FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2012/2013
Stand: 10.11.2012

3. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3
Abgabe: 15.11.2012 in der Vorlesung

Hausaufgabe 1 — 5 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien β, β' Belegungen der Variablen $X_1, \dots, X_n$. Wir schreiben $\beta \leq \beta'$, wenn $\beta(X_i) \leq \beta'(X_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ der Aussagenlogik heißt monoton, falls $[\![\varphi]\!]^{\beta} \leq [\![\varphi]\!]^{\beta'}$ für alle Belegungen β, β' der Variablen $X_1, \dots, X_n$ mit $\beta \leq \beta'$.

Zeigen Sie, dass eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ monoton ist genau dann, wenn sie alleine mit den Variablen $X_1, \dots, X_n$ und $\top, \bot, \wedge$ und $\vee$ dargestellt werden kann.

Hausaufgabe 2 — 5 Punkte

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass Ihnen $\top$ und $\bot$ nicht als aussagenlogische Formeln zur Verfügung stehen. Wir betrachten hier nur Funktionen und Formeln mit mindestens einer Variablen.

(i) Zeigen Sie, dass $\{\text{NAND}\}$ funktional vollständig ist. Dabei ist φ NAND ψ definiert als $\neg(\varphi \wedge \psi)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht funktional vollständig ist.

Hausaufgabe 3 — 5 Punkte

(i) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_n an, deren Länge polynomiell in n ist, die Länge jeder äquivalenten Formel in KNF aber exponentiell in n ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Geben Sie analog zur vorigen Aufgabe Formeln ψ_n an, deren Länge polynomiell in n ist, die Länge jeder äquivalenten Formel in DNF aber exponentiell in n ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Betrachten Sie

$$\begin{aligned} \varphi_1(X_1) &= X_1 \\ \varphi_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \varphi_n(X_1, \dots, X_n) \oplus X_{n+1}. \end{aligned}$$

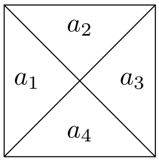
Hausaufgabe 4 — 5 Punkte

Wir betrachten quadratische Dominosteine, deren Seiten mit je einer Zahl beschriftet sind. Dominosteine passen nebeneinander, wenn die nebeneinanderliegenden Seiten mit derselben Zahl beschriftet sind.

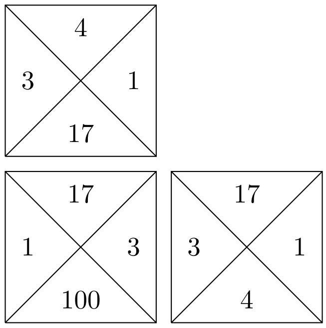
Formal ist ein Dominostein $D = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ein 4-Tupel von Zahlen. Dieser Stein passt rechts neben einen anderen Dominostein $D' = (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$, wenn $a'_3 = a_1$ gilt. Analog passt D oberhalb von D', wenn $a'_2 = a_4$ gilt. Die folgende Grafik illustriert diesen Zusammenhang.

10.11.2012, rechts/links und oben/unten korrigiert

Die Position der a_i:



Beispiel einer unvollständigen Parkettierung:



Ein Dominosystem $\mathcal{D}$ ist eine endliche Menge von Dominosteinen. Eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über einem Dominosystem $\mathcal{D}$ ist eine Abbildung $P : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{D}$, so dass $P(i,j)_3 = P(i+1,j)_1$ und $P(i,j)_2 = P(i,j+1)_4$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$, wobei $P(i,j)_k$ für das k-te Element des Tupels $P(i,j)$ steht. Analog ist eine Parkettierung von $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ definiert, wobei $\mathbb{Z}_n = \{-n, \ldots, n\}$. Hierbei gelten die Bedingungen an $P(i,j)$, $P(i+1,j)$, etc. nur für die Dominosteine, für die $P(i,j)$, $P(i+1,j)$, etc. auch definiert ist. Jede Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist also durch Einschränkung auch eine Parkettierung von $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.

10.11.2012, Randeffekte erklärt

Beachten Sie, dass eine Parkettierung jeden Dominostein in $\mathcal{D}$ beliebig oft verwenden kann. Dominosteine dürfen nicht rotiert werden.

Zeigen Sie, dass eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über einem Dominosystem $\mathcal{D}$ existiert genau dann, wenn für jedes $n \geq 1$ eine Parkettierung von $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ existiert.