

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 4

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

(a) Da $s = \frac{g}{2}t^2$, gilt:

$$g = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 44,5\text{m}}{(3,0\text{s})^2} \approx 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(b) Da wir den Fehlerschranksatz anwenden sollen, benötigen wir zunächst die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) &= \frac{2}{t^2} \\ \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) &= \frac{-4s}{t^3}\end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir M_1 sowie M_2 :

$$\begin{aligned}M_1 &= \sup_{\substack{s \in [s_0 - \Delta s, s_0 + \Delta s] \\ t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]}} \left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \right| \\ &= \sup_{\substack{s \in [44,4\text{m}; 44,6\text{m}] \\ t \in [2,9\text{s}; 3,1\text{s}]}} \left| \frac{2}{t^2} \right| \\ &= \frac{2}{2,9^2} = 0,238 \\ M_2 &= \sup_{\substack{s \in [s_0 - \Delta s, s_0 + \Delta s] \\ t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]}} \left| \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \right| \\ &= \sup_{\substack{s \in [44,4\text{m}; 44,6\text{m}] \\ t \in [2,9\text{s}; 3,1\text{s}]}} \left| \frac{4s}{t^3} \right| \\ &= \frac{-4 \cdot 44,6}{2,9^3} = 7,315\end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}|\Delta g| &= |\Delta g(s_0 + \Delta s, t_0 + \Delta t) - g(s_0, t_0)| \\ &\leq M_1 |\Delta s| + M_2 |\Delta t| \\ &\leq 0,238 \cdot 0,1 + 7,315 \cdot 0,1 = 0,755\end{aligned}$$

Für die Gravitationskonstante g gilt also:

$$\begin{aligned}(9,8 - 0,755) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\leq g \leq (9,8 + 0,755) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ 9,045 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\leq g \leq 10,555 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Der näherungsweise Wert beträgt von $e^{0.1} \cos(0.2)$ beträgt 1.083141 (wir gehen von rad für den Winkel aus).

Wir definieren die Funktion $f(x, \psi) = e^x \cos(\psi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x, \psi) &= (e^x \cos(\psi) \quad -e^x \sin(\psi)) \\ f''(x, \psi) &= \begin{pmatrix} e^x \cos(\psi) & -e^x \sin(\psi) \\ -e^x \sin(\psi) & -e^x \cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wählen für das Taylorpolynom 2. Ordnung den Entwicklungspunkt $\vec{0}$.

$$\begin{aligned} T_{\vec{0}}(\vec{x}) &= 1 + (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x \quad \psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} (x \quad \psi) \begin{pmatrix} x \\ -\psi \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} (x^2 - \psi^2) \end{aligned}$$

Somit ist $T_{\vec{0}}(0.1, 0.2) = 1 + 0.1 + \frac{1}{2}(0.1^2 - 0.2^2) = 1.085$.