

Abgabe: 28.01.-02.02.2013

12. Übung Analysis II für Ingenieure

(Oberflächenintegrale, Integralsätze von Gauß und Stokes)

Bis zum 25.01. findet die Online-Evaluation unserer Veranstaltung statt.
Ein kurzer Fragebogen zum Ausfüllen ist unter
<http://evaluation.tu-berlin.de/productive>
zu finden. Zugangstoken sind bei allen Tutoren zu bekommen.
Euer Feedback hilft unsere Lehre zu verbessern. Bitte nehmt teil.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Es seien $Q = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1]\}$, $S = \partial Q$ sein Rand und

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{v}(x, y, z) = (x^2, y^2, 2z(2 - y))^T.$$

Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Flussintegral $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

2. Aufgabe

Gegeben seien die Mengen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ und $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$, sowie das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = (xz, yz, -z)^T.$$

- (a) Skizzieren und parametrisieren Sie M . Zeichnen Sie das vektorielle Oberflächenelement ein und berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_M \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

- (b) Berechnen Sie $\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O}$. In welche Richtung zeigt hier das Oberflächenelement?
- (c) Wie groß ist also die Strömungsbilanz durch die Bodenfläche der Menge K ?

3. Aufgabe

Seien $\vec{v}(x, y, z) = (-y, x, 0)^T$ und $D = \{(x, y, z)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ die Einheitskreisscheibe. Bestätigen Sie den Satz von Stokes:

$$\iint_D \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{O} = \int_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

4. Aufgabe

Gegeben sei die Fläche D die durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3/2, 0)$ begrenzt ist.

- (a) Skizzieren Sie die Menge und berechnen Sie das Integral $\iint_D y^2 dx dy$ indem Sie die Integrationsgrenzen von y in Abhängigkeit von x darstellen.
- (b) Stellen Sie nun die Integrationsgrenzen von x in Abhängigkeit von y dar und berechnen Sie damit das Integral erneut.

Hausaufgaben

1. Aufgabe

(14 Punkte)

Gegeben seien die Mengen

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\},$$

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 8 - 2z, z \in [3, 4]\},$$

sowie die Funktionen

$$\vec{v}(x, y, z) = (xz, \quad xy - yz, \quad 2xy - xz)^T,$$

$$\vec{w}(x, y, z) = (xyz, \quad x^2y, \quad xyz)^T.$$

- (a) Skizzieren Sie die Mengen Z und K .
- (b) Berechnen Sie $\iint_{\partial Z} \vec{w} \cdot d\vec{O}$, sowie $\iint_{\partial K} \vec{w} \cdot d\vec{O}$.

- (c) Es sei $M = Z \cap K$. Berechnen Sie das Integral von \vec{v} über die Menge M mit Hilfe des Satzes von Stokes.
- (d) Berechnen Sie $\text{rot } \vec{w}$.
- (e) Es sei $U = Z \cup K$. Berechnen Sie das Integral $\iint_{\partial U} \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

2. Aufgabe

(6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Fläche

$$K := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - 4, z \leq 0\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix}$$

der Integralsatz von Stokes erfüllt ist.

Gesamtpunktzahl: 20