

Excercise II, Computational Physics

Dipartimento di Fisica, Università di Trento

April 7, 2020

1 STELLA DI NEUTRONI

In questo modello si descrive la stella di neutroni come una sfera ovverosia una massa dipendente solo radialmente. La massa infinitesima si scrive in funzione della densità $\rho(r)$ $dm = dV\rho(r)$. All'equilibrio si ha che la forza esercitata dalla gravità su una parte infinitesima della corona circolare di spessore dr a distanza r (Fig.2) è (G costante di gravitazione universale):

$$dF = -G \frac{M(r)dm}{r^2} = -G4\pi M(r)\rho(r)dr \quad (1)$$

con

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dF}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \quad (3)$$

1.1 Gas omogeneo di fermioni

Per il nostro modello, richiamiamo il gas omogeneo di elettroni (HEG) (in realtà , qui stiamo trattando dei neutroni, fermioni non interagenti elettromagneticamente) a $T \sim 0$ K, gli elettroni non sono interagenti e riempiono la sfera di Fermi fino ad un vettore d'onda massimo K_F . Nell'HEG abbiamo gli elettroni sono non interagenti: L'autofunzioni sono

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4)$$

hanno un'Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m} = \sum_i \frac{(\hbar k_i)^2}{2m} \quad (5)$$

con l'energia totale E

$$E = \sum_i \frac{(\hbar k_i)^2}{2m} \quad (6)$$

Ora si può calcolare il numero di elettroni considerando che per la direzione dello spazio x, $k_x = \frac{2\pi}{L}n_x$ (analogamente per le direzioni spaziali y,z)

$$N = \sum_i 2n_{xi}n_{yi}n_{zi} = \sum_i \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k_{xi}k_{yi}k_{zi} \simeq 2 \int^{K_F} \frac{V}{(2\pi)^3} d\mathbf{k} \quad (7)$$

dove il 2 è la degenerazione di spin per livello energetico. Ovverosia, e come se si facesse un'integrazione su una sfera dove il valore massimo e' il vettore d'onda K_F che è legato all'energia di Fermi . Di fatti, s'integra su una sfera (definita sfera di Fermi, Fig. (1)) nello spazio dei vettori d'onda,

Dunque il numero massimo di elettroni si calcola come: $N = \frac{V}{(2\pi)^3} 2 \int_0^{K_F} d\mathbf{k}$. La densità è omogenea $\rho = N/V$

$$\rho = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} 2 \int_0^{K_F} k^2 dk = \frac{K_F^3}{3\pi^2} \quad (8)$$

mentre l'energia totale E :

$$E = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} 2 \int_0^{K_F} k^2 k^2 dk = \frac{V\hbar^2}{2m\pi^2} \frac{K_F^5}{5} \quad (9)$$

esplicitando K_F in funzione della densità (eq. 8) ed utilizzando

$$P = -\frac{dE}{dV} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m\pi^2} \frac{(3\pi^2\rho)^{5/3}}{5} + \frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial V} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial V} = \left(\frac{V\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{2/3} \right) \left(-\frac{\rho}{V} \right) \quad (11)$$

$$P = \frac{\hbar^2}{m} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3}}{5} \quad (12)$$

La pressione è un'equazione politropica cioè :

$$P = k\rho_m^{(1+\frac{1}{n})} \quad (13)$$

in cui $n = \frac{3}{2}$ e considerando la densità di massa $\rho_m = \rho m$ (m massa neutrone)

$$k_{3/2} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{2m^{8/3}} \quad (14)$$

Nel caso ultrarelativistico si ha che l'energia è (c velocità della luce nel vuoto):

$$E = \frac{V}{\pi^2} \hbar c 2m\pi^2 \frac{K_F^4}{4} \quad (15)$$

e per la pressione

$$P = \frac{\hbar}{4\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{m} \right)^{4/3} \frac{1}{3} \rho^{4/3}. \quad (16)$$

Anch'essa e' un equazione politropica con n=3. L'equivalente dell'eq. 3 è l'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) (qui solo il risultato finale)

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 - \frac{2M(r)G}{c^2 r} \right)^{-1} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right) \left(1 + P(r) \frac{4\pi r^3}{c^2 M(r)} \right) \quad (17)$$

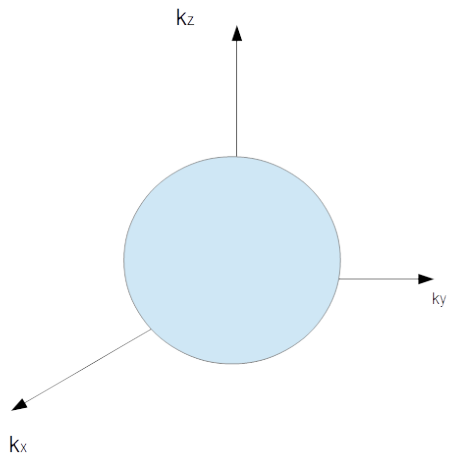


Figure 1: . Sfera di Fermi

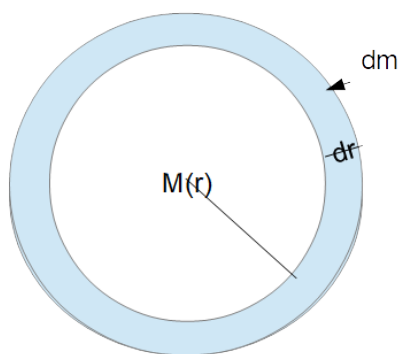


Figure 2: . Stella di neutroni

1.2 Equazioni di Lane Emden

Lasciando cadere l'inciso m dalla densità di massa ρ_m la densità e la pressione vengono riscritte. Ci sono due motivi: uno è che il fattore n viene così ad essere esplicitato per descrivere sia il caso non relativistico e relativistico. L'altro motivo è che variando i valori di n , si può fenomenologicamente descrivere anche il caso dei fermioni interagenti:

