

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 10

Tutorium: Sebastian, Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

- (i) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$, wobei M ein 3-stelliges Relationssymbol ist und es gilt $(a, b, c) \in M^{\mathcal{A}_1} \Leftrightarrow a \cdot b = c$ für $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $M^{\mathcal{B}_1} = M^{\mathcal{B}_1} \cap \mathbb{R}^3$

Die Duplikatorin gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$
Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_1, a_1, a_1))$
D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_1, b_1, b_1))$
2. Zug: Fall 1. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$
Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_2, a_2, a_1)) \wedge a_1 \neq a_2$
D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_2, b_2, b_1)) \wedge b_1 \neq b_2$
- Fall 3. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $a_2 = a_1$
D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $b_2 = b_1$

Der Herausforderer gewinnt das 3-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$ sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$ sonst verliert sie sofort.
3. Zug: H wählt $a_3 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_3, a_3, a_2) \wedge a_3 \neq a_2$ Dann gilt $M^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_3, a_3, a_2)$
Da $M^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gelten muss, muss b_1 gleich 1 oder 0 sein. Da jedoch auch $M^{\mathcal{B}_1}(b_2, b_2, b_1)$ mit $b_2 \neq b_1$ gelten muss, muss $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$ sein. Nun gibt es aber keine $b_3 \in \mathbb{R}$ mit $M^{\mathcal{B}_1}(b_3, b_3, b_2)$, in \mathbb{C} gibt es dafür $i \vee -i$

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b \exists c (M(a, a, a) \wedge M(b, b, a) \wedge M(c, c, b) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c))$

- (ii) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$.

Die Duplikatorin gewinnt das 1-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$
Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\neg(R(a_1, a_1, a_1))$
D wählt beliebiges $b_1 \in \mathbb{Z}$

Der Herausforderer gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$, sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_2, a_2, a_2) \wedge a_1 \neq a_2$
Dann gilt $R^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), R^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_2)$. $R^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gilt zwar auch, aber da $a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$ gelten muss, jedoch nur die 0 diese Bedingung erfüllt, gewinnt H das 2-Runden Spiel.

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b (R(a, a, a) \wedge R(b, b, b) \wedge b \neq a)$

Aufgabe 2

Um zu beweisen, dass die Strukturen m-Äquivalent sind, reicht es eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin anzugeben.

Gewinnstrategie per Induktion:

IA:

$m = 0$, weswegen noch nichts gespielt wurde und die Duplikatorin kann noch nicht verloren haben kann.

IS: Es gilt, dass bereits m -Runden gespielt wurden und die Duplikatorin noch nicht verloren hat, wobei $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ und $b_1, b_2, \dots, b_m \in B$ bereits gespielt wurden.

Angenommen H spielt auf $b_{m+1} \in B$ mit $b_{m+1} \neq b_i, i \in \{1, \dots, m\}$. Fall b_{m+1} ein bereits gespieltes Element ist, spielt es die D auf das Element, welches es vorher gewählt hat.

Fall 1. $b_{m+1} = (\infty, b)$ mit $b \in \mathbb{N}$, dann wird b_{m+1} auf $(m+k, b)$ abgebildet, wobei $k > 0$.

- i. Es existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$, sodass $a_i = (m+k, b)$.
Suche ein b' , sodass $b' < m+k$ und $(m+k, b') \neq a_i$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$, welches existiert, da bis jetzt nur m Runden gespielt wurden und damit nur m Elemente, welcher kleiner $m+k$ sind genutzt wurden, existieren noch k passende b' .
 D bildet (∞, b) nun auf $(m+k, b')$ ab.
- ii. Es existiert kein $i \in \{1, \dots, m\}$, sodass $a_i = (m+k, b)$.
 D bildet (∞, b) nun auf $(m+k, b)$ ab.

Fall 2. $b_{m+1} = (n, b)$ mit $n, b \in \mathbb{N}$.

- i. Falls es ein b_i mit $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt, sodass $b_i = (n, l)$ mit $l \in \mathbb{N}$, dann bildet D (n, b) auf (n, b') ab:
 - A. Falls es ein $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt mit $a_i = (n, b)$, dann bildet D (n, b) auf (n, b') ab und wenn $b < n$ gilt, bildet D (n, b) auf (n, b') ab, sodass $b' < n$ gilt. Dieses (n, b') existiert, da für n genau eine Komponente der Größe n existiert, sodass es eine noch nicht belegte Kombination (n, b') gibt, für die $b' < n$ gilt.
 - B. Falls es ein $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt mit $a_i = (n, b)$, dann bildet D (n, b) auf (n, b') ab und wenn $b > n$ gilt, bildet D (n, b) auf (n, b') ab, sodass $b' < n$ gilt. Dieses (n, b') existiert, da unendlich viele $b' \in \mathbb{N}$ existieren, die größer als n sind.
- ii. Falls es kein b_i mit $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt, sodass $b_i = (n, l)$ mit $l \in \mathbb{N}$, dann bildet D (n, b) auf (n, b) ab.

Angenommen H spielt in \mathcal{A} , dann gilt der Fall, wenn H in \mathcal{B} analog dazu.

Beweis, dass es keinen Isomorphismus $\pi : B \rightarrow A$ gibt zwischen \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Wenn es eine Isomorphismus geben würde, müsste er auch die Tupel aus B mit unendlich auf Elemente aus A abbilden, in der Weise, dass ∞ des Tupels (∞, b) immer auf das selbe Element x abgebildet wird und b auf ein beliebiges y .

$$\pi((\infty, b)) = (x, y)$$

Würde dies nicht gelten, so würde gäbe es 2 Tupel $(\infty, b), (\infty, b')$:

$$\pi((\infty, b)) = (x, y) \neq (x', y) = \pi((\infty, b')) \Rightarrow E^B((\infty, b), (\infty, b')) \neq E^A(\pi((\infty, b)), \pi((\infty, b')))$$

Das stünde im Widerspruch zu den Isomorphismuseigenschaften.

Da gilt $E^B((\infty, b), (\infty, b')) \equiv T$ für alle $b, b' \in \mathbb{N}$ muss nach Isomorphismuseigenschaften gelten:

$$E^A(\pi((\infty, b)), \pi((\infty, b'))) \text{ für alle } b, b' \in \mathbb{N}.$$

Das ist aber nicht möglich, denn ∞ wird immer auf die natürliche Zahl x abgebildet, für das es immer ein y gibt, sodass $y > x$. Da es nur endliche viele verschiedene Zahlen gibt, die kleiner sind als x , aber unendlich viele Tupel der Form (∞, b) auf ein Tupel (x, y) injektiv abgebildet werden müssen, folgt, dass es ein Tupel (x, y) geben muss, sodass $x < y$.

Daraus folgt unweigerlich: $E^A((x, y), (x, y)) \equiv \perp$, was ein Widerspruch zu den Isomorphismuseigenschaften ist.

Aufgabe 3

In Aufgabe 2. wurde gezeigt, dass die σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} elementar äquivalent sind, d.h. heißt f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$. \mathcal{A} besitzt nur endliche Komponenten, \mathcal{B} auch eine unendliche.

Somit kann es keine Formel $\varphi \in FO[\sigma]$ geben, die nur dann erfüllbar ist genau dann wenn der Graph nur endliche Komponenten enthält, da die Strukturen elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4

Bei bestimmten Strukturen, bei denen man keine allgemeine Gewinnstrategie für die Duplikatorin wählen kann, sondern ein m benötigt, sagt ein Gewinn für die Duplikatorin in \mathfrak{G}_∞ etwas anderes aus, als dass sie f.a. m das \mathfrak{G}_m Spiel gewinnt. (Die Strukturen aus 2. sind solche)

Wie in 2.) gezeigt wurde, sind \mathcal{A} und \mathcal{B} elementar äquivalent, also dass die Duplikatorin f.a. $m \in \mathbb{N}$ das \mathfrak{G}_m Spiel gewinnt. Sei zu zeigen, dass die Duplikatorin das \mathfrak{G}_∞ nicht gewinnen kann.

Beweis: Der Herausforderer gewinnt das ∞ -Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in B$ mit $a_1 = (\infty, 0)$
D wählt $b_1 \in A$ mit $b_1 = (x, 0)$. Normalerweise sollte x eine möglichst grosse Zahl sein, damit D lange überlebt, aber dies ist irrelevant bei diesem Spiel.

2-x Zug: H wählt $a_x \in B$ mit $a_x = a_{x-1} + (0, 1)$
D wählt $b_x \in A$ mit $b_x = b_{x-1} + (0, 1)$

x+1. Zug: H wählt $a_{x+1} \in B$ mit $a_x = a_x + (0, 1)$
D wählt $b_{x+1} \in A$

Da D von Anfang an eine Struktur auswählen muss, aus der sie wählt, hat diese eine bestimmte Grösse x , nach x -Runden sind alle Elemente daraus aufgebraucht und ein Element aus einer anderen Struktur würde den partiellen Isomorphismus zerstören.

Damit wurde gezeigt, dass dies zwei verschiedene Spiele sind.