Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

(i) a) **Behauptung:** Das untenstehende Sequenzkalkül ist korrekt:

$$(\exists \Rightarrow)\frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta} c \text{ kommt nicht in } \Phi, \delta, \psi(x) \text{ vor}$$

Beweis: Sei $J = (\mathcal{A}, \beta)$ ein τ-Interpretation die Φ und für mindestens ein x, $\psi(x)$ erfüllt. Also:

$$J \vDash \Phi$$
$$J \vDash \exists x\psi(x)$$

Sei $a := [\![c]\!]^J$. Also gilt $J \vDash \psi[x/a]$, daraus folgt offensichtlich, dass $J \vDash \psi(c)$ gilt. Nach Vorraussetzung gibt es also ein $\varphi \in \Delta$, sodass $J \vDash \varphi$.

b) **Behauptung:** Das untenstehende Sequenzkalkül ist korrekt:

$$(\Rightarrow \exists)\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$$

Beweis: Sei τ die Signatur die alle Relations-, Funktions- und Konstantensymbole enthält, die in $\Phi, \Delta, \psi(x)$ vorkommen, aber nicht t. Sei $\mathcal{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine τ-Interpretation mit $J \vDash \Phi$. Nach Vorraussetzung erfüllt J eine Formel in $\Delta \cup \{\psi(t)\}$

Fall: 1. $\mathcal{J} \vDash \varphi \in \Delta$, dies gilt offensichtlich.

Fall: 2. $\mathcal{J} \vDash \psi(t)$

Z.z. $\mathcal{J} \vDash \exists\forall x\psi(x)$

Sei J_a die $\tau \cup \{t\}$-Interpretation sodass $\mathcal{J}_a$ die Konstante c mit a belegt und sonst ist $\mathcal{J}_a$ gleich J. Es gilt $\mathcal{J}_{a|_\tau} = J$, daraus folgt, dass $\forall\varphi \in \Delta . J_a \nvDash \varphi$. Also muss $J_a \vDash \psi(t)$. Also gilt $\mathcal{J} \vDash \psi[a]$ für mindestens ein $a \in A$. Daher also $J \vDash \exists\psi(x)$

Aufgabe 2

(i)

$$\frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an. Wir wählen $\Phi = \{\top\}$, $\psi = \bot$ sowie $\Delta = \{\top\}$.

Dann gilt:

$$\frac{\{\top\}, \bot \Rightarrow \{\top\}}{\{\top\} \Rightarrow \{\top\}}$$

Somit gilt in jeder beliebigen Interpretation $\mathcal{J}$, dass die obere Sequenz ungültig ist, die untere aber nicht.

(ii)

$$\frac{\Phi, \neg\forall x\varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an. Wir wählen $\Phi = \{\top\}$, $\varphi = (x = x)$ sowie $\Delta = \emptyset$.

Dann gilt:

$$\frac{\{\top\}, (\neg\forall x\, x = x) \Rightarrow \emptyset}{\{\top\} \Rightarrow (\exists x\, x = x)}$$

Somit gibt es offensichtlich eine Interpretation, sodass die obere Sequenz gültig ist, die untere aber nicht

Aufgabe 3

Es gilt:

$$\{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\} \equiv \{\forall x f(x) = x\} \cup \{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}$$

Mit dem Sequenzenkalkül kann man das Axiom nun beweisen:

$$\begin{array}{r c}
(\mathcal{S} \Rightarrow) & \dfrac{\{f(f(c)) = c\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}}{\{f(c) = c, f(f(c)) = f(c)\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}} \\
(\forall \Rightarrow) & \dfrac{}{\{\forall x f(x) = x, f(f(c)) = f(c)\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}} \\
(\forall \Rightarrow) & \dfrac{}{\{\forall x f(x) = x\} \cup \{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}}
\end{array}$$

Aufgabe 4

Da $\sigma = \emptyset$ gilt, dass alle Formeln $\varphi \in FO[\sigma]$ in der Auswertung in verschiedenen σ-Strukturen sich nur über den Quantorenrang von φ unterscheiden. Da φ endlich ist (Eingabe ist endlich), hat φ einen Quantorenrang $qr(\varphi) = m$. Würde man nun eine σ-Struktur suchen die ein Modell von φ ist, würde es reichen beliebige Strukturen mit m Elementen zu testen, da jede Struktur mit mehr als m Elementen elementar-äquivalent zu der mit m ist. Damit kann jede Berechnung der Turingmaschine die ein φ bekommen hat, nach dem untersuchen von Strukturen mit $1 - m$ Elementen abbrechen, falls keine gefunden wurde und eindeutig sagen, dass es kein Modell gibt bzw. dass es ein Modell gibt. Dies entspricht der Definition von Entscheidbarkeit.