TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 14.1.-18.1.13

10. Übung Analysis II für Ingenieure

(Mehrdimensionale Integration)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Berechnen Sie

a) $\int_{\pi}^{3\pi}\int_0^3 x^2 \sin y \, dxdy$

b) $\int_0^1 \int_x^{1+x^2} xy \, dydx$

Skizzieren Sie die Integrationsbereiche.

2. Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale $\iint_B f(x,y)dxdy$ bzw. $\iiint_B f(x,y,z)dxdydz$:

a) B das Dreieck, das von den Geraden $y = x$, $y = 3x$ und $y = -2x + 5$ begrenzt wird, $f(x,y) = x + y$,

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in [0,1], 0 \le z \le x^2 + y^2 + 1\}$, $f(x,y,z) = 2z$.

3. Aufgabe

Es seien $a, b > 0$ und $\mathcal{E} := \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1\right\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $\mathcal{E}$ indem Sie

(a) geeignete Integrationsgrenzen für x, y wählen und $\iint_{\mathcal{E}} dx\, dy$ berechnen.

(b) die Koordinatentransformation $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ durchführen und die Transformationsformel verwenden.

4. Aufgabe

Der Kugeloktantant $B := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ sei mit der Masse der konstanten Dichte $\rho(x, y, z) = 1$ belegt. Bestimmen Sie den Schwerpunkt von B.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\int_0^1 \int_1^2 xye^{xy^2}\, dxdy$

b) $\int_1^2 \int_0^1 \int_0^y (x+1)z^x\, dzdydx$

c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+y} xy^3\, dxdy$

Skizzieren Sie für c) den Integrationsbereich.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders

$$\mathcal{T} := \left\{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\right\}.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei $R > 0$ und $\mathcal{K}_R$ die Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit dem Radius R um den Ursprung. Berechnen Sie das Trägheitsmoment von $\mathcal{K}_R$ bezüglich der z-Achse:

$$\iiint_{\mathcal{K}_R} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei ein "zweidimensionales Bierglas" der Höhe $4cm$. Die Form des Glases ist durch die Parabel $y = x^2$ gegeben. Dieses Glas wird nun um $45°$ gekippt. Wie viel "zweidimensionales Bier" passt jetzt noch in das Glas, ohne dass es überfließt?

Gesamtpunktzahl: 20