

Esperienza 5

Brugnara Fabio
Debiasi Maddalena
Musso Francesco
Gruppo A01

24 ottobre 2019

1 Filtro passa-basso del secondo ordine

In questa esperienza sono stati realizzati e analizzati tre filtri passa-basso del secondo ordine, riportati in figura 1. Questi tre circuiti sono stati studiati in termini di guadagno, impedenza in uscita e risposta impulsionale.

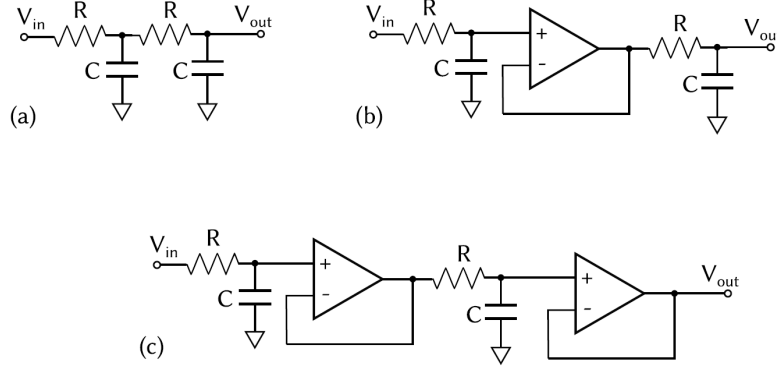


Figura 1: Filtri realizzati

Assumendo che gli op-amp abbiano un comportamento ideale, sono state calcolate le 3 diverse funzioni di trasferimento nel dominio delle frequenze (i pedici a e b rappresentano le funzioni dei circuiti così chiamati in figura 1). Per la prima configurazione (a) utilizzando il teorema di Thevenin (nello spazio delle frequenze) abbiamo modellizzato il primo filtro RC come una $Z_{out} = R \parallel (1/sC)$ e un $\tilde{V}_{eq} = \tilde{V}_{IN} \frac{1/sC}{(1/sC)+R}$. La funzione di trasferimento sarà data da $\tilde{V}_{out} = \tilde{V}_{eq} \frac{1/sC}{(1/sC)+R+Z_{out}}$, da cui si ricava il guadagno:

$$\tilde{G}_a(s) = \frac{1}{1 + 3s\tau + s^2\tau^2} \quad (1)$$

Il secondo circuito è più semplice, la funzione di trasferimento sarà data dal quadrato di quella di un filtro RC ($\tilde{G} = 1/(1 + s\tau)$):

$$\tilde{G}_b(s) = \frac{1}{(s\tau + 1)^2} \quad (2)$$

La funzione di trasferimento del filtro (c) coincide con quella del circuito (b) in quanto l'operazionale è stato supposto ideale o ad impedenza nulla; la differenza fra i due circuiti sarà l'impedenza in uscita, confrontabile con zero nel circuito (c). Notiamo subito un'importante vantaggio tra le due funzioni di trasferimento: la seconda ha un flesso molto più deciso intorno alla frequenza di taglio, raggiungendo più rapidamente l'approssimazione di retta con pendenza uguale a $-40dB/dec$, mentre la prima si flette più lentamente raggiungendo per frequenze più alte tale approssimazione.

Dopo aver trovato le funzioni di trasferimento teoriche abbiamo misurato direttamente guadagno e fase al variare della frequenza confrontandolo con la funzione teorica. Di seguito sono riportati i Bode plot (rispetto alle equazioni (1) e (2) viene plottata \tilde{G} in funzione di ω , sapendo che $s = -i\omega$).

