

# Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 6

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528  
Maximilian Bachl - 341455  
Marius Liwotto - 341051

## Aufgabe 1

(i)  $h : V(G) \rightarrow V(H)$

$$v_1 \mapsto w_1$$

$$v_2 \mapsto w_2$$

$$v_3 \mapsto w_1$$

$$v_4 \mapsto w_3$$

$$v_5 \mapsto w_2$$

(ii) Zu zeigen ist:

(i) Graph G ist 3-färbbar  $\Rightarrow$  es existiert ein Homomorph. von G nach H

(ii) es existiert ein Homomorph. von G nach H  $\Rightarrow$  Graph G ist 3-färbbar

H ist 3-färbbar mit folgender Farbbelegung

$$c: V(H) \rightarrow \{r, g, b\}$$

$$c(w_1) \mapsto r$$

$$c(w_2) \mapsto g$$

$$c(w_3) \mapsto b$$

(i) Da G 3-färbbar ist, gilt:

$$\exists c' : V(G) \rightarrow \{r, g, b\}. c' \text{ ist eine 3-Färbung von G}$$

Daraus kann man nun folgenden Homomorphismus h bilden:

$$h : V(G) \rightarrow V(H)$$

$$h(v) \mapsto \begin{cases} w_1, & c'(v) = r \\ w_2, & c'(v) = g \\ w_3, & c'(v) = b \end{cases}$$

Beweis der Richtigkeit des gebildeten h:

Es muss gelten:

$$\forall \{u, v\} \in E(G). \{h(u), h(v)\} \in E(H)$$

Da nach Annahme alle Knoten einer Kante aus G verschiedenfarbig sind, gilt:

$$(1) \forall \{u, v\} \in E(G). h(u) \neq h(v)$$

Des Weiteren gilt:

$$(2) \forall u \in \{w_1, w_2, w_3\}. \forall v \in \{w_1, w_2, w_3\} \setminus \{u\}. \{u, v\} \in E(H)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\forall \{u, v\} \in E(G). \{h(u), h(v)\} \in E(H)$$

(ii) Da ein Homomorphismus h von G nach H existiert, gilt:

$$(*) \forall \{u, v\} \in E(G). \{h(u), h(v)\} \in E(H)$$

Daraus kann man nun folgende 3-Färbung  $c'$  ableiten:

$$c' : V(G) \rightarrow \{r, g, b\}$$

$$v \mapsto h(v)$$

Beweis der Richtigkeit der 3-Färbung  $c'$ :

Es gilt:

$$(**) \forall \{u, v\} \in E(G). h(u) \neq h(v)$$

Würde dies nicht gelten, würde das bedeuten, dass  $\{h(u), h(u)\} \in E(H)$  sein würde, da aber  $H$  irreflexiv ist, wäre das ein Widerspruch. Aus (\*) und (\*\*) folgt:

$$\forall \{u, v\} \in E(G). c(h(u)) \neq c(h(v)) \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E(G). c'(u) \neq c'(v)$$

$\Rightarrow c'$  ist eine passende 3-Färbung für  $G \Rightarrow G$  ist 3-färbbar

## Aufgabe 2

Zu zeigen ist:

(i) Existieren für alle endlichen Teilgraphen  $G'$  von  $G$  Homomorphismen von  $G'$  nach  $H$ , so existiert auch ein Homomorphismus von  $G$  nach  $H$ .

(ii) Existiert für  $G$  ein Homomorphismus von  $G$  nach  $H$ , so existieren für alle endlichen Teilgraphen  $G'$  von  $G$  Homomorphismen von  $G'$  nach  $H$ .

(i) Der Graph  $G = (V, E)$  wird folgendermaßen in einer Aussagenlogische Formel übersetzt:  
Für jede Kante  $\{u, v\} \in E(G)$  führen wir eine Variable  $X_{u,v}$  ein.

