

## ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 10

Tom Nick 342225  
Tom Lehmann 340621  
Maximilian Bachl 341455

### Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 xy e^{xy^2} dx dy &= \int_0^1 \frac{1}{y^3} e^{xy^2} (-1 + y^2 x) \Big|_1^2 dy \\&= \int_0^1 \left( \frac{1}{y^3} e^{2y^2} (2y^2 - 1) \right) - \left( \frac{1}{y^3} e^{y^2} (y^2 - 1) \right) dy = \frac{e^{y^2} (e^{y^2} - 1)}{2y^2} \Big|_0^1 \\&= \frac{e^2 - e}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^1 \int_0^y (x+1) z^x dz dy dx &= \int_1^2 \int_0^1 z^{x+1} \Big|_0^y dy dx \\&= \int_1^2 \int_0^1 y^{x+1} dy dx \\&= \int_1^2 \frac{1}{x+2} y^{x+2} \Big|_0^1 dx \\&= \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx \\&= \log(x+2) \Big|_1^2 = \log(4) - \log(3) = \log\left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+y} (xy^3) dx dy &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x^2 y^3 \right) \Big|_{\sqrt{y}}^{1+y} dy \\&= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} (y^5 + y^4 + y^3) \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^5 + y^4 + y^3 dy \\&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} y^6 + \frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{37}{120}\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

$$\mathcal{T} := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

## Aufgabe 3

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\vartheta)$$

und der Funktionaldeterminanten

$$\begin{aligned} dV &= r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ \iiint_{\mathcal{K}_R} (x^2 + y^2) \, dV &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( r^2 \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) \right) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( r^2 \sin^2(\vartheta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \right) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2(\vartheta) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \sin^3(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5} R^5 \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \frac{1}{5} R^5 2\pi \, d\vartheta \\ &= \frac{2}{5} \pi R^5 \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \, d\vartheta \\ &= \frac{2}{5} \pi R^5 \cdot \frac{4}{3} \end{aligned}$$

## Aufgabe 4

Wir kippen nicht das Glas sondern definieren, dass die Gravitationskraft nicht mehr in  $-\vec{e}_y$  sondern in  $-\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ -Richtung zeigt. Das heißt, wenn das Glas um  $45^\circ$  gekippt wird, verläuft die Oberfläche des Bieres entlang  $y_B = x + 2$ , da die Oberfläche einer Flüssigkeit in Ruhe stets orthogonal zum Gravitationsvektor ist. Die Verschiebung in  $\vec{e}_y$ -Richtung kommt daher, dass das Glas voll gefüllt ist

und das Bier die Kante des Bierglases berührt und demzufolge durch den Punkt  $(2, 4)$  geht. Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, berechnen wir die Schnittstellen beider Graphen:

$$\begin{aligned}x^2 &= x + 2 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm 1,5 \\ \Rightarrow x_1 &= -1 \\ \Rightarrow x_2 &= 2\end{aligned}$$

Die Menge an "zweidimensionalem Bier" berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}A_B &= \int_{-1}^2 (x + 2) - x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-1}^2 \\ &= 2 \left( -\frac{1}{3}2^2 + \frac{1}{2}2 + 2 \right) - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{5}{6} + 2 = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6}\end{aligned}$$