

13. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3

Abgabe: 7.2.2013 in der Vorlesung

Für alle Aufgaben gilt: Solange in der Aufgabenstellung nichts anderes steht, erwarten wir zu jeder Antwort eine Begründung. Es genügt nicht, nur eine Formel zu schreiben ohne Begründung.

Alle Punkte dieser Übung sind Zusatzpunkte.

Hausaufgabe 1

5* Punkte

(i) Zeigen Sie, dass die folgenden Regeln des Sequenzenkalküls korrekt sind.

$$\text{a) } (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad c \text{ kommt nicht in } \Phi, \Delta, \psi(x) \text{ vor,}$$

$$\text{b) } (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} .$$

(ii) Zeigen Sie, dass man die Bedingung in der ersten Regel, dass c nicht in $\Phi, \Delta, \psi(x)$ vorkommt, nicht weglassen kann.

Hausaufgabe 2

5* Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Regeln korrekt sind.

$$(i) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta},$$

$$(ii) \frac{\Phi, \neg \forall x \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi}.$$

Hausaufgabe 3

5* Punkte

Wir betrachten die Signatur $\sigma = \{f, c\}$ mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c . Beweisen Sie mit dem Sequenzenkalkül die Sequenz

$$\{\forall x \ f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}.$$

Hausaufgabe 4

5* Punkte

Sei σ eine Signatur und

$$\Phi_{\text{erfüllbar}} := \{\varphi \in \text{FO}[\sigma] \mid \varphi \text{ ist ein Satz und es gibt eine } \sigma\text{-Struktur } \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Das σ -Erfüllbarkeitsproblem ist, für einen gegebenen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ zu entscheiden, ob $\varphi \in \Phi_{\text{erfüllbar}}$.

Zeigen Sie, dass das σ -Erfüllbarkeitsproblem entscheidbar ist für $\sigma = \emptyset$.