Particle Swarm Optimization

目次

入力 $p^{(k)}$ をとるシステム

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = M\mathbf{x}^{(k)} + Np^{(k)}$$

を考える。ある $\mathbf{h}^{(k)}$ を

$$\mathbf{h}^{(k)} = \begin{cases} M^k N & k \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし、$p^{(k)}$ との畳み込みを計算すると

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^{(m)} p^{(k-m-1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{h}^{(m)} p^{(k-m-1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{h}^{(m)} p^{(k-m-1)} + \mathbf{h}^{(0)} p^{(k-1)} \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで $m' = m - 1$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^{(m)} p^{(k-m-1)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{h}^{(m)} p^{(k-m-1)} + \mathbf{h}^{(0)} p^{(k-1)} \\ &= \sum_{m'=0}^{\infty} \mathbf{h}^{(m'+1)} p^{(k-(m'+1)-1)} + \mathbf{h}^{(0)} p^{(k-1)} \\ &= \sum_{m'=0}^{\infty} M^{m'+1} N p^{(k-m'-2)} + N p^{(k-1)} \\ &= M \sum_{m'=0}^{\infty} M^{m'} N p^{((k-1)-m'-1)} + N p^{(k-1)} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\mathbf{x}^{(k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^{(m)} p^{(k-m-1)}$$

とすれば

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^{(m)} p^{(k-m-1)} \\
&= M \sum_{m'=0}^{\infty} M^{m'} N p^{((k-1)-m'-1)} + N p^{(k-1)} \\
&= M \sum_{m'=0}^{\infty} \mathbf{h}^{(m')} p^{((k-1)-m'-1)} + N p^{(k-1)} \\
&= M \mathbf{x}^{(k-1)} + N p^{(k-1)}
\end{aligned}
$$

となるため、このシステムはインパルス応答 $\mathbf{h}^{(k)}$ が

$$
\mathbf{h}^{(k)} = \begin{cases} M^k N & k \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

である線形時不変システムである。また、

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k N = \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \right) N
$$

となるため $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ が収束すればこのシステムは有界な入力に対して有界な出力を返す。

M が 2×2 の行列で非負実数 w, ϕ によって

$$
M = \begin{pmatrix} w & \phi \\ -w & 1-\phi \end{pmatrix}
$$

と書かれる場合を考える。まず、M の固有値を求める。特性方程式

$$
\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} w - \lambda & \phi \\ -w & 1 - \phi - \lambda \end{vmatrix} = 0
$$

を解くと M の固有値 λ_1, λ_2 は

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{w - \phi + 1 + \sqrt{(w - \phi + 1)^2 - 4w}}{2} \\
\lambda_2 &= \frac{w - \phi + 1 - \sqrt{(w - \phi + 1)^2 - 4w}}{2}
\end{aligned}
$$

となる。固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{w+\phi-1+\sqrt{(w-\phi+1)^2-4w}}{2w} \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{w+\phi-1-\sqrt{(w-\phi+1)^2-4w}}{2w} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。よって固有ベクトルが存在するためある行列 P を用いて

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$$

と書くことができ、

$$M^k = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k P$$

が成立する。したがって、$|\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| \leq 1$ であれば $\lim_{k\to\infty} M^k$ は収束する。λ_1, λ_2 が前述の条件を満たすのは

$$0 \leq w < 1,\ 0 \leq \phi < 2w + 2$$

であるため、この条件を満たせば $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ は収束し、システムが有界な入力に対して有界な出力を返す。