Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

(i) a) **Behauptung:** Die untenstehende Sequenzkalkülregel ist korrekt:

$$(\exists \Rightarrow)\frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta} c \text{ kommt nicht in } \Phi, \delta, \psi(x) \text{ vor}$$

Beweis: Sei τ die Signatur die alle Relations-, Funktions- und Konstantensymbole enthält, die in $\Phi, \Delta, \psi(x)$ vorkommen, aber nicht c. Wir nehmen an, dass $\Phi \cup \{\exists x\psi(x)\}$ erfüllbar ist, sonst sind wir fertig.
Sei also $J = (\mathcal{A}, \beta)$ eine τ-Interpretation mit $J \models \Phi \cup \{\exists x\psi(x)\}$. Sei $a \in A$ sodass $J[x/a] \models \psi(x)$. Sei J_a die $\tau \cup \{c\}$-Interpretation, die die Konstante c mit a belegt und sonst mit J übereinstimmt. Da $J[x/a] \models \psi(x)$ und da c nicht in Φ und $\psi(x)$ vorkommt, gilt $J_a \models \Phi \cup \{\psi(c)\}$. Nach Vorraussetzung gilt $J_a \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$. Da c nicht in Δ vorkommt, gilt auch $J \models \delta$. Dies war zu zeigen.

b) **Behauptung:** Die untenstehende Sequenzkalkülregel ist korrekt:

$$(\Rightarrow \exists)\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$$

Wir nehmen an, dass Φ erfüllbar ist, sonst sind wir fertig. Sei aber $J = (\mathcal{A}, \beta)$ eine Interpretation mit $J \models \Phi$. Falls $J \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$, so sind wir fertig. Sonst gilt nach Vorraussetzung $J \models \psi(c)$. Sei $a = [\![c]\!]^J$, Daraus gilt $J[x/a] \models \psi(x)$

Aufgabe 2

(i)

$$\frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an. Wir wählen $\Phi = \{\top\}$, $\psi = \perp$ sowie $\Delta = \{\top\}$.

Dann gilt:

$$\frac{\{\top\}, \perp \Rightarrow \{\top\}}{\{\top\} \Rightarrow \{\top\}}$$

Somit gilt in jeder beliebigen Interpretation $\mathcal{J}$, dass die obere Sequenz ungültig ist, die untere aber nicht.

(ii)

$$\frac{\Phi, \neg\forall x\varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an. Wir wählen $\Phi = \{\top\}$, $\varphi = (x = x)$ sowie $\Delta = \emptyset$.

Dann gilt:

$$\frac{\{\top\}, (\neg\forall x\ x = x) \Rightarrow \emptyset}{\{\top\} \Rightarrow (\exists x\ x = x)}$$

Somit gibt es offensichtlich eine Interpretation, sodass die obere Sequenz gültig ist, die untere aber nicht

Aufgabe 3

Es gilt:

$$\{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\} \equiv \{\forall x f(x) = x\} \cup \{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}$$

Mit dem Sequenzenkalkül kann man das Axiom nun beweisen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{f(f(c)) = c\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}}{\{f(c) = c, f(f(c)) = f(c)\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}}(\mathcal{S} \Rightarrow)}{\{\forall x f(x) = x, f(f(c)) = f(c)\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}}(\forall \Rightarrow)}{\{\forall x f(x) = x\} \cup \{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}}(\forall \Rightarrow)$$

Aufgabe 4

Da $\sigma = \emptyset$ gilt, dass alle Formeln $\varphi \in FO[\sigma]$ in der Auswertung in verschiedenen σ-Strukturen sich nur über den Quantorenrang von φ unterscheiden. Da φ endlich ist (Eingabe ist endlich), hat φ einen Quantorenrang $qr(\varphi) = m$. Würde man nun eine σ-Struktur suchen die ein Modell von φ ist, würde es reichen beliebige Strukturen mit m Elementen zu testen, da jede Struktur mit mehr als m Elementen elementar-äquivalent zu der mit m ist. Damit kann jede Berechnung der Turingmaschine die ein φ bekommen hat, nach dem untersuchen von Strukturen mit $1 - m$ Elementen abbrechen, falls keine gefunden wurde und eindeutig sagen, dass es kein Modell gibt bzw. dass es ein Modell gibt. Dies entspricht der Definition von Entscheidbarkeit.