

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}\varphi_1 = & \quad \forall x \neg E(x, x) \wedge \\ & \quad \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow E(x, y) \vee E(y, x)) \wedge \\ & \quad \forall x \forall y \forall z (E(x, y) \wedge E(y, z) \Rightarrow E(x, z))\end{aligned}$$

(ii) Widerspruchsannahme:

Es existiert ein φ_2 mit Quantorenrang m , sodass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$

$\mathcal{A} \models \varphi_2$ genau dann, wenn $|A|$ ungerade ist.

gilt.

Nehmen wir nun die lineare endliche Ordnung $\mathcal{B}_1 = (B_1, E^{\mathcal{B}_1})$ mit $|B_1| = 2^{m+1} > 2^m$ und $\mathcal{B}_1 = (B_2, E^{\mathcal{B}_1})$ mit $|B_2| = 2^m + 1 > 2^m$. Es gilt nach dem Satz der Vorlesung, dass die Duplikatorin das EF-Spiel gewinnen würde, woraus folgt, dass φ_2 die beiden Ordnungen nicht unterscheiden könnte. Da aber $|B_1|$ gerade ist und $|B_2|$ ungerade, ist das ein Widerspruch zur Annahme, woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss. Somit kann kein solcher $FO[\sigma]$ -Satz φ_2 existieren.

(iii) Die Formel lautet folgendermaßen:

$$\varphi_3(x, y) = \neg \exists z$$

(iv) Widerspruchsannahme: Es existiert ein solcher $FO[\sigma]$ -Satz φ_4 .

Nach der Teilaufgabe (iii) existiert ein Satz φ_3 , sodass für jeden endlichen Graph $G = (A, E)$ gilt:

Der Graph $(A, \varphi_3(\mathcal{A}))$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $|A|$ ungerade ist.

Nun gilt nach φ_4 auch:

$$\begin{aligned}G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.} \\ \Leftrightarrow G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \not\models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ gerade ist.}\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Teilaufgabe (ii), woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss, sodass es keinen solchen $FO[\sigma]$ -Satz φ_4 geben kann.

Aufgabe 3

(i) Der Herausforderer spielt in der Struktur \mathcal{B} und wählt ∞ . Gibt die Duplikatorin das Element a als Antwort, dann gilt, dass ein Element i in \mathcal{A} existiert, sodass $a < b$. Daraus folgt aber, dass es ebenfalls ein $P_i^{\mathcal{A}}$ gibt, sodass $a \notin P_i^{\mathcal{A}}$, was jedoch ein Widerspruch ist, da ∞ in allen einstellig Relationen aus \mathcal{B} vorkommt.

(ii) Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ beliebig.

Für jedes $P_i(x)$ mit $x \in \mathbb{N}$ gilt (*):

$i > 0$:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_i(x) = 1$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x , sodass $x > i$ und damit $P_i(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_i(x) = 0$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x , sodass $x < i$ und damit $P_i(x) = 0$.

$i = 0$:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert eine Zahl x , sodass $x > 0$ und damit $P_0(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert keine Zahl x , sodass $x < 0$ und damit $P_0(x) = 1$.

Die Aussagen (*) gelten in beiden Strukturen, woraus folgt, dass alle Relationen gleich auswerten und somit auch der Satz φ in beiden Strukturen immer gleich ausgewertet. Da keine Einschränkung bei φ getroffen wurde, folgt, dass es keinen $FO[\sigma]$ -Satz gibt, der beide Strukturen unterscheidet, sodass sie elementar äquivalent sind.