Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 8

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i)

- Gilt für alle Graphen mit einem Zyklus ungerader Länge wobei die Länge 5 nicht überschreiten darf. $A_1 \models \varphi_1$, $A_2 \not\models \varphi_1$, $A_3 \models \varphi_1$
- Gilt für alle Graphen bei dem jeder Knoten zwei Kanten hat und ein dritter Knoten existiert, der keine Kante zu diesem Knoten hat. $A_1 \models \varphi_2$, $A_2 \models \varphi_2$, $A_3 \not\models \varphi_2$
- Gilt für alle Graphen, bei denen alle unterschiedlichen Knoten mit allen unterschiedlichen Knoten verbunden sind. $A_1 \models \varphi_3$, $A_2 \not\models \varphi_3$, $A_3 \not\models \varphi_3$

(ii)

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \forall y(x \cdot y = x) \\
\psi_1(x) &= \forall y(x \cdot y = y) \\
\psi_i(x) &= \exists y(\psi_1(y) \wedge \exists z(\psi_0(z) \wedge y + (x \cdot x) = z)) \\
\psi_{\text{inverse mult.}} &= \exists z((\psi_1(z) \wedge \forall x \exists y(x \cdot y = z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \neg(\psi_{\text{inverse mult.}}) \\
\phi_2 &= \psi_{\text{inverse mult.}} \wedge \neg(\exists x \psi_i(x)) \\
\phi_3 &= \exists x \psi_i(x)
\end{aligned}$$

$\psi_0(x)$ beschreibt eine 0. Also das übergebene x hat die Eigenschaften der 0 bzw. bei diesen Mengen erfüllt nur die 0 diese Eigenschaften. Analog mit $\psi_1(x)$ für 1 und $\psi_i(x)$ für i. $\psi_{\text{inverse mult.}}$ gilt wenn jedes Element bezüglich der Multiplikation ein inverses Element besitzt (Wenn 1 das neutrale Element ist). Die natürlichen Zahlen besitzen diese Eigenschaft nicht, weshalb ϕ_1 nur von diesen erfüllt wird ($\mathbb{Z}$ würde auch ϕ_1 erfüllen.) Die rationalen Zahlen besitzen zwar für jedes Element ein inverses bzgl. der Multiplikation, aber kein Element mit den Eigenschaften von i. Die komplexen Zahlen besitzen ein Element mit den Eigenschaften von i.

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
var(\phi) &= \{x_1, x_2, ..., x_n\} \\
\beta(x_i) &= \begin{cases} \top, & x_i = 1 \\ \bot, & x_i = 0 \end{cases} \\
\varphi_e &= \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \neg Z^{\mathcal{A}}([\![\phi]\!]^{\beta}) \\
\varphi_t &= \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \neg Z^{\mathcal{A}}([\![\phi]\!]^{\beta})
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\varphi_k = \exists x_1 ... \exists x_k (\forall y(\bigvee_{1 \le i \le k} x_i = y \vee E(y, x_i))$$

Aufgabe 4

Wir übersetzen die Formel ϕ folgendermaßen induktiv in die Formel ψ_n:

$c : FO[\sigma] \rightarrow AL$

- Basisfall:

  Fall 1: $c(\phi) = c(E(x, y)) = E(x, y)$

  Fall 2: $c(\phi) = c(\forall x\ E(x, y)) = \bigwedge\limits_{i=0}^{n} E(x_i, y)$

  Fall 3: $c(\phi) = c(\exists x\ E(x, y)) = \bigvee\limits_{i=0}^{n} E(x_i, y)$

- Induktionsschritt:

  Fall 1: $c(\phi) = c(\phi_1 * \phi_2) = c(\phi_1) * c(\phi_2)$

  Fall 2: $c(\phi) = c(\forall x\ (\phi_1 * \phi_2)) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \Big(c(\phi_1(x_1, x_2, ..., x_n)) * c(\phi_2(x_1, x_2, ..., x_n))\Big)$

  Fall 3: $c(\phi) = c(\exists x\ (\phi_1 * \phi_2)) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \Big(c(\phi_1(x_1, x_2, ..., x_n)) * c(\phi_2(x_1, x_2, ..., x_n))\Big)$

Aufgrund der Definition von c gilt, dass ϕ genau dann wahr wird, wenn ψ_n wahr wird. Daraus folgt, dass jede Belegung β, eine Belegung ist, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt.