

# リードソロモン符号

## 1 基礎知識

### 1.1 多項式環

$R$  を可換環とすると、 $R$  上の元を係数とする多項式全体の集合

$$R[T] := \{a_0 + a_1T^1 + \cdots + a_nT^n \mid n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n, a_0, \dots, a_n \in R\}$$

は可換環を成す。これを多項式環という。

*Proof.* hoge □

また、 $R[T]$  上のある元  $f(T)$  が

$$f(T) = a_0 + a_1T^1 + \cdots + a_nT^n$$

と書かれて  $a_n \neq 0$  であるとき、 $n$  を  $f(T)$  の次数といい  $\deg(f(T))$  と書く。

### 1.2 多項式環上での除法

ある体  $K$  による多項式環  $K[T]$  に除法が定義される。

**定理 1：除法** ある  $f(T), g(T) \in K[T], g(T) \neq 0$  に対して

$$f(T) = q(T)g(T) + r(T) \quad (\deg(r(T)) < \deg(g(T)))$$

を満たす  $q(T), r(T) \in K[T]$  の組が唯一つ存在し  $q(T)$  を商、 $r(T)$  を剰余という。また  $r(T)$  が  $r(T) = 0$  であるとき、 $g(T)$  は  $f(T)$  を割り切るといい  $g(T) \mid f(T)$  と書く。そして 2 つの多項式  $f(T), g(T) \in K[T]$  を割り切るモニックな多項式を最大公約多項式という。ここでモニックな多項式とは最高次数の係数が 1 であるような多項式のことである。

### 1.2.1 イデアル

**定理 2: イデアル** ある可換環  $R$  に対して、 $R$  の部分集合  $I$  が以下の 2 つを満たすとき、 $I$  を  $R$  のイデアルという。

1.  $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$
2.  $a \in I, r \in R \Rightarrow ar \in I$

ある  $a \in R$  によって

$$(a) = \{ax \mid x \in R\}$$

と書かれる  $(a)$  はイデアルであり、 $a$  によって生成される単項イデアルという。また、 $a, b \in R$  によって

$$(a, b) = \{ax + by \mid x, y \in R\}$$

と書かれる  $[a, b]$  もイデアルである。

体  $K$  上の多項式環  $K[T]$  も可換環であるため  $K[T]$  にもイデアルが存在する。このとき、 $K[T]$  のイデアルは単項イデアルしか存在しない。

*Proof.*  $I \neq \{0\}$  を  $K[T]$  のイデアルとする。 $I$  の元のうち最も次元が小さい元を  $f(T)$  とする。

ここで、任意に  $g(T)$  をとる。そして  $g(T)$  を  $f(T)$  で割ると

$$g(T) = q(T)f(T) + r(T) \quad (\deg(r(T)) < \deg(f(T)))$$

を満たす  $q(T), r(T) \in K[T]$  が存在する。また式を変形すると

$$\begin{aligned} g(T) &= q(T)f(T) + r(T) \\ \Leftrightarrow r(T) &= g(T) - q(T)f(T) \\ \Leftrightarrow r(T) &= g(T) + q(T)(-f(T)) \end{aligned}$$

となる。 $f(T), g(T) \in I$  であったこととイデアルの定義から  $r(T) \in I$  が得られる。ここで、 $r(T) \neq 0$  とすると  $\deg(r(T)) < \deg(f(T))$  であることから  $f(T)$  の最小性に矛盾する。したがって  $r(T) = 0$  である。よって  $g(T) = q(T)f(T)$  となり  $g(T) \in (f(T))$  となる。したがって  $I \subset (f(T))$  である。

逆に  $f(T) \in I$  であるため  $(f(T)) \subset I$  でもある。

以上より  $I = (f(T))$  が示された。 □

また、 $f(T), g(T) \in K[T]$  によって生成されるイデアル  $(f(T), g(T))$  は  $f(T)$  と  $g(T)$  の最大公約多項式を  $h(T)$  とすると

$$(f(T), g(T)) = (h(T))$$

が成立する。

*Proof.* 上述の定理により、ある  $n(T) \in K[T]$  が存在し

$$(f(T), g(T)) = (n(T))$$

である。ここで、 $f(T), g(T) \in (f(T), g(T))$  なので  $f(T), g(T) \in (n(T))$  である。よって  $n(T) \mid f(T)$  かつ  $n(T) \mid g(T)$  であり、 $n(T)$  は  $f(T), g(T)$  の公約多項式となる。したがって  $n(T) \mid h(T)$  である。

