Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss

WiSe 2012/13
`http://www.isis.tu-berlin.de`
Stand: 24. Oktober 2012
Abgabe: 05.11.-09.11.2012

2. Übung Analysis II für Ingenieure

(Funktionen, Stetigkeit)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Während Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ üblicherweise durch ihren Graphen modelliert werden, werden für vektorwertige Funktionen bzw. Funktionen mit mehreren Variablen andere Darstellungsweisen verwendet. Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2, \qquad \vec{g} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ (r, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f zu den Werten 0, -1, 1, -2, 2 und geben Sie eine Vorschrift für beliebige Niveaulinien zum Funktionswert $c \in \mathbb{R}$ an.

(ii) Skizzieren Sie den Graphen von f. Welches Problem entsteht beim Versuch den Graphen von g zu zeichnen?

(iii) Finden Sie mit Hilfe der ersten beiden Aufgabenteile diejenigen Punkte aus $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, in denen f sein Maximum bzw. sein Minimum annimmt. Begründen Sie zunächst, warum Minimum und Maximum angenommen werden.

(iv) Skizzieren Sie das Bild von g. Welches Bild ergibt sich, wenn stattdessen $r = 1$ fest gewählt wird und somit nur $\tilde{g} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \phi \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$ betrachtet wird?

2. Aufgabe
Es seien die Funktionen f und g durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2} & , \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & , \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

definiert. Untersuchen Sie, in welchen Punkten f und g stetig sind.
Hinweis: Die Abschätzung $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ist hier hilfreich.

3. Aufgabe
Vorgegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{y^2}{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

(i) Zeigen Sie, dass f entlang jeder Geraden $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, $x \to 0$ einen Grenzwert besitzt. Ist dies auch für $x = 0$, $y \to 0$ noch richtig?

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nicht existiert. Geben Sie einen, in den Nullpunkt mündenden Weg an, so dass f entlang dieses Weges keinen oder einen von 1 verschiedenen Grenzwert besitzt. Fertigen Sie eine Skizze dieses Weges an. Welche Aussage lässt sich nun über die Stetigkeit von f treffen?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (12 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 4,$$

$$\vec{Z} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3, (r, \phi, z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie die Niveaulinien von h zu den Werten 4, 5, 8 und geben sie eine allgemeine Vorschrift für die Niveaulinien zum Wert c an, welche geometrische Struktur haben diese zu den verschiedenen Werten c?

(ii) Skizzieren Sie den Graphen von h.

(iii) Nimmt h ihr Minimum bzw. Maximum auf $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ an. Wenn ja, geben Sie die zugehörigen Punkte an und begründen Sie ihre Wahl anhand der Skizzen aus (i) und/oder (ii).

(iv) Skizzieren Sie das Bild von $\vec{Z}$. Welches Bild ergibt sich, wenn stattdessen $r = 1$ fest gewählt wird? Welches Bild ergibt sich für festes $z = 1$ (und variables r)?

2. Aufgabe (8 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4(y-1)^2+x^3(y-1)^3}{(x^2+(y-1)^2)^3} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 1), \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 1). \end{cases}$$

In welchen Punkten sind f und g stetig?

Gesamtpunktzahl: 20