Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i) Ein Graph $G = (V, E)$ ist zusammenhängend, falls von einem beliebigen Knoten $v_n \in V$ ein Pfad zu jedem anderen Knoten $v_m \in V$ existiert.

Man definiert

$$E' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) | \{x, y\} \in E\}^n$$

E' ist also der reflexive, symmetrische und transitive Abschluss von E.

Man kann sehr einfach feststellen ob ein Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat, dazu benutze den reflexiven, transitiven und symmetrischen Abschluss von E, nämlich E'. Weiterhin definiere X'_{ij} und erweitere den Zielbereich von β_G.

$$[\![X'_{ij}]\!]^{\beta_G} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E'$$

Wenn nun alle Knoten untereinander verbunden sind (wenn E' als Kantenmenge benutzt wird) dann ist der Graph G zusammenhängend.

$$\varphi_n = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} X'_{ij}$$

(ii) Wenn ein Graph einen Hamilton Kreis besizt, dann gibt es von einem beliebigen Knoten aus einen Pfad der Länge n, wobei n die Anzahl der Knoten ist der wieder zu diesem führt. Zuerst erweitere die Definitien von X_{ij}:

$$X''_{ij} \rightarrow \begin{cases} X_{ij}, & i < j \\ X_{ji}, & i > j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Sei weiterhin die Menge P_V die Menge aller möglichen Permutationen der Reihenfolge der Knoten V, diese Folgen sind dargestellt als n-Tupel. Die Schreibweise $t[x]$ bei Tupeln soll das x-te Element des Tupels t sein.

$$\varphi_n = \bigvee_{p \in P_V} \left(\left(\bigwedge_{k=1}^{n-1} X''_{p[k],p[k+1]} \right) \wedge X''_{p[n],p[1]} \right)$$

Aufgabe 2

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi\mathcal{S} &= (((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow (((X \vee \neg Y) \leftrightarrow Y))\mathcal{S} \\
&= (((X \wedge Y) \vee Z)\mathcal{S} \leftrightarrow (((X \vee \neg Y)\mathcal{S} \leftrightarrow Y)) \\
&= (((X \wedge Y)\mathcal{S} \vee Z\mathcal{S}) \leftrightarrow (((X \vee \neg Y)\mathcal{S} \leftrightarrow Y\mathcal{S})) \\
&= ... \\
&= (((X\mathcal{S} \wedge Y\mathcal{S}) \vee Z) \leftrightarrow (((X\mathcal{S} \vee \neg Y\mathcal{S}) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))) \\
&= ((((Z \vee U) \wedge (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))) \vee Z) \leftrightarrow (((Z \vee U) \vee \neg(Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))))
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\beta\mathcal{S}(Y) &= [\![\mathcal{S}(Y)]\!]^{\beta} = [\![((Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))]\!]^{\beta} = 1 \\
\beta\mathcal{S}(X) &= [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta} = [\![(Z \vee U)]\!]^{\beta} = 1 \\
\beta\mathcal{S}(U) &= \beta(U) = 1 \\
\beta\mathcal{S}(Z) &= \beta(Z) = 1
\end{aligned}$$

- $\beta\mathcal{S}$ ist passend für φ, da $\{X, Y, Z\} = \mathsf{var}(\varphi) \subseteq \mathsf{Dom}(\beta\mathcal{S}) = \{X, Y, U, Z\}$
  β ist passend für $\varphi\mathcal{S}$, da $\{Y, U, Z\} = \mathsf{var}(\varphi\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{Dom}(\beta) = \{Y, U, Z\}$
- Da $[\![\varphi]\!]^{\beta\mathcal{S}} = 1$ gilt: $\beta\mathcal{S} \vDash \varphi$ und $[\![\varphi\mathcal{S}]\!]^{\beta} = 1$ gilt auch: $\beta \vDash \varphi\mathcal{S}$. Somit wurde $\beta\mathcal{S} \vDash \varphi \Leftrightarrow \beta \vDash \varphi\mathcal{S}$ verifiziert.

