

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 11

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

(i)

$$\vec{x}: [0, 2\pi[\times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 4 \cos u \\ v \\ 4 \sin u \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\vec{y}: [0, 2\pi[\times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{y}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v} \cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ v \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Wir parametrisieren die Oberfläche:

$$\vec{x}: [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a \sin(u) \cos(v) \\ b \cos(u) \sin(v) \\ c \sin(u) \end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv &= \left| \begin{pmatrix} a \cos u \cos v \\ -b \sin u \sin v \\ c \cos v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin u \sin v \\ b \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right| du dv \\ &= \left| \begin{pmatrix} -bc \cos u \cos^2 v \\ -ac \sin u \sin v \cos v \\ ab \cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v \end{pmatrix} \right| du dv \\ &= \sqrt{(-bc \cos u \cos^2 v)^2 + (-ac \sin u \sin v \cos v)^2 + (ab \cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v)^2} du dv \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vec{x}(u,v)) \cdot \sqrt{(-bc \cos u \cos^2 v)^2 + (-ac \sin u \sin v \cos v)^2 + (ab \cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v)^2} du dv \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(a \sin(u) \cos(v))^2}{a^4} + \frac{(b \cos(u) \sin(v))^2}{b^4} + \frac{(c \sin(u))^2}{c^4}} \\
&\cdot \sqrt{(-bc \cos u \cos^2 v)^2 + (-ac \sin u \sin v \cos v)^2 + (ab \cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v)^2} du dv \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\sin^2(u) \cos^2(v)}{a^2} + \frac{\cos^2(u) \sin^2(v)}{b^2} + \frac{\sin^2(u)}{c^2}} \\
&\cdot \sqrt{(-bc \cos u \cos^2 v)^2 + (-ac \sin u \sin v \cos v)^2 + (ab \cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v)^2} du dv \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Das kann doch nicht deren Ernst sein. – Max

Aufgabe 3

Die Parametrisierung für die Fläche S ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{y} &: [0, 2\pi[\times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
\vec{y}(u, v) &= \begin{pmatrix} \sqrt{v} \cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dO ist somit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{y}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial v} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{v} \sin u \\ \sqrt{v} \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cos u \\ \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \sin u \\ 1 \end{pmatrix} du dv \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{v} \cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ -\frac{1}{2} \sin^2 u - \frac{1}{2} \cos^2 u \end{pmatrix} du dv \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{v} \cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ -\frac{1}{2} (\sin^2 u + \cos^2 u) \end{pmatrix} du dv \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{v} \cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} du dv
\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{y}(u, v)) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v} \cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} du dv &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{v} \sin u \\ -\sqrt{v} \cos u \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v} \cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} du dv \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v \sin u \cos u - v \sin u \cos u - \frac{1}{2} v^2 \right) du dv \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} v^2 du dv \\
 &= \int_0^1 -\frac{1}{2} v^2 u \Big|_0^{2\pi} dv \\
 &= \int_0^1 -\pi v^2 dv \\
 &= -\frac{\pi}{3} v^3 \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4