

# ラッセルのパラドックス

## 1 概要

ラッセルのパラドックスとは、自分自身を含む集合に生じる矛盾のことである。以下のような集合

$$Q = \{x \mid x \notin x\}$$

を考える。この集合  $Q$  は自分自身を含まない集合を集めた族 (集合の集合) である。 $Q$  に含まれない集合の族を  $R$  とすると  $R$  は

$$R = \{x \mid x \in x\}$$

と書くことができる。これは自分自身を含む集合の族といえる。 $Q$  に含まれない集合が  $R$  であるため、 $R$  に含まれない集合は  $Q$  に含まれる。したがって、任意の集合は必ず  $Q$  もしくは  $R$  の元である。

ここで  $Q$  がどちらの元となるかを考える。まず、 $Q$  が  $Q$  の元であると仮定する。すると  $Q \in Q$  が成立するため、 $Q$  は  $R$  の元となり矛盾が生じる。したがって、 $Q$  は  $R$  の元である。しかし、 $Q$  が  $R$  の元であるため  $Q \in Q$  が成立する。これは矛盾となり、 $Q$  や  $R$  のような族を集合とすると矛盾が生じることが示された。

以上のような矛盾がラッセルのパラドックスである。