

# Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528  
Maximilian Bachl - 341455  
Marius Liwotto - 341051

## Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned}\varphi_1 = & \quad \forall x \neg E(x, x) \wedge \\ & \quad \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow E(x, y) \vee E(y, x)) \wedge \\ & \quad \forall x \forall y \forall z (E(x, y) \wedge E(y, z) \Rightarrow E(x, z))\end{aligned}$$

(ii) Widerspruchsannahme:

Es existiert ein  $\varphi_2$  mit Quantorenrang  $m$ , sodass für jede endliche lineare Ordnung  $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$

$\mathcal{A} \models \varphi_2$  genau dann, wenn  $|A|$  ungerade ist.

gilt.

Nehmen wir nun die lineare endliche Ordnung  $\mathcal{B}_1 = (B_1, E^{\mathcal{B}_1})$  mit  $|B_1| = 2^{m+1} > 2^m$  und  $\mathcal{B}_2 = (B_2, E^{\mathcal{B}_2})$  mit  $|B_2| = 2^m + 1 > 2^m$ . Es gilt nach dem Satz der Vorlesung, dass die Duplikatorin das EF-Spiel gewinnen würde, woraus folgt, dass  $\varphi_2$  die beiden Ordnungen nicht unterscheiden könnte. Da aber  $|B_1|$  gerade ist und  $|B_2|$  ungerade, ist das ein Widerspruch zur Annahme, woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss. Somit kann kein solcher  $FO[\sigma]$ -Satz  $\varphi_2$  existieren.

(iii) Die Formel lautet folgendermaßen:

$$\varphi_3(x, y) = \exists z ((x \neq z \wedge y \neq z) \wedge (E(x, z) \wedge E(z, y)) \wedge \forall a (E(a, x) \vee k = z \vee k = x \vee k = y \vee E(y, k) \vee \quad (1)$$

$$\exists z ((y \neq z \wedge x \neq z) \wedge (E(y, z) \wedge E(z, x)) \wedge \forall a (E(a, y) \vee k = z \vee k = y \vee k = x \vee E(x, k) \vee \quad (2)$$

$$\exists z ((x \neq z) \wedge E(z, x) \wedge \forall a (a = a \vee E(x, a) \vee a = z) \wedge \forall a (y = a \vee E(a, y))) \vee \quad (3)$$

$$\exists z ((x \neq z) \wedge E(z, y) \wedge \forall a (a = a \vee E(y, a) \vee a = z) \wedge \forall a (x = a \vee E(a, x))) \quad (4)$$

(1) sagt aus, dass es ein  $z$  gibt, das genau zwischen  $x$  und  $y$  liegt.

(2) ist analog zu (1), nur dass  $x$  und  $y$  getauscht wurden.

(3) sagt aus, dass es ein  $z$  gibt, das das kleinste Element ist,  $x$  ist das zweitkleinste und  $y$  das grösste.

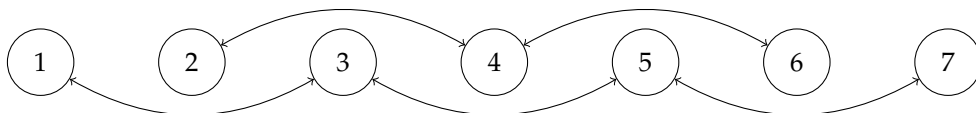
(4) ist analog zu (2) nur, dass  $x$  und  $y$  getauscht wurden.

Wir erklären die Formel an einem Beispiel. Sei  $\mathcal{A} = (\{1, \dots, 7\}, <)$  die Struktur auf der die  $\varphi_3$  benutzt wird.

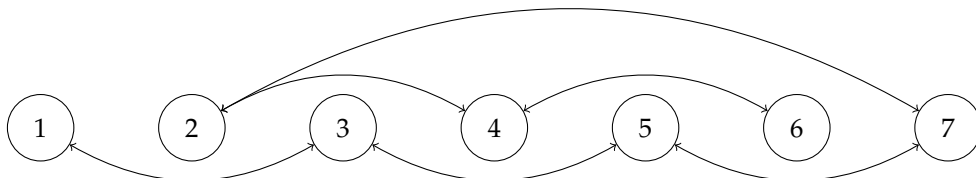
1. *Initialzustand*, die Menge der Kanten ist leer:



2. (1) und (2) wird angewendet, dadurch bilden jeweils die geraden, wie die ungeraden einen ungerichteten Pfad.



3. (3) und (4) wird angewendet, dadurch wird der letzte Knoten mit dem zwei kleinsten (ungerichtet) verbunden:



Es ist klar, dass dies bei ungeraden Graphen immer funktioniert, durch den letzten Schritt entsteht eine Verbindung von den ungeraden zu den geraden Knoten. Da ein ungerader immer einen ungeraden Knoten am Ende hat funktioniert das immer. Analog ist klar warum dies nicht bei geraden Graphen funktioniert: man würde nur einen Kreis bei den geraden Knoten erzeugen, jedoch nie eine Verbindung zu den ungeraden.

(iv) Widerspruchsannahme: Es existiert ein solcher  $FO[\sigma]$ -Satz  $\varphi_4$ .

Nach der Teilaufgabe (iii) existiert eine Formel  $\varphi_3$ , sodass für jeden endlichen Graph  $G = (A, E)$  gilt:

Der Graph  $(A, \varphi_3(\mathcal{A}))$  ist zusammenhängend genau dann, wenn  $|A|$  ungerade ist.

