

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 2

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1.

Listing 1: Mathematica Code für die Niveaulinien von h

```
ContourPlot[{x^2/4 + y^2/9 + 4 == 4,  
x^2/4 + y^2/9 + 4 == 5,  
x^2/4 + y^2/9 + 4 == 8},  
{x, -6, 6}, {y, -6, 6},  
ContourStyle -> Black]
```

Eine allgemeine Vorschrift für Niveaulinien zum Wert c ist: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 4 = c$ bzw. nach y umgestellt:

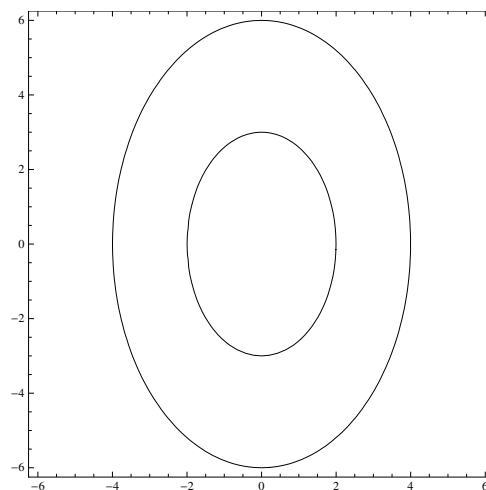
(i)

$$y = \pm 3\sqrt{c - 4 - \frac{x^2}{4}}$$

$$c = 4: y = \pm 3\sqrt{-\frac{x^2}{4}}$$

$$c = 5: y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

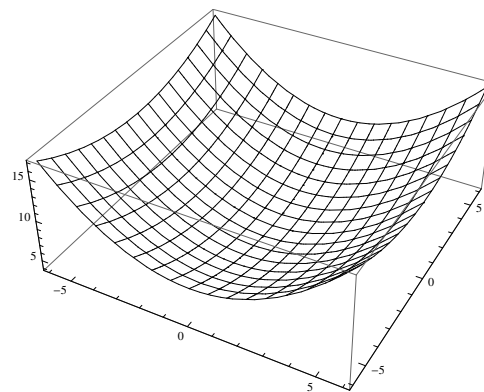
$$c = 8: y = \pm 3\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$$



Listing 2: Mathematica Code für den Graph von h

(ii)

```
Plot3D[{x^2/4 + y^2/9 + 4}, {x, -20, 20},  
{y, -30, 30},  
BoxRatios -> Automatic, PlotStyle -> None]
```



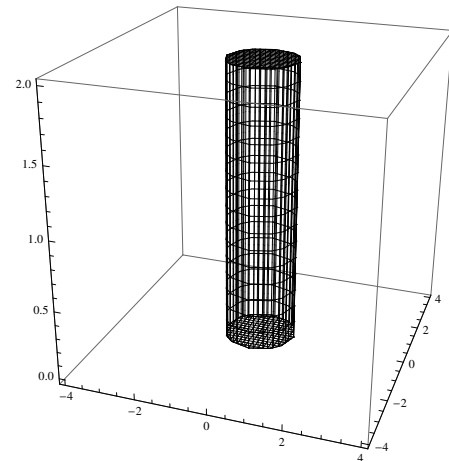
(iii) Da f eine Komposition von stetigen Funktionen ist, sowie das Intervall D kompakt ist, muss f Minima und Maxima in D annehmen. Da die Niveaulinien konzentrische Ellipsen mit Mittelpunkt in $(0,0)$ sind, nimmt die Funktion dort ihr Minimum an und an den Intervallgrenzen ihre Maxima.

