FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2012/2013
Stand: 16.11.2012

4. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3
Abgabe: 22.11.2012 in der Vorlesung

Hausaufgabe 1

5 Punkte

Sei

$$\varphi := (A_0 \vee A_1) \wedge (B_0 \vee B_1) \wedge (C_0 \vee C_1) \wedge \\ (\neg A_0 \vee \neg B_0) \wedge (\neg A_0 \vee \neg C_0) \wedge (\neg B_0 \vee \neg C_0) \wedge \\ (\neg A_1 \vee \neg B_1) \wedge (\neg A_1 \vee \neg C_1) \wedge (\neg B_1 \vee \neg C_1).$$

(i) Wir bilden φ' aus φ, indem wir eine beliebige Klausel weglassen. Zeigen Sie, dass φ' erfüllbar ist.

(ii) Zeigen sie mit Hilfe einer Resolutionswiderlegung mit insgesamt maximal 15 Resolutionsschritten, dass φ unerfüllbar ist.

Hausaufgabe 2

5 Punkte

Eine Klausel heißt *positiv*, falls sie nur positive Variablen enthält.

Wir betrachten in dieser Aufgabe folgende Einschränkung des Resolutionskalküls, genannt *P-Resolution*: Eine Resolvente aus Klauseln C_1 und C_2 darf nur dann gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln positiv ist.

(i) Zeigen Sie, dass jede Klauselmenge ohne positive Klauseln erfüllbar ist.

(ii) Zeigen Sie per P-Resolution, dass die Klauselmenge

$$\mathcal{C} := \big\{\{\neg Z, Y\}, \{V, X, Z\}, \{\neg X, V\}, \{\neg V, Y\}, \{\neg Y\}\big\}$$

unerfüllbar ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die P-Resolution korrekt ist, d.h. wenn aus einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ die leeren Klausel hergeleitet werden kann, dann ist $\mathcal{C}$ unerfüllbar.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Ein unendlicher Graph $G := (V, E)$ besteht aus einer unendlichen Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v, u, v \in V\}$. Ein Graph G ist 4-kantenfärbbar, wenn es eine Funktion $c \colon E \to \{0, 1, 2, 3\}$ gibt, so dass $c(\{u, v\}) \neq c(\{u', v'\})$ für alle Kanten $\{u, v\}, \{u', v'\} \in E$ mit $\{u, v\} \neq \{u', v'\}$ und $\{u, v\} \cap \{u', v'\} \neq \emptyset$. 16.11.2012, Definition einer 4-Kantenfärbung korrigiert

Zeigen Sie, dass ein unendlicher Graph genau dann 4-kantenfärbbar ist, wenn bereits jeder endliche Untergraph 4-kantenfärbbar ist.

Hausaufgabe 4 5 Punkte

In der Aussagenlogik AL sind große Konjunktionen und große Disjunktionen nur über endliche Mengen erlaubt. Wir definieren nun eine Logik AL_ω, die dies für abzählbar unendliche Mengen erlaubt.

Die Logik AL_ω ist induktiv definiert wie die Aussagenlogik AL. Wenn $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ eine Folge von Formeln in AL_ω ist, dann sind außerdem auch

$$\bigvee_{i=0}^{\infty} \varphi_i \qquad \text{und} \qquad \bigwedge_{i=0}^{\infty} \varphi_i$$

Formeln in AL_ω.

Eine Belegung β passt auf $\bigvee_{i=0}^{\infty} \varphi_i$ genau dann, wenn β auf alle Formeln φ_i passt. Eine passende Belegung β erfüllt $\bigvee_{i=0}^{\infty} \varphi_i$ genau dann, wenn β mindestens eine der Formeln φ_i erfüllt.

Eine Belegung β passt auf $\bigwedge_{i=0}^{\infty} \varphi_i$ genau dann, wenn β auf alle Formeln φ_i passt. Eine passende Belegung β erfüllt $\bigwedge_{i=0}^{\infty} \varphi_i$ genau dann, wenn β alle Formeln φ_i erfüllt.

Ein Beispiel für eine AL_ω-Formel ist

$$\bigvee_{i=0}^{\infty} (Z \to X_i).$$

Diese Formel ist wahr genau dann, wenn es ein i gibt, sodass $Z \to X_i$ wahr ist.

(i) Für jedes Paar $i, j \in \mathbb{N}$ von Zahlen sei X_{ij} eine Variable. Für einen unendlichen Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \mathbb{N}$ definieren wir eine Belegung β_G, indem $\beta_G(X_{ij}) = 1$ ist genau dann, wenn $\{i, j\} \in E$ oder $i = j$.

a) Geben Sie eine AL_ω-Formel φ an, sodass $\beta_G \models \varphi$ gilt genau dann, wenn G ein vollständiger Graph ist, d.h. wenn zwischen allen Paaren von Knoten eine Kante existiert.

b) Geben Sie eine AL_ω-Formel ψ an, sodass $\beta_G \models \varphi$ gilt genau dann, wenn G transitiv ist, d.h. für alle Kanten $\{i, j\}, \{j, k\} \in E$ gilt, dass $\{i, k\} \in E$.

(ii) Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz für AL_ω nicht gilt.