$$\rho = \rho_c \theta^n(r) \quad (18)$$

$$P = P_c \theta^{n+1}(r) \quad (19)$$

Riscaliamo la distanza con una quantità adimensionale ξ t.c. $r = \alpha \xi$, dall'eq. 3 di e riscriviamo le eqs. 2 e 3 :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right) = -G \frac{dM(r)}{dr} = -G 4\pi \rho(r) r^2 \quad (20)$$

Inserendo nell'eq. 20 le eqs. 18 e 19 e definendo la costante α

$$\alpha^2 \equiv \frac{k_n \rho_c^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} (n+1)}{4\pi G} \quad (21)$$

e definendo $\tilde{\theta}(\xi) \equiv \theta(r)$ l'eq.20 diviene:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\tilde{\theta}(\xi)}{d\xi} \right) = -\tilde{\theta}(\xi)^n \quad (22)$$

Questa equazione differenziale al secondo ordine può essere riscritta come un sistema di equazioni differenziali del primo ordine ponendo

$$\begin{cases} \phi(\xi) \equiv \frac{d\tilde{\theta}(\xi)}{d\xi} \\ \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} = -\frac{2}{\xi} \phi(\xi) - \tilde{\theta}^n(\xi) \end{cases}$$

Ponendo $\theta(0) = 1$ così da avere $\rho(0) = \rho_c$ al centro della stella. Inoltre, considerando che il sistema sia in equilibrio al centro ci dovrà essere una pressione massima quindi $\phi(0) = 0$.

TASK: Il sistema si può integrare con un Runge-Kutta.

I risultati vanno mostrati con grafici sia per la densità che per la pressione. Ripetere per diversi valori di $n \in [1.5, 3]$. Verificare che per superiori a questo range la stella collassa od esplode.

Si può riconvertire considerando dai dati sperimentali la massa di una stella di neutroni come: $M = 3M_\odot$ Essendo $\bar{\xi}$ il valore per cui la densità diviene zero ($\theta(\bar{\xi}) = 0$) (utilizzando l'eq.22 nell'ultimo passaggio)

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = \int_0^{\bar{\xi}} 4\pi \alpha^3 \rho_c \xi^2 \tilde{\theta}^n(\xi) d\xi = - \int_0^{\bar{\xi}} \alpha^3 \rho_c 4\pi d(\xi^2 \phi(\xi)) \\ &= -\alpha^3 \rho_c 4\pi \bar{\xi}^2 \phi(\bar{\xi}) \end{aligned} \quad (23)$$

Quantity	Units
$[P]$	$MeV fm^{-3}$
$[\rho_m]$	$MeV c^{-2} fm^{-3}$
M_\odot	$1.989 \times 10^{30} Kg$
G	$\hbar c 6.67259 \times 10^{-45} MeV^{-2} c^4$
$\hbar c$	$197.327 MeV fm$

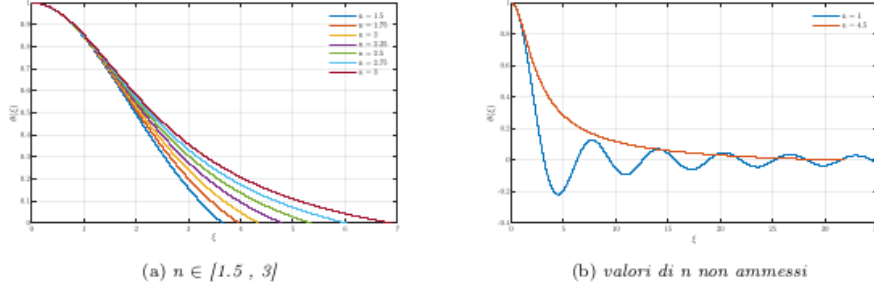


Figure 3: . Hints

1.3 Calcolo della Massa

Dai conti numerici, conosciamo $\bar{\xi}$ e $\phi(\bar{\xi})$. Considerando R , il raggio della stella e l'eq. 21 con $n = 3/2$:

$$\alpha = \frac{R}{\bar{\xi}} \quad (24)$$

ed

$$\rho_c^{1/3} = \left(k_{3/2} \frac{5}{8\pi G \alpha^2} \right) \quad (25)$$

inserendo il tutto nella eq.23

$$M(R) = -4\pi \left(\frac{5k_{3/2}}{8\pi G} \right)^3 \frac{\bar{\xi}^5}{R^3} \phi(\bar{\xi}) \quad (26)$$

TASK: Dato che la massa misurata di queste stelle varia tra $1.5M_\odot < M < 3M_\odot$ plottare $M(r)$ in funzione di R in questo range, ovvero determinare il valore di R nel range sperimentale della Massa indicato.

Facoltativo Si ripetono gli stessi task per l'eq. TOV.

2 Hints

Dovrebbero venire dei risultati simili alla Fig. 3