Analysis 2 - Hausaufgabe 2

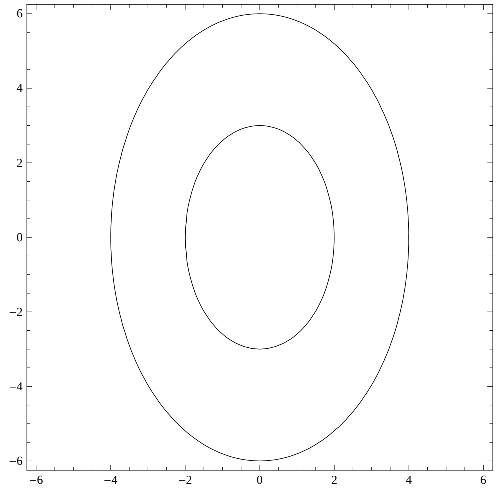
Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1.

(i)

Listing 1: Mathematica Code für die Niveaulinien von h

```
ContourPlot[{x^2/4 + y^2/9 + 4 == 4,
x^2/4 + y^2/9 + 4 ==  5,
x^2/4 + y^2/9 + 4 == 8},
{x, -6, 6}, {y, -6, 6},
ContourStyle -> Black]
```



Eine allgemeine Vorschrift für Niveaulinien zum Wert c ist: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 4 = c$ bzw. nach y umgestellt:

$$y = \pm 3\sqrt{c - 4 - \frac{x^2}{4}}$$

$$c = 4: y = \pm 3\sqrt{-\frac{x^2}{4}}$$

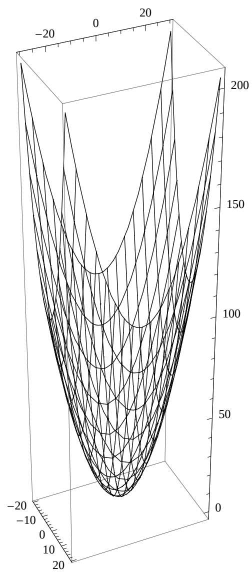
$$c = 5: y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$c = 8: y = \pm 3\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$$

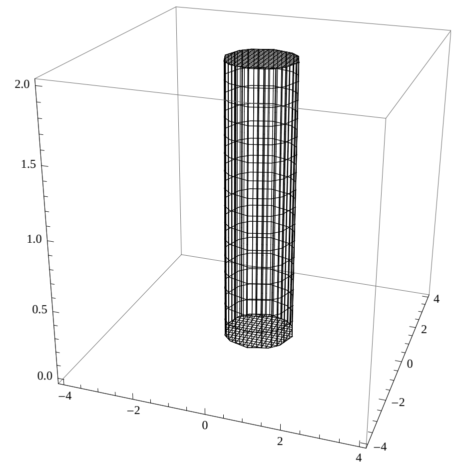
(ii)

Listing 2: Mathematica Code für den Graph von h

```
Plot3D[{x^2/4 + y^2/9 + 4}, {x, -20, 20},
{y, -30, 30},
BoxRatios -> Automatic, PlotStyle -> None]
```



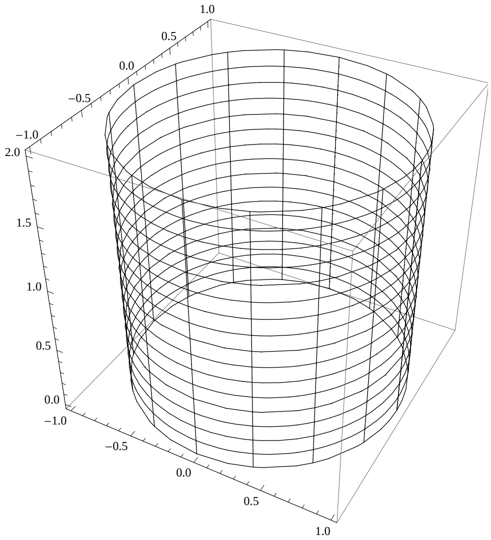
(iii) Da f eine Komposition von stetigen Funktionen ist, sowie das Intervall D kompakt ist, muss f Minima und Maxima in D annehmen. Da die Niveaulinien konzentrische Ellipsen mit Mittelpunkt in $(0,0)$ sind, nimmt die Funktion dort ihr Minimum an und an den Intervallgrenzen ihre Maxima.
Minima: $f(0,0) = 4$
Maxima: $f(-2,0) = 5 = f(2,0)$



