

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 6

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i) $h : V(G) \rightarrow V(H)$

$$v_1 \mapsto w_1$$

$$v_2 \mapsto w_2$$

$$v_3 \mapsto w_1$$

$$v_4 \mapsto w_3$$

$$v_5 \mapsto w_2$$

(ii) Zu zeigen ist:

(i) Graph G ist 3-färbbar \Rightarrow es existiert ein Homomorph. von G nach H

(ii) es existiert ein Homomorph. von G nach H \Rightarrow Graph G ist 3-färbbar

H ist 3-färbbar mit folgender Farbbelegung

$$c: V(H) \rightarrow \{r, g, b\}$$

$$c(w_1) \mapsto r$$

$$c(w_2) \mapsto g$$

$$c(w_3) \mapsto b$$

(i) Da G 3-färbbar ist, gilt:

$$\exists c' : V(G) \rightarrow \{r, g, b\}. c' \text{ ist eine 3-Färbung von G}$$

Daraus kann man nun folgenden Homomorphismus h bilden:

$$h : V(G) \rightarrow V(H)$$

$$h(v) \mapsto \begin{cases} w_1, & c'(v) = r \\ w_2, & c'(v) = g \\ w_3, & c'(v) = b \end{cases}$$

Beweis der Richtigkeit des gebildeten h:

Es muss gelten:

$$\forall \{u, v\} \in E(G). \{h(u), h(v)\} \in E(H)$$

Da nach Annahme alle Knoten einer Kante aus G verschiedenfarbig sind, gilt:

$$(1) \forall \{u, v\} \in E(G). h(u) \neq h(v)$$

Des Weiteren gilt:

$$(2) \forall u \in \{w_1, w_2, w_3\}. \forall v \in \{w_1, w_2, w_3\} \setminus \{u\}. \{u, v\} \in E(H)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\forall \{u, v\} \in E(G). \{h(u), h(v)\} \in E(H)$$

(ii) Da ein Homomorphismus h von G nach H existiert, gilt:

$$(*) \forall \{u, v\} \in E(G). \{h(u), h(v)\} \in E(H)$$

Daraus kann man nun folgende 3-Färbung c' ableiten:

$$c' : V(G) \rightarrow \{r, g, b\}$$

$$v \mapsto h(v)$$

Beweis der Richtigkeit der 3-Färbung c' :

Es gilt:

$$(**) \forall \{u, v\} \in E(G). h(u) \neq h(v)$$

Würde dies nicht gelten, würde das bedeuten, dass $\{h(u), h(u)\} \in E(H)$ sein würde, da aber H irreflexiv ist, wäre das ein Widerspruch. Aus (*) und (**) folgt:

$$\forall \{u, v\} \in E(G). c(h(u)) \neq c(h(v)) \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E(G). c'(u) \neq c'(v)$$

$\Rightarrow c'$ ist eine passende 3-Färbung für $G \Rightarrow G$ ist 3-färbbar

Aufgabe 2

Zu zeigen ist:

(i) Existieren für alle endlichen Teilgraphen G' von G Homomorphismen von G' nach H , so existiert auch ein Homomorphismus von G nach H .

(ii) Existiert für G ein Homomorphismus von G nach H , so existieren für alle endlichen Teilgraphen G' von G Homomorphismen von G' nach H .

(i) Der Graph $G = (V, E)$ wird folgendermaßen in einer Aussagenlogische Formel übersetzt:
Für jede Kante $\{u, v\} \in E(G)$ führen wir eine Variable $X_{u,v}$ ein.

