TUGAS 7
METODE NUMERIK

Dosen Pengampu : Aries Suharso, S.Si, M.Kom

NAMA : Eldoni Mosul
NPM : 2210631170065
KELAS : 3E

PROGRAM STUDI INFORMATIKA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS SINGAPERBANGSA KARAWANG

2023

A. LANDASAN TEORI

Interpolasi adalah teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik di antara dua titik yang nilai fungsi pada ke-2 titik tersebut sudah diketahui. Cara menentukan harga fungsi f dititik ب ∋ *ثب , ب ث. dengan menggunakan informasi dari seluruh atau sebagian titik-titik yang diketahui (x0, x1, , xn) Teknik umum yang digunakan:

- Membentuk polinomial berderajat ≤ n yang mempunyai harga fungsi di titiktitik yang diketahui.
- Polinomial Interpolasi Masukkan titik yang ingin dicari harga fungsinya ke dalam polinomial interpolasi.

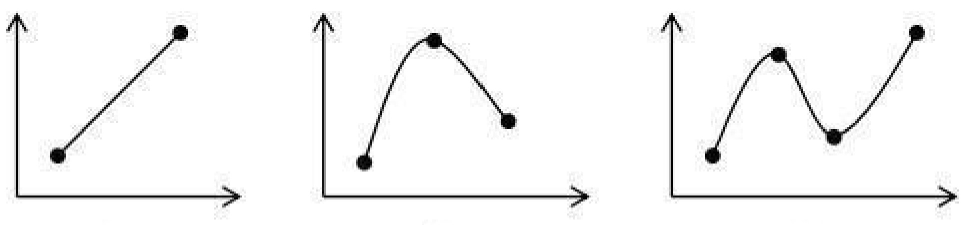
  Metode interpolasi yang biasa digunakan adalah dengan interpolasi Polinomial. Persamaan polinomial orde ke n yang dipakai secara umum adalah

  :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Persamaan polinomial ini merupakan persamaan aljabar yang hanya mengandung jumlah dari variabel x berpangkat bilangan bulat (integer). Untuk n + 1 titik data, hanya terdapat satu polinomial order n atau kurang yang melalui semua titik.

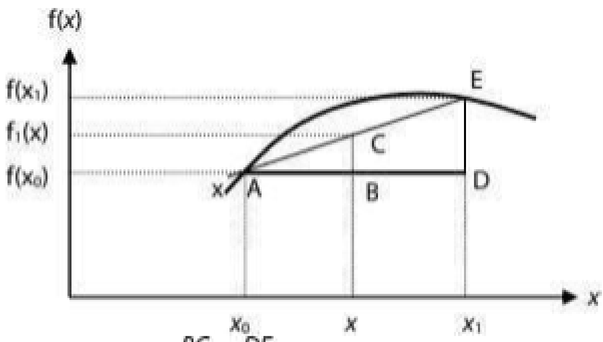
Demikian juga dengan menghubungkan tiga titik dapat membentuk suatu parabola (polinomial order 2), lihat Gambar 4.1 (b), sedang bila empat titik dapat dihubungkan dengan kurva polinomial order tiga, lihat Gambar 4.1 (c), Dengan operasi interpolasi kita dapat menentukan suatu persamaan polinomial order ke n yang melalui n + 1 titik data, yang kemudian digunakan untuk menentukan suatu nilai (titik antara) diantara titik data tersebut.



(a) (b) (c)

1. **Interpolasi Linier**

   Dengan menghubungkan dua buah titik data dengan garis lurus. Diketahui nilai fungsi di titik x0 , yaitu f(x0) dan dititik x1 , yaitu f(x1), akan dicari nilai fungsi dititik x, yaitu f1(x). Dalam hal ini indeks 1 pada f1(x) menunjukan interpolasi polinomial order 1.



Dari gambar : $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$

maka : $\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ dengan $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$: Kemiringan

Contoh.

