Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

Hinrichtung

Beweis durch strukturelle Induktion. Seien dazu β und β' zwei Belegungen mit $\beta \leq \beta'$.

IA φ ist eine monotone Formel ohne einen einzigen Junktor. Dann gibt es nur folgende drei Möglichkeiten:

- $\varphi = \bot$
- $\varphi = \top$
- $\varphi = X_1$

IV φ ist eine monotone Formel. Sie ist besteht nur aus $X_1, ..., X_m$ sowie $\bot$, $\top$, $\wedge$ und $\vee$.

IS Das Anhängen von $\top$ und $\bot$ funktioniert, da es keinen Einfluss auf die Monotonie der Formeln hat (Da die Belegung nur Einfluss auf Variablen hat)

- $\neg\varphi$ ist nicht monoton, da $[\![\varphi]\!]^\beta \leq [\![\varphi]\!]^{\beta'} \rightarrow [\![\neg\varphi]\!]^\beta \geq [\![\neg\varphi]\!]^{\beta'}$. Daher kann die Formel nicht negiert werden.
- $\varphi \wedge \neg X_k$ ist ebenfalls nicht monoton, da wenn $\beta(X_k) = 0 \wedge \beta'(X_k) = 1$ ist, $[\![\varphi \wedge \neg X_k]\!]^\beta \geq [\![\varphi \wedge \neg X_k]\!]^{\beta'}$.
- $\varphi \vee \neg X_k$ ist ebenfalls nicht monoton, da wenn $\beta(X_k) = 0 \wedge \beta'(X_k) = 1$ ist, $[\![\varphi \vee \neg X_k]\!]^\beta \geq [\![\varphi \vee \neg X_k]\!]^{\beta'}$.

Somit kann an φ nur einer der in der Angabe aufgezählten Bausteine erweitert werden, damit die Monotonie nicht verletzt wird.

Rückrichtung

Beweis durch strukturelle Induktion. Seien dazu β und β' zwei Belegungen mit $\beta \leq \beta'$, sowie φ eine Formeln die nur aus Variablen $X_1, ..., X_n$ und $\bot, \top, \wedge, \vee$ besteht.

IA $\varphi = X_1$
Es gibt drei Möglichkeiten für β und β', sodass $\beta \leq \beta'$.

- $\beta(X_1) = 0 \leq 0 = \beta'(X_1)$
  $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![\varphi]\!]^\beta \leq [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
- Die anderen Fälle sind analog.

IV Sei φ eine monotone Formel, wobei diese nur aus Variablen $X_1, ..., X_n$ und $\bot, \top, \wedge, \vee$ besteht.

IS Da das Anhängen von $\top$ und $\bot$ mittels $\wedge, \vee$ keinerlei Einfluss auf die Monotonie von Formeln hat (Da die Belegung nur Einfluss auf Variablen hat), werden diese hier nicht betrachtet. Es ist nun zu zeigen, dass die Aussage auch für $\varphi \wedge X_{n+1}$ und $\varphi \vee X_{n+1}$ gilt.

- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 0 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$

  - $*$ $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $*$ $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 0 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$

- $\varphi \wedge X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 1 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  - $*$ $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 0 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $*$ $\beta(X_{n+1}) = 0 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
  - $*$ $\beta(X_{n+1}) = 1 \leq 1 = \beta'(X_{n+1})$
    $[\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta = 1 \leq 1 = [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'} \Rightarrow [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^\beta \leq [\![(\varphi \wedge X_{n+1})]\!]^{\beta'}$
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 0 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Analog
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 0 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Anolog
- $\varphi \vee X_{n+1}$ mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 1 \overset{\textbf{IV}}{\leq} 1 = [\![\varphi]\!]^{\beta'}$
  Analog

Aufgabe 2

(i) Es ist zu zeigen, dass NAND funktional vollständig ist. Bisher kennen wir $\{\neg, \vee, \wedge\}$ als funktional vollständig. Wenn nun alle Operatoren dieser Basis durch NAND dargestellt werden können, ist NAND funktional vollständig.

- $\neg\phi \equiv (\phi \text{ NAND } \phi)$

ϕ	$\neg\phi$	$(\phi \text{ NAND } \phi)$
0	1	1
1	0	0

- $(\phi \wedge \psi) \equiv ((\phi \text{ NAND } \psi)\text{NAND}(\phi \text{ NAND } \psi))$

- $(\phi \vee \psi) \equiv (\phi \text{ NAND } \phi)\text{NAND}(\psi \text{ NAND } \psi))$

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$	$((\phi \text{ NAND } \phi)\text{NAND}(\psi \text{ NAND } \psi))$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Da alle Operatoren der uns bekannten funktional vollständigen Junktorbasis durch NAND darstellbar ist, ist NAND funktional vollständig.

