4.4. Semantische Folgerung und Modellklassen

Erfüllbarkeit

Analog zur Aussagenlogik können wir nun Begriffe wie Erfüllbarkeit, logische Folgerung, etc. definieren.

Definition 4.14. Sei $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formel.

1. Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt φ, wenn $\mathcal{I}$ zu φ passt und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

   Wir sagen auch: $\mathcal{I}$ ist ein Modell von φ und schreiben $\mathcal{I} \models \varphi$.

2. φ ist erfüllbar, wenn es ein Modell hat. Anderenfalls ist es unerfüllbar.

3. φ ist allgemeingültig, oder eine Tautologie, wenn alle passenden Interpretationen φ erfüllen.

Erfüllbarkeit von Mengen von Formeln

Definition 4.15. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Menge von Formeln.

1. Eine Interpretation $\mathfrak{I}$ passt zu Φ, wenn sie zu allen $\varphi \in \Phi$ passt.
2. Eine Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt Φ, wenn sie zu Φ passt und alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt.

   Wir sagen auch: $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von Φ und schreiben $\mathfrak{I} \models \Phi$.
3. Φ ist erfüllbar, wenn es ein Modell hat. Ansonsten ist es unerfüllbar.

Logische Folgerung

Definition 4.16. Sei σ eine Signatur.

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

ψ ist eine Folgerung von Φ, geschrieben $\Phi \models \psi$, wenn für jede zu Φ und ψ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi.$$

Notation. Statt $\emptyset \models \psi$ schreiben wir $\models \psi$.

Lemma 4.17.

1. Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$:

$$\Phi \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\Phi \cup \{\neg\psi\} \quad \text{ist unerfüllbar}\Big)$$

2. Für alle $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$:

$$\models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\psi \text{ ist eine Tautologie}\Big).$$

Modellklassen und Axiomensysteme

Definition 4.18. Sei σ eine Signatur und $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Menge von σ-Sätzen.

1. Die Modellklasse von Φ, geschrieben $\mathsf{Mod}(\Phi)$, ist die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$.

   Falls $\Phi := \{\varphi\}$ nur einen Satz enthält, schreiben wir kurz $\mathsf{Mod}(\varphi)$.

2. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen ist axiomatisiert durch Φ, wenn $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(\Phi)$.

   Wir nennen Φ ein Axiomensystem für $\mathcal{C}$.

3. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen ist axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(\Phi)$ für eine Menge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$.

   Wenn es eine endliche Menge Φ mit $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(\Phi)$ gibt, so heißt $\mathcal{C}$ endlich axiomatisierbar oder definierbar.

Beispiel: Gruppen

Erinnerung. Eine Gruppe ist ein Tupel $(G, \circ, e, ^{-1})$, wobei $\circ$ eine zweistellige Funktion ist, e eine Konstante, und $^{-1}$ eine einstellige Funktion, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- $\circ$ ist assoziativ, d.h. $(a \circ (b \circ c)) = ((a \circ b) \circ c)$.
- e ist das neutrale Element, d.h. $a \circ e = a$.
- $^{-1}$ ist die inverse Funktion, d.h. $a \circ a^{-1} = e$.

Die Klasse aller Gruppen ist endlich axiomatisierbar durch

$$\Phi_{Gruppe} := \left\{ \begin{array}{c} \forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big) \\ \forall x (x \circ e = x) \\ \forall x (x \circ x^{-1} = e) \end{array} \right\}$$

Gilt nun $\Phi_{Gruppe} \models \psi$, für eine Formel ψ, so gilt ψ in allen Gruppen.

Beispiel: $\Phi_{Gruppe} \models \forall x (x^{-1} \circ x = e)$ (in jeder Gruppe ist das Rechtsinverse auch das Linksinverse)

Andererseits gilt $\Phi_{Gruppe} \not\models \forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$, da nicht alle Gruppen kommutativ sind.

Theorien

Definition 4.19. Sei σ eine Signatur.

