メビウス関数 (Möbius function)

目次

1 メビウス関数 (Möbius function)

定義 1 : メビウス関数 (Möbius function) 正の整数 n に対して以下の関数

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ が } 1 \text{ 以外の平方因子をもつとき} \\ (-1)^k, & n \text{ が } k \text{ 個の異なる素因数を持つとき} \end{cases}$$

をメイビウス関数とする。また、$\mu(1) = 1$ とする。

定理 1 : 任意の互いに素な正の整数 m, n に対して $\mu(m)\mu(n) = \mu(mn)$ が成立する。

定理 2 : 正の整数 $2 \geq 2$ に対して、

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

となる。

Proof. n の標準素因数分解 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ と書くとする。ここで n のある約数 d に対して $\mu(d) \neq 0$ となる必要十分条件は $d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k}$, $(\delta_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq k)$ と書けることである。したがって

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\delta_i \in \{0,1\}} \mu(p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k}) = \sum_{\delta_i \in \{0,1\}} (-1)^{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i}$$

となる。二項定理から

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^k \binom{k}{i} = (1-1)^k = 0$$

が示される。 □

2 メビウスの反転公式 (Möbius inversion formula)

定理 **3 :** メビウスの反転公式 (Möbius inversion formula) 正の整数集合を定義域とする関数 $f(n), g(n)$ に対して

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d)$$

が成り立つ。この関係式をメビウスの反転公式という。

Proof. まず $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d)$ を示す。この左辺の式を代入することで、

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \\ &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d'|d} g(d') \\ &= \sum_{d|n} \sum_{d'|d} g(d') \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d'|n} \sum_{d'|d|n} g(d') \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d'|n} g(d') \sum_{d'|d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで $m = \frac{n}{d'}, d^* = \frac{d}{d'}$ とおくと、$d^*|m$ を満たす d^* の集合と $d'|d|m$ を満たす d の集合は一体一対応する。さらに、$\frac{n}{d} = \frac{m}{d^*}$ であるため

$$\sum_{d'|n} g(d') \sum_{d'|d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n} g(d') \sum_{d^*|m} \mu\left(\frac{m}{d^*}\right)$$

となる。前述の定理から

$$\mu\left(\frac{m}{d^*}\right) = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

であるため

$$\sum_{d'|n} g(d') \sum_{d^*|m} \mu\left(\frac{m}{d^*}\right) = g(n)$$

となり示された。同様にして $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d)$ も示される。 $\square$