

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

- (i) Ein Graph $G = (V, E)$ ist zusammenhängend, falls von einem beliebigen Knoten $v_n \in V$ ein Pfad zu jedem anderen Knoten $v_m \in V$ existiert. Man kann sehr einfach feststellen ob ein Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat, dazu bilde man den reflexiven, transitiven und symmetrischen Abschluss von E und bezeichne ihn E' . Weiterhin definiere X'_{ij} und erweitere den Zielbereich von β_G .

$$\llbracket X'_{ij} \rrbracket = 1 \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E'$$

Wenn nun alle Knoten untereinander verbunden sind (wenn E' als Kantenmenge benutzt wird) dann ist der Graph G zusammenhängend.

$$\varphi_n = \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=i+1}^n X'_{ij}$$

- (ii) Wenn ein Graph einen Hamilton Kreis besitzt, dann gibt es von einem beliebigen Knoten aus einen Pfad der Länge n , wobei n die Anzahl der Knoten ist der wieder zu diesem führt. Zuerst erweitere die Definitionen von X_{ij} :

$$X''_{ij} \rightarrow \begin{cases} X_{ij}, & i < j \\ X_{ji}, & i > j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Sei weiterhin die Menge P_V die Menge aller möglichen Permutationen der Reihenfolge der Knoten V , diese Folgen sind dargestellt als n -Tupel. Die Schreibweise $t[x]$ bei Tupeln soll das x -te Element des Tupels t sein.

$$\varphi_n = \bigvee_{p \in P_V} \left(\left(\bigwedge_{k=1}^{n-1} X''_{p[k], p[k+1]} \right) \wedge X''_{p[n], p[1]} \right)$$

Aufgabe 2

(i)

$$\begin{aligned} \varphi\mathcal{S} &= \mathcal{S}(((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow (((X \vee \neg Y) \leftrightarrow Y))) \\ &= (\mathcal{S}((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow \mathcal{S}(((X \vee \neg Y) \leftrightarrow Y))) \\ &= ((\mathcal{S}(X \wedge Y) \vee \mathcal{S}(Z)) \leftrightarrow ((\mathcal{S}(X \vee \neg Y) \leftrightarrow \mathcal{S}(Y)))) \\ &= (((\mathcal{S}(X) \wedge \mathcal{S}(Y)) \vee Z) \leftrightarrow (((\mathcal{S}(X) \vee \neg \mathcal{S}(Y)) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))))) \\ &= (((((Z \vee U) \wedge (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))) \vee Z) \leftrightarrow (((Z \vee U) \vee \neg(Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))))) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \beta\mathcal{S}(X) &= \llbracket \mathcal{S}(X) \rrbracket^\beta \\ \beta\mathcal{S}(Y) &= \llbracket \mathcal{S}(Y) \rrbracket^\beta \\ \beta\mathcal{S}(U) &= \beta(U) \end{aligned}$$

- $\beta\mathcal{S}$ ist passend für φ , da $\{X, Y\} = \text{var}(\varphi) \subseteq \text{Dom}(\beta\mathcal{S}) = \{X, Y, U\}$
- β ist passend für $\varphi\mathcal{S}$, da $\{X, Y, U\} = \text{var}(\varphi\mathcal{S}) \subseteq \text{Dom}(\beta) = \{X, Y, U\}$
- Da β eine zu $\varphi\mathcal{S}$ passende Belegung ist und $\beta\mathcal{S}$ zu φ passt, kann Lemma 2.27-A aus der Vorlesung angewendet werden, welches dort auch allgemein bewiesen wird.

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \equiv X \Rightarrow (Y \wedge Z) &\equiv \neg X \vee (Y \wedge Z) \\
 &\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \\
 &\equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z) \\
 &\equiv \psi_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow Q &\equiv \neg(X \wedge Y \wedge Z) \vee Q \\
 &\equiv \neg X \vee \neg Y \vee \neg Z \vee Q \\
 &\equiv (\neg X \vee (\neg Y \vee (\neg Z \vee Q))) \\
 &\equiv (X \Rightarrow (Y \Rightarrow (Z \Rightarrow Q))) \\
 &\equiv \psi_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_3 \equiv (X \wedge Y) \Rightarrow \neg(Z \Rightarrow X) &\equiv \neg(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Z \vee X) \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \vee (Z \wedge \neg X) \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg X) \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge \text{True} \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee X) \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee \neg X \vee X) \\
 &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X) \vee \neg X \\
 &\equiv (X \Rightarrow \neg Y) \wedge (\neg Y \Rightarrow X) \vee \neg X \\
 &\equiv \psi_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_4 \equiv (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \Rightarrow X) &\equiv \neg(Y \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow X) \\
 &\equiv \neg(\neg Y \vee Z) \vee (\neg Y \vee X) \\
 &\equiv (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \vee X) \\
 &\equiv (Y \vee \neg Y \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
 &\equiv (T \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
 &\equiv T \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
 &\equiv \neg Z \vee \neg Y \vee X \\
 &\equiv \psi_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_5 \equiv (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X) &\equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X) \\
 &\equiv \neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X) \\
 &\equiv \neg((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \\
 &\equiv \neg(X \Leftrightarrow Y) \\
 &\equiv \psi_5
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Aus der VL wissen wir, dass zu jeder aussagenlogischen Formel eine äquivalente KNF existiert.

Folglich gilt: $\varphi \equiv knf_{\varphi} = \bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^m L_{ij}$

Aus $\varphi \equiv \text{True}$ kann man folgern, dass alle Disjunktionsterme von knf_φ wahr sein müssen.
 Des Weiteren gilt, dass χ die folgende äquivalente Form besitzt, wenn χ keine Tautologie ist:

$\chi \equiv t_{\varphi 1} \vee \dots \vee t_{\varphi i} \vee \gamma$ mit
 $\gamma \in \text{AL}$, $t_{\varphi i}$ ist ein Disjunktionsterm mit $i \in [1, u]$ und $1 \leq u \leq n$ von
 knf_φ und $\text{var}(\gamma) \cap \text{var}(\varphi) = \emptyset$

Würde dies nicht gelten, so gäbe es eine passende Belegung β ,
 sodass $\llbracket \chi \rrbracket^\beta \equiv \text{False}$, obwohl $\varphi \equiv \text{True}$.
 Das stünde im Widerspruch zur Aussage, dass $\varphi \Rightarrow \chi$ gilt.
 Ist χ eine Tautologie gilt: $t_\varphi = \text{True}$
 Aus der Struktur von χ folgt ebenfalls, dass t_φ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varphi \Rightarrow t_\varphi \wedge t_\varphi \Rightarrow \chi \wedge \text{var}(t_\varphi) \subseteq \text{var}(\varphi) \cap \text{var}(\chi)$$

Daraus folgt, dass für alle Formeln $\varphi, \chi \in \text{AL}$ gilt mit $\varphi \Rightarrow \chi \equiv \text{True}$:

$$\exists \psi \in \text{AL}. \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \chi \wedge \text{var}(\psi) \subseteq \text{var}(\varphi) \cap \text{var}(\chi)$$