1. Eine σ-Theorie ist eine erfüllbare Menge $T \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ von Sätzen, die unter $\models$ abgeschlossen ist, d.h. wenn $T \models \psi$ für einen σ-Satz ψ gilt, dann ist $\psi \in T$.
2. Eine Theorie T ist vollständig, wenn für jeden Satz $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\psi \in T \text{ oder } \neg\psi \in T$$

Beispiel. Wir haben bereits gesehen, dass die Klasse aller Gruppen endlich axiomatisiert ist durch

$$\Phi_{Gruppe} := \left\{ \begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big) \\ \forall x (x \circ e = x), \quad \forall x (x \circ x^{-1} = e) \end{array} \right\}$$

Die Gruppentheorie ist also

$$T := \{\psi \in \mathrm{FO}[\sigma] : \psi \text{ ist ein Satz und } \Phi_{Gruppe} \models \psi\}.$$

Die Theorie ist nicht vollständig, da nicht alle Gruppen abelsch sind und somit $\varphi := \forall x \forall (x \circ y = y \circ x) \notin T$ und $\neg\varphi \notin T$.

Beispiel: Gruppen

Man beachte, dass ψ auch freie Variablen enthalten kann:

Beispiel: $\Phi_{Gruppe} \models x^{-1} \circ x = e$ (in jeder Gruppe ist das Rechtsinverse auch das Linksinverse)

Wir werden später einen Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik kennen lernen, der es erlaubt, solche Folgerungen aus einem Axiomensystem zu ziehen.

Im Prinzip könnten also alle in der Prädikatenlogik formalisierbaren Sätze der Gruppentheorie auf diese Art bewiesen werden.

Allerdings ist die Prädikatenlogik unentscheidbar und menschliche Gruppentheoretiker daher nicht überflüssig.

Weitere Beispiele

Beispiele.

1. Die Klasse aller ungerichteten Graphen ist endlich axiomatisiert durch

$$\Phi_{Graph} := \{\forall x \neg E(x,x), \quad \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(y,x))\}$$

2. Die Klasse aller linearen Ordnungen ist axiomatisiert durch die Formelmenge $\{\varphi_{ord}\}$ (siehe einige Folien vorher).

Äquivalenz und Normalformen

Äquivalenz zwischen Formeln

Definition 4.20. Sei σ eine Signatur.

Zwei σ-Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ passend zu φ und ψ:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{I} \models \psi.$$

Beobachtung. Nach Definition gilt für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$

$$\varphi \equiv \psi \quad \iff \quad \Big(\varphi \leftrightarrow \psi \text{ ist allgemeingültig}\Big)$$

Substitution

Substitution

Genauso wie bei der Aussagenlogik wollen wir einen Begriff der Substitution einführen.

Ziel. Ersetze sinnvoll Variablen durch Terme.

Beispiel. Wenn wir in der σ_{ar}-Formel

$$\exists y \; y * y = x + x$$

die Variable x durch $(1 + 1)$ ersetzen, erhalten wir

$$\exists y \; y * y = (1 + 1) \; + \; (1 + 1).$$

Substitution

Man muss aber aufpassen, welche Variablen man ersetzt und was man für sie einsetzt!

Das Umbenennen einer Variablen in einer Formel, d.h. Substitution durch eine andere Variable, soll den Sinn der Formel nicht ändern.

Das folgende Beispiel zeigt potentielle Probleme.

Beispiel. Sei $\varphi := \exists y\ y * y = x + x$.

1. Wenn wir in φ die gebundene Variable y durch x ersetzen, erhalten wir die Formel

$$\exists x\ x * x = x + x$$

   mit vollständig anderer Bedeutung.

   Wir sollten daher nur freie Variablen substituieren.

2. Wenn wir in φ die freie Variable x durch y ersetzen, erhalten wir

$$\exists y\ y * y = y + y$$

   was ebenfalls eine andere Bedeutung hat.

   Wir müssen also auf Konflikte mit gebundenen Variablen achten.

Substitution

Definition 4.21. Sei σ eine Signatur.

1. Eine σ-Substitution ist eine Abbildung $\mathcal{S} : \mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \to \mathcal{T}_\sigma$ mit endlichem Wertebereich $\mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \subseteq \textsc{Var}$.

2. Für eine Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir $\mathrm{var}(\mathcal{S})$ als die Menge der Variablen, die in einem Term im Bild der Substitution vorkommen, d.h.
$$\mathrm{var}(\mathcal{S}) := \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{S})} \mathrm{var}(\mathcal{S}(x)).$$

Substitutionen

Definition. Sei σ eine Signatur.

