

ANALYSIS 2 - HAUSAUFGABE 10

Tom Nick 342225
Tom Lehmann 340621
Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 xye^{xy^2} dx dy &= \int_1^2 \int_0^1 xye^{xy^2} dy dx \\&= \frac{1}{2} \int_1^2 e^{xy^2} \Big|_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (e^x - 1) dx \\&= \frac{1}{2} (e^x - x) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e^2 - 2 - (e - 1)) = \frac{1}{2} (e^2 - e - 1)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^1 \int_0^y (x+1)z^x dz dy dx &= \int_1^2 \int_0^1 z^{x+1} \Big|_0^y dy dx \\&= \int_1^2 \int_0^1 y^{x+1} dy dx \\&= \int_1^2 \frac{1}{x+2} y^{x+2} \Big|_0^1 dx \\&= \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx \\&= \log(x+2) \Big|_1^2 = \log(4) - \log(3) = \log\left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+y} (xy^3) dx dy &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 y^3 \right) \Big|_{\sqrt{y}}^{1+y} dy \\&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (y^5 + y^4 + y^3) \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^5 + y^4 + y^3 dy \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} y^6 + \frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{4} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{37}{120}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &:= \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq (1-y-x) \right\} \\
 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y-x} 1 \, dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} z \Big|_0^{1-y-x} dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y \, dy dx = \int_0^1 y - yx - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 (1-x) - (1-x)x - \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} dx \\
 &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \Big|_0^1 = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\
 y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\
 z &= r \cos(\vartheta)
 \end{aligned}$$

und der Funktionaldeterminanten

$$\begin{aligned}
 dV &= r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\
 \iiint_{\mathcal{K}_R} (x^2 + y^2) \, dV &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r^2 \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) \right) r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r^2 \sin^2(\vartheta) \left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right) \right) r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2(\vartheta) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \sin^3(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
 &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\
 &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5} R^5 \, d\varphi \, d\vartheta \\
 &= \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \frac{1}{5} R^5 2\pi \, d\vartheta \\
 &= \frac{2}{5} \pi R^5 \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) \, d\vartheta \\
 &= \frac{2}{5} \pi R^5 \cdot \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir kippen nicht das Glas sondern definieren, dass die Gravitationskraft nicht mehr in $-\vec{e}_y$ sondern in $-\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ -Richtung zeigt. Das heißt, wenn das Glas um 45° gekippt wird, verläuft die Oberfläche des Bieres entlang $y_B = x + 2$, da die Oberfläche einer Flüssigkeit in Ruhe stets orthogonal zum Gravitationsvektor ist. Die Verschiebung in \vec{e}_y -Richtung kommt daher, dass das Glas voll gefüllt ist und das Bier die Kante des Bierglases berührt und demzufolge durch den Punkt $(2, 4)$ geht. Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, berechnen wir die Schnittstellen beider Graphen:

$$\begin{aligned}x^2 &= x + 2 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm 1,5 \\ \Rightarrow x_1 &= -1 \\ \Rightarrow x_2 &= 2\end{aligned}$$

Die Menge an "zweidimensionalem Bier" berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}A_B &= \int_{-1}^2 (x + 2) - x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-1}^2 \\ &= 2 \left(-\frac{1}{3}2^2 + \frac{1}{2}2 + 2 \right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{5}{6} + 2 = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6}\end{aligned}$$