Analysis 2 - Hausaufgabe 10

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

a)

$$\int_0^1 \int_1^2 xye^{xy^2} dxdy = \int_1^2 \int_0^1 xye^{xy^2} dydx$$

SUBSTITUTION MIT xy^2. ABER WARUM WERDEN DIE GRENZEN NICHT ANGEPASST?

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 e^{xy^2}\Big|_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (e^x - 1) dx$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - x)|_1^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 2 - (e-1)) = \frac{1}{2}(e^2 - e - 1)$$

b)

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^y (x+1)z^x dzdydx = \int_1^2 \int_0^1 z^{x+1}\Big|_0^y dydx$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 y^{x+1} dydx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x+2} y^{x+2}\Big|_0^1 dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$$

$$= \log(x+2)|_1^2 = \log(4) - \log(3) = \log\left(\frac{4}{3}\right)$$

c)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+y} (xy^3) dxdy = \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2y^3)\Big|_{\sqrt{y}}^{1+y} dy$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{2}(y^5 + y^4 + y^3))dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^5 + y^4 + y^3 dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{4}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{37}{120}$$

Aufgabe 2

$$\mathcal{T} := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y ?? \text{ TODO} \right\}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

und der Funktionaldeterminanten

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{K}_R} \left(x^2 + y^2\right) dV &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r^2 \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi)\right) r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r^2 \sin^2(\vartheta) \left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)\right) r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2(\vartheta) r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \sin^3(\vartheta) dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5} R^5 d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \frac{1}{5} R^5 2\pi \, d\vartheta \\ &= \frac{2}{5} \pi R^5 \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \, d\vartheta \\ &= \frac{2}{5} \pi R^5 \cdot \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir kippen nicht das Glas sondern definieren, das die Gravitationskraft nicht mehr in $-\vec{e}_y$ sondern in $-\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$-Richtung zeigt. Das heißt, wenn das Glas um 45° gekippt wird, verläuft die Oberfläche des Bieres entlang $y_B = x + 2$, da die Oberfläche einer Flüssigkeit in Ruhe stets orthogonal zum Gravitationsvektor ist. Die Verschiebung in $\vec{e}_y$-Richtung kommt daher, dass das Glas voll gefüllt ist und das

Bier die Kante des Bierglases berührt und demzufolge durch den Punkt $(2,4)$ geht. Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, berechnen wir die Schnittstellen beider Graphen:

$$
\begin{aligned}
&x^2 = x + 2 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm 1,5 \\
&\Rightarrow x_1 = -1 \\
&\Rightarrow x_2 = 2
\end{aligned}
$$

Die Menge an "zweidimensionalem Bier" berechnet sich nun wie folgt:

$$
\begin{aligned}
A_B &= \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2 dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \;|_{-1}^{2} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}2^2 + \frac{1}{2}2 + 2\right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \\
&= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{5}{6} + 2 = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6}
\end{aligned}
$$