

# Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528  
Maximilian Bachl - 341455  
Marius Liwotto - 341051

## Aufgabe 1

- (i)  $E' := \{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \in E\}$   
 $G' := (V, t(s(r(E'))))$  mit  $t(s(r(E))) = \text{reflexiver, symmetrischer und transitiver Abschluss von } E$ .

Die Menge aller Pfade von  $v_n$  nach  $v_m$  mit  $v_n, v_m \in V$  in  $G'$ :

$$P_{v_n, v_m} := \{p \mid \text{wenn } p \text{ ein Pfad von } v_n \text{ zu } v_m \text{ ist mit } v_n, v_m \in V\}$$

Ein Pfad von  $v_n$  nach  $v_m$  ist eine Menge aus Tupeln  $(v_i, v_j)$  mit:

$$\forall (v_i, v_j) \in p. \exists (v_j, v_l) \in p \vee (v_j, v_m). \text{ True}$$

$$\phi(P_i) := \begin{cases} X_{ij} \wedge \phi(P_i \setminus \{(v_i, v_j)\}), & \#(P_i) \geq 2 \wedge (v_i, v_j) \in P_i \\ X_{ij}, & \#(P_i) = 1 \wedge (v_i, v_j) \in P_i \end{cases}$$

Jeder Pfad  $P_i \in P_{v_n, v_m}$  wird mit  $\phi(P_i)$  zu einem Konjunktionsterm aus  $X_{ij}$  umgebaut.

$$\varphi_n = \bigwedge_{l=1}^n \bigwedge_{k=1}^n \left( \bigvee_{c=1}^{\#(P_{v_l, v_k})} \phi(P_c) \text{ mit } P_c \in P_{v_l, v_k} \right)$$

$\varphi_n$  wird gdw. wahr, wenn für jeden Knoten  $v_n$  gilt, dass er zu jedem anderen Knoten  $v_m$  einen Pfad besitzt, der auch in  $G$  enthalten ist.

Daraus folgt:  $\llbracket \varphi_n \rrbracket^{\beta_G} = 1 \Leftrightarrow G$  ist zusammenhängend

- (ii)  $N_k = \{X_{kj} \mid \{v_k, v_j\} \in E\}$

$$\phi(k) = \begin{cases} (X_{ij} \wedge X_{i(j+1)}) \wedge (\neg X_{i(j+2)} \wedge \dots \wedge \neg X_{i(j+m)}), & \#(N_k) \geq 2 \\ X_{ij}, & \#(N_k) = 1 \wedge X_{ij} \in N_k \end{cases}$$

$$\varphi_n = \bigwedge_{k=1}^{\#V} (\phi(k)) \wedge \left( \bigwedge_{l=1}^n \bigwedge_{k=1}^n \left( \bigvee_{c=1}^{\#(P_{v_l, v_k})} \phi(P_c) \text{ mit } P_c \in P_{v_l, v_k} \right) \right)$$

Wenn ein Graph einen Hamilton-Kreis besitzt, so muss man ihn einmal komplett durchlaufen können, sodass man jeden Knoten genau einmal besucht und wieder beim Anfangsknoten landet. Folglich muss der Graph ein Kreis sein bzw., man kann die Knoten so verschieben, dass ein Kreis entsteht, der äquivalent zum Ausgangsgraph ist.

Diese Kreisstruktur bedeutet, dass jeder Knoten genau 2 Nachbarn hat.

Die Funktion  $\phi(k)$  konstruiert für jeden Knoten  $v_i$  einen Konjunktionsterm so, dass wenn  $v_i$  mehr als 2 Nachbarn hat, der Term zu False ausgewertet.

$\varphi_n$  prüft, ob  $\phi$  für jeden Knoten  $v_i \in V$  gilt und ob der Graph abgeschlossen ist mit der Formel aus (i).

## Aufgabe 2

- (i)

$$\begin{aligned} \varphi \mathcal{S} &= \mathcal{S}(((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow (((X \vee \neg Y) \leftrightarrow Y))) \\ &= (\mathcal{S}((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow \mathcal{S}(((X \vee \neg Y) \leftrightarrow Y))) \\ &= ((\mathcal{S}(X \wedge Y) \vee \mathcal{S}(Z)) \leftrightarrow ((\mathcal{S}(X \vee \neg Y) \leftrightarrow \mathcal{S}(Y)))) \\ &= (((\mathcal{S}(X) \wedge \mathcal{S}(Y)) \vee Z) \leftrightarrow (((\mathcal{S}(X) \vee \neg \mathcal{S}(Y)) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))))) \\ &= (((((Z \vee U) \wedge (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))) \vee Z) \leftrightarrow (((Z \vee U) \vee \neg(Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))))) \end{aligned}$$