Akan dicari nilai ln 2 (dengan nilai exact ln 2 = 0.69314718), jika diketahui data :

ln 1 = 0

ln 6 = 1.7917595

dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$, maka untuk ln 2 :

$$f_1(2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.7917595 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.35835190$$

besar kesalahan : $E_t = \frac{0.69314718 - 0.35835190}{0.69314718} \times 100\% = 48.3\%$

Apabila ingin lebih teliti dapat didekati dengan interpolasi yang lebih kecil, dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 4$, dimana ln 1 = 0 dan ln 4 = 1,3862944,

maka untuk ln 2

$$f_1(2) = 0 + \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0.46209813$$

besar kesalahan : $E_t = \frac{0.69314718 - 0.46209813}{0.69314718} \times 100\% = 33.3\%$

Kesimpulan semakin kecil interval antara titik data, hasil perkiraan interpolasi akan semakin baik.

2. Interpolasi Kuadrat

Perkiraan dilakukan dengan menggunakan garis lengkung dengan data tiga buah titik, maka dibuat polinomial order dua. Adapun persamaannya :

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x x_0 - b_2 x x_1 \quad \text{atau}$$

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{------- persamaan polinomial order 2}$$

dengan $a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1$

$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1$

$a_2 = b_2$

bila $x = x_0$ maka : $f_2(0) = b_0 + b_1(x_0 - x_0) + b_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)$ dan $b_0 = f(x_0)$

bila $b_0 = f(x_0)$ dan $x = x_1$ maka :

$f(x_1) = f(x_0) + b_1(x_1 - x_0) + b_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)$ atau $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

analog dengan cara diatas bila b_0 dan b_1 dimasukan kedalam persamaan $f(x)$ dan $x = x_2$

maka : $b_2 = \dfrac{f(x_2) - f(x_1) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$ atau : $b_2 = \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

Contoh:

Akan dicari nilai ln 2 (dengan nilai exact ln 2 = 0.69314718), jika diketahui data:

$x_0 = 1$, $f(x_0) = 0$

$x_1 = 4$, $f(x_1) = 1.3862944$

$x_2 = 6$, $f(x_2) = 1.7917595$

maka : $f_2(x_2) = b_0 + b_1(x_0 - x_0) + b_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)$

$b_0 = f(x_0) = 0$

$$b_1 = \frac{1.3862944 - 0}{4 - 1} = 0.46209813$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{1.7917595 - 1.3862944}{6 - 4} - 0.46209813}{6 - 1} = -0.051873116$$

$$f_2(2) = 0 + 0.46209813(x_1 - 1) - 0.051873116(x - 1)(x - 4) = 0.56584436$$

dengan, $E_t = \dfrac{0.69314718 - 0.56584436}{0.69314718} \times 100\% = 18.4\%$

3. Interpolasi Polinomial

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots\dots\dots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

dengan

$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_1, x_0]$

$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$

$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots\dots\dots, x_1, x_0]$

Tanda { [.......] } adalah pembagian beda hingga (b – h)

b – h pertama : $f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$

b – h kedua : $f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$

b – h ke-n : $f[x_n, x_{n-1}, \dots\dots, x_1, x_0] = \dfrac{f[x_n, x_{n-1}, \dots\dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots\dots, x_0]}{x_k - x_0}$

4. Interpolasi Polinomial Lagrange

Penurunan dari polinomial Newton

$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0).f[x_1, x_0]$

dimana : $f[x_1, x_0] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$

maka : $f_1(x) = f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \dfrac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_0)$

$$f_1(x) = \left\{ \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} \right\} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

jadi : $f_1(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$

(interpolasi polinomial Lagrange order satu)

Analog dengan cara diatas :

Interpolasi polinomial Lagrange order dua

$$f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} . \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} . \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} . \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Interpolasi polinomial Lagrange order n

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f(x_i)$$

dimana : $L_i(x) = \displaystyle\prod_{i=0\ j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, simbol $\prod$ = perkalian