ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 11

Tom Nick   342225
Tom Lehmann   340621
Maximilian Bachl 341455

WARUM IGNORIERST DU MEINE GEOMETRY EINSTELLUNGEN, LaTeX?

Aufgabe 1

(i)

$$\vec{x} : \ [0, 2\pi[\times [0,3] \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 4\cos u \\ v \\ 4\sin u \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\vec{y} : \ [0, 2\pi[\times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{y}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Wir parametrisieren die Oberfläche:

$$\vec{x} : \ [0, 2\pi[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a\sin(u)\cos(v) \\ b\cos(u)\sin(v) \\ c\sin(u) \end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left| \begin{pmatrix} a\cos u \cos v \\ -b\sin u \sin v \\ c\cos v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin u \sin v \\ b\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -bc\cos u \cos^2 v \\ -ac\sin u \sin v \cos v \\ ab\cos^2 u \cos^2 v - ab\sin^2 u \sin^2 v \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \sqrt{(-bc\cos u \cos^2 v)^2 + (-ac\sin u \sin v \cos v)^2 + (ab\cos^2 u \cos^2 v - ab\sin^2 u \sin^2 v)^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vec{x}(u,v)) \cdot \sqrt{\left(-bc\cos u \cos^2 v\right)^2 + \left(-ac\sin u \sin v \cos v\right)^2 + \left(ab\cos^2 u \cos^2 v - ab\sin^2 u \sin^2 v\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(a\sin(u)\cos(v))^2}{a^4} + \frac{(b\cos(u)\sin(v))^2}{b^4} + \frac{(c\sin(u))^2}{c^4}}$$

$$\cdot \sqrt{\left(-bc\cos u \cos^2 v\right)^2 + \left(-ac\sin u \sin v \cos v\right)^2 + \left(ab\cos^2 u \cos^2 v - ab\sin^2 u \sin^2 v\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\sin^2(u)\cos(v)^2}{a^2} + \frac{\cos^2(u)\sin^2(v)}{b^2} + \frac{\sin^2(u)}{c^2}}$$

$$\cdot \sqrt{\left(-bc\cos u \cos^2 v\right)^2 + \left(-ac\sin u \sin v \cos v\right)^2 + \left(ab\cos^2 u \cos^2 v - ab\sin^2 u \sin^2 v\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \dots$$

Das kann doch nicht deren Ernst sein. – Max

Aufgabe 3

Die Parametrisierung für die Fläche S ist wie folgt:

$$\vec{y}: \quad [0, 2\pi[\times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{y}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} -\sqrt{v}\sin u \\ \sqrt{v}\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cos u \\ \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\sin u \\ 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}\sin^2 u - \frac{1}{2}\cos^2 u \end{pmatrix}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u) \end{pmatrix}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{y}(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{v}\sin u \\ -\sqrt{v}\cos u \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v\sin u\cos u - v\sin u\cos u - \frac{1}{2}v^2 \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}v^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{2}v^2 u \Big|_0^{2\pi} \mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 -\pi v^2 \, \mathrm{d}v$$

$$= -\frac{\pi}{6}v^3 \Big|_0^1$$

$$= -\frac{\pi}{6}$$

$$\overset{\text{per Def. immer pos.}}{=} \frac{\pi}{6}$$

Aufgabe 4

Die Winkel der Breiten betragen somit: $\theta_1 = 66.5° = \frac{2\pi \cdot 66.5}{360} = 1.16$ und $\theta_2 = 113.5° = \frac{2\pi \cdot 113.5}{360} = 1.98$

Die Parametrisierung ist also:

$$\vec{z}: \ [1.16, 1.98] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{z}(u,v) = 6378 \cdot \begin{pmatrix} \sin u\cos v \\ \sin u\sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

dO ist somit:

$$\left| \frac{\partial \vec{y}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left| \begin{pmatrix} \cos u\cos v \\ -\cos u\sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin u\sin v \\ \sin u\cos v \\ \sin u \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$