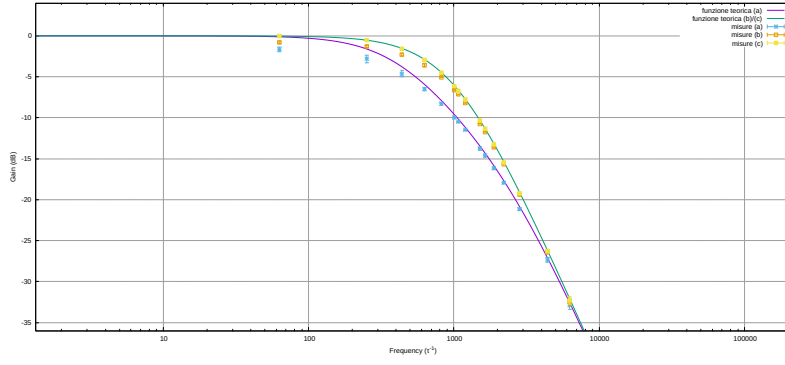


Figura 2: Guadagno

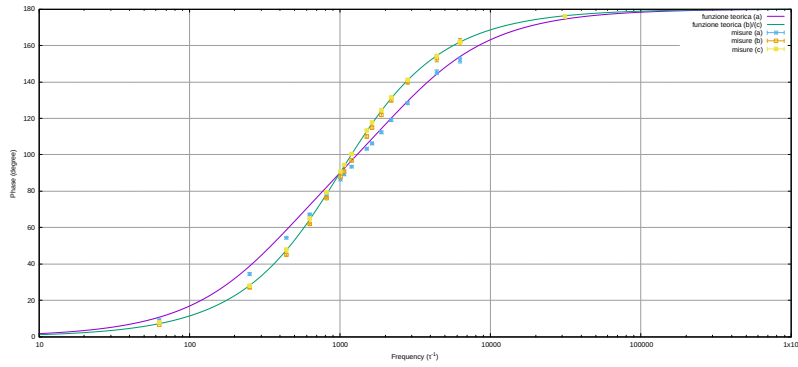


Figura 3: Fase

Nei primi due circuiti non ci aspettiamo che le misure siano in accordo con le funzioni di trasferimento attese: l'impedenza in uscita di questi, come vedremo tra poco, è confrontabile con quella in ingresso dell'oscilloscopio. Le capacità in parallelo si sommano quindi essendo quella dell'oscilloscopio molto piccola ($C \gg C_{osc}$) non da problemi, i problemi sorgono a basse frequenze quando R_{osc} è confrontabile con $1/sC$: parte della corrente scorre attraverso l'oscilloscopio e il circuito non lavora più come idealmente dovrebbe.

Per correggere questa incongruenza dovremmo ricalcolare le funzioni di trasferimento aggiungendo la presenza dell'oscilloscopio, che andrebbe ad aggiungersi in parallelo con l'ultima capacità ($Z_{osc} = R_{osc} \parallel C_{osc}$). Molto più semplice ed utile praticamente è aggiungere un buffer alla fine del circuito (circuito c), che abbassa l'impedenza in uscita portandola quasi a zero ($\simeq 2\Omega$). In questa configurazione, come si può osservare dalle misure, collegando l'oscilloscopio il circuito si comporta in modo ideale. Si potrebbero dunque collegare carichi ben più esosi dell'oscilloscopio, che richiedono più energia per funzionare e il filtro continuerebbe a lavorare in maniera efficiente senza modificare la funzione di trasferimento del circuito.

Spostandosi nello spazio dei tempi si può analizzare la risposta impulsionale teorica. Dopo aver scomposto eq(1) con il metodo dei fratti semplici, ricorrendo alle tabelle, si calcola l'antitrasformata di Laplace trovando:

$$f_a(t) = \frac{A}{\sqrt{5}\tau} (-e^{\frac{-2.62}{\tau}t} + e^{\frac{-0.38}{\tau}t}) + h \quad (3)$$

dove A è l'area dell'impulso in ingresso, $\tau = RC$ e h una piccola correzione di offset tra oscilloscopio e generatore di impulsi, dell'ordine dei mV che si trova impostandolo come parametro libero di un fit.

