

Abgabe: 26.11.12.-30.11.12

5. Übung Analysis II für Ingenieure

(Fehlerschranken, Taylorformel, Hessematrix, Extremwerte)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Wir wollen die Höhe des Fernsehturms am Alexanderplatz ermitteln. Angenommen, wir hätten von der TU freie Sicht auf den Turm. Wie man einer Karte entnehmen kann, beträgt die Entfernung des Turmes von unserem Standpunkt 6000 ± 200 m. Den Öffnungswinkel des von unserem Standort, dem Turmfuß und der Turmspitze gebildeten rechtwinkligen Dreiecks bestimmen wir zu 3.5 ± 0.2 Grad.

- Welche Höhe des Fernsehturms erhalten wir näherungsweise aus unseren Messdaten?
- Wie können wir den absoluten Fehler abschätzen? Welche Fehlerschranken erhalten wir?

(*Hinweis:* Man benutzte das Bogenmaß für den Öffnungswinkel.)

2. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin((x + 2y)\pi).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

3. Aufgabe

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie zunächst alle kritischen Punkte von f .
- (b) Untersuchen Sie nun Ihre kritischen Punkten aus (a) auf lokale/globale Minima/Maxima.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sie möchten die Gravitationskonstante g ermitteln, indem Sie einen Stein von einer hohen Brücke in den darunter fließenden Fluss fallen lassen. Die Fallzeit beträgt etwa 3.0 ± 0.1 s. Der Höhenunterschied zwischen Brücke und Wasseroberfläche beträgt im Mittel 44.5 m. Die Wasserhöhe schwankt wellenbedingt um ± 10 cm.

- a) Ermitteln Sie g näherungsweise aus Ihren Messdaten.
Hinweis: Die zurückgelegte Strecke s und die benötigte Zeit t stehen in der Beziehung $s = \frac{1}{2}gt^2$.
- b) Schätzen Sie den absoluten Fehler mit Hilfe des Fehlerschranksatzes ab.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorformel einen Näherungswert von

$$e^{0.1} \cos(0.2).$$

Vergleichen Sie Ihre Näherung mit dem tatsächlichen Wert (mittels eines Taschenrechners).

Hinweis: Überlegen Sie sich dazu einen geeigneten (Entwicklungs-)Punkt (x_0, y_0) , in dem Sie die Taylorformel betrachten.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lage und die Art der Extrema und die zugehörigen Funktionswerte der Funktionen

$$(i) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^3y - 3xy + y^2 + 1,$$

$$(ii) \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Gesamtpunktzahl: 20