FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2012/2013
Stand: 05.12.2012

7. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3
Abgabe: 13.12.2012 in der Vorlesung

Hausaufgabe 1

5 Punkte

Gegeben sind die folgenden Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ über der Signatur $\{E, P\}$ mit einem 2-stelligen Relationssymbol E und einem 1-stelligen Relationssymbol P. Markieren Sie welche Variable durch welchen Quantor gebunden ist und geben Sie die freien Variablen an.

(i) $\varphi_1 = \forall x \forall y \forall z \Big(\big(E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z) \big) \wedge \exists x E(x,x) \Big)$

(ii) $\varphi_2 = \forall y \Big(E(x,y) \rightarrow \forall x \big(E(y,x) \rightarrow P(x) \big) \Big) \rightarrow \forall y \big(E(x,y) \rightarrow P(y) \big)$

(iii) $\varphi_3 = \exists y \big(E(x,y) \wedge P(y) \big) \rightarrow \exists y \Big(E(x,y) \wedge \big(\neg \exists x (E(y,x) \wedge P(x)) \wedge P(y) \big) \Big)$

Hausaufgabe 2

5 Punkte

Wir betrachten die Strukturen $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ und $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}}, \cdot^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}})$, wobei $+, \cdot$ 2-stellige Funktionssymbole und $0, 1$ Konstantensymbole sind, die wie üblich auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ interpretiert werden.

(i) Geben Sie einen Homomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{Z}$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass kein Homomorphismus von $\mathcal{Z}$ nach $\mathcal{N}$ existiert.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $h : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass das Bild $h(A)$ in $\mathfrak{B}$ eine Substruktur $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$ induziert.

Hausaufgabe 4

Sei $\mathcal{M} = (\{0,1\} \times \mathbb{N}, <^{\mathcal{M}})$, wobei für alle $(i,n), (i',n') \in \{0,1\} \times \mathbb{N}$ gilt, dass

$$(i,n) <^{\mathcal{M}} (i',n') \quad \text{genau dann, wenn } i < i' \text{ oder wenn } i = i' \text{ und } n < n' \text{ gilt.}$$

Definieren Sie eine Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}})$, sodass $\mathcal{M}$ isomorph zu $\mathcal{N}$ ist.