Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i)

$$\varphi_1 = \begin{aligned} & \forall x\ \neg E(x,x) \wedge \\ & \forall x \forall y\ (x \neq y \Rightarrow E(x,y) \vee E(y,x)) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (E(x,y) \wedge E(y,z) \Rightarrow E(x,z)) \end{aligned}$$

(ii) Widerspruchsannahme:

Es existiert ein φ_2 mit Quantorenrang m, sodass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$

$$\mathcal{A} \models \varphi_2 \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.}$$

gilt.

Nehmen wir nun die lineare endliche Ordnung $\mathcal{B}_1 = (B_1, E^{\mathcal{B}_1})$ mit $|B_1| = 2^{m+1} > 2^m$ und $\mathcal{B}_1 = (B_2, E^{\mathcal{B}_1})$ mit $|B_2| = 2^m + 1 > 2^m$. Es gilt nach dem Satz der Vorlesung, dass die Duplikatorin das EF-Spiel gewinnen würde, woraus folgt, dass φ_2 die beiden Ordnungen nicht unterscheiden könnte. Da aber $|B_1|$ gerade ist und $|B_2|$ ungerade, ist das ein Widerspruch zur Annahme, woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss. Somit kann kein solcher $FO[\sigma]$-Satz φ_2 existieren.

(iii) Die Formel lautet folgendermaßen:

$$\varphi_3(x,y) = \neg \exists z$$

(iv) Widerspruchsannahme: Es existiert ein solcher $FO[\sigma]$-Satz φ_4.

Nach der Teilaufgabe (iii) existiert eine Formel φ_3, sodass für jeden endlichen Graph G = (A,E) gilt:

$$\text{Der Graph } (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \text{ ist zusammenhängend genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.}$$

Nun gilt nach φ_4 auch:

$$\begin{aligned} G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.} \\ \equiv G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \not\models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ gerade ist.} \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Teilaufgabe (ii), woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss, sodass es keinen solchen $FO[\sigma]$-Satz φ_4 geben kann.

Aufgabe 2

Aufgabe 3

(i) Der Herausforderer spielt in der Struktur $\mathcal{B}$ und wählt ∞. Gibt die Duplikatorin das Element a als Antwort, dann gilt, dass ein Element i in $\mathcal{A}$ existiert, sodass $a < i$. Daraus folgt aber, dass es ebenfalls ein $P_i^{\mathcal{A}}$ gibt, sodass $a \notin P_i^{\mathcal{A}}$, was jedoch ein Widerspruch ist, da ∞ in allen einstelligen Relationen aus $\mathcal{B}$ vorkommt.

(ii) Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ beliebig.

Für jedes $P_i(x)$ mit $x \in \mathbb{N}$ gilt (*):

i > 0:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_i(x) = 1$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x, sodass x > i und damit $P_i(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_i(x) = 0$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x, sodass x < i und damit $P_i(x) = 0$.

i = 0:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert eine Zahl x, sodass x > 0 und damit $P_0(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert keine Zahl x, sodass x < 0 und damit $P_0(x) = 1$.

Die Aussagen (*) gelten in beiden Strukturen, woraus folgt, dass alle Relationen gleich auswerten und somit auch der Satz φ in beiden Strukturen immer gleich auswertet. Da keine Einschränkung bei φ getroffen wurde, folgt, dass es keinen $FO[\sigma]$-Satz gibt, der beide Strukturen unterscheidet, sodass sie elementar äquivalent sind.

(iii) Der Widerspruch rührt daher, dass der Satz von Ehrenfeucht nur für endliche relationale Signaturen und Strukturen gilt.

Mit einer endlichen Menge an Relationssymbolen tritt der oben aufgezeigte Widerspruch nicht auf:
Annahme: Es gibt nicht unendlich viele P_i, sondern $i \leq n$, wobei $n \in \mathbb{N}$.
Wählt nun der Herausforderer ∞, so wählt die Duplikatorin eine Zahl j mit $j > m + n$, wobei n die gleiche Zahl wie in der obigen Zeile ist. Der Rest des Spiels ist trivial.

Somit sind die beider Strukturen nun elementar äquivalent und die Duplikatorin gewinnt das Ehrenfeucht-Fraïsse-Spiel.