3. Prädikatenlogik

Grenzen der Aussagenlogik

Die Aussagenlogik formalisiert das Schließen über Aussagen die entweder wahr oder falsch sein können.

Die eigentliche Bedeutung der Aussagen ist dabei irrelevant.

Um über Aussagen der folgenden Form zu sprechen, ist die Aussagenlogik also nicht geeignet:

> *Für jede relle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl $n > x$ die größer als x ist.*

- Wir müssen über verschiedene Arten von Objekten sprechen.
- Einige Aussagen müssen für alle Objekte gelten, andere nur für einige.

Ein weiteres Beispiel dieser Art ist das Sokratesbeispiel vom Anfang der Vorlesung.

Prädikatenlogik

Wir führen eine Logik ein, in der solche Aussagen gemacht werden können.

Intuitiv haben wir

- Variablen für Elemente einer Menge von Objekten, z. B. den rellen Zahlen, anstatt nur wahr oder falsch.
- Möglichkeiten, Variablen zu vergleichen, z.B. $x < y$, $x = y$ abhängig vom Kontext.
- Verknüpfungen wie $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ um komplexere Formeln bilden zu können.
- Möglichkeiten um zu sagen, dass es ein Element gibt mit bestimmten Eigenschaften oder das alle Elemente bestimmte Eigenschaften haben.

$$\forall x \big(\mathbb{R}(x) \rightarrow \exists y (\mathbb{N}(y) \wedge x < y)\big)$$

Um dies zu erreichen, müssen wir folgendes festlegen:

- Den Kontext in dem wir arbeiten, d.h. Relationen $<, +, \ldots$ die wir verwenden dürfen $\rightsquigarrow$Strukturen
- Die logische Sprache in der wir die Eigenschaften ausdrücken wollen $\rightsquigarrow$Prädikatenlogik

3.1. Relationen

Relationen

Definition 3.1. Sei $k \geqslant 1$ und A eine Menge.

1. A^k ist die Menge aller k-Tupel von Elementen aus A.
2. Eine k-stellige Relation auf A ist eine Teilmenge von A^k.

Bemerkung. Wir erlauben auch $k = 0$.

Eine nullstellige Relation $R \subseteq A^0$ ist entweder $\emptyset$ oder $\{()\}$.

Notation. Für einige spezielle Relationen wie z.B. $<, =$ benutzen wir Infix Notation und schreiben $a = b$ oder $a < b$ anstatt $(a, b) \in =$ oder $(a, b) \in <$.

Eigenschaften binärer Relationen

Definition 3.2. Eine binäre Relation $R \subseteq A^2$ einer Menge A ist

- reflexiv, wenn $(a, a) \in R$, für alle $a \in A$.
- symmetrisch, wenn aus $(a, b) \in R$ immer $(b, a) \in R$ folgt, für alle $a, b \in A$.
- antisymmetrisch, wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ zusammen $a = b$ impliziert, für alle $a, b \in A$.
- transitiv, wenn aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ immer $(a, c) \in R$ folgt, für alle $a, b, c \in A$.

Äquivalenzrelationen

Definition 3.3. Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Beispiel. Einige Beispiel für Äquivalenzrelationen

- Gleichheit. Für jede Menge A

$$\{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$$

- Gleichmächtigkeit. Für jede Menge A

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(A)^2 : A, B \text{ haben die gleiche Kardinalität } \}$$

- Logische Äquivalenz.

$$\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL}^2 : \varphi \equiv \psi\}$$

Ordnungen

Definition 3.4. Sei A eine Menge.

1. Eine (strikte) partielle Ordnung $<$ über eine Menge A ist eine irreflexive und transitive binäre Relation über A.
2. Eine (strikte) lineare Ordung $<$ über A ist eine partielle Ordung über A, so dass für alle $a, b \in A$:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{or } b < a \qquad\qquad (*)$$

Bemerkungen.

- Bedingung 1 impliziert, dass $<$ antisymmetrisch ist.
- Bisweilen ist es nützlich, reflexive Ordungen zu betrachten. Wir definieren $\leqslant$ als $< \cup \{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$.

  Das heißt, eine reflexive lineare Ordung ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive binäre Relation für die $(*)$ gilt.

Graphen und gerichtete Graphen

Graphen und gerichtete Graphen

Definition 3.5. Ein gerichteter Graph G ist ein Paar $G := (V, E)$, wobei

- V eine Menge ist und
- $E \subseteq V^2$ eine binäre irreflexive Relation über V ist.

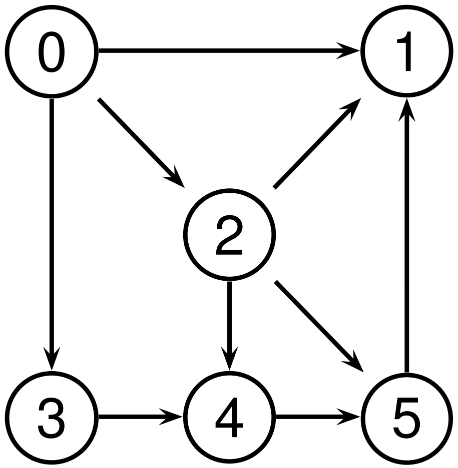
Die Elemente von V werden Knoten und die Elemente von E Kanten genannt.

Beispiel. Sei $G := (V, E)$ mit

$$V := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E := \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}.$$

Wir werden Graphen wie üblich graphisch darstellen.

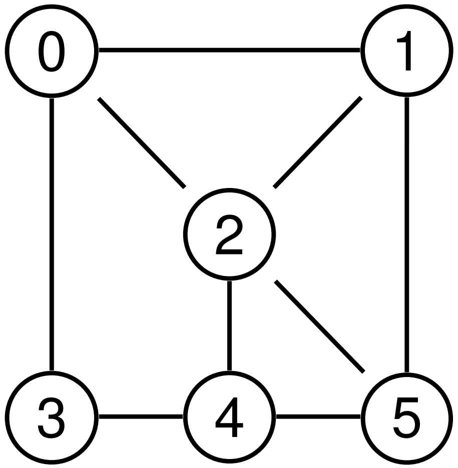


Ungerichtete Graphen

Definition 3.6. Ein ungerichteter Graph, oder einfach Graph, ist ein Paar $G := (V, E)$, so dass

- (V, E) ein gerichteter Graph ist und
- E ist symmetrisch.

