

# Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 7

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528  
Maximilian Bachl - 341455  
Marius Liwotto - 341051

## Aufgabe 1

Die gebundenen Variablen bekommen im nachfolgenden Teil Indizes, die anzeigen, welcher Quantor welche Variablen bindet. Freie Variablen sind somit jene, die keinen Index haben.

(i)

$$\varphi_1 = \forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 ((E(x_1, y_1) \wedge E(y_1, z_1) \rightarrow E(x_1, z_1)) \wedge \exists x_2 E(x_2, x_2))$$

(ii)

$$\varphi_2 = \forall y_1 (E(x, y_1) \rightarrow \forall x_1 (E(y_1, x_1) \rightarrow P(x_1))) \rightarrow \forall y_2 (E(x, y_2) \rightarrow P(y_2))$$

(iii)

$$\varphi_3 = \exists y_1 (E(x, y_1) \wedge P(y_1)) \rightarrow \exists y_2 (E(x, y_2) \wedge (\neg \exists x_1 (E(y_2, x_1) \wedge P(x_1)) \wedge P(y_2)))$$

## Aufgabe 2

(i) **Homomorphismus:**

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto n$$

**Beweis für Richtigkeit des Homomorphismus:**

Konstanten:

$$h(0^{\mathbb{N}}) = 0^{\mathbb{N}} = 0$$
$$h(1^{\mathbb{N}}) = 1^{\mathbb{N}} = 1$$

Operatoren:

Sei  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ :

$$h(+^{\mathbb{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 + n_2) = n_1 + n_2 = h(n_1) + h(n_2) = +^{\mathbb{Z}}(h(n_1), h(n_2))$$

$$h(\cdot^{\mathbb{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 \cdot n_2) = n_1 \cdot n_2 = h(n_1) \cdot h(n_2) = \cdot^{\mathbb{Z}}(h(n_1), h(n_2))$$

Somit ist  $h$  ein gültiger Homomorphismus von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Z}$ .

(ii) Angenommen es gäbe besagten Homomorphismus.

Nach der Definition des Homomorphismus, müssen die Konstantensymbole wieder auf sich abgebildet werden. Somit gilt:

$$h(0^{\mathbb{Z}}) = 0^{\mathbb{N}} = 0$$
$$h(1^{\mathbb{Z}}) = 1^{\mathbb{N}} = 1$$

Außerdem gilt:

$$h(\cdot^{\mathbb{Z}}(-1, -1)) = h(1) \stackrel{Def.Hom.}{=} 1 = \cdot^{\mathbb{N}}(h(-1), h(-1))$$
$$\Rightarrow -1 \mapsto 1$$

$$h(+^{\mathbb{Z}}(-1, 1)) = h(0) = 0 \neq 2 = +^{\mathbb{N}}(1, 1) = +^{\mathbb{N}}(h(-1), h(1))$$

Somit entsteht unweigerlich ein Widerspruch, wenn es einen Homomorphismus von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{N}$  gäbe.

## Aufgabe 3

Damit  $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$  gilt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- (i) Das Bild von  $h(A) \subseteq B$
- (ii) Für alle Operatoren  $op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}$  der Substruktur  $\mathfrak{B}_{h(A)}$ , muss gelten, dass sie abgeschlossen bzgl. des Bildes von  $h(A)$  sind.

**Beweis für (i):**

Der Homomorphismus  $h$  ist als Funktion folgendermaßen definiert:

$$h: A \rightarrow B$$

Daraus folgt sofort, dass  $h(A) \subseteq B$  ist.

**Beweis für (ii):**

Da  $h$  ein Homomorphismus von  $A$  nach  $B$  ist, muss gelten mit  $n$  als Stelligkeit des Operators:

$$(*) \quad \forall a_1 \forall a_2 \dots \forall a_n \quad h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = op^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) = op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$$

Wären die Operatoren nicht abgeschlossen bzgl. des Bildes von  $h$ , dann würde folgendes gelten:

$$\exists a_1 \exists a_2 \dots \exists a_n \quad (op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))) \notin h(A)$$

Nach  $(*)$  gilt aber:

$$\forall a_1 \forall a_2 \dots \forall a_n \quad (h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))) \text{ mit}$$

$$h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) \in h(A) \Leftrightarrow op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) \in h(A)$$

was ein Widerspruch zur Annahme darstellt.

Folglich müssen die Operatoren abgeschlossen sein, weshalb  $h(A)$  eine  $\sigma$ -abgeschlossene Menge ist.

Da (i) und (ii) gilt, folgt nach dem Satz der VL, dass  $h(A)$  eine Substruktur  $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$  induziert.

## Aufgabe 4

**Struktur:**

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}})$$

$$n_1 <^{\mathcal{N}} n_2 \quad \text{gdw.} \quad (n_1 \bmod 2 < n_2 \bmod 2) \vee ((n_1 \bmod 2 = n_2 \bmod 2) \wedge n_1 < n_2)$$

Damit  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{M}$  isomorph sind, muss es einen Isomorphismus zwischen  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$  und  $\mathbb{N}$  geben.