1. Eine σ-Substitution ist eine Abbildung $\mathcal{S} : \mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \to \mathcal{T}_\sigma$ mit endl. Wertebereich $\mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \subseteq \textsc{Var}$.

2. Für eine Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir $\mathrm{var}(\mathcal{S})$ als die Menge der Variablen, die in einem Term im Bild der Substitution vorkommen, d.h.

$$\mathrm{var}(\mathcal{S}) := \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{S})} \mathrm{var}(\mathcal{S}(x)).$$

Beispiel. Sei $\mathcal{S}$ definiert als

$$\mathcal{S} : \begin{array}{ccc} x & \mapsto & (y+y)*2+z \\ y & \mapsto & z*z+v \end{array}$$

Dann $\mathrm{var}(\mathcal{S}) := \{y, z, v\}$.

Substitution in Termen

Definition 4.22. Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution.

Induktiv über die Struktur von Termen definieren wir für jeden Term $t \in \mathcal{T}_\sigma$ den Term $t\mathcal{S}$, der durch Anwendung der von $\mathcal{S}$ auf t entsteht, als:

- Wenn $t := x$, wobei $x \in \text{VAR}$, dann
$$t\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(x) & \text{wenn } x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Wenn $t := c$, für ein Konstantensymbol $c \in \sigma$, dann $t\mathcal{S} := c$.
- Wenn $t := f(t_1, \dots, t_k)$, für ein k-stelliges Funktionssymbol $f \in \sigma$ und σ-Terme $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $t\mathcal{S} := f(t_1\mathcal{S}, \dots, t_k\mathcal{S})$.

Beispiel

Beispiel. Sei $\mathcal{S}$ definiert als

$$\mathcal{S}: \begin{array}{ccc} x & \mapsto & (y+z) \\ y & \mapsto & z+v \end{array}$$

Wenn $t := (x+y)$, dann

$$t\mathcal{S} := \big((y+z)+(z+v)\big)$$

Substitution in Formeln

Definition 4.23. Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution.

Induktiv über den Formelaufbau definieren wir für jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ die Formel $\psi\mathcal{S}$, die durch Anwenden von $\mathcal{S}$ auf φ entsteht, als:

- Wenn $\varphi := R(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$ ein k-stellige Relationssymbol ist und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $\varphi\mathcal{S} := R(t_1\mathcal{S}, \ldots, t_k\mathcal{S})$.
- Wenn $\varphi := t_1 = t_2$, für σ-Terme t_1, t_2, dann $\varphi\mathcal{S} := t_1\mathcal{S} = t_2\mathcal{S}$.
- Wenn $\varphi := \neg\psi$, für $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $\varphi\mathcal{S} := \neg\, \psi\mathcal{S}$.
- Wenn $\varphi := (\psi_1 * \psi_2)$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ dann $\varphi\mathcal{S} := (\psi_1\mathcal{S} * \psi_2\mathcal{S})$.

(Forts.)

Substitution in Formeln

- Wenn $\varphi := \exists x\psi$, für eine Variable x und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, dann
  - wenn $x \notin \text{var}(\mathcal{S})$ dann $\varphi\mathcal{S} := \exists x\psi\mathcal{S}'$, wobei $\mathcal{S}' := \mathcal{S}_{|\text{Dom}(\mathcal{S})\setminus\{x\}}$.

    Wenn x nicht in den Variablen von $\mathcal{S}$ vorkommt, ist die Substitution sicher und wir substituieren in ψ.

  - wenn $x \in \text{var}(\mathcal{S})$ dann sei y die erste Variable in $\text{VAR} := \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ die nicht in $\mathit{frei}(\varphi) \cup \text{var}(\mathcal{S})$ vorkommt und definiere $\mathcal{S}' := \mathcal{S}_{\text{Dom}(\mathcal{S})\setminus\{x\}} \cup \{x \mapsto y\}$. Wir definieren $\varphi\mathcal{S} := \exists y\psi\mathcal{S}'$.

