

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 1

Tutorium: , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto -

1 Aufgabe

T - Tobi kommt | C - Christoph kommt | S - Sebastian kommt | V - Viktor kommt | F - Friederike kommt

$$\begin{aligned}(T \rightarrow C \wedge S) \wedge (C \vee V) \wedge (S \rightarrow \neg F) \wedge (\neg V) \wedge (\neg T \rightarrow \neg C) &\leftrightarrow \\(\neg T \vee (C \wedge S)) \wedge (C \vee V) \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (\neg V) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\(\neg T \vee C) \wedge (\neg T \vee S) \wedge C \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\C \wedge (\neg T \vee S) \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\C \wedge (\neg T \vee S) \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge T &\leftrightarrow \\C \wedge S \wedge \neg V \wedge \neg F \wedge T &\end{aligned}$$

2 Aufgabe

(i) Ist nicht erfüllbar

$$\begin{aligned}\neg(X \rightarrow (Y \rightarrow X)) &\leftrightarrow \\ \neg(\neg X \vee (\neg Y \vee X)) &\leftrightarrow \\ \neg \top &\leftrightarrow \\ \perp &\end{aligned}$$

(ii) Ist erfüllbar

$$\begin{aligned}(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow Y &\leftrightarrow \\ \neg(X \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \vee Y &\leftrightarrow \\ \neg(X \wedge \neg Y) \vee Y &\leftrightarrow \\ \neg X \vee Y \vee Y &\leftrightarrow \\ \neg X \vee Y &\end{aligned}$$

(iii) Ist erfüllbar

$$\begin{aligned}(\neg X \rightarrow (X \wedge Y)) \rightarrow (Y \rightarrow X) &\leftrightarrow \\ \neg(X \vee (X \wedge Y)) \vee \neg(Y \vee X) &\leftrightarrow \\ \neg((X \vee (X \wedge Y)) \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\ \neg(X \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\ \neg(X \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\ \neg X &\end{aligned}$$

(iv) Ist erfüllbar

$$\begin{aligned}(X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\ \neg(X \vee Y) \vee (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\ (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\ (X \leftrightarrow Y) &\end{aligned}$$

(v) Ist eine Tautologie

$$\begin{aligned}
(X \wedge Y) &\rightarrow (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg(X \wedge Y) &\vee (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg X \vee \neg Y &\vee (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg X \vee \neg Y &\vee (X \vee Y) \leftrightarrow \\
\neg X \vee \neg Y &\vee X \vee Y \leftrightarrow \\
&\top
\end{aligned}$$

3 Aufgabe

Sei ϕ_i induktiv definiert als:

$$\begin{aligned}
\phi_0(a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0) &= \neg(a_0 \leftrightarrow b_0) \\
\psi_0(a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0) &= a_0 \wedge b_0 \\
\phi_{i+1}(a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0) &= (\neg a_{i+1} \wedge \neg b_{i+1} \wedge \psi_i) \vee (\neg a_{i+1} \wedge b_{i+1} \wedge \neg \psi_i) \vee (a_{i+1} \wedge \neg b_{i+1} \wedge \neg \psi_i) \vee (a_{i+1} \wedge b_{i+1} \wedge \psi_i) \\
\psi_{i+1}(a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0) &= (a_{i+1} \wedge b_{i+1}) \vee (a_{i+1} \wedge \psi_i) \vee (b_{i+1} \wedge \psi_i)
\end{aligned}$$

4 Aufgabe

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde (Folien S.) gibt es zu jeder Formel ϕ eine äquivalente konjunktive Normalform. Damit diese der Bedingung $\text{max-depth} = \text{min-depth}$ gerecht wird, bedarf es folgender Konstruktion:

$$f(\phi) \rightarrow \begin{cases} f((\psi \wedge \top) * \xi), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{max-depth}(\psi) < \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\} \\ f(\psi * (\xi \wedge \top)), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{max-depth}(\psi) > \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\} \\ f(\psi) * f(\xi), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{max-depth}(\psi) = \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\} \\ \phi, & \phi \in (\text{AVar} \cup \neg\text{AVar} \cup \{\top, \perp\}) \end{cases}$$

wobei $\neg\text{AVar}$ definiert ist als die Menge der negierten Variablen von AVar

Sei zu beweisen, dass diese Konstruktion hält was sie verspricht.

$$\begin{aligned}
\text{IA } \phi \in (\text{AVar} \cup \{\top, \perp\}) &\Rightarrow f(\phi) = \phi \Rightarrow \text{max-depth}(f(\phi)) = 0 = \text{min-depth}(f(\phi)) \\
\phi \in \neg\text{AVar} &\Rightarrow f(\phi) = \phi \Rightarrow \text{max-depth}(f(\phi)) = 1 = \text{min-depth}(f(\phi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV Sei } \psi \text{ eine Formel, wobei } \text{max-depth}(f(\psi)) &= \text{min-depth}(f(\psi)) \text{ und} \\
\text{Sei } \xi \text{ eine Formel, wobei } \text{max-depth}(f(\xi)) &= \text{min-depth}(f(\xi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IS Zu Zeigen ist, dass für die Termgrösse } n+1 \text{ das ganze noch gilt: } &f(\psi * \xi) \\
\text{Fallunterscheidung über } f(\psi * \xi) &
\end{aligned}$$

- $\text{max-depth}(\psi) < \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\}$
 $f(\psi * \xi) = f((\psi \wedge \top) * \xi) = \dots = f((\dots(\psi \wedge \top) \dots) * \xi)$
 Es werden zu ψ so lange $\wedge \top$ hinzugefügt bis max-depth der linken Seite = max-depth der rechten Seite.
 Jetzt kommt die Magie der Rekursion und die Funktion wird auf die Unterfunktionen aufgerufen:
 $(f(\dots(\psi \wedge \top) \dots \wedge \top)) * f(\xi) = (f(\dots(\psi \wedge \top) \dots \wedge (\top \wedge \top))) * f(\xi) = \dots$
 Durch die rekursiven Aufrufe wird der Term und alle Subterme tiefsymmetrisch. Wegen der IV ist damit auch $\text{min-depth}(f(\psi * \xi)) = \text{max-depth}(f(\psi * \xi))$
- $\text{max-depth}(\psi) > \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\}$
 analog
- $\text{max-depth}(\psi) = \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\vee, \wedge\}$
 Da $\text{max-depth}(\psi) = \text{max-depth}(\xi)$ gilt per Transitivität und der IV dieser Fall.