Stella di Neutroni

Edoardo Battiti, Marco Chiloiro, Francesco Musso

11 aprile 2020

1 Introduzione

In questa esperienza studiamo numericamente l'andamento della densità di massa in funzione del raggio di una stella di neutroni seguendo un modello sulla falsa riga del gas di elettroni.

2 Descrizione fisica del problema

Nel modello utilizzato la stella di neutroni è descritta come una sfera: una massa dipendente solo dal raggio. Ciò permette di considerare la variazione infinitesima di massa come $dm = dV\rho(r)$, dove dV è la variazione infinitesimale di volume e ρ è la densità di massa. Utilizzando la legge di Newton per la forza gravitazionale si ottiene:

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M(r)\rho(r)}{r^2}$$

Utilizzando il modello del gas omogeneo di elettroni non interagenti, a temperature T $\sim 0\,$K, i neutroni riempono la sfera di Fermi fino ad un vettore d'onda masssimo K_f. L'Hamiltoniana del sistema è data da:

$$H = \sum_i \frac{(\hbar k_i)^2}{2m}$$

La pressione risulta essere un'equazione politropica:

$$P = k\rho^{(1+1/n)}$$

con $n = \frac{3}{2}$, k è uguale a:

$$k_{3/2} = \frac{\hbar^2(3\pi^2)^{2/3}}{5m^{8/3}}$$

dove m è la massa del neutrone.

Possiamo riscrivere dunque ρ e P come:

$$\rho = \rho_c\theta^n(r)$$

$$P = P_c \theta^{n+1}$$

Riscalando la distanza in funzione di un parametro adimensionale ξ, tale che $r = \alpha\xi$, dove α è una costante in metri che raggruppa le costanti presenti nell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr}\Big) = -G\frac{dM(r)}{dr} = -G4\pi\rho(r)r^2$$

si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2\frac{d\tilde{\theta}(\xi)}{d\xi}\Big) = \tilde{\theta}(\xi)^n$$

dove $\tilde{\theta}(\xi) \equiv \theta(r)$.

Riscrivendo l'equazione differenziale di secondo grado in due di primo grado si possono ottenere dei risultati numerici utilizzando l'algoritmo Runge-Kutta per le equazioni differenziali di primo grado.

$$\begin{cases} \phi(\xi) = \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \\ \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{\xi}\phi(\xi) - \tilde{\theta}^n(\xi) \end{cases}$$

Facendo variare n nell'intervallo $[1.5, 3]$ consideriamo anche il caso in cui i fermioni (i neutroni nel nostro caso) sono interagenti. Studiamo anche i casi per $n < 1.5$ e $n > 3$.

Successivamente utilizzando il valore $\bar{\xi}$ per cui la densita si annulla (per $n = 1.5$) e conoscendo la relazione riportata di seguito possiamo ottenere l'andamento della massa della stella in funzione del raggio.

$$M(R) = -4\pi\Big(\frac{5k_{3/2}}{8\pi G}\Big)^3\frac{\bar{\xi}^5}{R^3}\phi(\bar{\xi})$$

3 Algoritmo utilizzato

Il nostro algoritmo è formato da un ciclo *for* all'interno del quale facciamo variare il parametro n da 1.5 a 3 con degli incrementi di 0.25. All'interno di questo ciclo definiamo le condizioni iniziali dell'equazione differenziale e implementiamo l'algoritmo Runge-Kutta (quarto ordine) e salviamo i valori di ξ θ e ϕ in un file .csv.

Creiamo il vettore delle ξ impostando il primo elemento a 10^{-4} e facendo incrementare gli elementi seccessivi di 10^{-3}. Il ciclo del Runge-Kutta è fatto in modo tale da interrompersi quando il valore di θ scende o sotto lo zero o al di sotto di un valore di soglia da noi stabilito pari a 10^{-6}.

Inoltre per il valore di $n = 1.5$ facciamo in modo che il programma salvi i due valori finali di $\bar{\xi}$ e $\phi(\bar{\xi})$ che verranno utilizzati in seguito. Una volta terminati i cicli per ogni valore di n procediamo con la valutazione del raggio della stella in funzione della sua massa. Impostiamo un vettore con i valori di massa iniziale e finale rispettivamente di 1.5 masse solari e 3 masse solari, con un incremento dato dalla differenza tra i due valori divisa per il numero di elementi del vettore. Fatto ciò impostiamo un ciclo *for* in modo tale che si costruisca il vettore della massa, partendo dal valore iniziale e incrementandolo man mano, e il valore di raggio corrispondentee, sfruttando la funzione "radius" definita prima del main. Creiamo il file .csv inserendo i valori uno alla volta quando incrementa l'indice del ciclo *for* e plottiamo il risultato.

