確率論 (Probability theory)

目次

<ins>定義 **1 :** 試行</ins> ある集合 Ω が与えられたとする。ある試行 T の結果として $A \subset \Omega$ の元が現れることを A が起こるといい、Ω を試行 T の見本空間、Ω の元を試行 T の見本点という。Ω が有限集合であるとき試行 T は有限試行、無限集合であるとき試行 T を無限試行という。また $A \subset \Omega$ を事象 A ともいう。

さいころをふるという試行の見本空間は $\{1,2,3,4,5,6\}$ であり事象 A がおこる確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{|A|}{6}$$

となる。

<ins>定義 **2 :** 余事象・和事象・交事象・差事象・排反事象</ins> ある試行 T と T の見本空間 Ω と、事象 $A, B \subset \Omega$ に対して以下を定義する。

余事象　$A^c = \Omega - A$ で表わされる Ω を全体集合とした A の余集合 A^c がおこることを A の余事象という

和事象　$A \cup B$ がおこることを A と B の和事象という

交事象　$A \cap B$ がおこることを A と B の交事象という

差事象　$A \setminus B$ がおこることを A お B の差事象という

排反事象　$A \cap B = \emptyset$ であるとき A と B を排反事象という

集合 A と B が $B \subset A$ であるようなとき A と B の差集合 $A \setminus B$ を $A - B$ と書き、特に $A - B$ と書いたときは $B \subset A$ であるとする。さらに A と B が $A \cap B = \emptyset$ であるとき A と B の和集合 $A \cup B$ を $A + B$ と書きこれを直和という。また、集合 A と B の直和が書かれたとき、$A \cap B = \emptyset$ であるとする。

<ins>定義 **3 :** 有限試行における確率測度</ins> ある試行 T の有限な見本空間 Ω とがあるとき、事象

$A \subset \Omega$ がおこる確率 $P(A)$ が以下を満たすとき、Ω 上の集合関数 P を確率測度という。

(P1) $P(A) \geq 0$

(P2) $P(A) + P(B) = P(A) + P(B)$

(P3) $P(\Omega) = 1$

定義 **4 :** 確率空間 ある試行 T の有限な見本空間 Ω と確率測度 P が与えられたとき、これらの組 (Ω, P) を確率空間という。

前述のさいころをふる試行の確率 P も直感的に確率測度であることがわかり、$(\{1,2,3,4,5,6\}, P)$ が確率空間であることもわかる。

定理 **1 :** P を Ω 上の確率測度とすれば、

(i) $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(ii) $P(B - A) = P(B) - P(A)$

(iii) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(v) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\{\omega\}$

が成立する。

Proof. (i) 帰納法を用いて証明する。$n = 1$ のときは自明であるため、$n = k$ のときに成り立つとして $n = k + 1$ のときを考える。まず、総和を分解することで

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right)$$

となる。そして、確率測度の定義より $P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(A_{k+1}\right)$ と

なり、仮定から

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(A_{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)
\end{aligned}
$$

が得られる。

(ii) $A \subset B$ であるため $(B - A) + A = B$ であるため、$P((B - A) + A) = P(B)$ となる。また $P((B - A + A)) = P(B - A) + P(A)$ であるため、

$$
\begin{aligned}
&P(B - A) + P(A) = P(B) \\
&\rightleftharpoons P(B - A) = P(B) - P(A)
\end{aligned}
$$

となり示される。

(iii) $P(B - A) = P(B) - P(A)$ のとき $B = \Omega$ とすれば $P(A^c) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$ となり示される。

(iv) $C = A \cap B, A' = A - C, B' = B - C$ とすれば $A \cup B = A' + B' + C = A + B - C$ である。よって確率測度の定義より

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(C) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

となり示される。

(v) $A = \sum_{\omega \in A} \{\omega\}$ であるため示される。

□

<u>**定理 2 : 包含排除公式**</u> 確率空間 (Ω, P) と、n 個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して以下が成立する。

(i) $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} P\left(\bigcap_{\kappa=1}^k A_{i_\kappa}\right)$

(ii) $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} P\left(\bigcup_{\kappa=1}^k A_{i_\kappa}\right)$

Proof. □

参考文献

[1] 伊藤清，“確率論 岩波基礎数学選書”，岩波書店，(1991).