Beispiel.



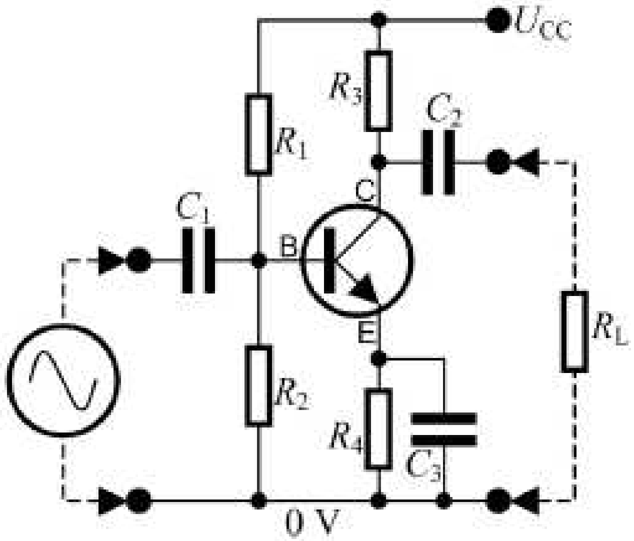
Beispiel für Graphen

Beispiel. Straßenkarten, Flugverbindungen ...

Beispiele von Graphen

Beispiele. Elektrische Schaltkreise

Knoten repräsentieren Komponenten wie z.B. Dioden, Transistoren, Widerstände .... und Kanten repräsentieren die Drähte.



Beispiele. Digitale Schaltkreises

Knoten repräsentieren Gatter und Kanten deren Verbindungen.

Beispiele für Graphen

Computer Netzwerke.

Knoten repräsentieren Computer und Kanten die Netzwerkverbindungen.

Das World Wide Web.

Knoten repräsentieren Webseiten und Kanten deren Hyperlinks.

Wege, Pfade und Kreise

Definition 3.7. Sei $G := (V, E)$ ein gerichteter Graph.

1. Ein Weg in G ist ein Tupel $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$, für ein $l \in \mathbb{N}$, so dass

   $$(v_{i-1}, v_i) \in E \qquad \text{für alle } 1 \leqslant i \leqslant l.$$

   $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ ist ein Weg von v_0 zu v_l. l ist die Länge des Wegs.

   Bemerkung. Das Tupel (v) ist ein Weg der Länge 0, für alle $v \in V$.

2. Ein Pfad in G ist ein Weg $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ so dass $v_i \neq v_j$ für alle $0 \leqslant i < j \leqslant l$.

3. Ein geschlossener Weg in G ist ein Weg $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ mit $v_0 = v_l$.

4. Ein Kreis oder Zykel in G ist ein Weg $(v_0, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ so dass $v_0 = v_l$ und $v_i \neq v_j$ für alle $1 \leqslant i < j \leqslant l$.

3.2. Strukturen

Signaturen

Definition 3.8. Eine Signatur ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und Konstantensymbolen.

Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine Stelligkeit

$$ar(R) \in \mathbb{N} \text{ bzw. } ar(f) \in \mathbb{N}.$$

Notation 3.9.

- Wir verwenden griechische Symbole σ, τ für Signaturen.
- Für Relationssymbole verwenden wir $R, P, Q, R', <, \leqslant, \ldots$
- Für Funktionssymbole verwenden wir $f, g, h, +, *\ldots$
- Für Konstantensymbole verwenden wir $c, d, 0, 1, \ldots$

Strukturen

Definition 3.10. Sei σ eine Signatur.

Eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem Universum von $\mathcal{A}$
- eine k-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$ für jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma$
- eine k-stellige Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \to A$ für jedes k-stelliges Funktionssymbol $f \in \sigma$
- ein Element $c^{\mathcal{A}} \in A$ für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$.

Bemerkung. Man beachte den Unterschied zwischen einem Symbol

$$R \in \sigma \qquad \text{oder} \qquad f \in \sigma$$

und seiner Interpretation

$$R^{\mathcal{A}} \qquad \text{bzw.} \qquad f^{\mathcal{A}}$$

in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$.

Struktur

Notation. Wir verwenden kalligraphische Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ für Strukturen und entsprechende lateinische Buchstaben $A, B. \ldots$ für deren Universen.

Wir schreiben σ-Strukturen oft als Tupel

$$\mathcal{A} := \big(A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \sigma}\big)$$

oder, falls $\sigma := \{R_1, \ldots, R_n\}$ endlich ist, auch

$$\mathcal{A} := \big(A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_n^{\mathcal{A}}\big)$$

Bemerkung. In der Logik werden Strukturen meistens mit deutschen Buchstaben bezeichnet:

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$

Beispiele von Strukturen

Beispiel: Arithmetische Strukturen

Sei $\sigma_{ar} := \{+, *, 0, 1\}$ die Signatur der Arithmetik, wobei

- $+, *$ binäre Funktionsymbole und
- $0, 1$ Konstantensymbole sind.

Wir können σ-Strukturen zur Modellierung von Körpern, etc. benutzen.

Wir definieren eine σ_{ar}-Struktur $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, *^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ mit Universum $\mathbb{N}$, wobei

- $+^{\mathcal{N}}$ und $*^{\mathcal{N}}$ die Addition und Multiplikation der natürlichen Zahlen sind und
- $0^{\mathcal{N}} := 0$ und $1^{\mathcal{N}} := 1$.

Eine andere σ_{ar}-Struktur ist $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}}, *^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}})$ mit Universum $\mathbb{Z}$ und

- $+^{\mathcal{Z}}$ und $*^{\mathcal{Z}}$ als Addition und Multiplikation der ganzen Zahlen und
- $0^{\mathcal{Z}} := 0$ und $1^{\mathcal{Z}} := 1$.

Beispiel: Arithmetische Strukturen

Bemerkung.

σ_{ar}-Strukturen müssen nicht “natürliche” arithmetische Strukturen wie die rellen oder ganzen Zahlen sein.

