# Analysis 2 - Hausaufgabe 6


| | |
|---|---|
| Tom Nick | 342225 |
| Tom Lehmann | 340621 |
| Maximilian Bachl | 341455 |


## Aufgabe 1

Es handelt sich hier um die Suche nach Extrema mit Nebenbedinung, weshalb wir zunächst nach Extrema auf dem Rand des Kreises suchen.

Die Nebenbedingung lautet: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

1. Singulärer Fall:

$$\nabla g(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

   Da $g(0, 0) = -1 \neq 0$ gibt es hier keinen singulären Fall.

2. $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x})$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x})$$

   Also:

$$\begin{aligned} 6x - 2y = \lambda \cdot 2x \Rightarrow -2y = x(2\lambda - 6) \Leftrightarrow y = x(3 - \lambda) \\ -2x + 2y = \lambda \cdot 2y \Rightarrow -2x = y(2\lambda - 2) \Leftrightarrow x = y(1 - \lambda) \end{aligned}$$

   Also:

$$\begin{aligned} x &= x(3 - \lambda)(1 - \lambda) \Rightarrow 1 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 \\ \Rightarrow \lambda_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 2} \\ \lambda_1 &= 2 + \sqrt{2} \\ \lambda_2 &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

   Einsetzen in die Nebenbedingung mit $\lambda = 2 + \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} 0 &= y^2(1 - 2 - \sqrt{2})^2 + y^2 - 1 \\ &= y^2(1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1) - 1 \\ &= 2y^2(2 + \sqrt{2}) - 1 \\ \Rightarrow y &= \sqrt{\tfrac{1}{2(2+\sqrt{2})}} \end{aligned}$$

   Einsetzen in die Nebenbedingung mit $\lambda = 2 - \sqrt{2}$:

   TODO

Wir prüfen zunächst die notwendige Bedingung für kritische Punkte$\nabla f(\vec{x}_k) = 0$:

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2\,(x-y) + 4x \\ -2\,(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 2y \text{Evtl. Nummerierung hinzufügen} \\ 0 &= -2x + 2y \\ \Rightarrow 0 &= 4x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten deshalb einen kritischen Punkt: $x_{k1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Die Hessematrix ist, da es sich bei $f$ um eine zweimal stetig partiell differentierbare Funktion handelt, gemäß dem Satz von Schwarz, symmetrisch.

$$\begin{aligned} f''(\vec{x}) = H_f(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ D_1 &= \det(6) = 6 > 0 \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 8 > 0 \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(\vec{x})$ positiv definit, woraus schlusszufolgern ist, dass die Funktion $f$ bei $f(0,0) = 0$ ein lokales Minimum besitzt. Da $f(x,y)$ eine Komposition aus $(x-y)^2 > 0 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $2x^2 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ ist, ist $f(0,0) = 0$ sogar ein globales Minimum.

## Aufgabe 2

Um lokale Extrema einer mehrdimensionalen Funktion zu bestimmen, müssen wir 1. die kritischen Punkte finden und 2. diese als Funktionswerte der Hessematrix übergeben.

1. kritische Punkte sind alle Funktionswerte die $\nabla f(x,y,z) = \vec{0}$ erfüllen.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4z + 2y \\ 4y + 10z \end{pmatrix} \overset{\text{DGL}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Der Kern der Einheitsmatrix ist der Null-Vektor. Dies ist auch der einzige kritische Punkt demnach.

2. Hesse-Matrix berechnen und kritische Punkte einfügen:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

   TODO: Satz von Schwarz
   Da die Hesse Matrix konstant ist, müssen wir den Punkt offensichtlich nicht einsetzen. Mit dem Hurwitzkritirium kann nun überprüft, was der kritische Punkt nun ist.

$$\begin{aligned} &\det(4) = 4 \\ &\det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 \\ &\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} = 4 * 2 * 10 + 0 * .. + 0 * .. - 0 * .. - 0 * .. - 4 * 2 * 4 = 80 - 32 = 48 \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(0,0,0)$ positiv definit. Somit ist ein lokales Minimum bei $\vec{0}$. Ist es auch ein globales Minimum? $2x^2$, $y^2$ und $5z^2$ werden nie negativ. Also kann nur $4yz$ negativ werden. Da aber $4yz + y^2 + 5z^2 \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ offensichtlich gilt, kann $f$ keine negativen Funktionswerte haben, und muss somit, da $f(0,0,0) = 0$, an der Stelle $(0,0,0)$ ein globales Minimum haben.