Frohes neues Jahr 2013

Beweis:

$3 \Rightarrow 2$: Es gilt:

- $qr(\varphi^m_{\mathfrak{A},\bar{a}}) = m$.
- $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\bar{a}}[\bar{a}]$

Also folgt: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$1) \Leftrightarrow 2)$:

Per Induktion über m.

$m = 0$:

D gewinnt $G_0(A, \bar{a}, B, \bar{b})$

$\iff$ $\pi: \bar{a} \longmapsto \bar{b} \in \mathrm{Part}(A, B)$ part. Isom.

Gew.bed.

$\iff$ $B \models \varphi^0_{A, \bar{a}}[\bar{b}]$

nach Def. von $\varphi^0_{A, \bar{a}}$

$m \to m+1$: D gewinnt $G_{m+1}(A, \bar{a}, B, \bar{b})$

$\iff$ für alle $a \in A$ ex. $b \in B$ s.d. D das Spiel

$G_m(A, \bar{a}a, B, \bar{b}b)$ gewinnt.

für alle $b \in B$ ex. $a \in A$ s.d. D das Spiel

$G_m(A, \bar{a}a, B, \bar{b}b)$ gewinnt

$\iff$ f.a. $a \in A$ ex. $b \in B$ s.d. $B \models \varphi^m_{A, \bar{a}a}[\bar{b}b]$ und

f.a. $b \in B$ ex. $a \in A$ s.d. " "

$$\iff B \models \left(\bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1} \varphi^m_{A, \bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right) \wedge \left(\forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^m_{A, \bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right)$$

$\iff$ $B \models \varphi^{m+1}_{A, \bar{a}}[\bar{b}]$.

1) ⟹ 3) : Per Ind. nach m.

$m = 0$: genauso wie bei 1) ⟺ 2)

$m \to m+1$: D gewinnt $G_{m+1}(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ nach Vor.

Sei $\varphi(\bar{x})$ eine Formel mit
$$\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1 \cdots x_k\}$$
und $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m+1$.

z.z.: $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

Für $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$ folgt das aus der I.V.

Für Boolesche Komb $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg$ folgt das sofort.

Betrachte nach $\varphi = \exists x_{k+1} \chi(\bar{x}, x_{k+1})$

$$\mathrm{qr}(\chi) \leq m$$

Ang $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

D.h. es ex. $a \in A$ s.d. $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}, a]$

Da D das Spiel $G_{m+1}(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ ex. $b \in B$ s.d. D das Spiel $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gew.

Also, nach IV, gilt
$$\mathcal{B} \models \chi[\bar{b}b]$$
und somit
$$\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}].$$

