

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 8

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

- (i)
- Gilt für alle Graphen mit einem Zyklus ungerader Länge wobei die Länge 5 nicht überschreiten darf. $A_1 \models \varphi_1, A_2 \not\models \varphi_1, A_3 \models \varphi_1$
 - Gilt für alle Graphen bei dem jeder Knoten zwei Kanten hat und ein dritter Knoten existiert, der keine Kante zu diesem Knoten hat. $A_1 \models \varphi_2, A_2 \models \varphi_2, A_3 \not\models \varphi_2$
 - Gilt für alle Graphen, bei denen alle unterschiedlichen Knoten mit allen unterschiedlichen Knoten verbunden sind. $A_1 \models \varphi_3, A_2 \not\models \varphi_3, A_3 \not\models \varphi_3$

(ii)

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \forall y(x \cdot y = x) \\ \psi_1(x) &= \forall y(x \cdot y = y) \\ \psi_i(x) &= \exists y(\psi_1(y) \wedge \exists z(\psi_0(z) \wedge y + (x \cdot x) = z)) \\ \psi_{\text{inverse mult.}} &= \exists z((\psi_1(z) \wedge \forall x \exists y(x \cdot y = z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \neg(\psi_{\text{inverse mult.}}) \\ \phi_2 &= \psi_{\text{inverse mult.}} \wedge \neg(\exists x \psi_i(x)) \\ \phi_3 &= \exists x \psi_i(x)\end{aligned}$$

$\psi_0(x)$ beschreibt eine 0. Also das übergebene x hat die Eigenschaften der 0 bzw. bei diesen Mengen erfüllt nur die 0 diese Eigenschaften. Analog mit $\psi_1(x)$ für 1 und $\psi_i(x)$ für i . $\psi_{\text{inverse mult.}}$ gilt wenn jedes Element bezüglich der Multiplikation ein inverses Element besitzt (Wenn 1 das neutrale Element ist). Die natürlichen Zahlen besitzen diese Eigenschaft nicht, weshalb ϕ_1 nur von diesen erfüllt wird (\mathbb{Z} würde auch ϕ_1 erfüllen.) Die rationalen Zahlen besitzen zwar für jedes Element ein inverses bzgl. der Multiplikation, aber kein Element mit den Eigenschaften von i . Die komplexen Zahlen besitzen ein Element mit den Eigenschaften von i .

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}\text{var}(\phi) &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ \beta(x_i) &= \begin{cases} \top, & x_i = 1 \\ \perp, & x_i = 0 \end{cases} \\ \varphi_e &= \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \neg Z^A(\llbracket \phi \rrbracket^\beta) \\ \varphi_t &= \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \neg Z^A(\llbracket \phi \rrbracket^\beta)\end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k (\forall y (\bigvee_{1 \leq i \leq k} x_i = y \vee E(y, x_i)))$$

Aufgabe 4

Wir übersetzen die Formel ϕ folgendermaßen induktiv in die Formel ψ_n :

$c : FO[\sigma] \rightarrow AL$

- Basisfall:

Fall 1: $c(\phi) = c(E(x, y)) = Z_{x,y}$

Fall 2: $c(\phi) = c(\forall x E(x, y)) = \bigwedge_{i=0}^n Z_{x_i, y}$

Fall 3: $c(\phi) = c(\forall y E(x, y)) = \bigwedge_{i=0}^n Z_{x, y_i}$

Fall 4: $c(\phi) = c(\exists y E(x, y)) = \bigvee_{i=0}^n Z_{x, y_i}$

- Induktionsschritt:

Fall 1: $c(\phi) = c(\neg \phi_1) = \neg(c(\phi_1))$

Fall 2: $c(\phi) = c(\phi_1 * \phi_2) = (c(\phi_1) * c(\phi_2))$

Fall 3: $c(\phi) = c(\forall x (\phi_1 * \phi_2)) = \bigwedge_{i=1}^n (c(\phi_1(x_i)) * c(\phi_2(x_i)))$

Fall 4: $c(\phi) = c(\exists x (\phi_1 * \phi_2)) = \bigvee_{i=1}^n (c(\phi_1(x_i)) * c(\phi_2(x_i)))$

$(* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow\})$

Die Belegung β ist nun definiert als auf allen Variablen Z_{x_i, y_i} mit $1 \leq i \leq n$: $\beta(Z_{x_i, y_i}) = \top \Leftrightarrow E(x_i, y_i)$

Aufgrund der Definition von c gilt, dass ϕ genau dann wahr wird, wenn ψ_n wahr wird. Daraus folgt, dass jede Belegung β , eine Belegung ist, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt.