Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 6

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i) $h : V(G) \to V(H)$
$v_1 \mapsto w_1$
$v_2 \mapsto w_2$
$v_3 \mapsto w_1$
$v_4 \mapsto w_3$
$v_5 \mapsto w_2$

(ii) Zu zeigen ist:
(i) Graph G ist 3-färbbar $\Rightarrow$ es existiert ein Homomorph. von G nach H
(ii) es existiert ein Homomorph. von G nach H $\Rightarrow$ Graph G ist 3-färbbar

H ist 3-färbbar mit folgender Farbbelegung
c: V(H) $\to \{r, g, b\}$
$c(w_1) \mapsto r$
$c(w_2) \mapsto g$
$c(w_3) \mapsto b$

(i) Da G 3-färbbar ist, gilt:
$\exists c' : V(G) \to$ {r,g,b}. c′ ist eine 3-Färbung von G

Daraus kann man nun folgenden Homomorphismus h bilden:

$h : V(G) \to V(H)$

$$h(v) \mapsto \begin{cases} w_1, & c'(v) = r \\ w_2, & c'(v) = g \\ w_3, & c'(v) = b \end{cases}$$

Beweis der Richtigkeit des gebildeten h:
Es muss gelten:

$\forall \{u, v\} \in E(G).\ \{h(u), h(v)\} \in E(H)$

Da nach Annahme alle Knoten einer Kante aus G verschiedenfarbig sind, gilt:

(1) $\forall \{u, v\} \in E(G).\ h(u) \neq h(v)$

Des Weiteren gilt:

(2) $\forall\ u \in \{w_1, w_2, w_3\}.\ \forall\ v \in \{w_1, w_2, w_3\} \setminus \{u\}.\ \{u, v\} \in E(H)$

Aus (1) und (2) folgt:

$\forall \{u, v\} \in E(G).\ \{h(u), h(v)\} \in E(H)$

(ii) Da ein Homomorphismus h von G nach H existiert, gilt:

$(*)\ \forall \{u, v\} \in E(G).\ \{h(u), h(v)\} \in E(H)$

Daraus kann man nun folgende 3-Färbung c′ ableiten:

$c' : V(G) \rightarrow$ {r,g,b}

$c'(v) \mapsto c(h(v))$

Beweis der Richtigkeit der 3-Färbung c′:

Es gilt:

$(**)\ \forall\ \{u, v\} \in E(G).\ h(u) \neq h(v)$

Würde dies nicht gelten, würde das bedeuten, dass $\{h(u), h(u)\} \in E(H)$ sein würde, da aber H irreflexiv ist, wäre das ein Widerspruch. Aus (*) und (**) folgt:

$\forall\ \{u, v\} \in E(G).\ c(h(u)) \neq c(h(v)) \Leftrightarrow \forall\ \{u, v\} \in E(G).\ c'(u) \neq c'(v)$

$\Rightarrow$ c′ ist eine passende 3-Färbung für G $\Rightarrow$ G ist 3-färbbar

Aufgabe 2

Zu zeigen ist:
(i) Existieren für alle endlichen Teilgraphen G′ von G Homomorphismen von G′ nach H, so existiert auch ein Homomorphismus von G nach H.

(ii) Existiert für G ein Homomorphismus von G nach H, so existieren für alle endlichen Teilgraphen G′ von G Homomorphismen von G′ nach H.

(i) Der Graph G = (V,E) wird folgendermaßen in einer Aussagenlogische Formel übersetzt:
Für jede Kante $\{u, v\} \in$ E(G) führen wir eine Variable $X_{u,v}$ ein.

