NP-полнота алгоритмических игр

Sameer Tantry

December 2022

В данном проекте мы формализуем некоторые классические игры и приведем доказательства некоторых теорем

1 Основные определения

Определение 1. Класс NP. Язык $A \in NP$, если $\exists V(x, s)$, работающая за $poly(|x|)$: $\forall x \in A \iff \exists s : V(x, s) = 1$

Определение 2. Пусть A и B - два языка. Тогда A сводится по Карпу к B, если существует всюду определенная функция $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$, вычислимая за полиномиальное время, такая что $x \in A \iff f(x) \in B$. Обозначение: $A \leq_p B$

Утверждение

- Сводимость по Карпу транзитивна. $(A \leq_p B \wedge B \leq_p C) \to (A \leq_p C)$
- Следствие из транзитивности. $(A \leq_p B \wedge B \in NP) \to (A \in NP)$

Определение 3. NP-полнота. Язык A NP-труден, если
$\forall B \in NP \hookrightarrow B \leq_p A$
Язык A NP-полон, если A NP-труден и $A \in NP$

Доказательство NP-полноты по определению часто является крайне трудной задачей, поэтому часто в доказательстве используется сведение к другой NP-полной задаче. Рассмотрим некоторые наиболее популярные NP-полные задачи:

- Задача о рюкзаке
- Задача коммивояжера
- SAT
- Задача о вершинном покрытии

2 NP-полные игры

NP-полные задачи считаются наиболее сложными задачами среди задач из NP. Для них, вероятно, не будет найдено быстрого решения дающего точный, а не приближенный ответ. Необходимо упомянуть гипотезу $P = NP$? Задача заключается в установлении равенства или неравенства между этими двумя классами. Данная проблема является одной из семи задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил премию в миллион долларов

2.1 Пятнашки

Пятнашки, или игра в 15, такен - популярная головоломка, придуманная в 1878 году Ноем Чепмэном. Головоломка представляет собой набор из 15 одинаковых квадратных костяшек с нанесёнными на них числами, лежащих в квадратной коробке. Длина стороны коробки в четыре раза больше длины стороны костяшки, поэтому в коробке остаётся незаполненным одно квадратное поле. Цель игры — упорядочить костяшки по возрастанию номеров, перемещая их внутри коробки, желательно сделав как можно меньше перемещений.

Рассмотрим задачу нахождения оптимального решения и покажем ее NP-полноту. Эта задача является частым примером использования алгоритмов с приближенным решением и эвристических функций и предлагается в некоторых алгоритмических курсах.
В данной работе мы лишь рассмотрим идею доказательства NP-полноты, так как полное доказательство довольно сложное. Для этого попробуем формализовать игру:

Определение 1. Доска - неориентированный граф $G(V, E)$, где $V = \{1, ..., 16\}$.

Определение 2. Конфигурация - биекция $F : V \to \{0, ..., 15\}$, где для пустой клетки $v \hookrightarrow F(v) = 0$
Конфигурацию назовем правильной, если в каждой вершине графа кроме одной находится уникальное число от 1 до 15. Иначе говоря,
$\exists! v \in V : F(v) = 0, \forall \hat{v} \in V \setminus \{v\} \hookrightarrow F(\hat{v}) \in \{1, ..., 15\}$
$u, v \in V$. Определим ход игры как переход от конфигурации F в конфигурацию F', где
$F(u) \neq 0 \wedge F(v) = 0 \wedge F'(u) = 0 \wedge F'(v) \neq 0 \wedge \forall w \in V \setminus \{u, v\} \hookrightarrow F(w) = F'(w)$
Финальную конфигурацию определим следующим образом:
$F_t : \forall n \in \{1, ..., 15\} \hookrightarrow F_t(n) = n, F_t(16) = 0$

asdf