Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

$N_k = \{X_{ik} \mid (v_i, v_k) \in E \wedge v_i, v_k \in V\}$

(i) $\varphi_n = \bigwedge_{k=1}^{n} (\bigvee_{c=1}^{\#(N_k)} X_{kc} \in N_k)$

(ii) $\phi(k) = \begin{cases} (X_{ij} \wedge X_{i(j+1)}) \wedge (\neg X_{i(j+2)} \wedge ... \wedge \neg X_{i(j+m)}), & \#(N_k) \geq 2 \\ X_{ij}, & \#(N_k) = 1 \wedge X_{ij} \in N_k \end{cases}$

$\varphi_n = \bigwedge_{k=1}^{\#V} (\phi(k))$

Aufgabe 2

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi\mathcal{S} &= \mathcal{S}(((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow (((X \vee \neg Y) \leftrightarrow Y)) \\
&= (\mathcal{S}((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow \mathcal{S}(((X \vee \neg Y) \leftrightarrow Y)) \\
&= ((\mathcal{S}(X \wedge Y) \vee \mathcal{S}(Z)) \leftrightarrow ((\mathcal{S}(X \vee \neg Y) \leftrightarrow \mathcal{S}(Y))) \\
&= (((\mathcal{S}(X) \wedge \mathcal{S}(Y)) \vee Z) \leftrightarrow (((\mathcal{S}(X) \vee \neg\mathcal{S}(Y)) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))) \\
&= ((((Z \vee U) \wedge (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))) \vee Z) \leftrightarrow (((Z \vee U) \vee \neg(Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))))
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\beta\mathcal{S}(X) &= [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta} \\
\beta\mathcal{S}(Y) &= [\![\mathcal{S}(Y)]\!]^{\beta} \\
\beta\mathcal{S}(U) &= \beta(U)
\end{aligned}$$

- $\beta\mathcal{S}$ ist passend für φ, da $\{X, Y\} = \mathsf{var}(\varphi) \subseteq \mathsf{Dom}(\beta\mathcal{S}) = \{X, Y, U\}$
  β ist passend für $\varphi\mathcal{S}$, da $\{X, Y, U\} = \mathsf{var}(\varphi\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{Dom}(\beta) = \{X, Y, U\}$
- Dies ist im Substitutionslemma bewiesen, was ja eine vollständige Verifikation ist, dass es auch mit der hier angegebenen Formel, Substitution und Belegung gilt.

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \equiv X \Rightarrow (Y \wedge Z) &\equiv \neg X \vee (Y \wedge Z) \\
&\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \\
&\equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z) \\
&\equiv \psi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow Q &\equiv \neg(X \wedge Y \wedge Z) \vee Q \\
&\equiv \neg X \vee \neg Y \vee \neg Z \vee Q \\
&\equiv (\neg X \vee (\neg Y \vee (\neg Z \vee Q))) \\
&\equiv (X \Rightarrow (Y \Rightarrow (Z \Rightarrow Q))) \\
&\equiv \psi_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_3 \equiv (X \wedge Y) \Rightarrow \neg(Z \Rightarrow X) &\equiv \neg(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Z \vee X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \vee (Z \wedge \neg X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge T \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee \neg X \vee X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X) \vee \neg X \\
&\equiv (X \Rightarrow \neg Y) \wedge (\neg Y \Rightarrow X) \vee \neg X \\
&\equiv \psi_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_4 \equiv (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \Rightarrow X) &\equiv \neg(Y \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow X) \\
&\equiv \neg(\neg Y \vee Z) \vee (\neg Y \vee X) \\
&\equiv (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \vee X) \\
&\equiv (Y \vee \neg Y \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
&\equiv (T \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
&\equiv T \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
&\equiv \neg Z \vee \neg Y \vee X \\
&\equiv \psi_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_5 = (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X) &\equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X) \\
&\equiv \neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X) \\
&\equiv \neg((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \\
&\equiv \neg(X \Leftrightarrow Y) \\
&\equiv \psi_5
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Aus der VL wissen wir, dass zu jeder aussagenlogischen Formel eine äquivalente KNF existiert.
Folglich gilt: $\varphi \equiv knf_\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} L_{ij}$
Aus $\varphi \equiv True$ kann man folgern, dass alle Disjunktionsterme von knf_φ wahr sein müssen.
Des Weiteren gilt, dass χ die folgende äquivalente Form besitzt, wenn χ keine Tautologie ist:

$\chi \equiv t_{\varphi 1} \vee ... \vee t_{\varphi i} \vee \gamma$ mit
$\gamma \in AL,\ t_{\varphi i}$ ist ein Disjunktionsterm mit i $\in [1, u]$ und 1 $\leq$ u $\leq$ n von
knf_φ und $var(\gamma)\ \cap\ var(\varphi) = \emptyset$

Würde dies nicht gelten, so gäbe es eine passende Belegung β,
sodass $[\![\chi]\!]^\beta \equiv False$, obwohl $\varphi \equiv True$.
Das stünde im Widerspruch zur Aussage, dass $\varphi \Rightarrow \chi$ gilt.
Ist χ eine Tautologie gilt: $t_\varphi = True$
Aus der Struktur von χ folgt ebenfalls, dass t_φ folgende Bedingungen erfüllt:

$\varphi \Rightarrow t_\varphi \wedge t_\varphi \Rightarrow \chi \wedge var(t_\varphi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$

Daraus folgt, dass für alle Formeln $\varphi, \chi \in$ AL gilt mit $\varphi \Rightarrow \chi \equiv True$:

$\exists \psi \in AL. \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \chi \wedge var(\psi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$