TheGi 3 HA 2

Aufgabe 1

$N_k = \{X_{ik} \mid (v_i, v_k) \in E \wedge v_i, v_k \in V\}$

(i) $\varphi_n = \bigwedge_{k=1}^{n} (\bigvee_{c=1}^{\#(N_k)} X_{kc} \in N_k)$

(ii) $\phi(k) = \begin{cases} (X_{ij} \wedge X_{i(j+1)}) \wedge (\neg X_{i(j+2)} \wedge ... \wedge \neg X_{i(j+m)}), & \#(N_k) \geqslant 2 \\ X_{ij}, & \#(N_k) = 1 \wedge X_{ij} \in N_k \end{cases}$

$\varphi_n = \bigwedge_{k=1}^{\#V} (\phi(k))$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

$\varphi_1 = X \Rightarrow (Y \wedge Z)$
$\equiv \neg X \vee (Y \wedge Z)$
$\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)$
$\equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z)$
$\equiv \psi_1$

$\varphi_2 = (X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow Q$
$\equiv \neg(X \wedge Y \wedge Z) \vee Q$
$\equiv \neg X \vee \neg Y \vee \neg Z \vee Q$
$\equiv (\neg X \vee (\neg Y \vee (\neg Z \vee Q)))$
$\equiv (X \Rightarrow (Y \Rightarrow (Z \Rightarrow Q)))$
$\equiv \psi_2$

$\varphi_3 = (X \wedge Y) \Rightarrow \neg(Z \Rightarrow X)$
$\equiv \neg(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Z \vee X)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y) \vee (Z \wedge \neg X)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg X)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge T$

$\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee X)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee \neg X \vee X)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X) \vee \neg X$
$\equiv (X \Rightarrow \neg Y) \wedge (\neg Y \Rightarrow X) \vee \neg X$
$\equiv \psi_3$

$\varphi_4 = (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$
$\equiv \neg(Y \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow X)$
$\equiv \neg(\neg Y \vee Z) \vee (\neg Y \vee X)$
$\equiv (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \vee X)$
$\equiv (Y \vee \neg Y \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X)$
$\equiv (T \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X)$
$\equiv T \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X)$
$\equiv \neg Z \vee \neg Y \vee X$
$\equiv \psi_4$

$\varphi_5 = (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X)$
$\equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)$
$\equiv \neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X)$
$\equiv \neg((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X))$
$\equiv \neg(X \Leftrightarrow Y)$
$\equiv \psi_5$

Aufgabe 4

Aus der VL wissen wir, dass zu jeder aussagenlogischen Formel eine äquivalente KNF existiert.
Folglich gilt: $\varphi \equiv knf_\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} L_{ij}$
Aus $\varphi \equiv True$ kann man folgern, dass alle Disjunktionsterme von knf_φ wahr sein müssen.
Des Weiteren gilt, dass χ die folgende äquivalente Form besitzt, wenn χ keine Tautologie ist:

$\chi \equiv t_{\varphi 1} \vee ... \vee t_{\varphi i} \vee \gamma$ mit
$\gamma \in AL,\ t_{\varphi i}$ ist ein Disjunktionsterm mit i $\in [1, u]$ und 1 $\leqslant$ u $\leqslant$ n von

knf_φ und $var(\gamma) \;\cap\; var(\varphi) = \varnothing$

Würde dies nicht gelten, so gäbe es eine passende Belegung β,
sodass $[\![\chi]\!]^\beta \equiv False$, obwohl $\varphi \equiv True$.
Das stünde im Widerspruch zur Aussage, dass $\varphi \Rightarrow \chi$ gilt.
Ist χ eine Tautologie gilt: $t_\varphi = True$
Aus der Struktur von χ folgt ebenfalls, dass t_φ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varphi \Rightarrow t_\varphi \wedge t_\varphi \Rightarrow \chi \wedge var(t_\varphi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$$

Daraus folgt, dass für alle Formeln φ, $\chi \in$ AL gilt mit $\varphi \Rightarrow \chi \equiv True$:

$$\exists \psi \in AL.\varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \chi \wedge var(\psi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$$