

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 8

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

(a) Zu zeigen:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \text{rot}(\vec{u} + \text{grad}f) \\ &= \text{rot}(\vec{u}) + \text{rot}(\text{grad}f) \\ &= \vec{v} + \text{rot}(\text{grad}f)\end{aligned}$$

Deshalb muss gelten:

$$0 = \text{rot}(\text{grad}f) = \text{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = 0$$

(b) (i) Da \vec{v} stetig differenzierbar und D konvex sowie offen ist, muss nur noch geprüft werden ob gilt:

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{v}) &= 0 \\ &= \cos(x) + \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}} - \cos(x) - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}} = 0\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass ein Vektorpotential für \vec{v} existiert.

(ii) Da \vec{v} stetig differenzierbar ist und D konvex sowie offen ist, muss nur noch geprüft werden ob gilt:

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{v} &= \vec{0} \\ &= \begin{pmatrix} \left(-\cos(x)z - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}}z\right) \frac{\partial}{\partial y} - (x+y)^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial z} \\ (z^2 + \sin(x)) \frac{\partial}{\partial z} - \left(-\cos(x)z - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}}z\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ (x+y)^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x} - (z^2 + \sin(x)) \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}(x+y)^{-\frac{4}{3}}z - 0 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \neq \vec{0}\end{aligned}$$

\vec{v} besitzt somit kein Potential, da die hinreichende Bedingung nicht erfüllt ist.

Aufgabe 2

$$\vec{v}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \vec{e}_r + r \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi + 0 \cdot \vec{e}_\theta$$

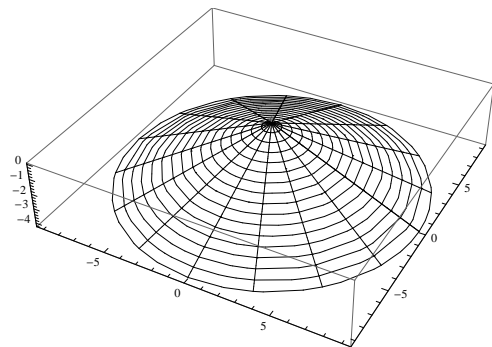
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{2r}{r^2} + \frac{1}{r \sin \theta} (r \cos \theta) \\ &= \frac{2r}{r^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} (2r \sin(\theta) \cos(\theta)) \vec{e}_r + \frac{1}{r} (2r \sin \theta) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} (-2r \sin \theta) \vec{e}_\theta \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} (2r \sin(\theta) \cos(\theta)) \vec{e}_r + (2r \sin \theta) \vec{e}_\varphi + (-2r \sin \theta) \vec{e}_\theta \right) \\ &= 2 \cos(\theta) \vec{e}_r + 2 \sin(\theta) \vec{e}_\varphi - 2 \sin(\theta) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bei θ konstant entsteht ein Kegel die an der z-Achse ausgerichtet und dessen Spitze immer in den Koordinatenursprung zeigt. Der gewählte Winkel entscheidet den Winkel des Kegels von der x bzw y Achse aus. Interessante Spezialfälle sind 0 und $\frac{\pi}{2}$. Bei 0 ist die resultierende Fläche im Grunde nicht vorhanden bzw. ist die z-Achse, bei $\frac{\pi}{2}$ ist eine Fläche entlang der x bzw y Achse.

Listing 1: Mathematica Code für den Graph von f

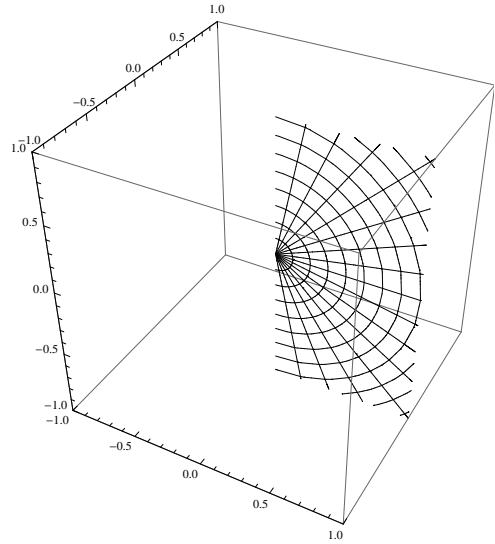
```
ParametricPlot3D[{r*Sin[2] Cos[z], r*Sin
[2] Sin[z], r*Cos[2]},
{z, 0, 2 \[Pi]}, {r, -10, 10}, PlotStyle
-> None,
BoundaryStyle -> Black]
```



Bei φ konstant entsteht eine Fläche die auf der z-Achse steht und je nach gewähltem φ sich auf der z-Achse dreht.

Listing 2: Mathematica Code für den Graph von f

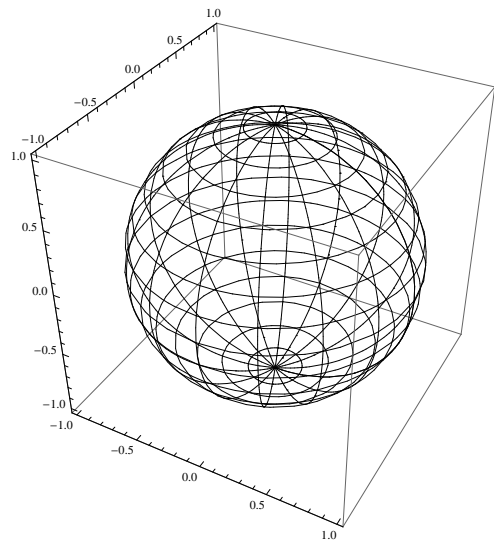
```
ParametricPlot3D[{r*Sin[y] Cos[0], r*Sin[
y] Sin[0], r*Cos[y]},
{y, 0, \[Pi]}, {r, -2, 2}, PlotStyle ->
None,
PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-1,
1}}]
```



Bei r konstant entsteht eine Kugel mit dem Radius r .

Listing 3: Mathematica Code für den Graph von f

```
ParametricPlot3D[{Sin[y] Cos[z], Sin[y]
Sin[z], Cos[y]},
{z, 0, 2 \[Pi]}, {y, 0, \[Pi]}, PlotStyle
-> None]
```



Aufgabe 4

- (i) $\{(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi = \frac{\pi}{3}\}$
- (ii) $\{(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \rho \leq z + 3\}$
- (iii) $\{(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r = 1\}$