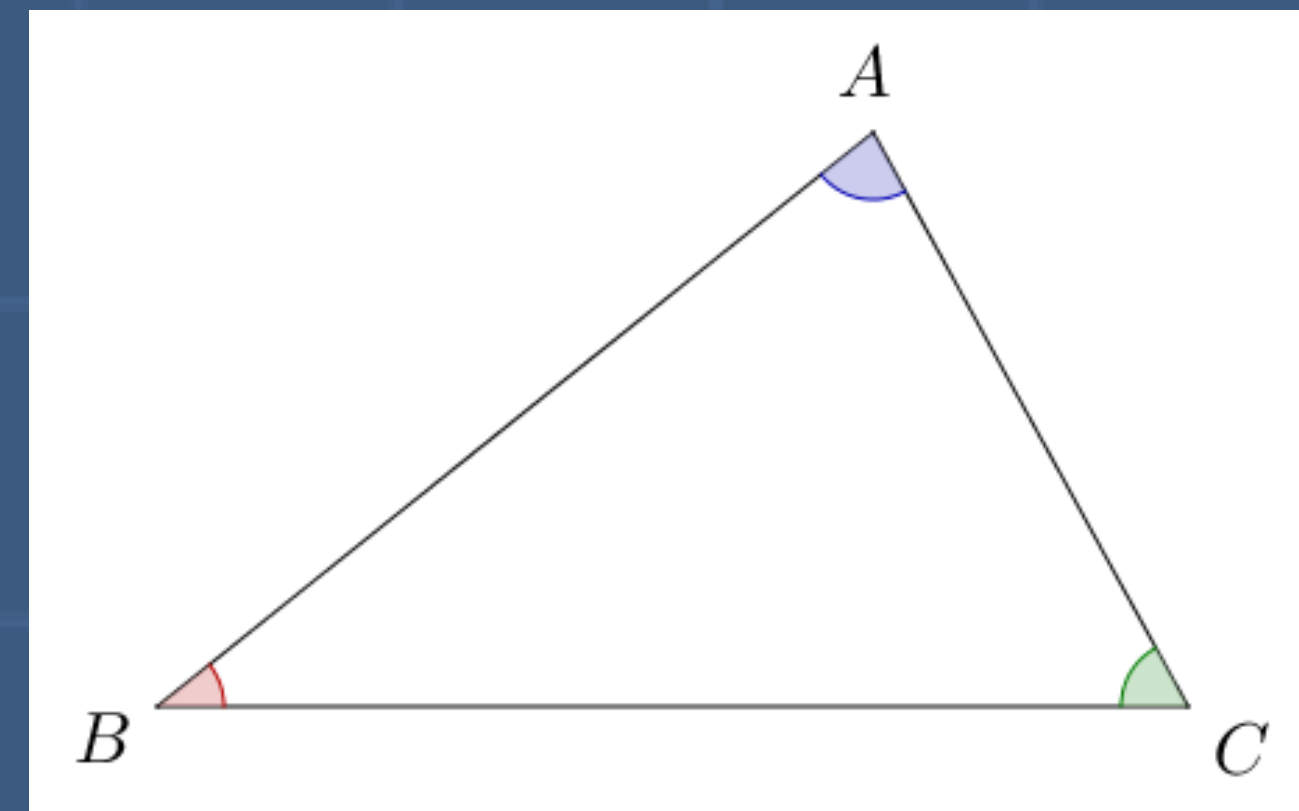
## II) Applications du produit scalaire

### Les relations métriques dans un triangle



Soit ABC un triangle. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$



# Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle on a:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC\cos(\hat{A})$$

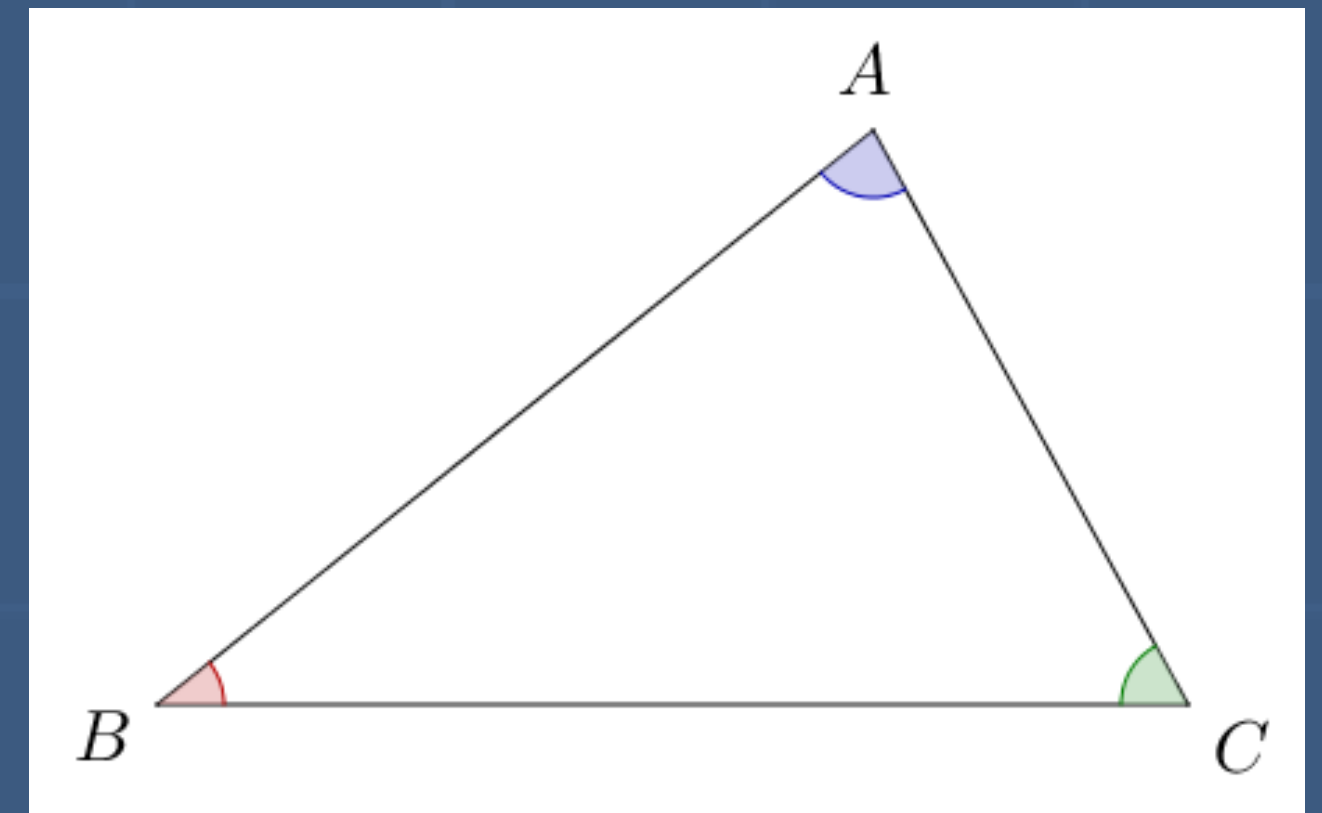
Autrement dit :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BCAC\cos(\hat{C})$$

Autrement dit :  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BCAB\cos(\hat{B})$$

Autrement dit :  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$



# Théorème de la médiane

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB]. Soit M un point du plan P.

On a les égalités suivantes:

- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$

- $MA^2 - MB^2 = 2 \vec{MI} \cdot \vec{BA}$

- $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$

