Analysis 2 - Hausaufgabe 4

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(a) Wir haben dann eine Scheibe. Ich bin aber gerade zu faul eine zu malen...

(b)

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(c) Die Ableitungsmatrix $\vec{f}'(r, \varphi)$ ist demnach:

$$\vec{f}'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Für die Determinante gilt deshalb:

$$\begin{aligned} \det(\vec{f}'(r, \varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) \\ &= r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) \\ &= r \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Die Komposition $g \circ g$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des $\mathbb{R}^3$ verlangt, die Funktionswerte von g jedoch nur aus $\mathbb{R}$ sind.
Die Komposition $g \circ \vec{f}$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von f als auch der Urbildraum von g Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
Die Komposition $\vec{f} \circ g$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von g als auch der Urbildraum von f Elemente des $\mathbb{R}$ sind.
Die Komposition $\vec{f} \circ \vec{f}$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des $\mathbb{R}$ verlangt, die Funktionswerte von $\vec{f}$ jedoch aus $\mathbb{R}^3$ sind.

(b)

$$\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$g'(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z})$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{f} \circ g)' &= (\vec{f}' \circ g) \cdot g' \\
&= \vec{f}'(xe^{y-z}) \cdot \begin{pmatrix} e^{y-z} & xe^{y-z} & -xe^{y-z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{y-z} & xe^{y-z} & -xe^{y-z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}+(y-z)} & xe^{xe^{y-z}+(y-z)} & -xe^{xe^{y-z}+(y-z)} \\ e^{y-z} & xe^{y-z} & -xe^{y-z} \\ 2e^{y-z} & 2xe^{y-z} & -2xe^{y-z} \end{pmatrix} \\
(g \circ \vec{f})' &= (g' \circ \vec{f}) \cdot \vec{f}' \\
&= g'(\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t e^{-t} & -e^t e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 1 + 1 - 2 \\
&= 0 \\
g(\vec{f}(t))' &= 0
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f\left(g(t)\right)' &= f\left(xe^{y-z}\right)' \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}} \\ xe^{y-z} \\ 2xe^{y-z} \end{pmatrix}' \\
&= \begin{pmatrix} e^{y-z} \cdot e^{xe^{y-z}} & xe^{y-z} \cdot e^{xe^{y-z}} & -xe^{y-z} \cdot e^{xe^{y-z}} \\ e^{y-z} & xe^{y-z} & -xe^{y-z} \\ 2e^{y-z} & 2xe^{y-z} & -2xe^{y-z} \end{pmatrix} g(f(t))' \qquad = g(\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix})' \\
&= (e^t e^{-t})' \\
&= (e^0)' \\
&= 1' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit kommt bei jeweils beiden Lösungswegen das gleiche Ergebnis heraus.

Aufgabe 3

(a)

$$
\begin{aligned}
e'(x,y) &= (2xy, x^2)\\
f'(x,y) &= (e^x y^2, 2e^x y)\\
\nabla(e\cdot f)(1,1) &= f(1,1)\cdot\nabla e(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot e(1,1)\\
&= e\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\2e\end{pmatrix}\cdot 1\\
&= \begin{pmatrix}2e\\1e\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\2e\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3e\\3e\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\vec{g}\times\vec{h} &= \begin{pmatrix}xy^2\\0\\\sin(x)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\x^2\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-x^2\sin x\\y\sin x\\x^3y^2\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}-x^2\sin x\\y\sin x\\x^3y^2\end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix}-2x\sin x - x^2\cos x & 0\\ y\cos x & \sin x\\ 3x^2y^2 & x^3 2y\end{pmatrix}\\
(\vec{g}\times\vec{h})'(0,1) &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \begin{pmatrix}xyz\\y^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin(x)z\\y^3\end{pmatrix}\\
&= xyz^2\sin(x) + y^6\\
(\vec{u}\cdot\vec{v})' &= (xyz^2\sin(x)+y^6)'\\
&= \begin{pmatrix}yz^2\cos(x) - xyz^2\sin(x) & xz^2\cos(x)+6y^5 & 2xyz\sin(x)\end{pmatrix}\\
(\vec{u}\cdot\vec{v})'(2\pi,2\pi,2\pi) &= \begin{pmatrix}8\pi^3 & 8\pi^3+192\pi^5 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$