    Wenn x in den Variablen von $\mathcal{S}$ vorkommt, können wir nicht einfach substituieren. Wir müssen zunächst x in y umbenennen, wobei y beliebig gewählt werden kann, solange $y \notin \mathit{frei}(\varphi) \cup \text{var}(\mathcal{S})$.
    Hier verwenden wir die erste unbenutzte Variable.
- Der Fall $\varphi := \forall x\psi$ ist analog.

Beispiel

Beispiel. Sei $\mathcal{S}$ wie folgt definiert

$$\mathcal{S} : \begin{array}{ccc} x & \mapsto & (y+z) \\ y & \mapsto & z+v \end{array}$$

Dann gilt $\mathrm{var}(\mathcal{S}) := \{y, z, v\}$.

Betrachte die Formel $\varphi := \exists a \forall z (x + y + z = a + x)$.

Dann

$$\begin{aligned} \varphi\mathcal{S} &:= \exists a (\forall z (x + y + z = a + x)\mathcal{S} \\ &= \exists a\, \forall v_0 (x + y + v_0 = a + x)\mathcal{S} \\ &= \exists a\, \forall v_0\ (x + y + v_0)\mathcal{S} = (a + x)\mathcal{S} \\ &= \exists a\, \forall v_0\ \big((x + z) + (z + v) + v_0 = (a + (y + z))\big) \end{aligned}$$

Notation

- Analog zur aussagenlog. Substitution schreiben wir für eine Substitution $\mathcal{S}$ mit $\mathrm{Dom}(\mathcal{S}) := \{x_1, \dots, x_n\}$ und $\mathcal{S}(x_i) := t_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n].$$

  Insbesondere schreiben wir $\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ statt $\varphi\mathcal{S}$.

- Wenn $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ eine Formel und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$ Terme sind, schreiben wir

$$\varphi(t_1, \dots, t_k) \qquad \text{statt } \varphi[x_1/t_1, \dots, x_k/t_k].$$

  Vergleiche mit Methoden in Java.

  `Boolean phi(int` x_1`, ..., int` x_k`)`

  Indem wir $x_1, \dots, x_k$ spezifizieren, fixieren wir eine Ordnung der Parameter.

  Wir schreiben `Boolean b = phi(3, 5, ..., 17);`

Das Substitutionslemma

Lemma 4.24. Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution. Für alle σ-Formeln φ, ψ:

$$\varphi \equiv \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \psi\mathcal{S}$$

Beweis des Substitutionslemmas

Der Beweis geht analog zum aussagenlogischen Fall.

Definition 4.25. Für jede σ-Substitution $\mathcal{S}$ und σ-Interpretation $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathrm{var}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Dom}(\beta)$ sei

$$\mathcal{I}\mathcal{S} := (\mathcal{A}, \beta')$$

wobei $\beta' : \mathrm{Dom}(\beta) \cup \mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \to A$ definiert ist als

$$\beta'(x) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(x)]\!]^{\mathcal{I}} & \text{wenn } x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \\ \beta(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemma 4.26. Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{var}(S) \subseteq \mathrm{Dom}(\beta)$.

Für alle σ-Formeln φ mit *frei*$(\varphi) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{S}) \cup \mathrm{Dom}(\beta)$:

$$\mathcal{I} \models \varphi\mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}\mathcal{S} \models \varphi.$$

Das Ersetzungslemma

Analog zur Aussagenlogik gibt es auch ein entsprechendes Ersetzungslemma.

Lemma 4.27. Sei τ eine Signatur und seien $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathrm{FO}[\tau]$.

Sei ϑ eine Teilformel von ψ und $\vartheta \equiv \varphi$. Ferner, sei ψ' die Formel, die aus ψ entsteht, indem ϑ durch φ ersetzt wird.

Dann gilt $\psi \equiv \psi'$.

Beispiel.

$\varphi := \neg\forall x\big(P(x) \vee (P(x) \wedge Q(x))\big)$ ist äquivalent zu $\exists x \neg P(x)$.

Also ist $\forall y P(x) \vee \neg\forall x(P(x) \vee (P(x) \wedge Q(x)))$ äquivalent zu $\forall y P(x) \vee \exists x \neg P(x)$.

Äquivalenz von Formeln

Nützliche Äquivalenzen

Lemma 4.28. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x \in \textsc{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
2. Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ dann

$$\begin{aligned} \varphi \vee \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi), & \varphi \wedge \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \wedge \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi), & \varphi \vee \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

Die Äquivalenzen in Teil 2 folgen aus dem Koinzidenzlemma.

