Analysis 2 - Hausaufgabe 4

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(a) Da $s = \frac{g}{2}t^2$, gilt:

$$g = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 44,5\mathrm{m}}{(3,0\mathrm{s})^2} \approx 9,\overline{8}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

(b) Da wir den Fehlerschrankensatz anwenden sollen, benötigen wir zunächst die partiellen Ableitungen.

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{2}{t^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{-4s}{t^3}$$

Als nächstes bestimmen wir M_1 sowie M_2:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \sup_{\substack{s\in[s_0-\Delta s, s_0+\Delta s]\\ t\in[t_0-\Delta t, t_0+\Delta t]}} \left|\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right| \\
&= \sup_{\substack{s\in[44{,}4\mathrm{m};44{,}6\mathrm{m}]\\ t\in[2{,}9\mathrm{s};3{,}1\mathrm{s}]}} \left|\frac{2}{t^2}\right| \\
&= \frac{2}{2,9^2} = 0,238 \\
M_2 &= \sup_{\substack{s\in[s_0-\Delta s, s_0+\Delta s]\\ t\in[t_0-\Delta t, t_0+\Delta t]}} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right| \\
&= \sup_{\substack{s\in[44{,}4\mathrm{m};44{,}6\mathrm{m}]\\ t\in[2{,}9\mathrm{s};3{,}1\mathrm{s}]}} \left|\frac{4s}{t^3}\right| \\
&= \frac{-4 \cdot 44,6}{2,9^3} = 7,315
\end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
|\Delta g| &= |\Delta g(s_0 + \Delta s, t_0 + \Delta t) - g(s_0, t_0)| \\
&\leq M_1|\Delta s| + M_2|\Delta t| \\
&\leq 0,238 \cdot 0,1 + 7,315 \cdot 0,1 = 0,755
\end{aligned}$$

Für die Gravitationskonstange g gilt also:

$$\left(9,\overline{8} - 0,755\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \leq g \leq \left(9,\overline{8} + 0,755\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
$$9,13\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \leq g \leq 10,64\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Aufgabe 2

Der näherungsweise Wert beträgt von $e^{0.1}\cos(0.2)$ beträgt 1.083141 (wir gehen von rad für den Winkel aus.

Wir definieren die Funktion $f(x,\psi) = e^x \cos(\psi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x,\psi) &= \begin{pmatrix} e^x\cos(\psi) & -e^x\sin(\psi) \end{pmatrix} \\ f''(x,\psi) &= \begin{pmatrix} e^x\cos(\psi) & -e^x\sin(\psi) \\ -e^x\sin(\psi) & -e^x\cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wählen für das Taylorpolynom 2. Ordnung den Entwicklungspunkt $\vec{0}$.

$$\begin{aligned} T_{\vec{0}}(\vec{x}) &= 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - \phi^2) \end{aligned}$$

Somit ist $T_{\vec{0}}(0.1, 0.2) = 1 + 0.1 + \frac{1}{2}(0.1^2 - 0.2^2) = 1.085$.