次に、 $n(T) \in (f(T), g(T))$  であるため、 $n(T) = f(T)x_0(T) + g(T)y_0(T)$  となる  $x_0(T), y_0(T) \in K[T]$  が存在する。したがって  $h(T) \mid n(T)$  である。

以上より  $n(T) \mid h(T)$  かつ  $h(T) \mid n(T)$  であるから、ある  $q(T), p(T) \in K[T]$  によって

$$h(T) = p(T)n(T) \quad n(T) = q(T)h(T)$$

と表される。この式から  $n(T)$  を消去すると  $h(T) = p(T)q(T)h(T)$  となり、 $h(T) \neq 0$  であるため

$$p(T)q(T) = 1$$

となる。したがって  $p(T) = q(T) = \pm 1$  となり、 $n(T) = h(T), n(T) = -h(T)$  となる。また、 $(h(T)) = (-h(T))$  であるため  $(f(T), g(T)) = (h(T))$  が示された。  $\square$

### 1.2.2 不定方程式

さて  $(f(T), g(T)) = (h(T))$  であるため、多項式環  $K[T]$  上の  $x(T), y(T) \in K[T]$  を不定元とする不定方程式

$$x(T)f(T) + y(T)g(T) = z(T)$$

は  $z(T)$  を  $f(T)$  と  $g(T)$  の最大公約多項式によって割り切るときに解が存在する。また  $x(T) = x_0(T), y(T) = y_0(T)$  を一つの解とすると

$$(x_0(T) + m(T)g(T))f(T) + (y_0(T) - m(T)f(T))g(T) = z(T)$$

は任意の  $m(T) \in K[T]$  に対して成立する。

したがって、ある不定方程式

$$x(T)f(T) + y(T)g(T) = z(T)$$

の解を一つ得ることができれば他の解も得ることができる。

## 2 概要

$F_q$  を位数  $q$  のガロア体として  $\mathbf{m}, \mathbf{w}, \mathbf{y}$  をそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= (m_0, \dots, m_{k-1}) \\ \mathbf{w} &= (w_0, \dots, w_{n-1}) \\ \mathbf{y} &= (y_0, \dots, y_{n-1})\end{aligned}$$

とする。 $\mathbf{m}, \mathbf{w}, \mathbf{y}$  はどれも  $F_q$  上のベクトルである。このとき  $\mathbf{m}$  を情報系列、 $\mathbf{w}$  を符号語、 $\mathbf{y}$  を受信語という。また、符号語  $\mathbf{w}$  は  $F_q$  上の  $k \times n$  行列に  $G$  によって

$$\mathbf{w} = \mathbf{m}G$$

と表される。この  $G$  は  $F_q$  上の原始根  $\alpha$  によって

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{k-1} & \cdots & \alpha^{(k-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

と定義する。そして受信語  $\mathbf{y}$  は符号語  $\mathbf{w}$  が通信路で雑音等によって確率的に変化したものとする。さらに  $n - k \times n$  の行列

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-k} & \cdots & \alpha^{(n-k)(n-1)} \end{pmatrix}$$

に対して

$$G^t H = 0$$

が成立する。ここで  $G$  によって得られる符号語の集合を

$$W = \{\mathbf{m}G \mid \mathbf{m} \in F_q^k\}$$

とすると、任意の  $\mathbf{w} \in W$  に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^t H &= \mathbf{m} G^t H \\ &= \mathbf{m} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

となるため、

$$\mathbf{w} \text{ が符号語である} \Rightarrow \mathbf{w}^t H = 0$$

が成立する。また、この符号語全体の集合  $W$  を符号という。

## 参考文献

- [1] “3 章 リード・ソロモン符号とその復号法 - J-Stage”, [https://www.jstage.jst.go.jp/article/itej/70/7/70\\_571/\\_pdf](https://www.jstage.jst.go.jp/article/itej/70/7/70_571/_pdf), 参照 Mar.9,2020.