リーマン積分 (Riemann integral)

<u>定義 1 : 分割</u> 実数上のある有界閉区間 $I = [a, b]$ に対して数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

を満たすとき、数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ を I の分割という。とくに数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ の項が一般に $a_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$ であるとき、I の n 等分の分割という。また、I の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$ に対して $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i - a_{i-1})$ とする。

<u>定義 2 : 過剰和・不足和</u> I 上の有界関数 $f(x)$ と I の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$ に対して、過剰和 $S(f, \Delta)$ と不足和 $s(f, \Delta)$ を

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1})$$
$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \inf \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1})$$

と定める。

<u>定義 3 : 上積分・下積分</u> I 上の有界関数 $f(x)$ に対して、f の区間 I での上積分 $S(f)$、下積分 $s(f)$ を

$$S(f) = \inf \left\{ S(f, \Delta) \;\middle|\; \Delta \text{ は } I \text{ の任意の分割} \right\}$$
$$s(f) = \sup \left\{ s(f, \Delta) \;\middle|\; \Delta \text{ は } I \text{ の任意の分割} \right\}$$

と定める。

参考文献