Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 5

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i) Die wohl einfachste Methode um eine Formel in eine KNF umzuformen ist per Wahrheitstabelle:

A	B	C	D	φ
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$(\neg A \vee \neg B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) = \varphi'$$

(ii) Wir wählen $\varphi'' = A$. φ'' ist erfüllbarkeitsäquivalent zu φ', da beide Formeln erfüllbar sind. Für die Belegung $\gamma(A) = 1$ gilt $[\![\varphi'']\!]^\gamma = \top$.

Aufgabe 2

Ansonsten erstmal eine Rechenvorschrift.
Sei φ eine beliebige aussagenlogische Formel, um sie zu einer erfüllbarkeits äquivalenten 3KNF umzuformen, befolge folgende Rechenanleitung:

1. Mit Hilfe von deMorgan's Regel werden wir Formeln der Form $\neg(\xi)$ mit $\xi \in AL \setminus VAR$ umformen, sodass alle Negationszeichen an den Variablen stehen. Dieser Vorgang dauert so lange wie die Formel lang ist, kann also mit linear abgeschätzt werden.

2. Für jeden Junktor außer der Negation führen wir eine Variable Y_x ein. Wobei der Wurzelknoten der Formel, also falls $\varphi = (\xi' \bullet \xi'')$ mit $\bullet \in \{\vee, \wedge\}$, $\bullet$ die Variable Y_0 erhalten würde. Mithilfe der Varibale wird jeder solchen Teilformel eine neue Teilformel zugeordnet: $Y_x \leftrightarrow (\xi' \bullet \xi'')$ Alle diese Teilformeln und die Variable des Wurzelknotens (Y_0) werden mit einem $\wedge$ verknüpft. Diese Formel definieren wir als Ψ. Ψ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu φ. Von einer erfüllenden Belegung für φ erhält man eine erfüllende Belegung für Ψ indem man die Belegung übernimmt und die Y-Variablen mit den an den jeweiligen Junktoren resultierenden Wahrheitswerten belegt. Eine erfüllende Belegung von Ψ ist auch trivialerweise auch eine für φ.

3. Es gilt: $(Y_x \leftrightarrow (\xi' \bullet \xi'')) \leftrightarrow (Y_x \vee \neg\xi') \wedge (Y_x \vee \neg\xi'') \wedge (\neg Y_x \vee \xi' \vee \xi'')$ Die Rechenanleitung erzeugt verundete Disjunktionsklauseln der Größe höchstens 3, was einer 3KNF entspricht. Alle Umformungsschritte können in polynomiellem Aufwand durchgeführt werden.

Aufgabe 3

Es ist zu zeigen, dass $(i) \leftrightarrow (ii)$ gilt. D.h es muss gezeigt werden, dass

1. $(i) \rightarrow (ii)$

2. $(ii) \rightarrow (i)$

Sei Φ eine erfüllbare Formelmenge.

1. $(i) \rightarrow (ii)$
   Annahme: Für alle Formeln φ mit $\text{var}(\varphi) \subseteq \text{var}(\Phi)$ gilt $\Phi \vDash \varphi$ oder $\Phi \vDash \neg\varphi$
   Sei φ beliebig. Fallunterscheidung über die Anzahl Belegungen von Φ:

   Fall 1: Es gibt genau eine Belegung β, sodass $\beta \vDash \Phi$
   Falls $\beta \vDash \Phi \wedge \beta \vDash \varphi$ folgt direkt $\Phi \vDash \varphi$, da keine andere Belegung zu überprüfen ist.
   Falls $\beta \not\vDash \varphi \wedge \beta \vDash \Phi$ ist φ für die einzige Belegung, bei der Φ erfüllt ist, nicht erfüllt. Also ist φ nicht erfüllt wenn Φ erfüllt, formal: $\Phi \vDash \neg\varphi$

   Fall 2: Es gibt mehr als eine Belegung β, sodass $\beta \vDash \Phi$
   Dann gibt es den Fall, dass für ein β gilt $\beta \vDash \Phi \wedge \beta \vDash \varphi$, aber es kann auch noch ein anderes β' geben mit $\beta' \vDash \Phi \wedge \beta' \not\vDash \varphi$. Damit gilt weder $\Phi \vDash \varphi$ noch $\Phi \vDash \neg\varphi$

   Da die Aussage nur gilt, wenn Φ genau eine erfüllbare Belegung hat, gilt: $(i) \rightarrow (ii)$

2. $(ii) \rightarrow (i)$
   Annahme: Es existiert genau eine Belegung β von $\text{var}(\Phi)$ mit $\beta \vDash \Phi$
   Sei φ beliebig. Fallunterscheidung über die Anzahl Belegungen von Φ:

   Fall 1: $\beta \vDash \varphi$
   Es folgt direkt $\Phi \vDash \varphi$, da keine andere Belegung zu überprüfen ist.

