TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 10.12.-14.12.12

7. Übung Analysis II für Ingenieure

(Differentialoperatoren)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Es sei $H \subseteq \mathbb{R}^4$ eine offene Menge, $y : H \to \mathbb{R}$ und

$$y(\vec{x}) = \sin(x_1)x_2^2 + \cos(x_3x_4) + \sin(x_4)x_3^2.$$

Berechnen Sie grad y, div grad y und Δy. Was stellen Sie bei der Berechnung fest?

2. Aufgabe

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\vec{v}, \vec{w} : G \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen. Welche der Ausdrücke

rot div $(\vec{w} - u\vec{v})$, div $(u\vec{w} \times \vec{v})$, grad Δu, grad $(\vec{v} \cdot \vec{w} - |\vec{v}|)$, grad $(\vec{v} \times \vec{w})$,

sind erklärt ? Berechnen Sie diese für

$$u(x,y,z) = xyz, \qquad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ x-z \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 + 6xz \\ -6xy \\ 3x^2 - 3z^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Potential u besitzt und geben Sie eins an.

4. Aufgabe

Beweisen Sie die folgenden Gleichungen aus der Vorlesung:

a) rot grad $f = \vec{0}$ für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

b) div rot $\vec{v} = 0$ für jedes zweimal stetig partiell differenzierbare Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ x^2 + yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie f in allgemeiner Form an, sodass $\vec{v}$ ein Potential u besitzt.

b) Berechnen Sie das zugehörige Potential u in allgemeiner Form.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $\vec{v}, \vec{w} : G \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\text{div } (\vec{v} \times \vec{w}) = (\text{rot } \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{w}$$

gilt.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = e^{xy}, \quad g(x, y, z) = x + y^2 + z^3$$

sowie das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) div rot $\vec{v}$, rot grad f,

b) div grad f, Δf,

c) grad(fg), div $(f\vec{v})$, rot$(f\vec{v})$.

Gesamtpunktzahl: 20