**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WS 2011/12
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: W. Böse · G. Penn-Karras · R. Schneider
Assistenten: H. Barbas · S. Schwinger Stand: 7. Februar 2012
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=5293

# Lösungsskizzen zur 12. Übung Analysis II für Ingenieure

(Koordinatentransformation, Skalare Oberflächenintegrale)

---

## Hausaufgaben

### 1. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem derart, daß die Kreisfläche der Halbkugeloberfläche in der $xy$-Ebene liegt und die Punkte der Menge nichtnegative $z$-Komponenten haben. Nun gehen wir auf Kugelkoordinaten über. Die Halbkugel ist dann

$$D = \{(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, R], \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}.$$

Da das Volumenelement $d\vec{x} = r^2 \sin\theta d(r, \phi, \theta)$ lautet, ergibt sich das Volumen zu

$$\begin{aligned}
\iiint_D \mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Wegen $(x, y, z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$ ist weiter

$$\begin{aligned}
\iiint_D x\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cos\phi \sin^2\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \Big(\int_0^{2\pi} \cos\phi \mathrm{d}\phi\Big) \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \sin^2\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_D y\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^3 \sin\phi \sin^2\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \Big(\int_0^{2\pi} \sin\phi \mathrm{d}\phi\Big)\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^3 \sin^2\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^3 \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2}\int_0^R r^3 \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi R^4}{2}\int_0^{\pi/2} \sin\theta(\cos\theta \mathrm{d}\theta) \\
&= \frac{\pi R^4}{4} \sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi R^4}{4}.
\end{aligned}$$

Im gewählten Koordinatensystem liegt der Schwerpunkt somit bei $(0, 0, \frac{3}{8}R)^\top$.

(ii) Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem derart, daß die Kreisfläche der Kegeloberfläche parallel zur $xy$-Ebene liegt und die Kegelspitze mit dem Ursprung zusammenfällt und die Punkte der Menge nichtnegative $z$-Komponenten haben. Nun gehen wir auf Zylinderkoordinaten über. Der Kegel ist dann

$$D = \{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, zR/h], \phi \in [0, 2\pi), \in [0, h]\}.$$

Da das Volumenelement $d\vec{x} = r\mathrm{d}(r, \phi, z)$ lautet, ergibt sich das Volumen zu

$$\begin{aligned}
\iiint_D \mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{zR/h} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi\int_0^h\int_0^{zR/h} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^2\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi h R^2}{3}.
\end{aligned}$$

Wegen $(x, y, z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$ ist weiter

$$\begin{aligned}\iiint_D x\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{zR/h} r^2\cos\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\ &= \Big(\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi\Big)\int_0^h\int_0^{zR/h} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_D y\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{zR/h} r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\ &= \Big(\int_0^{2\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi\Big)\int_0^h\int_0^{zR/h} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= 0,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\iiint_D z\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{zR/h} zr\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\ &= 2\pi\int_0^h\int_0^{zR/h} zr\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi R^2h^2}{4}.\end{aligned}$$

Im gewählten Koordinatensystem liegt der Schwerpunkt somit bei $(0, 0, \frac{3}{4}h)^\top$.

## 2. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Die Halbsphäre kann mittels

$$[0, 2\pi) \times [0, \pi/2] \ni (\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden. Man erhält

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-r\sin\phi\sin\theta\\ r\cos\phi\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}r\cos\phi\cos\theta\\ r\sin\phi\cos\theta\\ -r\sin\theta\end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix}-r^2\cos\phi\sin^2\theta\\ -r^2\sin\phi\sin^2\theta\\ -r^2\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}\right| \\
&= r^2\big(\sin^4\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta\big)^{1/2} \\
&= r^2|\sin\theta|
\end{aligned}
$$

Dies führt auf das Integral

$$
\iint_O (x^2+y^2)\mathrm{d}O = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2\sin^2\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi)(r^2|\sin\theta|)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 2\pi r^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta.
$$