Lemma 4.29. Sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formel und $x, y \in \textsc{Var}$ Variablen, so dass y nicht in φ vorkommt. Dann

$$\exists x \varphi \equiv \exists y \varphi[x/y], \qquad \forall x \varphi \equiv \forall y \varphi[x/y]$$

Beispiel

Mit den Äquivalenzen der vorherigen Folien und den schon aus der Aussagenlogik bekannten Äquivalenzen, können wir folgendes beweisen.

1.

$$\begin{aligned}
& \neg\exists x\big(x = y \vee \forall y E(x,y)\big) \\
\equiv\quad & \forall x \neg\big(x = y \vee \forall y E(x,y)\big) \\
\equiv\quad & \forall x\big(\neg x = y \wedge \neg\forall y E(x,y)\big) \\
\equiv\quad & \forall x\big(\neg x = y \wedge \exists y \neg E(x,y)\big)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \big(\exists x E(x,y)\big) \vee \big(\forall z E(y,z)\big) \\
\equiv\quad & \forall z\big(\exists x E(x,y)\big) \vee \big(E(y,z)\big) \\
\equiv\quad & \forall z \exists x\big(E(x,y) \vee E(y,z)\big)
\end{aligned}$$

Beweis der Äquivalenz

Beweis siehe Vorlesungsmitschrift.

Normalformen

Normalformen

Ähnlich wie bei der Aussagenlogik werden wir als nächstes einige syntaktische Normalformen für die Prädikatenlogik einführen, die uns das Arbeiten mit Formeln in bestimmten Situationen erleichtern.

Genauer werden wir folgende Normalformen vorstellen:

- Reduzierte Formeln
- Negationsnormalform
- Pränexnormalform

Reduzierte Formeln

Wir haben bereits gesehen, dass folgende Äquivalenzen gelten:

1. $(\psi \wedge \varphi) \quad \equiv \quad \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
2. $(\psi \leftrightarrow \varphi) \quad \equiv \quad (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
3. $(\psi \rightarrow \varphi) \quad \equiv \quad (\neg\psi \vee \varphi)$
4. $\forall x\psi \quad \equiv \neg\exists\neg\psi$

Mit Hilfe dieser Äquivalenzen können wir also jede Formel der Prädikatenlogik in eine äquivalente Formel umwandeln, in denen die Symbole $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\wedge$ nicht vorkommen.

Wir nennen solche Formeln reduzierte Formeln.

Die Negationsnormalform

Definition 4.30. Eine prädikatenlogische Formel ist in Negationsnormalform, wenn sie die Verknüpfungen $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor atomaren Formeln vorkommt.

Theorem 4.31. Jede Formel der Prädikatenlogik ist logisch äquivalent zu einer Formel in Negationsnormalform.

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Verknüpfungen $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ eliminiert werden können.

Durch wiederholte Anwendung der De Morganschen Regeln

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \quad \equiv \quad (\neg\psi \vee \neg\varphi) \quad \text{und} \quad \neg(\psi \vee \varphi) \quad \equiv \quad (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$$

sowie der Äquivalenzen

$$\neg\exists x\psi \quad \equiv \quad \forall x\neg\psi \quad \text{und} \quad \neg\forall x\psi \quad \equiv \quad \exists x\neg\psi$$

und $\neg\neg\psi \equiv \psi$ kann jede Formel in eine äquivalente Formel in NNF umgewandelt werden. $\square$

Die Pränexnormalform

Als letzte Normalform stellen wir die Pränexnormalform vor. Ziel dieser Normalform ist es, die Formel so umzuschreiben, dass alle Quantoren vorne stehen.

Beispiel. $\exists u \forall x \exists y \exists z \big(R(u,u) \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,y) \wedge R(y,z) \big)$

Definition 4.32. Eine Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommt und
- keine Variable zweimal quantifiziert wird.

Definition 4.33. Eine Formel ψ ist in Pränexnormalform (PNF), wenn sie bereinigt ist und die Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_l x_l \psi(x_1, \dots, x_l)$$

hat, wobei ψ quantorenfrei und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ist.

$Q_1, \dots, Q_l$ heißt der (Quantoren-)Präfix von ψ.

