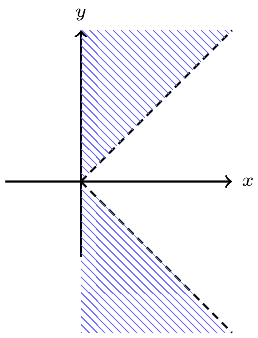
Analysis 2 - Hausaufgabe 1

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 123456

Aufgabe 1.

(a)

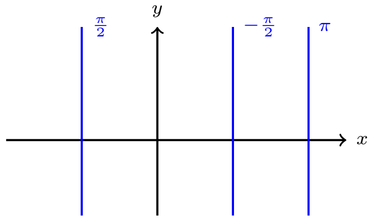
$$\delta A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (|x| = |y| \vee (x = 0 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})) \wedge x \geq 0\}$$
$$\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| < |y|, x > 0\}$$



Abgeschlossen? Nein, da $\delta A \not\subseteq A$
Offen? Nein, da $\delta A \cap A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x = 0 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\}$
Beschränkt? Nein
Kompakt? Nein, da A weder abgeschlossen, noch beschränkt ist.

(b)

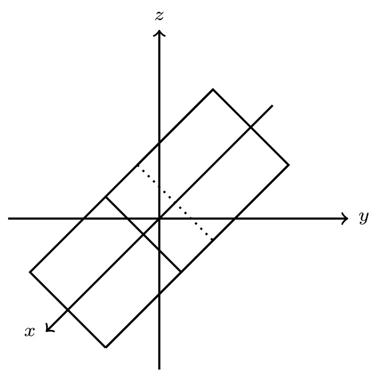
$$\delta B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x)\cos(y) = 0\}$$
$$\mathring{B} = \emptyset$$



Abgeschlossen? Ja, da $\delta B \subseteq B$.
Offen? Nein, da $\delta B \cap B = B \neq \emptyset$
Beschränkt? Nein, da $y \in \mathbb{R}$.
Kompakt? Nein, da B zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt ist.

(c)

$$\delta C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| = 1, |x| = 1\}$$
$$\mathring{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| < 1, |x| < 1\}$$



Abgeschlossen? Ja, da $\delta C \subseteq B$
Offen? Nein, da $\delta C \cap C \neq \emptyset$
Beschränkt? Ja, da $C \subseteq K_4(0, 0, 0)$
Kompakt? Ja, da C sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

Aufgabe 2.

(i)

Wenn A offen ist, gilt: $\delta A \cap A = \emptyset$

Da $\delta A = \delta A^c$, muss gelten: $\delta A^c \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \delta A \subseteq A^c$

Also ist A^c abgeschlossen, wenn A offen ist.

Wenn A abgeschlossen ist, gilt: $\delta A \subseteq A$

Da $\delta A = \delta A^c$, muss gelten (da $A \nsubseteq A^c$): $\delta A^c \cap A = \emptyset$

Also ist A^C offen, wenn A abgeschlossen ist.

(ii)

Wähle

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} \right\}$$

Jedes Glied der Folge ist offensichtlich abgeschlossen. Die Folge konvergiert gegen 0, welches ein Randpunkt der Menge ist. Somit ist der Randpunkt kein Teil der Menge, welche demnach weder offen noch angeschlossen ist. (Siehe Streit im Tutorium)

Aufgabe 3.

(i)

$$a_{k1} : \lim_{k\to\infty} \frac{\arctan\left(k^2\right) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{k}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{1+k^4} \cdot 2k}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} -\frac{2k^3}{1+k^4} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\frac{2}{k}}{\frac{1}{k^4}+1} = 0$$

$$a_{k2} : \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^3} = 0$$

$$b_{k1} : \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{2}\right)$$

$$b_{k2} : \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{t^2} dt = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k} + 1 = 1$$

a_k konvergiert, da alle Komponentenfolgen konvergieren.

b_k konvergiert nicht, da a_{k1} nicht konvergiert.

(ii)

Man wähle die Teilfolgen

$$\vec{c}_k = \left(\cos\left(\frac{\pi \cdot 4k}{2}\right), \int_1^k \frac{1}{t^2} dt\right) = \left(\cos\left(\pi \cdot 2k\right), \int_1^k \frac{1}{t^2} dt\right)$$

und

$$\vec{d}_k = \left(\cos\left(\pi \cdot 2k + \pi\right), \int_1^k \frac{1}{t^2} dt\right)$$

aus der divergenten Folge $\vec{b}_k$.

$$c_{k1} : \lim_{k\to\infty} \cos\left(\pi \cdot 2k\right) = 1$$

und $\lim_{k\to\infty} c_{k1} = 1$ (siehe (i))

$$d_{k1} : \lim_{k\to\infty} \cos\left(\pi \cdot 2k + \pi\right) = -1$$

und $\lim_{k\to\infty} d_{k1} = 1$ (siehe (i))