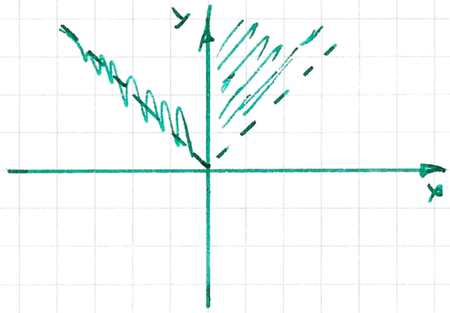
(1.) a)



$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|, x \geq 0\}$

$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|, x \geq 0\}$

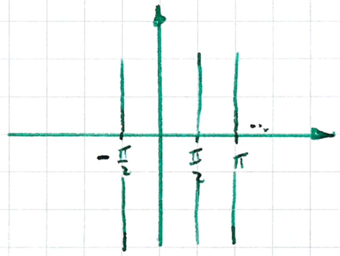
Abgeschlossen? Nein da $\partial A \not\subseteq A$ (Randpunkte gehören nicht zur Menge)

offen? $\partial A \cap A = \emptyset \Rightarrow$ offen

beschränkt? nein

$\Rightarrow$ nicht kompakt (weder Abgeschlossen noch beschränkt)

b)



$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x)\cos(x) = 0\} = A$

$\mathring{A} = \emptyset$

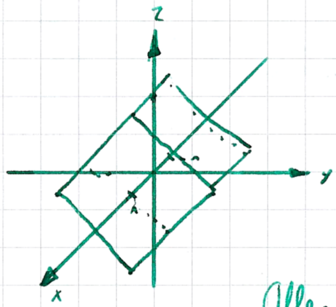
Abgeschlossen? Ja, da $\partial A \subseteq A$

offen? $\partial A \cap A = A \neq \emptyset \Rightarrow$ nicht offen

beschränkt? nein (y-Parameter $\in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ nicht kompakt (da nicht beschränkt)

c)



$\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| = 1, |x| = 1\}$

$\mathring{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| < 1, |x| < 1\}$

Abgeschlossen? Ja da $\partial C \subseteq C$ (RP $\in$ der Menge)

Offen? $\partial C \cap C \neq \emptyset \Rightarrow$ nicht offen

beschränkt? Ja, denn $C \subseteq K_4(\vec{0})$

$A - C$?

② (i)

Wenn A offen ist, gilt: $\partial A \cap A = \emptyset$

Da $\partial A = \partial A^c$, muss gelten:

$\partial A \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow \partial A \subseteq A^c \Rightarrow$ abgeschlossen

Wenn A abgeschlossen ist, gilt: $\partial A \subseteq A$

da $\partial A = \partial A^c$, muss gelten:

$\partial A^c \cap A^c = \emptyset \Rightarrow$ offen

Die Aussage ist also wahr.

(ii)

Falls $K_i := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1 + \frac{1}{i}\}$

ist K_i abgeschlossen

aber die Vereinigung nicht.

③ (i)

a_{k1}: $\lim_{k\to\infty} \frac{\arctan(k^2) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{k}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{1+k^4} \cdot 2k}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} -\frac{2k^3}{1+k^4} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\frac{2}{k}}{\frac{1}{k^4}+1} = 0$

a_{k2}: $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^3} = 0$

b_{k1}: $\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) =$

b_{k2}: $\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{t} + 1 = 1$

ii) ?