

# Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 9

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528  
Maximilian Bachl - 341455  
Marius Liwotto - 341051

## Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \neg(\exists x \exists y E(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \rightarrow \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \forall x \exists y \forall z \neg (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \forall x \exists y \forall z (E(x, z) \wedge \neg (f(x, y) = z))) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x_1 \exists y_2 E(x_1, y_2) \wedge \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 (E(x_2, z_1) \wedge \neg (f(x_2, y_2) = z_1))) \vee \exists x_3 E(x_3, f(y, x_3)) \\ &\equiv \exists x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 \exists x_3 ((E(x_1, y_2) \wedge (E(x_2, z_1) \wedge \neg (f(x_2, y_2) = z_1)))) \vee E(x_3, f(y, x_3))\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\varphi_2 &:= \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (E(y, z) \rightarrow \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \neg \forall y R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (\neg E(y, z) \vee \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \neg \forall y R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (\neg E(y, z) \vee \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \exists y \neg R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y_1 \forall z_1 (E(x_1, z_1) \wedge (\neg E(y_1, z_1) \vee \forall x_2 (E(f(x_2, y_1), z_1) \wedge \exists y_1 \neg R(x_2, y_1)))) \\ &\equiv \exists y_1 \forall z_1 \forall x_2 (E(x_1, z_1) \wedge (\neg E(y_1, z_1) \vee (E(f(x_2, y_1), z_1) \wedge \neg R(x_2, y_1))))\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathcal{N}) &:= \exists x (y = x + x) \\ \phi_1(x) &:= \exists y (y \cdot y = x) \\ \phi_{prim}(x) &:= \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow (\phi_1(y) \wedge z = x) \vee (\phi_1(z) \wedge y = x)) \\ \phi_2(\mathcal{N}) &:= \forall a \forall b \forall c \exists d (b \cdot c = a \rightarrow (c = \phi_1(d) + \phi_1(d) \vee b = \phi_1(d) + \phi_1(d))) \\ \phi_3(\mathcal{R}) &:= x = y \cdot y \\ \phi_4(\mathcal{R}) &:= \exists m \forall n (m \cdot n = m \wedge m = x + y) \\ \phi_5(\mathcal{R}) &:= \exists m \exists n (n \cdot n = m \wedge y = x + m) \\ \phi_6(\mathcal{R}) &:= (u'' = u \cdot u' - v \cdot v') \wedge (v'' = u' \cdot v + u \cdot v')\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

(i)  $\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$\varphi(\mathcal{B}) = \pi(\varphi(\mathcal{A})) \Leftrightarrow \forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \bar{x} \in \pi(\varphi(\mathcal{A})))$$

Da  $\pi$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  ist, gilt für alle Relationen  $R$  aus  $\sigma$ :

$$(*) \bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \pi(\bar{a}) \in R^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned}
& (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}) = 1)) \\
& \Leftrightarrow (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \varphi(\pi^{-1}(x_1), \dots, \pi^{-1}(x_k)) = 1)) \\
& \Leftrightarrow (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow (\pi^{-1}(x_1), \dots, \pi^{-1}(x_k)) \in \varphi(\mathcal{A}))) \\
& \Leftrightarrow (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \bar{x} \in \pi(\varphi(\mathcal{A})))) \\
& \Leftrightarrow \varphi(\mathcal{B}) = \pi(\varphi(\mathcal{A}))
\end{aligned}$$

(ii) Die gegebene Struktur enthält nur die Relation  $<$  aber keine Funktionssymbole.  $<$  ist über  $\mathbb{Z}$  eine Relation ohne Maximum oder Minimum.

Damit es ein  $\varphi$  gibt sodass  $\varphi(\mathcal{Z}) = \{0\}$ , muss es möglich sein, die 0 von allen anderen Zahlen zu unterscheiden. Durch die Unendlichkeit von  $\mathbb{Z}$  ist es nicht möglich durch Quantifikation bestimmte Zahlen zu erkennen:

- $\exists x \exists y (x < y)$
- $\exists y (x < y)$
- $\exists x (x < y)$
- $\forall x \forall y (x < y)$
- $\forall y (x < y)$
- $\forall x (x < y)$
- $x < y$
- $\exists x \forall y (x < y)$
- $\forall x \exists y (x < y)$

In jedem der Fälle gibt es unendlich viele Variablen, die die Gleichung erfüllen. Die mehrfache Verwendung von  $<$  hilft nicht weiter, da die Menge an erfüllenden Werten immer unendlich groß bleibt.

Durch die Abwesenheit von Funktionssymbolen ist es somit nicht möglich, eine Formel  $\varphi$  aufzustellen, die die gegebenen Voraussetzungen erfüllt.

## Aufgabe 4

Es gibt folgende Fälle:

1.  $q = 0$

Dann gilt die Aussage schon nach dem Hinweis des Aufgabenblattes.

2.  $q \leq 1$

Sei  $\varphi$  die Formel ohne freie Variablen mit maximal  $q$  Quantoren. Dann gibt es eine zu  $\varphi$  nach Theorem 4.34 der Folien eine äquivalente Formel  $\varphi'$  in Pränexnormalform. Also gilt  $\varphi \equiv \varphi'$ . Es reicht also zu zeigen, dass es nur endlich viele Formeln in Pränexnormalform gibt.

Diese Formel  $\varphi'$  hat dann die Form  $Q_1 x_1 \dots Q_p x_p \psi$ , mit  $1 \leq p \leq q$  wobei  $\psi$  eine Formel der Aussagenlogik ist, in der keine freien Variablen vorhanden sind.

Somit kann nach der Annahme des Aufgabenblattes  $\psi$  nur eine von endlich vielen Formeln sein. Die Reihenfolge der Quantoren  $Q_1 x_1 \dots Q_p x_p \psi$  spielt für den Wahrheitswert von  $\varphi$  keine Rolle.

Somit gibt es bis auf logische Äquivalenz nur endlich viele Formeln mit weniger als  $q$  Quantoren.