Wir können genauso eine σ_{ar}-Struktur

$$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$$

mit Universum $\mathbb{N}$ definieren, wobei

- $+^{\mathcal{A}}(a, b) := a^2 + b^2$,
- $*^{\mathcal{A}}$ ist die übliche Addition der natürlichen Zahlen und
- $0^{\mathcal{A}} := 17$ sowie $1^{\mathcal{A}} := 0$.

Graphen als Strukturen

Definition 3.11. Sei $\sigma_{Graph} := \{E\}$ die Signatur der Graphen.

Mit jedem gerichteten Graph (V, E) assoziieren wir eine σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{G} := (G, E)$ mit

- $G := V$
- $E^{\mathcal{G}} := E$.

Notation. Für Graphen und deren Strukturen $\mathcal{G}$ weichen wir von der Konvention ab und bezeichnen das Universum von $\mathcal{G}$ als V.

Gefärbte Graphen

Wir betrachten oft auch gefärbte Graphen, wobei jeder Knoten mit einer Farbe aus einer festen Menge $\mathcal{C}$ von Farben gefärbt sein kann.

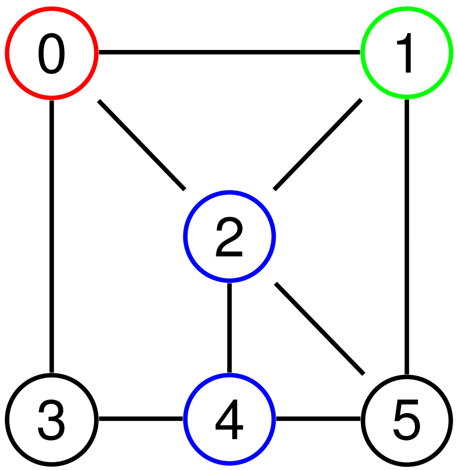
Sei $\mathcal{C}$ eine endliche Menge und sei $\sigma := \{E\} \cup \mathcal{C}$, wobei wir annehmen, dass $E \notin \mathcal{C}$.

Wir modellieren $\mathcal{C}$-gefärbte Graphen (V, E) als Strukturen

$$\mathcal{G} := (G, E^{\mathcal{G}}, (C^{\mathcal{G}})_{C \in \mathcal{C}})$$

wobei $C^{\mathcal{G}}$ alle Knoten mit Farbe C enthält.

Beispiel. Sei $\mathcal{C} := \{$ Rot, Grün, Blau $\}$.



Substrukturen und Äquivalenz zwischen Strukturen

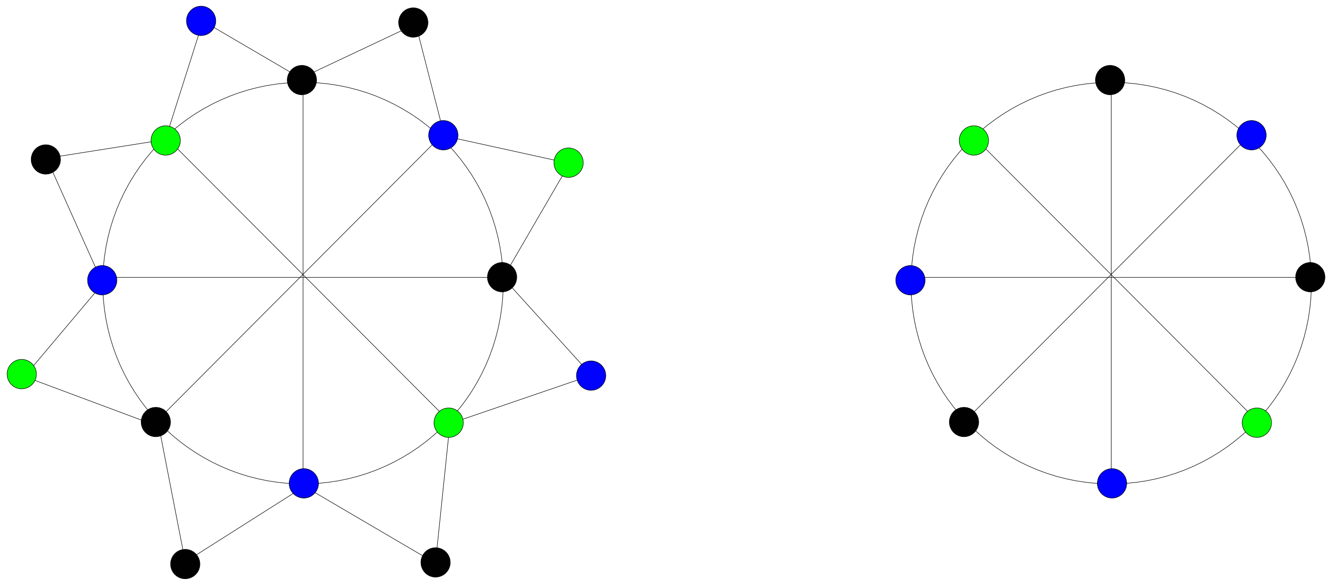
Substrukturen

Definition 3.12. Sei τ eine Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukturen.

1. $\mathcal{A}$ ist eine Substruktur von $\mathcal{B}$, geschrieben als $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
   - für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und alle $\overline{a} \in A^k$,
   $$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad \overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$$
   - für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ und alle $\overline{a} \in A^k$, $f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
   - für alle Konstantensymbole $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.
2. Wenn $\mathcal{A}$ eine Substruktur von $\mathcal{B}$ ist, dann ist $\mathcal{B}$ eine Erweiterung von $\mathcal{A}$.

Induzierte Substrukturen

Beispiel. A $\sigma := \{E, \text{Blue}, \text{Green}\}$-structure and a sub-structure.



Hinweis. Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, dann ist A τ-abgeschlossen, d.h. $f(\overline{a}) \in A$ für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ und alle $\overline{a} \in A^k$ und $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$.

Umgekehrt gibt es für jede τ-abgeschossene Menge $\mathbf{A} \subseteq B$ genau eine Substruktur $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ mit Universum A.

Dies wird die durch A induzierte Substruktur genannt.

