Analysis 2 - Hausaufgabe 12

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

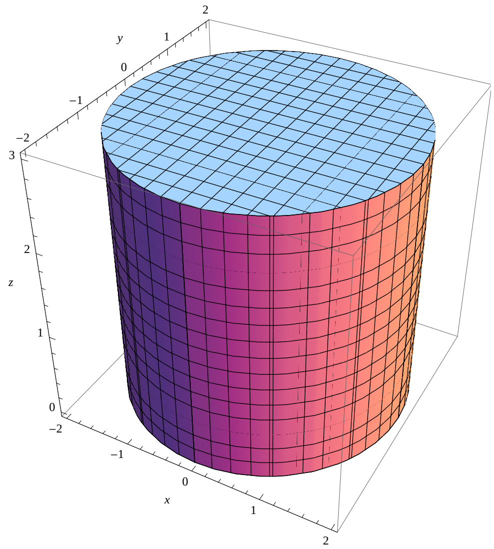
1. Aufgabe

(a)

Ein Vollzylinder mit der Höhe 3 und dem Radius 2.

Listing 1: Mathematica Code für die Menge Z

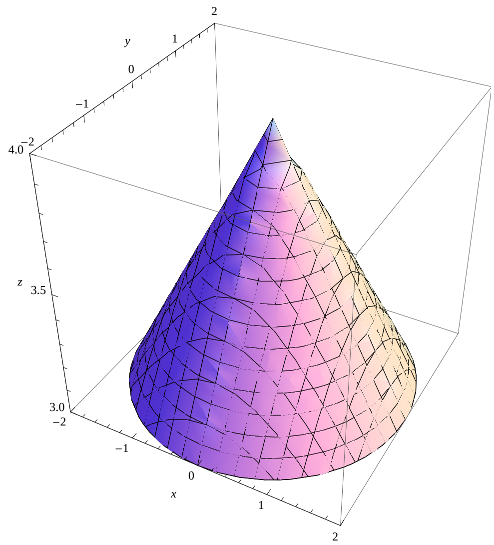
```
RegionPlot3D[x^2 + y^2 <= 4, {x, -2, 2},
     {y, -2, 2}, {z, 0, 3},
  AxesLabel -> {x, y, z}]
```



Ein Vollkegel mit der Höhe 1.

Listing 2: Mathematica Code für die Menge K

```
  RegionPlot3D[
  RegionPlot3D[
Sqrt[x^2 + y^2] <= 8 - 2 z, {x, -2, 2},
{y, -2, 2}, {z, 3, 4},
AxesLabel -> {x, y, z}]
```



(b) Wir benutzen die Zylinderkoordinaten, Funktionaldetermiante ist $r\, dr\, d\varphi\, dz$

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\} = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \mid r \in [0,2],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,3] \right\}$$

Da Z ein kompakter Bereich ist kann der Satz von Gauß angewendet werden:

$$\operatorname{div} \vec{w}(x,y,z) = yz + x^2 + xy$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\delta Z} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint\limits_{Z} \operatorname{div} \vec{w} \; r \; dr \; d\varphi \; dz \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (rz \sin\varphi + r^2 \cos^2\varphi + r\cos\varphi \; r \sin\varphi) r \; dr \; d\varphi \; dz \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 z \sin\varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos^2\varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos\varphi \sin\varphi \Bigg|_0^2 \; d\varphi \; dz \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} z \sin\varphi + 4\cos^2\varphi + 4\cos\varphi \sin\varphi \; d\varphi \; dz \\
&= \int_0^3 -\frac{8}{3} z \cos\varphi + 2\varphi + \sin(2\varphi) - 2\cos^2\varphi \Bigg|_0^{2\pi} \; dz \\
&= \int_0^3 -\frac{8}{3} z + 4\pi - 2 + \frac{8}{3} z + 2 \; dz \\
&= \int_0^3 4\pi \; dz \\
&= 12\pi
\end{aligned}
$$

Wir benutzen die Zylinderkoordinaten, Funktionaldetermiante ist $r \; dr \; d\varphi \; dz$

$$
K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 8 - 2z, \; z \in [3, 4]\} = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \leq r \leq 8 - 2z, \; z \in [3, 4], \; \varphi \in [0, 2\pi] \right\}
$$

