

## ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 4

Tom Nick 342225  
Tom Lehmann 340621  
Maximilian Bachl 341455

### Aufgabe 1

(a) Da  $s = \frac{g}{2}t^2$ , gilt:

$$g = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 44,5\text{m}}{(3,0\text{s})^2} \approx 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(b) Da wir den Fehlerschranksatz anwenden sollen, benötigen wir zunächst die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) &= \frac{2}{t^2} \\ \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) &= \frac{-4s}{t^3}\end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir  $M_1$  sowie  $M_2$ :

$$\begin{aligned}M_1 &= \sup_{\substack{s \in [s_0 - \Delta s, s_0 + \Delta s] \\ t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]}} \left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \right| \\ &= \sup_{\substack{s \in [44,4\text{m}; 44,6\text{m}] \\ t \in [2,9\text{s}; 3,1\text{s}]}} \left| \frac{2}{t^2} \right| \\ &= \frac{2}{2,9^2} = 0,238 \\ M_2 &= \sup_{\substack{s \in [s_0 - \Delta s, s_0 + \Delta s] \\ t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]}} \left| \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \right| \\ &= \sup_{\substack{s \in [44,4\text{m}; 44,6\text{m}] \\ t \in [2,9\text{s}; 3,1\text{s}]}} \left| \frac{4s}{t^3} \right| \\ &= \frac{-4 \cdot 44,6}{2,9^3} = 7,315\end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}|\Delta g| &= |\Delta g(s_0 + \Delta s, t_0 + \Delta t) - g(s_0, t_0)| \\ &\leq M_1 |\Delta s| + M_2 |\Delta t| \\ &\leq 0,238 \cdot 0,1 + 7,315 \cdot 0,1 = 0,755\end{aligned}$$

Für die Gravitationskonstante  $g$  gilt also:

$$\begin{aligned}(9,8 - 0,755) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\leq g \leq (9,8 + 0,755) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ 9,045 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\leq g \leq 10,555 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Der näherungsweise Wert beträgt von  $e^{0.1} \cos(0.2)$  beträgt 1.083141 (wir gehen von rad für den Winkel aus).

Wir definieren die Funktion  $f(x, \psi) = e^x \cos(\psi)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x, \psi) &= (e^x \cos(\psi) \quad -e^x \sin(\psi)) \\ f''(x, \psi) &= \begin{pmatrix} e^x \cos(\psi) & -e^x \sin(\psi) \\ -e^x \sin(\psi) & -e^x \cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wählen für das Taylorpolynom 2. Ordnung den Entwicklungspunkt  $\vec{0}$ .

$$\begin{aligned} T_{\vec{0}}(\vec{x}) &= 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - \psi^2) \end{aligned}$$

Somit ist  $T_{\vec{0}}(0.1, 0.2) = 1 + 0.1 + \frac{1}{2}(0.1^2 - 0.2^2) = 1.085$ .

## Aufgabe 3

- (i)  $f$  ist eine zweimal partiell differenzierbar Funktion, da  $f$  eine Komposition aus zweimal partiell differenzierbaren Funktionen ist. Somit können wir, falls vorhanden, Extrema von  $f$  finden. Jedes Extrema hat als notwendige Bedingung:  $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 3y \\ x^3 - 3x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(3x^2 - 3) \\ x^3 - 3x - 2y \end{pmatrix}$$

Nullstellen finden! Für  $y(3x^2 - 3) = 0$  gibt es 3 Lösungen:

1. offensichtlich bei  $y = 0$
2. und 3.  $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Für  $x^3 - 3x - 2y = 0$  kann man keine direkten Nullstellen bestimmen. Man kann nun in einer Matrix die möglichen Nullstellen von  $\nabla f$  darstellen:

$y = 0$	$x^3 - 3x - 2y = 0$
$x = 1$	$(0, 0)$
$x = -1$	$(1, -1)$
	$(-1, 1)$

Also sind die kritischen Punkte bei  $(0, 0), (1, -1), (-1, 1)$ . Gesucht sind nun globale/lokale Extrama:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 - 3 \\ 3x^2 - 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $(0, 0)$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -9 \Rightarrow \text{indefinit, Sattelpunkt}$$

- $(1, -1)$

$$H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -12 \Rightarrow \text{indefinit, Sattelpunkt}$$

- $(-1, 1)$

$$H_f(-1, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -12 \Rightarrow \text{indefinit, Sattelpunkt}$$