Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 10

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$, wobei M ein 3-stelliges Relationssymbol ist und es gilt $(a,b,c) \in M^{\mathcal{A}_1} \Leftrightarrow a \cdot b = c$ für $a,b,c \in \mathbb{C}$ und $M^{\mathcal{B}_1} = M^{\mathcal{B}_1} \cap \mathbb{R}^3$

Die Duplikatorin gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_1, a_1, a_1))$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_1, b_1, b_1))$
2. Zug: Fall 1. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_2, a_2, a_1)) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_2, b_2, b_1)) \wedge b_1 \neq b_2$
   Fall 3. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $a_2 = a_1$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $b_2 = b_1$

Der Herausforderer gewinnt das 3-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$ sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$ sonst verliert sie sofort.
3. Zug: H wählt $a_3 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_3, a_3, a_2) \wedge a_3 \neq a_2$ Dann gilt $M^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_3, a_3, a_2)$
   Da $M^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gelten muss, muss b_1 gleich 1 oder 0 sein. Da jedoch auch $M^{\mathcal{B}_1}(b_2, b_2, b_1)$ mit $b_2 \neq b_1$ gelten muss, muss $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$ sein. Nun gibt es aber keine $b_3 \in \mathbb{R}$ mit $M^{\mathcal{B}_1}(b_3, b_3, b_2)$, in $\mathbb{C}$ gibt es dafür $i \vee -i$

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b \exists c (M(a,a,a) \wedge M(b,b,a) \wedge M(c,c,b) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c))$

(ii) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$.

Die Duplikatorin gewinnt das 1-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\neg(R(a_1, a_1, a_1))$
   D wählt beliebiges $b_1 \in \mathbb{Z}$

Der Herausforderer gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$, sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_2, a_2, a_2) \wedge a_1 \neq a_2$
   Dann gilt $R^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), R^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_2)$. $R^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gilt zwar auch, aber da $a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$ gelten muss, jedoch nur die 0 diese Bedingung erfüllt, gewinnt H das 2-Runden Spiel.

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b (R(a,a,a) \wedge R(b,b,b) \wedge b \neq a)$

Aufgabe 2

1. Zwei σ-Strukturen $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind elementar äquivalent, genau dann wenn f.a. $\varphi \in FO(\sigma)$ gilt $\mathcal{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow B \vDash \varphi$ bzw. die Duplikatorin gewinnt für jedes $m \in \mathbb{N}$ das m-Runden Spiel.
2. Zwei σ-Strukturen $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind isomorph, wenn es eine Bijektion f zwischen diesen existiert und f ein Homomorphismus ist.

Beweis:

1. **$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind elementar äquivalent $\Leftrightarrow$ Die Duplikatorin gewinnt jedes m-Runden Spiel**
   Sei $m \in \mathbb{N}$ ein beliebig. Stimmt doch nicht, was ist wenn der Herausforderer ∞ wählt, dann ist alles kaputt... – Max Eine Gewinnstrategie der Duplikatiorin würde jeden Zug des Herausforderes kopieren, da $\infty \notin \mathbb{N}$ gilt diese Strategie für jedes m-Runden Spiel.

2. **$\mathcal{A} \ncong \mathcal{B} \Leftrightarrow$ Es gibt keine Bikjektion zwischen den Strukturen und f ein Homomorphismus ist**
   Gibt es besagten Isomorphismus, so muss es ein Tupel $x = (\infty, i)$ geben, das auf $y = (k, j)$ abgebildet wird. Nun steht nach Definition von $E^{\mathcal{B}}$ x mit unendlich vielen Elementen in Relation, y aber immer nur mit endlich vielen, da es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die kleiner als k sind. Darum kann es keinen Isomorphismus geben, da Elemente nicht bedeutungsgleich abgebildet werden können.

Aufgabe 3

In Aufgabe 2.) wurde gezeigt, dass die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent sind, d.h. heisst f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$. $\mathcal{A}$ besitzt nur endliche Komponenten, $\mathcal{B}$ auch eine unendliche.
Somit kann es keine Formel $\varphi \in FO[\sigma]$ geben, die nur dann erfüllbar ist genau dann wenn der Graph nur endliche Komponenten enthält, da die Strukturen elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4

Ein Aussage eines unendlichen EF-Spiels ist äquivalent zur Aussage ob zwischen den Strukturen ein isomorphismus vorliegt, also:

$$\text{D gewinnt } \mathfrak{G}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$$

Beweis:

1. (a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow$ D gewinnt $\mathfrak{G}_\infty$
   Der Isomorphismus ist eine Gewinnstrategie für D.

   (b) D gewinnt $\mathfrak{G}_\infty \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$
   Die Züge von D. stellen ein Isomorphismus da...

In Aufgabe 2.) gewinnt die Duplikatorin jedes Spiel, da die Strukturen elementar äquivalent sind, sie sind jedoch nicht isomorph, womit sie das unendliche EF-Spiel nicht gewinnen würde.