(ii)

$$\beta\mathcal{S}(X) = \llbracket \mathcal{S}(X) \rrbracket^\beta$$

$$\beta\mathcal{S}(Y) = \llbracket \mathcal{S}(Y) \rrbracket^\beta$$

$$\beta\mathcal{S}(U) = \beta(U)$$

- $\beta\mathcal{S}$  ist passend für  $\varphi$ , da  $\{X, Y\} = \text{var}(\varphi) \subseteq \text{Dom}(\beta\mathcal{S}) = \{X, Y, U\}$   
 $\beta$  ist passend für  $\varphi\mathcal{S}$ , da  $\{X, Y, U\} = \text{var}(\varphi\mathcal{S}) \subseteq \text{Dom}(\beta) = \{X, Y, U\}$
- Dies ist im Substitutionslemma bewiesen, was ja eine vollständige Verifikation ist, dass es auch mit der hier angegebenen Formel, Substitution und Belegung gilt.

### Aufgabe 3

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv X \Rightarrow (Y \wedge Z) \equiv \neg X \vee (Y \wedge Z) \\ &\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \\ &\equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z) \\ &\equiv \psi_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &\equiv (X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow Q \equiv \neg(X \wedge Y \wedge Z) \vee Q \\ &\equiv \neg X \vee \neg Y \vee \neg Z \vee Q \\ &\equiv (\neg X \vee (\neg Y \vee (\neg Z \vee Q))) \\ &\equiv (X \Rightarrow (Y \Rightarrow (Z \Rightarrow Q))) \\ &\equiv \psi_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3 &\equiv (X \wedge Y) \Rightarrow \neg(Z \Rightarrow X) \equiv \neg(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Z \vee X) \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \vee (Z \wedge \neg X) \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg X) \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge \text{True} \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee X) \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee \neg X \vee X) \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X) \vee \neg X \\ &\equiv (X \Rightarrow \neg Y) \wedge (\neg Y \Rightarrow X) \vee \neg X \\ &\equiv \psi_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_4 &\equiv (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \Rightarrow X) \equiv \neg(Y \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow X) \\ &\equiv \neg(\neg Y \vee Z) \vee (\neg Y \vee X) \\ &\equiv (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \vee X) \\ &\equiv (Y \vee \neg Y \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\ &\equiv (T \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\ &\equiv T \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\ &\equiv \neg Z \vee \neg Y \vee X \\ &\equiv \psi_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5 &= (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X) \equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X) \\
&\equiv \neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X) \\
&\equiv \neg((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \\
&\equiv \neg(X \Leftrightarrow Y) \\
&\equiv \psi_5
\end{aligned}$$

#### Aufgabe 4

Aus der VL wissen wir, dass zu jeder aussagenlogischen Formel eine äquivalente KNF existiert.

Folglich gilt:  $\varphi \equiv knf_\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^m L_{ij}$

Aus  $\varphi \equiv True$  kann man folgern, dass alle Disjunktionsterme von  $knf_\varphi$  wahr sein müssen.

Des Weiteren gilt, dass  $\chi$  die folgende äquivalente Form besitzt, wenn  $\chi$  keine Tautologie ist:

$\chi \equiv t_{\varphi 1} \vee \dots \vee t_{\varphi i} \vee \gamma$  mit

$\gamma \in AL$ ,  $t_{\varphi i}$  ist ein Disjunktionsterm mit  $i \in [1, u]$  und  $1 \leq u \leq n$  von

$knf_\varphi$  und  $var(\gamma) \cap var(\varphi) = \emptyset$

Würde dies nicht gelten, so gäbe es eine passende Belegung  $\beta$ ,

sodass  $\llbracket \chi \rrbracket^\beta \equiv False$ , obwohl  $\varphi \equiv True$ .

Das stünde im Widerspruch zur Aussage, dass  $\varphi \Rightarrow \chi$  gilt.

Ist  $\chi$  eine Tautologie gilt:  $t_\varphi = True$

Aus der Struktur von  $\chi$  folgt ebenfalls, dass  $t_\varphi$  folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varphi \Rightarrow t_\varphi \wedge t_\varphi \Rightarrow \chi \wedge var(t_\varphi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$$

Daraus folgt, dass für alle Formeln  $\varphi, \chi \in AL$  gilt mit  $\varphi \Rightarrow \chi \equiv True$ :

$$\exists \psi \in AL. \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \chi \wedge var(\psi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$$