

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 7

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

Die gebundenen Variablen bekommen im nachfolgenden Teil Indizes, die anzeigen, welcher Quantor welche Variablen bindet. Freie Variablen sind somit jene, die keinen Index haben.

(i)

$$\varphi_1 = \forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 ((E(x_1, y_1) \wedge E(y_1, z_1) \rightarrow E(x_1, z_1)) \wedge \exists x_2 E(x_2, x_2))$$

(ii)

$$\varphi_2 = \forall y_1 (E(x, y_1) \rightarrow \forall x_1 (E(y_1, x_1) \rightarrow P(x_1))) \rightarrow \forall y_2 (E(x, y_2) \rightarrow P(y_2))$$

(iii)

$$\varphi_3 = \exists y_1 (E(x, y_1) \wedge P(y_1)) \rightarrow \exists y_2 (E(x, y_2) \wedge (\neg \exists x_1 (E(y_2, x_1) \wedge P(x_1)) \wedge P(y_2)))$$

Aufgabe 2

(i) • **Konstruktion:**

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto n$$

• **Beweis für Richtigkeit des Homomorphismus:**

– **Konstanten:**

$$h(0^{\mathbb{N}}) = 0^{\mathbb{N}} = 0$$

$$h(1^{\mathbb{N}}) = 1^{\mathbb{N}} = 1$$

– **Operatoren:**

Sei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$h(+^{\mathbb{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 + n_2) = n_1 + n_2 = h(n_1) + h(n_2) = +^{\mathbb{Z}}(h(n_1), h(n_2))$$

$$h(\cdot^{\mathbb{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 \cdot n_2) = n_1 \cdot n_2 = h(n_1) \cdot h(n_2) = \cdot^{\mathbb{Z}}(h(n_1), h(n_2))$$

Somit ist h ein gültiger Homomorphismus von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} .

(ii) Angenommen es gäbe besagten Homomorphismus. Nach der Definition des Homomorphismus, müssen die Konstantensymbole wieder auf sich abgebildet werden. Somit gilt:

$$h(0^{\mathbb{Z}}) = 0^{\mathbb{N}} = 0$$

$$h(1^{\mathbb{Z}}) = 1^{\mathbb{N}} = 1$$

Außerdem gilt:

$$h(\cdot^{\mathbb{Z}}(-1, -1)) = h(1) \stackrel{Def.Hom.}{=} 1 = \cdot^{\mathbb{N}}(h(-1), h(-1)) \Rightarrow -1 \mapsto 1 \quad (1)$$

$$h(+^{\mathbb{Z}}(-1, 1)) = h(0) = 0 \neq 2 = +^{\mathbb{N}}(1, 1) = +^{\mathbb{N}}(h(-1), h(1)) \quad (2)$$

Somit entsteht aus (1) und (2) unweigerlich ein Widerspruch, wenn es einen Homomorphismus von \mathbb{Z} nach \mathbb{N} gäbe.

Aufgabe 3

Damit $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- (i) Das Bild von $h(A) \subseteq B$
- (ii) Für alle Operatoren $op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}$ der Substruktur $\mathfrak{B}_{h(A)}$, muss gelten, dass sie abgeschlossen bzgl. des Bildes von $h(A)$ sind.

• **Beweis für (i):**

Der Homomorphismus h ist als Funktion folgendermaßen definiert:

$$h: A \rightarrow B$$

Daraus folgt sofort, dass $h(A) \subseteq B$ ist.

- **Beweis für (ii):** Da h ein Homomorphismus von A nach B ist, muss gelten mit n als Stelligkeit des Operators:

$$(*) \forall a_1 \forall a_2 \dots \forall a_n h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = op^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) = op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$$

Wären die Operatoren nicht abgeschlossen bzgl. des Bildes von h , dann würde folgendes gelten:

$$\exists a_1 \exists a_2 \dots \exists a_n (op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))) \notin h(A)$$

Nach (*) gilt aber:

$$\forall a_1 \forall a_2 \dots \forall a_n (h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)))$$

mit

$$h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) \in h(A) \Leftrightarrow op_{h(A)}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) \in h(A)$$

was ein Widerspruch zur Annahme darstellt. Folglich müssen die Operatoren abgeschlossen sein, weshalb $h(A)$ eine σ -abgeschlossene Menge ist.

Da (i) und (ii) gilt, folgt nach dem Satz der VL, dass $h(A)$ eine Substruktur $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$ induziert.

