TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 28.01.-02.02.2013

12. Übung Analysis II für Ingenieure

(Oberflächenintegrale, Integralsätze von Gauß und Stokes)

Bis zum 25.01. findet die Online-Evaluation unserer Veranstaltung statt.
Ein kurzer Fragebogen zum Ausfüllen ist unter
http://evaluation.tu-berlin.de/productive
zu finden. Zugangstoken sind bei allen Tutoren zu bekommen.
Euer Feedback hilft unsere Lehre zu verbessern. Bitte nehmt teil.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Es seien $Q = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \middle| x,y,z \in [0,1]\right\}$, $S = \partial Q$ sein Rand und

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{v}(x,y,z) = \left(x^2,\ y^2,\ 2z(2-y)\right)^T.$$

Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Flussintegral $\iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

2. Aufgabe

Gegeben seien die Mengen $K = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ und $M = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \geq 0\}$, sowie das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(xz, \quad yz, \quad -z\right)^T.$$

(a) Skizzieren und parametrisieren Sie M. Zeichnen Sie das vektorielle Oberflächenelement ein und berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint\limits_M \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

(b) Berechnen Sie $\iint\limits_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O}$. In welche Richtung zeigt hier das Oberflächenelement?

(c) Wie groß ist also die Strömungsbilanz durch die Bodenfläche der Menge K?

3. Aufgabe

Seien $\vec{v}(x,y,z) = (-y, x, 0)^T$ und $D = \left\{(x,y,z)^T \middle| x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}$ die Einheitskreisscheibe. Bestätigen Sie den Satz von Stokes:

$$\iint\limits_{D} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{O} = \int\limits_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

4. Aufgabe

Gegeben sei die Fläche D die durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,1), (3/2, 0)$ begrenzt ist.

(a) Skizzieren Sie die Menge und berechnen Sie das Integral $\iint\limits_{D} y^2 dxdy$ indem Sie die Integrationsgrenzen von y in Abhängigkeit von x darstellen.

(b) Stellen Sie nun die Integrationsgrenzen von x in Abhängigkeit von y dar und berechnen Sie damit das Integral erneut.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (14 Punkte)

Gegeben seien die Mengen

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\},$$
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 8 - 2z,\ z \in [3,4]\},$$

sowie die Funktionen

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(xz, \quad xy - yz, \quad 2xy - xz\right)^T,$$
$$\vec{w}(x,y,z) = \left(xyz, \quad x^2 y, \quad xyz\right)^T.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen Z und K.

(b) Berechnen Sie $\iint\limits_{\partial Z} \vec{w} \cdot d\vec{O}$, sowie $\iint\limits_{\partial K} \vec{w} \cdot d\vec{O}$.

(c) Es sei $M = Z \cap K$. Berechnen Sie das Integral von $\vec{v}$ über die Menge M mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(d) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{w}$.

(e) Es sei $U = Z \cup K$. Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_{\partial U} \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

2. Aufgabe

(6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Fläche

$$K := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \middle| z = x^2 + y^2 - 4, z \leq 0 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix}$$

der Integralsatz von Stokes erfüllt ist.

Gesamtpunktzahl: 20