Sei h: V(G) $\rightarrow$ V(H)

$\Phi = \{\{X_{u,v} \Rightarrow X_{h(u),h(v)}\} \mid \{u, v\} \in E(G)\}$

Sei $\Phi_0 \subset \Phi$

$E' = \{\{u, v\} \mid \{X_{u,v} \Rightarrow X_{h(u),h(v)}\} \in \Phi_0\}$
$V' = \{v \mid \{u, v\} \in E'\}$

Da Φ_0 eine endliche Teilmenge von Φ ist, muss auch E′ und damit V′ endlich sein. Für den von V′ endlichen induzierten Untergraphen G′ von G existiert nach Annahme ein Homomorphismus h′: V(G′) $\rightarrow$ V(H). Daraus folgt, dass folgendes gilt:
$\forall\ \{u, v\} \in E'.\ \{h'(u), h'(v)\} \in E(H)$

Eine passende Belegung β wäre somit Folgende:

$\beta(X_{u,v}) = 1$, wenn $\{u, v\} \in$ E′ und $\beta(X_{h'(u),h'(v)}) = 1$, wenn $\{h'(u), h'(v)\} \in$ E(H)

Aus der Erfüllbarkeit von Φ_0, gilt nach dem Kompaktheitssatz, dass Φ auch erfüllbar ist. Daraus folgt, dass ein Homomorphismus h: V(G) $\rightarrow$ V(H) existiert, wenn für alle Teilgraphen G′ ein Homomorphismus existiert.

(ii) Ist trivial.

Aufgabe 3

In der Hausaufgabe 4 wurde bewiesen, dass die P-Resolution korrekt ist, d.h. falls es eine Menge von Klausels eine P-Resolutionswiderlegung hat, so ist die Klauselmenge unerfüllbar. Damit die P-Resolution vollständig ist, muss gezeigt werden, dass für jede unerfüllbare Klauselmenge eine P-Resolutionswiderlegung existiert. Dazu wird zuerst folgende Behauptung aufgestellt:

Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{C}$ eine unerfüllbare Klauselmenge in den Variablen $\{V_1, ..., V_{n-1}\}$. Dann hat $\mathcal{C}$ eine Resolutionswiderlegung.

IA: $n = 1$.
In diesem Fall ist $\mathcal{C}$ unerfüllbar und enthält keine Variablen. Also $\mathcal{C} := \{\Box\}$ und somit existiert eine Resolutionswiderlegung, bzw. das ganze ist schon eine Resolutionswiderlegung.

IS: $n \to n + 1$

Sei $\mathcal{C}$ eine unerfüllbare Klauselmenge in den Variablen $\{V_1, ..., V_n\}$. Wir definieren

$$\mathcal{C}^+ := \{C \setminus \{\neg V_n\} : C \in \mathcal{C} \wedge V_n \notin C\}$$
$$\mathcal{C}^- := \{C \setminus \{V_n\} : C \in \mathcal{C} \wedge \neg V_n \notin C\}$$

$\mathcal{C}^+$ und $\mathcal{C}^-$ sind beide unerfüllbar. Denn wäre z.B. C^+ erfüllbar, z.B. durch $\beta \models \mathcal{C}^+$, dann würde $\beta' := \beta \cup \{V_n \to 1\}$ die Menge $\mathcal{C}$ erfüllen.
Nach Induktionsvorraussetzung gibt es Resolutionsableitungen $(C_1, ..., C_s)$ und $(D_1, ..., D_t)$ der leeren Klausel $C_s = D_t = \Box$ aus $\mathcal{C}^+$ bzw. $\mathcal{C}^-$.

Falls $(D_1, ..., D_t)$ schon eine Ableitung von $\Box$ aus $\mathcal{C}$ ist, sind wir fertig. Andernfalls werden Klauseln D_i benutzt, die aus $\mathcal{C}$ durch Entfernen von V_n entstanden sind, d.h. $D_i \cup \{V_n\} \in \mathcal{C}$.
Fügen wir zu diesen Klauseln und allen Resolventen wieder V_n hinzu, so erhalten wir eine Ableitung $(D'_1, ..., D'_t)$ von V_n aus $\mathcal{C}$.

Falls $(C_1, ..., C_s)$ schon eine Ableitung von $\Box$ aus $\mathcal{C}$ ist, sind wir fertig. Andernfalls werden Klauseln C_i benutzt, die aus $\mathcal{C}$ durch Entfernen von $\neg V_n$ entstanden sind, d.h. $C_i \cup \{\neg V_n\} \in \mathcal{C}$.

