Analysis 2 - Hausaufgabe 12

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

1. Aufgabe

- Es gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für alle k ab einem gewissen k_0.

  Außerdem gilt trivialerweise $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Leftrightarrow |a_k| \leq q^k < 1$.

  Weil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert und o.B.d.A $q^k < \frac{1}{k^2}$ ab einem gewissen k_1 folgt, dass auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

- $$\sqrt[k]{|k^n x^k|} \leq \sqrt{|x|} = \sqrt[k]{|k^n|}\, x \leq \sqrt{|x|}$$

  Es gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^n} = 1$, wobei sich die Folge von oben der Null nähert. Da aber $|x| < 1$ ist diese Gleichung erfüllt. Die $\sqrt{|x|}$ steht hier für das q aus dem vorherigen Beweis. Wir nehmen die Wurzel, da nur so die obige Formel gilt und $\sqrt{|x|}$ noch immer kleiner als 1 ist.

  Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe also. Wenn $|x| > 0$ ist das Wurzelkriterium nicht mehr erfüllt und der Grenzwert der Folge bleibt größer als 1.

Aufgabe 2

a) Ist nicht konvergent, da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist und auch nicht absolut konvergent, da die notwendige Bedingung $\lim_{n\to\infty} |a_k| = 0$ nicht erfüllt ist:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{2n+7}{70n+8} = \pm\frac{2}{7}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1000^n+1000}{(n+1)\cdot n!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1000^n + 1000}{(n+1)1000^n} \right| = 0 < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{n^5}{2^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+3^n)(n+1)^5}{(2^{n+1}+3^{n+1})n^5} = \frac{1}{3} < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

d) Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n+(-1)^n} = 0$ gilt nach dem Leibnizkriterium, dass die Reihe konvergent ist. Die Reihe ist allerdings nicht absolut konvergent, da dann das Leibnizkriterium nicht mehr erfüllt ist.

e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^n}{5^{n+2}}}{\frac{4^{n-1}}{5^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^n}{25\cdot 5^n}}{\frac{\frac{1}{4}4^n}{5\cdot 5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{25\cdot 5^n} \cdot \frac{5\cdot 5^n}{\frac{1}{4}4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{\frac{1}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{6n+6}}{n^{2n+2}}}{\frac{2^{6n}}{n^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^6 2^{6n}}{n^2 n^{2n}}}{\frac{2^{6n}}{n^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^6}{n^2} = 0$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

Aufgabe 3

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

Der Entwicklungspunkt ist somit $x_0 = 1$.

Wir berechnen nun den Konvergenzradius.

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}{\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{-1\cdot(-1)^k}{k}}{\frac{(-1)^k}{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{-1\cdot(-1)^k}{k} \cdot \frac{k+1}{(-1)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{-1}{k} \cdot \frac{k+1}{1} \right| = 1$$

Der Konvergenzradius ist also 1.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot z^k$$

Der Entwicklungspunkt ist somit $x_0 = 1$.

Wir berechnen nun den Konvergenzradius.

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)k!}{k!} \right| = \infty$$

Diese Summe konvergiert also für jede beliebige Zahl.

Nun prüfen wir, ob die Reihe aus (a) auch für $x = 1 + i$ konvergiert.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} \overset{\text{für x einsetzen}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{i^k}{k}$$

Da $\frac{i^k}{k}$ eine Nullfolge ist konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.