幾何学 (Geometry)

目次

1 立体

定理 1 : 正多面体の双対性 (dual polyhedron of regular polyhedron) 立方体の各面を中心として作られる多面体は正八面体となる。逆の操作を正八面体に行うと立方体が得られる。この操作によって、正十二面体と正二十面体が互いに得られ、正四面体からは正四面体が得られる。

この立方体と正八面体、正十二面体と正二十面体、正四面体と正四面体の組は互いに双対であるという。特に正四面体は自己双対である。

錐体の体積 *(volume of conic solid).* ある高さ h の錐体の底面積を S とすると、頂点からの高さ z のところでの断面積 S' の相似比は

$$S : S' = h^2 : z^2$$

で表わすことができる。しがたって、

$$S' = \frac{z^2}{h^2} S$$

が成立し断面積 S' を高さで積分することで

$$\begin{aligned} \int_0^h S' dz &= \int_0^h \frac{z^2}{h^2} S dz \\ &= \frac{1}{3} hS \end{aligned}$$

となり、錐体の体積が示された。 □

球の体積 *(the volume inside a sphere).* 原点を中心として半径が r の球のを考える。中心から x 離れた所で球を切断した円の半径 $r'(x)$ は

$$r'(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

となる。したがって、中心から x 離れた所での断面積 $V_c(x)$ は

$$V_c(x) = \pi(r^2 - x^2)$$

となる。x を 0 から r まで積分することで半球の体積 V' は

$$\begin{aligned} V' &= \int_0^r \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

として得られる。球の体積は半球の体積の倍であるため球の体積 S は

$$V = 2V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

となる。 □

球の表面積 *(the surface area of a sphere).* 半径 r の球と半径 $r + \Delta r$ の球を考える。この二つの球の体積の差は

$$\frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

となる。また、この体積の差は半径 r の球の表面積と厚さ Δr の積ともいえる。したがって、表面積を S とすれば

$$\begin{aligned} S\Delta r &= \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ S &= \frac{\frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta r} \end{aligned}$$

となる。ここで $\Delta r \to 0$ の極限をとることを考えると、表面積 S は体積を微分したものそのものである。よって半径 r の球の表面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{d}{dr}\frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

となる。 □

2　線形変換

定義 1 : 線形変換 (linear transform)

定義 2 : 不動点 (fixed point) ある点 $\mathbf{x}$ と線形変換 f に対して

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$$

となるとき、$\mathbf{x}$ を線形変換 f の不動点という。

線形変換 f が行列 A で表されるとすると、f の任意の不動点 $\mathbf{x}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A\mathbf{x} \\ (A - I)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。ここで I は単位行列である。$(A - I)$ が正則であれば逆行列 $(A - I)^{-1}$ が存在し、不動点は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみである。正則でないとき $\det A - I = 0$ となるため A は固有値 1 を持つ。したがって

$$A \text{ に固有値 } 1 \text{ が存在する} \Leftrightarrow \text{不動点が } \mathbf{0} \text{ 以外に存在する}$$

が成立する。