

## ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 2

Tom Nick 342225  
Tom Lehmann 340621  
Maximilian Bachl 341455

### Aufgabe 1.

Listing 1: Mathematica Code für die Niveaulinien von h

```
ContourPlot[{x^2/4 + y^2/9 + 4 == 4,  
x^2/4 + y^2/9 + 4 == 5,  
x^2/4 + y^2/9 + 4 == 8},  
{x, -6, 6}, {y, -6, 6},  
ContourStyle -> Black]
```

Eine allgemeine Vorschrift für Niveaulinien zum Wert  $c$  ist:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 4 = c$  bzw. nach  $y$  umgestellt:

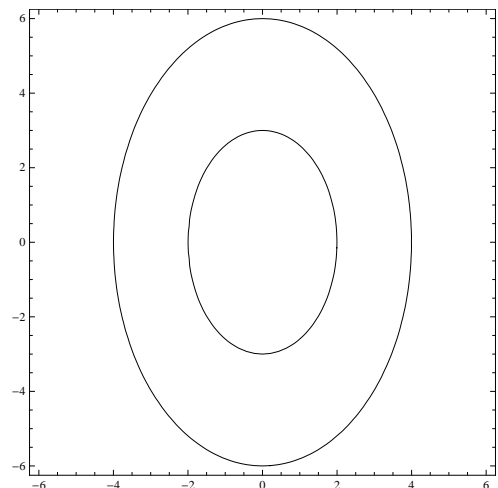
(i)

$$y = \pm 3\sqrt{c - 4 - \frac{x^2}{4}}$$

$$c = 4: y = \pm 3\sqrt{-\frac{x^2}{4}}$$

$$c = 5: y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

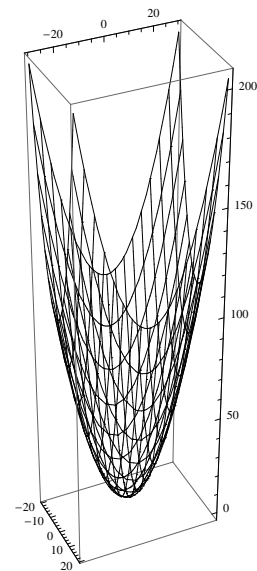
$$c = 8: y = \pm 3\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$$



Listing 2: Mathematica Code für den Graph von h

(ii)

```
Plot3D[x^2/4 + y^2/9 + 4,  
{x, -6, 6}, {y, -6, 6},  
PlotStyle -> None]
```



- (iii) Da  $f$  eine Komposition von stetigen Funktionen ist, sowie das Intervall  $D$  kompakt ist, muss  $f$  Minima und Maxima in  $D$  annehmen. Da die Niveaulinien konzentrische Ellipsen mit Mittelpunkt in  $(0,0)$  sind, nimmt die Funktion dort ihr Minimum an und an den Intervallgrenzen ihre Maxima.

**Minima:**  $f(0,0) = 4$

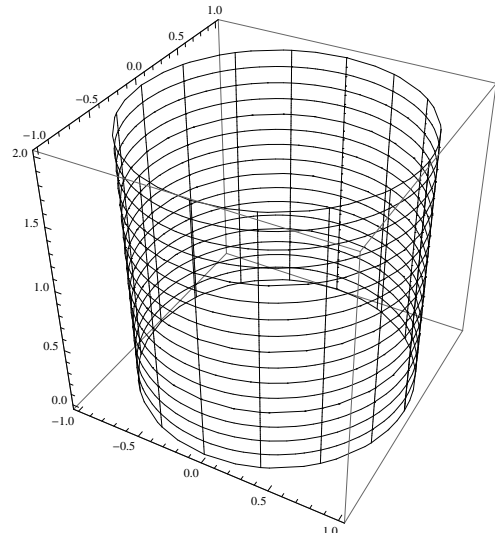
**Maxima:**  $f(-2,0) = 5 = f(2,0)$

(iv) Man kann  $\vec{Z}$  nicht zeichnen, da man 6 Dimensionen nicht darstellen kann.

Wählt man jedoch  $r = 1$  sieht das ganze so aus:

Listing 3: Mathematica Code für den Graph von Z

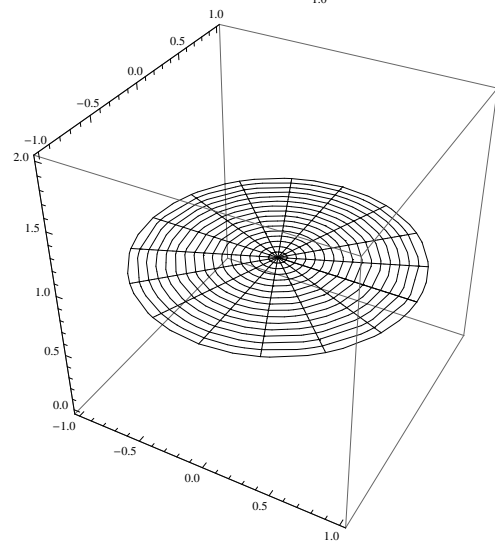
```
ParametricPlot3D[{Cos[phi], Sin[phi], z},
{phi, 0, 2 \[Pi]}, {z, 0, 2},
PlotStyle -> None, BoundaryStyle -> Black]
```



Wählt man  $z = 1$ , aber lässt  $r$  variabel:

Listing 4: Mathematica Code für den Graph von Z

```
ParametricPlot3D[{r*Cos[t], r*Sin[t], 1},
{t, 0, 2 \[Pi]}, {r, 0, 1},
PlotStyle -> None, BoundaryStyle -> Black]
```



## Aufgabe 2.

$f$  ist an den Punkten  $(x, y) \neq (0, 0)$  stetig da,  $\frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4}$  eine Komposition stetiger Funktionen ist. Sei die Stetigkeit am Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  zu überprüfen.

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4} - 0 \right| \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4} \right| \\ &\geq \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^4 + y^8}{x^2 + y^4} \right| \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{(x^2 + y^4) y^4}{x^2 + y^4} \right| \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} |y^4| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist  $f$  auch im Punkt  $(0,0)$  stetig, womit sie stetig auf  $\mathbb{R}^2$  ist.

$g$  ist an den Punkten  $(x,y) \neq (0,1)$  stetig da,  $\frac{x^4(y-1)^2+x^3(y-1)^3}{(x^2+(y-1)^2)^3}$  eine Komposition stetiger Funktionen ist. Sei die Stetigkeit am Punkt  $(x,y) = (0,1)$  zu überprüfen.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| f\left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right) \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k^4} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \frac{1}{k^3}}{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right)^3} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2}{k^6}}{\frac{8}{k^6}} \right| \\ &= \dots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4} \right| \end{aligned}$$

Da die beiden benutzten Folgen gegen  $(0,1)$  konvergieren, müsste der Grenzwert für Stetigkeit gegen 0 konvergieren. Damit ist  $g$  im Punkt  $(0,1)$  nicht stetig, womit die Funktion stetig auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$  ist.