Die Pränexnormalform

Theorem 4.34. Jede Formel der Prädikatenlogik kann effektiv in eine äquivalente Formel in Pränexnormalform übersetzt werden.

4.6. Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt werden wir eine einfache Methode kennen lernen, um zu Überprüfen, ob bestimmte Eigenschaften von Strukturen in der Prädikatenlogik definierbar sind.

Beispiel. Wir betrachten eine Datenbank mit Fluginformationen.

Tabelle: Flug(Fluggesellschaft, Flugnummer, Zeit, Start, Ziel)

Wir möchten nun wissen, ob eine Möglichkeit gibt, von s nach t zu fliegen (eventuell mit Zwischenstopps).

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Wir vereinfachen das Beispiel ein wenig.

Vereinfachtes Beispiel. Tabelle: Flug(Start, Ziel)

Wir möchten nun wissen, ob eine Möglichkeit gibt, von s nach t zu fliegen (eventuell mit Zwischenstopps).

Abfragen in der Prädikatenlogik. Signatur $\sigma := \{Flug, s, t\}$

s, t Konstantensymbole und Flug 2-stelliges Relationssymbol

Direktflug: $\varphi_0 := Flug(s, t)$

Ein Stopp : $\varphi_1 := \exists x\Big(Flug(s, x) \wedge Flug(x, t)\Big)$

Zwei Stopps : $\varphi_2 := \exists x_1 \exists x_2\Big(Flug(s, x_1) \wedge Flug(x_1, x_2) \wedge Flug(x_2, t)\Big)$

Für jede feste Zahl von Stopps existiert eine Formel.

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Aber gibt es eine Formel φ die genau dann in einer solchen Struktur gilt, wenn es eine Möglichkeit gibt, von s nach t zu fliegen, egal wieviele Stopps eingelegt werden müssen?

Angenommen, wir wollen zeigen, dass es keine solche gibt?

Wie kann man eine solche Aussage zeigen?

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Behauptung: Es gibt keinen Satz der Prädikatenlogik, der Erreichbarkeit in diesem Sinne definiert.

Um das zu zeigen, müssen wir für jeden Satz der Prädikatenlogik zeigen, dass er Erreichbarkeit nicht definiert!

Dazu müssen wir für jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ zeigen, dass es zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gibt, so dass

1. es in $\mathcal{A}$ einen Weg von s nach t gibt, in $\mathcal{B}$ aber nicht und
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Wir werden als nächstes ein Verfahren kennen lernen, dass uns diese Arbeit stark vereinfacht.

Zunächst aber einige Vorbereitungen.

Elementare Äquivalenz

Elementare Äquivalenz

Definition 4.35. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind elementar äquivalent, geschrieben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Wenn zwei Strukturen elementar äquivalent sind, erfüllen sie also dieselben Sätze der Prädikatenlogik.

Wenn wir also zeigen wollen, dass Erreichbarkeit nicht in der Prädikatenlogik definierbar ist, würde es reichen, zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zu finden, so dass

- es in $\mathcal{A}$ einen Weg von s nach t gibt, in $\mathcal{B}$ aber nicht und
- $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

Solche Strukturen kann es aber nicht geben.

Wir werden daher die elementare Äquivalenz noch verfeinern.

Der Quantorenrang einer Formel

Definition 4.36. Der Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel $\psi \in \mathrm{FO}$ ist induktiv definiert durch:

- $\mathrm{qr}(\psi) := 0$ für quantorenfreie Formeln ψ
- $\mathrm{qr}(\neg\psi) := \mathrm{qr}(\psi)$
- $\mathrm{qr}((\varphi * \psi)) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\mathrm{qr}(\exists x \varphi) = \mathrm{qr}(\forall x \varphi) = 1 + \mathrm{qr}(\varphi)$

Der Quantorenrang einer Formel ist also die maximale Schachtelungstiefe der Quantoren in der Formel.

Beispiel.

