

# Equazione di Black-Scholes-Merton

Edoardo Battiti, Marco Chiloire, Francesco Musso

8 maggio 2020

## 1 Introduzione

In questa esperienza risolviamo numericamente una pde di diffusione conosciuta in campo matematico finanziario come equazione di Black-Scholes-Merton.

## 2 Descrizione del problema

L'equazione deriva dai concetti di arbitraggio e di hedging: il primo consiste nella possibilità di acquistare e vendere beni su due mercati diversi, sfruttando le differenze di prezzo tra i due; il secondo consiste in una strategia volta a tutelare un investimento a termine, come gli European vanilla options, da possibili fluttuazioni impreviste del prezzo dei beni acquistati. L'utilizzo di questi concetti permette di ipotizzare l'esistenza di profitti senza rischio, non esistenti nella realtà, ma corretti in buona approssimazione. Un esempio di questi profitti potrebbero essere quelli derivanti da un deposito in banca o dall'investimento in bond di un Paese. In questo progetto lavoriamo con gli European Vanilla options, cioè degli scambi di beni in cui possiamo stipulare a priori un contratto per acquistare un prodotto a un tempo successivo  $T$ , ad un prezzo stabilito  $E$ . Successivamente al tempo  $T$  potremo decidere se acquistare o meno il prodotto, in base a quale è diventato il suo valore  $S$ : se  $S > E$  lo scambio sarà conveniente e possiamo concludere l'affare con un profitto  $S - E$ , al contrario se  $S < E$  non ci converrà e avremo la possibilità di non acquistarlo. Il costo del contratto è inferiore rispetto ad  $E$  e lo consideriamo nullo. Dunque possiamo definire una funzione con il nostro guadagno al tempo  $T$  come  $C(S, T) = \max(S - E, 0)$ .

Definiamo la funzione  $V(S, t)$  che stabilisce il valore della nostra opzione (il contratto) nel tempo, che dipenderà dai seguenti parametri: la volatilità  $\sigma$  del valore dell'asset  $S$ ; il prezzo  $E$ ; il tempo di acquisto  $T$ ; il tasso di interesse dei depositi a rischio nullo  $r$ . La seguente equazione descrive la camminata casuale seguita da  $V$

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

dove il differenziale  $dX$  descrive un processo di Wiener e  $\mu$  è una costante di deriva conosciuta. La corrispondente pde Black-Scholes è

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - rV(S, t) = 0$$

Possiamo ora applicare il cambio di variabile  $k(t) = T - t$  in modo tale da far procedere l'equazione differenziale dal futuro tempo  $T$  fino al presente e notiamo che  $\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} = -\frac{\partial V(S, k)}{\partial k}$  e dunque possiamo cambiare nuovamente  $k$  con  $t$ . Otteniamo dunque l'equazione

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) - rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) + rV(S, t) = 0$$

con le condizioni iniziali

$$V(S, 0) = \max(S - E, 0)$$

e le condizioni al contorno

$$\begin{cases} V(0, t) = 0 \\ V(S, t)/S \rightarrow 1 \text{ for } S \rightarrow \infty \end{cases}$$

Dalla risoluzione dell'equazione differenziale con queste condizioni iniziali e al contorno siamo dunque in grado di prevedere il momento ideale per comprare o vendere gli asset massimizzando il nostro guadagno.

### 3 Algoritmo utilizzato

Dividiamo l'intervallo temporale  $[0, T]$  in  $M$  parti e creiamo il vettore  $vm$  di  $N$  elementi al tempo  $t=0$  utilizzando la condizione iniziale precedentemente riportata nell'intervallo  $S \in [0, 3E]$ .

Eseguiamo un ciclo che va da 0 a  $M$ , calcolando ad ogni passo il vettore  $v$  al tempo successivo e salvandolo nel vettore  $vm1$ . Alla fine di ogni passo, dopo aver salvato il vettore  $vm1$  in un file csv sovrascriviamo il vettore  $vm$  con i valori di  $vm1$  in modo tale che esso venga utilizzato come input al passo successivo.

