Technische Universität Berlin WiSe 2012/13
Institut für Mathematik `http://www.isis.tu-berlin.de`
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch Stand: 8. November 2012
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss Abgabe: 12.11.-16.11.2012

3. Übung Analysis II für Ingenieure

(Differenzierbarkeit, Gradient)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2} & \text{, für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{, für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

aus der Tutoriumsaufgabe 2 der letzten Woche. Untersuchen Sie in welchen Punkten die Funktionen f und g

(i) partiell differenzierbar,

(ii) (total) differenzierbar sind.

2. Aufgabe
Gegeben sei die Abbildung $\vec{v} :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2y \\ (x+y)^2 \\ \frac{y^2}{x} \end{pmatrix}$. Ist die Abbildung $\vec{v}$ differenzierbar? Falls ja, geben Sie die Funktionalmatrix an.

3. Aufgabe
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$.

(i) Bestimmen Sie den Gradienten von f in den Punkten $(1,0)$ und $(1,1)$.

Skizzieren Sie die resultierenden Vektoren $(\nabla f)(1,0)$, $(\nabla f)(1,1)$ und die aus der vergangenen Woche bekannten Niveaulinien der Funktion. Welche Eigenschaft des Gradienten lässt sich aus der Skizze ablesen?

(ii) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen der Funktion im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ bzw. $(0,1)$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen aus der letzten Hausaufgabe

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4} & \text{, falls } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{, falls } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{x^4(y-1)^2+x^3(y-1)^3}{(x^2+(y-1)^2)^3} & \text{, falls } (x,y)\neq(0,1),\\ 0 & \text{, falls } (x,y)=(0,1).\end{cases}$$

In welchen Punkten sind f und g

(i) partiell differenzierbar (nach x bzw. y),

(ii) differenzierbar?

Hinweis zu ii): Nutzen Sie für f in $(0,0)$ die Definition der Differenzierbarkeit(wie in Tutoriumsaufgabe 1 oder Skript Definition 30) und schätzen Sie den Nenner zweimal geeignet ab.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Begründen Sie, dass die Funktion

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto\begin{cases}\frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{, falls } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist und geben die Ableitung $h'(x,y)$ an. Berechnen Sie anschließend die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $P=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
Finden Sie außerdem eine Richtung $\vec{v}$, deren Richtungsableitung $\frac{\partial h}{\partial\vec{v}}$ im Punkt P den Wert 0 annimmt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Ist die Funktion

$$h:\mathbb{R}\times]0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ h(x,y,z)=\begin{pmatrix}\ln(x^2+y^2+z^2)\\ x^2-xyz\\ e^{xyz}\end{pmatrix}$$

differenzierbar? Wenn ja, geben Sie die Ableitungsmatrix an.

Gesamtpunktzahl: 20