# Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 1

Tutorium: , Mi 14.00 - 16.00 Uhr


Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto -


## 1 Aufgabe

**T** - Tobi kommt | **C** - Christoph kommt | **S** - Sebastian kommt | **V** - Viktor kommt | **F** - Friederike kommt

$$\begin{aligned}
(T \to C \wedge S) \wedge (C \vee V) \wedge (S \to \neg F) \wedge (\neg V) \wedge (\neg T \to \neg C) &\leftrightarrow \\
(\neg T \vee (C \wedge S)) \wedge (C \vee V) \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (\neg V) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\
(\neg T \vee C) \wedge (\neg T \vee S) \wedge C \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\
C \wedge (\neg T \vee S) \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge (T \vee \neg C) &\leftrightarrow \\
C \wedge (\neg T \vee S) \wedge \neg V \wedge (\neg S \vee \neg F) \wedge T &\leftrightarrow \\
C \wedge S \wedge \neg V \wedge \neg F \wedge T &
\end{aligned}$$

## 2 Aufgabe

(i) Ist nicht erfüllbar

$$\begin{aligned}
\neg(X \to (Y \to X)) &\leftrightarrow \\
\neg(\neg X \vee (\neg Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg\top &\leftrightarrow \\
\bot &
\end{aligned}$$

(ii) Ist erfüllbar

$$\begin{aligned}
(X \wedge (Y \to \neg X)) \to Y &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \vee Y &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge \neg Y) \vee Y &\leftrightarrow \\
\neg X \vee Y \vee Y &\leftrightarrow \\
\neg X \vee Y &
\end{aligned}$$

(iii) Ist erfüllbar

$$\begin{aligned}
(\neg X \to (X \wedge Y)) \to (Y \to X) &\leftrightarrow \\
\neg(X \vee (X \wedge Y)) \vee \neg(Y \vee X) &\leftrightarrow \\
\neg((X \vee (X \wedge Y)) \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg(X \wedge (Y \vee X)) &\leftrightarrow \\
\neg X &
\end{aligned}$$

(iv) Ist erfüllbar

$$\begin{aligned}
(X \vee Y) \to (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\
\neg(X \vee Y) \vee (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\
(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) &\leftrightarrow \\
(X \leftrightarrow Y) &
\end{aligned}$$

(v) Ist eine Tautologie

$$\begin{aligned}(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y) \leftrightarrow\\ \neg(X \wedge Y) \vee (X \vee Y) \leftrightarrow\\ \neg X \vee \neg Y \vee (X \vee Y) \leftrightarrow\\ \neg X \vee \neg Y \vee (X \vee Y) \leftrightarrow\\ \neg X \vee \neg Y \vee X \vee Y \leftrightarrow\\ \top\end{aligned}$$

## 3 Aufgabe

$$\phi_i(\mathsf{a}_{\mathsf{n}-1}, ..., \mathsf{a}_0, \mathsf{b}_{\mathsf{n}-1}, ..., \mathsf{b}_0) \rightarrow \begin{cases} \top, & \text{falls } (\mathsf{concat}(\mathsf{a}_{\mathsf{n}-1}, ..., \mathsf{a}_0) + \mathsf{concat}(\mathsf{b}_{\mathsf{n}-1}, ..., \mathsf{b}_0))_{\mathsf{i}} = 1 \\ \bot, & \text{sonst} \end{cases}$$

## 4 Aufgabe

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde (Folien S. ) gibt es zu jeder Formel $\phi$ eine äquivalente konjunktive Normalform. Damit diese der Bedingung max-depth = min-depth gerecht wird, bedarf es folgender Konstruktion:

$$f(\phi) \rightarrow \begin{cases} f((\psi \wedge \top) * \xi), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{ max-depth}(\psi) < \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\neg, \wedge\} \\ f(\psi * (\xi \wedge \top)), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{ max-depth}(\psi) > \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\neg, \wedge\} \\ f(\phi) * f(\xi), & \phi = (\psi * \xi) \wedge \text{ max-depth}(\psi) = \text{max-depth}(\xi) \wedge * \in \{\neg, \wedge\} \\ \phi, & \phi \in (\text{AVar } \cup \neg\text{AVar } \cup \{\top, \bot\}) \end{cases}$$

wobei $\neg$AVar definiert ist als die Menge der negierten Variablen von AVar

Sei zu beweisen, dass diese Konstruktion hält was sie verspricht.

**IA** $\phi \in$ (AVar $\cup \{\top, \bot\}) \Rightarrow$ max-depth($\phi$) = 0 = min-depth($\phi$)
$\phi \in \neg$AVar $\Rightarrow$ max-depth($\phi$) = 1 = min-depth($\phi$)

**IV** Sei $\phi$ eine Formel, wobei max-depth($f(\phi)$) = min-depth($f(\phi)$) und
Sei $\xi$ eine Formel, wobei max-depth($f(\xi)$) = min-depth($f(\xi)$)

**IS** Zu Zeigen ist, dass für die Termgrösse n+1 das ganze noch gilt: $f(\phi * \xi)$
**Fallunterscheidung über** $f(\phi * \xi)$

- max-depth($\psi$) $<$ max-depth($\xi$) $\wedge * \in \{\neg, \wedge\}$
  $f(\phi * \xi) = f((\phi \wedge \top) * \xi) = ... = f((...(\phi \wedge \top)...) * \xi)$
  Es werden zu $\phi$ so lange $\wedge\top$ hinzugefügt bis max-depth der linken Seite = max-depth der rechten Seite.
  Jetzt kommt die Magie der Rekursion und die Funktion wird auf die Unterfunktionen aufgerufen:
  $(f(...(\phi \wedge \top)... \wedge \top)) * f(\xi)) = (f(...(\phi \wedge \top)... \wedge (\top \wedge \top)) * f(\xi)) = ...$
  Durch die rekursiven Aufrufe wird der Term und alle Subterme tiefensymmetrisch. Wegen der **IV** ist damit auch min-depth($f(\phi * \xi)$) = max-depth($f(\phi * \xi)$)
- max-depth($\psi$) $>$ max-depth($\xi$) $\wedge * \in \{\neg, \wedge\}$
  analog
- max-depth($\psi$) $=$ max-depth($\xi$) $\wedge * \in \{\neg, \wedge\}$
  Da max-depth($\psi$) $=$ max-depth($\xi$) gilt per Transitivität und der **IV** dieser Fall.