

# ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 12

Tom Nick 342225  
Tom Lehmann 340621  
Maximilian Bachl 341455

## 1. Aufgabe

- Es gilt  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$  für alle  $k$  ab einem gewissen  $k_0$ .

Außerdem gilt trivialerweise  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Leftrightarrow |a_k| \leq q^k < 1$ .

Weil  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergiert und o.B.d.A.  $q^k < \frac{1}{k^2}$  ab einem gewissen  $k_1$  folgt, dass auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert.

•

$$\sqrt[k]{|k^n x^k|} \leq \sqrt{|x|} = \sqrt[k]{|k^n|} x \leq \sqrt{|x|}$$

Es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k^n} = 1$ , wobei sich die Folge von oben der Null nähert. Da aber  $|x| < 1$  ist diese Gleichung erfüllt. Die  $\sqrt{|x|}$  steht hier für das  $q$  aus dem vorherigen Beweis. Wir nehmen die Wurzel, da nur so die obige Formel gilt und  $\sqrt{|x|}$  noch immer kleiner als 1 ist.

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe also. Wenn  $|x| > 0$  ist das Wurzelkriterium nicht mehr erfüllt und der Grenzwert der Folge bleibt größer als 1.

## Aufgabe 2

- a) Ist nicht konvergent, da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist und auch nicht absolut konvergent, da die notwendige Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  nicht erfüllt ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2n+7}{70n+8} = \pm \frac{2}{7}$$

- b) Ist konvergent, da das Quotientenkriterium erfüllt ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1000^n + 1000}{(n+1) \cdot n!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1000^n + 1000}{(n+1)1000^n} \right| = 0 < 1$$

Da offensichtlich gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1000^n}{n!} \right|$  ist die Reihe auch absolut konvergent.

- c) Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} = 0$  ist die Reihe konvergent, da weiterhin gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^5}{2^n + 3^n} \right|$  ist die Reihe absolut konvergent.

- d) Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n + (-1)^n} = 0$  gilt nach dem Leibnizkriterium, dass die Reihe konvergent ist. Offensichtlich ist die Reihe auch absolut konvergent.

- e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n}{5^{n+2}}}{\frac{4^{n-1}}{5^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n}{25 \cdot 5^n}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{4^n}{5 \cdot 5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{25 \cdot 5^n} \cdot \frac{5 \cdot 5^n}{1 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{1} = \frac{4}{5}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{6n+6}}{n^{2n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^6 2^{6n}}{n^2 n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^6}{n^2} = 0$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

## Aufgabe 3

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

Der Entwicklungspunkt ist somit  $x_0 = 1$ .

Wir berechnen nun den Konvergenzradius.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}{\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{-1 \cdot (-1)^k}{\frac{k}{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{-1 \cdot (-1)^k}{k} \cdot \frac{k+1}{(-1)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{-1}{k} \cdot \frac{k+1}{1} \right| = 1$$

Der Konvergenzradius ist also 1.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot z^k$$

Der Entwicklungspunkt ist somit  $x_0 = 1$ .

Wir berechnen nun den Konvergenzradius.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)k!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)k!}{k!} \right| = \infty$$

Diese Summe konvergiert also für jede beliebige Zahl.

Nun prüfen wir, ob die Reihe aus (a) auch für  $x = 1 + i$  konvergiert.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} \text{ für } x \text{ einsetzen } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{i^k}{k}$$

Da  $\frac{i^k}{k}$  eine Nullfolge ist konvergiert die Reihe nach dem Leibnitz-Kriterium.