- $\mathrm{qr}\Big(\exists x \forall y (x = y \vee R(x, y, z))\Big) = 2$
- $\mathrm{qr}\Big(\exists x (T(x) \vee \forall y\, R(x, y, z))\Big) = 2$
- $\mathrm{qr}\Big(\exists x\, T(x) \vee \forall y (R(y, y, z) \rightarrow y = z)\Big) = 1$

m-Äquivalenz

Definition 4.37. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *m-äquivalent*, geschrieben $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Wenn zwei Strukturen elementar äquivalent sind, erfüllen sie also dieselben Sätze der Prädikatenlogik bis zum Quantorenrang m.

m-Äquivalenz erlaubt eine feinere Unterscheidung zwischen Strukturen.

Offenbar sind Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ die elementar äquivalent sind auch m-äquivalent für alle m.

m-Äquivalenz

Wir erweitern die Begriffe der Äquivalenz und m-Äquivalenz noch auf Strukturen mit ausgezeichneten Elementen.

Definition 4.38. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ k-Tupel von Elementen.

1. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind m-äquivalent, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leqslant m$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
2. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind elementar äquivalent, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$

m-Äquivalenz

Erinnerung: Sei $m \in \mathbb{N}$. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind m-äquivalent, geschrieben $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik. m-Äquivalenz eignet sich besser als elementare Äquivalenz zum Beweis der Nicht-Definierbarkeit bestimmter Aussagen.

Wenn wir zeigen wollen, dass Erreichbarkeit nicht in der Prädikatenlogik definierbar ist, reicht, für alle m zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$ zu finden, so dass

- es in $\mathcal{A}_m$ einen Weg von s nach t gibt, in $\mathcal{B}_m$ aber nicht und
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Allgemeiner können wir folgendes zeigen:

Lemma 4.39. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

Falls es für alle $m \geqslant 1$ zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$ zu finden, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ definiert, d.h. so dass $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\varphi)$. Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Dann ist aber $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{A}_m \models \varphi$.

Da aber $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$ gilt auch $\mathcal{B}_m \models \varphi$, im Widerspruch zu $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$. $\square$

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Partielle Isomorphismen

Wir werden jetzt eine spieltheoretische Methode kennen lernen, um elementare oder m-Äquivalenz zwischen Strukturen testen zu können. Dazu benötigen wir zunächst ein wenig Notation.

Vereinbarung. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir in diesem Abschnitt nur relationale Signaturen σ, d.h. Signaturen, in denen nur Relationssymbole vorkommen.

Definition 4.40. Sei σ eine (relationale) Signatur. Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, wobei $A' \subseteq A$, so dass für alle

- $k \geqslant 0$ und alle
- k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle
- $a_1, \ldots, a_k \in A'$

gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$$

Partielle Isomorphismen

Definition 4.41. Sei σ eine (relationale) Signatur. Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, wobei $A' \subseteq A$, so dass für alle

- $k \geqslant 0$ und alle
- k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle
- $a_1, \ldots, a_k \in A'$

gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$$

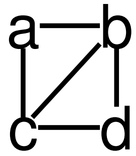
Beobachtungen.

- Achtung: ein partieller Isomorphismus sagt nur was über Teile der Strukturen aus, abers nichts über die Strukturen insgesamt!
- Die leere Abbildung, d.h. die Abbildung mit Definitionsbereich $\emptyset$ ist ein partieller Isomorphismus.
- Ein nicht-leerer partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $A' \subseteq A$ und Bildbereich $B' \subseteq B$ ist ein Isomorphismus zwischen den von A und B induzierten Substrukturen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Beispiele

Beispiel. Sei $\sigma := \{E\}$ und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie folgt gegeben:

$\mathcal{A}$: 1—2—3—4—5 und $\mathcal{B}$:



Dann ist $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto d$ ein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Dann ist $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto c$ ist jedoch kein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Partielle Isomorphismen

Proposition 4.42. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B^k$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung $h : \{a_1, \ldots, a_k\} \to \{b_1, \ldots, b_k\}$ definiert durch $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$ ist ein partieller Isomorphismus.
2. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\mathit{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\mathit{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$

Die Existenz eines partiellen Isomorphismus' beschreibt also $\equiv_0$ zwischen zwei Strukturen, sagt aber nichts über $\equiv_m$ mit $m > 0$ aus.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Sei σ eine Signatur und seien $m, k \in \mathbb{N}$. Seien ferner $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B^k$.

Spieler und deren Ziele. Das m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ wird von zwei Spielern, dem Herausforderer und der Duplikatorin, gespielt.

