

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 9

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \neg(\exists x \exists y E(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \rightarrow \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \forall x \exists y \forall z \neg (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \forall x \exists y \forall z (E(x, z) \wedge \neg (f(x, y) = z))) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x_1 \exists y_2 E(x_1, y_2) \wedge \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 (E(x_2, z_1) \wedge \neg (f(x_2, y_2) = z_1))) \vee \exists x_3 E(x_3, f(y, x_3)) \\ &\equiv \exists x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 \exists x_3 ((E(x_1, y_2) \wedge (E(x_2, z_1) \wedge \neg (f(x_2, y_2) = z_1)))) \vee E(x_3, f(y, x_3))\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\varphi_2 &:= \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (E(y, z) \rightarrow \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \neg \forall y R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (\neg E(y, z) \vee \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \neg \forall y R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (\neg E(y, z) \vee \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \exists y \neg R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y_1 \forall z_1 (E(x_1, z_1) \wedge (\neg E(y_1, z_1) \vee \forall x_2 (E(f(x_2, y_1), z_1) \wedge \exists y_1 \neg R(x_2, y_1)))) \\ &\equiv \exists y_1 \forall z_1 \forall x_2 (E(x_1, z_1) \wedge (\neg E(y_1, z_1) \vee (E(f(x_2, y_1), z_1) \wedge \neg R(x_2, y_1))))\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathcal{N}) &:= \exists x (y = x + x) \\ \phi_{one}(x) &:= \forall y (y \cdot x = y) \\ \phi_{two}(x) &:= \exists y (x = y + y \wedge \phi_{one}(y)) \\ \phi_{prim}(x) &:= \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow (\phi_1(y) \wedge z = x) \vee (\phi_1(z) \wedge y = x)) \\ \phi_2(\mathcal{N}) &:= \forall b \forall c ((b \cdot c = a \wedge \phi_{prim}(b)) \rightarrow \phi_{two}(b)) \\ \phi_3(\mathcal{R}) &:= x = y \cdot y \\ \phi_4(\mathcal{R}) &:= \exists m \forall n (m \cdot n = m \wedge m = x + y) \\ \phi_5(\mathcal{R}) &:= \exists m \exists n (n \cdot n = m \wedge y = x + m) \\ \phi_6(\mathcal{R}) &:= (u'' = u \cdot u' - v \cdot v') \wedge (v'' = u' \cdot v + u \cdot v')\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(i) $\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$\varphi(\mathcal{B}) = \pi(\varphi(\mathcal{A})) \Leftrightarrow \forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \bar{x} \in \pi(\varphi(\mathcal{A})))$$

Da π ein Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist, gilt für alle Relationen R aus σ :

$$(*) \bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \pi(\bar{a}) \in R^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned}
& (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}) = 1)) \\
& \Leftrightarrow (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \varphi(\pi^{-1}(x_1), \dots, \pi^{-1}(x_k)) = 1)) \\
& \Leftrightarrow (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow (\pi^{-1}(x_1), \dots, \pi^{-1}(x_k)) \in \varphi(\mathcal{A}))) \\
& \Leftrightarrow (\forall \bar{x} (\bar{x} \in \varphi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \bar{x} \in \pi(\varphi(\mathcal{A})))) \\
& \Leftrightarrow \varphi(\mathcal{B}) = \pi(\varphi(\mathcal{A}))
\end{aligned}$$

- (ii) Die gegebene Struktur enthält nur die Relation $<$ aber keine Funktionssymbole. $<$ ist über \mathbb{Z} eine Relation ohne Maximum oder Minimum.

Damit es ein φ gibt sodass $\varphi(\mathbb{Z}) = \{0\}$, muss es möglich sein, die 0 von allen anderen Zahlen zu unterscheiden. Durch die Unendlichkeit von \mathbb{Z} ist es nicht möglich durch Quantifikation bestimmte Zahlen zu erkennen:

- $\exists y(x < y)$
- $\exists x(x < y)$
- $\forall y(x < y)$
- $\forall x(x < y)$

In jedem der Fälle kommt wieder \mathbb{Z} heraus, jegliche logische Verknüpfungen erzeugen entweder wieder \mathbb{Z} oder die leere Menge, man könnte das mit einer strukturellen Induktion beweisen.

Durch die Abwesenheit von Funktionssymbolen ist es somit nicht möglich, eine Formel φ aufzustellen, die die gegebenen Voraussetzungen erfüllt.

Aufgabe 4

Es gibt folgende Fälle:

1. $q = 0$

Dann gilt die Aussage schon nach dem Hinweis des Aufgabenblattes.

2. $q \geq 1$

Sei φ die Formel ohne freie Variablen mit maximal q Quantoren. Dann gibt es eine zu φ nach Theorem 4.34 der Folien eine äquivalente Formel φ' in Pränexnormalform. Also gilt $\varphi \equiv \varphi'$. Es reicht also zu zeigen, dass es nur endlich viele Formeln in Pränexnormalform gibt.

Diese Formel φ' hat dann die Form $Q_1 x_1 \dots Q_k x_k \psi$, mit $1 \leq k \leq q$, wobei ψ eine Formel der Aussagenlogik ist.

Es existieren für k Quantoren $\frac{q!}{(q-k)!}$ Möglichkeiten die Reihenfolge zu vertauschen. Des Weiteren gilt, dass man bei k Quantoren nur k Variablen quantifizieren kann und für jeden Quantor 2 Möglichkeiten bestehen, \forall oder \exists , sodass $(2k)^k$ Möglichkeiten existieren, die Variablen zu quantifizieren. Daraus folgt, dass es insgesamt $\sum_{k=0}^q \left(\frac{q!}{(q-k)!} \cdot (2k)^k \right)$ Möglichkeiten gibt, für die Quantifizierung von einer aussagenlogischen Formel ψ mit maximal q Quantoren. Da es nur endlich viele verschiedene aussagenlogische Formel ψ gibt, die man mit n Variablen bilden kann und auch nur für jede Formel ψ endlich viele Quantifizierungsmöglichkeiten existieren, folgt daraus, dass es auch nur endlich viele Formeln φ der Prädikatenlogik geben kann.