Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \quad & \forall x\, \neg E(x,x) \wedge \\ & \forall x \forall y\, (x \neq y \Rightarrow E(x,y) \vee E(y,x)) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (E(x,y) \wedge E(y,z) \Rightarrow E(x,z))\end{aligned}$$

(ii) Widerspruchsannahme:
Es existiert ein φ_2 mit Quantorenrang m, sodass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$

$$\mathcal{A} \models \varphi_2 \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.}$$

gilt.
Nehmen wir nun die lineare endliche Ordnung $\mathcal{B}_1 = (B_1, E^{\mathcal{B}_1})$ mit $|B_1| = 2^{m+1} > 2^m$ und $\mathcal{B}_1 = (B_2, E^{\mathcal{B}_1})$ mit $|B_2| = 2^m + 1 > 2^m$. Es gilt nach dem Satz der Vorlesung, dass die Duplikatorin das EF-Spiel gewinnen würde, woraus folgt, dass φ_2 die beiden Ordnungen nicht unterscheiden könnte. Da aber $|B_1|$ gerade ist und $|B_2|$ ungerade, ist das ein Widerspruch zur Annahme, woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss. Somit kann kein solcher $FO[\sigma]$-Satz φ_2 existieren.

(iii)

(iv) Widerspruchsannahme: Es existiert ein solcher $FO[\sigma]$-Satz φ_4.

Nach der Teilaufgabe (iii) existiert ein Satz φ_3, sodass für jeden endlichen Graph G = (A,E) gilt:

$$\text{Der Graph } (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \text{ ist zusammenhängend genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.}$$

Nun gilt nach φ_4 auch:

$$\begin{aligned} & G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \models \varphi_4 \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.} \\ \Leftrightarrow & G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \not\models \varphi_4 \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ gerade ist.}\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Teilaufgabe (ii), woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss, sodass es keinen solchen $FO[\sigma]$-Satz φ_4 geben kann.

Aufgabe 3

(i) Der Herausforderer spielt in der Struktur $\mathcal{B}$ und wählt ∞. Gibt die Duplikatorin das Element a als Antwort, dann gilt, dass ein Element i in $\mathcal{A}$ existiert, sodass a < b. Daraus folgt aber, dass es ebenfalls ein $P_i^{\mathcal{A}}$ gibt, sodass $a \notin P_i^{\mathcal{A}}$, was jedoch ein Widerspruch ist, da ∞ in allen einstelligen Relationen aus $\mathcal{B}$ vorkommt.

(ii) Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ beliebig.
Für jedes $P_i(x)$ mit $x \in \mathbb{N}$ gilt (*):

i > 0:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_i(x) = 1$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x, sodass x > i und damit $P_i(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_i(x) = 0$
Für jedes P_i existiert eine Zahl x, sodass x < i und damit $P_i(x) = 0$.

i = 0:

1. wurde x durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert eine Zahl x, sodass x > 0 und damit $P_0(x) = 1$.

2. wenn x durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist $P_0(x) = 1$
Für P_0 existiert keine Zahl x, sodass x < 0 und damit $P_0(x) = 1$.

Die Aussagen (*) gelten in beiden Strukturen, woraus folgt, dass alle Relationen gleich auswerten und somit auch der Satz φ in beiden Strukturen immer gleich auswertet. Da keine Einschränkung bei φ getroffen wurde, folgt, dass es keinen $FO[\sigma]$-Satz gibt, der beide Strukturen unterscheidet, sodass sie elementar äquivalent sind.