Beispiel

Beispiel.

Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die Addition auf den ganzen Zahlen.

$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}})$, wobei $<^{\mathcal{N}}$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ und $+^{\mathcal{N}}$ die übliche Addition auf den natürlichen Zahlen, ist die durch $\mathbb{N}$ induzierte Substruktur von $\mathcal{Z}$.

Expansionen und Redukte

- Substrukturen sind eine Art, in der eine Struktur in einer anderen enthalten sein kann.
- Hier haben wir ein kleineres Universum, aber die gleichen Relations-, Funktions- und Konstantensymbole.
- Eine andere Art, in der $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ enthalten sein kann, ist indem weniger Symbole zur Verfügung stehen, aber das Universum gleich bleibt.

Definition 3.13. Sei $\sigma \subseteq \tau$ eine Signatur und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur.

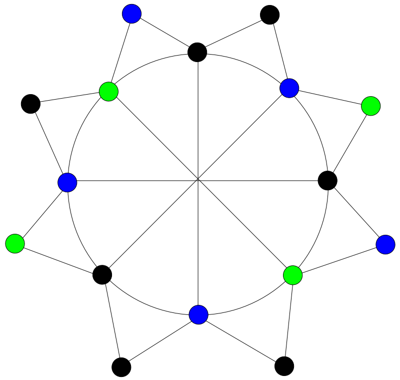
Das σ-Redukt $\mathcal{B}_{|\sigma}$ von $\mathcal{B}$ ist definiert als die σ-Struktur $\mathcal{B}_{|\sigma}$ die man aus $\mathcal{B}$ enthält, indem die Symbole aus $\tau \setminus \sigma$ "entfernt" werden, d.h. die Struktur mit

- Universum B und
- $S^{\mathcal{B}_{|\sigma}} = S^{\mathcal{B}}$ für jedes (Relations-, Funktions-, Konstanten-) Symbol $S \in \sigma$.

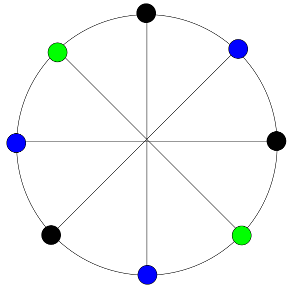
$\mathcal{B}$ heißt Expansion von $\mathcal{B}_{|\sigma}$.

Beispiel

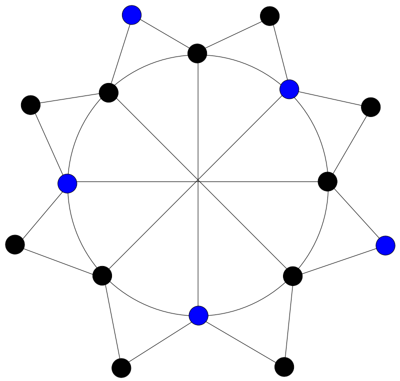
Beispiel. Eine $\sigma := \{E, \textsc{Blue}, \textsc{Green}\}$-Struktur, Substruktur und Redukte.



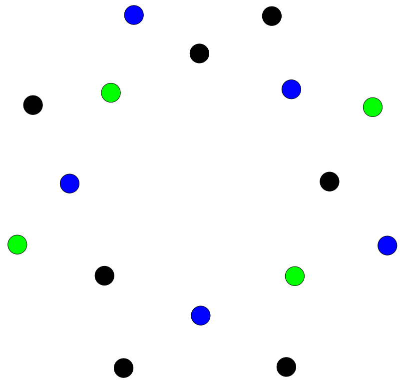
$\mathcal{G}$



$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$



$\mathcal{G}_{|\{E, \textsc{Blue}\}}$

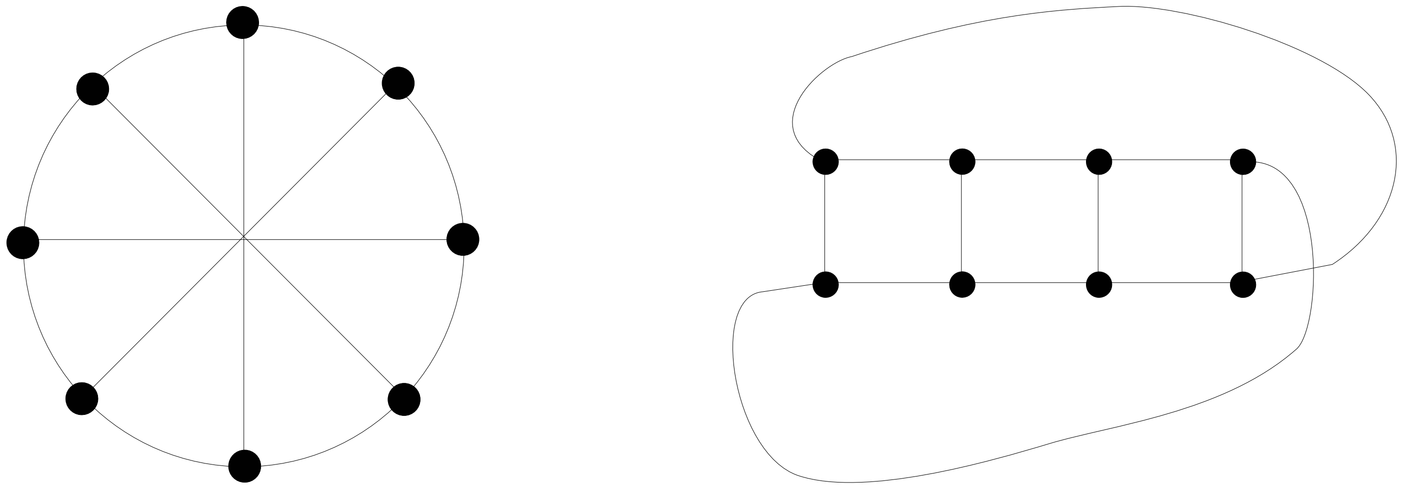


$\mathcal{G}_{|\{\textsc{Blue}, \textsc{Green}\}}$

3.4. Homomorphie und Isomorphie

Wann sind zwei Strukturen gleich?

Frage. Sind die folgenden zwei Graphen verschieden?



Mögliche Antworten.

- **Ja** wenn wir daran interessiert sind, wie sie gezeichnet sind.
- **Nein** wenn wir uns nur für ihre Knoten und Verbindungen dazwischen interessieren.

Als Strukturen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ über $\sigma_{Graph} := \{E\}$ sind sie identisch.

Wenn wir uns für ihre Einbettung in den $\mathbb{R}^2$ interessieren, brauchen wir eine andere Struktur, die diese Informationen enthält.

Homomorphismen

Definition 3.14. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $h : A \to B$, so dass

- für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$:

  wenn $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann auch $\big(h(a_1), \ldots, h(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}$.

- für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ gilt

  $$h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}\big(h(a_1), \ldots, h(a_k)\big).$$

- für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt

  $$h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

Wir schreiben $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$ um zu sagen, dass h ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Isomorphismen

Definition 3.15. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $I : A \to B$, so dass

- I eine Bijektion zwischen A und B ist
- für alle k-stell. Relationssymb. $R \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$:

$$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \big(h(a_1), \dots, h(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$

- für alle k-stell. Funktionssymb. $f \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt

$$h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}\big(h(a_1), \dots, h(a_k)\big).$$

- für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt

$$h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

Wir schreiben $I : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ um zu sagen, dass I ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Iso- und Homomorphismen

Definition 3.16. Sei σ eine Signatur.

1. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind isomorph, geschrieben $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, wenn es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt.
2. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind homomorph, geschrieben $\mathcal{A} \rightarrow_{hom} \mathcal{B}$, wenn es einen Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

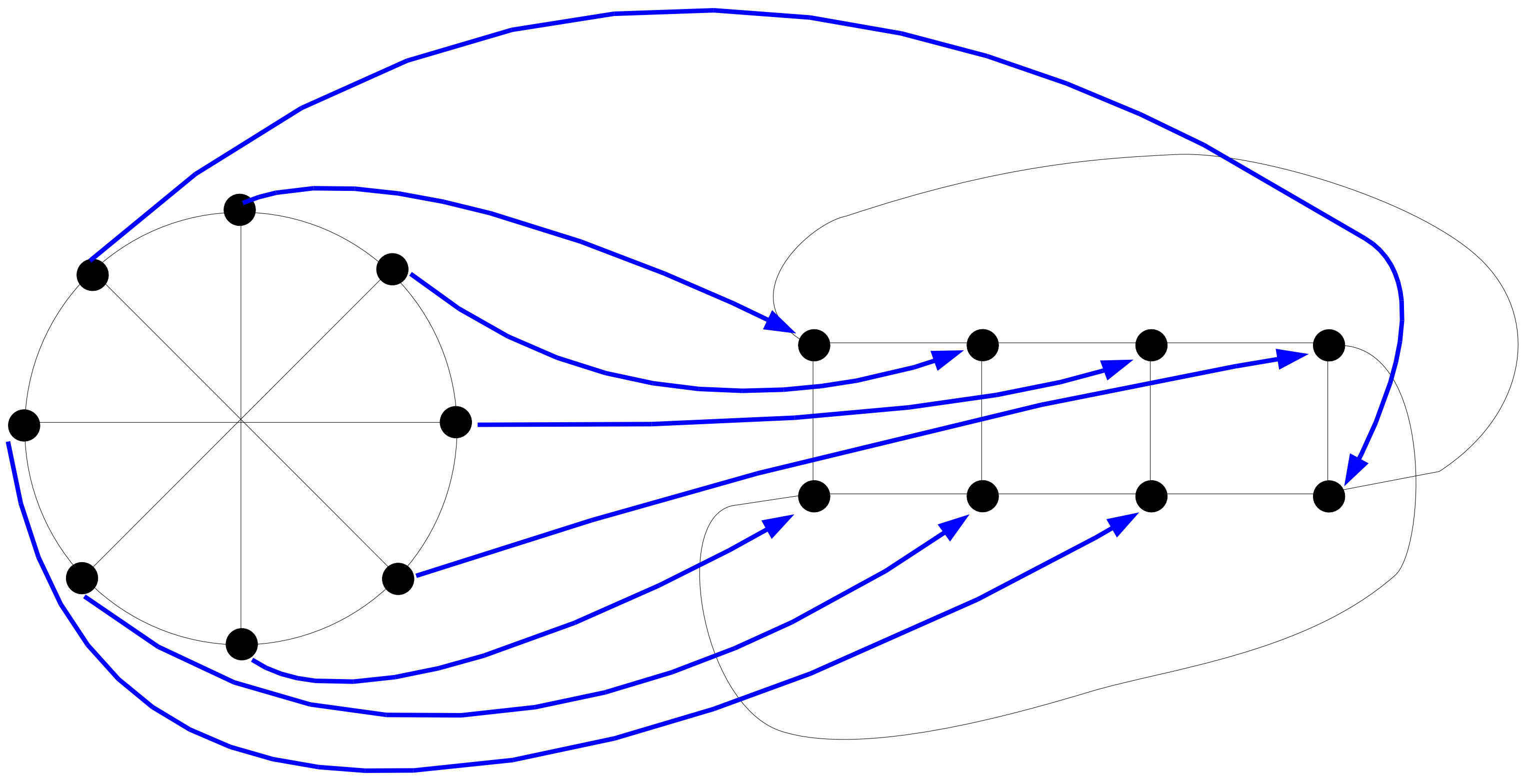
Beispiele.

- Wenn A, B endliche Mengen der gleichen Kardinalität sind, dann sind die $\emptyset$-Strukturen $(A, \emptyset) \cong (B, \emptyset)$.
- Wenn A, B endliche Mengen gleicher Kardinalität und $<^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{B}}$ lineare Ordnungen auf A, B sind , dann $(A, <^{\mathcal{A}}) \cong (B, <^{\mathcal{B}})$.

  Aber: $(\mathbb{Z}, <) \not\cong (\mathbb{N}, <)$

Beispiel

Frage. Sind die beiden folgenden Graphen gleich?



