

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 3

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

1 Aufgabe

- (i) f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar und somit dort auch partiell differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt $\vec{x}_0 = (0,0)$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 \cdot 0^2 + 0^8}{t^2 + 0^4} - 0}{t} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0+t^8}{t^4} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^3 = 0\end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass f auch im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist.

g ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar und somit dort auch partiell differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt $\vec{x}_0 = (0,1)$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(0+t,1) - g(0,1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^4 \cdot 0^2 + t^3 \cdot 0^3}{(t^2 + 0^2)^3} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(0,1+t) - g(0,1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{(0^2 + t^2)^3} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{t} = -\infty\end{aligned}$$

Da die Grenzwerte und damit auch $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)$ nicht existieren, ist g nicht partiell differenzierbar und damit auch nicht total differenzierbar.

- (ii) Da f überall auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Komposition differenzierbarer Funktionen ist, ist sie dort auch differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt $(0,0)$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}
 \text{Rest} &= f(x, y) - f(0, 0) - f'(0, 0) \Delta \vec{x} \\
 &= \frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4} - 0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4} - 0 - (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4}
 \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen:

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \left| \frac{\frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \right| = 0$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{\frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \right| \\
 &= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{\frac{x^2 y^2 + y^8}{x^2 + y^4}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\
 &= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^2 + y^8}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\
 &\leq \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^2 + y^8}{y^4 \sqrt{y^2}} \right| \\
 &= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y^2 + y^8}{y^5} \right| \\
 &= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y + y^7}{y^4} \right| \text{ mit } (y^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^4 \geq 2y^2 - 1 \\
 &\leq \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^2 y + y^7}{2y^2 - 1} \right| \\
 &= \frac{0}{-1} = 0
 \end{aligned}$$

Da g – wie in der Analysis-Aufgabe der letzten Woche bewiesen – nicht stetig ist, kann es auch nicht differenzierbar sein.

2 Aufgabe

Wir benötigen zunächst die partiellen Ableitungen an der Stelle $(0,0)$.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^4(t) \cdot 0}{t^2+0} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^4(t) \cdot 0}{t^2+0} - 0}{t} = 0$$

Da h überall auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Komposition differenzierbarer Funktionen ist, ist sie dort auch differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt $(0,0)$ zu zeigen. TODO: partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} \text{Rest} &= h(x,y) - h(0,0) - h'(0,0)\Delta\vec{x} \\ &= \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2} - 0 - \left(\frac{\partial h}{\partial x}(0,0), \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2} - 0 - (0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen:

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|} \right| = 0$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}} \right| \\
&= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{x^4 y^4}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{(xy)^4}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| \frac{(2xy)^4}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&= \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \left| (2xy)^{\frac{5}{2}} \right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Somit ist h total differenzierbar.

$$\begin{aligned}
&h'(x, y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \\
(x, y) &\mapsto \left(\frac{4 \cos(x) \sin^3(x) \sin^4(y)(x^2+y^2) - \sin^4(x) \sin^4(y) 2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{4 \cos(y) \sin^3(y) \sin^4(x)(x^2+y^2) - \sin^4(x) \sin^4(y) 2y}{(x^2+y^2)^2} \right)
\end{aligned}$$

Der Gradient am gegebenen Punkt ist gleichbedeutend mit der Richtung des steilsten Anstiegs dort. $\nabla h(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{4\pi}{\pi^4} \\ \frac{4\pi}{\pi^4} \end{pmatrix}$ BITTE NACHRECHNEN

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(P) &= \text{grad}_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} h \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4 \cos(\frac{\pi}{2}) \sin^3(\frac{\pi}{2}) \sin^4(\frac{\pi}{2}) \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^2 - \sin^4(\frac{\pi}{2}) \sin^4(\frac{\pi}{2}) 2 \frac{\pi}{2}}{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^2} \\ \frac{4 \cos(\frac{\pi}{2}) \sin^3(\frac{\pi}{2}) \sin^4(\frac{\pi}{2}) \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^2 - \sin^4(\frac{\pi}{2}) \sin^4(\frac{\pi}{2}) 2 \frac{\pi}{2}}{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi^3} \\ \frac{4}{\pi^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4v_1}{\pi^3} + \frac{4v_2}{\pi^3}
\end{aligned}$$

Da wir einen Vektor finden sollen, für den die Richtungsableitung der Funktion h im Punkt P den Wert 0 annimmt, muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4v_1}{\pi^3} + \frac{4v_2}{\pi^3} \\ &= v_1 + v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist also ein Vektor, bei dem die Richtungsableitung im Punkt P den Wert 0 annimmt.

3 Aufgabe

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{\partial h_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y, z) = 2x - yz & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y, z) = -xz & \frac{\partial h_2}{\partial z}(x, y, z) = -xy \\ \frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y, z) = yze^{xyz} & \frac{\partial h_3}{\partial y}(x, y, z) = xze^{xyz} & \frac{\partial h_3}{\partial z}(x, y, z) = xye^{xyz} \end{array}$$

Die partiellen Ableitungen existieren und sind alle stetig, da $y \in]0, \infty[$ und der Nenner bei den "h₁-Ableitungen" somit stets größer null ist. Alle anderen partiellen Ableitungen sind Kompositionen stetiger Funktionen und deshalb auch stetig. h ist somit differentierbar. Die Ableitungsmatrix ist:

$$h' = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \\ 2x - yz & -xz & -xy \\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \end{pmatrix}$$