(iv)

Listing 3: Mathematica Code für den Graph von Z

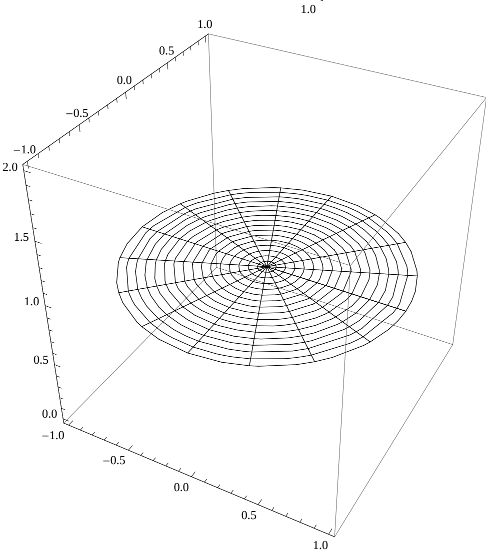
```
RegionPlot3D[ x^2 + y^2 <= 1  && z <= 2,
 {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, {z, 0, 2},
 PlotStyle -> None,
 BoundaryStyle -> Black]
```



Wählt man jedoch $r = 1$ sieht das ganze so aus:

Listing 4: Mathematica Code für den Graph von Z

```
ParametricPlot3D[{Cos[phi], Sin[phi], z},
{phi, 0, 2 \[Pi]}, {z, 0, 2},
PlotStyle -> None, BoundaryStyle -> Black]
```



Wählt man $z = 1$, aber lässt r variabel:

Listing 5: Mathematica Code für den Graph von Z

```
ParametricPlot3D[{r*Cos[t], r*Sin[t], 1},
{t, 0, 2 \[Pi]}, {r, 0, 1},
PlotStyle -> None, BoundaryStyle -> Black]
```

Aufgabe 2.

f ist an den Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig da, $\frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4}$ eine Komposition stetiger Funktionen ist. Sei die Stetigkeit am Punkt $(x,y) = (0,0)$ zu überprüfen.

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} |f(x,y) - f(0,0)| &= \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4} - 0 \right| \\
&= \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y^2+y^8}{x^2+y^4} \right| \\
&\geq \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y^4+y^8}{x^2+y^4} \right| \\
&= \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{(x^2+y^4)y^4}{x^2+y^4} \right| \\
&= \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \left| y^4 \right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist f auch im Punkt $(0,0)$ stetig, womit sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist.

g ist an den Punkten $(x,y) \neq (0,1)$ stetig da, $\frac{x^4(y-1)^2+x^3(y-1)^3}{(x^2+(y-1)^2)^3}$ eine Komposition stetiger Funktionen ist. Sei die Stetigkeit am Punkt $(x,y) = (0,1)$ zu überprüfen.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| f(\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}) \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k^4}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}\frac{1}{k^3}}{(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2})^3} \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{2}{k^6}}{\frac{8}{k^6}} \right| \\
&= ... \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{4} \right|
\end{aligned}$$

Da die beiden benutzten Folgen gegen $(0,1)$ konvergieren, müsste der Grenzwert für Stetigkeit gegen 0 konvergieren. Damit ist g im Punkt $(0,1)$ nicht stetig, womit die Funktion stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ ist.