Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

Beweis durch strukturelle Induktion. Seien dazu β und β' zwei Belegungen mit $\beta \leq \beta'$, sowie φ eine Formeln die nur aus Variablen $X_1, ..., X_n$ und $\bot, \top, \wedge, \vee$ besteht.

IA $\varphi = X_1$
Es gibt drei Möglichkeiten für β und β', sodass $\beta \leq \beta'$.

- $\beta(X_1) = 0 \leq 0 = \beta'(X_1)$
  $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![\varphi]\!]^\beta \leq [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
- Die anderen Fälle sind analog.

IV Sei φ eine monotone Formel, wobei diese nur aus Variablen $X_1, ..., X_n$ und $\bot, \top, \wedge, \vee$ besteht.

IS Da das Anhängen von $\top$ und $\bot$ mittels $\wedge, \vee$ keinerlei Einfluss auf die Monotonie von Formeln hat (Da die Belegungen nur Einfluss auf Variablen hat), werden diese hier nicht betrachtet. Es ist nun zu zeigen, dass die Aussage auch für $\varphi \wedge X_{n+1}$ und $\varphi \vee X_{n+1}$ gilt.

- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 1 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Analog
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Anolog
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 1 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Analog

Aufgabe 2

(i) Es ist zu zeigen, dass NAND funktional vollständig ist. Bisher kennen wir $\{\neg, \vee, \wedge\}$ als funktional vollständig. Wenn nun alle Operatoren dieser Basis durch NAND dargestellt werden können, ist NAND funktional vollständig.

- $\neg\phi \equiv (\phi \text{ NAND } \phi)$

ϕ	$\neg\phi$	$(\phi \text{ NAND } \phi)$
0	1	1
1	0	0

- $(\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \text{ NAND } \phi)\text{NAND}(\psi \text{ NAND } \psi))$

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$	$((\phi \text{ NAND } \phi)\text{NAND}(\psi \text{ NAND } \psi))$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- $(\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \text{ NAND } \phi)\text{NAND}(\psi \text{ NAND } \psi))$

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$	$((\phi \text{ NAND } \psi)\text{NAND}(\phi \text{ NAND } \psi))$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Da alle Operatoren der uns bekannten funktional vollständigen Junktorbasis durch NAND darstellbar ist, ist NAND funktional vollständig.

(ii) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ist nicht funktional vollständig, da $\neg X$ mit $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht darstellbar ist. Sei dazu die Belegung β definiert als $\beta(X) = 1$. Beweis per struktureller Induktion:

IA $\phi = X$
$[\![X]\!]^\beta = 1$

IV Seien ϕ_1, ϕ_2 Formeln die nur aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ bestehen, wobei gilt, dass $[\![\phi_1]\!]^\beta = 1 = [\![\phi_2]\!]^\beta$

IS
- $\psi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]^\beta = 1$
- $\psi = (\phi_1 \vee \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \vee \phi_2)]\!]^\beta = 1$
- $\psi = (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \rightarrow \phi_2)]\!]^\beta = 1$

Damit ist bewiesen, dass die Junktorbasis $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 3

(i)

(ii)

Aufgabe 4