Analysis 2 - Hausaufgabe 9

Tom Nick	342225
Tom Lehmann	340621
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

- $$\begin{aligned} x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

  Ein Längenkreis ist ein verfickter Vollkreis! Ein Meridian ist ein Halbkreis. Egal. Kackspassten! - Tom

  $$\vec{\gamma_1}(t) = \begin{pmatrix} 6300\sin(t)\cos(0) \\ 6300\sin(t)\sin(0) \\ 6300\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6300\sin(t) \\ 0 \\ 6300\cos(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$$

- **Oops, da hat Tom wohl die Aufgabe nicht ganz gelesen :) - Max**

  $$\vec{\gamma_2}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad t \in [-1, 1]$$

- $$\vec{\gamma_3}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(t)\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi[$$

Aufgabe 2

- $$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s} &= \int_{-\pi}^{\pi} \vec{v}\left(\vec{\gamma}\,(t)\right) \cdot \dot{\gamma}(t)\; dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \vec{v}\left(\cos(t), \cos(t), \sin(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \cos^2(t) + \sin^2(t) + \cos(t)\sin(t) \\ \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} + \cos(t)\sin(t) \\ \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} + \cos(t)\cos(t) + 2\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} -\sin(t) \cdot \left(\cos^2(t) + \sin^2(t) + \cos(t)\sin(t)\right) - \sin(t) \cdot \left(\frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} + \cos(t)\sin(t)\right) \\ &\quad + \cos(t) \cdot \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} + \cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t)\right) dt \end{aligned}$$

Da im Integral in jedem Summanden cos- oder sin-Terme ungerader Potenz vorhanden sind, ist das Integral über eine ganze Periodenlänge von $-\pi$ bis π gerade 0.

-

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} \vec{w}\, d\vec{s} &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \vec{w}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos^2 t \\ \cos^2(t) + \sin^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(-2\cos^2(t)\sin(t) + \cos^3(t) + \sin^2(t)\cos(t) \right) dt
\end{aligned}$$

Da im Integral in jedem Summanden cos- oder sin-Terme ungerader Potenz vorhanden sind, ist das Integral über eine ganze Periodenlänge von $-\pi$ bis π gerade 0.

Aufgabe 3

Wir nehmen die Funktion $f = 1$ um die Länge mithilfe des Kurvenintegrals abschätzen zu können.

$$
\begin{aligned}
l &= \int_\gamma 1 ds \\
&= \int_0^{2\pi} 1 \left|\dot{\gamma}(t)\right| dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} e^t \cos(5t) - 5e^t \sin(5t) \\ e^t \sin(5t) + 5e^t \cos(5t) \end{pmatrix} \right| dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^t \cos(5t) - 5e^t \sin(5t))^2 + (e^t \sin(5t) + 5e^t \cos(5t))^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t} \cos^2(5t) - 2e^t \cos(5t) 5e^t \sin(5t) + 5e^{2t} \sin^2(5t) + e^{2t} \sin^2(5t) + 2e^t \sin(5t) 5e^t \cos(5t) + 5e^{2t} \cos^2(5t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t} \cos^2(5t) + 5e^{2t} \sin^2(5t) + e^{2t} \sin^2(5t) + 5e^{2t} \cos^2(5t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t} \left(\cos^2(5t) + \sin^2(5t)\right) + 5e^{2t} \left(\sin^2(5t) + \cos^2(5t)\right)} dt \\
&\overset{\text{Pythagoras im Einheitskreis}}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t} + 5e^{2t}} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{6e^{2t}} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{6} e^t dt \\
&= \sqrt{6} e^t \Big|_0^{2\pi} \\
&= \sqrt{6} e^{2\pi} - \sqrt{6}
\end{aligned}
$$