

## リーマン積分 (Riemann integral)

**定義 1: 分割** 実数上のある有界閉区間  $I = [a, b]$  に対して数列  $\{a_i\}_{i=0}^n$  が

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

を満たすとき、数列  $\{a_i\}_{i=0}^n$  を  $I$  の分割という。とくに数列  $\{a_i\}_{i=0}^n$  の項が一般に  $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$  であるとき、 $I$  の  $n$  等分の分割という。また、 $I$  の分割  $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$  に対して  $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$  とする。

**定義 2: 過剰和・不足和**  $I$  上の有界関数  $f(x)$  と  $I$  の分割  $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$  に対して、過剰和  $S(f, \Delta)$  と不足和  $s(f, \Delta)$  を

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1})$$
$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \inf \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1})$$

と定める。

**定義 3: 上積分・下積分**  $I$  上の有界関数  $f(x)$  に対して、 $f$  の区間  $I$  での上積分  $S(f)$ 、下積分  $s(f)$  を

$$S(f) = \inf \{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ の任意の分割}\}$$
$$s(f) = \sup \{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ の任意の分割}\}$$

と定める。