4 Risultati

Dai risultati ottenuti, come si può evincere dai grafici si nota come il modello perde di significato se utilizziamo dei valori di n al di fuori dell'intervallo $[1.5, 3]$.
Per $n > 3$, in particolare per $n = 4.5$, vediamo che la densità tende a 0 per il raggio che tende all'infinito, cosa che possiamo interpretare come l'splosione della stella.
Per $n < 1.5$ invece, con $n = 1$, la densità oscilla tra valori positivi e negativi all'aumentare del raggio, cosa che possiamo interpretare come il collasso della stella.

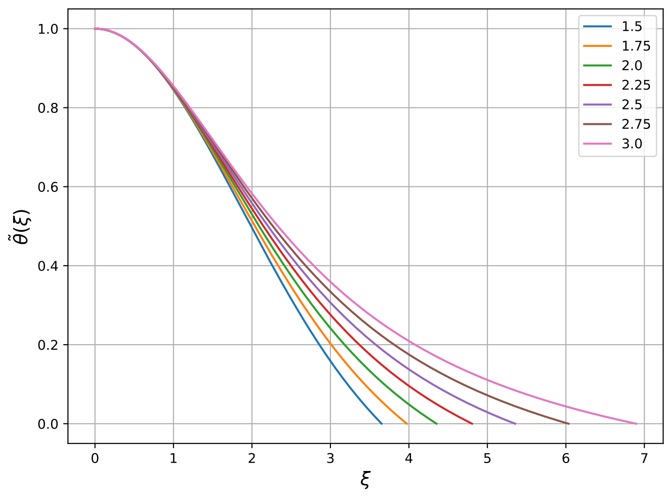

Figura 1: Densità con $n \in [1.5, 3]$

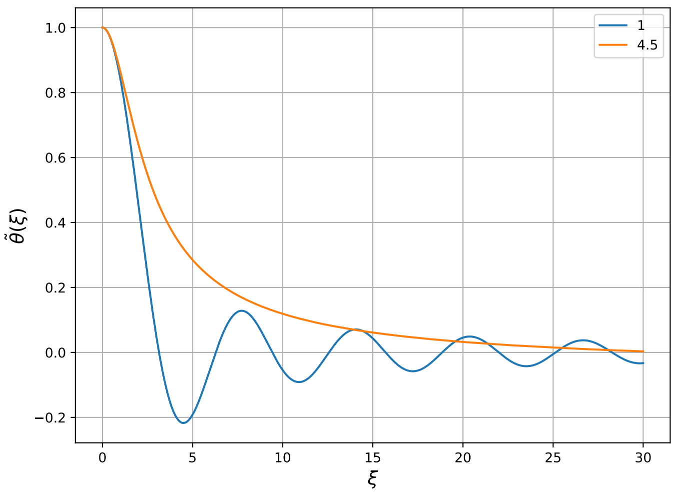

Figura 2: Densità non accettabili per $n = 1$, $n = 4.5$

Per quanto riguarda invece i dati ottenuti per n compreso in $[1.5, 3]$ otteniamo dei risultati in linea con i grafici datici come riferimento nella scheda dell'esercitazione.

Per $n = 1.5$ l'andamento della massa in funzione del raggio risulta essere quello riportato nelle figura seguente.

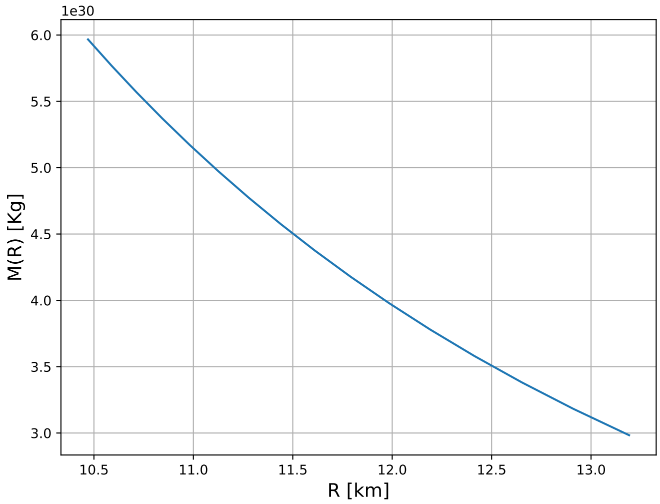

Figura 3: Massa della stella in funzione del raggio (con n=1.5)