TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 07.01.-11.01.2013

9. Übung Analysis II für Ingenieure

(Parametrisierungen, Kurvenintegrale)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

(a) Geben Sie eine Mengenbeschreibung des Kreises in der xz-Ebene mit Mittelpunkt $(3,0,5)$ und Radius 2 in kartesischen und geeigneteren Koordinaten an.

Wie lautet nun eine Parametrisierung der Menge?

(b) Parametrisieren Sie außerdem:

- den Breitenkreis der Erde zu $45°$ nördlicher Breite (dabei darf die Erde als Kugel vom Radius 6300 km angenommen werden).
- die Strecke von $P_1 = (1,2,3)$ nach $P_2 = (3,5,7)$.

2. Aufgabe

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 + z^2 - 2xyz + 8y^2,$$
$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -yz\sin(xy) + x \\ -xz\sin(xy) \\ \cos(xy) + z^2 \end{pmatrix}.$$

Die Kurve γ beschreibe den Kreis in der xz-Ebene mit Radius 2 und dem Mittelpunkt im Ursprung.

(a) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int\limits_\gamma f\,ds$ und $\int\limits_\gamma \vec{v}\,\vec{ds}$ mit Hilfe der Definition.

(b) Berechnen Sie nun ein Potential von $\vec{v}$ und bestimmen Sie mit dessen Hilfe das Integral $\int\limits_\gamma \vec{v}\,\vec{ds}$ noch einmal.

Welche Eigenschaften von Kurve und Funktion führen dazu, dass die Rechnung sich wesentlich vereinfacht?

3. Aufgabe

Gegeben sei $\vec{v}$ aus Aufgabe 2. Berechnen Sie

(a) das Integral von $\vec{v}$ über die Strecke von $(0,0,0)$ nach $(1,\pi/2,1)$,

(b) die Länge der Strecke mit Hilfe eines Kurvenintegrals.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (7 Punkte)

Geben Sie eine Parametrisierung der folgenden Mengen an:

- Der Längenkreis der Erde vom Grad 0 (Radius etc. können wie in Tutoriumsaufgabe 1 angenommen werden, Achtung: Ein Längenkreis ist nur ein Halbkreis).
- Die Punkte auf dem Graphen der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
- Die Schnittmenge der Ebene, für die gilt $x = y$, mit der Einheitskugel $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

2. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + z^2 + yz \\ \frac{y}{y^2+z^2} + xz \\ \frac{z}{y^2+z^2} + xy + 2xz \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy + z^2 \end{pmatrix},$$

sowie die Kurve $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Integrale $\int\limits_\gamma \vec{v}\,\vec{ds}$ und $\int\limits_\gamma \vec{w}\,\vec{ds}$.

3. Aufgabe

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Kreisevolvente $p : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \cos(5t) \\ e^t \sin(5t) \end{pmatrix}$.

Gesamtpunktzahl: 20