4. Prädikatenlogik

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 4.1. (Variablen erster Stufe)

Eine Variable erster Stufe, kurz Variable, hat die Gestalt v_i, $i \in \mathbb{N}$.

Die Menge der Variablen erster Stufe bezeichnen wir mit $\textsc{Var}$.

Definition 4.2. Sei σ eine Signatur.

Die Menge $\mathcal{T}_\sigma$ der σ-Terme ist induktiv definiert als

Basisfall.
- $v_i \in \mathcal{T}_\sigma$ für alle $v_i \in \textsc{Var}$
- $c \in \mathcal{T}_\sigma$ für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$

Induktionsschritt.

Ist $f \in \sigma$ ein k-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$ dann

$$f(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}_\sigma.$$

Ein Term, in dem keine Variablen vorkommen, heißt Grundterm.

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 4.3. Sei σ eine Signatur. Die Menge $\text{FO}[\sigma]$ der prädikatenlogischen Formeln über σ ist induktiv wie folgt definiert

Basisfall.

- $t = t' \in \text{FO}[\sigma]$ für alle Terme $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$.
- $R(t_1, \dots, t_k) \in \text{FO}[\sigma]$, für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$.

Formeln der Form $t = t'$ und $R(t_1, \dots, t_k)$ heißen atomar.

Induktionsschritt.

- Wenn $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ dann $\neg\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$ dann $(\varphi \vee \psi) \in \text{FO}[\sigma]$, $\quad (\varphi \wedge \psi) \in \text{FO}[\sigma]$, $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{FO}[\sigma]$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \text{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $x \in \text{VAR}$ dann $\exists x\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $\forall x\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

$\text{FO}[\sigma]$ heißt die Prädikatenlogik über σ oder die Sprache/Logik erster Stufe über σ.

Freie und gebundene Variablen

Definition 4.4. Sei σ eine Signatur.

Wir schreiben $\mathrm{var}(t)$ für die in einem σ-Term t vorkommenden Variablen.

Formal wird $\mathrm{var}(t)$ wie folgt induktiv definiert:

- Wenn $t := v_i \in \mathrm{VAR}$ dann $\mathrm{var}(t) := \{v_i\}$.
- Wenn $t := c$ für ein Konstantensymbol $c \in \sigma$ dann $\mathrm{var}(t) := \emptyset$.
- Wenn $t := f(t_1, \dots, t_k)$ für ein k-stelliges Funktionssymbol $f \in \sigma$ und Terme $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$ dann $\mathrm{var}(t) := \mathrm{var}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_k)$.

Freie und gebundene Variablen

Definition 4.5. Sei σ eine Signatur und sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

Die Menge $\mathit{frei}(\varphi)$ der freien Variablen von φ ist induktiv definiert durch:

- Wenn $\varphi := t_1 = t_2$, für $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)$.
- Wenn $\varphi := R(t_1, \dots, t_k)$ für $R \in \sigma$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \bigcup_{i=1}^{k} \text{var}(t_i)$.
- $\mathit{frei}(\neg\varphi) := \mathit{frei}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.
- $\mathit{frei}\big((\varphi * \psi)\big) := \mathit{frei}(\varphi) \cup \mathit{frei}(\psi)$ für alle $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi := \exists x\psi$ oder $\varphi := \forall x\psi$, für $x \in \text{VAR}$ and $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \mathit{frei}(\psi) \setminus \{x\}$.

Eine Formel φ mit $\mathit{frei}(\varphi) := \emptyset$ heißt ein Satz.

Eine Variable, die in φ vorkommt, aber nicht frei ist, heißt gebunden.

Wir schreiben $\varphi(v_1, \dots, v_k)$ um zu sagen, dass $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$.

4.2. Semantik der Prädikatenlogik

Belegungen

Zur Erinnerung. In der Aussagenlogik wurde die Semantik durch eine Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten gegeben.

In der Prädikatenlogik werden wir ebenfalls Belegungen als Basis der Semantik verwenden.

Allerdings wird hier den Variablen ein Wert aus dem Universum der Struktur zugewiesen.

Definition 4.6. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

1. Eine Belegung in $\mathcal{A}$ ist eine Funktion $\beta : \text{Dom}(\beta) \to A$ mit $\text{Dom}(\beta) \subseteq \text{VAR}$.

   β ist passend für $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, wenn $\textit{frei}(\varphi) \subseteq \text{Dom}(\beta)$.
2. Eine σ-Interpretation ist ein Paar $(\mathcal{A}, \beta)$, bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

   $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ ist passend für $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, wenn β zu φ passt.

Definition 4.7. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

1. Ist β eine Belegung, $x \in \textsc{Var}$ und $a \in A$ ein Element, dann definieren wir eine neue Belegung $\beta[x/a]$ mit $\mathrm{Dom}(\beta[x/a]) := \mathrm{Dom}(\beta) \cup \{x\}$ durch

$$\beta[x/a](y) := \begin{cases} a & \text{wenn } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Ist $\mathfrak{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, $x \in \textsc{Var}$ und $a \in A$ ein Element, dann definieren wir $\mathfrak{I}[x/a]$ als $(\mathcal{A}, \beta[x/a])$.

Semantik der Prädikatenlogik: Terme

Definition 4.8. Sei σ eine Signatur.

Induktiv über den Formelaufbau definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem Term $t \in \mathcal{T}_\sigma$ und jeder σ-Interpretation $\mathfrak{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ für t einen Wert $[\![t]\!]^{\mathfrak{I}} \in A$ zuweist.

Basisfall.

- $[\![v_i]\!]^{\mathfrak{I}} := \beta(v_i)$ für alle $v_i \in \textsc{Var}$
- $[\![c]\!]^{\mathfrak{I}} := c^{\mathcal{A}}$ für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$

Induktionsschritt.

Ist $f \in \sigma$ eine k-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$ dann

$$[\![f(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathfrak{I}} := f^{\mathcal{A}}\big([\![t_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathfrak{I}}\big).$$

Semantik der Prädikatenlogik: Formeln

Definition 4.9. Sei σ eine Signatur.

Induktiv über den Formelaufbau definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und jeder σ-Interpretation $\mathfrak{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ für φ einen Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet.

Basisfall.

