

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 4

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

(a) Wir haben dann eine Scheibe. Ich bin aber gerade zu faul eine zu malen...

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(c) Die Ableitungsmatrix $\vec{f}'(r, \varphi)$ ist demnach:

$$\vec{f}'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Für die Determinante gilt deshalb:

$$\begin{aligned}\det(\vec{f}'(r, \varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) \\ &= r (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= r\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Die Komposition $g \circ g$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des \mathbb{R}^3 verlangt, die Funktionswerte von g jedoch nur aus \mathbb{R} sind.

Die Komposition $g \circ \vec{f}$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von f als auch der Urbildraum von g Elemente des \mathbb{R}^3 sind.

Die Komposition $\vec{f} \circ g$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von g als auch der Urbildraum von f Elemente des \mathbb{R} sind.

Die Komposition $\vec{f} \circ \vec{f}$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des \mathbb{R} verlangt, die Funktionswerte von \vec{f} jedoch aus \mathbb{R}^3 sind.

(b)

$$\begin{aligned}\vec{f}'(t) &= \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ g'\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= (e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{f} \circ g)' &= (\vec{f}' \circ g) \cdot g' \\
&= \vec{f}'(xe^{y-z}) \cdot (e^{y-z} \quad xe^{y-z} \quad -xe^{y-z}) \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (e^{y-z} \quad xe^{y-z} \quad -xe^{y-z}) \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}+(y-z)} & xe^{xe^{y-z}+(y-z)} & -xe^{xe^{y-z}+(y-z)} \\ e^{y-z} & xe^{y-z} & -xe^{y-z} \\ 2e^{y-z} & 2xe^{y-z} & -2xe^{y-z} \end{pmatrix} \\
(g \circ \vec{f})' &= (g' \circ \vec{f}) \cdot \vec{f}' \\
&= g' \left(\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= (e^{-t} \quad e^t e^{-t} \quad -e^t e^{-t}) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= (e^{-t} \quad 1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 1 + 1 - 2 \\
&= 0 \\
g(\vec{f}(t))' &= 0
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(g(t))' &= f(xe^{y-z})' \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}} \\ xe^{y-z} \\ 2xe^{y-z} \end{pmatrix}' \\
&= \begin{pmatrix} e^{y-z} \cdot e^{xe^{y-z}} & xe^{y-z} \cdot e^{xe^{y-z}} & -xe^{y-z} \cdot e^{xe^{y-z}} \\ e^{y-z} & xe^{y-z} & -xe^{y-z} \\ 2e^{y-z} & 2xe^{y-z} & -2xe^{y-z} \end{pmatrix} \\
g(f(t))' &= g \left(\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \right)' \\
&= (e^t e^{-t})' \\
&= (e^0)' \\
&= 1' \\
&= 0
\end{aligned}$$

Somit kommt bei jeweils beiden Lösungswegen das gleiche Ergebnis heraus.

Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}
 e'(x, y) &= (2xy, x^2) \\
 f'(x, y) &= (e^x y^2, 2e^x y) \\
 \nabla(e \cdot f)(1, 1) &= f(1, 1) \cdot \nabla e(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot e(1, 1) \\
 &= e \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix} \cdot 1 \\
 &= \begin{pmatrix} 2e \\ 1e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3e \\ 3e \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \vec{g} \times \vec{h} &= \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -x^2 \sin x \\ y \sin x \\ x^3 y^2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -x^2 \sin x \\ y \sin x \\ x^3 y^2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} -2x \sin x - x^2 \cos x & 0 \\ y \cos x & \sin x \\ 3x^2 y^2 & x^3 2y \end{pmatrix} \\
 (\vec{g} \times \vec{h})'(0, 1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} xyz \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(x)z \\ y^3 \end{pmatrix} \\
 &= xyz^2 \sin(x) + y^6 \\
 (\vec{u} \cdot \vec{v})' &= (xyz^2 \sin(x) + y^6)' \\
 &= (yz^2 \sin(x) + xyz^2 \cos(x) \quad xz^2 \sin(x) + 6y^5 \quad 2xyz \sin(x)) \\
 (\vec{u} \cdot \vec{v})'(2\pi, 2\pi, 2\pi) &= (16\pi^4 \quad 192\pi^5 \quad 0)
 \end{aligned}$$