TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 04.02.-08.02.13

13. Übung Analysis II für Ingenieure

(Reihen/Potenzreihen)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

- Sind folgende Reihen konvergent?

$$\text{a)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k \qquad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^k \qquad \text{c)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^k$$

- Geben Sie den Konvergenzbereich der folgenden Reihen, mit $x \in \mathbb{R}$, an. Wie verhalten sich die Reihen an den Randpunkten des Konvergenzbereiches?

$$\text{a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}(x+1)^k \qquad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(3x+1)^k}{6^k} \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}(x+3)^k$$

2. Aufgabe

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z+1)^k$, $z \in \mathbb{C}$, habe den Konvergenzradius 2.

a) Skizzieren Sie denÂ Konvergenzbereich der Potenzreihe.

b) Betrachten Sie die Reihe mit $a_k = \frac{1}{2^k}$ und prüfen Sie, ob die Reihe für die komplexe Zahl $z = -1 + i$ konvergiert.

3. Aufgabe

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1+x)$ in eine Potenzreihe um den Punkt 0, und geben Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe an.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Beweisen Sie das Wurzelkriterium: Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für alle k ab einem gewissen k_0, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Benutzen Sie das Wurzelkriterium um zu zeigen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k$ für $n \in \mathbb{N}$ fest, $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ konvergiert. Warum divergiert die Potenzreihe für $|x| > 1$?

2. Aufgabe (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Welche der Reihen konvergieren absolut?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+7}{70n+8}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+(-1)^n}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{5^{n+1}}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{6n}}{n^{2n}}$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Geben Sie den Konvergenzbereich der folgenden Reihen an. Randpunkte des Konvergenzbereiches müssen nicht untersucht werden.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $z \in \mathbb{C}$

Prüfen Sie, ob die Reihe aus (a) auch für die komplexe Zahl $x = 1 + i$ konvergiert.

Gesamtpunktzahl: 20