Da K ein kompakter Bereich ist kann der Satz von Gauß angewendet werden:

$$
\operatorname{div} \vec{w}(x, y, z) = yz + x^2 + xy
$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\delta K} \vec{w} \cdot d\vec{O} &= \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{w}\; r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= \int_3^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{8-2z} (rz \sin\varphi + r^2 \cos^2\varphi + r \cos\varphi\, r \sin\varphi) r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= \int_3^4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 z \sin\varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos^2\varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos\varphi \sin\varphi \Big|_0^{8-2z} d\varphi\, dz \\
&= \int_3^4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(8-2z)^3 z \sin\varphi + \frac{1}{4}(8-2z)^4 \cos^2\varphi + \frac{1}{4}(8-2z)^4 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi\, dz \\
&= \int_3^4 -\frac{4}{3}(8-2z)^3 z \cos\varphi + (8-2z)^4(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - (8-2z)^4 \cos^2\varphi \Big|_0^{2\pi} dz \\
&= \int_3^4 4\pi (z-4)^4\, dz \\
&= \frac{4}{5}\pi (z-4)^5 \Big|_3^4 \\
&= \frac{4}{5}\pi
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
M = Z \cap K &= \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 3 \end{pmatrix} \mid r \in [0,2],\ \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \\
\delta M &= \left\{ \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 3 \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi] \right\}
\end{aligned}
$$

Zufällig ist rot $\vec{w} = \vec{v}$. Nach dem Satz von Stokes gilt darum:

$$
\begin{aligned}
\vec{w}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 12\cos\varphi\sin\varphi \\ 8\cos^2\varphi\sin\varphi \\ 12\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \\
\iint\limits_{M} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int\limits_{\delta M} \vec{w} \cdot \vec{ds} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 12\cos\varphi\sin\varphi \\ 8\cos^2\varphi\sin\varphi \\ 12\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -24\cos\varphi\sin^2\varphi + 16\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi
\end{aligned}
$$

Da im Integral in jedem Summanden cos- oder sin-Terme ungerader Potenz vorhanden sind, ist das Integral über eine ganze Periodenlänge von 0 bis 2π gerade 0.

(d)

$$\text{rot}\,\vec{w}(x,y,z) = (xz-0)\,e_x + (xy-yz)\,e_y + (2xy-xz)\,e_z = \begin{pmatrix} xz \\ xy-yz \\ 2xy-xz \end{pmatrix}$$

(e) Es gilt:

$$U = Z \cup K \Rightarrow \delta U = (\delta Z \setminus M) \cup (\delta K \setminus M)$$

Somit lässt sich das Integral berechnen mit:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\delta U} \vec{v}\cdot\vec{d}O &= \iint\limits_{\delta Z} \vec{v}\cdot\vec{d}O - \iint\limits_{M} \vec{v}\cdot\vec{d}O + \iint\limits_{\delta K} \vec{v}\cdot\vec{d}O - \iint\limits_{M} \vec{v}\cdot\vec{d}O \\ &= \iint\limits_{\delta Z} \vec{v}\cdot\vec{d}O + \iint\limits_{\delta K} \vec{v}\cdot\vec{d}O - 2\iint\limits_{M} \vec{v}\cdot\vec{d}O\end{aligned}$$

Das letzter Integral wurde schon berechnet und beträgt 0, die beiden anderen werden mithilfe des Satz von Gauß berechnet.

$$\text{div}\,\vec{v} = z + x - z + -x = 0$$

Da die Divergenz 0 beträgt, kann jedes Integral nur 0 ergeben. Somit gilt:

$$\iint\limits_{\delta U} \vec{v}\cdot\vec{d}O = 0$$

2. Aufgabe

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2-4,\ z \le 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2-4 \end{pmatrix} \mid r \in [0,2],\ \varphi \in [0,2\pi] \right\}$$

$$\text{rot}\,\vec{v} = (0-1)e_x + (0-1)e_y + (0-1)e_z = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}O = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\, dr\, d\varphi = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}\, dr\, d\varphi$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{K} \text{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}\, dr\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 2r^2\cos\varphi + 2r^2\sin\varphi - r\, dr\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}r^3\cos\varphi + \frac{2}{3}r^3\sin\varphi - \frac{1}{2}r^2\Big|_0^2\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}\cos\varphi + \frac{16}{3}\sin\varphi - 2\, d\varphi \\ &= \frac{16}{3}\sin\varphi - \frac{16}{3}\cos\varphi - 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = -\frac{16}{3} - 4\pi + \frac{16}{3} \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

$$\delta K = \left\{ \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\delta K} \vec{v} \cdot \vec{ds} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ 2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -4\cos\varphi\sin\varphi - 4\sin^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi \; d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -4\sin^2\varphi \; d\varphi \\
&= \sin(2\varphi) - 2\varphi|_0^{2\pi} \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Da linke Seite gleich rechte Seite, gilt hier der Satz von Stokes.