

ラッセルのパラドックス

1 概要

ラッセルのパラドックスとは、自分自身を含む集合に生じる矛盾のことである。以下のような集合

$$Q = \{x \mid x \notin x\}$$

を考える。この集合 Q は自分自身を含まない集合を集めた族 (集合の集合) である。 Q に含まれない集合の族を R とすると R は

$$R = \{x \mid x \in x\}$$

と書くことができる。これは自分自身を含む集合の族といえる。 Q に含まれない集合が R であるため、 R に含まれない集合は Q に含まれる。したがって、任意の集合は必ず Q もしくは R の元である。

ここで Q がどちらの元となるかを考える。まず、 Q が Q の元であると仮定する。すると $Q \in Q$ が成立するため、 Q は R の元となり矛盾が生じる。したがって、 Q は R の元である。しかし、 Q が R の元であるため $Q \in Q$ が成立する。これは矛盾となり、 Q や R のような族を集合とすると矛盾が生じることが示された。

以上のような矛盾がラッセルのパラドックスである。