$$\text{Sei } h: V(G) \rightarrow V(H)$$

$$\Phi = \{ \{X_{u,v} \rightarrow X_{h(u), h(v)}\} \mid \{u, v\} \in E(G) \}$$

$$\text{Sei } \Phi_0 \subseteq \Phi$$

$$E' = \{ \{u, v\} \mid \{X_{u,v} \rightarrow X_{h(u), h(v)}\} \in \Phi_0 \}$$

$$V' = \{v \mid \{u, v\} \in E'\}$$

Da  $\Phi_0$  eine endliche Teilmenge von  $\Phi$  ist, muss auch  $E'$  und damit  $V'$  endlich sein. Für den von  $V'$  induzierten endlichen Untergraphen  $G'$  von  $G$  existiert nach Annahme ein Homomorphismus  $h': V(G') \rightarrow V(H)$ . Daraus folgt, dass folgendes gilt:

$$\forall \{u, v\} \in E'. \{h'(u), h'(v)\} \in E(H)$$

Eine passende Belegung  $\beta$  wäre somit Folgende:

$$\beta(X_{u,v}) = 1, \text{ wenn } \{u, v\} \in E' \text{ und } \beta(X_{h'(u), h'(v)}) = 1, \text{ wenn } \{h'(u), h'(v)\} \in E(H)$$

Aus der Erfüllbarkeit von jedem beliebigen  $\Phi_0$  folgt nach dem Kompaktheitssatz, dass  $\Phi$  auch erfüllbar ist. Daraus folgt, dass ein Homomorphismus  $h: V(G) \rightarrow V(H)$  existiert, wenn für alle Teilgraphen  $G'$  ein Homomorphismus existiert.

(ii) Ist trivial.

## Aufgabe 3

In der Hausaufgabe 4 wurde bewiesen, dass die P-Resolution korrekt ist, d.h. falls es eine Menge von Klauseln eine P-Resolutionswiderlegung hat, so ist die Klauselmengue unerfüllbar. Damit die P-Resolution vollständig ist, muss gezeigt werden, dass für jede unerfüllbare Klauselmengue eine P-Resolutionswiderlegung existiert. Dazu wird zuerst folgende Behauptung aufgestellt:

**Behauptung:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathcal{C}$  eine unerfüllbare Klauselmenge in den Variablen  $\{V_1, \dots, V_{n-1}\}$ . Dann hat  $\mathcal{C}$  eine Resolutionswiderlegung.

$n = 0$ .

**IA:** In diesem Fall ist  $\mathcal{C}$  unerfüllbar und enthält keine Variablen. Also  $\mathcal{C} := \{\square\}$  und somit existiert eine Resolutionswiderlegung, bzw. das ganze ist schon eine Resolutionswiderlegung.

**IS:**  $n \rightarrow n + 1$

Sei  $\mathcal{C}$  eine unerfüllbare Klauselmenge in den Variablen  $\{V_1, \dots, V_n\}$ . Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^+ &:= \{C \setminus \{\neg V_n\} \mid C \in \mathcal{C} \wedge V_n \notin C\} \\ \mathcal{C}^- &:= \{C \setminus \{V_n\} \mid C \in \mathcal{C} \wedge \neg V_n \notin C\}\end{aligned}$$

$\mathcal{C}^+$  und  $\mathcal{C}^-$  sind beide unerfüllbar. Denn wäre z.B.  $\mathcal{C}^+$  erfüllbar, z.B. durch  $\beta \models \mathcal{C}^+$ , dann würde  $\beta' := \beta \cup \{V_n \rightarrow 1\}$  die Menge  $\mathcal{C}$  erfüllen.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Resolutionsableitungen  $(C_1, \dots, C_s)$  und  $(D_1, \dots, D_t)$  der leeren Klausel  $C_s = D_t = \square$  aus  $\mathcal{C}^+$  bzw.  $\mathcal{C}^-$ .

Falls  $(D_1, \dots, D_t)$  schon eine Ableitung von  $\square$  aus  $\mathcal{C}$  ist, sind wir fertig. Andernfalls werden Klauseln  $D_i$  benutzt, die aus  $\mathcal{C}$  durch Entfernen von  $V_n$  entstanden sind, d.h.  $D_i \cup \{V_n\} \in \mathcal{C}$ .

Fügen wir zu diesen Klauseln und allen Resolventen wieder  $V_n$  hinzu, so erhalten wir eine Ableitung  $(D'_1, \dots, D'_t)$  von  $V_n$  aus  $\mathcal{C}$ .

Falls  $(C_1, \dots, C_s)$  schon eine Ableitung von  $\square$  aus  $\mathcal{C}$  ist, sind wir fertig. Andernfalls werden Klauseln  $C_i$  benutzt, die aus  $\mathcal{C}$  durch Entfernen von  $\neg V_n$  entstanden sind, d.h.  $C_i \cup \{\neg V_n\} \in \mathcal{C}$ .

Fügen wir zu diesen Klauseln  $\neg V_n$  hinzu, gibt es in der normalen Resolution eine Ableitung  $(C'_1, \dots, C'_s)$  von  $\neg V_n$  aus  $\mathcal{C}$ .

