

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
 Maximilian Bachl - 341455
 Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}\varphi_1 = & \quad \forall x \neg E(x, x) \wedge \\ & \quad \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow E(x, y) \vee E(y, x)) \wedge \\ & \quad \forall x \forall y \forall z (E(x, y) \wedge E(y, z) \Rightarrow E(x, z))\end{aligned}$$

(ii) Widerspruchsannahme:

Es existiert ein φ_2 mit Quantorenrang m , sodass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$

$\mathcal{A} \models \varphi_2$ genau dann, wenn $|A|$ ungerade ist.

gilt.

Nehmen wir nun die lineare endliche Ordnung $\mathcal{B}_1 = (B_1, E^{\mathcal{B}_1})$ mit $|B_1| = 2^{m+1} > 2^m$ und $\mathcal{B}_2 = (B_2, E^{\mathcal{B}_2})$ mit $|B_2| = 2^m + 1 > 2^m$. Es gilt nach dem Satz der Vorlesung, dass die Duplikatorin das EF-Spiel gewinnen würde, woraus folgt, dass φ_2 die beiden Ordnungen nicht unterscheiden könnte. Da aber $|B_1|$ gerade ist und $|B_2|$ ungerade, ist das ein Widerspruch zur Annahme, woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss. Somit kann kein solcher $FO[\sigma]$ -Satz φ_2 existieren.

(iii) Die Formel lautet folgendermaßen:

$$\varphi_3(x, y) = \exists z ((x \neq z \wedge y \neq z) \wedge (E(x, z) \wedge E(z, y)) \wedge \forall a (E(a, x) \vee k = z \vee k = x \vee k = y \vee E(y, k) \vee \quad (1)$$

$$\exists z ((y \neq z \wedge x \neq z) \wedge (E(y, z) \wedge E(z, x)) \wedge \forall a (E(a, y) \vee k = z \vee k = y \vee k = x \vee E(x, k) \vee \quad (2)$$

$$\exists z ((x \neq z) \wedge E(z, x) \wedge \forall a (a = a \vee E(x, a) \vee a = z) \wedge \forall a (y = a \vee E(a, y))) \vee \quad (3)$$

$$\exists z ((x \neq z) \wedge E(z, y) \wedge \forall a (a = a \vee E(y, a) \vee a = z) \wedge \forall a (x = a \vee E(a, x))) \quad (4)$$

(1) sagt aus, dass es ein z gibt, dass genau zwischen x und y liegt.

(2) ist analog zu (1), nur dass x und y getauscht wurden.

(3) sagt aus, dass es ein z gibt, dass das kleinste Element ist, x ist das zwei kleinste und y das grösste.

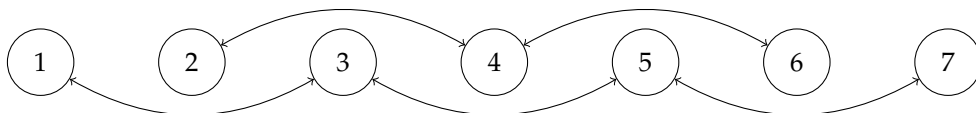
(4) ist analog zu (2) nur, dass x und y getauscht wurden.

Wir erklären die Formel an einem Beispiel. Sei $\mathcal{A} = (\{1, \dots, 7\}, <)$ die Struktur auf der die φ_3 benutzt wird.

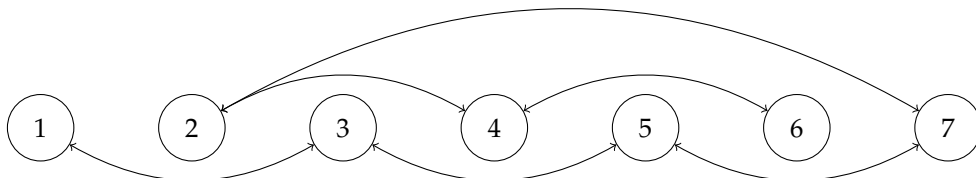
1. Initialzustand, die Menge der Kanten ist leer:



2. (1) und (2) wird angewendet, dadurch bilden jeweils die geraden, wie die ungeraden einen ungerichteten Pfad.



3. (3) und (4) wird angewendet, dadurch wird der letzte Knoten mit dem zwei kleinsten (ungerichtet) verbunden wird:



Es ist klar, dass dies bei ungeraden Graphen immer funktioniert, durch den letzten Schritt entsteht eine Verbindung von den ungeraden zu den geraden Knoten. Da ein ungerader immer einen ungeraden Knoten am Ende hat funktioniert das immer. Analog ist klar warum dies nicht bei geraden Graphen funktioniert: man würde nur einen Kreis bei den geraden Knoten erzeugen, jedoch nie eine Verbindung zu den ungeraden.

