Analysis 2 - Hausaufgabe 3

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(a) Wir haben dann eine Scheibe. Ich bin aber gerade zu faul eine zu malen...

(b)

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(c) Die Ableitungsmatrix $\vec{f}'(r,\varphi)$ ist demnach:

$$\vec{f}'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Für die Determinante gilt deshalb:

$$\begin{aligned} \det(\vec{f}'(r,\varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) \\ &= r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) \\ &= r \end{aligned}$$

(d)

$$\vec{f}'(\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi)$$

Aufgabe 2

(a) Die Komposition $g \circ g$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des $\mathbb{R}^3$ verlangt, die Funktionswerte von g jedoch nur aus $\mathbb{R}$ sind.
Die Komposition $g \circ \vec{f}$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von f als auch der Urbildraum von g Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
Die Komposition $\vec{f} \circ g$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von g als auch der Urbildraum von f Elemente des $\mathbb{R}$ sind.
Die Komposition $\vec{f} \circ \vec{f}$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des $\mathbb{R}$ verlangt, die Funktionswerte von $\vec{f}$ jedoch aus $\mathbb{R}^3$ sind.

(b)

$$\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g'(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \left(e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z}\right)$$

$$\begin{aligned}
(\vec{f} \circ g)' &= (\vec{f}' \circ g) \cdot g \\
&= \vec{f}'(xe^{y-z}) \cdot \left(e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z}\right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z}\right) \ \lightning \text{ da diese Multiplikation gar nicht möglich ist}
\end{aligned}$$

Hätte man das mit dem Widerspruch auch früher rausfinden können? **–** Max

$$\begin{aligned}
(g \circ \vec{f})' &= (g' \circ \vec{f}) \cdot \vec{f}' \\
&= g'(\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} e^2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \left(e^{-t}, e^t e^{-n}, -e^t e^{-n}\right) \cdot \begin{pmatrix} e^2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \left(e^{-t}, e^{t-n}, -e^{t-n}\right) \cdot \begin{pmatrix} e^2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t} + e^{t-n} - 2e^{t-n} \\
&= e^{-2t} - e^{t-n} \\
g(\vec{f}(t))' &= e^{-2t} - e^{t-n}
\end{aligned}$$

(c)

Aufgabe 3