ii) Richtungsableitung

$f: \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ G offen

$\vec{v}$ ist Einheitsvektor $(|\vec{v}|=1)$

$$\frac{df}{d\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \underbrace{\langle \nabla f(\vec{x}), \vec{v} \rangle}_{\text{Skalarprodukt}}$$

Sie gibt an, wie stark der Anstieg ist.

iii)
$$|\vec{v}_1| = \left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right| = 1$$

$$\frac{df}{d\vec{v}_1}(1,1) = \langle \nabla f(1,1), \vec{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 2$$

$$|\vec{v}_2| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right| = 1$$

$$\frac{df}{d\vec{v}_2}(1,1) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$g = \{ 1$

1 ü Benutzen

$a,b>0: \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Tut 4 - Ableitungsregeln

Wdh.

- partiell diff'bar?

wenn $\frac{df}{dx_j} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots x_j + t, \dots x_n) - f(x,y)}{t}$ existiert

- diff'bar, wenn $\lim_{\Delta\vec{x} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - f(x_0) - f'(\vec{x}_0) \cdot \Delta\vec{x}}{|\Delta\vec{x}|} = 0$ $\quad \Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix}\frac{df}{dx_1}\\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n}\end{pmatrix}$$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ← Voraussetzung f. Gradient
u. f diff'bar

Wie berechnet man $(f \cdot g)', (f \circ g)', (f \times g)'$?

1. Möglichkeit - Rechenregeln

Skalarprodukt: $\frac{d(\vec{f} \cdot \vec{g})}{dx_j} = \frac{d\vec{f}}{dx_j} \cdot \vec{g} + \frac{d\vec{g}}{dx_j} \cdot \vec{f}$ Vorauss.: $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

Kreuzprodukt: $\frac{d(\vec{f} \times \vec{g})}{dx_j} = \frac{d\vec{f}}{dx_j} \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{d\vec{g}}{dx_j}$ Vs: $\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$

Kettenregel: $(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \vec{g}'(\vec{x})$ wichtige Vorauss.: für Verkettung:

Bildraum von $g(x)$ muss dem Urbildraum von $f(\vec{x})$ entsprechen

Vorgehensweise beim Kreuz- oder Skalarprodukt

1. alle part. Abl. $\left(\frac{df}{dx_j}, \frac{dg}{dx_j}\right)$ berechnen
2. Punkt einsetzen (z.B (0,0))

$$\frac{df}{dx_j} \cdot g(0,0) = \frac{d\vec{f}}{dx_j}(0,0) \cdot \vec{g}(0,0) + \frac{d\vec{g}}{dx_j}(0,0) \cdot f(0,0)$$

3. Ausrechnen für alle x_j

2. Möglichkeit (meist einfacher)

1.) $\vec{f} \cdot \vec{g}$, $\vec{f} \circ \vec{g}$, $\vec{f} \times \vec{g}$ (explizit) berechnen!
2.) Ableiten (Funktionalmatrix)
3.) Punkt einsetzen

2. Aufgabe

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z + x^2 \\ -2xy^2 \\ y^2 + z^2 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 - t^4 \end{pmatrix}$$

VS für Komp. erfüllt, da Bildraum $(g(t))$ = Urbildraum $(\vec{f})$

a) ges.: $f'(\vec{x})$, $g'(t)$, $(f \circ g)'(t)$ mit Kettenregel

$\Rightarrow$

$$f'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 1 \\ -2y^2 & -4xy & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix} \qquad g'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -4t^3 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 2y^2 & -4xy & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1-t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -4t^3 \end{pmatrix}}$$

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$= f'(t, t^2, 1-t^4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -4t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 1 \\ -2t^4 & -4t^3 & 0 \\ 0 & 2t^2 & 2(1-t^4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -4t^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t - 4t^3 \\ -2t^4 - 8t^4 \\ 4t^3 - 8t^3(1-t^4) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2t - 4t^3 \\ -10t^4 \\ -4t^3 + 8t^7 \end{pmatrix}}}$$

2. Möglichkeit b)

$(\vec{f}\circ\vec{g})'(t)$ explizit berechnen

1. $(\vec{f}\circ\vec{g})(t) = \vec{f}(\vec{g}(t)) = \vec{f}(t, t^2, 1-t^4) = \begin{pmatrix} t^2+(1-t^4) \\ -2t t^4 \\ t^4+(1-t^4)^2 \end{pmatrix}$

