Analysis 2 - Hausaufgabe 4

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(a) Da $s = \frac{g}{2}t^2$, gilt:

$$g = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 44,5\text{m}}{(3,0\text{s})^2} \approx 9,\overline{8}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(b) Da wir den Fehlerschrankensatz anwenden sollen, benötigen wir zunächst die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) &= \frac{2}{t^2} \\
\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) &= \frac{-4s}{t^3}
\end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir M_1 sowie M_2:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \sup_{\substack{s\in[s_0-\Delta s, s_0+\Delta s] \\ t\in[t_0-\Delta t, t_0+\Delta t]}} \left|\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right| \\
&= \sup_{\substack{s\in[44{,}4\text{m};44{,}6\text{m}] \\ t\in[2{,}9\text{s};3{,}1\text{s}]}} \left|\frac{2}{t^2}\right| \\
&= \frac{2}{2,9^2} = 0,238 \\
M_2 &= \sup_{\substack{s\in[s_0-\Delta s, s_0+\Delta s] \\ t\in[t_0-\Delta t, t_0+\Delta t]}} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right| \\
&= \sup_{\substack{s\in[44{,}4\text{m};44{,}6\text{m}] \\ t\in[2{,}9\text{s};3{,}1\text{s}]}} \left|\frac{4s}{t^3}\right| \\
&= \frac{-4 \cdot 44,6}{2,9^3} = 7,315
\end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
|\Delta g| &= |\Delta g(s_0 + \Delta s, t_0 + \Delta t) - g(s_0, t_0)| \\
&\leq M_1|\Delta s| + M_2|\Delta t| \\
&\leq 0,238 \cdot 0,1 + 7,315 \cdot 0,1 = 0,755
\end{aligned}$$

Für die Gravitationskonstange g gilt also:

$$\begin{aligned}
\left(9,\overline{8} - 0,755\right)\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \leq g \leq \left(9,\overline{8} + 0,755\right)\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
9,13\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \leq g \leq 10,64\frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Der näherungsweise Wert beträgt von $e^{0.1}\cos(0.2)$ beträgt 1.083141 (wir gehen von rad für den Winkel aus).

Wir definieren die Funktion $f(x,\psi) = e^x \cos(\psi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x,\psi) &= \begin{pmatrix} e^x\cos(\psi) & -e^x\sin(\psi) \end{pmatrix} \\ f''(x,\psi) &= \begin{pmatrix} e^x\cos(\psi) & -e^x\sin(\psi) \\ -e^x\sin(\psi) & -e^x\cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wählen für das Taylorpolynom 2. Ordnung den Entwicklungspunkt $\vec{0}$.

$$\begin{aligned} T_{\vec{0}}(\vec{x}) &= 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & \psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & \psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -\psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - \phi^2) \end{aligned}$$

Somit ist $T_{\vec{0}}(0.1, 0.2) = 1 + 0.1 + \frac{1}{2}(0.1^2 - 0.2^2) = 1.085$. Die Abweichung dieser Abschätzung zur tatsächlichen Berechnung beträgt also $1.085 - 1.083141 = 0.001859$.

Aufgabe 3

(i) f ist eine zweimal partiell differenzierbare Funktion, da f eine Komposition aus zweimal partiell differenzierbaren Funktionen ist. Somit können wir, falls vorhanden, Extrema von f finden. Jedes Extremum hat als notwendige Bedingung: $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 3y \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(3x^2 - 3) \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir die Nullstellen finden. Für $y(3x^2 - 3) = 0$ gibt es 3 Lösungen:

a) offenichtlich bei $y = 0$

b) und $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Für $x^3 - 3x + 2y = 0$ kann man keine direkten Nullstellen bestimmen. Man kann nun in einer Matrix die möglichen Nullstellen von ∇f darstellen:

	$x^3 - 3x + 2y = 0$
$y = 0$	$(0,0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$
$x = 1$	$(1,1)$
$x = -1$	$(-1,-1)$

Also sind die kritischen Punkte bei $(0,0), (1,-1), (-1,1), (\sqrt{3},0), (-\sqrt{3},0)$. Gesucht sind nun globale/lokale Extrema:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 - 3 \\ 3x^2 - 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $(0,0)$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -9 \Rightarrow \text{ indefinit, Sattelpunkt}$$

- $(1,1)$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) \text{ zu überprüfen. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$
$$f(1,1) = 0$$

- $(-1,-1)$

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) \text{ zu überprüfen. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 6 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$
$$f(-1,-1) = 0$$

- $(\sqrt{3},0)$
$$H_f(\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = -36 \Rightarrow \text{indefinit, Sattelpunkt}$$

- $(-\sqrt{3},0)$

$$H_f(-\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \approx -36 \Rightarrow \text{ indefinit, Sattelpunkt}$$

Bleibt noch zu überprüfen, ob die beiden gefunden lok. Minima auch glob. Minima sind. Das ist nicht so, da $\lim_{x\to\infty} f(x,1) = -\infty$ und $-\infty < f(1,1) = 0$ und $-\infty < f(-1,-1) = 0$.

(ii) g ist eine zweimal partiell differenzierbare Funktion, da g eine Komposition aus zweimal partiell differenzierbaren Funktionen ist. Somit können wir, falls vorhanden, Extrema von g finden. Jedes Extremum hat als notwendige Bedingung: $\nabla g(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 8x^3 + 4xy^2 \\ 4x^2y + 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(8x^2 + 4y^2) \\ y(4x^2 + 4y^2) \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir die Nullstellen finden. Für $x(8x^2 + 4y^2)$:

a) offensichtlich bei $x = 0$

b) und $8x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{-2}x$

Für $y(4x^2 + 4y^2)$:

a) offensichtlich bei $y = 0$

b) und $4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow y = x$

Man kann nun in einer Matrix die möglichen Nullstellen von ∇g darstellen:

	$x = 0$	$y = \sqrt{-2}x$	$y = -\sqrt{-2}x$
$y = 0$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$y = x$	$(0,0)$	↯	↯

Also sind die kritischen Punkte bei $(0,0)$. Gesucht sind nun globale/lokale Extrema:

$$H_g = \begin{pmatrix} 24x^2 + 4y^2 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

- $(0,0)$

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ also können wir keine Aussage treffen.}$$

  $g(0,0) = 0$

  Da aber g eine Summe von positiven geraden Potenzen ist, die niemals kleiner als 0 werden können kann g niemals kleiner als 0 werden. Somit muss bei $(0,0)$ ein globales und lokales Minimum liegen.