Analysis 2 - Hausaufgabe 10

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 2

$$\mathcal{T} := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y ?? \text{ TODO } \right\}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{K}_R} \left(x^2+y^2\right) dx\, dy\, dz &= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} \left(r^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)\right) dr\, d\varphi\, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} \left(r^2\sin^2(\vartheta)\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)\right) dr\, d\varphi\, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} r^2\sin^2(\vartheta) dr\, d\varphi\, d\varphi \\
&= \int\limits_0^{\pi} \sin^2(\vartheta) \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} r^2 dr\, d\varphi\, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^{\pi} \sin^2(\vartheta) \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3}R^3 d\varphi\, d\vartheta \\
&= \int\limits_0^{\pi} \sin^2(\vartheta)\frac{1}{3}R^3 2\pi\, d\vartheta \\
&= \frac{2}{3}\pi R^3 \int\limits_0^{\pi} \sin^2(\vartheta)\, d\vartheta \\
&= \frac{2}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir kippen nicht das Glas sondern definieren, das die Gravitationskraft nicht mehr in $-\vec{e}_y$ sondern in $-\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$-Richtung zeigt. Das heißt, wenn das Glas um $45 Grad$ gekippt wird, verläuft die Oberfläche des Bieres entlang $y_B = x + 2$, da die Oberfläche einer Flüssigkeit in Ruhe stets orthogonal zum

Gravitationsvektor ist. Die Verschiebung in $\vec{e}_y$-Richtung kommt daher, dass das Glas voll gefüllt ist und das Bier die Kante des Bierglases berührt und demzufolge durch den Punkt $(2,4)$ geht. Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, berechnen wir die Schnittstellen beider Graphen:

$$\begin{aligned}
&x^2 = x + 2 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm 1{,}5 \\
&\Rightarrow x_1 = -1 \\
&\Rightarrow x_2 = 2
\end{aligned}$$

Die Menge an "zweidimensionalem Bier" berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
A_B &= \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2 dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \,|_{-1}^{2} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}2^2 + \frac{1}{2}2 + 2\right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \\
&= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{5}{6} + 2 = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6}
\end{aligned}$$