$$\text{Sei } h: V(G) \rightarrow V(H)$$

$$\Phi = \{ \{X_{u,v} \rightarrow X_{h(u), h(v)}\} \mid \{u, v\} \in E(G) \}$$

$$\text{Sei } \Phi_0 \subseteq \Phi$$

$$E' = \{ \{u, v\} \mid \{X_{u,v} \rightarrow X_{h(u), h(v)}\} \in \Phi_0 \}$$

$$V' = \{v \mid \{u, v\} \in E'\}$$

Da Φ_0 eine endliche Teilmenge von Φ ist, muss auch E' und damit V' endlich sein. Für den von V' induzierten endlichen Untergraphen G' von G existiert nach Annahme ein Homomorphismus $h': V(G') \rightarrow V(H)$. Daraus folgt, dass folgendes gilt:

$$\forall \{u, v\} \in E'. \{h'(u), h'(v)\} \in E(H)$$

Eine passende Belegung β wäre somit Folgende:

$$\beta(X_{u,v}) = 1, \text{ wenn } \{u, v\} \in E' \text{ und } \beta(X_{h'(u), h'(v)}) = 1, \text{ wenn } \{h'(u), h'(v)\} \in E(H)$$

Aus der Erfüllbarkeit von jedem beliebigen Φ_0 folgt nach dem Kompaktheitssatz, dass Φ auch erfüllbar ist. Daraus folgt, dass ein Homomorphismus $h: V(G) \rightarrow V(H)$ existiert, wenn für alle Teilgraphen G' ein Homomorphismus existiert.

(ii) Ist trivial.

Aufgabe 3

In der Hausaufgabe 4 wurde bewiesen, dass die P-Resolution korrekt ist, d.h. falls es eine Menge von Klauseln eine P-Resolutionswiderlegung hat, so ist die Klauselmengue unerfüllbar. Damit die P-Resolution vollständig ist, muss gezeigt werden, dass für jede unerfüllbare Klauselmengue eine P-Resolutionswiderlegung existiert. Dazu wird zuerst folgende Behauptung aufgestellt:

Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei \mathcal{C} eine unerfüllbare Klauselmenge in den Variablen $\{V_1, \dots, V_{n-1}\}$. Dann hat \mathcal{C} eine Resolutionswiderlegung.

$n = 0$.

IA: In diesem Fall ist \mathcal{C} unerfüllbar und enthält keine Variablen. Also $\mathcal{C} := \{\square\}$ und somit existiert eine Resolutionswiderlegung, bzw. das ganze ist schon eine Resolutionswiderlegung.

IS: $n \rightarrow n + 1$

Sei \mathcal{C} eine unerfüllbare Klauselmenge in den Variablen $\{V_1, \dots, V_n\}$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^+ &:= \{C \setminus \{\neg V_n\} \mid C \in \mathcal{C} \wedge V_n \notin C\} \\ \mathcal{C}^- &:= \{C \setminus \{V_n\} \mid C \in \mathcal{C} \wedge \neg V_n \notin C\}\end{aligned}$$

\mathcal{C}^+ und \mathcal{C}^- sind beide unerfüllbar. Denn wäre z.B. \mathcal{C}^+ erfüllbar, z.B. durch $\beta \models \mathcal{C}^+$, dann würde $\beta' := \beta \cup \{V_n \rightarrow 1\}$ die Menge \mathcal{C} erfüllen.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Resolutionsableitungen (C_1, \dots, C_s) und (D_1, \dots, D_t) der leeren Klausel $C_s = D_t = \square$ aus \mathcal{C}^+ bzw. \mathcal{C}^- .

Falls (D_1, \dots, D_t) schon eine Ableitung von \square aus \mathcal{C} ist, sind wir fertig. Andernfalls werden Klauseln D_i benutzt, die aus \mathcal{C} durch Entfernen von V_n entstanden sind, d.h. $D_i \cup \{V_n\} \in \mathcal{C}$.

Fügen wir zu diesen Klauseln und allen Resolventen wieder V_n hinzu, so erhalten wir eine Ableitung (D'_1, \dots, D'_t) von V_n aus \mathcal{C} .

Falls (C_1, \dots, C_s) schon eine Ableitung von \square aus \mathcal{C} ist, sind wir fertig. Andernfalls werden Klauseln C_i benutzt, die aus \mathcal{C} durch Entfernen von $\neg V_n$ entstanden sind, d.h. $C_i \cup \{\neg V_n\} \in \mathcal{C}$.

Fügen wir zu diesen Klauseln $\neg V_n$ hinzu, gibt es in der normalen Resolution eine Ableitung (C'_1, \dots, C'_s) von $\neg V_n$ aus \mathcal{C} .

