FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2012/2013
Stand: 11.1.2013

11. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3

Abgabe: 24.1.2013 in der Vorlesung

Für alle Aufgaben gilt: Solange in der Aufgabenstellung nichts anderes steht, erwarten wir zu jeder Antwort eine Begründung. Es genügt nicht, nur eine Formel zu schreiben ohne Begründung.

Hausaufgabe 1

5 Punkte

(i) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur der Graphen und sei G ein endlicher Graph. Konstruieren Sie einen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, sodass für alle Graphen H gilt

$$H \models \varphi \Leftrightarrow G \cong H.$$

Begründen Sie ihre Antwort.

(ii) Seien $G_1, \ldots, G_k$ endliche Graphen. Zeigen Sie, dass die Klasse

$$\mathcal{C} = \{H : H \text{ ist } \sigma\text{-Struktur und isomorph zu einem Subgraphen von } G_i \text{ für ein } 1 \leq i \leq k\}$$

endlich axiomatisierbar ist.

Hausaufgabe 2

5 Punkte

Sei $\sigma = \{<\}$. Zeigen Sie, dass es keine Menge Φ von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, sodass $\mathrm{Mod}(\Phi)$ genau die Klasse aller zu $(\mathbb{Q}, <)$ isomorphen Strukturen ist.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

(i) Sei $\sigma = \{<\}$ und sei $T = \Phi^{\models} := \{\varphi : \Phi \models \varphi\}$ die Theorie der linearen Ordnungen, wobei

$$\Phi := \{\forall x \neg x < x,\ \forall x \forall y \forall z (x < y \land y < z \rightarrow x < z),\ \forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass T eine vollständige Theorie ist.

(ii) Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) := \{\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] : \mathcal{A} \models \varphi\}$$

eine vollständige Theorie ist.

Hausaufgabe 4

5 Punkte

Sei σ eine relationale Signatur. Zeigen Sie, dass die Klasse der unendlichen σ-Strukturen axiomatisierbar ist. Zeigen Sie, dass diese Klasse nicht endlich axiomatisierbar ist.