Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 9

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

(i)

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \neg(\exists x \exists y E(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z(\neg E(x,z) \vee f(x,y) = z)) \rightarrow \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x \exists y E(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z(\neg E(x,z) \vee f(x,y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x \exists y E(x,y) \wedge \forall x \exists y \forall z \neg(\neg E(x,z) \vee f(x,y) = z))) \vee \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x \exists y E(x,y) \wedge \forall x \exists y \forall z (E(x,z) \wedge \neg(f(x,y) = z)))) \vee \exists x E(x, f(y,x)) \\
&\equiv (\exists x_1 \exists y_2 E(x_1,y_2) \wedge \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 (E(x_2,z_1) \wedge \neg(f(x_2,y_2) = z_1)))) \vee \exists x_3 E(x_3, f(y,x_3)) \\
&\equiv \exists x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 \exists x_3 ((E(x_1,y_2) \wedge (E(x_2,z_1) \wedge \neg(f(x_2,y_2) = z_1)))) \vee E(x_3, f(y,x_3)))
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &:= \exists y \forall z(E(x,z) \wedge (E(y,z) \rightarrow \forall x(E(f(x,y),z) \wedge \neg \forall y R(x,y)))) \\
&\equiv \exists y \forall z(E(x,z) \wedge (\neg E(y,z) \vee \forall x(E(f(x,y),z) \wedge \neg \forall y R(x,y)))) \\
&\equiv \exists y \forall z(E(x,z) \wedge (\neg E(y,z) \vee \forall x(E(f(x,y),z) \wedge \exists y \neg R(x,y)))) \\
&\equiv \exists y_1 \forall z_1(E(x_1,z_1) \wedge (\neg E(y_1,z_1) \vee \forall x_2(E(f(x_2,y_1),z_1) \wedge \exists y_1 \neg R(x_2,y_1)))) \\
&\equiv \exists y_1 \forall z_1 \forall x_2(E(x_1,z_1) \wedge (\neg E(y_1,z_1) \vee (E(f(x_2,y_1),z_1) \wedge \neg R(x_2,y_1))))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
\phi_1(\mathcal{N}) &:= \exists\ x\ (y = x + x) \\
\phi_2(\mathcal{N}) &:= \exists\ x\ (y = x \cdot x) \\
\phi_3(\mathcal{R}) &:= x = y \cdot y \\
\phi_4(\mathcal{R}) &:= \exists\ m\ \forall\ n\ (m \cdot n = m \wedge m = x + y) \\
\phi_5(\mathcal{R}) &:= \exists\ m\ \exists\ n\ (n \cdot n = m \wedge y = x + m) \\
\phi_6(\mathcal{R}) &:= (u'' = u \cdot u' - v \cdot v') \wedge (v'' = u' \cdot v + u \cdot v')
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

(i)

(ii) Die gegebene Struktur enthält nur die Relation $<$ aber keine Funktionssymbole. $<$ ist über $\mathbb{Z}$ eine Relation ohne Maximum oder Minimum.

Damit es ein φ gibt sodass $\varphi(\mathcal{Z}) = \{0\}$, muss es möglich sein, die 0 von allen anderen Zahlen zu unterscheiden. Durch die Unendlichkeit von $\mathbb{Z}$ ist es nicht möglich durch Quantifikation bestimmte Zahlen zu erkennen:

- $\exists x \exists y(x < y)$
- $\exists y(x < y)$
- $\exists x(x < y)$
- $\forall x \forall y(x < y)$
- $\forall y(x < y)$

- $\forall x(x < y)$
- $x < y$
- $\exists x \forall y(x < y)$
- $\forall x \exists y(x < y)$
  In jedem der Fälle gibt es unendlich viele Variablen, die die Gleichung erfüllen. Die mehrfache Verwendung von $<$ hilft nicht weiter, da die Menge an erfüllenden Werten immer unendlich groß bleibt.
  Durch die Abwesenheit von Funktionssymbolen ist es somit nicht möglich, eine Formel φ aufzustellen, die die gegebenen Vorraussetzungen erfüllt.

Aufgabe 4

Es gibt folgende Fälle:

1. $q = 0$
   Dann gilt die Aussage schon nach dem Hinweis des Aufgabenblattes.

2. $q \leq 1$
   Sei φ die Formel ohne freie Variablen mit maximal q Quantoren. Dann gibt es eine zu φ nach Theorem 4.34 der Folien eine äquivalente Formel φ' in Pränexnormalform. Also gilt $\varphi \equiv \varphi'$. Es reicht also zu zeigen, dass es nur endlich viele Formeln in Pränexnormalform gibt.

   Diese Formel φ' hat dann die Form $Q_1x_1...Q_px_p\ \psi$, mit $1 \leq p \leq q$ wobei ψ eine Formel der Aussagenlogik ist, in der keine freien Variablen vorhanden sind.

   Somit kann nach der Annahme des Aufgabenblattes ψ nur eine von endlich vielen Formeln sein. Die Reihenfolge der Quantoren $Q_1x_1...Q_px_p\ \psi$ spielt für den Wahrheitswert von φ keine Rolle.
   Somit gibt es bis auf logische Äquivalenz nur endlich viele Formeln mit weniger als q Quantoren.