Analysis 2 - Hausaufgabe 3

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

1 Aufgabe

(i) f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar und somit dort auch partiell differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt $\vec{x}_0 = (0,0)$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 0^2 + 0^8}{t^2+0^4} - 0}{t} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0+t^8}{t^4} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} t^3 = 0\end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass f auch im Punkt (0,0) partiell differenzierbar ist.

g ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar und somit dort auch partiell differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt $\vec{x}_0 = (0,1)$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(0+t,1) - g(0,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4 0^2 + t^3 0^3}{(t^2+0^2)^3} - 1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(0,1+t) - g(0,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0}{(0^2+t^2)^3} - 1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-1}{t} = -\infty\end{aligned}$$

Da die Grenzwerte und damit auch $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)$ nicht existieren, ist g nicht partiell differenzierbar und damit auch nicht total differenzierbar.

(ii) Da f überall auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Komposition differenzierbarer Funktionen ist, ist sie dort auch differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt (0,0) zu zeigen.

$$\begin{aligned}
Rest &= f(x,y) - f(0,0) - f'(0,0)\Delta\vec{x} \\
&= \frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4} - 0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4} - 0 - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4}
\end{aligned}$$

Es ist zu zeigen:

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \left| \frac{\frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4}}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|} \right| = 0$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{\frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4}}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{\frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y^2+y^8}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&\leq \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y^2+y^8}{y^4\sqrt{y^2}} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y^2+y^8}{y^5} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y+y^7}{y^4} \right| \text{ mit } (y^2-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^4 \geq 2y^2 - 1 \\
&\leq \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y+y^7}{2y^2-1} \right| \\
&= \frac{0}{-1} = 0
\end{aligned}$$

Da g – wie in der Analysis-Aufgabe der letzten Woche bewiesen – nicht stetig ist, kann es auch nicht differenzierbar sein.

2 Aufgabe

Wir benötigen zunächst die partiellen Ableitungen an der Stelle $(0,0)$.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin^4(t)\cdot 0}{t^2+0} - 0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin^4(t)\cdot 0}{t^2+0} - 0}{t} = 0$$

Ausserdem dem partiellen Ableitungen an den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{4\cos(x)\sin^3(x)\sin^4(y)(x^2+y^2) - \sin^4(x)\sin^4(y)2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{4\cos(y)\sin^3(y)\sin^4(x)(x^2+y^2) - \sin^4(x)\sin^4(y)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Da h überall auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Komposition differenzierbarer Funktionen ist, ist sie dort auch differenzierbar. Bleibt dies noch für den Punkt (0,0) zu zeigen.

$$\begin{aligned}\text{Rest} &= h(x,y) - h(0,0) - h'(0,0)\Delta\vec{x} \\ &= \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2} - 0 - \left(\frac{\partial h}{\partial x}(0,0), \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2} - 0 - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Es ist zu zeigen:

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|} \right| = 0$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{\frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^4y^4}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{(xy)^4}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{(2xy)^4}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&= \lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \left| (2xy)^{\frac{5}{2}} \right| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit ist h total differenzierbar.

$$
h'(x,y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},
$$

$$
(x,y) \mapsto \left(\frac{4\cos(x)\sin^3(x)\sin^4(y)(x^2+y^2) - \sin^4(x)\sin^4(y)2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{4\cos(y)\sin^3(y)\sin^4(x)(x^2+y^2) - \sin^4(x)\sin^4(y)2y}{(x^2+y^2)^2} \right)
$$

Der Gradient am gegebenen Punkt ist gleichbedeutend mit der Richtung des steilsten Anstiegs dort. $\nabla h(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{4\pi}{\pi^4} \\ \frac{4\pi}{\pi^4} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(P) &= \operatorname{grad}_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} h \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4\cos(\frac{\pi}{2})\sin^3(\frac{\pi}{2})\sin^4(\frac{\pi}{2})\left((\frac{\pi}{2})^2+(\frac{\pi}{2})^2\right)^2 - \sin^4(\frac{\pi}{2})\sin^4(\frac{\pi}{2})2\frac{\pi}{2}}{\left((\frac{\pi}{2})^2+(\frac{\pi}{2})^2\right)^2} \\ \frac{4\cos(\frac{\pi}{2})\sin^3(\frac{\pi}{2})\sin^4(\frac{\pi}{2})\left((\frac{\pi}{2})^2+(\frac{\pi}{2})^2\right)^2 - \sin^4(\frac{\pi}{2})\sin^4(\frac{\pi}{2})2\frac{\pi}{2}}{\left((\frac{\pi}{2})^2+(\frac{\pi}{2})^2\right)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi^3} \\ \frac{4}{\pi^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4v_1}{\pi^3} + \frac{4v_2}{\pi^3}
\end{aligned}
$$

Da wir einen Vektor finden sollen, für den die Richtungsableitung der Funktion h im Punkt P den Wert 0 annnimmt, muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4v_1}{\pi^3} + \frac{4v_2}{\pi^3} \\ &= v_1 + v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist also ein Vektor, bei dem die Richtungsableitung im Punkt P den Wert 0 annimmt.

3 Aufgabe

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} && \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} && \frac{\partial h_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \\ &\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x - yz && \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y,z) = -xz && \frac{\partial h_2}{\partial z}(x,y,z) = -xy \\ &\frac{\partial h_3}{\partial x}(x,y,z) = yze^{xyz} && \frac{\partial h_3}{\partial y}(x,y,z) = xze^{xyz} && \frac{\partial h_3}{\partial z}(x,y,z) = xye^{xyz} \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen existieren und sind alle stetig, da $y \in\ ]0,\infty[$ und der Nenner bei den "h_1-Ableitungen" somit stets größer null ist. h ist somit differentierbar. Die Ableitungsmatrix ist:

$$h' = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \\ 2x - yz & -xz & -xy \\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \end{pmatrix}$$