   Fall 2: $\beta \not\vDash \varphi$
   φ ist für die einzige Belegung, bei der Φ erfüllt ist, nicht erfüllt. Also ist φ nicht erfüllt wenn Φ erfüllt, formal: $\Phi \vDash \neg\varphi$

   Daraus folgt, dass $\Phi \vDash \varphi$ oder $\Phi \vDash \neg\varphi$, also $(ii) \rightarrow (i)$

Aus 1. und 2. folgt: $(i) \leftrightarrow (ii)$

Aufgabe 4

(i) ϕ_1 ist in H-Form.
ϕ_2 ist nicht in H-Form (keine KNF).
ϕ_3 ist nicht in H-Form (mehr als ein positives Literal).

(ii) Sei ϕ eine beliebige Formel in H-Form. Damit ϕ erfüllt ist, muss jede Klausel erfüllt werden.

Annahmen: $\beta \models \phi$ und $\beta' \models \phi$

Es gibt folgende Fälle für den Aufbau einer Klausel k:

(a) $k = X$
Um k zu erfüllen muss $\beta(X) = 1$ und $\beta'(X) = 1$. Somit ist per Definiton auch $(\beta \sqcap \beta')(X) = 1$ und $(\beta \sqcap \beta')$ erfüllt diese Klausel.

(b) $k = \neg X$
Um k zu erfüllen muss $\beta(X) = 0$ und $\beta'(X) = 0$. Somit ist per Definiton auch $(\beta \sqcap \beta')(X) = 0$ und $(\beta \sqcap \beta')$ erfüllt diese Klausel.

(c) $k = \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee ...$
Um k zu erfüllen muss es ein X_i und X_j geben, sodass $\beta(X_i) = 0$ und $\beta'(X_j) = 0$. i und j können hierbei auch identisch sein. Somit ist per Definiton auch $(\beta \sqcap \beta')(X_i) = 0$ und $(\beta \sqcap \beta')(X_j) = 0$ und $(\beta \sqcap \beta')$ erfüllt diese Klausel.

(d) $k = X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee ...$
Um diese Formel zu erfüllen gibt es wiederum 4 Fälle:

(1) $\beta(X_1) = 1$ und $\beta'(X_1) = 1$
Dann gilt $(\beta \sqcap \beta')(X_1) = 1$ und $\beta \sqcap \beta'$ erfüllt die Formel.

(2) $\beta(X_1) = 1$ und $\beta'(X_i) = 0$ mit i ungleich 1
Dann gilt $(\beta \sqcap \beta')(X_i) = 0$ und $\beta \sqcap \beta'$ erfüllt die Formel.

(3) $\beta(X_i) = 0$ und $\beta'(X_1) = 1$ mit i ungleich 1
Dann gilt $(\beta \sqcap \beta')(X_i) = 0$ und $\beta \sqcap \beta'$ erfüllt die Formel.

(4) $\beta(X_i) = 0$ und $\beta'(X_i) = 0$ mit i, j ungleich 1
Dann gilt $(\beta \sqcap \beta')(X_i) = 0$ und $\beta \sqcap \beta'$ erfüllt die Formel.

(iii) Wir wählen $\phi = A \vee B$ als Formel in KNF.

Formte man ϕ in H-Form um, so würde diese ebenfalls nur aus den beiden Variablen A und B bestehen und hätte höchstens 3 verschiedene Klauseln, nämlich $\neg A \vee \neg B$, $\neg A \vee B$, $A \vee \neg B$, da $A \vee B$ nicht der H-Form genügt.
Klauseln, die äquivalent zu $\top$ oder $\bot$ sind oder nur aus einem Literal bestehen, werden ebenfalls nicht betrachtet, da sie trivialerweise nicht äquivalent zu ϕ sein können.

Alle Formeln, die sich aus den 3 Klauseln bilden lassen, sind nicht äquivalent zu ϕ.

(a) $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \not\equiv \phi$
(b) $(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \not\equiv \phi$
(c) $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \not\equiv \phi$

Die Fälle, die die 3 Klauseln jeweils mit sich selbst zu verunden, sind trivialerweise nicht äquivalent zu ϕ.
Somit gibt es keine äquivalente Formel in H-Form zu ϕ.