Doch es gibt in der P-Resolution das Problem, dass immer eine positive Klausel resolviert werden muss, und da wir negative Variablen zu den Klauseln hinzufügen, ist  $(C'_1, \dots, C'_s)$  unter Umständen keine gültige P-Resolution.

Doch haben wir schon zuvor  $\{V_n\}$  resolviert, wodurch alle Klauseln der Form  $C_i \cup \{\neg V_n\} \in \mathcal{C}$  wieder zu  $C_i$  resolviert werden können. Diese Resolutionskette bezeichne als  $(C'D'_1, \dots, C'D'_k)$ . Nun sind die Resolutionsableitungen  $(C_1, \dots, C_s)$  möglich, da alle Klauseln vorliegen.

Damit wäre  $(D'_1, \dots, D'_t, C'D'_1, \dots, C'D'_k, C_1, \dots, C_s, \square)$  eine Resolutionswiderlegung von  $\mathcal{C}$

Nun muss das ganze noch für jede Klauselmenge  $\mathcal{C}$  bewiesen werden. Sei dazu  $\mathcal{C}$  eine unerfüllbare Klauselmenge

1. Ist  $\mathcal{C}$  endlich, dann enthält sie nur endlich viele Variablen und der Beweis folgt sofort aus der Behauptung.
2. Ist  $\mathcal{C}$  unendlich, dann folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass bereits eine endliche Teilmenge  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  unerfüllbar ist. Also hat  $\mathcal{C}'$  eine Resolutionswiderlegung. Diese ist aber auch eine Resolutionswiderlegung von  $\mathcal{C}$ .

**Hinweis:** Große Teile des Beweises kommen aus den Vorlesungsfolien der VL TheGI3 von S. Kreutzer.

## Aufgabe 4

Wir definieren  $n = |V(G)|$ . Es werden  $n$  Variablen eingeführt, die jeweils 2 Indizes haben mit der Namensgebung  $X_{i,j}$ , wobei  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Die Idee ist, dass diese  $n \times n$  Matrix aus Variablen einen Pfad definiert, indem man jeweils genau eine Variable der  $n$  Variablen mit 1 belegt, alle anderen mit 0. Nun würden die Variablen  $X_{i,j}$  und  $X_{i+1,k}$  für die Kante  $\{j, k\}$  stehen.  $\varphi$  muss folgendes leisten:

1. Jede Variable definiert genau einen Knoten.

$$\varphi_1 = \bigwedge_{0 \leq i < n} \bigvee_{j \in V(G)} \left( X_{i,j} \wedge \left( \bigwedge_{k \in V(G) \setminus \{j\}} \neg X_{i,k} \right) \right)$$

Jede Klausel hat die Größe  $n$ , es werden  $n$  mal  $n$  Klauseln gebildet  $\Rightarrow \varphi_1 \in \mathcal{O}(n^3)$

2. Jeder Knoten kommt genau einmal vor:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{j \in V(G)} \bigvee_{0 \leq i < n} \left( X_{i,j} \wedge \left( \bigwedge_{i' \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i\}} \neg X_{i',j} \right) \right)$$

Jede Klausel hat die Größe  $n$ , es werden  $n$  mal  $n$  Klauseln gebildet  $\Rightarrow \varphi_2 \in \mathcal{O}(n^3)$

3. Die Kanten existieren und bilden von jeglichem Startpunkt einen geschlossenen Pfad:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{0 \leq m < n} \bigwedge_{0 \leq i < n} \left( \bigvee_{\{k,l\} \in E(G)} X_{(i+m) \bmod n, k} \wedge X_{((i+m) \bmod n) + 1, l} \right)$$

Jede Klausel hat die Größe 2, es werden  $n^2$  mal maximal  $\binom{n}{2}$  Klauseln gebildet  $\Rightarrow \varphi_3 \in \mathcal{O}(n^4)$

$\varphi$  wird nun als Konjunktion des Ganzen definiert:

$$\varphi(G) = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

$\varphi(G)$  ist genau erfüllbar, wenn ein Hamilton Kreis in  $G$  existiert. Da für  $\varphi_{1-3}$  gezeigt wurde, dass es polynomiellen Aufwand hat, ist der Aufwand von  $\varphi$  ebenfalls polynomiell, nämlich  $\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^4) = \mathcal{O}(n^4)$ .