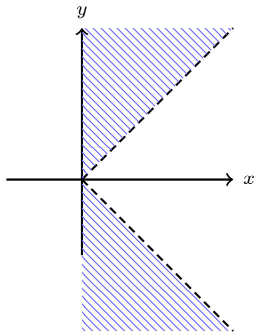
Analysis 2 - Hausaufgabe 1

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	123456

Aufgabe 1.

(a)

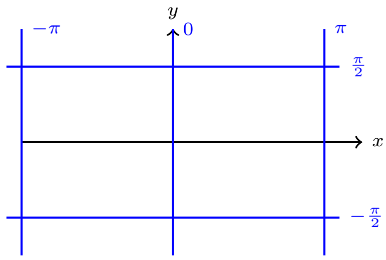
$$\delta A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (|x| = |y| \vee (x = 0 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})) \wedge x \geq 0\}$$
$$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| < |y|, x > 0\}$$



Abgeschlossen? Nein, da $\delta A \not\subseteq A$
Offen? Nein, da $\delta A \cap A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x = 0 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\}$
Beschränkt? Nein
Kompakt? Nein, da A weder abgeschlossen, noch beschränkt ist.

(b)

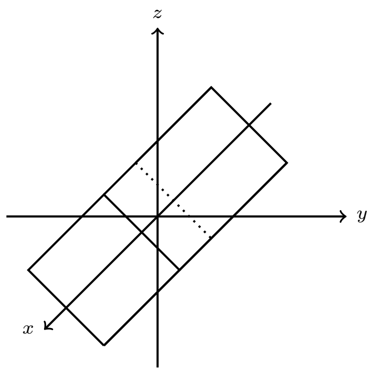
$$\delta B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x)\cos(y) = 0\}$$
$$\mathring{B} = \emptyset$$



Abgeschlossen? Ja, da $\delta B \subseteq B$.
Offen? Nein, da $\delta B \cap B = B \neq \emptyset$
Beschränkt? Nein, da die Gerade $x = 0 \in B$.
Kompakt? Nein, da B zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt ist.

(c)

$$\delta C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| = 1, |x| = 1\}$$
$$\mathring{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| < 1, |x| < 1\}$$



Abgeschlossen? Ja, da $\delta C \subseteq B$
Offen? Nein, da $\delta C \cap C \neq \emptyset$
Beschränkt? Nein, da der Körper unbegrenzt groß ist. Kompakt? Nein, da C zwar abgeschlossen aber nicht beschränkt.

TODO: A-C

Aufgabe 2.

(i)

Tom Lehmann

Wenn A offen ist, gilt: $\delta A \cap A = \emptyset$

Da $\delta A = \delta A^c$, muss gelten: $\delta A^c \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \delta A \subseteq A^c$

Also ist A^c abgeschlossen, wenn A offen ist.

Wenn A abgeschlossen ist, gilt: $\delta A \subseteq A$

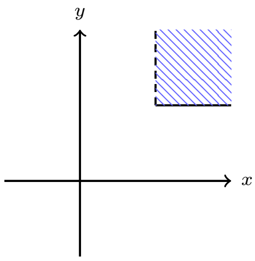
Da $\delta A = \delta A^c$, muss gelten (da $A \not\subseteq A^c$): $\delta A^c \cap A = \emptyset$

Also ist A^C offen, wenn A abgeschlossen ist.

Die Aussage ist somit wahr.

Max Bachl **WARUM ist das eingerückt?**

Gegenbeispiel:



(ii)

Von der Logik her gilt das auf jeden Fall. Bleibt zu beweisen warum...

Aufgabe 3.

(i)

$$a_{k1}: \lim_{k\to\infty} \frac{\arctan\left(k^2\right) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{k}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{1+k^4} \cdot 2k}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} -\frac{2k^3}{1+k^4} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\frac{2}{k}}{\frac{1}{k^4}+1} = 0$$

$$a_{k2}: \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^3} = 0$$

$$b_{k1}: \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{2}\right)$$

$$b_{k2}: \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{t^2} dt = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k} + 1 = 1$$

a_k konvergiert, da alle Komponentenfolgen konvergieren.

b_k konvergiert nicht, da a_{k1} nicht konvergiert.

(ii)

Der cos bei b_k schwankt ja immer zwischen ein paar Werten. Wir nehmen die Folgen an gleichen Werten als Teilfolgen, haben dann konstante Folgen, die soundso konvergieren — Max