ペレリマン数列

1　概要

ペレリマン数列は加藤文元、仲井保行 “著の天に向かって続く数” という本に出てくる数列である。この数列 $p_n \quad (0 \le n)$ は

$$(p_n)^2 \equiv p_n \quad (mod 10^{n+1}) \tag{1.1}$$

となる整数の列である。

2　導出

1 以上の n に対して p_n を導出する手順を考える。

まず、ある数が p_n をある整数 d_1, d_2(ただし $0 \le d_1 < 10, 0 \le d_2 < 10^n$) によって

$$p_n = d_1 \times 10^n + d_2$$

と書くことができるとする。すると $(p_n)^2$ は

$$\begin{aligned} (p_n)^2 &= (d_1 \times 10^n + d_2)^2 \\ &= (d_1)^2 \times 10^{2n} + 2d_1 d_2 \times 10^n + (d_2)^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

となる。ここである 0 以上の整数 q と 0 以上 10^n 未満の整数 r によって

$$(d_2)^2 = q \times 10^n + r$$

とすれば式 (2.1) は

$$\begin{aligned} (d_1)^2 \times 10^{2n} + 2d_1 d_2 \times 10^n + (d_2)^2 &= (d_1)^2 \times 10^{2n} + 2d_1 d_2 \times 10^n + q \times 10^n + r \\ &= (d_1)^2 \times 10^{2n} + (2d_1 d_2 + q) \times 10^n + r \end{aligned} \tag{2.2}$$

と変形することができる。

さらに 0 以上の整数 p と 0 以上 10 未満の整数 s によって

$$2d_1 d_2 + q = p \times 10 + s$$

と置くと式 (2.2) は

$$
\begin{aligned}
(d_1)^2 \times 10^{2n} + (2d_1 d_2 + q) \times 10^n + r &= (d_1)^2 \times 10^{2n} + (p \times 10 + s) \times 10^n + r \\
&= (d_1)^2 \times 10^{2n} + p \times 10^{n+1} + s \times 10^n + r \\
&= \left[(d_1)^2 \times 10^{n-1} + p\right] \times 10^{n+1} + s \times 10^n + r
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

と書くことができる。

よって

$$(p_n)^2 = \left[(d_1)^2 \times 10^{n-1} + p\right] \times 10^{n+1} + s \times 10^n + r \equiv s \times 10^n + r \quad (mod 10^{n+1})$$

であり、 s と r の範囲から式 (2.3) を満たす s と r は一意に決まる。したがって式 (1.1) を満たすためには

$$s = d_1, \quad r = d_2$$

であることが必要十分条件となる。そして $r = d_2$ であるとき

$$(d_2)^2 = q \times 10^n + d_2 \equiv d_2 \quad (mod 10^n)$$

であるため $d_2 = p_{n-1}$ となる。

2.1 手順

p_n を求める手順を以下に示す。

1. p_{n-1} を求める
2. $(p_{n-1})^2 = q \times 10^n + p_{n-1} \rightleftharpoons (p_{n-1})^2 - p_{n-1} = q \times 10^n$ を満たす q を求める。
3. $q = 10p + (1 - 2p_{n-1})d$ を満たす p, d の組のうち、$0 \leq d < 10$ となる組み合わせを求める。
4. $p_n = d \times 10^n + p_{n-1}$ とすれば p_n が得られ、このとき $(p_n)^2 = \left(d^2 \times 10^{n-1} + p\right) \times 10^{n+1} + d \times 10^n + p_{n-1}$ となる