Analysis 2 – HA03

1. Aufgabe

(i) Da f als Komposition diff'barer Funktionen auf $\mathbb{R}^2_{\setminus\{0,0\}}$ diff'bar ist, ist f auf $\mathbb{R}^2_{\setminus\{0,0\}}$ auch partiell diff'bar.

Wir überprüfen nun, ob f auch in $(0,0)$ partiell diff'bar ist.
Dazu muss die Grenzwerte existieren:

$$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t^2\cdot 0+0}{t^2+0} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{df}{dy}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} \overset{\lim_{t\to 0}}{=} \frac{\frac{0\cdot t^2+t^8}{0+t^4} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{t}} = 0$$

Da die Grenzwerte in $(0,0)$ existieren, ist f auf $\mathbb{R}^2$ partiell diff'bar.

Da g als Komposition diff'barer Fkt. auf $\mathbb{R}^2_{\setminus\{0,1\}}$ diff'bar ist, ist g auf $\mathbb{R}^2_{\setminus\{0,0\}}$ auch partiell diff'bar.

Wir überprüfen nun, ob g auch in $(0,1)$ partiell diff'bar ist.
Dazu müsse die Grenzwerte existieren:

$$\frac{dg}{dx}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,1)-g(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4\cdot 0^2+t^3\cdot 0^2}{(t^2+0)^2} - 1}{t} = -\infty$$

$$\frac{dg}{dy}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,t+1)-g(0,1)}{t} = \frac{\frac{0^4-(t+1)^4}{0+(t+1)^4} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2}{t} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Da der Grenzwert u. damit $\frac{dg}{dy}(0,0)$ nicht existieren, ist g nicht partiell diff'bar (auf ganz $\mathbb{R}^2$) und ~~damit~~ auch nicht total diff'bar!

(ii) Differentierbarkeit von g:

g ist als Komposition diff'barer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,1\}$ diff'bar.

in $(0,1)$:

$$f(\vec{x_0} + \vec{\Delta x}) = f(\vec{x_0}) + f'(x_0)\vec{\Delta x} + \text{Rest}$$

$$\Rightarrow \text{Rest} = f(\vec{x_0} + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x_0}) + f'(\vec{x_0}) \cdot \vec{\Delta x}$$

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Delta x} = \vec{x} - \vec{x_0} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{Rest} = f(x,y) - f(0,1) - f'(0,1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x^4(y-1)^2 + x^3(y-1)^3}{(x^2+(y-1)^2)^3} - 1 - \left(\frac{dg}{dx}(0,1); \frac{dg}{dy}(0,1)\right)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

überall g:

ii) Differenzierbarkeit von f:

f ist als Komposition diff'barer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ diff'bar

in $(0,0)$

$$f(\vec{x_0} + \vec{\Delta x}) = f(\vec{x_0}) + f'(x_0)\vec{\Delta x} + \text{Rest}$$

$$\Rightarrow \text{Rest} = f(\vec{x_0} + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x_0}) - f'(x_0)\vec{\Delta x}$$

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Delta x} = \vec{x} - \vec{x_0} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{Rest} = f(x,y) - f(0,0) - \overbrace{f'(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{x^2y^2 + y^8}{x^2+y^4} - 0 - \underbrace{(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{0}$$

Nun muss gelten: $0 \le \lim_{\vec{\Delta x} \to 0} \frac{\text{Rest}}{|\vec{\Delta x}|} = 0$

$$0 \le \lim_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} \left| \frac{\frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4}}{\left\|\binom{x}{y}\right\|} \right| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left| \frac{\frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left| \frac{\frac{x^2y^2+y^8}{x^2} + \frac{x^2y^2+y^8}{y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

2. Aufgabe

~~Existiere für $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ alle partiellen Ableitungen~~

$$\cancel{\frac{d h(x,y,z)}{dx} = \frac{4\sin^3(x)\cdot\cos(x)\sin^4(y)\cdot(x^2+y^2) - \sin^4(x)\sin^4(y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}}$$

$h: G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt diff'bar in $\vec{x}_0 \in G$, wenn gilt:

$$\vec{h}(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = \vec{h}(\vec{x}_0) + \vec{h}'(\vec{x}_0)\cdot\Delta\vec{x} + \vec{Rest}$$

mit $\lim\limits_{\Delta\vec{x}\to 0} \frac{\vec{Rest}}{|\Delta\vec{x}|} = 0$

$$\Rightarrow \vec{Rest} = \vec{h}(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - \vec{h}(\vec{x}_0) - \vec{h}'(\vec{x}_0)\cdot\Delta\vec{x} \qquad \Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Rest = \vec{h}(x,y) - \vec{h}(0,0) - \left(\frac{d\vec{h}}{dx}(0,0), \frac{dh}{dy}(0,0)\right)\Delta\vec{x}$$

$$\frac{dh}{dx}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin^4(t)\sin^4(0)}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin^4(t)\cdot 0}{t^2}}{t} = 0$$

$$\frac{dh}{dy}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \sin \ldots = 0$$

$$\Rightarrow Rest = \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}$$

$$0 \le \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\cdot\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\left|\binom{x}{y}\right|} \right| = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\cdot\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \left| \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right|$$

3. Aufgabe

$$\frac{dh_1}{dx}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \qquad \frac{dh_1(x,y,z)}{dy} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \qquad \frac{dh_1(x,y,z)}{dz} = \frac{2z}{z^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{dh_2(x,y,z)}{dx} = 2x - yz \qquad \frac{dh_2(x,y,z)}{dy} = -xz \qquad \frac{dh_2}{dz}(x,y,z) = -xy$$

$$\frac{dh_3(x,y,z)}{dx} = yze^{xyz} \qquad \frac{dh_3(x,y,z)}{dy} = xze^{xyz} \qquad \frac{dh_3}{dz}(x,y,z) = xye^{xyz}$$

Alle partiellen Ableitungen existieren. ~~und sind stetig, da x∈~~]
~~Sie sind jedoch nicht alle stetig da $x \in \mathbb{R}$~~.
~~⇒ nicht diff'bar~~

Sind auch alle Stetig, da $y \in]0,\infty[$ somit ist der Nenner bei allen „h_n" Ableitungen > 0.

⇒ Diff'bar