TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2012/13
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: G. Bärwolff, F. Tröltzsch
Assistenten: R. Kehl, P. Nestler, M. Voss
https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=7176

Abgabe: 19.11.-23.11.12

4. Übung Analysis II für Ingenieure

(Rechenregeln, Koordinatensysteme)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Seien $R > 0$ und $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto R \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

a) Man mache sich $\vec{f}$ anhand einer Skizze anschaulich klar.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}$ und tragen Sie diese in die Skizze ein. Was bedeuten diese Vektorfelder geometrisch?

2. Aufgabe

Seien $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z + x^2 \\ -2xy^2 \\ y^2 + z^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 - t^4 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Ableitungen von $\vec{f}$ und $\vec{g}$ und verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitung von $\vec{f} \circ \vec{g}$ zu berechnen.

b) Geben Sie $\vec{f} \circ \vec{g}$ explizit an und die zugehörige Ableitung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit a).

3. Aufgabe

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) $\nabla(f^k) = kf^{k-1}\nabla f$, für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

b) $\nabla \frac{f}{g} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\vec{f} :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie das Bild der Vektorfunktion $\vec{f}$.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}$ und $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}$ und tragen Sie diese in die Skizze ein. Was bedeuten diese Vektorfelder geometrisch?

c) Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $\vec{f}'(r, \varphi)$ und deren Determinante $\det(f'(r, \varphi))$.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Seien $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto xe^{y-z}$.

a) Welche der Kompositionen $g \circ g$, $g \circ \vec{f}$, $\vec{f} \circ g$ und $\vec{f} \circ \vec{f}$ sind erklärt?

b) Berechnen Sie ggfls. die Ableitungen der jeweiligen Kompositionen mit Hilfe der Kettenregel.

c) Berechnen Sie nun die Ableitungen, indem die Kompositionen zunächst explizit angegeben werden. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit b).

3. Aufgabe (7 Punkte)

Seien

$e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 y,$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^x y^2,$

$\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (xy^2, 0, \sin(x)),$ $\quad \vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (y, x^2, 0),$

$\vec{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (xyz, y^3),$ $\quad \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (\sin(x)z, y^3).$

Bestimmen Sie:

a) $\operatorname{grad}_{\vec{x}}(ef)$ an der Stelle $(1, 1)$,

b) die Funktionalmatrix von $\vec{g} \times \vec{h}$ an der Stelle $(0, 1)$,

c) die Funktionalmatrix von $\vec{u} \cdot \vec{v}$ an der Stelle $(2\pi, 2\pi, 2\pi)$,

Gesamtpunktzahl: 20