- Für alle Terme $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$ definieren wir

$$[\![t = t']\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![t']\!]^{\mathfrak{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle Terme $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$ definieren wir

$$[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } ([\![t_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathfrak{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik: Formeln

Induktionsschritt.

- Die Semantik der Verknüpfungen $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ist wie in der Aussagenlogik definiert. Z.B. wenn $\varphi := \neg\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ dann definieren wir
$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := 1 - [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}.$$

- Wenn $\varphi := \exists x \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ dann definieren wir
$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{es gibt } a \in A \text{ so dass } [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}[x/a]} = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Wenn $\varphi := \forall x \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ definieren wir
$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}[x/a]} = 1 \text{für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein ausführliches Beispiel

Definition 4.10. Ein vertex cover eines ung. Graphs $G := (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$, s.d. für alle Kanten $e := (u, v) \in E$ mind. ein $u, v \in X$.

Problem: gegeben Graph G und $k \in \mathbb{N}$, enthält G ein vertex cover der Größe $\leqslant k$.

Kann dies in der Prädikatenlogik formalisiert werden?

Schritt 1. Schreiben Sie das Problem in deutsch auf.

G enthält ein vertex cover der Größe $\leqslant k$ wenn

- es gibt eine Menge X von $\leqslant k$ Knoten, so dass
- jede Kante (u, v) einen Endpunkt u, v in X hat.

Diese Fomalisierung benutzt

- eine Menge X über die wir in der Prädikatenlogik nicht quantifizieren können
- eine Aussage der Form für alle Kanten, was wir ebenfalls nicht benutzen können

Ein ausführliches Beispiel

Definition. Ein vertex cover eines ung. Graphs $G := (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$, s.d. für alle Kanten $e := (u, v) \in E$ mind. ein $u, v \in X$.

Problem: gegeben Graph G und $k \in \mathbb{N}$, enthält G ein vertex cover der Größe $\leqslant k$.

Wir formulieren das Problem daher um.

G enthält ein vertex cover der Größe $\leqslant k$, wenn

- es k Knoten $x_1, \dots, x_k$ gibt, so dass
- für alle u, v: wenn es eine Kante zwischen u, v gibt, dann ist u eins der x_i oder v eins der x_i.

Das können wir nun eins-zu-eins in die Prädikatenlogik übersetzen.

$$\exists x_1 \dots \exists x_k \,\forall u \forall v \Big(E(u, v) \rightarrow \big(\bigvee_{i=1}^{k} u = x_i \vee \bigvee_{i=1}^{k} v = x_i \big) \Big)$$

Das Koinzidenzlemma

Definition 4.11. (Koinzidenzlemma)

Seien σ, τ, τ' Signaturen, so dass $\sigma \subseteq \tau \cap \tau'$. Sei $\mathfrak{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine τ-Interpretation und $\mathfrak{J} := (\mathcal{B}, \gamma)$ eine τ'-Interpretation, so dass

- $A = B$
- $S^{\mathcal{A}} = S^{\mathcal{B}}$ für alle Symbole, die in σ vorkommen.

1. Ist $t \in \mathcal{T}_\sigma$ ein σ-Term und $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{var}(t)$, dann
$$[\![t]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![t]\!]^{\mathfrak{J}}.$$
2. Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ eine Formel und $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \mathit{frei}(\varphi)$, dann
$$\mathfrak{I} \models \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathfrak{J} \models \varphi.$$

Notation

Notation 4.12.

1. Sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma])$ eine Formel mit $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

   Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und β eine Belegung, so dass $\beta(x_i) := a_i$, für alle $1 \leqslant i \leqslant k$.

   Wir schreiben $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k]$ statt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

   Dies ist möglich, da nach dem Koinzidenzlemma die Belegung der Variablen außer $x_1, \dots, x_k$ nicht relevant ist.

2. Erinnerung: Wir schreiben $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ um anzudeuten, dass $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

   In diesem Fall vereinfachen wir obige Notation weiter und schreiben $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k]$.

   Man beachte, dass dies von der Sequenz $x_1, \dots, x_k$ abhängt.

3. Wenn φ ein Satz ist, schreiben wir $\mathcal{A} \models \varphi$.

Anwendung: Relationale Datenbanken

Beispiele: Relationale Datenbanken

Eine relationale Datenbank ist eine endliche Menge von “Tabellen”.

Z. B. könnte eine Filmdatenbank wie imdb.org wie folgt aussehen

Schauspieler		
Schausp.	ID	Geburtsdatum
George Clooney	1	6. Mai 1961
Scarlett Johansson	2	22. November 1984
Jeff Daniels	3	19. Februar 1955
...	...	...

Flime		
Titel	Regie	Schau.
Good night ... und good luck	Georg Clooney	1
Good night ... und good luck	Georg Clooney	3
Lost in translation	Sofia Coppola	2
...	...	...

Die Menge τ von Tabellennamen heißt Datenbankschema.

Beispiel: Relationale Datenbanken

Relationale Datenbanken.

- Jede Spalte einer Tabelle in der Datenbank enthält Einträge vom selben Typ, z.B. Wörter oder Zahlen.

  In Datenbankterminologie werden Spaltenname Attribute genannt.

  Jedes Attribut i hat einen Typ D_i, genannt domain.
- Jede Zeile der Tabelle enthält ein Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$.

Eine Datenbanktabelle kann daher als n-stellige Relation über der Menge $D := D_1 \cup \dots D_n$ aufgefasst werden.

Eine relationale Datenbank mit Schema τ kann also als τ-Struktur $\mathfrak{D}$ wie folgt geschrieben werden:

- Das Universum $A := D$ ist die Vereinigung aller Domains.
- für jede Tabelle $R \in \sigma$ enthält die Struktur eine Relation $R^{\mathfrak{D}}$, die alle Tupel der Tabelle enthält.

Beispiel: Relationale Datenbanken

Relationale Datenbanken können leicht als Struktur modelliert werden.

(Historisch wurden relationale Datenbanken nach logischen Strukturen modelliert.)

Eine Abfrage an eine Datenbank entspricht also dem Auswerten logischer Formeln in Strukturen.

