

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 9

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \neg(\exists x \exists y E(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \rightarrow \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y \exists z (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \forall x \exists y \forall z \neg (\neg E(x, z) \vee f(x, y) = z)) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x \exists y E(x, y) \wedge \forall x \exists y \forall z (E(x, z) \wedge \neg (f(x, y) = z))) \vee \exists x E(x, f(y, x)) \\ &\equiv (\exists x_1 \exists y_2 E(x_1, y_2) \wedge \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 (E(x_2, z_1) \wedge \neg (f(x_2, y_2) = z_1))) \vee \exists x_3 E(x_3, f(y, x_3)) \\ &\equiv \exists x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_2 \forall z_1 \exists x_3 ((E(x_1, y_2) \wedge (E(x_2, z_1) \wedge \neg (f(x_2, y_2) = z_1))) \vee E(x_3, f(y, x_3)))\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\varphi_2 &:= \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (E(y, z) \rightarrow \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \neg \forall y R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (\neg E(y, z) \vee \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \neg \forall y R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y \forall z (E(x, z) \wedge (\neg E(y, z) \vee \forall x (E(f(x, y), z) \wedge \exists y \neg R(x, y)))) \\ &\equiv \exists y_1 \forall z_1 (E(x_1, z_1) \wedge (\neg E(y_1, z_1) \vee \forall x_2 (E(f(x_2, y_1), z_1) \wedge \exists y_1 \neg R(x_2, y_1)))) \\ &\equiv \exists y_1 \forall z_1 \forall x_2 (E(x_1, z_1) \wedge (\neg E(y_1, z_1) \vee (E(f(x_2, y_1), z_1) \wedge \neg R(x_2, y_1))))\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathcal{N}) &:= \exists x (y = x + x) \\ \phi_2(\mathcal{N}) &:= \exists x (y = x \cdot x) \\ \phi_3(\mathcal{R}) &:= x = y \cdot y \\ \phi_4(\mathcal{R}) &:= \exists m \forall n (m \cdot n = m \wedge m = x + y) \\ \phi_5(\mathcal{R}) &:= \exists m \exists n (n \cdot n = m \wedge y = x + m) \\ \phi_6(\mathcal{R}) &:= (u'' = u \cdot u' - v \cdot v') \wedge (v'' = u' \cdot v + u \cdot v')\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(i)

(ii) Die gegebene Struktur enthält nur die Relation $<$ aber keine Funktionssymbole. $<$ ist über \mathbb{Z} eine Relation ohne Maximum oder Minimum.

Damit es ein φ gibt sodass $\varphi(\mathcal{Z}) = \{0\}$, muss es möglich sein, die 0 von allen anderen Zahlen zu unterscheiden. Durch die Unendlichkeit von \mathbb{Z} ist es nicht möglich durch Quantifikation bestimmte Zahlen zu erkennen:

- $\exists x \exists y (x < y)$
- $\exists y (x < y)$
- $\exists x (x < y)$
- $\forall x \forall y (x < y)$
- $\forall y (x < y)$

- $\forall x(x < y)$
- $x < y$
- $\exists x\forall y(x < y)$
- $\forall x\exists y(x < y)$

In jedem der Fälle gibt es unendlich viele Variablen, die die Gleichung erfüllen. Die mehrfache Verwendung von $<$ hilft nicht weiter, da die Menge an erfüllenden Werten immer unendlich groß bleibt.

Durch die Abwesenheit von Funktionssymbolen ist es somit nicht möglich, eine Formel φ aufzustellen, die die gegebenen Voraussetzungen erfüllt.

Aufgabe 4