TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 17.12.12.-21.12.12

8. Übung Analysis II für Ingenieure

(Potentiale, Vektorpotentiale, Koordinatensysteme II)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}$$

(i) ein Vektorpotential, (ii) ein Potential besitzt.

2. Aufgabe

Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie $\vec{v}$ in Zylinderkoordinaten und geben Sie $\vec{v}$ in den Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ (siehe unten) an, d.h. in der Form

$$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$$

mit geeigneten Koeffizienten v_ρ, v_φ, v_z. Berechnen Sie anschließend mit Hilfe der unten angegebenen Formeln die Divergenz und Rotation von $\vec{v}$ jeweils in Zylinderkoordinaten.

Zur Erinnerung: (vgl. Kapitel 2.3 im Skript)
Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten:
Sei $\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} v_\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{v} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} v_\varphi\right)\vec{e}_z. \end{aligned}$$

3. Aufgabe

Sei $\vec{f} : [0, \infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung von Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{f}(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Beschreiben Sie die sogenannten *Koordinatenflächen* der Zylinderkoordinaten und skizzieren Sie diese. Dabei sind die Koordinatenflächen definiert als jene Mengen im $\mathbb{R}^3$ die entstehen, wenn man jeweils eine Koordinatenrichtung von (r, φ, z) als konstant annimmt.

4. Aufgabe

Beschreiben Sie die Mengen

(i) $\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$,

(ii) $\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 3, \varphi \in [0, 2\pi[, z = r^2 - 2\}$ und

(iii) $\{(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 1, \varphi, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

in kartesischen Koordinaten.

Hausaufgaben

1. Aufgabe

(4 Punkte)

(a) Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$. Zeigen Sie, dass dann für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auch die Abbildung $\vec{u} + \operatorname{grad} f$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist. (*Hinweis*: Siehe Tutoriumsaufgabe 4 (a) auf Blatt 7.)

(b) Sei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} z^2 + \sin(x) \\ (x + y)^{\frac{2}{3}} \\ g(x, y, z) \end{pmatrix}$$

mit Skalarfeld $g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y, z) := -\cos(x)z - \frac{2}{3}(x + y)^{-\frac{1}{3}}z.$$

Untersuchen Sie, ob $\vec{v}$ (i) ein Vektorpotential, (ii) ein Potential besitzt.

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie $\vec{v}$ in Kugelkoordinaten und geben Sie $\vec{v}$ in den Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_\theta$ (siehe unten) an, d.h. in der From

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\theta \vec{e}_\theta$$

mit geeigneten Koeffizienten v_r, v_φ, v_θ. Berechnen Sie anschließend mit Hilfe der unten angegebenen Formeln die Divergenz und Rotation von $\vec{v}$ in Kugelkoordinaten.

Zur Erinnerung: (vgl. Kapitel 2.3 im Skript)

Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r}\left(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3\right), \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin(\theta)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten:
Sei $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_\theta\vec{e}_\theta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{v} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 v_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\left(v_\theta\sin(\theta)\right)}{\partial\theta},\\
\operatorname{rot}\ \vec{v} &= \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(v_\varphi\sin(\theta))}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r\\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\vec{f} : [0,\infty[\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung von Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{f}(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Beschreiben Sie die Koordinatenflächen der Kugelkoordinaten (vgl. Tutoriumsaufgabe 3) und skizzieren Sie diese.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Geben Sie die Mengen

(i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ in Polarkoordinaten bzw.

(ii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, 0\leq z\leq 2, \sqrt{x^2+y^2}\leq z+3\}$ in Zylinderkoordinaten bzw.

(iii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ y\leq 0, x\geq 0, z\geq 0, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ in Kugelkoordinaten an.

Gesamtpunktzahl: 20