Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 9

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \neg(\exists x \exists y E(x,y) \wedge \neg\exists x \forall y \exists z(\neg E(x,z) \vee f(x,y) = z)) \rightarrow \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x \exists y E(x,y) \wedge \neg\exists x \forall y \exists z(\neg E(x,z) \vee f(x,y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x \exists y E(x,y) \wedge \forall x \exists y \forall z \neg(\neg E(x,z) \vee f(x,y) = z))) \vee \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x \exists y E(x,y) \wedge \forall x \exists y \forall z(E(x,z) \wedge \neg(f(x,y) = z)))) \vee \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x_1 \exists y_2 E(x_1,y_2) \wedge \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1(E(x_2,z_1) \wedge \neg(f(x_2,y_2) = z_1)))) \vee \exists x_3 E(x_3, f(y,x_3)) \\
&\equiv \exists x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 \exists x_3((E(x_1,y_2) \wedge (E(x_2,z_1) \wedge \neg(f(x_2,y_2) = z_1)))) \vee E(x_3, f(y,x_3)))
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &:= \exists y \forall z(E(x,z) \wedge (E(y,z) \rightarrow \forall x(E(f(x,y),z) \wedge \neg\forall y R(x,y)))) \\
&\equiv \exists y \forall z(E(x,z) \wedge (\neg E(y,z) \vee \forall x(E(f(x,y),z) \wedge \neg\forall y R(x,y)))) \\
&\equiv \exists y \forall z(E(x,z) \wedge (\neg E(y,z) \vee \forall x(E(f(x,y),z) \wedge \exists y \neg R(x,y)))) \\
&\equiv \exists y_1 \forall z_1(E(x_1,z_1) \wedge (\neg E(y_1,z_1) \vee \forall x_2(E(f(x_2,y_1),z_1) \wedge \exists y_1 \neg R(x_2,y_1)))) \\
&\equiv \exists y_1 \forall z_1 \forall x_2(E(x_1,z_1) \wedge (\neg E(y_1,z_1) \vee (E(f(x_2,y_1),z_1) \wedge \neg R(x_2,y_1))))
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\phi_1(\mathcal{N}) &:= \exists\, x\ (y = x + x) \\
&\quad \phi_{one}(x) := \forall y(y \cdot x = y) \\
&\quad \phi_{two}(x) := \exists y(x = y + y \wedge \phi_{one}(y)) \\
&\quad \phi_{prim}(x) := \forall y \forall z(y \cdot z = x \rightarrow (\phi_1(y) \wedge z = x) \vee (\phi_1(z) \wedge y = x)) \\
\phi_2(\mathcal{N}) &:= \forall b \forall c((b \cdot c = a \wedge \phi_{prim}(b)) \rightarrow \phi_{two}(b)) \\
\phi_3(\mathcal{R}) &:= x = y \cdot y \\
\phi_4(\mathcal{R}) &:= \exists\, m\ \forall\, n\ (m \cdot n = m \wedge m = x + y) \\
\phi_5(\mathcal{R}) &:= \exists\, m\ \exists\, n\ (n \cdot n = m \wedge y = x + m) \\
\phi_6(\mathcal{R}) &:= (u'' = u \cdot u' - v \cdot v') \wedge (v'' = u' \cdot v + u \cdot v')
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(i) $\overline{x} := (x_1, x_2, ..., x_k)$

$\varphi(\mathcal{B}) = \pi(\varphi(\mathcal{A})) \Leftrightarrow \forall \overline{x}\ (\overline{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \overline{x} \in \pi(\varphi(\mathcal{A}))$

Da π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist, gilt für alle Relationen R aus σ:

(*) $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \pi(\overline{a}) \in R^{\mathcal{B}}$

$$
\begin{aligned}
&\big(\forall \overline{x}\ \big(\overline{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}) = 1\big)\big) \\
&\Leftrightarrow \big(\forall \overline{x}\ \big(\overline{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varphi(\pi^{-1}(x_1), ..., \pi^{-1}(x_k)) = 1\big)\big) \\
&\Leftrightarrow \big(\forall \overline{x}\ \big(\overline{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow (\pi^{-1}(x_1), ..., \pi^{-1}(x_k)) \in \varphi(\mathcal{A})\big)\big) \\
&\Leftrightarrow \big(\forall \overline{x}\ \big(\overline{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \overline{x} \in \pi(\varphi(\mathcal{A}))\big)\big) \\
&\Leftrightarrow \varphi(\mathcal{B}) = \pi(\varphi(\mathcal{A}))
\end{aligned}
$$

(ii) Die gegebene Struktur enthält nur die Relation $<$ aber keine Funktionssymbole. $<$ ist über $\mathbb{Z}$ eine Relation ohne Maximum oder Minimum.

Damit es ein φ gibt sodass $\varphi(\mathcal{Z}) = \{0\}$, muss es möglich sein, die 0 von allen anderen Zahlen zu unterscheiden. Durch die Unendlichkeit von $\mathbb{Z}$ ist es nicht möglich durch Quantifikation bestimmte Zahlen zu erkennen:

- $\exists y(x < y)$
- $\exists x(x < y)$
- $\forall y(x < y)$
- $\forall x(x < y)$

In jedem der Fälle kommt wieder $\mathbb{Z}$ heraus, jegliche logische Verknüpfungen erzeugen entweder wieder $\mathbb{Z}$ oder die leere Menge, man könnte das mit einer strukturellen Induktion beweisen, aber wär echt viel Schreibarbeit.

Durch die Abwesenheit von Funktionssymbolen ist es somit nicht möglich, eine Formel φ aufzustellen, die die gegebenen Vorraussetzungen erfüllt.

Aufgabe 4

Es gibt folgende Fälle:

1. $q = 0$
   Dann gilt die Aussage schon nach dem Hinweis des Aufgabenblattes.

2. $q \geq 1$
   Sei φ die Formel ohne freie Variablen mit maximal q Quantoren. Dann gibt es eine zu φ nach Theorem 4.34 der Folien eine äquivalente Formel φ' in Pränexnormalform. Also gilt $\varphi \equiv \varphi'$. Es reicht also zu zeigen, dass es nur endlich viele Formeln in Pränexnormalform gibt.

   Diese Formel φ' hat dann die Form $Q_1 x_1 ... Q_k x_k\ \psi$, mit $1 \leq k \leq q$, wobei ψ eine Formel der Aussagenlogik ist.

   Es existieren für k Quantoren $\frac{q!}{(q-k)!}$ Möglichkeiten die Reihenfolge zu vertauschen. Des Weiteren gilt, dass man bei k Quantoren nur k Variablen quantifizieren kann und für jeden Quantor 2 Möglichkeiten bestehen,$\forall$ oder $\exists$, sodass $(2k)^k$ Möglichkeiten existieren, die Variablen zu quantifizieren. Daraus folgt, dass es insgesamt $\sum\limits_{k=0}^{q} (\frac{q!}{(q-k)!} \cdot (2k)^k)$ Möglichkeiten gibt, für die Quantifizierung von einer aussagenlogischen Formel ψ mit maximal q Quantoren. Da es nur endliche viele verschiedene aussagenlogische Formel ψ gibt, die man mit n Variablen bilden kann und auch nur für jede Formel ψ endlich viele Quantifizierungsmöglichkeiten existieren, folgt daraus, dass es auch nur endlich viele Formeln ϕ der Prädikatenlogik geben kann.