**Isomorphismus:**

$$b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \times \mathbb{N}$$

$$n \rightarrow (n \bmod 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$$

**Beweis der Richtigkeit von  $b$ :**

$b$  muss folgende Dinge erfüllen:

- (i)  $b$  muss eine Bijektion sein:  
 $b: \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\} \times \mathbb{N}$
- (ii) Für alle  $n$ -stelligen Relationssymbole  $R \in \sigma$  und alle  $\bar{a} := a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^n$ :  
wenn  $\bar{a} \in \mathbb{N}^n$  genau, dann wenn  $(b(a_1), b(a_2), \dots, b(a_n)) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$
- (iii) Für alle  $n$ -stelligen Funktionssymbole  $f \in \sigma$  und alle  $\bar{a} := a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^n$ :  
 $b(f^{\mathcal{N}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{M}}(b(a_1), b(a_2), \dots, b(a_n))$
- (iv) Für alle Konstantensymbole  $c \in \sigma$  gilt:  
 $b(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{M}}$

**Beweis für (i):**

Damit  $b$  eine Bijektion ist, muss  $b$  und seine Inverse die Eigenschaften einer Funktion erfüllen, nämlich Linkstotalität und Injektivität.

$b$  ist offensichtlich linkstotal.  
 $b$  ist auch injektiv, da Folgendes gilt:

Seien  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 \neq n_2$ :

**Fall 1**  $n_1 \bmod 2 \neq n_2 \bmod 2$ :

$$b(n_1) = (n_1 \bmod 2, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor) \neq (n_2 \bmod 2, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor) = b(n_2)$$

**Fall 2**  $n_1 + 2 \leq n_2$ :

$$\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor < \lfloor \frac{n_1+2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n_1}{2} + 1 \rfloor \leq \frac{n_2}{2}$$

$$\Rightarrow b(n_1) = (n_1 \bmod 2, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor) \neq (n_2 \bmod 2, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor) = b(n_2)$$

**Fall 3**  $n_2 + 2 \leq n_1$ :

analog zu Fall 2.

**Fall 4**  $n_1 + 1 = n_2$  oder  $n_2 + 1 = n_1$ :

Nach Annahme muss  $n_1$  eine gerade und  $n_2$  eine ungerade Zahl sein oder umgekehrt. Daraus folgt:

$$n_1 \bmod 2 \neq n_2 \bmod 2 \Rightarrow b(n_1) = (n_1 \bmod 2, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor) \neq (n_2 \bmod 2, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor) = b(n_2)$$

Daraus folgt, dass  $b(n_1) \neq b(n_2)$  und damit die Injektivität von  $b$ .

Die Inverse von  $b$ :

$$b^{-1} : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(k, n) \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot n, & k = 0 \\ 2 \cdot n + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$b^{-1}$  ist offensichtlich linkstotal.

$b^{-1}$  ist auch injektiv, da Folgendes gilt:

Seien  $(k_1, n_1), (k_2, n_2) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$  mit  $(k_1, n_1) \neq (k_2, n_2)$ :

**Fall 1**  $k_1 = 0 \neq 1 = k_2$ :  $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_2, n_2)$

**Fall 2**  $k_1 = 1 \neq 0 = k_2$ : analog zu Fall 1

**Fall 3**  $n_1 \neq n_2$  und :  $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 = b^{-1}(k_2, n_2)$   
 $k_1 = k_2 = 0$

**Fall 4**  $n_1 \neq n_2$  und :  $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 + 1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_2, n_2)$   
 $k_1 = k_2 = 1$

Die Inverse  $b^{-1}$  ist also injektiv.  
 $b$  ist damit eine Bijektion.

**Beweis für (ii):**

2-stelliges Relationssymbol  $<$ :

$$\begin{aligned} & \forall a_1 \forall a_2 ((a_1, a_2) \in <^N \\ & \Leftrightarrow (a_1 \bmod 2 < a_2 \bmod 2) \vee ((a_1 \bmod 2 = a_2 \bmod 2) \wedge a_1 < a_2) \\ & \Leftrightarrow (a_1 \bmod 2 < a_2 \bmod 2) \vee ((a_1 \bmod 2 = a_2 \bmod 2) \wedge \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor < \lfloor \frac{a_2}{2} \rfloor) \\ & \Leftrightarrow (b(a_1), b(a_2)) \in <^M \end{aligned}$$

**Beweis für (iii):**

Es gibt keine Funktionssymbole aus  $\sigma$ , also ist hier nichts zu beweisen.

**Beweis für (iv):**

Es gibt keine Konstantensymbole aus  $\sigma$ , also ist hier nichts zu beweisen.

$b$  erfüllt damit i-iv und ist somit ein korrekter Isomorphismus von  $\mathcal{N}$  nach  $\mathcal{M}$ .