2. $(f\circ g)'(t) = \begin{pmatrix} -4t^3+2t \\ -10t^4 \\ -4t^3+8t^7 \end{pmatrix}$

Rechenregeln für gradient

1.) $\operatorname{grad}(fg) = g(\vec{x})\cdot \operatorname{grad} f(\vec{x}) + \operatorname{grad} g(\vec{x})\cdot f(\vec{x})$

VS: Fkt. diff'bar und reellwertig

2.) $\operatorname{grad}(f\circ g) = f'(g(\vec{x}))\cdot \operatorname{grad} g(\vec{x})$ $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f, g diff'bar

3. Aufgabe

a) zu zeigen, $\operatorname{grad} f^k(\vec{x}) = k\cdot f^{k-1}(\vec{x})\cdot \operatorname{grad}(f)$ $k\in\mathbb{N}_{\setminus\{0\}}$

Sei $g(n) = n^k$, dann ist z.B. $n = f(\vec{x})$ somit ist $g(n) = g(f(\vec{x})) = f^k(\vec{x}) = g\circ f(\vec{x})$

mit Kettenregel:

$$\operatorname{grad}(f^k(\vec{x})) = \operatorname{grad}((g\circ f)(\vec{x})) = g'(f(\vec{x}))\cdot \operatorname{grad}(f(\vec{x})) = k\cdot f^{k-1}\cdot \operatorname{grad}(f(\vec{x})) \quad \Box$$

NR: $g'(n) = k\cdot n^{k-1}$

b) z.Z. Quotientenregel: $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\cdot\operatorname{grad}(f) - f\cdot\operatorname{grad}(g)}{g^2}$ $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\setminus\{0\}}$

$\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g} = f\cdot h\circ g$

mit: $h(t) = \frac{1}{t}$ h ist diff'bar für $\mathbb{R}_{\setminus\{0\}}$

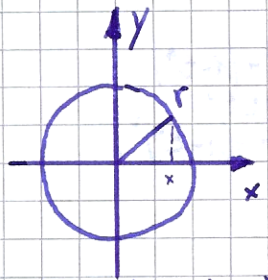
gilt: $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \operatorname{grad}(f\cdot(h\circ g)) \underset{\text{Produktregel}}{=} \operatorname{grad}(f)\cdot(h\circ g) + \operatorname{grad}(h\circ g)\cdot f$

$$= \operatorname{grad}(f)\cdot\frac{1}{g} + f\cdot[h'(g(x))\cdot \operatorname{grad} g(x)]$$

$$= \operatorname{grad} f\cdot\frac{1}{g(x)} + f\cdot\left(-\frac{1}{g^2(x)}\cdot \operatorname{grad}(g(x))\right) = \frac{\operatorname{grad} f\, g(x) - f \operatorname{grad}(g(x))}{g^2(x)}$$

Koordinatensysteme

Bsp.: Wir wollen die Koordinaten eines Kreises beschreiben.



in kartesischen Koordinaten

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix} \quad x \in [-r, r]$

schlecht, da Pkt nicht eindeutig zuzuordnen ist

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad x \in [-r, r]$ $\uparrow$ Polarkoordinaten: einfach u. eindeutig

Umrechnung:

$x = \rho \cos\varphi \qquad \rho \in \mathbb{R}^+$
$y = \rho \sin\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$

$\rho = x^2 + y^2 \; ; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho}$

Zylinderkoordinaten

(x, y) wie in Polarkoordinaten

$x = \rho \cos\varphi$
$y = \rho \sin\varphi$
$z = Z \mathrel{\hat{=}}$ Höhe

Bilder von

$\vec{f}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \rho \in \mathbb{R}^+$

Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ)

$x = r \cos\vartheta \cdot \cos\varphi$
$y = r \cos\vartheta \cdot \sin\varphi$
$z = r \cdot \sin\vartheta$

$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\hat{=}$ Winkel zw. x-y-Ebene und r-Verbindung
$\varphi \in [0, 2\pi]$

1. Aufgabe

$$\vec{f}(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$$

a) Zeichnen des Bildes von $\vec{f}$ $R = const.$ $R > 0$ da Funktion nur von ϑ, φ abhängig

für $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ bekomme ich Sphäre

für $\vartheta = const.$ $\varphi \in \mathbb{R}$ Kreisring

für $\varphi = const$ $\vartheta \in \mathbb{R}$ Kreisring