Analysis 2 - Hausaufgabe 12

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

1. Aufgabe

- Es gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für alle k ab einem gewissen k_0.

  Außerdem gilt trivialerweise $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Leftrightarrow |a_k| \leq q^k < 1$.

  Weil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert und o.B.d.A $q^k < \frac{1}{k^2}$ ab einem gewissen k_1 folgt, dass auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

- $$\sqrt[k]{|k^n x^k|} \leq \sqrt{|x|} = \sqrt[k]{|k^n|}\; x \leq \sqrt{|x|}$$

  Ab einem gewissen k_0 ist diese Gleichung erfüllt, da $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^n} = 1$. Da aber $|x| < 1$ ist diese Gleichung erfüllt. Die $\sqrt{|x|}$ steht hier für das q aus dem vorherigen Beweis. Wir nehmen die Wurzel, da nur so die obige Formel gilt und $\sqrt{|x|}$ noch immer kleiner als 1 ist.

  Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe also. Wenn $|x| > 0$ ist das Wurzelkriterium nicht mehr erfüllt und der Grenzwert der Folge bleibt größer als 1.

Aufgabe 2

a) Ist nicht konvergent, da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{2n+7}{70n+8} = \pm\frac{2}{7}$$

b) Ist konvergent, da das Quontientenkriterium erfüllt ist:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1000^n+1000}{(n+1)\cdot n!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1000^n + 1000}{(n+1)1000^n} \right| = 0 < 1$$

Da offensichtlich gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1000^n}{n!} \right|$ ist die Reihe auch absolut konvergent.

c) Da $\lim_{1\to n} \frac{n^5}{2^n+3^n} = 0$ ist die Reihe konvergent, da weiterhin gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^5}{2^n+3^n} \right|$ ist die Reihe absolut konvergent.

d) Da $\lim_{1\to n} \frac{1}{4n+(-1)^n} = 0$ gilt nach dem Leibnizkriterium, dass die Reihe konvergent ist. Offensichtlich ist die Reihenfolge auch absolut konvergent.

Aufgabe 3

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$