ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 11

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

WARUM IGNORIERST DU MEINE GEOMETRY EINSTELLUNGEN, LATEX?

Aufgabe 1

(i)

$$\vec{x}: \quad [0,2\pi[\times[0,3] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 4\cos u \\ v \\ 4\sin u \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\vec{y}: \quad [0,2\pi[\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{y}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Wir parametrisieren die Oberfläche:

$$\vec{x}: \quad [0,2\pi[\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a\sin(u)\cos(v) \\ b\cos(u)\sin(v) \\ c\sin(u) \end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \left|\begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ -b\sin u\sin v \\ c\cos v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin u\sin v \\ b\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \left|\begin{pmatrix} -bc\cos u\cos^2 v \\ -ac\sin u\sin v\cos v \\ ab\cos^2 u\cos^2 v - ab\sin^2 u\sin^2 v \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2 + (-ac\sin u\sin v\cos v)^2 + \left(ab\cos^2 u\cos^2 v - ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vec{x}(u,v))\cdot\sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2+(-ac\sin u\sin v\cos v)^2+\left(ab\cos^2 u\cos^2 v-ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{(a\sin(u)\cos(v))^2}{a^4}+\frac{(b\cos(u)\sin(v))^2}{b^4}+\frac{(c\sin(u))^2}{c^4}}$$
$$\cdot\sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2+(-ac\sin u\sin v\cos v)^2+\left(ab\cos^2 u\cos^2 v-ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\sin^2(u)\cos(v)^2}{a^2}+\frac{\cos^2(u)\sin^2(v)}{b^2}+\frac{\sin^2(u)}{c^2}}$$
$$\cdot\sqrt{(-bc\cos u\cos^2 v)^2+(-ac\sin u\sin v\cos v)^2+\left(ab\cos^2 u\cos^2 v-ab\sin^2 u\sin^2 v\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\ldots$$

Das kann doch nicht deren Ernst sein. – Max

Aufgabe 3

Die Parametrisierung für die Fläche S ist wie folgt:

$$\vec{y}:\quad [0,2\pi[\times[0,1]\to\mathbb{R}^3$$
$$\vec{y}(u,v)=\begin{pmatrix}\sqrt{v}\cos u\\ \sqrt{v}\sin u\\ v\end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{y}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{y}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \begin{pmatrix}-\sqrt{v}\sin u\\ \sqrt{v}\cos u\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cos u\\ \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\sin u\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\begin{pmatrix}\sqrt{v}\cos u\\ \sqrt{v}\sin u\\ -\frac{1}{2}\sin^2 u-\frac{1}{2}\cos^2 u\end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\begin{pmatrix}\sqrt{v}\cos u\\ \sqrt{v}\sin u\\ -\frac{1}{2}(\sin^2 u+\cos^2 u)\end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\begin{pmatrix}\sqrt{v}\cos u\\ \sqrt{v}\sin u\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{y}(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{v}\sin u \\ -\sqrt{v}\cos u \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v\sin u \cos u - v \sin u \cos u - \frac{1}{2}v^2 \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}v^2 \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{2}v^2 u \Big|_0^{2\pi} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\pi v^2 \,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{\pi}{6}v^3 \Big|_0^1 \\
&= -\frac{\pi}{6} \\
&\overset{\text{per Def. immer pos.}}{=} \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Die Winkel der Breiten betragen somit: $\theta_1 = 66.5° = \frac{2\pi \cdot 66.5}{360} = 1.16$ und $\theta_2 = 113.5° = \frac{2\pi \cdot 113.5}{360} = 1.98$

Die Parametrisierung ist also:

$$
\begin{aligned}
\vec{z}: \quad & [1.16, 1.98] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \\
\vec{z}(u,v) = 6378 \cdot & \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dO ist somit:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{y}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{y}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= 6378^2 \left|\begin{pmatrix}\cos u\cos v\\ \cos u\sin v\\ -\sin u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sin u\sin v\\ \sin u\cos v\\ 0\end{pmatrix}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2 \left|\begin{pmatrix}\sin^2 u\cos v\\ -\sin^2 u\sin v\\ \cos u\sin u\cos^2 v+\sin u\cos u\sin^2 v\end{pmatrix}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\left(\sin^2 u\cos v\right)^2+\left(\sin^2 u\sin v\right)^2+\left(\cos u\sin u\cos^2 v+\sin u\cos u\sin^2 v\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\cos^2 v+\sin^4 u\sin^2 v+\left(\cos u\sin u\cos^2 v+\sin u\cos u\sin^2 v\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\cos^2 v+\sin^4 u\sin^2 v+(\sin u\cos u)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\cos^2 v+\sin^4 u\sin^2 v+\sin^2 u\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)+\sin^2 u\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u+\sin^2 u\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^2 u\left(\sin^2 u+\cos^2 u\right)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sin u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

Das Integral ist somit:

$$
\begin{aligned}
6379^2\cdot\int_0^{2\pi}\int_{1.18}^{1.98}\sin u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= 6379^2\cdot\int_0^{2\pi} -\cos u\big|_{1.18}^{1.98}\,\mathrm{d}v\\
&= 6379^2\left(-\cos 1.98+\cos 1.18\right)\cdot\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}v\\
&= 6379^2\left(-\cos 1.98+\cos 1.18\right)\cdot\left(v\big|_0^{2\pi}\right)\\
&= 6379^2\left(-\cos 1.98+\cos 1.18\right)2\pi
\end{aligned}
$$