Analysis 2 - Hausaufgabe 11

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

WARUM IGNORIERST DU MEINE GEOMETRY EINSTELLUNGEN, LaTeX?

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned} \vec{x}: &\quad [0,2\pi[\times[0,3] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{x}(u,v) &= \begin{pmatrix} 4\cos u \\ v \\ 4\sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \vec{y}: &\quad [0,2\pi[\times[0,1] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{y}(u,v) &= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir parametrisieren die Oberfläche:

$$\begin{aligned} \vec{x}: &\quad [0,2\pi[\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{x}(u,v) &= \begin{pmatrix} a\sin(u)\cos(v) \\ b\cos(u)\sin(v) \\ c\sin(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \left| \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ -b\sin u\sin v \\ c\cos v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin u\sin v \\ b\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \left| \begin{pmatrix} -bc\cos u\cos^2 v \\ -ac\sin u\sin v\cos v \\ ab\cos^2 u\cos^2 v - ab\sin^2 u\sin^2 v \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2 + (-ac\sin u\sin v\cos v)^2 + \left(ab\cos^2 u\cos^2 v - ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vec{x}(u,v)) \cdot \sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2 + (-ac\sin u\sin v\cos v)^2 + \left(ab\cos^2 u\cos^2 v - ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(a\sin(u)\cos(v))^2}{a^4} + \frac{(b\cos(u)\sin(v))^2}{b^4} + \frac{(c\sin(u))^2}{c^4}} \\
&\cdot \sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2 + (-ac\sin u\sin v\cos v)^2 + \left(ab\cos^2 u\cos^2 v - ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\sin^2(u)\cos(v)^2}{a^2} + \frac{\cos^2(u)\sin^2(v)}{b^2} + \frac{\sin^2(u)}{c^2}} \\
&\cdot \sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2 + (-ac\sin u\sin v\cos v)^2 + \left(ab\cos^2 u\cos^2 v - ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Das kann doch nicht deren Ernst sein. – Max

Aufgabe 3

Die Parametrisierung für die Fläche S ist wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\vec{y}:\quad & [0,2\pi[\times[0,1] \to \mathbb{R}^3 \\
\vec{y}(u,v) = & \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dO ist somit:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{y}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{y}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \begin{pmatrix} -\sqrt{v}\sin u \\ \sqrt{v}\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cos u \\ \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\sin u \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}\sin^2 u - \frac{1}{2}\cos^2 u \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u) \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{y}(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{v}\sin u \\ -\sqrt{v}\cos u \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v \sin u \cos u - v \sin u \cos u - \frac{1}{2} v^2 \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} v^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{2} v^2 u \Big|_0^{2\pi} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\pi v^2 \, \mathrm{d}v \\
&= -\frac{\pi}{6} v^3 \Big|_0^1 \\
&= -\frac{\pi}{6} \\
&\overset{\text{per Def. immer pos.}}{=} \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Die Winkel der Breiten betragen somit: $\theta_1 = 66.5^\circ = \frac{2\pi \cdot 66.5}{360} = 1.16$ und $\theta_2 = 113.5^\circ = \frac{2\pi \cdot 113.5}{360} = 1.98$

Die Parametrisierung ist also:

$$
\begin{aligned}
\vec{z}:\ & [1.16, 1.98] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \\
\vec{z}(u,v) &= 6378 \cdot \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \vec{y}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial v}\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= 6378^2 \left| \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \left| \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ -\sin^2 u \sin v \\ \cos u \sin u \cos^2 v + \sin u \cos u \sin^2 v \end{pmatrix} \right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\left(\sin^2 u \cos v\right)^2 + \left(\sin^2 u \sin v\right)^2 + \left(\cos u \sin u \cos^2 v + \sin u \cos u \sin^2 v\right)^2} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\sin^4 u \cos^2 v + \sin^4 u \sin^2 v + \left(\cos u \sin u \cos^2 v + \sin u \cos u \sin^2 v\right)^2} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\sin^4 u \cos^2 v + \sin^4 u \sin^2 v + (\sin u \cos u)^2} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\sin^4 u \cos^2 v + \sin^4 u \sin^2 v + \sin^2 u \cos^2 u} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\sin^4 u \left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) + \sin^2 u \cos^2 u} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\sin^4 u + \sin^2 u \cos^2 u} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\sin^2 u \left(\sin^2 u + \cos^2 u\right)} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sqrt{\sin^2 u} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 6378^2 \sin u \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Das Integral ist somit:

$$\begin{aligned}
6379^2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{1.18}^{1.98} \sin u \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= 6379^2 \cdot \int_0^{2\pi} -\cos u\Big|_{1.18}^{1.98} \,\mathrm{d}v \\
&= 6379^2 \left(-\cos 1.98 + \cos 1.18\right) \cdot \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}v \\
&= 6379^2 \left(-\cos 1.98 + \cos 1.18\right) \cdot \left(v\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= 6379^2 \left(-\cos 1.98 + \cos 1.18\right) 2\pi
\end{aligned}$$