**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 21.01.13.-25.01.13

# 11. Übung Analysis II für Ingenieure

(Skalare Oberflächenintegrale, Flussintegrale)

---

## Tutoriumsvorschläge

# 1. Aufgabe

Parametrisieren und skizzieren Sie die folgenden Flächen. Zeichnen Sie dabei auch die Richtung des vektoriellen Oberflächenelementes mit ein:

a) Den Rand der Menge

$$M = \{(x, y, z)^T | R \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R\}$$

mit $R > 0$.

b) Die Oberfläche des Körpers der entsteht, wenn die Kurve $z = 1 - x$ mit $0 \leq x \leq 1$ um die z-Achse rotiert wird.

# 2. Aufgabe

Parametrisieren Sie den Rand des Kreiszylinders

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 9, -2 \leq x \leq 4\}$$

und berechnen Sie die skalaren Oberflächenintegrale

$$\iint_{\partial B} 1 \mathrm{d}O \text{ und } \iint_{\partial B} x(y^2 + z^2) \mathrm{d}O.$$

## 3. Aufgabe

Berechnen Sie das Flussintegral

$$\iint_S \vec{v} \; \cdot d\vec{O}$$

des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+z^4 \\ 1+z^4 \\ 1+x^2y^2 \end{pmatrix}$ durch die Fläche $S$, welche durch

$$\vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{4} \cdot u \cdot v \end{pmatrix} \text{ mit } \mid u \mid \leq 1, \mid v \mid \leq 1$$

gegeben ist.

## 4. Aufgabe

Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des Kegels aus Aufgabe 1 (b).

## Hausaufgaben

### 1. Aufgabe (4 Punkte)

Parametrisieren Sie die folgenden Flächen:

(i) Die Menge $F = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 16,\ 0 \le y \le 3\}$,

(ii) die Menge $S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1\}$.

### 2. Aufgabe (6 Punkte)

Berechnen Sie das Oberflächenintegral der skalaren Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f : (x,y,z) \mapsto \Big(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\Big)^{1/2}, \quad a,b,c > 0,$$

über der Oberfläche $O \subset \mathbb{R}^3$ mit $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

### 3. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie das Flussintegral

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O}$$

des Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $S$ aus Aufgabe 1 (ii).

### 4. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Tropengebietes der Erde, d.h. das Gebiet zwischen 23,5° nördlicher Breite und 23,5° südlicher Breite. Die Erde darf dabei als Kugel mit einem Radius von 6378 km angesehen werden.
*Hinweis:* Beachten Sie, dass der Höhenwinkel in Kugelkoordinaten stets vom Nordpol, Breitenkreise jedoch vom Äquator aus gemessen werden!

Gesamtpunktzahl: 20