Aufgabe 3

(i) $\varphi_1 \equiv \psi_1$

$$\begin{aligned}\varphi_1 \equiv X \to (Y \land Z) &\equiv \neg X \lor (Y \land Z)\\ &\equiv (\neg X \lor Y) \land (\neg X \lor Z)\\ &\equiv (X \to Y) \land (X \to Z)\\ &\equiv \psi_1\end{aligned}$$

(ii) $\varphi_2 \equiv \psi_2$

$$\begin{aligned}\varphi_2 \equiv (X \land Y \land Z) \to Q &\equiv \neg(X \land Y \land Z) \lor Q\\ &\equiv \neg X \lor \neg Y \lor \neg Z \lor Q\\ &\equiv (\neg X \lor (\neg Y \lor (\neg Z \lor Q)))\\ &\equiv (X \to (Y \to (Z \to Q)))\\ &\equiv \psi_2\end{aligned}$$

(iii) $\varphi_3 \equiv \psi_3$

$$\begin{aligned}\varphi_3 \equiv (X \land Y) \to \neg(Z \to X) &\equiv \neg(X \land Y) \lor \neg(\neg Z \lor X)\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y) \lor (Z \land \neg X)\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y \lor Z) \land (\neg X \lor \neg Y \lor \neg X)\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y \lor Z) \land (\neg X \lor \neg Y)\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y)\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y) \land \top\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y) \land (\neg X \lor X)\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y) \land (Y \lor \neg X \lor X)\\ &\equiv (\neg X \lor \neg Y) \land (Y \lor X) \lor \neg X\\ &\equiv (X \to \neg Y) \land (\neg Y \to X) \lor \neg X\\ &\equiv \psi_3\end{aligned}$$

(iv) $\varphi_4 \equiv \psi_4$

$$\begin{aligned}\varphi_4 \equiv (Y \to Z) \to (Y \to X) &\equiv \neg(Y \to Z) \lor (Y \to X)\\ &\equiv \neg(\neg Y \lor Z) \lor (\neg Y \lor X)\\ &\equiv (Y \land \neg Z) \lor (\neg Y \lor X)\\ &\equiv (Y \lor \neg Y \lor X) \land (\neg Z \lor \neg Y \lor X)\\ &\equiv (T \lor X) \land (\neg Z \lor \neg Y \lor X)\\ &\equiv T \land (\neg Z \lor \neg Y \lor X)\\ &\equiv \neg Z \lor \neg Y \lor X\\ &\equiv \psi_4\end{aligned}$$

(v) $\varphi_5 \equiv \psi_5$

$$\begin{aligned}\varphi_5 \equiv (X \land \neg Y) \lor (Y \land \neg X) &\equiv \neg(\neg X \lor Y) \lor \neg(\neg Y \lor X)\\ &\equiv \neg(X \to Y) \lor \neg(Y \to X)\\ &\equiv \neg((X \to Y) \land (Y \to X))\\ &\equiv \neg(X \leftrightarrow Y)\\ &\equiv \psi_5\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Aus der VL wissen wir, dass zu jeder aussagenlogischen Formel eine äquivalente KNF existiert.
Folglich gilt:

$$\varphi \equiv knf_\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} L_{ij}$$

Aus $\varphi \equiv \top$ kann man folgern, dass alle Disjunktionsterme von knf_φ wahr sein müssen. Des Weiteren gilt, dass χ die folgende äquivalente Form besitzt:

$$\chi \equiv t_\varphi \vee \gamma \text{ mit } \gamma \in AL,\ t_\varphi \text{ ist ein Disjunktionsterm von } knf_\varphi$$

Würde dies nicht gelten, so gäbe es eine passende Belegung β, sodass $[\![\chi]\!]^\beta \equiv \bot$, obwohl $[\![\varphi]\!]^\beta \equiv \top$. Das stünde im Widerspruch zur Aussage, dass $\varphi \Rightarrow \chi$ gilt. Aus der Struktur von χ folgt ebenfalls, dass t_φ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varphi \Rightarrow t_\varphi \wedge t_\varphi \Rightarrow \chi \wedge var(t_\varphi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$$

Daraus folgt, dass für alle Formeln $\varphi, \chi \in$ AL gilt mit $\varphi \Rightarrow \chi \equiv \top$:

$$\exists \psi \in AL. \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \chi \wedge var(\psi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$$