Per eq(2) è sufficiente ricorrere alle tabelle delle antitrasformate trovando:

$$f_b(t) = \frac{At}{\tau^2} e^{(-t/\tau)} + h \quad (4)$$

Ovviamente questa equazione vale sia per il circuito (b) che per il (c). Di seguito sono riportate le funzioni teoriche con i risultati delle misure:

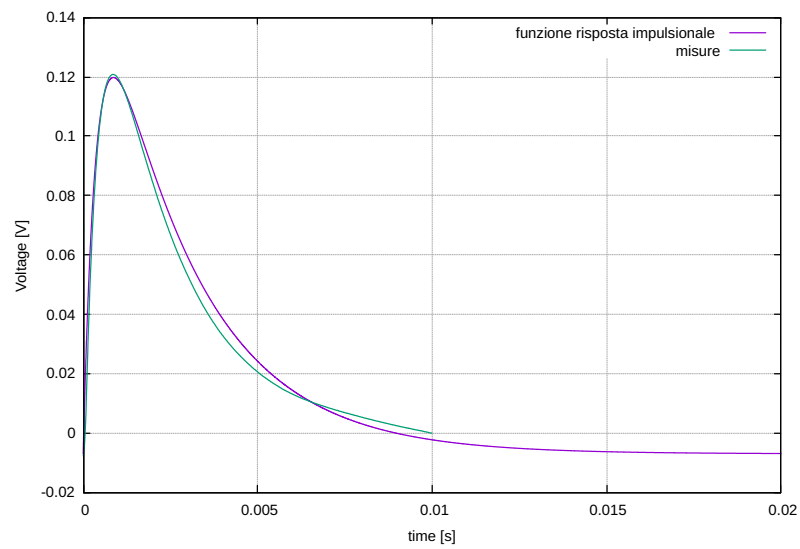


Figura 4: Risposta impulsinale circuito a

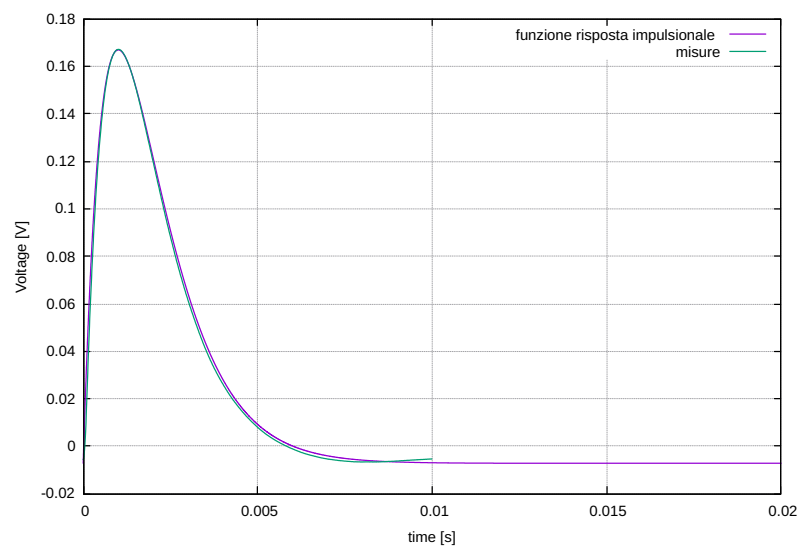


Figura 5: Risposta impulsinale circuito b

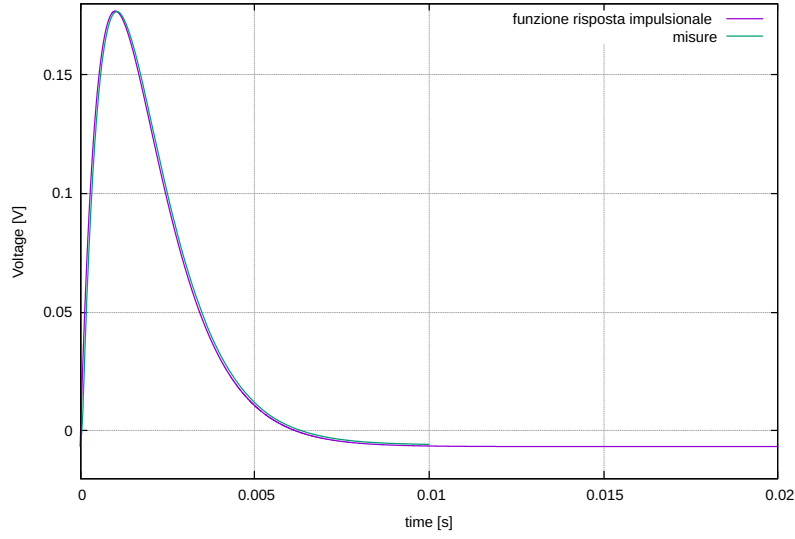


Figura 6: Risposta impulsinale circuito c

Nel circuito (a) la funzione teorica non fitta bene i dati: questa discrepanza la imputiamo all'assenza del buffer nel circuito, quindi all'elevata impedenza in uscita che diventa confrontabile con quella dell'oscilloscopio. Per i circuiti (b) e (c) la funzione fitta bene i dati.

Per ottenere le impedenze in uscita è sufficiente mettere in corto ingresso con la massa e sommare le impedenze generalizzate. Per il circuito (a) troviamo

$$Z_{out} = \frac{CR^2s + 2R}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} \quad (5)$$

Si noti, come già accennato in precedenza, che a frequenze basse l'impedenza si avvicina al valore $Z = 2R = 200 \text{ k}\Omega$ che non risulta così distante dall'impedenza dell'oscilloscopio a basse frequenze $Z_{osc} = 1 \text{ M}\Omega$. A alte frequenze Z_{out} tende a 0, ma ciò non risulta di particolare interesse in quanto in questo regime il segnale di ingresso viene attenuato.

