FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2012/2013
Stand: 23.1.2013

12. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3
Abgabe: 31.1.2013 in der Vorlesung

Für alle Aufgaben gilt: Solange in der Aufgabenstellung nichts anderes steht, erwarten wir zu jeder Antwort eine Begründung. Es genügt nicht, nur eine Formel zu schreiben ohne Begründung.

Hausaufgabe 1

10 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol.

(i) (1 Punkt) Wir sagen, dass eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ eine *lineare Ordnung* ist, genau dann, wenn sie für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$ die folgenden 3 Bedingungen erfüllt.

a) Es gilt $\neg E(x, x)$.

b) Falls $x \neq y$, dann gilt $E(x, y)$ oder $E(y, x)$.

c) Falls $E(x, y)$ und $E(y, z)$, dann gilt $E(x, z)$.

Zeigen Sie, dass es einen FO[σ]-Satz φ_1 gibt, sodass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi_1 \quad \text{genau dann, wenn } \mathcal{A} \text{ eine lineare Ordnung ist.}$$

Sie müssen Ihre Antwort in diesem Aufgabenteil nicht begründen.

(ii) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es keinen FO[σ]-Satz φ_2 gibt, sodass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi_2 \quad \text{genau dann, wenn } |A| \text{ gerade ist.}$$

(iii) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine FO[σ]-Formel $\varphi_3(x, y)$ mit zwei freien Variablen gibt, sodass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt:

$$\text{Der Graph } (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \text{ ist zusammenhängend genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(iv) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass es keinen FO[σ]-Satz φ_4 gibt, sodass für jede endlichen Graphen $\mathcal{A} = (A, E)$ gilt, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi_4 \quad \text{genau dann, wenn } \mathcal{A} \text{ zusammenhängend ist.}$$

Hausaufgabe 2

5 Punkte

Sei $\sigma = \{P, M\}$ eine Signatur mit zwei 3-stelligen Relationssymbolen, die für die Addition und Multiplikation stehen sollen.

Sei $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, P^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{A}})$ die Struktur der ganzen Zahlen, wobei $P^{\mathcal{A}}$ die übliche Addition und $M^{\mathcal{A}}$ die übliche Multiplikation ist.

Sei $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}[X], P^{\mathcal{B}}, M^{\mathcal{B}})$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$. Das heißt

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}[X] &:= \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{Z}^\infty \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ sodass } a_i = 0 \text{ für alle } i > n\} \\
P^{\mathcal{B}} &:= \left\{ \big((a_0, \dots), (b_0, \dots), (c_0, \dots)\big) \in \mathbb{Z}[X]^3 \;\middle|\; c_i = a_i + b_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\} \\
M^{\mathcal{B}} &:= \left\{ \big((a_0, \dots), (b_0, \dots), (c_0, \dots)\big) \in \mathbb{Z}[X]^3 \;\middle|\; c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}.
\end{aligned}$$

Anschaulich steht $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ für das Polynom $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$, wobei $a_i = 0$ ist für alle $i > n$. Die Relationen $P^{\mathcal{B}}$ und $M^{\mathcal{B}}$ beschreiben die übliche Addition bzw. Multiplikation von Polynomen.

Wir definieren

$$\begin{aligned}
a_1 &:= 1 \in \mathcal{A} & \qquad b_1 &:= (1, 0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{B}, \\
a_2 &:= 2 \in \mathcal{A} & \qquad b_2 &:= (2, 0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{A}, a_1, a_2, \mathcal{B}, b_1, b_2)$. Herausforderer spielt wie folgt.

(i) In der ersten Runde wählt Herausforderer $b_3 := (0, 1, 0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{B}$. Duplikatorin antwortet mit einem $a_3 \in \mathcal{A}$.

(ii) In der zweiten Runde wählt Herausforderer $b_4 := (1, 1, 0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{B}$. Duplikatorin antwortet mit einem $a_4 \in \mathcal{A}$.

Angenommen, Herausforderer hat nach der zweiten Runde noch nicht gewonnen. Welches Element kann Herausforderer in der dritten Runde wählen, damit er gewinnt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Sei $\sigma = \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Signatur, die nur aus 1-stelligen Relationssymbolen besteht. Wir definieren zwei σ-Strukturen

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= (A, P_0^{\mathcal{A}}, P_1^{\mathcal{A}}, \dots) & \qquad \mathcal{B} &:= (B, P_0^{\mathcal{B}}, P_1^{\mathcal{B}}, \dots) \\
A &:= \mathbb{N} & \qquad B &:= \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\
P_i^{\mathcal{A}} &:= \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq i\} & \qquad P_i^{\mathcal{B}} &:= P_i^{\mathcal{A}} \cup \{\infty\}.
\end{aligned}$$

(i) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass Herausforderer das 1-Runden-Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt.

(ii) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent sind.

(iii) (1 Punkt) Wieso ist das kein Widerspruch zum Satz von Ehrenfeucht (Satz 4.43 in den Vorlesungsfolien)?