Analysis 2 - Hausaufgabe 10

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 xye^{xy^2} dxdy &= \int_1^2 \int_0^1 xye^{xy^2} dydx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 e^{xy^2}\Big|_0^1 dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (e^x - 1)dx \\ &= \frac{1}{2}(e^x - x)|_1^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 2 - (e-1)) = \frac{1}{2}(e^2 - e - 1)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^1 \int_0^y (x+1)z^x dzdydx &= \int_1^2 \int_0^1 z^{x+1}\Big|_0^y dydx \\ &= \int_1^2 \int_0^1 y^{x+1} dydx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x+2} y^{x+2}\Big|_0^1 dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx \\ &= \log(x+2)|_1^2 = \log(4) - \log(3) = \log\left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+y} (xy^3) dxdy &= \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2y^3)\Big|_{\sqrt{y}}^{1+y} dy \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{2}(y^5 + y^4 + y^3))dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^5 + y^4 + y^3 dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{4}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{37}{120}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\mathcal{T} := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le (1-y-x) \right\}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y-x} 1 \, dzdydx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} z \Big|_0^{1-y-x} dydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y \, dydx = \int_0^1 y - yx - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 (1-x) - (1-x)x - \frac{1}{2}(1-x)^2 \, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\
z &= r\cos(\vartheta)
\end{aligned}$$

und der Funktionaldeterminanten

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{K}_R} \left(x^2+y^2\right) dV &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)\right) r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r^2\sin^2(\vartheta)\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)\right) r^2\sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2\sin^2(\vartheta) r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \sin^3(\vartheta) dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5}R^5 d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \frac{1}{5}R^5 2\pi \, d\vartheta \\
&= \frac{2}{5}\pi R^5 \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \, d\vartheta \\
&= \frac{2}{5}\pi R^5 \cdot \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir kippen nicht das Glas sondern definieren, das die Gravitationskraft nicht mehr in $-\vec{e}_y$ sondern in $-\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$-Richtung zeigt. Das heißt, wenn das Glas um $45°$ gekippt wird, verläuft die Oberfläche des Bieres entlang $y_B = x + 2$, da die Oberfläche einer Flüssigkeit in Ruhe stets orthogonal zum Gravitationsvektor ist. Die Verschiebung in $\vec{e}_y$-Richtung kommt daher, dass das Glas voll gefüllt ist und das Bier die Kante des Bierglases berührt und demzufolge durch den Punkt $(2, 4)$ geht. Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, berechnen wir die Schnittstellen beider Graphen:

$$
\begin{aligned}
&x^2 = x + 2 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm 1{,}5 \\
&\Rightarrow x_1 = -1 \\
&\Rightarrow x_2 = 2
\end{aligned}
$$

Die Menge an "zweidimensionalem Bier" berechnet sich nun wie folgt:

$$
\begin{aligned}
A_B &= \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2 dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \,|_{-1}^{2} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}2^2 + \frac{1}{2}2 + 2\right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \\
&= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{5}{6} + 2 = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6}
\end{aligned}
$$