(iv) Widerspruchsannahme: Es existiert ein solcher $FO[\sigma]$ -Satz φ_4 .

Nach der Teilaufgabe (iii) existiert eine Formel φ_3 , sodass für jeden endlichen Graph $G = (A, E)$ gilt:

Der Graph $(A, \varphi_3(\mathcal{A}))$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $|A|$ ungerade ist.

Nun gilt nach φ_4 auch:

$$\begin{aligned} G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.} \\ \equiv G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \not\models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ gerade ist.} \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Teilaufgabe (ii), woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss, sodass es keinen solchen $FO[\sigma]$ -Satz φ_4 geben kann.

Aufgabe 2

Der gesuchte partielle Isomorphismus hat nach Definition folgende Abbildungsvorschrift:

$$\begin{aligned} a_1 = 1 & \mapsto b_1 = 1 \\ a_2 = 2 & \mapsto b_2 = 2 \\ a_3 & \mapsto b_3 = x \\ a_4 & \mapsto b_4 = 1 + x \\ a_5 & \mapsto b_5 \end{aligned}$$

Es gilt $(b_1 = 1, b_3 = x, b_4 = 1 + x) \in P^B$.

Es muss also auch gelten $(a_1 = 1, a_3, a_4) \in P^A$. Daraus folgt, dass entweder a_3 oder a_4 ungerade sind, sonst hätte die Duplikatorin schon vor dem 3. Zug verloren.

Fallunterscheidung:

(a) a_3 ist die gerade Zahl.

Wir wählen als Herausforderer im 3. Zug $a_5 = \frac{a_3}{2}$. Nun gilt offensichtlich $(a_2 = 2, a_5 = \frac{a_3}{2}, a_3) \in M^A$.

$(b_2 = 2, b_5, b_3 = x) \in M^B$ gilt aber keinesfalls, da es trivialerweise kein Element in B gibt, die mit 2 multipliziert x ergibt.

(b) a_4 ist die gerade Zahl.

Wir wählen als Herausforderer im 3. Zug $a_5 = \frac{a_4}{2}$. Nun gilt offensichtlich $(a_2 = 2, a_5 = \frac{a_4}{2}, a_4) \in M^A$.

$(b_2 = 2, b_5, b_4 = x) \in M^B$ gilt aber keinesfalls, da es trivialerweise kein Element in B gibt, die mit 2 multipliziert $x + 1$ ergibt.

Aufgabe 3

(i) Der Herausforderer spielt in der Struktur \mathcal{B} und wählt ∞ . Gibt die Duplikatorin das Element a als Antwort, dann gilt, dass ein Element i in \mathcal{A} existiert, sodass $a < i$. Daraus folgt aber, dass es ebenfalls ein P_i^A gibt, sodass $a \notin P_i^A$, was jedoch ein Widerspruch ist, da ∞ in allen einstellig Relationen aus \mathcal{B} vorkommt.

(ii) Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ beliebig.

Für jedes $P_i(x)$ mit $x \in \mathbb{N}$ gilt (*):

$i > 0$:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_i(x) = 1$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x , sodass $x > i$ und damit $P_i(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_i(x) = 0$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x , sodass $x < i$ und damit $P_i(x) = 0$.

$i = 0$:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert eine Zahl x , sodass $x > 0$ und damit $P_0(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert keine Zahl x , sodass $x < 0$ und damit $P_0(x) = 1$.

Die Aussagen (*) gelten in beiden Strukturen, woraus folgt, dass alle Relationen gleich auswerten und somit auch der Satz φ in beiden Strukturen immer gleich ausgewertet. Da keine Einschränkung bei φ getroffen wurde, folgt, dass es keinen $FO[\sigma]$ -Satz gibt, der beide Strukturen unterscheidet, sodass sie elementar äquivalent sind.

(iii) Der Widerspruch rührt daher, dass der Satz von Ehrenfeucht nur für endliche relationale Signaturen und Strukturen gilt.

Mit einer endlichen Menge an Relationssymbolen tritt der oben aufgezeigte Widerspruch nicht auf:

Annahme: Es gibt nicht unendlich viele P_i , sondern $i \leq n$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

Wählt nun der Herausforderer ∞ , so wählt die Duplikatorin eine Zahl j mit $j > m + n$, wobei n die gleiche Zahl wie in der obigen Zeile ist. Der Rest des Spiels ist trivial.

Somit sind die beiden Strukturen nun elementar äquivalent und die Duplikatorin gewinnt das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel.