ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 8

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(a) Wir wissen bereits, dass $\vec{v}$ wirbelfrei ist und ein Potential besitzt (Da $\vec{u}$ ein Potential ist. Da $\vec{v}$ konvex und offen ist, ist eine hinreichende Bedingung damit $\vec{u} + \text{grad} f$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist, dass gilt:

1. $\text{rot}(\vec{u} + \text{grad} f) = 0$

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\vec{u} + \text{grad} f) &= \text{rot}\vec{u} + \text{rot}(\text{grad} f) \\
&= 0 + \text{rot}(\text{grad} f) \\
&\Leftrightarrow \text{rot}(\text{grad} f) = 0 \\
&= \text{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) (i) Da $\vec{v}$ stetig differenzierbar und D konvex sowie offen ist, muss nur noch geprüft werden ob gilt:

$$\begin{aligned}
\text{div}(\vec{v}) &= 0 \\
&= \cos(x) + \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}} - \cos(x) - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}} = 0
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass ein Vektorpotential für $\vec{v}$ existiert.

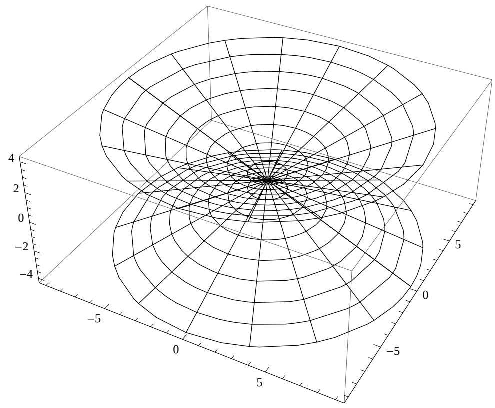
(ii) Da $\vec{v}$ stetig differenzierbar ist und D konvex sowie offen ist, muss nur noch geprüft werden ob gilt:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\vec{v} &= \vec{0} \\
&= \begin{pmatrix} \left(-\cos(x)z - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}}z\right)\frac{\partial}{\partial y} - (x+y)^{\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial z} \\ \left(z^2 + \sin(x)\right)\frac{\partial}{\partial z} - \left(-\cos(x)z - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}}z\right)\frac{\partial}{\partial x} \\ (x+y)^{\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial x} - \left(z^2+\sin(x)\right)\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}(x+y)^{-\frac{4}{3}}z - 0 \\ ... \\ .... \end{pmatrix} \neq \vec{0}
\end{aligned}$$

$\vec{v}$ besitzt somit kein Potential, da die hinreichende Bedingung nicht erfüllt ist.

Aufgabe 3

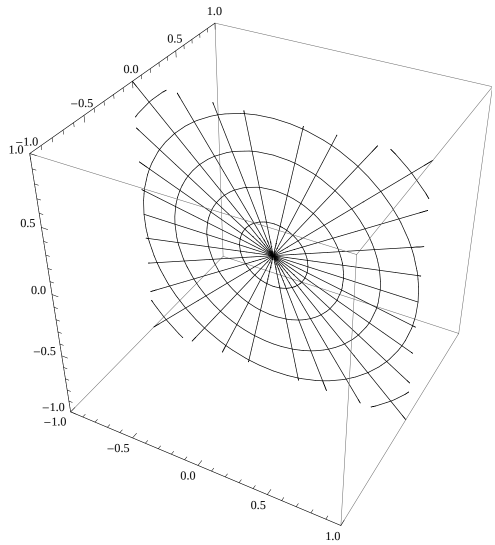
Bei ϑ konstant entstehen jeweil zwei Kegel die an der z-Achse ausgerichtet sind und jeweils in die andere Richtung gucken. Der gewählte Winkel entscheidet den Winkel der Kegel. Interesassante Spezialfälle sind 0 und $\frac{\pi}{2}$. Bei 0 ist die resultierende Fläche im Grunde nicht vorhanden bzw. ist die z-Achso, bei $\frac{\pi}{2}$ ist eine Fläche entlang der x bzw y Achse.



Listing 1: Mathematica Code für den Graph von f

```
ParametricPlot3D[{r*Sin[2] Cos[z], r*Sin
    [2] Sin[z], r*Cos[2]},
{z, 0, 2 \[Pi]}, {r, -10, 10}, PlotStyle
    -> None,
BoundaryStyle -> Black]
```

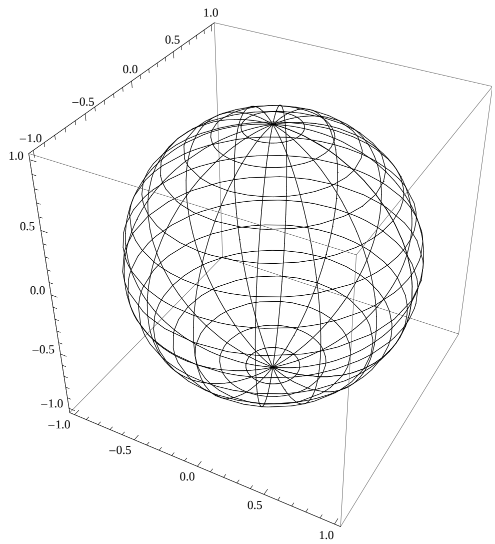
Bei φ konstant entsteht eine Fläche die auf der z-Achse steht und je nach gewähltem φ sich auf der z-Achse dreht.



Listing 2: Mathematica Code für den Graph von f

```
ParametricPlot3D[{r*Sin[y] Cos[0], r*Sin[
    y] Sin[0], r*Cos[y]},
{y, 0, \[Pi]}, {r, -2, 2}, PlotStyle ->
    None,
 PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-1,
     1}}]
```

Bei φ konstant entsteht eine Fläche die auf der z-Achse steht und je nach gewähltem φ sich auf der z-Achse dreht.



Listing 3: Mathematica Code für den Graph von f

```
ParametricPlot3D[{Sin[y] Cos[z], Sin[y]
    Sin[z], Cos[y]},
{z, 0, 2 \[Pi]}, {y, 0, \[Pi]}, PlotStyle
     -> None]
```