Doch es gibt in der P-Resolution das Problem, dass immer eine positive Klausel resolviert werden muss, und da wir negative Variablen zu den Klauseln hinzufügen, ist (C'_1, \dots, C'_s) unter Umständen keine gültige P-Resolution.

Doch haben wir schon zuvor $\{V_n\}$ resolviert, wodurch alle Klauseln der Form $C_i \cup \{\neg V_n\} \in \mathcal{C}$ wieder zu C_i resolviert werden können. Diese Resolutionskette bezeichne als $(C'D'_1, \dots, C'D'_k)$. Nun sind die Resolutionsableitungen (C_1, \dots, C_s) möglich, da alle Klauseln vorliegen.

Damit wäre $(D'_1, \dots, D'_t, C'D'_1, \dots, C'D'_k, C_1, \dots, C_s, \square)$ eine Resolutionswiderlegung von \mathcal{C}

Nun muss das ganze noch für jede Klauselmenge \mathcal{C} bewiesen werden. Sei dazu \mathcal{C} eine unerfüllbare Klauselmenge

1. Ist \mathcal{C} endlich, dann enthält sie nur endlich viele Variablen und der Beweis folgt sofort aus der Behauptung.
2. Ist \mathcal{C} unendlich, dann folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass bereits eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ unerfüllbar ist. Also hat \mathcal{C}' eine Resolutionswiderlegung. Diese ist aber auch eine Resolutionswiderlegung von \mathcal{C} .

Hinweis: Große Teile des Beweises kommen aus den Vorlesungsfolien der VL TheGI3 von S. Kreutzer.

Aufgabe 4

Wir definieren $n = |V(G)|$. Es werden n Variablen eingeführt, die jeweils 2 Indizes haben mit der Namensgebung $X_{i,j}$, wobei $1 \leq i \leq j \leq n$. Die Idee ist, dass diese $n \times n$ Matrix aus Variablen einen Pfad definiert, indem man jeweils genau eine Variable der n Variablen mit 1 belegt, alle anderen mit 0. Nun würden die Variablen $X_{i,j}$ und $X_{i+1,k}$ für die Kante $\{j, k\}$ stehen. φ muss folgendes leisten:

1. Jede Variable definiert genau einen Knoten.

$$\varphi_1 = \bigwedge_{0 \leq i < n} \bigvee_{j \in V(G)} \left(X_{i,j} \wedge \left(\bigwedge_{k \in V(G) \setminus \{j\}} \neg X_{i,k} \right) \right)$$

Jede Klausel hat die Größe n , es werden n mal n Klauseln gebildet $\Rightarrow \varphi_1 \in \mathcal{O}(n^3)$

2. Jeder Knoten kommt genau einmal vor:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{j \in V(G)} \bigvee_{0 \leq i < n} \left(X_{i,j} \wedge \left(\bigwedge_{i' \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i\}} \neg X_{i',j} \right) \right)$$

Jede Klausel hat die Größe n , es werden n mal n Klauseln gebildet $\Rightarrow \varphi_2 \in \mathcal{O}(n^3)$

3. Die Kanten existieren und bilden einen geschlossenen Pfad:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{1 \leq i < n} \left(\bigvee_{\{k,l\} \in E(G)} X_{i,k} \wedge X_{i+1,l} \right) \wedge \bigvee_{\{k,l\} \in E(G)} X_{0,k} \wedge X_{n,l}$$

Jede Klausel hat die Größe 2, es werden n mal maximal $\binom{n}{2}$ Klauseln gebildet $\Rightarrow \varphi_3 \in \mathcal{O}(n^3)$

φ wird nun als Konjunktion des Ganzen definiert:

$$\varphi(G) = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

$\varphi(G)$ ist genau erfüllbar, wenn ein Hamilton Kreis in G existiert. Da für φ_{1-3} gezeigt wurde, dass es polynomiellen Aufwand hat, ist der Aufwand von φ ebenfalls polynomiell, nämlich $\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^3) = \mathcal{O}(n^3)$.