Il passo del ciclo è la parte dell'algoritmo in cui si implementa la risoluzione della pde di diffusione: esso consiste nel nell'assegnare i valori del vettore  $vm1$  utilizzando la seguente formula

$$v_n^{m+1} = \frac{1}{2}(\alpha n^2 - \beta n)v_{n-1}^m + (\alpha n^2 - \beta)v_n^m + \frac{1}{2}(\alpha n^2 + \beta n)v_{n+1}^m$$

dove  $m$  è l'indice temporale, mentre  $n$  è l'indice che scorre sul vettore  $vm$ .

Nella nostra implementazione abbiamo definito i coefficienti degli elementi del vettore  $vm$  in modo tale che facendo variare  $n$  nell'intervallo  $[1, N - 1]$

i termini  $v_{n-1}^m$  e  $v_{n+1}^m$  risultino sempre determinati e il termine  $v_{N+1}^m$  risulti sempre determinato dalla condizione al contorno riportato nella sezione precedente.

Inizialmente avevamo implementato una configurazione differente che utilizzava una matrice che conteneva i vettori  $vm$  per tutti gli  $m$ . Mentre nella prima configurazione, con  $N=200$  e  $M=2000$ , questa implementazione non presentava alcun tipo di problema, nel caso con  $N=1000$  e  $M=41000$  la matrice diventava dimensionalmente troppo grande, occupando un grande spazio nella memoria e quindi non gestibile dal calcolatore che non riusciva a terminare il programma.

## 4 Risultati

La soluzione esatta  $V_{exact}$  per il problema è calcolata usando la relazione:

$$V(S, t) = SN(d_1) - Er^{-r(T-t)}N(d_2)$$

dove  $N(\cdot)$  rappresenta la funzione di distribuzione cumulativa di una variabile casuale normale standard, data da:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

e

$$d_{1,2} = \frac{\log(S/E) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Riportiamo i grafici delle  $V(S, t)$  soluzioni approssimate e delle  $V_{exact}(S, t)$  soluzioni esatte, nel caso  $N = 200$ ,  $M = 2000$  e nel caso  $N = 1000$  e  $M = 41000$ .

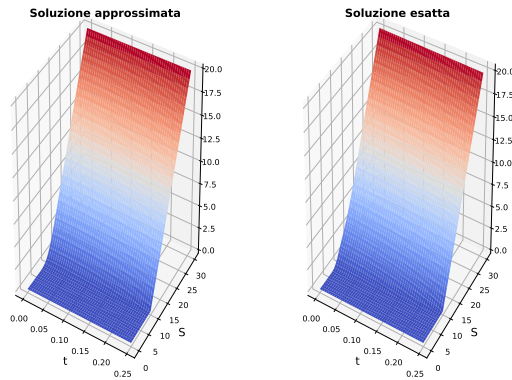


Figura 1: Confronto  $V(S, t)$  con  $N=200$  e  $M=2000$

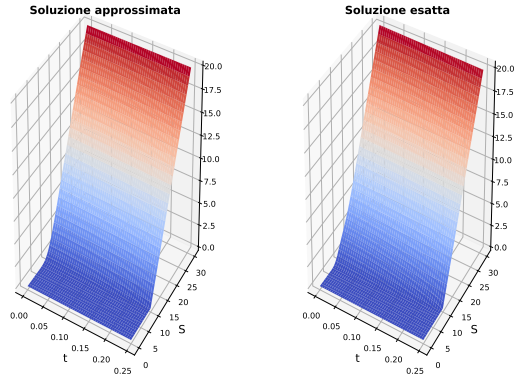


Figura 2: Confronto  $V(S, t)$  con  $N=1000$  e  $M=41000$

Osserviamo che i grafici delle soluzioni approssimate coincidono con i grafici delle soluzioni esatte.