Mit partieller Integration $\int\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{3}(\cos\theta\sin^2\theta+2\cos\theta)$ ergibt sich

$$
\iint_O (x^2+y^2)\mathrm{d}O = \frac{4\pi r^4}{3}.
$$

(ii) Das Ellipsoid kann mittels

$$
[0,2\pi)\times[0,\pi)\ni(\phi,\theta)\mapsto\begin{pmatrix}a\cos\phi\sin\theta\\ b\sin\phi\sin\theta\\ c\cos\theta\end{pmatrix}
$$

parametrisiert werden. Man erhält

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-a\sin\phi\sin\theta\\ b\cos\phi\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\cos\phi\cos\theta\\ b\sin\phi\cos\theta\\ -c\sin\theta\end{pmatrix}\right| \\
&= abc\left|\begin{pmatrix}a^{-1}\cos\phi\sin^2\theta\\ b^{-1}\sin\phi\sin^2\theta\\ c^{-1}\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}\right| \\
&= abc|\sin\theta|\left|\begin{pmatrix}a^{-1}\cos\phi\sin\theta\\ b^{-1}\sin\phi\sin\theta\\ c^{-1}\cos\theta\end{pmatrix}\right| \\
&= abc|\sin\theta|\Big(\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Dies führt auf das Integral

$$
\begin{aligned}
\iint_O \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\Big)^{1/2}\times \\
&\qquad \times abc|\sin\theta|\Big(\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\Big)^{1/2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\Big)\mathrm{d}\phi\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi abc\int_0^{\pi}\Big(\frac{\sin^2\theta}{2a^2}+\frac{\sin^2\theta}{2b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\Big)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi abc\int_0^{\pi}\Big(\frac{\sin^3\theta}{2a^2}+\frac{\sin^3\theta}{2b^2}+\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{c^2}\Big)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi abc\Big(-\frac{2\cos\theta}{2\cdot 3a^2}\Big|_0^{\pi}-\frac{2\cos\theta}{2\cdot 3b^2}\Big|_0^{\pi}-\frac{\cos^3\theta}{3c^2}\Big|_0^{\pi}\Big) \\
&= \frac{4\pi}{3}abc\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Big)
\end{aligned}
$$

## 3. Aufgabe (8 Punkte)

(i) Die entstehende Rotationsfläche läßt sich durch

$$[0,R]\times[0,2\pi)\ni(r,\phi)\mapsto\vec{x}(r,\phi)=\begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ g(r)\end{pmatrix}$$

parametrisieren. Es folgt das Oberflächenelement $\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}\right| = \left|\begin{pmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi \\ g'(r)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-rg'(r)\cos\phi \\ -rg'(r)\sin\phi \\ r\sin^2\phi+r\cos^2\phi\end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2[g'(r)]^2+r^2} = r\sqrt{1+[g'(r)]^2}$.
Integration liefert

$$|F| = \iint_F \mathrm{d}O = \int_0^R\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+[g'(r)]^2}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R r\sqrt{1+[g'(r)]^2}\mathrm{d}r.$$

(ii) Wir führen ein kartesisches Koordinatensystem derart ein, daß der Punkt $\vec{x}_0$ in der $xy$-Ebene liegt und der Zylindermantel parallel zur $z$-Achse verläuft. Der Betrag der Gravitationskraft zwischen Mantelflächenpunkt $\vec{x}$ und $\vec{x}_0$ ist

$$F(\vec{x}) = \frac{\rho}{|\,\vec{x}-\vec{x}_0\,|^2} = \frac{\rho}{z^2+(d/2)^2}.$$

Der Fußpunkt von $\vec{x}$ auf der $xy$-Ebene, $\vec{x}$ selber und $\vec{x}_0$ spannen ein rechtwinkliges Dreieck auf. Das Verhältnis von dessen Hypothenuse und dessen Seite der Länge $z$ entspricht gerade dem Verhältnis der Kraft $F$ und seiner Axialkomponente $F_a$. Demnach ist $F_a(\vec{x}) = \frac{zF(\vec{x})}{\sqrt{z^2+(d/2)^2}}$.

Wir parametrisieren den Zylindermantel

$$\{\vec{x} = (x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{d}{2}\cos\phi, y = \frac{d}{2}\sin\phi, \phi \in [0,2\pi), 0 \leq z \leq h\}$$

und erhalten für $\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial z} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}\right| = (d/2)|(\cos\phi, \sin\phi, 0)^\top| = d/2$:

$$\begin{aligned}
\iint_M F_a \mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{z\rho}{(z^2+(d/2)^2)^{3/2}}\frac{d}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= d\pi\rho\int_0^h \frac{z}{(z^2+(d/2)^2)^{3/2}}\mathrm{d}z \\
&= -\frac{d\pi\rho}{(z^2+(d/2)^2)^{1/2}}\Big|_0^h \\
&= 2\pi\rho - \frac{d\pi\rho}{\sqrt{h^2+d^2/4}}.
\end{aligned}$$