Analysis 2 - Hausaufgabe 11

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned} \vec{x}: \quad & [0, 2\pi[\times [0, 3] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{x}(u, v) = & \begin{pmatrix} 4\cos u \\ v \\ 4\sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \vec{y}: \quad & [0, 2\pi[\times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{y}(u, v) = & \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir parametrisieren die Oberfläche:

$$\begin{aligned} \vec{x}: \quad & [0, 2\pi[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{x}(u, v) = & \begin{pmatrix} a\sin(u)\cos(v) \\ b\cos(u)\sin(v) \\ c\sin(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$d\vec{O}$ ist somit:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right) du dv &= \begin{pmatrix} a\cos u \cos v \\ -b\sin u \sin v \\ c\cos v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin u \sin v \\ b\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} du dv \\ &= \begin{pmatrix} -bc\cos u \cos^2 v \\ -ac\sin u \sin v \cos v \\ ab\cos^2 u \cos^2 v - ab\sin^2 u \sin^2 v \end{pmatrix} du dv \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{x}(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} -bc\cos u \cos^2 v \\ -ac \sin u \sin v \cos v \\ ab\cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -ac \sin u \sin v \cos v \\ bc \cos u \cos^2 v \\ \left(ab\cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v\right)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -bc\cos u \cos^2 v \\ -ac \sin u \sin v \cos v \\ ab\cos^2 u \cos^2 v - ab \sin^2 u \sin^2 v \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

TODO: ausmultiplizieren und integrieren. kb das inner bahn ohne wolfram zu machen. Der Fehler war das ihr ein skalares Oberflächenintegral berechnet habt (mit Betrag) hier aber ein Flussintegral berechnet werden soll/ wird. - Tom

Das kann doch nicht deren Ernst sein. – Max

Isses auch nicht. – Tom

Aufgabe 3

Die Parametrisierung für die Fläche S ist wie folgt:

$$\vec{y}: \quad [0, 2\pi[\times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{y}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v} \sin u \\ v \end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{v}\sin u \\ \sqrt{v}\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \cos u \\ \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \sin u \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}\sin^2 u - \frac{1}{2}\cos^2 u \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u) \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{y}(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{v}\sin u \\ -\sqrt{v}\cos u \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v\sin u\cos u - v\sin u\cos u - \frac{1}{2}v^2 \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}v^2 \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{2}v^2 u \,\Big|_0^{2\pi} \,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 -\pi v^2 \,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{\pi}{3}v^3\Big|_0^1 \\
&= -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4