

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 12

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

1. Aufgabe

- (a) Ein Vollzylinder mit der Höhe 3 und dem Radius 2.

Listing 1: Mathematica Code für die Menge Z

```
RegionPlot3D[x^2 + y^2 <= 4, {x, -2, 2},  
              {y, -2, 2}, {z, 0, 3},  
AxesLabel -> {x, y, z}]
```

Ein Vollkegel mit der Höhe 1.

Listing 2: Mathematica Code für die Menge K

```
RegionPlot3D[  
  RegionPlot3D[  
    Sqrt[x^2 + y^2] <= 8 - 2 z, {x, -2, 2},  
    {y, -2, 2}, {z, 3, 4},  
    AxesLabel -> {x, y, z}]
```

- (b) Wir benutzen die Zylinderkoordinaten, Funktionaldeterminante ist $r \, dr \, d\varphi \, dz$

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\} = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, 3] \right\}$$

Da Z ein kompakter Bereich ist kann der Satz von Gauß angewendet werden:

$$\operatorname{div} \vec{w}(x, y, z) = yz + x^2 + xy$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\delta Z} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint_Z \operatorname{div} \vec{w} r dr d\varphi dz \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (rz \sin \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi r \sin \varphi) r dr d\varphi dz \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{3} r^3 z \sin \varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos \varphi \sin \varphi \right|_0^2 d\varphi dz \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} z \sin \varphi + 4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi dz \\
&= \int_0^3 \left. -\frac{8}{3} z \cos \varphi + 2\varphi + \sin(2\varphi) - 2 \cos^2 \varphi \right|_0^{2\pi} dz \\
&= \int_0^3 -\frac{8}{3} z + 4\pi - 2 + \frac{8}{3} z + 2 dz \\
&= \int_0^3 4\pi dz \\
&= 12\pi
\end{aligned}$$

Wir benutzen die Zylinderkoordinaten, Funktionaldeterminante ist $r dr d\varphi dz$

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 8 - 2z, z \in [3, 4]\} = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \leq r \leq 8 - 2z, z \in [3, 4], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

Da K ein kompakter Bereich ist kann der Satz von Gauß angewendet werden:

$$\operatorname{div} \vec{w}(x, y, z) = yz + x^2 + xy$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\delta K} \vec{w} \cdot d\vec{O} &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{w} \, r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_3^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{8-2z} (rz \sin \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi \, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_3^4 \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{3} r^3 z \sin \varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} r^4 \cos \varphi \sin \varphi \right|_0^{8-2z} d\varphi \, dz \\
&= \int_3^4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (8-2z)^3 z \sin \varphi + \frac{1}{4} (8-2z)^4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} (8-2z)^4 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, dz \\
&= \int_3^4 \left. -\frac{4}{3} (8-2z)^3 z \cos \varphi + (8-2z)^4 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) - (8-2z)^4 \cos^2 \varphi \right|_0^{2\pi} dz \\
&= \int_3^4 4\pi (z-4)^4 \, dz \\
&= \left. \frac{4}{5} \pi (z-4)^5 \right|_3^4 \\
&= \frac{4}{5} \pi
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
M &= Z \cap K = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 3 \end{pmatrix} \mid r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \\
\delta M &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \\ 3 \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi] \right\}
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Stokes gilt:

WIE HAST DU DAS MIT UMLAUFRICHTUNG HERAUSGEFUNDEN? UND WARUM BRAUCHST DU KEINE FUNKTIONALDETERMINANTE? – MAX

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 6 \cos \varphi \\ 4 \cos \varphi \sin \varphi - 6 \sin \varphi \\ 8 \cos \varphi \sin \varphi - 6 \cos \varphi \end{pmatrix} \\
\iint_M \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int_{\delta M} \vec{v} \cdot \vec{ds} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6 \cos \varphi \\ 4 \cos \varphi \sin \varphi - 6 \sin \varphi \\ 8 \cos \varphi \sin \varphi - 6 \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -12 \sin \varphi \cos \varphi + 8 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 12 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -24 \sin \varphi \cos \varphi + 8 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d)

$$\operatorname{rot} \vec{w}(x, y, z) = (xz - 0) e_x + (xy - yz) e_y + (2xy - xz) e_z = \begin{pmatrix} xz \\ xy - yz \\ 2xy - xz \end{pmatrix}$$

(e) Es gilt:

$$U = Z \cup K \Rightarrow \delta U = (\delta Z \cap M) \cup (\delta K \cap M)$$

Somit lässt sich das Integral berechnen mit:

$$\begin{aligned} \iint_{\delta U} \vec{v} \cdot \vec{dO} &= \iint_{\delta Z} \vec{v} \cdot \vec{dO} - \iint_M \vec{v} \cdot \vec{dO} + \iint_{\delta K} \vec{v} \cdot \vec{dO} - \iint_M \vec{v} \cdot \vec{dO} \\ &= \iint_{\delta Z} \vec{v} \cdot \vec{dO} + \iint_{\delta K} \vec{v} \cdot \vec{dO} - 2 \iint_M \vec{v} \cdot \vec{dO} \end{aligned}$$

Das letzter Integral wurde schon berechnet und beträgt 0, die beiden anderen werden mithilfe des Satz von Gauß berechnet.

$$\operatorname{div} \vec{v} = z + x - z + -x = 0$$

Da die Divergenz 0 beträgt, kann jedes Integral nur 0 ergeben. Somit gilt:

$$\iint_{\delta U} \vec{v} \cdot \vec{dO} = 0$$

2. Aufgabe

WAS IST MIT DER FUNKTIONALDETERMINANTE PASSIERT? – MAX

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - 4, z \leq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r^2 - 4 \end{pmatrix} \mid r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = (0 - 1)e_x + (0 - 1)e_y + (0 - 1)e_z = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{dO} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2 \cos \varphi \\ -2r^2 \sin \varphi \\ r \end{pmatrix} dr d\varphi$$

$$\begin{aligned}
\iint_K \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{dO} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2 \cos \varphi \\ -2r^2 \sin \varphi \\ r \end{pmatrix} dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^2 \cos \varphi + 2r^2 \sin \varphi - r dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left. \frac{2}{3} r^3 \cos \varphi + \frac{2}{3} r^3 \sin \varphi - \frac{1}{2} r^2 \right|_0^2 d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \cos \varphi + \frac{16}{3} \sin \varphi - 2 d\varphi \\
&= \left. \frac{16}{3} \sin \varphi - \frac{16}{3} \cos \varphi - 2\varphi \right|_0^{2\pi} = -\frac{16}{3} - 4\pi + \frac{16}{3} \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

$$\delta K = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\delta K} \vec{v} \cdot \vec{ds} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2(\cos \varphi + \sin \varphi) \\ 2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -4 \cos \varphi \sin \varphi - 4 \sin^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -4 \sin^2 \varphi d\varphi \\
&= \sin(2\varphi) - 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Da linke Seite gleich rechte Seite, gilt hier der Satz von Stokes.