Per il circuito (b) si ottiene:

$$Z_{out} = \frac{R}{1 + RCs} \quad (6)$$

Le stesse considerazioni appena fatte valgono anche per questo circuito, ora nel limite di basse frequenze l'impedenza in uscita diventa $Z_{out} = R = 100 \text{ k}\Omega$.

Il terzo circuito (c) ha invece un'impedenza in uscita già studiata nelle scorse esperienze data dal buffer, dell'ordine di 1Ω , questo fino a che il segnale non supera gli $11V_{pp}$ oppure in un regime in cui il generatore riesce a erogare abbastanza potenza. Questo permette di avere un filtro che funziona bene alle frequenze per cui è studiato, con una funzione di trasferimento semplice senza dover considerare scomodi effetti di partitore con un eventuale carico.

2 Filtro Sallen-Key

Infine viene realizzato un filtro passa-basso, chiamato di Sallen-Key, analizzandolo come i tre precedenti. Di seguito viene riportato lo schema del circuito:

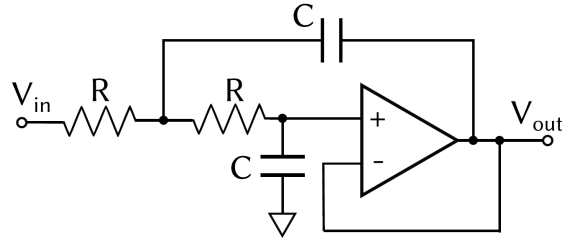


Figura 7: Filtro Sallen-Key

La funzione di trasferimento nello spazio delle fasi risulta uguale a quella del circuito (b) e (c) della sezione precedente, quindi (con $\tau = RC$):

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{(s\tau + 1)^2} \quad (7)$$

SI effettuano misure di V_{out} per valutare il guadagno \tilde{G} al variare della frequenza ω . In figura 8 e 9 si può notare come i dati siano in accordo con le funzioni di trasferimento attese.

