# ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 6


| | |
|---|---|
| Tom Nick | 342225 |
| Tom Lehmann | 340621 |
| Maximilian Bachl | 341455 |


## Aufgabe 1

Es handelt sich hier um die Suche nach Extrema mit Nebenbedinung, weshalb wir zunächst nach Extrema auf dem Rand des Kreises suchen.

Die Nebenbedingung lautet: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

1. Singulärer Fall:

$$\nabla g(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

   Da $g(0,0) = -1 \neq 0$ gibt es hier keinen singulären Fall.

2. $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x})$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x})$$

   Also:

$$\begin{aligned} &\text{I: } 6x - 2y = \lambda \cdot 2x \Leftrightarrow 3 - \frac{y}{x} = \lambda \Leftrightarrow -\frac{y}{x} = \lambda - 3 \\ &\text{II: } -2x + 2y = \lambda \cdot 2y \Leftrightarrow -\frac{x}{y} + 1 = \lambda \Leftrightarrow -\frac{x}{y} = \lambda - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{\lambda - 1} \\ &\text{III: } x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

   Addiert man nun I und II so erhält man $0 = \lambda - 3 - \frac{1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{2}$.

   Somit ist

Wir prüfen zunächst die notwendige Bedingung für kritische Punkte$\nabla f(\vec{x}_k) = 0$:

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2\,(x-y) + 4x \\ -2\,(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} &0 = 6x - 2y \text{Evtl. Nummerierung hinzufügen} \\ &0 = -2x + 2y \\ \Rightarrow\ &0 = 4x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten deshalb einen kritischen Punkt: $x_{k1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Die Hessematrix ist, da es sich bei $f$ um eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion handelt, gemäß dem Satz von Schwarz, symmetrisch.

$$\begin{aligned} f''(\vec{x}) = H_f(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ D_1 = \det(6) &= 6 > 0 \\ D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} &= 8 > 0 \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(\vec{x})$ positiv definit, woraus schlusszufolgern ist, dass die Funktion $f$ bei $f(0,0) = 0$ ein lokales Minimum besitzt. Da $f(x,y)$ eine Komposition aus $(x-y)^2 > 0 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $2x^2 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ ist, ist $f(0,0) = 0$ sogar ein globales Minimum.

## Aufgabe 2

Um lokale Extrema einer mehrdimensionalen Funktion zu bestimmen, müssen wir 1. die kritischen Punkte finden und 2. diese als Funktionswerte der Hessematrix übergeben.

1. kritische Punkte sind alle Funktionswerte die $\nabla f(x,y,z) = \vec{0}$ erfüllen.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4z + 2y \\ 4y + 10z \end{pmatrix} \overset{\text{DGL}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Der Kern der Einheitsmatrix ist der Null-Vektor. Dies ist auch der einzige kritische Punkt demnach.

2. Hesse-Matrix berechnen und kritische Punkte einfügen:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

   TODO: Satz von Schwarz
   Da die Hesse Matrix konstant ist, müssen wir den Punkt offensichtlich nicht einsetzen. Mit dem Hurwitzkritirium kann nun überprüft, was der kritische Punkt nun ist.

$$\begin{aligned} &\det(4) = 4 \\ &\det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 \\ &\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \overset{\text{nach Laplace}}{=} 4 \cdot (2 \cdot 10 - 4 \cdot 4) = 16 \end{aligned}$$

   Damit ist $H_f(0,0,0)$ positiv definit. Somit ist ein lokales Minimum bei $\vec{0}$. Ist es auch ein globales Minimum? $2x^2$, $y^2$ und $5z^2$ werden nie negativ. Also kann nur $4yz$ negativ werden. Da aber $4yz + y^2 + 5z^2 \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ offensichtlich gilt, kann $f$ keine negativen Funktionswerte haben, und muss somit, da $f(0,0,0) = 0$, an der Stelle $(0,0,0)$ ein globales Minimum haben.

## Aufgabe 3

Wir haben die Nebenbedingung $g(a,b) = a + b - 10 = 0$. Außerdem haben wir die Funktion $f(a,b) = ab$. Da der von g gebildete Körper kein Inneres besitzt, kann es in diesem auch keine Extrema geben.

Wir überprüfen, ob ein singulärer Fall vorliegt:

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Da es hierfür keine Lösung gibt, liegt kein singulärer Fall vor.}$$

Als nächstes überprüfen wir auf andere Extrema am Rand.

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla g$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } & a + b - 10 = 0 \\ \text{Daraus folgt: } & a = \lambda \\ & b = \lambda \\ & \lambda = 5 \Rightarrow a = 5 \wedge b = 5 \end{aligned}$$

Es gibt somit den zu untersuchenden kritischen Punkt $\vec{x}_{k_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$