ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 11

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(i)

$$\vec{x}: \quad [0, 2\pi[\times[0, 3] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 4\cos u \\ v \\ 4\sin u \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\vec{y}: \quad [0, 2\pi[\times[0, 1] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{y}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Wir parametrisieren die Oberfläche:

$$\vec{x}: \quad [0, \pi[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a\sin(u)\cos(v) \\ b\sin(u)\sin(v) \\ c\cos(u) \end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \left|\begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ b\cos u\sin v \\ -c\sin u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -a\sin u\sin v \\ b\sin u\cos v \\ 0\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \left|\begin{pmatrix} bc\sin^2 u\cos v \\ ac\sin^2 u\sin v \\ ab\sin u\cos u\cos^2 v + ab\sin u\cos u\sin^2 v\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \sin(u)\left|\begin{pmatrix} bc\cos v\sin u \\ ac\sin v\sin u \\ ab\cos u\cos^2 v + ab\cos u\sin^2 v\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \sin(u)\left|\begin{pmatrix} bc\cos v\sin u \\ ac\sin v\sin u \\ ab\cos u(\cos^2 v + \sin^2 v)\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \sin(u)\left|\begin{pmatrix} bc\cos v\sin u \\ ac\sin v\sin u \\ ab\cos u\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \sin(u)\sqrt{(bc\cos v\sin u)^2 + (ac\sin v\sin u)^2 + (ab\cos u)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\vec{x}(u,v))\cdot\sin(u)\sqrt{(bc\cos v\sin u)^2 + (ac\sin v\sin u)^2 + (ab\cos u)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(u)\sqrt{\frac{(a\sin(u)\cos(v))^2}{a^4} + \frac{(b\sin(u)\sin(v))^2}{b^4} + \frac{(c\cos(u))^2}{c^4}}$$

$$\cdot\sqrt{(bc\cos v\sin u)^2 + (ac\sin v\sin u)^2 + (ab\cos u)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(u)\cdot\sqrt{\frac{\sin^2(u)\cos^2(v)}{a^2} + \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{b^2} + \frac{\cos^2(u)}{c^2}}$$

$$\cdot\sqrt{(bc\cos v\sin u)^2 + (ac\sin v\sin u)^2 + (ab\cos u)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(u)\cdot\sqrt{\frac{\sin^2(u)\cos^2(v)}{a^2} + \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{b^2} + \frac{\cos^2(u)}{c^2}}$$

$$\cdot\sqrt{a^2b^2c^2\left(\frac{\cos v\sin u}{a}\right)^2 + a^2b^2c^2\left(\frac{\sin v\sin u}{b}\right)^2 + a^2b^2c^2\left(\frac{\cos u}{c}\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} abc\sin u\sqrt{\frac{\sin^2(u)\cos^2(v)}{a^2} + \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{b^2} + \frac{\cos^2(u)}{c^2}}\sqrt{\left(\frac{\cos v\sin u}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin v\sin u}{b}\right)^2 + \left(\frac{\cos u}{c}\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} abc\sin u\cdot\left(\frac{\sin^2(u)\cos^2(v)}{a^2} + \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{b^2} + \frac{\cos^2(u)}{c^2}\right)\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

$$= abc\int_0^{\pi}\sin(u)\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(u)\cos^2(v)}{a^2} + \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{b^2} + \frac{\cos^2(u)}{c^2}\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u$$

Da das Integral von 0 bis 2π sowohl über $\sin^2$ als auch über $\cos^2$ π ergibt, gilt:

$$= \pi \cdot abc \int_0^\pi \sin(u) \left(\frac{\sin^2(u)}{a^2} + \frac{\sin^2(u)}{b^2} + \frac{\cos^2(u)}{c^2} \right) \mathrm{d}u$$
$$= \pi \cdot abc \int_0^\pi \frac{\sin^3(u)}{a^2} + \frac{\sin^3(u)}{b^2} + \frac{\cos^2(u)\sin(u)}{c^2} \mathrm{d}u$$

Es gilt: $\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$ und $\int_0^\pi \cos^2(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

$$= \pi \cdot abc \left(\frac{4}{3a^2} + \frac{4}{3b^2} + \frac{2}{3c^2} \right)$$
$$= \frac{2\pi}{3} abc \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Aufgabe 3

Die Parametrisierung für die Fläche S ist wie folgt:

$$\vec{y}: \quad [0, 2\pi[\times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{y}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

$\mathrm{d}O$ ist somit:

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial v} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} -\sqrt{v}\sin u \\ \sqrt{v}\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cos u \\ \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\sin u \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}\sin^2 u - \frac{1}{2}\cos^2 u \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u) \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{y}(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{v}\sin u \\ -\sqrt{v}\cos u \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v\sin u \cos u - v \sin u \cos u - \frac{1}{2}v^2 \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}v^2 \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{2}v^2 u \Big|_0^{2\pi} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\pi v^2 \,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{\pi}{6}v^3\Big|_0^1 \\
&= -\frac{\pi}{6} \\
&\overset{\text{per Def. immer pos.}}{=} \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Die Winkel der Breiten betragen somit: $\theta_1 = 66.5° = \frac{2\pi \cdot 66.5}{360} = 1.16$ und $\theta_2 = 113.5° = \frac{2\pi \cdot 113.5}{360} = 1.98$

Die Parametrisierung ist also:

$$
\begin{aligned}
\vec{z}:\quad & [1.16, 1.98] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \\
\vec{z}(u,v) &= 6378 \cdot \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{y}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{y}}{\partial v}\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= 6378^2\left|\begin{pmatrix}\cos u\cos v\\ \cos u\sin v\\ -\sin u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sin u\sin v\\ \sin u\cos v\\ 0\end{pmatrix}\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\left|\begin{pmatrix}\sin^2 u\cos v\\ -\sin^2 u\sin v\\ \cos u\sin u\cos^2 v+\sin u\cos u\sin^2 v\end{pmatrix}\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\left(\sin^2 u\cos v\right)^2+\left(\sin^2 u\sin v\right)^2+\left(\cos u\sin u\cos^2 v+\sin u\cos u\sin^2 v\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\cos^2 v+\sin^4 u\sin^2 v+\left(\cos u\sin u\cos^2 v+\sin u\cos u\sin^2 v\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\cos^2 v+\sin^4 u\sin^2 v+(\sin u\cos u)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\cos^2 v+\sin^4 u\sin^2 v+\sin^2 u\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)+\sin^2 u\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^4 u+\sin^2 u\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^2 u\left(\sin^2 u+\cos^2 u\right)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sqrt{\sin^2 u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 6378^2\sin u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Das Integral ist somit:

$$\begin{aligned}
6379^2\cdot\int_0^{2\pi}\int_{1.18}^{1.98}\sin u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= 6379^2\cdot\int_0^{2\pi}-\cos u\big|_{1.18}^{1.98}\,\mathrm{d}v\\
&= 6379^2\,(-\cos 1.98+\cos 1.18)\cdot\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}v\\
&= 6379^2\,(-\cos 1.98+\cos 1.18)\cdot\left(v\big|_0^{2\pi}\right)\\
&= 6379^2\,(-\cos 1.98+\cos 1.18)\,2\pi
\end{aligned}$$