メビウス関数 (Möbius function)

目次

1 メビウス関数 (Möbius function)

定義 1 : メビウス関数 (Möbius function) 正の整数 n に対して以下の関数

$$\mu(n)=\begin{cases}0, & n \text{ が } 1 \text{ 以外の平方因子をもつとき} \\ (-1)^k, & n \text{ が } k \text{ 個の異なる素因数を持つとき}\end{cases}$$

をメイビウス関数とする。また、$\mu(1)=1$ とする。

定理 1 : 任意の互いに素な正の整数 m,n に対して $\mu(m)\mu(n)=\mu(mn)$ が成立する。

定理 2 : 正の整数 $2 \geq 2$ に対して、

$$\sum_{d|n}\mu(d)=0$$

となる。

Proof. n の標準素因数分解 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ と書くとする。ここで n のある約数 d に対して $\mu(d)\neq 0$ となる必要十分条件は $d=p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}$, $(\delta_i\in\{0,1\}, 1\leq i\leq k)$ と書けることである。したがって

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{\delta_i\in\{0,1\}}\mu(p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k})=\sum_{\delta_i\in\{0,1\}}(-1)^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{i}$$

となる。二項定理から

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{i}=(1-1)^k=0$$

が示される。 □