Herausforderers Ziel: Zeige, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}) \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$

Duplikatorins Ziel: Zeige, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$

Notation. Ist $k = 0$ so schreiben wir kurz $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Sei σ eine Signatur und seien $m, k \in \mathbb{N}$. Seien ferner $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B^k$.

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, ..., m$:

- Zunächst wählt der Herausforderer entweder ein Element $a_i' \in A$ oder $b_i' \in B$.
- Danach antwortet die Duplizierererin. Hat der Herausforder ein $a_i' \in A$ gewählt, wählt nun die Duplizierererin ein $b_i' \in B$. Anderenfalls wählt sie $a_i' \in A$.

Nach Runde m wird der Gewinner ermittelt:

Die Duplizierererin hat gewonnen, wenn die Abbildung

$$h : a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_k \mapsto b_k, a_1' \mapsto b_1', \ldots, a_m' \mapsto b_m'$$

ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Sei σ eine Signatur und seien $m, k \in \mathbb{N}$. Seien ferner $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B^k$.

Gewinnstrategien. Eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ ist eine Funktion, die ihm in jeder erreichbaren Spielposition einen möglichen Zug angibt, mit dem er die Partie gewinnt, egal wie die Duplikatorin spielt.

Analog sind Gewinnstrategien für die Duplikatorin definiert.

Wir sagen: Der Herausforderer gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ (anstatt einer einzelnen Partie), wenn er eine Gewinnstrategie für das Spiel hat.

Ansonsten gewinnt die Duplikatorin.

Beispiel

Beispiel Sei $\sigma := \{<\}$, mit $<$ einem 2-stelligem Relationssymbol. Sei $m > 0$.

Seien $\mathcal{A} := (A, <^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, <^{\mathcal{B}})$ zwei endliche lineare Ordnungen.

Wenn $|A| = |B|$ oder aber $|A|, |B| > 2^m$, so gewinnt die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Eine wichtige Variante des m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiels ist das Spiel $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ mit unbeschränkter Zugzahl.

Hier wählt der Herausforderer zunächst eine Zahl $m \geqslant 0$ und dann wird das m-Runden Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ gespielt.

Theorem 4.43. (Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}$. Seien ferner $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$
2. Für alle $m \geqslant 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

m-Isomorphietypen

Als Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Ehrenfeucht verwenden wir folgende induktive definierte Formeln $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$:

m-Isomorphietypen oder Hintikka-Formeln.
Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}$. Sei ferner $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ und $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \right\}$$

und für $m \geqslant 0$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a}((\overline{x}, x_{k+1}) \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})$$

Anwendung

Definition 4.44. Sei σ eine relationale Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

Eine Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es einen Satz $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}$$

Korollar 4.45. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent:

1. $\mathcal{C}$ ist nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.
2. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}$ mit $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$.
3. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}$, so dass die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$ gewinnt.

Anwendung

Theorem. 4.46. Sei $\sigma := \{<\}$ und $\mathcal{K}$ die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen. Die Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ der endlichen linearen Ordnungen gerader Länge ist in $\mathcal{K}$ nicht FO-definierbar.

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass wenn $\mathcal{A} := (A, <^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} := (B, <^{\mathcal{B}})$ zwei endliche lineare Ordnungen sind, so gewinnt die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ genau dann, wenn $|A| = |B|$ oder aber $|A|, |B| > 2^m$.

Wir brauchen also für $m \geqslant 0$ nur $\mathcal{A}_m$ als lineare Ordnung der Länge 2^{m+1} und $\mathcal{B}_m$ als lineare Ordnung der Länge $2^{m+1} + 1$ zu wählen.

Dann gilt $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$ aber $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}$. $\square$

Erreichbarkeit

Betrachten wir noch einmal das Beispiel vom Anfang des Abschnitts.

Sei $\sigma := \{E, S, T\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist und S, T einstellige Relationssymbole sind.

Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller σ-Strukturen, in denen S, T durch Relationen interpretiert werden, die nur ein einziges Element enthalten.

Sei $\mathit{Reach} \subseteq \mathcal{K}$ die Klasse aller σ-Strukturen, in denen es einen Pfad vom Element in S zum Element in T gibt.

Behauptung. *Reach* ist nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.