Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 10

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$, wobei M ein 3-stelliges Relationssymbol ist und es gilt $(a, b, c) \in M^{\mathcal{A}_1} \Leftrightarrow a \cdot b = c$ für $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $M^{\mathcal{B}_1} = M^{\mathcal{B}_1} \cap \mathbb{R}^3$

Die Duplikatorin gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_1, a_1, a_1))$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_1, b_1, b_1))$
2. Zug: Fall 1. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_2, a_2, a_1)) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_2, b_2, b_1)) \wedge b_1 \neq b_2$
   Fall 3. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $a_2 = a_1$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $b_2 = b_1$

Der Herausforderer gewinnt das 3-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$ sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$ sonst verliert sie sofort.
3. Zug: H wählt $a_3 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_3, a_3, a_2) \wedge a_3 \neq a_2$ Dann gilt $M^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_3, a_3, a_2)$
   Da $M^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gelten muss, muss b_1 gleich 1 oder 0 sein. Da jedoch auch $M^{\mathcal{B}_1}(b_2, b_2, b_1)$ mit $b_2 \neq b_1$ gelten muss, muss $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$ sein. Nun gibt es aber keine $b_3 \in \mathbb{R}$ mit $M^{\mathcal{B}_1}(b_3, b_3, b_2)$, in $\mathbb{C}$ gibt es dafür $i \vee -i$

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b \exists c (M(a, a, a) \wedge M(b, b, a) \wedge M(c, c, b) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c))$

(ii) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$.

Die Duplikatorin gewinnt das 1-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\neg(R(a_1, a_1, a_1))$
   D wählt beliebiges $b_1 \in \mathbb{Z}$

Der Herausforderer gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$, sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_2, a_2, a_2) \wedge a_1 \neq a_2$
   Dann gilt $R^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), R^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_2)$. $R^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gilt zwar auch, aber da $a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$ gelten muss, jedoch nur die 0 diese Bedingung erfüllt, gewinnt H das 2-Runden Spiel.

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b (R(a, a, a) \wedge R(b, b, b) \wedge b \neq a)$

Aufgabe 2

1. Zwei σ-Strukturen $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind elementar äquivalent, genau dann wenn f.a. $\varphi \in FO(\sigma)$ gilt $\mathcal{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow B \vDash \varphi$ bzw. die Duplikatorin gewinnt für jedes $m \in \mathbb{N}$ das m-Runden Spiel.
2. Zwei σ-Strukturen $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind isomorph, wenn es eine Bijektion f zwischen diesen existiert und f ein Homomorphismus ist.

Beweis:

1. **$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind elementar äquivalent $\Leftrightarrow$ Die Duplikatorin gewinnt jedes m-Runden Spiel**
   Sei $m \in \mathbb{N}$ ein beliebig. Wählt der Herausforderen ein Tupel a_n, die Unendlichkeit nicht enthält, so wählt die Duplikatorin genau das gleiche Element in der anderen Struktur. Dadurch entsteht logischerweise ein Homomorphismus.
   Wählt der Herausforderer aber ein Tupel a_n mit Unendlich, so wählt die Duplikatorin ein Tupel $b_n = (i, j)$, wobei i größer ist als m. Da alle Komponenten vollständige Untergraphen darstellen, entsteht hierbei ebenfalls ein partieller Isomorphismus.
   Für alle unendlichen Tupel des Herausforderers in den nächsten Runden gibt die Duplikatorin Antworten aus der gleichen Komponente wie vorhin an.
   Da das Spiel nur m Runden hat, ergibt dies auch mit der Unendlichkeit der Komponente kein Problem.

2. **$\mathcal{A} \ncong \mathcal{B} \Leftrightarrow$ Es gibt keine Bikjektion zwischen den Strukturen und f ein Homomorphismus ist**
   Um einen Isomorphismus darzustellen, muss jedes Tupel ohne Unendlich auf das identische Tupel in der anderen Struktur abgebildet werden, da jede Komponente einen vollständigen Untergraphen darstellt und das die einzige Lösung ist, um die Verträglichkeit des Isomorphismus sicherzustellen.
   Da somit jede Komponente auf sich selbst abgebildet wird, ist kein Element mehr übrig, auf das die zusätzliche unendliche Komponente in B abgebildet werden kann.

Aufgabe 3

In Aufgabe 2.) wurde gezeigt, dass die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent sind, d.h. heisst f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$. $\mathcal{A}$ besitzt nur endliche Komponenten, $\mathcal{B}$ auch eine unendliche.
Somit kann es keine Formel $\varphi \in FO[\sigma]$ geben, die nur dann erfüllbar ist genau dann wenn der Graph nur endliche Komponenten enthält, da die Strukturen elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4

Ein Aussage eines unendlichen EF-Spiels ist äquivalent zur Aussage ob zwischen den Strukturen ein isomorphismus vorliegt, also:

$$\text{D gewinnt } \mathfrak{G}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$$

Beweis:

1. (a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow$ D gewinnt $\mathfrak{G}_\infty$
   Der Isomorphismus ist eine Gewinnstrategie für D.
   (b) D gewinnt $\mathfrak{G}_\infty \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$
   Die Züge von D. stellen ein Isomorphismus da...

In Aufgabe 2.) gewinnt die Duplikatorin jedes Spiel, da die Strukturen elementar äquivalent sind, sie sind jedoch nicht isomorph, womit sie das unendliche EF-Spiel nicht gewinnen würde.