Analysis 2 - Hausaufgabe 6

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

Es handelt sich hier um die Suche nach Extrema mit Nebenbedingung, weshalb wir zunächst nach Extrema auf dem Rand des Kreises suchen.

Die Nebenbedingung lautet: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

1. Singulärer Fall:

$$\nabla g(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

   Da $g(0,0) = -1 \neq 0$ gibt es hier keinen singulären Fall.

2. $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x})$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x})$$

   Also:

$$\begin{aligned} \text{I: } 6x - 2y = \lambda \cdot 2x &\Leftrightarrow 3 - \frac{y}{x} = \lambda \Leftrightarrow -\frac{y}{x} = \lambda - 3 \\ \text{II: } -2x + 2y = \lambda \cdot 2y &\Leftrightarrow -\frac{x}{y} + 1 = \lambda \Leftrightarrow -\frac{x}{y} = \lambda - 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{\lambda - 1} \\ \text{III: } x^2 + y^2 - 1 = 0 & \end{aligned}$$

   Addiert man nun I und II so erhält man $0 = \lambda - 3 - \frac{1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{2}$.

   Einsetzten von $\lambda = 2 + \sqrt{2}$ in I:

$$\begin{aligned} -\frac{y}{x} &= 2 + \sqrt{2} - 3 = -1 + \sqrt{2} \\ \Rightarrow y &= -x(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

   in III:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + (-x(\sqrt{2} - 1))^2 - 1 \\ &= x^2 + x^2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

   Was ist mit der -1 passiert?

$$= x^2 + x^2 \cdot \left(2 - 2\sqrt{2} + 1\right)$$

   Diese Umformung haut nicht hin. Das von Mathematica stimmt.

$$= 2x^2 \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

Somit ist $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ und $y = \frac{1}{2}\left(\pm 3\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(2-\sqrt{2}\right)^{3/2}\right)$.

Durch Einsetzen erhält man für $\lambda = 2-\sqrt{2}$, dass $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ und $y = \frac{1}{2}\left(-3\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(2-\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$.

Für $\lambda = 2+\sqrt{2}$ ist $x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ und $y = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(2-\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$.

$$\vec{x}_{k_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\left(-3\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(2-\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{k_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(2-\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_{k_1}) &= 2+\sqrt{2} \\ f(\vec{x}_{k_2}) &= 14+9\sqrt{2} \end{aligned}$$

Wir prüfen zunächst die notwendige Bedingung für kritische Punkte$\nabla f(\vec{x}_k) = 0$:

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2(x-y)+4x \\ -2(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2y \\ -2x+2y \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} 0 &= 6x-2y \\ 0 &= -2x+2y \\ \Rightarrow 0 &= 4x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten deshalb einen kritischen Punkt: $x_{k3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Hessematrix ist, da es sich bei f um eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion handelt, gemäß dem Satz von Schwarz, symmetrisch.

$$\begin{aligned} f''(\vec{x}) = H_f(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ D_1 &= \det(6) = 6 > 0 \\ D_2 &= \det\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 8 > 0 \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(\vec{x})$ positiv definit, woraus schlusszufolgern ist, dass die Funktion f bei $f(0,0) = 0$ ein lokales Minimum besitzt. Da $f(x,y)$ eine Komposition aus $(x-y)^2 > 0 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $2x^2 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ ist, ist $f(0,0) = 0$ sogar ein globales Minimum.

Um nun über globale Extrema zu entscheiden, reicht es, die Funktionswerte von f zu vergleichen, da die gegebene Menge kompakt ist und f stetig ist.

Da $f(x_{k_1}) = 2+\sqrt{2}$, $f(x_{k_2}) = 14+9\sqrt{2}$ und $f(x_{k_3}) = 0$, ist bei x_{k_3} ein globales Minimum und bei x_{k_2} ein globales Maximum unter der Beschränkung.

MÜSSEN WIR FÜR x_{k_1} NOCH IRGENDWAS ZEIGEN, ODER REICHT DAS? – MAX

Aufgabe 2

Um lokale Extrema einer mehrdimensionalen Funktion zu bestimmen, müssen wir 1. die kritischen Punkte finden und 2. diese als Funktionswerte der Hessematrix übergeben.

1. kritische Punkte sind alle Funktionswerte die $\nabla f(x,y,z) = \vec{0}$ erfüllen.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4z + 2y \\ 4y + 10z \end{pmatrix} \overset{\text{DGL}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Der Kern der Einheitsmatrix ist der Null-Vektor. Dies ist auch der einzige kritische Punkt demnach.

2. Hesse-Matrix berechnen und kritische Punkte einfügen:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

   Die Hessematrix ist, da es sich bei f um eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion handelt, gemäß dem Satz von Schwarz, symmetrisch.
   Da die Hesse Matrix konstant ist, müssen wir den Punkt offensichtlich nicht einsetzen. Mit dem Hurwitzkritirium kann nun überprüft, was der kritische Punkt nun ist.

$$\begin{aligned} &\det(4) = 4 \\ &\det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 \\ &\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \overset{\text{nach Laplace}}{=} 4 \cdot (2 \cdot 10 - 4 \cdot 4) = 16 \end{aligned}$$

   Damit ist $H_f(0,0,0)$ positiv definit. Somit ist ein lokales Minimum bei $\vec{0}$. Ist es auch ein globales Minimum? $2x^2$, y^2 und $5z^2$ werden nie negativ. Also kann nur $4yz$ negativ werden. Da aber $4yz + y^2 + 5z^2 \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ offensichtlich gilt, kann f keine negativen Funktionswerte haben, und muss somit, da $f(0,0,0) = 0$, an der Stelle $(0,0,0)$ ein globales Minimum haben.

Aufgabe 3

Wir haben die Nebenbedingung $g(a,b) = a + b - 10 = 0$. Außerdem haben wir die Funktion $f(a,b) = ab$. Da der von g gebildete Körper kein Inneres besitzt, kann es in diesem auch keine Extrema geben.

Wir überprüfen, ob ein singulärer Fall vorliegt:

$$\nabla g(a,b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Da es hierfür keine Lösung gibt, liegt kein singulärer Fall vor.}$$

Als nächstes überprüfen wir auf andere Extrema am Rand.

$$\begin{aligned} \nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla g(a,b) \\ \text{Es gilt: } a + b - 10 &= 0 \\ \text{Daraus folgt: } a &= \lambda \\ b &= \lambda \\ \lambda &= 5 \Rightarrow a = 5 \wedge b = 5 \end{aligned}$$

Somit haben wir als kritischen Punkt $x_{k_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Da der Gradient von f in allen Punkten außer (0,0), bei denen $a, b > 0$ größer als 0 ist, muss es sich bei (5,5) um ein globales Maximum handeln.