Analysis 2 - Hausaufgabe 10

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 xye^{xy^2} dxdy &= \int_0^1 \frac{1}{y^3} e^{xy^2}(-1+y^2x)\Big|_1^2 dy \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{y^3} e^{2y^2}(2y^2-1)) - (\frac{1}{y^3} e^{y^2}(y^2-1))dy = \frac{e^{y^2}(e^{y^2}-1)}{2y^2}\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{e^2-e}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^y (x+1) dzdydx =$$

c)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+y} (xy^3) dxdy =$$

Aufgabe 2

$$\mathcal{T} := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y ?? \text{ TODO } \right\}$$

Aufgabe 3

$$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\vartheta)$$

und der Funktionaldeterminanten

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{K}_R} \left(x^2+y^2\right) dV &= \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \left(r^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)\right) r^2 \sin dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \left(r^2\sin^2(\vartheta)\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)\right) r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^2\sin^2(\vartheta) r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^4\sin^3(\vartheta) dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^4 dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5}R^5 d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^\pi \sin^3(\vartheta) \frac{1}{5}R^5 2\pi \, d\vartheta \\
&= \frac{2}{5}\pi R^5 \int\limits_0^\pi \sin^3(\vartheta) \, d\vartheta \\
&= \frac{2}{5}\pi R^5 \cdot \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir kippen nicht das Glas sondern definieren, das die Gravitationskraft nicht mehr in $-\vec{e}_y$ sondern in $-\sqrt{2}(\vec{e}_x+\vec{e}_y)$-Richtung zeigt. Das heißt, wenn das Glas um $45 Grad$ gekippt wird, verläuft die Oberfläche des Bieres entlang $y_B = x+2$, da die Oberfläche einer Flüssigkeit in Ruhe stets orthogonal zum Gravitationsvektor ist. Die Verschiebung in $\vec{e}_y$-Richtung kommt daher, dass das Glas voll gefüllt ist und das Bier die Kante des Bierglases berührt und demzufolge durch den Punkt $(2,4)$ geht. Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, berechnen wir die Schnittstellen beider Graphen:

$$\begin{aligned}
&x^2 = x+2 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm 1{,}5 \\
\Rightarrow &x_1 = -1 \\
\Rightarrow &x_2 = 2
\end{aligned}$$

Die Menge an “zweidimensionalem Bier“ berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
A_B &= \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2 dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \mid_{-1}^{2} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}2^2 + \frac{1}{2}2 + 2\right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \\
&= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{5}{6} + 2 = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6}
\end{aligned}$$