Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 7

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

trivial ;)

Aufgabe 2

(i) **Homomorphismus:**

$h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto n$

Beweis für Richtigkeit des Homomorphismus:

Konstanten:

$h(0^{\mathcal{N}}) = 0^{\mathcal{N}} = 0$
$h(1^{\mathcal{N}}) = 1^{\mathcal{N}} = 1$

Operatoren:

Sei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$h(+^{\mathcal{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 + n_2) = n_1 + n_2 = h(n_1) + h(n_2) = +^{\mathcal{Z}}(h(n_1), h(n_2))$

$h(\cdot^{\mathcal{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 \cdot n_2) = n_1 \cdot n_2 = h(n_1) \cdot h(n_2) = \cdot^{\mathcal{Z}}(h(n_1), h(n_2))$

Somit ist h ein gültiger Homomorphismus von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$.

(i)

Nach der Definition des Homomorphismus, müssen die Konstantensymbole wieder auf sich abgebildet werden. Somit gilt:

$h(0^{\mathcal{N}}) = 0^{\mathcal{Z}} = 0$
$h(1^{\mathcal{N}}) = 1^{\mathcal{Z}} = 1$

Des Weiteren gilt nach der Def. des Homomorphismus:

$h(+^{N}(z_1, z_2)) = +^{Z}(h(z_1), h(z_2))$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

Da h(1) = 1 gilt, muss auch folgendes gelten:

$h(+^{N}(1, 1)) = +^{Z}(h(1), h(1))$
$\Rightarrow h(2) = +^{Z}(1, 1) = 2$

Ebenso gilt:

$h(+^{N}(1, 2)) = +^{Z}(h(1), h(2))$
$\Rightarrow h(3) = +^{Z}(1, 2) = 3$

Das kann man jetzt für alle Zahlen von 0 bis ∞ fortführen, sodass jedes n $\in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 0$ auf n abgebildet wird. Folglich bleiben aber keine Zahlen mehr "übrig", auf die die negativen Zahlen aus $\mathbb{Z}$ abgebildet werden könnten. Ein Homomorphismus ist also nicht möglich von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$.

Aufgabe 3

Damit $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(i) Das Bild von h(A) $\subseteq$ B

(ii) Für alle Operatoren $op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}$ der Substruktur $\mathfrak{B}_{h(A)}$, muss gelten, dass sie abgeschlossen bzgl. des Bildes von h(A) sind.

Beweis für (i):

Der Homomorphismus h ist als Funktion folgendermaßen definiert:

h: A $\rightarrow$ B

Daraus folgt sofort, dass h(A) $\subseteq$ B ist.

Beweis für (ii):

Da h ein Homomorphismus von A nach B ist, muss gelten mit n als Stelligkeit des Operators:

$(*)\ \forall a_1\ \forall a_2 ... \forall a_n\ h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, ..., a_n)) = op^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)) = op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n))$

Wären die Operatoren nicht abgeschlossen bzgl. des Bildes von h, dann würde folgendes gelten:

$\exists a_1\ \exists a_2 ... \exists a_n\ (op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n))) \notin$ h(A)

Nach (*) gilt aber:

$\forall a_1\ \forall a_2 ... \forall a_n\ (h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, ..., a_n)) = op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)))$ mit

$h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, ..., a_n)) \in h(A) \Leftrightarrow op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)) \in h(A)$

was ein Widerspruch zur Annahme darstellt.
Folglich müssen die Operatoren abgeschlossen sein, weshalb h(A) eine σ-abgeschlossene Menge ist.

Da (i) und (ii) gilt, folgt nach dem Satz der VL, dass h(A) eine Substruktur $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$ induziert.

Aufgabe 4

Struktur:

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}})$

$n_1 <^{\mathcal{N}} n_2$ gdw. (n_1 mod 2 $<$ n_2 mod 2) oder ($n_1 = n_2$ und $n_1 < n_2$)

Damit $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ isomorph sind, muss es einen Isomorphismus zwischen $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ geben.

Isomorphismus:

$b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \times \mathbb{N}$

$n \rightarrow (n \text{ mod } 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

Beweis der Richtigkeit von b:

b muss folgende Dinge erfüllen:

(i) b muss eine Bijektion sein:
b: $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \times \mathbb{N}$

(ii) Für alle n-stelligen Relationssymbole R $\in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^n$:
wenn $\overline{a} \in \mathbb{N}^n$ genau, dann wenn $(b(a_1), b(a_2), ..., b(a_n)) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$

(iii) Für alle n-stelligen Funtionssymbole f $\in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^n$:
$b(f^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{M}}(b(a_1), b(a_2), ..., b(a_n))$

(iv) Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt:
$b(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{M}}$

Beweis für (i):

Damit b eine Bijektion ist, muss b und seine Inverse die Eigenschaften einer Funktion erfüllen, nämlich Linkstotalität und Injektivität.

b ist offensichtlich linkstotal.
b ist auch injektiv, da Folgendes gilt:

Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \neq n_2$:

b(n_1) = (n_1 mod 2, n_1) $\neq$ (n_2 mod 2, n_2) = b(n_2)

gilt wegen $n_1 \neq n_2$.

Die Inverse von b:

$b^{-1} : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$(k, n) \to \begin{cases} 2 \cdot n, & k = 0 \\ 2 \cdot n + 1, & sonst \end{cases}$$

b^{-1} ist offensichtlich linkstotal.
b^{-1} ist auch injektiv, da Folgendes gilt:

Seien $(k_1, n_1), (k_2, n_2) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ mit $(k_1, n_1) \neq (k_2, n_2)$:

Fall 1 $k_1 = 0 \neq 1 = k_2$: $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_1, n_2)$

Fall 2 $k_1 = 1 \neq 0 = k_2$: analog zu Fall 1

Fall 3 $n_1 \neq n_2$ und : $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 = b^{-1}(k_2, n_2)$
$k_1 = k_2 = 0$

Fall 4 $n_1 \neq n_2$ und : $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 + 1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_2, n_2)$
$k_1 = k_2 = 1$

Die Inverse b^{-1} ist also injektiv.
b ist damit eine Bijektion.

Beweis für (ii):

2-stelliges Relationssymbol $<$:

$\forall a_1 \forall a_2$ $((a_1, a_2) \in <^N$
$\Leftrightarrow$ $(a_1 \text{ mod } 2 < a_2 \text{ mod } 2) \vee (a_1 = a_2 \wedge a_1 < a_2)$
$\Leftrightarrow$ $(b(a_1), b(a_2)) \in <^M)$

Beweis für (iii):

Es gibt keine Funktionssymbole aus σ, also ist hier nichts zu beweisen.

Beweis für (iv):

Es gibt keine Konstantensymbole aus σ, also ist hier nichts zu beweisen.

b erfüllt damit i-iv und ist somit ein korrekter Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{M}$.