Aufgabe 4

Struktur:

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}})$$

$$n_1 <^{\mathcal{N}} n_2 \quad \text{gdw.} \quad (n_1 \bmod 2 < n_2 \bmod 2) \vee ((n_1 \bmod 2 = n_2 \bmod 2) \wedge n_1 < n_2)$$

Damit \mathcal{N} und \mathcal{M} isomorph sind, muss es einen Isomorphismus zwischen $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ und \mathbb{N} geben.

Isomorphismus:

$$b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \times \mathbb{N}$$

$$n \rightarrow (n \bmod 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$$

Beweis der Richtigkeit von b:

b muss folgende Dinge erfüllen:

- (i) b muss eine Bijektion sein:
 $b: \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\} \times \mathbb{N}$
- (ii) Für alle n -stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $\bar{a} := a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^n$:
wenn $\bar{a} \in \mathbb{N}^n$ genau, dann wenn $(b(a_1), b(a_2), \dots, b(a_n)) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$

- (iii) Für alle n -stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle $\vec{a} := a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^n$:
 $b(f^{\mathcal{N}}(\vec{a})) = f^{\mathcal{M}}(b(a_1), b(a_2), \dots, b(a_n))$
- (iv) Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt:
 $b(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{M}}$

Beweis für (i):

Damit b eine Bijektion ist, muss b und seine Inverse die Eigenschaften einer Funktion erfüllen, nämlich Linkstotalität und Injektivität.

b ist offensichtlich linkstotal.
 b ist auch injektiv, da Folgendes gilt:

Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \neq n_2$:

Fall 1 $n_1 \bmod 2 \neq n_2 \bmod 2$:

$$b(n_1) = (n_1 \bmod 2, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor) \neq (n_2 \bmod 2, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor) = b(n_2)$$

Fall 2 $n_1 + 2 \leq n_2$:

$$\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor < \lfloor \frac{n_1+2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n_1}{2} + 1 \rfloor \leq \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$$

$$\Rightarrow b(n_1) = (n_1 \bmod 2, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor) \neq (n_2 \bmod 2, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor) = b(n_2)$$

Fall 3 $n_2 + 2 \leq n_1$:

analog zu Fall 2.

Fall 4 $n_1 + 1 = n_2$ oder $n_2 + 1 = n_1$:

Nach Annahme muss n_1 eine gerade und n_2 eine ungerade Zahl sein oder umgekehrt. Daraus folgt:

$$n_1 \bmod 2 \neq n_2 \bmod 2 \Rightarrow b(n_1) = (n_1 \bmod 2, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor) \neq (n_2 \bmod 2, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor) = b(n_2)$$

Daraus folgt, dass $b(n_1) \neq b(n_2)$ und damit die Injektivität von b .

Die Inverse von b :

$$b^{-1} : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(k, n) \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot n, & k = 0 \\ 2 \cdot n + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

b^{-1} ist offensichtlich linkstotal.

b^{-1} ist auch injektiv, da Folgendes gilt:

Seien $(k_1, n_1), (k_2, n_2) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ mit $(k_1, n_1) \neq (k_2, n_2)$:

Fall 1 $k_1 = 0 \neq 1 = k_2$: $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_2, n_2)$

Fall 2 $k_1 = 1 \neq 0 = k_2$: analog zu Fall 1

Fall 3 $n_1 \neq n_2$ und: $k_1 = k_2 = 0$: $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 = b^{-1}(k_2, n_2)$

Fall 4 $n_1 \neq n_2$ und: $k_1 = k_2 = 1$: $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 + 1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_2, n_2)$

Die Inverse b^{-1} ist also injektiv.

b ist damit eine Bijektion.

Beweis für (ii):

2-stelliges Relationssymbol $<$:

$$\begin{aligned} & \forall a_1 \forall a_2 ((a_1, a_2) \in <^N \\ & \Leftrightarrow (a_1 \bmod 2 < a_2 \bmod 2) \vee ((a_1 \bmod 2 = a_2 \bmod 2) \wedge a_1 < a_2) \\ & \Leftrightarrow (a_1 \bmod 2 < a_2 \bmod 2) \vee ((a_1 \bmod 2 = a_2 \bmod 2) \wedge \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor < \lfloor \frac{a_2}{2} \rfloor) \\ & \Leftrightarrow (b(a_1), b(a_2)) \in <^M \end{aligned}$$

Beweis für (iii):

Es gibt keine Funktionssymbole aus σ , also ist hier nichts zu beweisen.

Beweis für (iv):

Es gibt keine Konstantensymbole aus σ , also ist hier nichts zu beweisen.

b erfüllt damit i-iv und ist somit ein korrekter Isomorphismus von \mathcal{N} nach \mathcal{M} .