

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 4

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

(a) Da $s = \frac{g}{2}t^2$, gilt:

$$g = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 44,5\text{m}}{(3,0\text{s})^2} \approx 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(b) Da wir den Fehlerschranksatz anwenden sollen, benötigen wir zunächst die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) &= \frac{2}{t^2} \\ \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) &= \frac{-4s}{t^3}\end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir M_1 sowie M_2 :

$$\begin{aligned}M_1 &= \sup_{\substack{s \in [s_0 - \Delta s, s_0 + \Delta s] \\ t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]}} \left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \right| \\ &= \sup_{\substack{s \in [44,4\text{m}; 44,6\text{m}] \\ t \in [2,9\text{s}; 3,1\text{s}]}} \left| \frac{2}{t^2} \right| \\ &= \frac{2}{2,9^2} = 0,238 \\ M_2 &= \sup_{\substack{s \in [s_0 - \Delta s, s_0 + \Delta s] \\ t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]}} \left| \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \right| \\ &= \sup_{\substack{s \in [44,4\text{m}; 44,6\text{m}] \\ t \in [2,9\text{s}; 3,1\text{s}]}} \left| \frac{4s}{t^3} \right| \\ &= \frac{-4 \cdot 44,6}{2,9^3} = 7,315\end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}|\Delta g| &= |\Delta g(s_0 + \Delta s, t_0 + \Delta t) - g(s_0, t_0)| \\ &\leq M_1 |\Delta s| + M_2 |\Delta t| \\ &\leq 0,238 \cdot 0,1 + 7,315 \cdot 0,1 = 0,755\end{aligned}$$

Für die Gravitationskonstante g gilt also:

$$\begin{aligned}(9,8 - 0,755) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\leq g \leq (9,8 + 0,755) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ 9,045 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\leq g \leq 10,555 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Der näherungsweise Wert beträgt von $e^{0.1} \cos(0.2)$ beträgt 1.083141 (wir gehen von rad für den Winkel aus).

Wir definieren die Funktion $f(x, \psi) = e^x \cos(\psi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x, \psi) &= (e^x \cos(\psi) \quad -e^x \sin(\psi)) \\ f''(x, \psi) &= \begin{pmatrix} e^x \cos(\psi) & -e^x \sin(\psi) \\ -e^x \sin(\psi) & -e^x \cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wählen für das Taylorpolynom 2. Ordnung den Entwicklungspunkt $\vec{0}$.

$$\begin{aligned} T_{\vec{0}}(\vec{x}) &= 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - \psi^2) \end{aligned}$$

Somit ist $T_{\vec{0}}(0.1, 0.2) = 1 + 0.1 + \frac{1}{2}(0.1^2 - 0.2^2) = 1.085$. Die Abweichung dieser Abschätzung zur tatsächlichen Berechnung beträgt also $1.085 - 1.083141 = 0.001859$.

Aufgabe 3

- (i) f ist eine zweimal partiell differenzierbare Funktion, da f eine Komposition aus zweimal partiell differenzierbaren Funktionen ist. Somit können wir, falls vorhanden, Extrema von f finden. Jedes Extremum hat als notwendige Bedingung: $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 3y \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(3x^2 - 3) \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir die Nullstellen finden. Für $y(3x^2 - 3) = 0$ gibt es 3 Lösungen:

- a) offensichtlich bei $y = 0$
- b) und $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Für $x^3 - 3x + 2y = 0$ kann man keine direkten Nullstellen bestimmen. Man kann nun in einer Matrix die möglichen Nullstellen von ∇f darstellen:

	$x^3 - 3x + 2y = 0$
$y = 0$	$(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$
$x = 1$	$(1, 1)$
$x = -1$	$(-1, -1)$

Also sind die kritischen Punkte bei $(0, 0), (1, -1), (-1, 1), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$. Gesucht sind nun globale/lokale Extrema:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 - 3 \\ 3x^2 - 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $(0, 0)$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -9 \Rightarrow \text{indefinit, Sattelpunkt}$$

- $(1, 1)$

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) \text{ zu überprüfen. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

$$f(1, 1) = 0$$

- $(-1, -1)$

$$H_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) \text{ zu überprüfen. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = 6 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

$$f(-1, -1) = 0$$

- $(\sqrt{3}, 0)$

$$H_f(\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = -36 \Rightarrow \text{indefinit, Sattelpunkt}$$

- $(-\sqrt{3}, 0)$

$$H_f(-\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \approx -36 \Rightarrow \text{indefinit, Sattelpunkt}$$

Bleibt noch zu überprüfen, ob die beiden gefunden lok. Minima auch glob. Minima sind. Das ist nicht so, da $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 1) = -\infty$ und $-\infty < f(1, 1) = 0$ und $-\infty < f(-1, -1) = 0$.

- (ii) g ist eine zweimal partiell differenzierbare Funktion, da g eine Komposition aus zweimal partiell differenzierbaren Funktionen ist. Somit können wir, falls vorhanden, Extrema von g finden. Jedes Extremum hat als notwendige Bedingung: $\nabla g(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 8x^3 + 4xy^2 \\ 4x^2y + 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(8x^2 + 4y^2) \\ y(4x^2 + 4y^2) \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir die Nullstellen finden. Für $x(8x^2 + 4y^2)$:

- offensichtlich bei $x = 0$
- und $8x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{-2}x$

Für $y(4x^2 + 4y^2)$:

- offensichtlich bei $y = 0$
- und $4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow y = x$

Man kann nun in einer Matrix die möglichen Nullstellen von ∇g darstellen:

	$x = 0$	$y = \sqrt{-2}x$	$y = -\sqrt{-2}x$
$y = 0$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$y = x$	$(0, 0)$	\nexists	\nexists

Also sind die kritischen Punkte bei $(0, 0)$. Gesucht sind nun globale/lokale Extrema:

$$H_g = \begin{pmatrix} 24x^2 + 4y^2 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

- $(0,0)$

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{also können wir keine Aussage treffen.}$$

$$g(0,0) = 0$$

Da aber g eine Komposition von geraden Potenzen ist, die niemals kleiner als 0 werden können kann g niemals kleiner als 0 werden. Somit muss bei $(0,0)$ ein globales und lokales Minimum liegen.