ジョルダン標準形 (Jordan normal form)

目次

定義 1 : 行列式 (determinant) (i, j) 成分が a_{ij} と表わされる行列 A の行列式 $\det A$ は

$$\det A = \sum_{\sigma \in Aut(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \Pi_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

として書かれる。ここで、$\mathrm{Aut}(n)$ は n 次の置換全体の集合である。

定義 2 : 固有値 (eigenvalue)・一般固有ベクトル generalized eigenvector ある n 次正方行列 A と非自明なベクトル $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ に対して

$$(A - \lambda I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$(A - \lambda I)^{m-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

であるとき、ベクトル $\mathbf{v}$ を行列 A の階数 (rank)m の一般 (広義) 固有ベクトル、λ を一般固有ベクトル $\mathbf{x}$ に対応する固有値という。ここで I は単位行列、$\mathbf{0}$ をゼロベクトルとした。また、階数が 1 の一般固有ベクトルを固有ベクトルという。

定理 1 : ある行列 A に固有値 λ と対応する階数 m の一般固有ベクトルが存在するならば、固有値 λ に対応する固有ベクトルも存在する。

Proof. $\mathbf{v}_1$ を

$$\mathbf{v}_1 = (A - \lambda I)^{m-1} \mathbf{v}_m$$

とすると $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ であり

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_1 = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{m-1} \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

となるため $\mathbf{v}_1$ は固有ベクトルとなる。したがって、階数 m の一般固有ベクトルが存在するならば、固有ベクトルも存在する。 □

系 1 : ある行列 A の固有値 λ に対応する一般固有ベクトルが存在することと、$\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$ であることは同値である。

$\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$ であることと $\det(A-\lambda I) = 0$ であることは同値であるため固有値の存在に関して以下の定理が成立する。

定理 2 : ある行列 A に対して λ が固有値であることと $\det(A-\lambda I) = 0$ でることは同値である。

Proof. λ が固有値であれば固有ベクトルが存在することから示される。 □

定義 3 : 重複度 $\det(A-\lambda I)$ が $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ と書けるとき、行列 A の固有値は

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$$

の k 個であり、固有値 λ_i に対して m_i を λ_i の重複度という。また $\det(A-\lambda I)$ を固有多項式 (特性多項式) といい、$\det(A-\lambda I) = 0$ を固有方程式 (特性方程式) という。

系 2 : 行列式の定義から n 次正方行列の固有多項式は n 次の多項式であり、固有多項式の根が固有値となる。また n 次行列 A の全ての固有値の重複度の和は n と一致する。

定義 4 : Jordan chain ある行列 A の固有値 λ に対する階数 m の一般固有ベクトル $\mathbf{x}_m$ によって

$$\mathbf{x}_j = (A-\lambda I)^{m-j}\mathbf{x}_m = (A-\lambda I)\mathbf{x}_{j+1}, \quad (j = 1, 2, \cdots, m-1)$$

として表されるベクトルの集合 $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \cdots, \mathbf{x}_1\}$ を Jordan chain という。

また、$\mathbf{x}_m$ が階数 m の一般固有ベクトルであることから

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)^j\mathbf{x}_j &= (A-\lambda I)^j(A-\lambda I)^{m-j}\mathbf{x}_m \\ &= (A-\lambda I)^m\mathbf{x}_m \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

となり、$\mathbf{x}_j$ は行列 A の固有値 λ に対する階数 j の一般固有ベクトルであることが示される。また Jordan chain は線形独立となる。

定理 3 : 階数 m の一般固有ベクトルによって生成される Jordan chain に含まれるベクトル

$$\mathbf{x}_j = (A-\lambda I)^{m-j}\mathbf{x}_m = (A-\lambda I)\mathbf{x}_{j+1}, \quad (j = 1, 2, \cdots, m-1)$$

に対して以下が成立する。

1. $\mathbf{x}_1$ は固有ベクトルである

2. $\mathbf{x}_m$ は $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^m$ に含まれるが $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^{m-1}$ に含まれないベクトルである

定義 5 : 一般固有空間 (generalized eigenspace) n 次行列 A の重複度 r の固有値 λ に対して

$$W(\lambda) = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^r$$

を一般 (広義) 固有空間という。

定理 4 : 固有値 λ の一般固有空間の次元は λ の重複度と一致する。すなわち

$$r = \dim W(\lambda)$$

である。

定義 6 : invariant subspace ある線形空間 V から V 自身への線形写像 T と V の部分線形空間 W に対して、

$$v \in W \Rightarrow T(v) \in W$$

であるとき、W を T の invariant subspace であるという。

定義 7 : canonical basis n 個の線形独立な一般固有ベクトルが Jordan chain のみによって構成されるとき、この線形独立なベクトルの組を canonical basis という。

