Analysis 2 - Hausaufgabe 8

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(a) Zu zeigen:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \mathrm{rot}\,(\vec{u} + \mathrm{grad} f)\\ &= \mathrm{rot}(\vec{u}) + \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f)\\ &= \vec{v} + \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f)\end{aligned}$$

Deshalb muss gelten:

$$0 = \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \mathrm{rot}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\\ -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\end{pmatrix} = 0$$

(b) (i) Da $\vec{v}$ stetig differenzierbar und D konvex sowie offen ist, muss nur noch geprüft werden ob gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\vec{v}) &= 0\\ &= \cos(x) + \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}} - \cos(x) - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}} = 0\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass ein Vektorpotential für $\vec{v}$ existiert.

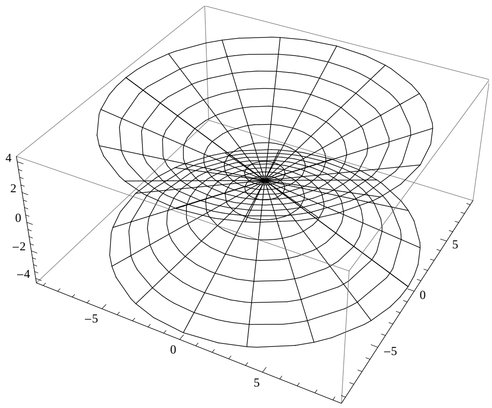
(ii) Da $\vec{v}$ stetig differenzierbar ist und D konvex sowie offen ist, muss nur noch geprüft werden ob gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{v} &= \vec{0}\\ &= \begin{pmatrix}\left(-\cos(x)z - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}}z\right)\frac{\partial}{\partial y} - (x+y)^{\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial z}\\ \left(z^2+\sin(x)\right)\frac{\partial}{\partial z} - \left(-\cos(x)z - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}}z\right)\frac{\partial}{\partial x}\\ (x+y)^{\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial x} - \left(z^2+\sin(x)\right)\frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{2}{9}(x+y)^{-\frac{4}{3}}z - 0\\ \ldots\\ \ldots.\end{pmatrix} \neq \vec{0}\end{aligned}$$

$\vec{v}$ besitzt somit kein Potential, da die hinreichende Bedingung nicht erfüllt ist.

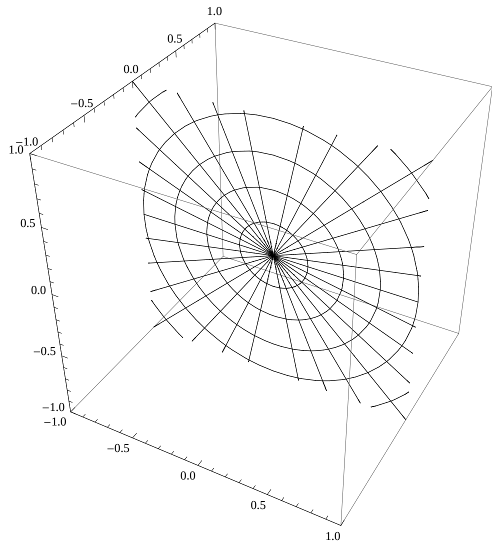
Aufgabe 3

Bei ϑ konstant entstehen jeweil zwei Kegel die an der z-Achse ausgerichtet sind und jeweils in die andere Richtung gucken. Der gewählte Winkel entscheidet den Winkel der Kegel. Interesassante Spezialfälle sind 0 und $\frac{\pi}{2}$. Bei 0 ist die resultierende Fläche im Grunde nicht vorhanden bzw. ist die z-Achso, bei $\frac{\pi}{2}$ ist eine Fläche entlang der x bzw y Achse.



Listing 1: Mathematica Code für den Graph von f

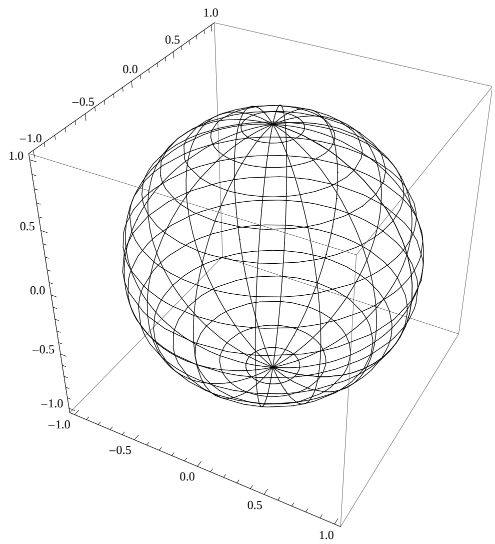
```
ParametricPlot3D[{r*Sin[2] Cos[z], r*Sin
    [2] Sin[z], r*Cos[2]},
{z, 0, 2 \[Pi]}, {r, -10, 10}, PlotStyle
    -> None,
BoundaryStyle -> Black]
```



Bei φ konstant entsteht eine Fläche die auf der z-Achse steht und je nach gewähltem φ sich auf der z-Achse dreht.

Listing 2: Mathematica Code für den Graph von f

```
ParametricPlot3D[{r*Sin[y] Cos[0], r*Sin[
    y] Sin[0], r*Cos[y]},
{y, 0, \[Pi]}, {r, -2, 2}, PlotStyle ->
    None,
 PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-1,
     1}}]
```



Bei φ konstant entsteht eine Fläche die auf der z-Achse steht und je nach gewähltem φ sich auf der z-Achse dreht.

Listing 3: Mathematica Code für den Graph von f

```
ParametricPlot3D[{Sin[y] Cos[z], Sin[y]
    Sin[z], Cos[y]},
{z, 0, 2 \[Pi]}, {y, 0, \[Pi]}, PlotStyle
     -> None]
```

Aufgabe 4

(i) $\{(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi = \frac{\pi}{3}\}$

(ii) $\{(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \rho \leq z+3\}$

(iii) $\{(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\cos\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r = 1\}$