リーマン積分 (Riemann integral)

<u>**定義 1 : 分割**</u> 実数上のある有界閉区間 $I = [a, b]$ に対して数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

を満たすとき、数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ を I の分割という。とくに数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ の項が一般に $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ であるとき、I の n 等分の分割という。また、I の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$ に対して $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i - a_{i-1})$ とする。

<u>**定義 2 : 過剰和・不足和**</u> I 上の有界関数 $f(x)$ と I の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$ に対して、過剰和 $S(f, \Delta)$ と不足和 $s(f, \Delta)$ を

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1})$$
$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1})$$

と定める。

<u>**定義 3 : 上積分・下積分**</u> I 上の有界関数 $f(x)$ に対して、f の区間 I での上積分 $S(f)$、下積分 $s(f)$ を

$$S(f) = \inf\left\{S(f, \Delta) \,\middle|\, \Delta \text{ は } I \text{ の任意の分割}\right\}$$
$$s(f) = \sup\left\{s(f, \Delta) \,\middle|\, \Delta \text{ は } I \text{ の任意の分割}\right\}$$

と定める。

参考文献

[1] “”, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~aida/lecture/20/10-7.pdf, 参照 May.17,2020.

[2] “”, https://en.wikipedia.org/wiki/Darboux_integral, 参照 May.17,2020.