Nun gilt nach  $\varphi_4$  auch:

$$\begin{aligned} G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ ungerade ist.} \\ \equiv G' = (A, \varphi_3(\mathcal{A})) \not\models \varphi_4 & \text{ genau dann, wenn } |A| \text{ gerade ist.} \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Teilaufgabe (ii), woraus folgt, dass die Annahme falsch sein muss, sodass es keinen solchen  $FO[\sigma]$ -Satz  $\varphi_4$  geben kann.

## Aufgabe 2

Der gesuchte partielle Isomorphismus hat nach Definition folgende Abbildungsvorschrift:

$$\begin{aligned} a_1 = 1 & \mapsto b_1 = 1 \\ a_2 = 2 & \mapsto b_2 = 2 \\ a_3 & \mapsto b_3 = x \\ a_4 & \mapsto b_4 = 1 + x \\ a_5 & \mapsto b_5 \end{aligned}$$

Es gilt  $(b_1 = 1, b_3 = x, b_4 = 1 + x) \in P^B$ .

Es muss also auch gelten  $(a_1 = 1, a_3, a_4) \in P^A$ . Daraus folgt, dass entweder  $a_3$  oder  $a_4$  ungerade sind, sonst hätte die Duplikatorin schon vor dem 3. Zug verloren.

Fallunterscheidung:

(a)  $a_3$  ist die gerade Zahl.

Wir wählen als Herausforderer im 3. Zug  $a_5 = \frac{a_3}{2}$ . Nun gilt offensichtlich  $(a_2 = 2, a_5 = \frac{a_3}{2}, a_3) \in M^A$ .

$(b_2 = 2, b_5, b_3 = x) \in M^B$  gilt aber keinesfalls, da es trivialerweise kein Element in  $B$  gibt, die mit 2 multipliziert  $x$  ergibt.

(b)  $a_4$  ist die gerade Zahl.

Wir wählen als Herausforderer im 3. Zug  $a_5 = \frac{a_4}{2}$ . Nun gilt offensichtlich  $(a_2 = 2, a_5 = \frac{a_4}{2}, a_4) \in M^A$ .

$(b_2 = 2, b_5, b_4 = x) \in M^B$  gilt aber keinesfalls, da es trivialerweise kein Element in  $B$  gibt, die mit 2 multipliziert  $x + 1$  ergibt.

## Aufgabe 3

(i) Der Herausforderer spielt in der Struktur  $\mathcal{B}$  und wählt  $\infty$ . Gibt die Duplikatorin das Element  $a$  als Antwort, dann gilt, dass ein Element  $i$  in  $\mathcal{A}$  existiert, sodass  $a < i$ . Daraus folgt aber, dass es ebenfalls ein  $P_i^A$  gibt, sodass  $a \notin P_i^A$ , was jedoch ein Widerspruch ist, da  $\infty$  in allen einstellig Relationen aus  $\mathcal{B}$  vorkommt.

(ii) Sei  $\varphi \in FO[\sigma]$  beliebig.

Für jedes  $P_i(x)$  mit  $x \in \mathbb{N}$  gilt (\*):

$i > 0$ :

1. wurde  $x$  durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist  $P_i(x) = 1$   
Für jedes  $P_i$  existiert eine Zahl  $x$ , sodass  $x > i$  und damit  $P_i(x) = 1$ .

2. wenn  $x$  durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist  $P_i(x) = 0$   
Für jedes  $P_i$  existiert eine Zahl  $x$ , sodass  $x < i$  und damit  $P_i(x) = 0$ .

$i = 0$ :

1. wurde  $x$  durch einen Existenzquantor quantifiziert, ist  $P_0(x) = 1$   
Für  $P_0$  existiert eine Zahl  $x$ , sodass  $x > 0$  und damit  $P_0(x) = 1$ .

2. wenn  $x$  durch einen Allquantor quantifiziert wurde, ist  $P_0(x) = 1$   
Für  $P_0$  existiert keine Zahl  $x$ , sodass  $x < 0$  und damit  $P_0(x) = 1$ .

Die Aussagen (\*) gelten in beiden Strukturen, woraus folgt, dass alle Relationen gleich auswerten und somit auch der Satz  $\varphi$  in beiden Strukturen immer gleich ausgewertet. Da keine Einschränkung bei  $\varphi$  getroffen wurde, folgt, dass es keinen  $FO[\sigma]$ -Satz gibt, der beide Strukturen unterscheidet, sodass sie elementar äquivalent sind.

(iii) Der Widerspruch rührt daher, dass der Satz von Ehrenfeucht nur für endliche relationale Signaturen und Strukturen gilt.

Mit einer endlichen Menge an Relationssymbolen tritt der oben aufgezeigte Widerspruch nicht auf:

**Annahme:** Es gibt nicht unendlich viele  $P_i$ , sondern  $i \leq n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ .

Wählt nun der Herausforderer  $\infty$ , so wählt die Duplikatorin eine Zahl  $j$  mit  $j > m + n$ , wobei  $n$  die gleiche Zahl wie in der obigen Zeile ist. Der Rest des Spiels ist trivial.

Somit sind die beiden Strukturen nun elementar äquivalent und die Duplikatorin gewinnt das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel.