Excercise III, Computational Physics

Dipartimento di Fisica, Università di Trento

April 20, 2020

1 The finance Equation:La Black-Scholes-Merton

It is a recipe for disaster to give one or two people complete authority to trade derivatives without a close monitoring of the risks being taken (Hull Options, futures and Other Derivatives).

Il task di questo esercizio è lo studio dell'equazione Black-Scholes-Merton che è uno degli strumenti fondamentali della finanza.Questo approccio è anche detto hedging.

Per il nostro esercizio ci limiteremo agli European Call "Vanilla" stock options, tuttavia vale in generale per ogni sorta di derivato (si intende derivato ogni prodotto finanziario che deriva dall'asset attraverso una funzione deterministica).

L'asset è una qualunque risorsa o proprietà si possa comprare in borsa. Nell'European Call option si ha la possibilità di comprare o no, ad un tempo T, con un presso stabilito E l'asset. Di qui si sviluppa, la speculazione.

Definendo l'asset (stock) price S, si assume che S sia un processo Markoviano (e che non ci sia arbitragio).

La variazione di S si può riscrivere come

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{1}$$

μdt rappresenta un contributo deterministico (per esempio un interest rate) ed una parte nondeterministica con σ come standard deviation istantanea. dz è un processo stocastico con un valor medio stazionario uguale a zero e con varianza uguale a dt. Assumiamo che il valore $V(t)$ del derivato sia una funzione deterministica dello stock price S

$$V(t) = f(S(t), t) \tag{2}$$

Ogni speculatore ha un portfolio $\pi(t)$ che consiste di $a(t)$ risk-free security con price R(t), $b(t)$ di sotck price $S(t)$ dunque:

$$\mathit{\Pi} \equiv \alpha(t)R + \delta(t)S + V \tag{3}$$

dove $dR \equiv rRdt$

Dalla teoria, si ha che ogni funzione $V(S, t)$

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz \tag{4}$$

La variazione di V dopo un tempo dt sarà (da ora $\frac{\partial V}{\partial S} \equiv V_S$ e la notazione vale anche per la partial derivative t):

$$d\Pi = \alpha dR + \delta dS + dV = \left(r\alpha R + \mu S V_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + V_t \right) dt + \sigma S V_S dz + \delta S(\mu dt + \sigma dz) \quad (5)$$

E' a questo punto che, l'idea dell'**Hedging**, entra in gioco. Se si pone $\delta \equiv -V_S$ allora i due termini in dz (termine aleatorio) si cancellano:

$$d(V + \delta S) = (V_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS}))dt \quad (6)$$

Abbiamo tolto la parte stocastica e l'equazione è diventata deterministica. Ora se investissimo il nostro valore aumentato $d\Pi$ in un riskless asset, riceveremmo un ritorno di $r\Pi dt$. Se questo ritorno fosse più piccolo di $d\Pi$ allora potremmo prendere in prestito i soldi da una banca e comprare gli asset aumentati senza alcun rischio. Al contrario, se $r\Pi dt$ fosse più grande del prezzo dell'asset allora potremmo mettere Π in banca per poi comprare l'asset. Dunque in un hedged market, dobbiamo porre (no arbitrage assumption)) la condizione di *fair price*:

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (7)$$

$$\boxed{V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV + rSV_S = 0} \quad (8)$$

Questa è l' equazione **Black-Scholes(-Merton)** (BS). La BS può essere trasformata in un'equazione di diffusione del calore.

bisogna notare che è una PDE parabolica backward, cioè che può essere risolta prendendo come valore iniziale $t = T$ (il payoff time) e facendola correre fino a $t = 0$.

Esercizio: Applichiamo la BS ai Vanilla European Call Option. European call Option sono dei prodotti in cui si può esercitare il diritto di compera ad un tempo prefissato T: Se al t=T il valore è $S > E$ allora , ottenendo il profitto S-E. Al contrario, si rinuncia a comperare il prodotto.

$$f(S, t = T) = \max(S - E, 0) \quad (9)$$

Se si pone il cambio di variabile

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$$
$$x = \ln\left(\frac{S}{E}\right) \quad (10)$$
$$v = \frac{V}{E}$$

mostrare che diviene un'equazione di diffusione.

$$v_\tau = v_{xx} + av_x + bv \quad (11)$$

dove $a = (2r/\sigma^2) - 1$ e $b = -(2r/\sigma^2)$ riscrivetela con una nuova variabile u=u(v)

$$u_\tau = u_{xx} \quad (12)$$

$$u(x, 0) = \max\left(2\exp\left(\frac{r}{\sigma^2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right), 0\right) \quad (13)$$

1.1 Implementazione numerica della BS

Applichiamo un cambio di variabile:

$$k(t) = T - t \tag{14}$$

Così

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial k} \tag{15}$$

riscrivendo k come t si ha:

$$V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rV - rSV_S = 0 \tag{16}$$

con la condizione iniziale

$$V = \max(S - E, 0) \tag{17}$$

Con le condizioni a contorno:

$$\begin{gathered} V(0,t) = 0 \\ V(S,t)/S \to 1 \text{ for } S \to \infty \end{gathered} \tag{18}$$

task: sviluppare il conto numerico con il metodo esplicito Ponendo $S_{max} = 3E$ l'intervallo per $S \equiv [0, S_{max}]$ viene diviso per N steps e il tempo $S_{max} = 3E$

$$V_{max}(S_{max}, t) = S_{max} \text{ for } t \equiv [0, T] \tag{19}$$

Hints

$$\begin{aligned} V_t(n\Delta S, m\Delta t) &= \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ V_S(n\Delta S, m\Delta t) &= \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{2\Delta S} + O(\Delta S^2) \\ V_{SS}(n\Delta S, m\Delta t) &= \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_n^m}{2(\Delta S)^2} + O((\Delta S)^2) \end{aligned} \tag{20}$$

abbiamo cosiì la forma discretizzata:

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2 n^2 (\Delta S)^2 \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{2(\Delta S)^2} - rn\Delta S \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{2\Delta S} + rv_n^m = 0 \tag{21}$$

Definendo

$$\begin{gathered} \alpha = \sigma^2 \delta t \\ \beta = r\Delta t \end{gathered} \tag{22}$$

e si ottiene

$$v_n^{m+1} = \frac{1}{2}(\alpha b^2 - \beta n) v_{n-1}^m + (\alpha n^2 - \beta) v_n^m + \frac{1}{2}(\alpha n^2 + \beta n) v_{n+1}^m \tag{23}$$

vettorizzando v e con le condizioni di stabilità :

$$0 < \Delta t < \frac{1}{\sigma^2(N-1) + \frac{1}{2}r} \tag{24}$$

(se uno volesse vedere la derivazione : Ikonen, S. – Black-Scholes-yhtalosta ja sen numeerisesta ratkaisemisesta differenssimenetelm alla, MD Thesis, University of Jyvaskyla, Finland, 2001.)

DATI per l'evoluzione di un'European call option: T=0.25, E=10.0, r=0.1 σ=0.4

Mostrare i risultati e compararli con la soluzione analitica per S differenti e con i casi N=200, M=2000 e N=1000, M=41000

facoltativo: Implementare il fully implicit method per la BS.