Die Umkehrung ist analog

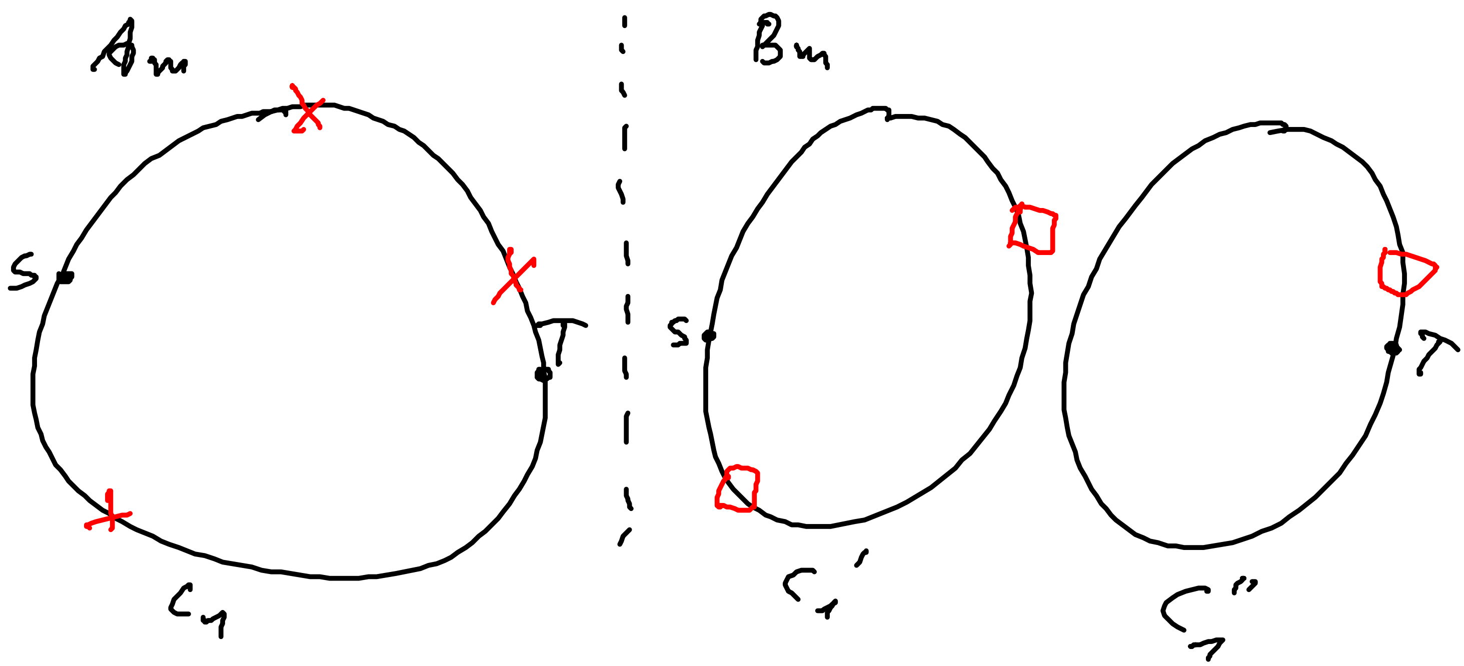
$\square$

Für $m \geq 0$ Str. $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ wählen, s.d.

$\mathcal{A}_m \in$ Reach

$\mathcal{B}_m \notin$ Reach

s.d.
aber D gewinnt $G_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$.



Kreise C_1, C_1', C_1'' haben Länge $> 2^{m+1}$.

$\overline{\Phi} \Longrightarrow \Delta$ gültig

$$\bigwedge \Phi \rightarrow \bigvee \Delta \quad \text{Taut.}$$

$$\{T, T \rightarrow F\} \Rightarrow \{F, U\}$$

gültig

$$\{T \vee U, U \vee Z\} \Rightarrow \{U\}$$

$\beta: T \mapsto 1$, $Z \mapsto 1$, $U \mapsto 0$ fals. die Sequenz.

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{p, q \Rightarrow q}{p \wedge q \Rightarrow q}$$

$\Phi = \emptyset$

$\Delta = \{q\}$

$\psi = p \quad \varphi = q$

$$(\Rightarrow\wedge)\ \frac{p, q, r \Rightarrow q \qquad p, q, r \Rightarrow r}{p, q, r \Rightarrow q \wedge r}$$

$$(\neg\Rightarrow)\;\dfrac{(\Rightarrow\neg)\;\dfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\emptyset \Rightarrow \varphi, \neg\varphi}}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\;\dfrac{\dfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\varphi \Rightarrow \psi \vee \varphi} \qquad \dfrac{\overline{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi}}{\psi \vee \varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi}$$

<u>Beispiel</u>:

Ziel: Beweis folgender Aussage

$(X \wedge Y) \to (X \vee Y)$ Tautologie.

Wir beweisen: $\Rightarrow (X \wedge Y) \to (X \vee Y)$

$$(\Rightarrow\to)\;\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\;\dfrac{(\Rightarrow\vee)\;\dfrac{\overline{X, Y \Rightarrow X, Y}}{X, Y \Rightarrow X \vee Y}}{X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y}}{\Rightarrow (X \wedge Y) \to (X \vee Y)}$$

$$
(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\Rightarrow\neg)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{\dfrac{}{\neg Y, X \Rightarrow X} \qquad (\neg\Rightarrow)\,\dfrac{\dfrac{}{X, Y \Rightarrow Y}}{\neg Y, X, Y \Rightarrow \varnothing}}{(X \to Y), \neg Y, X \Rightarrow \varnothing}}{(X \to Y), \neg Y \Rightarrow \neg X}}{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)}
$$