ジョルダン標準形 (Jordan normal form)

目次

<u>定義 1 : 一般固有ベクトル **generalized eigenvector**</u> ある n 次正方行列 A と、A の固有値 λ に対して

$$(A - \lambda I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

であり

$$(A - \lambda I)^{m-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

であるようなベクトル $\mathbf{v}$ を固有値 λ に対する行列 A の階数 (rank)m の一般 (広義) 固有ベクトルという。ここで I は単位行列、$\mathbf{0}$ をゼロベクトルとした。

<u>定義 2 : **Jordan chain**</u> ある行列 A の固有値 λ に対する階数 m の一般固有ベクトル $\mathbf{x}_m$ によって

$$\mathbf{x}_j = (A - \lambda I)^{m-j} \mathbf{x}_m = (A - \lambda I)\mathbf{x}_{j+1}, \quad (j = 1, 2, \cdots, m-1)$$

として表されるベクトルの集合 $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \cdots, \mathbf{x}_1\}$ を Jordan chain という。

また、$\mathbf{x}_m$ が階数 m の一般固有ベクトルであることから

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)^j \mathbf{x}_j &= (A - \lambda I)^j (A - \lambda I)^{m-j} \mathbf{x}_m \\ &= (A - \lambda I)^m \mathbf{x}_m \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

となり、$\mathbf{x}_j$ は行列 A の固有値 λ に対する階数 j の一般固有ベクトルであることが示される。また Jordan chain は線形独立となる。

参考文献

[1] “講義固有ベクトル - Wikipedia”，https://ja.wikipedia.org/wiki/広義固有ベクトル，参照 May.16,2020.

[2] “Generalized eigenvector - Wikipedia”, https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_eigenvector#Jordan_chains，参照 May.16,2020.