Technische Universität Berlin WiSe 2012/13
Institut für Mathematik `http://www.isis.tu-berlin.de`
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch Stand: 18. Oktober 2012
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss Abgabe: 29.10.-02.11.2012

1. Übung Analysis II für Ingenieure

(Topologie im $\mathbb{R}^n$, Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten sie die folgenden Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\},$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z \in [-1, 1[\},$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16n^2\}.$$

Skizzieren Sie die Mengen und bestimmen Sie jeweils die Menge der Randpunkte, sowie der inneren Punkte. Geben sie diese Mengen explizit an.
Bestimmen Sie weiter die topologischen Eigenschaften (offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt) der Mengen $A - G$.

2. Aufgabe

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei nichtleere Mengen, sowie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Folge von Mengen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Sind A und B offen, so ist auch $A \cap B$ $(A \cup B)$ offen.

(ii) Ist A offen und B abgeschlossen, so ist $A \cap B$ weder offen noch abgeschlossen.

(iii) Sind alle A_i offen, so ist auch $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ offen.

3. Aufgabe

(i) Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Konvergenz für $k \to \infty$ und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$\vec{a}_k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, e^{\frac{1}{k}}, \frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\right), \qquad \vec{b}_k = \left(\frac{k^2(-1)^k + 2k}{k^2 + 1}, \arctan(k)\right)$$

(ii) Geben Sie zwei konvergente Teilfolgen der divergenten Folge aus Teil i), sowie deren zugehörige Grenzwerte an.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)

Man betrachte die folgenden Mengen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|, x \geq 0\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x)\cos(x) = 0\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| \leq 1, |x| \leq 1\}.$$

Skizzieren Sie die Mengen und bestimmen Sie jeweils die Menge der Randpunkte, sowie der inneren Punkte. Geben Sie diese Mengen explizit an. Bestimmen Sie weiter die topologischen Eigenschaften der Mengen $A - C$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Geben Sie eine Begründung oder ein Gegenbeispiel zu den folgenden Aussagen an.

(i) Das Komplement $A^C := \mathbb{R}^n \setminus A$ einer offenen Menge A ist immer abgeschlossen (und umgekehrt).

(ii) Ist $(K_i)_i \in \mathbb{N}$ eine Folge abgeschlossener Menge im $\mathbb{R}^3$, so ist die Vereinigung dieser Mengen $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i = K_1 \cup K_2 \cup \ldots$ ebenso abgeschlossen.

Hinweis zu ii): Die De Morgan'schen Gesetze der Mengenlehre besagen $\bigcup_i (B_i)^C = (\bigcap_i B_i)^C$ und $\bigcap_i (B_i)^C = (\bigcup_i B_i)^C$ für beliebige Mengen B_i. Die Aufgabe lässt sich damit und der Tutoriumsaufgabe 3, aber auch auf anderem Wege ohne dieses Wissen lösen.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz für $k \to \infty$ und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$$\vec{a}_k = \left(\frac{\arctan(k^2) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{k}}, \frac{1}{k^3} \right), \qquad \vec{b}_k = \left(\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right), \int_1^k \frac{1}{t^2} dt \right)$$

(ii) Geben Sie zwei konvergente Teilfolgen der divergenten Folge aus Teil i) an, die unterschiedliche Grenzwerte besitzen und berechnen den zugehörigen Grenzwert.

Gesamtpunktzahl: 20