NP-полнота алгоритмических игр

Sameer Tantry

December 2022

В данном проекте мы формализуем некоторые классические игры и приведем доказательства некоторых теорем

1 Основные определения

Определение 1. Класс NP. Язык $A \in NP$, если $\exists V(x, s)$, работающая за $poly(|x|)$: $\forall x \in A \iff \exists s : V(x, s) = 1$

Определение 2. Пусть А и В - два языка. Тогда А сводится по Карпу к В, если существует всюду определенная функция $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$, вычислимая за полиномиальное время, такая что $x \in A \iff f(x) \in B$. Обозначение: $A \leq_p B$

Утверждение

- Сводимость по Карпу транзитивна. $(A \leq_p B \wedge B \leq_p C) \to (A \leq_p C)$
- Следствие из транзитивности. $(A \leq_p B \wedge B \in NP) \to (A \in NP)$

Определение 3. NP-полнота. Язык А NP-труден, если
$\forall B \in NP \hookrightarrow B \leq_p A$
Язык А NP-полон, если А NP-труден и $A \in NP$

Доказательство NP-полноты по определению часто является крайне трудной задачей, поэтому в большинстве случаев в доказательстве используется сведение к другой NP-полной задаче. Рассмотрим некоторые наиболее популярные NP-полные задачи:

- Задача о рюкзаке
- Задача коммивояжера
- SAT
- Задача о вершинном покрытии

2 NP-полные игры

NP-полные задачи считаются наиболее сложными задачами среди задач из NP. Для них, вероятно, не будет найдено быстрого решения дающего точный, а не приближенный ответ. Необходимо упомянуть гипотезу $P = NP$? Задача заключается в установлении равенства или неравенства между этими двумя классами. Данная проблема является одной из семи задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил премию в миллион долларов

2.1 Пятнашки

Пятнашки, или игра в 15, такен - популярная головоломка, придуманная в 1878 году Ноем Чепмэном. Головоломка представляет собой набор из 15 одинаковых квадратных костяшек с нанесёнными на них числами, лежащих в квадратной коробке. Длина стороны коробки в четыре раза больше длины стороны костяшки, поэтому в коробке остаётся незаполненным одно квадратное поле. Цель игры — упорядочить костяшки по возрастанию номеров, перемещая их внутри коробки, желательно сделав как можно меньше перемещений.

Рассмотрим задачу нахождения оптимального решения и покажем ее NP-полноту. Эта задача является частым примером использования алгоритмов с приближенным решением и эвристических функций и предлагается в некоторых алгоритмических курсах.
В данной работе мы лишь рассмотрим идею доказательства NP-полноты, так как полное доказательство довольно сложное. Для этого попробуем формализовать игру:

Определение 1. Доска - неориентированный граф $G(V, E)$, где $V = \{1, ..., 16\}$.
Моделировать игру мы будем в общем случае.

Определение 2. Конфигурация - биекция $F : V \to \{0, ..., |V| - 1\}$, где для пустой клетки $v \hookrightarrow F(v) = 0$
Конфигурацию назовем правильной, если в каждой вершине графа кроме одной находится уникальное число от 1 до $|V| - 1$. Иначе говоря,
$\exists! v \in V : F(v) = 0, \forall \hat{v} \in V \setminus \{v\} \hookrightarrow F(\hat{v}) \in \{1, ..., |V| - 1\}$
$u, v \in V$. Определим ход игры как переход от конфигурации F в конфигурацию F', где
$F(u) \neq 0 \wedge F(v) = 0 \wedge F'(u) = 0 \wedge F'(v) \neq 0 \wedge \forall w \in V \setminus \{u, v\} \hookrightarrow F(w) = F'(w)$
Финальную конфигурацию определим следующим образом:
$F_t : \forall n \in \{1, ..., |V| - 1\} \hookrightarrow F_t(n) = n, F_t(16) = 0$
Постановка задачи. Дан граф $G(V, E)$, правильные конфигурации F_s, F_t и целое число k. Существует ли последовательность из $\leq k$ правильных ходов, которая переводит конфигурацию F_s в F_t?

Теорема. Данная задача является NP-полной.
Доказательство:

Докажем, что данная задача лежит в классе NP.
Заметим, что в качестве сертификата можно предложить саму последовательность конфигураций $F_s, F_1, F_2, ..., F_{m-1}, F_t$. Тогда проверка правильности каждой конфигурации будет полиномиальной. Значит, задача принадлежит классу NP.

В доказательстве полноты сведем некоторую NP-полную задачу к данной. Рассмотрим задачу $3XC$ (задача о точном покрытии 3-множествами).

Задача. Дано множество $U = \{e_i\}_{i=1...3n}$ и семейство множеств $S = \{s_j\}_{j=1...m}$, где $\forall j \in \{1, ..., m\} \hookrightarrow |s_j| = 3, s_j \subset U$. Существует ли подмножество $S' \subset S$, все множества которого покрывают U таким образом, что каждое e_i лежит ровно в одном s_j?

Ричардом Карпом было доказано, что эта задача является NP-полной [4]. Сводимость приведена в статье [2]

Идея решения, которое применяется на практике:

Можно рассмотреть граф игры и искать в нем кратчайший путь. Для поиска кратчайшего пути часто используется алгоритм A^* [5] с различными эвристиками.
Эвристики:

- Манхэттенское расстояние (Manhattan distance)

  Манхэттенское расстояние — это сумма расстояний по строкам и столбцам от текущего расположения костяшки до ее правильной позиции

- Линейный конфликт (Linear conflict)

  Считается, что костяшка I и костяшка J находятся в линейном конфликте по строке, если они обе стоят в своей строке, но костяшка I находится левее костяшки J, хотя на самом деле должна быть справа

- Угловые фишки (Corner tiles)

  Рассмотрим правый верхний угол. Пусть «3» или «8» стоит на своей позиции, а на месте «4» — любая другая костяшка. В таком случае, чтобы поставить «4» на место, костяшки придется подвинуть. Для этого добавим 2 к манхэттенскому расстоянию. Если «3» или «8» участвует в линейном конфликте (linear conflict), то двойка уже добавлена.

2.2 Сапер

Список литературы

[1] Daniil Musatov: Compl-book

[2] Oded Goldreich: Finding the Shortest Move-Sequence in the Graph-Generalized 15-Puzzle is NP-Hard

[3] Richard Carini: Circuits, Minesweeper, and NP Completeness

[4] Richard M. Karp: Reducibility Among Combinatorial Problems

[5] A-star