Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 1

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

1 Aufgabe

T - Tobi kommt | **C** - Christoph kommt | **S** - Sebastian kommt | **V** - Viktor kommt | **F** - Friederike kommt

$$
\begin{aligned}
(T \rightarrow C \wedge S) \wedge (C \vee V) \wedge (S \rightarrow \neg F) \wedge (\neg V) \wedge (\neg T \rightarrow \neg C) &\leftrightarrow \\
(\neg T \vee (C \wedge S)) \wedge (C \vee V) \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (\neg V) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\
(\neg T \vee C) \wedge (\neg T \vee S) \wedge C \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\
C \wedge (\neg T \vee S) \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\
C \wedge (\neg T \vee S) \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge T &\leftrightarrow \\
C \wedge S \wedge \neg V \wedge \neg F \wedge T &
\end{aligned}
$$

Also kommen: Christopher, Sebastian und Tobi. Viktor und Frederike werden nicht kommen.

2 Aufgabe

(i) Ist nicht erfüllbar

$$
\begin{aligned}
\neg(X \rightarrow (Y \rightarrow X)) &\leftrightarrow \\
\neg(\neg X \vee (\neg Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg \top &\leftrightarrow \\
\bot &
\end{aligned}
$$

(ii) Ist erfüllbar

$$
\begin{aligned}
(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow Y &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \vee Y &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge \neg Y) \vee Y &\leftrightarrow \\
\neg X \vee Y \vee Y &\leftrightarrow \\
\neg X \vee Y &
\end{aligned}
$$

(iii) Ist erfüllbar

$$
\begin{aligned}
(\neg X \rightarrow (X \wedge Y)) \rightarrow (Y \rightarrow X) &\leftrightarrow \\
\neg(X \vee (X \wedge Y)) \vee \neg(Y \vee X) &\leftrightarrow \\
\neg((X \vee (X \wedge Y)) \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg X &
\end{aligned}
$$

(iv) Ist erfüllbar

$$
\begin{aligned}
(X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\
\neg(X \vee Y) \vee (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\
(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\
(X \leftrightarrow Y) &
\end{aligned}
$$

(v) Ist eine Tautologie

$$
\begin{aligned}
(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg(X \wedge Y) \vee (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg X \vee \neg Y \vee (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg X \vee \neg Y \vee (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg X \vee \neg Y \vee X \vee Y \leftrightarrow \\
\top
\end{aligned}
$$

3 Aufgabe

Sei ϕ_i induktiv definiert als:

$$
\begin{aligned}
\phi_0(a_{n-1}, ..., a_0, b_{n-1}, ..., b_0) &= \neg(a_0 \leftrightarrow b_0) \\
\psi_0(a_{n-1}, ..., a_0, b_{n-1}, ..., b_0) &= a_0 \wedge b_0 \\
\phi_{i+1}(a_{n-1}, ..., a_0, b_{n-1}, ..., b_0) &= (\neg a_{i+1} \wedge \neg b_{i+1} \wedge \psi_i) \vee (\neg a_{i+1} \wedge b_{i+1} \wedge \neg \psi_i) \vee (a_{i+1} \wedge \neg b_{i+1} \wedge \neg \psi_i) \vee (a_{i+1} \wedge b_{i+1} \wedge \psi_i) \\
\psi_{i+1}(a_{n-1}, ..., a_0, b_{n-1}, ..., b_0) &= (a_{i+1} \wedge b_{i+1}) \vee (a_{i+1} \wedge \psi_i) \vee (b_{i+1} \wedge \psi_i)
\end{aligned}
$$

4 Aufgabe

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde (Folien S.) gibt es zu jeder Formel ϕ eine äquivalente konjunktive Normalform. Damit diese der Bedingung max-depth = min-depth gerecht wird, bedarf es folgender Konstruktion:

$$
f(\phi) \rightarrow \begin{cases} f((\psi \wedge \top) * \xi), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{ max-depth}(\psi) < \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\} \\ f(\psi * (\xi \wedge \top)), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{ max-depth}(\psi) > \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\} \\ (f(\psi) * f(\xi)), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{ max-depth}(\psi) = \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\} \\ \phi, & \phi \in (\text{AVar } \cup \neg\text{AVar } \cup \{\top, \bot\}) \end{cases}
$$

wobei $\neg$AVar definiert ist als die Menge der negierten Variablen von AVar

Sei zu beweisen, dass diese Konstruktion hält was sie verspricht.

IA $\phi \in (\text{AVar } \cup \{\top, \bot\}) \Rightarrow f(\phi) = \phi \Rightarrow$ max-depth($f(\phi)$) = 0 = min-depth($f(\phi)$)
$\phi \in \neg\text{AVar } \Rightarrow f(\phi) = \phi \Rightarrow$ max-depth($f(\phi)$) = 1 = min-depth($f(\phi)$)

IV Sei ψ eine Formel, wobei max-depth($f(\psi)$) = min-depth($f(\psi)$) und
Sei ξ eine Formel, wobei max-depth($f(\xi)$) = min-depth($f(\xi)$)

IS Zu Zeigen ist, dass für die Termgrösse n+1 das ganze noch gilt: $f(\psi * \xi)$
Fallunterscheidung über $f(\psi * \xi)$

- max-depth(ψ) $<$ max-depth(ξ) $\wedge * \in \{\vee, \wedge\}$
  $f(\psi * \xi) = f((\psi \wedge \top) * \xi) = ... = f((...(\psi \wedge \top)...) * \xi)$
  Es werden zu ψ so lange $\wedge\top$ hinzugefügt bis max-depth der linken Seite = max-depth der rechten Seite.
  Jetzt kommt die Magie der Rekursion und die Funktion wird auf die Unterfunktionen aufgerufen:
  $(f(...(\psi \wedge \top)... \wedge \top)) * f(\xi)) = (f(...(\psi \wedge \top)... \wedge (\top \wedge \top)) * f(\xi)) = ...$
  Durch die rekursiven Aufrufe wird der Term und alle Subterme tiefensymmetrisch. Wegen der **IV** ist damit auch min-depth($f(\psi * \xi)$) = max-depth($f(\psi * \xi)$)
- max-depth(ψ) $>$ max-depth(ξ) $\wedge * \in \{\vee, \wedge\}$
  analog
- max-depth(ψ) $=$ max-depth(ξ) $\wedge * \in \{\vee, \wedge\}$
  Da max-depth(ψ) $=$ max-depth(ξ) gilt per Transitivität und der **IV** dieser Fall.