Analysis 2 - Hausaufgabe 3

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(a) Wir haben dann eine Scheibe. Ich bin aber gerade zu faul eine zu malen...

(b)

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(c) Die Ableitungsmatrix $\vec{f}'(r,\varphi)$ ist demnach:

$$\vec{f}'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Für die Determinante gilt deshalb:

$$\begin{aligned} \det(\vec{f}'(r,\varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) \\ &= r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) \\ &= r \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Die Komposition $g \circ g$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des $\mathbb{R}^3$ verlangt, die Funktionswerte von g jedoch nur aus $\mathbb{R}$ sind.
Die Komposition $g \circ \vec{f}$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von f als auch der Urbildraum von g Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
Die Komposition $\vec{f} \circ g$ ist erklärt, da sowohl die Funktionswerte von g als auch der Urbildraum von f Elemente des $\mathbb{R}$ sind.
Die Komposition $\vec{f} \circ \vec{f}$ ist nicht erklärt, da der Urbildraum Elemente des $\mathbb{R}$ verlangt, die Funktionswerte von $\vec{f}$ jedoch aus $\mathbb{R}^3$ sind.

(b)

$$\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$g'\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left(e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z}\right)$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{f} \circ g)' &= (\vec{f}' \circ g) \cdot g' \\
&= \vec{f}'(xe^{y-z}) \cdot \left(e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z}\right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{xe^{y-z}} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z}\right) \ \lightning \text{ da diese Multiplikation gar nicht möglich ist}
\end{aligned}
$$

Hätte man das mit dem Widerspruch auch früher rausfinden können? – Max

$$
\begin{aligned}
(g \circ \vec{f})' &= (g' \circ \vec{f}) \cdot \vec{f}' \\
&= g'(\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \left(e^{-t}, e^t e^{-t}, -e^t e^{-t}\right) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \left(e^{-t}, 1, -1\right) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 1 + 1 - 2 \\
&= 0 \\
g(\vec{f}(t))' &= 0
\end{aligned}
$$

(c) Da wir vorher gezeigt dass das mit $(\vec{f} \circ g)'$ gar nicht geht, jetzt gleich $(g \circ \vec{f})'$:

$$
\begin{aligned}
g(f(t))' &= g(\begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix})' \\
&= (e^t e^{-t})' \\
&= (e^0)' \\
&= 1' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit kommt bei beiden Lösungswegen das gleiche Ergebnis heraus.

Aufgabe 3

(a)

$$
\begin{aligned}
e'(x,y) &= (2xy, x^2) \\
f'(x,y) &= (e^x y^2, 2e^x y) \\
\nabla(e \cdot f)(1,1) &= f(1,1) \cdot \nabla e(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot e(1,1) \\
&= e \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix} \cdot 1 \\
&= \begin{pmatrix} 2e \\ 1e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e \\ 3e \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) Ich nehme mal einfach an, dass die Vektoren eigentlich Spaltenvektoren sein sollen, weil sonst hat das ja gar keinen Sinn...

$$\begin{aligned}
\vec{g} \times \vec{h} &= \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x^2 \sin x \\ y \sin x \\ x^3 y^2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -x^2 \sin x \\ y \sin x \\ x^3 y^2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} -2x \sin x - x^2 \cos x & 0 \\ y \cos x & \sin x \\ 3x^2 y^2 & x^3 2y \end{pmatrix} \\
(\vec{g} \times \vec{h})'(0,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Ich nehme mal einfach an, dass die Vektoren eigentlich Spaltenvektoren sein sollen, weil sonst hat das ja gar keinen Sinn...

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} xyz \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(x) z \\ y^3 \end{pmatrix} \\
&= xyz^2 \sin(x) + y^6 \\
(\vec{u} \cdot \vec{v})' &= (xyz^2 \sin(x) + y^6)' \\
&= \begin{pmatrix} yz^2 \cos(x) - xyz^2 \sin(x) & xz^2 \cos(x) + 6y^5 & 2xyz \sin(x) \end{pmatrix} \\
(\vec{u} \cdot \vec{v})'(2\pi, 2\pi, 2\pi) &= \begin{pmatrix} \frac{\pi^3}{8} & \frac{\pi^3}{8} + 6\frac{\pi^5}{32} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bitte überprüft das noch, da sind sicher ein paar Fehler irgendwo...