Fügen wir zu diesen Klausel $\neg V_n$ hinzu, gibt es in der normalen Resolution eine Ableitung $(C'_1, ..., C'_s)$ von $\neg V_n$ aus $\mathcal{C}$. Doch es gibt in der P-Resolution das Problem, das immer eine positive Klausel resolviert werden muss, und da wir negative Variablen zu den Klauseln hinzufügten, ist $(C'_1, ...' C'_s)$ unter Umständen keine gültige P-Resolution.

Doch haben wir schon zuvor $\{V_n\}$ resolviert, wodurch alle Klauseln der Form $C_i \cup \{\neg V_n\} \in \mathcal{C}$ wieder zu C_i resolviert werden können. Diese Resolutionskette bezeichne als $(C'D'_1, ..., C'D'_k)$. Nun sind die Resolutionsableitungen $(C_1, ..., C_s)$ möglich, da alle Klauseln vorliegen.

Damit wäre $(D'_1, ..., D'_t, C'D'_1, ..., C'D'_k, C_1, ..., C_s, \Box)$ eine Resolutionswiderlegung von $\mathcal{C}$

Nun muss das ganze noch für jede Klauselmenge $\mathcal{C}$ bewiesen werden. Sei dazu $\mathcal{C}$ eine unerfüllbare Klauselmenge

1. Ist $\mathcal{C}$ endlich, dann enthält sie nur endlich viele Variablen und der Beweis folgt sofort aus der Behauptung.

2. Ist $\mathcal{C}$ unendlich, dann folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass bereits eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$unerfüllbar ist. Also hat $\mathcal{C}'$ eine Resolutionswiderlegung. Diese ist aber auch eine Resolutionswiderlegung von $\mathcal{C}$.

Hinweis: Grosse Teile des Beweises kommen aus den Vorlesungsfolien der VL TheGI3 von S. Kreutzer.

Aufgabe 4

Wir definieren $n = |V(G)|$. Es werden n Variablen eingeführt, die jeweils n Indizes haben mit der Namensgebung $X_{i,j}$. Die Idee ist, dass diese $n \times n$ Matrix aus Variablen einen Pfad definiert, indem man jeweils genau eine Variable der n Variablen mit 1 belegt, alle anderen mit 0. Nun würden die Variablen $X_{i,j}$ und $X_{i+1,k}$ für die Kante $\{j, k\}$ stehen. φ muss folgendes leisten:

1. Jede Variable definiert genau einen Knoten.

$$\varphi_1 = \bigwedge_{0 \leq i < n} \bigvee_{j \in V(G)} \left(X_{i,j} \wedge \left(\bigwedge_{k \in V(G) \setminus \{j\}} \neg X_{i,k} \right) \right)$$

Jede Klausel hat die Grösse n, es werden n mal n Klauseln gebildet $\Rightarrow \varphi_1 \in \mathcal{O}(n^3)$

2. Jeder Knoten kommt genau einmal vor:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{j \in V(G)} \bigvee_{0 \leq i < n} \left(X_{i,j} \wedge \left(\bigwedge_{i' \in \{0,\dots,n-1\} \setminus \{i\}} \neg X_{i',j} \right) \right)$$

   Jede Klausel hat die Grösse n, es werden n mal n Klauseln gebildet $\Rightarrow \varphi_2 \in \mathcal{O}(n^3)$

3. Die Kanten existieren und bilden einen geschlossenen Pfad:

$$\varphi_3 = X_{n-1,0} \bigwedge_{0 \leq i < n} \bigvee_{\{k,l\} \in E(G)} X_{i,k} \wedge X_{i+1,l}$$

   Jede Klausel hat die Grösse 2, es werden n mal maximal $\binom{n}{2}$ Klauseln gebildet $\Rightarrow \varphi_3 \in \mathcal{O}(n^3)$

φ wird nun als Konjunktion des Ganzen definiert:

$$\varphi(G) = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

$\varphi(G)$ ist genau erfüllbar, wenn ein Hamilton Kreis in G existiert. Da für φ_{1-3} gezeigt wurde, dass es polynomiellen Aufwand hat, ist der Aufwand von φ ebenfalls polynomiell, nämlich $\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^3) = \mathcal{O}(n^3)$.