Es existiert daher ein enger Zusammenhang zwischen mathematischer Logik, besonders dem Teilgebiet der endlichen Modelltheorie, und der Theorie relationaler Datenbanken.

Beispiel: Relationale Datenbanken

Beispiel. Betrachten wir noch einmal das Filmbeispiel.

Der domain aller Einträge sind Zeichenketten. Sei Σ^* die Menge aller Zeichenketten über dem Alphabet $\{a, \dots, z, A, \dots, Z, 0, \dots, 9\}$.

Die Filmdatenbank entspricht folgender Struktur $\mathcal{D}$ über der Signatur $\sigma := \{ \text{Actors}, \text{Movies} \}$:

- Das Universum ist $D := \Sigma^*$
- Die Relation

$$\text{Actors}^{\mathcal{D}} := \left\{ \begin{array}{c} \text{(George Clooney, 1, 6 May 1961),} \\ \text{(Scarlett Johansson, 2, 22 November 1984),} \\ \text{(Jeff Daniels, 3, 19 February 1955)} \end{array} \right\}$$

- Die Relation $\text{Movies}^{\mathcal{D}} := \{$ (Good night ... und good luck, Georg Clooney, 1), (Good night ... und good luck, Georg Clooney, 3), (Lost in translation, Sofia Coppola, 2) $\}$

Beispiel: Relationale Datenbanken

- Die Modellierung relationaler Datenbanken wie auf der vorherigen Folie hat die unangenehme Eigenschaft, dass das Universum unendlich ist.
- D.h., das Komplement einer Relation ist unendlich.

Datenbanken werden daher meistens als endliche Strukturen modelliert.

Das Universum enthält den active domain der Datenbank:

die Menge aller der Elemente, die in der Datenbank vorkommen.

Im Beispiel: { George Clooney, Scarlett Johansson, Jeff Daniels, 1, 2, 3, 6 May 1961, 22 November 1984, 19 February 1955, Good night ... und good luck, Lost in translation, Sofia Coppola }

Die Relationen sind wie zuvor definiert.

Beispiel: Relationale Datenbanken

Im Beispiel: D := { George Clooney, Scarlett Johansson, Jeff Daniels, Nicole Kidman, 1, 2, 3, 4, 6 May 1961, 22 November 1984, 19 February 1955, 20 June 1967, Good night ... und good luck, Lost in translation, Dogville, Sofia Coppola, Lars von Trier }

Die Datenbank entspricht also der Struktur $\mathcal{D}$ über der Signatur $\sigma := \{$ Actors, Movies $\}$ mit Universum D und

- die Relation

  $$\text{Actors}^{\mathcal{D}} := \{ \begin{array}{c} \text{(George Clooney, 1, 6 May 1961),} \\ \text{(Scarlett Johansson, 2, 22 November 1984),} \\ \text{(Jeff Daniels, 3, 19 February 1955)} \\ \text{(Nicole Kidman, 4, 20 June 1967)} \end{array} \}$$

- die Relation $\text{Movies}^{\mathcal{D}} := \{$
  (Good night ... und good luck, Georg Clooney, 1),
  (Good night ... und good luck, Georg Clooney, 3),
  (Lost in translation, Sofia Coppola, 2)$\}$

Datenbankanfragen

Beispiel. In der Signatur $\sigma := \{$ Actors, Movies $\}$ und vorherige Datenbank:

1. $\exists x\, \exists d\, \exists n_1\, \exists n_2\, \text{Movies}(x, d, n_1) \wedge \text{Movies}(x, d, n_2) \wedge n_1 \neq n_2$

   "Es gibt einen Film mit mehr als einem Schauspieler"

2. "Es gibt einen Regisseur, der im eigenen Film mitspielt."

   $\exists d\, \exists f \exists n\, \exists b \text{Movies}(f, d, n) \wedge \text{Actors}(d, n, b)$

Die Anfragen beschreiben Eigenschaften der Datenbank, die wahr oder falsch sein können. Boolesche Anfragen

Meistens wollen wir nicht-Boolesche Informationen, z.B.

"Gib alle Filme von Georg Clooney aus"

$\varphi(f) := \exists n\, \text{Movies}(f, \text{“G Clooney”}, n)$

Die Relation $\varphi(\mathcal{A})$

Definition 4.13. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$. Wir definieren

$$\varphi(\mathcal{A}) := \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k : \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k]\}.$$

Hinweis. Die Relation $\varphi(\mathcal{A})$ hängt nicht nur von $\mathcal{A}$ sondern auch von der Sequenz $(x_1, \dots, x_k) \in \text{VAR}^k$ ab.

Wir müssen daher diese Sequenz jeweils angeben, bevor wir die Notation benutzen können.

Vergleiche mit Methoden in Java.

```
Boolean phi(int x1, ..., int xk)
```

Mit $x_1, \dots, x_k$ wird eine Ordnung der Parameter festgelegt.

Wir können dann `Boolean b = phi(3, 5, ..., 17);` benutzen.

Eine Nicht-Boolesche Anfrage

Liste alle Filme von Regisseur Georg Clooney

In der Prädikatenlogik. $\varphi(f) := \exists n\, \text{Movies}(f, \text{G-Clooney}, n)$

wobei G-Clooney ein Konstantensymbol ist, dass durch das Object "Georg Clooney" interpretiert wird.

Formal arbeiten wir also in Strukturen über der Signatur

$\{\text{Actors, Movies, G-Clooney}\}$.

In SQL.

```
SELECT Title
FROM Movies
WHERE Director="Georg Clooney"
```

Eine Nicht-Boolesche Anfrage

Antwort als Tabelle.

Answer	Good night ... und good luck

Als (unäre) Relation.

$$\varphi((\mathfrak{D}, \underbrace{\text{G-Clooney}}_{\substack{\text{Constant symbol} \\ \text{interpreted by} \\ \text{“Georg Clooney”}}})) = \{\text{Good night ... und good luck}\}.$$

Anmerkung. Es ist eins der eleganten Eigenschaften des relationalen Datenbankmodells, dass Antworten auf Anfragen selbst wieder Tabellen sind und somit in Datenbanken gespeichert werden können.

4.4. Semantische Folgerung und Modellklassen