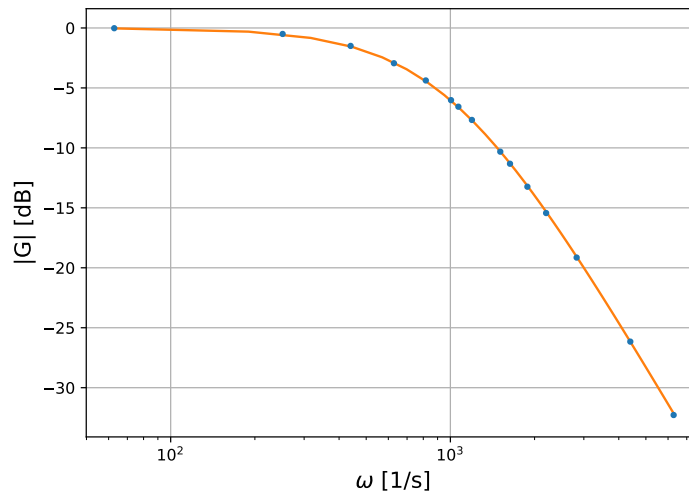


Figura 8: Guadagno del filtro Sallen-Key

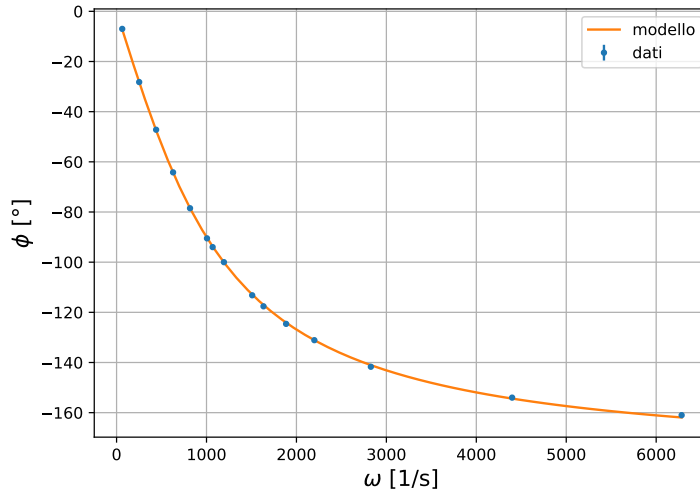


Figura 9: Fase del filtro Sallen-Key

Spostandoci nello spazio dei tempi si ottiene la funzione, già mostrata nella sezione precedente:

$$f(t) = \frac{At}{\tau^2} e^{(-t/\tau)} + h \quad (8)$$

Trovando così la risposta impulsionale e in figura 10 si nota come i dati siano in accordo con essa:

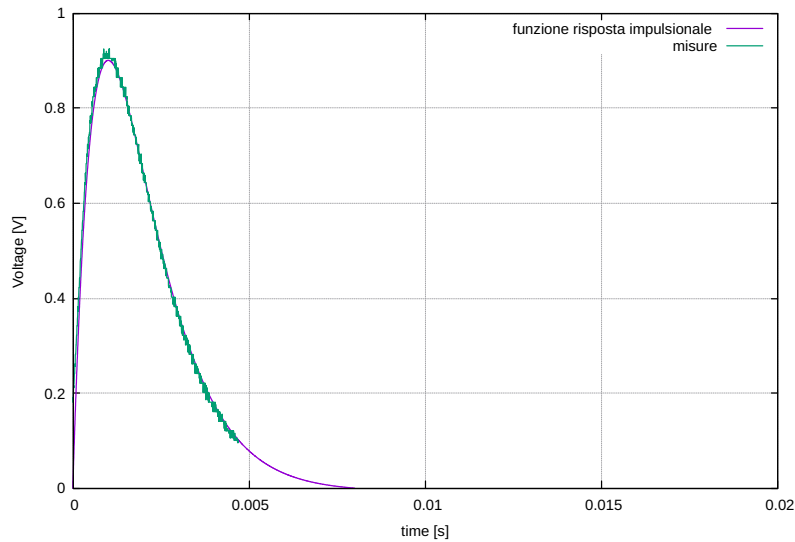


Figura 10: Risposta impulsionale del filtro Sallen-Key

Anche in questo caso l'impedenza in uscita de circuito è idealmente nulla, come per il circuito (c).

Per concludere andiamo a confrontare questo filtro con i tre analizzati prima. I vantaggi rispetto ai circuiti (a) e (b), come per il circuito (c), sono evidenti: la possibilità di lavorare con bassi carichi a ogni frequenza (soprattutto quelle per cui il filtro è utile) e la semplicità delle funzioni di risposta. Rispetto al filtro (c) il vantaggio risiede nella comodità di utilizzare un unico operazionale, risparmiando così in componenti e in compattezza del circuito.