(ii) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ist nicht funktional vollständig, da $\neg X$ mit $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht darstellbar ist. Sei dazu die Belegung β definiert als $\beta(X) = 1$. Beweis per struktureller Induktion:

IA $\phi = X$
$[\![X]\!]^\beta = 1$

IV Seien ϕ_1, ϕ_2 Formeln die nur aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ bestehen, wobei gilt, dass $[\![\phi_1]\!]^\beta = 1 = [\![\phi_2]\!]^\beta$

IS
- $\psi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]^\beta = 1$
- $\psi = (\phi_1 \vee \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \vee \phi_2)]\!]^\beta = 1$
- $\psi = (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$
  $[\![(\phi_1 \rightarrow \phi_2)]\!]^\beta = 1$

Damit ist bewiesen, dass die Junktorbasis $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 3

(i) Sei φ_n induktiv definiert als:

$$\varphi_1(X_1) = X_1$$
$$\varphi_{n+1}(X_1, ..., X_{n+1}) = \varphi_n(X_1, ..., X_n) \oplus X_{n+1}$$

Wie im Tutorium 2 bewiesen wurde, wechselt φ immer den Wahrheitswert, wenn sich in der Belegung eine Zahl ändert. Damit gibt es genau 2^{n-1} Belegungen zu denen φ zu wahr auswertet. Somit hätte die kanonische KNF 2^{n-1} Klauseln. Diese lassen sich jedoch **nicht** zusammenfassen, da sich in jeder Klausel immer mindestens 2 Variablen unterscheiden (wobei X und $\neg X$ als unterschiedlich gelten) . Dies entsteht wie schon erwähnt dadurch, dass sich der Wahrheitswert ändert, sobald eine Variable ihren Wert ändert. Somit müssen sich immer mindestens 2 Variablen jeder Belegung unterscheiden damit die KNF zu true auswertet. Wollte man die Aussage beweisen, müsste man zeigen, dass sich Klauseln mit mindestens 2 unterschiedlichen Variablen nicht zusammenfassen lassen. Siehe Satz von Quine-McClusky.

Dadurch hat die minimale KNF 2^{n-1} Klauseln mit jeweils n Variablen in jeder Klausel. Das ist offensichtlich exponentiell.

(ii) Die Formel, sowie die Begründung von 3i kann übernommen wurden.

Aufgabe 4

Rückrichtung

Annahme: Für jedes $n \geq 0$ existiert eine Parkettierung. Wir definieren die folgende Variablen für jedes Feld der Parkettierung:

$$X_{(i,j),d} \text{ mit } d \in |\mathcal{D}| \text{ und } (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Jedes Feld kann natürlich nur einen Dominostein haben:

$$\mathsf{proper\text{-}field}(i,j) = \bigvee_{d \in \mathcal{D}} (X_{i,j,d} \wedge \bigwedge_{\overline{d} \in \mathcal{D} \setminus \{d\}} \neg X_{i,j,\overline{d}})$$

Die Umgebung jedes Steines muss korrekt sein:

$$\mathsf{proper\text{-}surrounding}(i,j) := \bigvee_{m,l,r,o,u \in \mathcal{D}} ((X_{i,j,m} \wedge X_{i-1,j,l} \wedge X_{i+1,j,r} \wedge X_{i,j+1,o} \wedge X_{i,j-1,u}) \\ \wedge (m_1 = l_r \wedge m_2 = o_4 \wedge m_3 = r_1 \wedge m_4 = u_2) \wedge \mathsf{proper\text{-}field}(i,j)))$$

wobei für nicht definierte Variablen diese gleich $\top$ ist. Sei nun Φ definiert als:

$$\Phi = \{\mathsf{proper\text{-}surrounding}(i,j) \mid i,j \in \mathbb{Z}\}$$

Zu zeigen Φ ist erfüllt. Sei $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nun definiere Φ_0 als:

$$\Phi_0 = \{\mathsf{proper\text{-}surrounding}(i,j) \mid i,j \in \mathbb{Z}_n\}$$

Offensichtlich gilt: $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Die Parkettierung definiert eine erfüllbare Belegung von Φ_0. Nach dem Kompaktheitssatz existiert auch eine erfüllbare Belegung von Φ.

Hinrichtung

Die Hinrichtung ist trivial.