# 確率論 (Probability theory)

## 目次

<u>定義 **1 :** 試行</u> ある集合 $\Omega$ が与えられたとする。ある試行 $T$ の結果として $A \subset \Omega$ の元が現れることを $A$ が起こるといい、$\Omega$ を試行 $T$ の見本空間、$\Omega$ の元を試行 $T$ の見本点という。$\Omega$ が有限集合であるとき試行 $T$ は有限試行、無限集合であるとき試行 $T$ を無限試行という。また $A \subset \Omega$ を事象 $A$ ともいう。

さいころをふるという試行の見本空間は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり事象 $A$ がおこる確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{|A|}{6}$$

となる。

<u>定義 **2 :** 余事象・和事象・交事象・差事象・排反事象</u> ある試行 $T$ と $T$ の見本空間 $\Omega$ と、事象 $A, B \subset \Omega$ に対して以下を定義する。

**余事象** $A^c = \Omega - A$ で表わされる $\Omega$ を全体集合とした $A$ の余集合 $A^c$ がおこることを $A$ の余事象という

**和事象** $A \cup B$ がおこることを $A$ と $B$ の和事象という

**交事象** $A \cap B$ がおこることを $A$ と $B$ の交事象という

**差事象** $A \setminus B$ がおこることを $A$ お $B$ の差事象という

**排反事象** $A \cap B = \emptyset$ であるとき $A$ と $B$ を排反事象という

集合 $A$ と $B$ が $B \subset A$ であるようなとき $A$ と $B$ の差集合 $A \setminus B$ を $A - B$ と書き、特に $A - B$ と書いたときは $B \subset A$ であるとする。さらに $A$ と $B$ が $A \cap B = \emptyset$ であるとき $A$ と $B$ の和集合 $A \cup B$ を $A + B$ と書きこれを直和という。また、集合 $A$ と $B$ の直和が書かれたとき、$A \cap B = \emptyset$ であるとする。

<u>定義 **3 :** 有限試行における確率測度</u> ある試行 $T$ の有限な見本空間 $\Omega$ とがあるとき、事象

$A \subset \Omega$ がおこる確率 $P(A)$ が以下を満たすとき、$\Omega$ 上の集合関数 $P$ を確率測度という。

(P1) $P(A) \geq 0$
(P2) $P(A) + P(B) = P(A) + P(B)$
(P3) $P(\Omega) = 1$

**定義 4 : 確率空間** ある試行 $T$ の有限な見本空間 $\Omega$ と確率測度 $P$ が与えられたとき、これらの組 $(\Omega, P)$ を確率空間という。

前述のさいころをふる試行の確率 $P$ も直感的に確率測度であることがわかり、$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P)$ が確率空間であることもわかる。

**定理 1 :** $P$ を $\Omega$ 上の確率測度とすれば、

(i) $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
(ii) $P(B - A) = P(B) - P(A)$
(iii) $P(A^c) = 1 - P(A)$
(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(v) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\{\omega\}$

が成立する。

*Proof.* (i) 帰納法を用いて証明する。$n = 1$ のときは自明であるため、$n = k$ のときに成り立つとして $n = k + 1$ のときを考える。まず、総和を分解することで

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right)$$

となる。そして、確率測度の定義より $P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(A_{k+1}\right)$ と

なり、仮定から

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(A_{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)
\end{aligned}
$$

が得られる。

(ii) $A \subset B$ であるため $(B - A) + A = B$ であるため、$P((B - A) + A) = P(B)$ となる。また $P((B - A + A)) = P(B - A) + P(A)$ であるため、

$$
\begin{aligned}
&P(B - A) + P(A) = P(B) \\
&\rightleftharpoons P(B - A) = P(B) - P(A)
\end{aligned}
$$

となり示される。

(iii) $P(B - A) = P(B) - P(A)$ のとき $B = \Omega$ とすれば $P(A^c) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$ となり示される。

(iv) $C = A \cap B, A' = A - C, B' = B - C$ とすれば $A \cup B = A' + B' + C = A + B - C$ である。よって確率測度の定義より

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(C) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

となり示される。

(v) $A = \sum_{\omega \in A} \{\omega\}$ であるため示される。

□

<u>定理 **2 :** 包含排除公式</u> 確率空間 $(\Omega, P)$ と、$n$ 個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して以下が成立する。

(i) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} P\left(\bigcap_{\kappa=1}^{k} A_{i_\kappa}\right)$

(ii) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} P\left(\bigcup_{\kappa=1}^{k} A_{i_\kappa}\right)$

*Proof.* □

## 参考文献

[1] 伊藤清，“確率論 岩波基礎数学選書”，岩波書店，(1991).