FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2012/2013
Stand: 20.12.2012

9. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3

Abgabe: 10.1.2012 in der Vorlesung

Für alle Aufgaben gilt: Solange in der Aufgabenstellung nichts anderes steht, erwarten wir zu jeder Antwort eine Begründung. Es genügt nicht, nur eine Formel zu schreiben ohne Begründung.

Hausaufgabe 1

4 Punkte

Seien E, R 2-stellige Relationssymbole und f ein 2-stelliges Funktionssymbol. Formen Sie folgende Formeln in Negations- und Pränexnormalform um:

(i) $\varphi_1 := \neg\big(\exists x \exists y E(x,y) \wedge \neg\exists x \forall y \exists z(\neg E(x,z) \vee f(x,y) = z)\big) \rightarrow \exists x E(x, f(y,x))$.

(ii) $\varphi_2 := \exists y \forall z \big(E(x,z) \wedge (E(y,z) \rightarrow \forall x(E(f(x,y),z) \wedge \neg\forall y R(x,y)))\big)$.

Hausaufgabe 2

6 Punkte

Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation und sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ die Struktur der reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Geben Sie für $i \in \{1, \dots, 6\}$ Formeln φ_i an, sodass gilt:

(i) $\varphi_1(\mathcal{N})$ ist die Menge der geraden Zahlen.

(ii) $\varphi_2(\mathcal{N})$ ist die Menge der 2er-Potenzen.

(iii) $\varphi_3(\mathcal{R})$ ist die Menge der Paare $(x, \sqrt{x})$ und $(x, -\sqrt{x})$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$.

(iv) $\varphi_4(\mathcal{R})$ ist die Menge der Paare $(x, -x)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(v) $\varphi_5(\mathcal{R})$ ist die Menge der Paare (x, y) mit $x < y$.

(vi) $\varphi_6(\mathcal{R})$ ist die Menge der 6-Tupel (u, v, u', v', u'', v''), sodass $u'' + v''i = (u + vi) \cdot (u' + v'i)$, wobei i die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen ist, d.h. es gilt $i \cdot i = -1$.

Sie müssen Ihre Formeln in dieser Aufgabe nicht begründen.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}(\sigma)$. Für eine Relation $R \subseteq A^k$ und eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ schreiben wir $f(R)$ für die Relation $\{(f(r_1), \dots f(r_k)) : (r_1, \dots, r_k) \in R\}$.

(i) Sei $\pi : A \rightarrow B$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass $\pi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{B})$.

(ii) Sei $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ die Struktur der ganzen Zahlen mit der üblichen 2-stelligen Ordnungsrelation. Zeigen Sie, dass es keine Formel φ gibt, sodass $\varphi(\mathcal{Z}) = \{0\}$ ist.

Hausaufgabe 4

5 Punkte

Sei σ eine endliche Signatur, die nur Relationssymbole enthält und sei $q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es bis auf logische Äquivalenz nur endlich viele Formeln der Prädikatenlogik ohne freie Variablen gibt, die maximal q Quantoren enthalten.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass es über einer festen Variablenmenge bis auf logische Äquivalenz nur endlich viele unterschiedliche aussagenlogische Formeln gibt.