Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

Beweis durch strukturelle Induktion. Seien dazu β und β' zwei Belegungen mit $\beta \leq \beta'$, sowie φ eine Formeln die nur aus Variablen $X_1, ..., X_n$ und $\perp, \top, \wedge, \vee$ besteht.

IA $\varphi = X_1$
Es gibt drei Möglichkeiten für β und β', sodass $\beta \leq \beta'$.

- $\beta(X_1) = 0 \leq 0 = \beta'(X_1)$
  $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![\varphi]\!]^\beta \leq [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
- Die anderen Fälle sind analog.

IV Sei φ eine monotone Formel, wobei diese nur aus Variablen $X_1, ..., X_n$ und $\perp, \top, \wedge, \vee$ besteht.

IS Da das Anhängen von $\top$ und $\perp$ mittels $\wedge, \vee$ keinerlei Einfluss auf die Monotonie von Formeln hat (Da die Belegungen nur Einfluss auf Variablen hat), werden diese hier nicht betrachtet. Es ist nun zu zeigen, dass die Aussage auch für $\varphi \wedge X_{n+1}$ und $\varphi \vee X_{n+1}$ gilt.

- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 1 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Analog
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Anolog
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 1 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Analog

Aufgabe 2

(i) Es ist zu zeigen, dass NAND funktional vollständig ist. Bisher kennen wir $\{\neg, \vee, \wedge\}$ als funktional vollständig. Wenn nun alle Operatoren dieser Basis durch NAND dargestellt werden können, ist NAND funktional vollständig.

- $\neg\phi \equiv (\phi \ \mathsf{NAND} \ \phi)$

ϕ	$\neg\phi$	$(\phi \ \mathsf{NAND} \ \phi)$
0	1	1
1	0	0

- $(\phi \wedge \psi) \equiv ((\phi \ \mathsf{NAND} \ \psi)\mathsf{NAND}(\phi \ \mathsf{NAND} \ \psi))$

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$	$((\phi \ \mathsf{NAND} \ \psi)\mathsf{NAND}(\phi \ \mathsf{NAND} \ \psi))$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

- $(\phi \vee \psi) \equiv (\phi \ \mathsf{NAND} \ \phi)\mathsf{NAND}(\psi \ \mathsf{NAND} \ \psi))$

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$	$((\phi \ \mathsf{NAND} \ \phi)\mathsf{NAND}(\psi \ \mathsf{NAND} \ \psi))$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Da alle Operatoren der uns bekannten funktional vollständigen Junktorbasis durch NAND darstellbar ist, ist NAND funktional vollständig.

(ii) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ist nicht funktional vollständig, da $\neg X$ mit $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht darstellbar ist. Sei dazu die Belegung β definiert als $\beta(X) = 1$. Beweis per struktureller Induktion:

IA $\phi = X$
$[\![X]\!]^\beta = 1$

IV Seien ϕ_1, ϕ_2 Formeln die nur aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ bestehen, wobei gilt, dass $[\![\phi_1]\!]^\beta = 1 = [\![\phi_2]\!]^\beta$

IS
- $\psi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]^\beta = 1$
- $\psi = (\phi_1 \vee \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \vee \phi_2)]\!]^\beta = 1$
- $\psi = (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \rightarrow \phi_2)]\!]^\beta = 1$

Damit ist bewiesen, dass die Junktorbasis $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 3

(i) Sei φ_n induktiv definiert als:

$$\varphi_1(X_1) = X_1$$
$$\varphi_{n+1}(X_1, ..., X_{n+1}) = \varphi_n(X_1, ..., X_n) \oplus X_{n+1}$$

Wie im Tutorium 2 bewiesen wurde, wechselt φ immer den Wahrheitswert, wenn sich in der Belegung eine Zahl ändert. Damit gibt es genau 2^{n-1} Belegungen zu denen φ zu wahr auswertet. Somit hätte die kanonische KNF 2^{n-1} Klauseln. Diese lassen sich jedoch **nicht** zusammenfassen, da sich in jeder Klausel immer mindestens 2 Variablen unterscheiden (wobei X und $\neg X$ als unterschiedlich gelten) . Dies entsteht wie schon erwähnt dadurch, dass sich der Wahrheitswert ändert, sobald eine Variable ihren Wert ändert. Somit müssen sich immer mindestens 2 Variablen jeder Belegung unterscheiden damit die KNF zu true auswertet. Wollte man die Aussage beweisen, müsste man zeigen, dass sich Klauseln mit mindestens 2 unterschiedlichen Variablen nicht zusammenfassen lassen. Siehe Satz von Quine-McClusky.

Dadurch hat die minimale KNF 2^{n-1} Klauseln mit jeweils n Variablen in jeder Klausel. Das ist offensichtlich exponentiell.

(ii) Die Formel, sowie die Begründung von 3i kann übernommen wurden.

Aufgabe 4

Hinrichtung

Annahme: Es existiert eine Parkettierung über das Dominosystem $\mathcal{D}$ von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Da die unbeschränkt große Matrix nach Annahme komplett parkettiert ist, gilt dies auch für jede endliche Teilmatrix $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.

Rückrichtung

Annahme: Es existiert eine Parkettierung über das Dominosystem $\mathcal{D}$ von $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ für jedes $n \geq 1$.
Z.z, dass dadurch auch eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ existiert.

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Lässt man n nach ∞ gehen, so wird $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Da es nach Annahme für jedes $n \geq 1$ eine Parkettierung gibt, geht das Parkett auch in ein unendlich großes über.