定理 5 : 固有値 λ が与えられたとき Jordan block と Jordan chain は一致する。サイズ r の Jordan block を生成する Jordan chain は $(A-\lambda I)^r\mathbf{p}_r = 0$ となるベクトル $\mathbf{p}_r$ によって生成される。また、$\mathbf{p}_1 = (A-\lambda I)^{r-1}\mathbf{p}_r$ は λ の固有ベクトルとなり非ゼロである。したがって (?)、n 次行列に Jordan normal form が存在することと、 Jordan Chain の総数が n であることは同値となる (?)。

Proof. 行列の次数の帰納法によって証明する。

まず 1 次正方行列 $A = (a_{ij})$ のときを考える。このとき行列 A の固有値は a_{11} であり、固有空間の次元は 1 次元となる。すなわち、長さ 1 の Jordan chain が一つ存在し示される。

次に $n-1$ 次正方行列に対して、Jordan chain の総数が $n-1$ であると仮定して、n 次正方行列 A を考える。ここで、行列 A の任意の固有値 λ を考える。また、A による線型写像が n 次線形空間 V から自身への写像となるとする。$A-\lambda I$ によって表わされる線形変換の値域 (range) を $\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I)$ と書くとする。すると $\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I) \subset V$ であり、また $x \in \mathrm{Ran}\,(A-\lambda I)$ ならば、ある $y \in V$ によって $x = (A-\lambda I)y$ と書けるため

$$\begin{aligned} Ax &= A(A-\lambda I)y \\ &= AA - \lambda Ay \\ &= (A-\lambda I)Ay \end{aligned}$$

となり、$A-\lambda I$ による線型写像は A の invariant subspace である。また、λ が A の固有値であることから、$\dim \mathrm{Ran}(A-\lambda I) = r < n$ である (?)。A による写像 f は $\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I)$ から $\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I)$ への写像でもある。ここで A でない A' による写像 f'

A' を A の $\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I)$ への Restriction とすると、帰納法の仮定より A' には Jordan basis が r 個存在する (?)。

次に $A-\lambda I$ の核 (Kernel)$\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$ について考える。もし

$$\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I) \cap \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I) = \{\mathbf{0}\}$$

である、すなわち線形空間 $\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I)$ と $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$ が線形独立とする。$\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$ は A の固有空間であり、$\mathrm{Ran}\,(A-\lambda I)$ は A の一般固有空間であるため、rank-nullity theorem より $\dim \mathrm{Ran}\,(A-\lambda I) + \dim \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I) = n$ が示され、A の固有空間の基底と $A-\lambda I$ の Jordan basis の線形結合によって n 次の線形空間が表わされる。また、固有空間の基底はどれも長さが 1 の Jordan chain であるため (?) 示される。

他に

$$Q = \mathrm{Ran}\,(A-\lambda I) \cap \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$$

である場合を考える。このとき Q の任意のベクトルは A の固有ベクトルによって表わされる。 □

参考文献

[1] "広義固有ベクトル - Wikipedia", https://ja.wikipedia.org/wiki/広義固有ベクトル, 参照 May.16,2020.

[2] "Generalized eigenvector - Wikipedia", https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_eigenvector, 参照 May.16,2020.

[3] "行列式 - Wikipedia", https://ja.wikipedia.org/wiki/行列式, 参照 May.17,2020.

[4] "固有多項式 - Wikipedia", https://ja.wikipedia.org/wiki/固有多項式, 参照 May.17,2020.

[5] "Jordan normal form - Wikipedia", https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_normal_form, 参照 May.17,2020.

[6] "線形代数Ｉ/広義固有空間の構造とジョルダン標準形 - 武内@筑波大", https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?線形代数Ｉ%2F広義固有空間の構造とジョルダン標準形, 参照 May.17,2020.

[7] "Invariant subspace - Wikipedia", https://en.wikipedia.org/wiki/Invariant_subspace, 参照 May.17,2020.

[8] “Restriction(mathematics) - Wikipedia”，https://en.wikipedia.org/wiki/Restriction_(mathematics)，参照 May.17,2020.
[9] “Rank-nullity theorem - Wikipedia”，https://en.wikipedia.org/wiki/Rank‐nullity_theorem，参照 May.17,2020.
[10] “ジョルダン標準形 - Wikipedia”，https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョルダン標準形，参照 May.17,2020.