

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 12

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

1. Aufgabe

- Es gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für alle k ab einem gewissen k_0 .

Außerdem gilt trivialerweise $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Leftrightarrow |a_k| \leq q^k < 1$.

Weil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert und o.B.d.A. $q^k < \frac{1}{k^2}$ ab einem gewissen k_1 folgt, dass auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

•

$$\sqrt[k]{|k^n x^k|} \leq \sqrt{|x|} = \sqrt[k]{|k^n|} x \leq \sqrt{|x|}$$

Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k^n} = 1$, wobei sich die Folge von oben der Null nähert. Da aber $|x| < 1$ ist diese Gleichung erfüllt. Die $\sqrt{|x|}$ steht hier für das q aus dem vorherigen Beweis. Wir nehmen die Wurzel, da nur so die obige Formel gilt und $\sqrt{|x|}$ noch immer kleiner als 1 ist.

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe also. Wenn $|x| > 0$ ist das Wurzelkriterium nicht mehr erfüllt und der Grenzwert der Folge bleibt größer als 1.

Aufgabe 2

- a) Ist nicht konvergent, da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist und auch nicht absolut konvergent, da die notwendige Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ nicht erfüllt ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2n+7}{70n+8} = \pm \frac{2}{7}$$

- b) Ist konvergent, da das Quotientenkriterium erfüllt ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1000^n + 1000}{(n+1) \cdot n!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1000^n + 1000}{(n+1)1000^n} \right| = 0 < 1$$

Da offensichtlich gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1000^n}{n!} \right|$ ist die Reihe auch absolut konvergent.

- c) Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} = 0$ ist die Reihe konvergent, da weiterhin gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^5}{2^n + 3^n} \right|$ ist die Reihe absolut konvergent.

- d) Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n + (-1)^n} = 0$ gilt nach dem Leibnizkriterium, dass die Reihe konvergent ist. Offensichtlich ist die Reihe auch absolut konvergent.

- e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n}{5^{n+2}}}{\frac{4^{n-1}}{5^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n}{25 \cdot 5^n}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{4^n}{5 \cdot 5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{25 \cdot 5^n} \cdot \frac{5 \cdot 5^n}{1 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{1} = \frac{4}{5}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{6n+6}}{n^{2n+2}}}{\frac{2^{6n}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^6 2^{6n}}{n^2 n^{2n}}}{\frac{2^{6n}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^6}{n^2} = 0$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent und somit konvergiert die Reihe auch absolut.

Aufgabe 3

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$