Riportiamo ora i grafici delle soluzioni  $V(S, t = T/2)$  in funzione di  $S \in [0, S_{max}]$

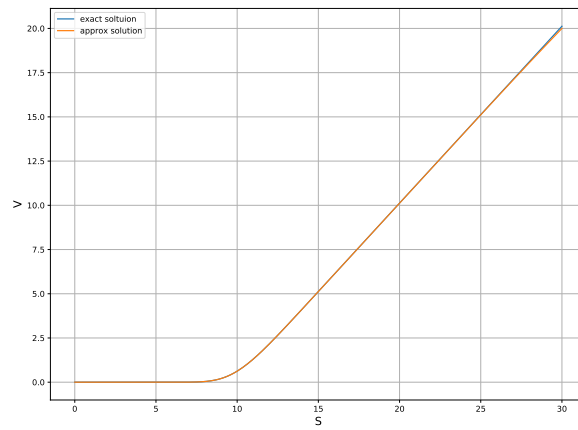


Figura 3:  $V(S)$  a  $T/2$  con  $N=200$  e  $M=2000$

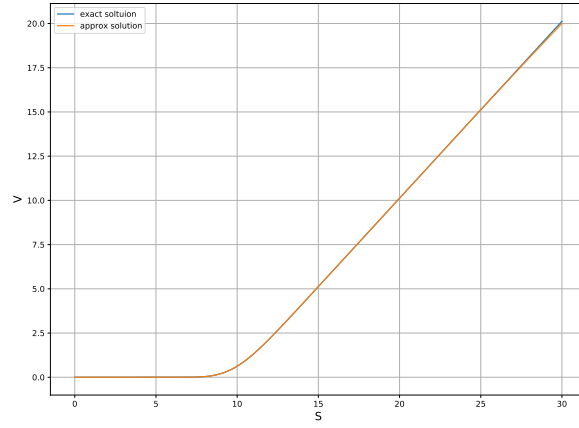


Figura 4:  $V(S)$  a  $T/2$  con  $N=1000$  e  $M=41000$

La differenza tra le condizioni al contorno  $V(S_{max}, t)$  e  $V(0, t)$  causa un errore crescente sulle soluzioni quando  $V(S, t) \rightarrow S_{max}$ . Questo lo osserviamo dai seguenti grafici sull'errore di  $V(S, t = T/2)$  in funzione di  $S$ .

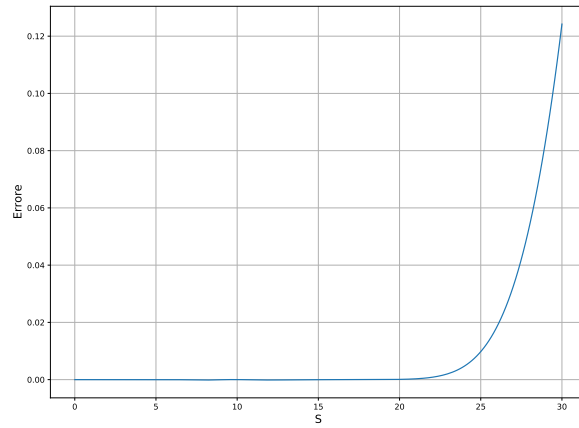


Figura 5: Errore di  $V(S)$  a  $T/2$  con  $N=200$  e  $M=2000$

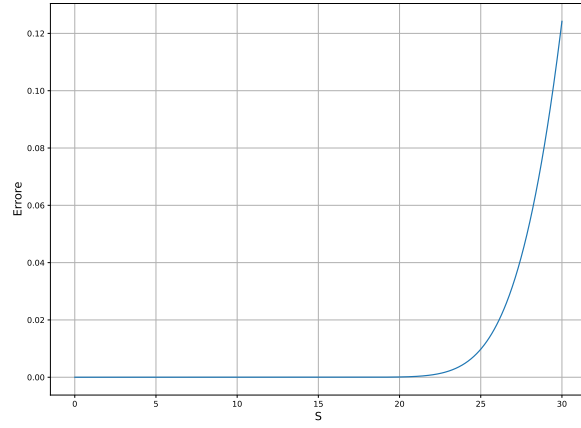


Figura 6: Errore di  $V(S)$  a  $T/2$  con  $N=1000$  e  $M=41000$