Minima: $f(0,0) = 4$

Maxima: $f(-2,0) = 5 = f(2,0)$

Listing 3: Mathematica Code für den Graph von Z

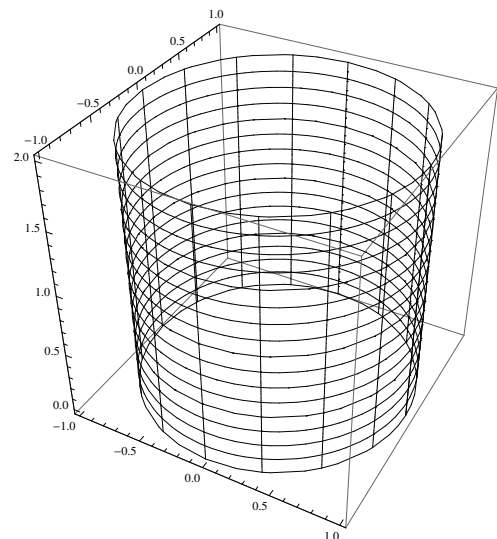
(iv) `RegionPlot3D[x^2 + y^2 <= 1 && z <= 2,
{x, -4, 4}, {y, -4, 4}, {z, 0, 2},
PlotStyle -> None,
BoundaryStyle -> Black]`



Wählt man jedoch $r = 1$ sieht das ganze so aus:

Listing 4: Mathematica Code für den Graph von Z

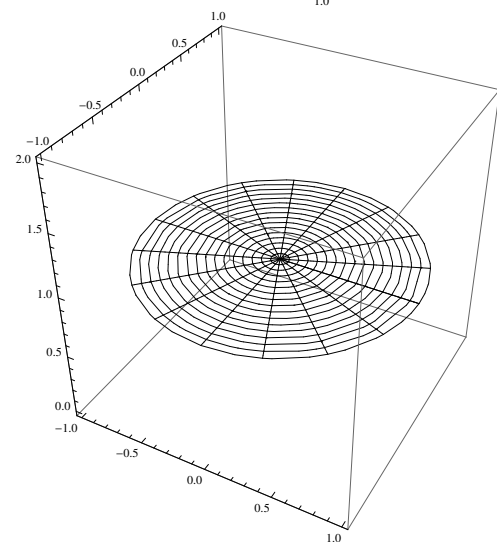
`ParametricPlot3D[{Cos[phi], Sin[phi], z},
{phi, 0, 2 \[Pi]}, {z, 0, 2},
PlotStyle -> None, BoundaryStyle -> Black]`



Wählt man $z = 1$, aber lässt r variabel:

Listing 5: Mathematica Code für den Graph von Z

`ParametricPlot3D[{r*Cos[t], r*Sin[t], 1},
{t, 0, 2 \[Pi]}, {r, 0, 1},
PlotStyle -> None, BoundaryStyle -> Black]`



Aufgabe 2.

f ist an den Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig da, $\frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4}$ eine Komposition stetiger Funktionen ist. Sei die Stetigkeit am Punkt $(x, y) = (0, 0)$ zu überprüfen.

$$\begin{aligned}\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4} - 0 \right| \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4} \right| \\ &\geq \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^4 + y^8}{x^2 + y^4} \right| \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{(x^2 + y^4) y^4}{x^2 + y^4} \right| \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} |y^4| \\ &= 0\end{aligned}$$

Damit ist f auch im Punkt $(0, 0)$ stetig, womit sie stetig auf \mathbb{R}^2 ist.

g ist an den Punkten $(x, y) \neq (0, 1)$ stetig da, $\frac{x^4(y-1)^2 + x^3(y-1)^3}{(x^2 + (y-1)^2)^3}$ eine Komposition stetiger Funktionen ist. Sei die Stetigkeit am Punkt $(x, y) = (0, 1)$ zu überprüfen.

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \left| f\left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right) \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k^4} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \frac{1}{k^3}}{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right)^3} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2}{k^6}}{\frac{8}{k^6}} \right| \\ &= \dots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4} \right| \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Da die beiden benutzten Folgen gegen $(0, 1)$ konvergieren, müsste der Grenzwert für Stetigkeit gegen 0 konvergieren. Damit ist g im Punkt $(0, 1)$ nicht stetig, womit die Funktion stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}$ ist.