FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WS 2012/2013
Stand: 2.11.2012

2. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3

Abgabe: 8.11.2012 in der Vorlesung

Hausaufgabe 1

5 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Wir identifizieren G mit einer aussagenlogischen Interpretation β_G in folgender Weise: Der Definitionsbereich von β_G ist die Menge $\{X_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ und es gilt $[\![X_{ij}]\!]^{\beta_G} = 1 \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E$.

(i) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_n an, so dass für jeden Graphen G mit n Knoten gilt $[\![\varphi_n]\!]^{\beta_G} = 1 \Leftrightarrow G$ ist zusammenhängend.

(ii) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_n an, so dass für jeden Graphen G mit n Knoten gilt $[\![\varphi_n]\!]^{\beta_G} = 1 \Leftrightarrow G$ enthält einen Hamiltonkreis.

Hausaufgabe 2

5 Punkte

Sei $\varphi := ((X \wedge Y) \vee Z) \leftrightarrow (((X \vee \neg Y) \wedge Z) \leftrightarrow Y)$.

(i) Sei $\mathcal{S}$ die wie folgt definierte Substitution: $\mathcal{S}(X) := (Z \vee U)$ und $\mathcal{S}(Y) := ((Y \leftrightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z)))$. Berechnen Sie $\varphi\mathcal{S}$.

(ii) Sei β die wie folgt definierte Belegung: $\beta(U) := 1$, $\beta(Y) := 0$ und $\beta(Z) := 1$. Berechnen Sie $\beta\mathcal{S}$, wie im Beweis des Substitutionslemmas definiert, und verifizieren Sie, dass

- $\beta\mathcal{S}$ für φ und β für $\varphi\mathcal{S}$ passend ist, sowie dass
- $\beta\mathcal{S} \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \varphi\mathcal{S}$.

Hausaufgabe 3

5 Punkte

Betrachten Sie folgende Formeln:

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1 := X \rightarrow (Y \wedge Z) & \psi_1 := (X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z) \\
\varphi_2 := (X \wedge Y \wedge Z) \rightarrow Q & \psi_2 := X \rightarrow (Y \rightarrow (Z \rightarrow Q)) \\
\varphi_3 := (X \leftrightarrow \neg Y) \vee \neg X & \psi_3 := (X \wedge Y) \rightarrow \neg(Z \rightarrow X) \\
\varphi_4 := (Y \rightarrow Z) \rightarrow (Y \rightarrow X) & \psi_4 := X \vee (\neg Y \vee \neg Z) \\
\varphi_5 := (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X) & \psi_5 := \neg(X \leftrightarrow Y)
\end{array}
$$

Für alle $1 \leq i \leq 5$: Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzen, dass $\varphi_i \equiv \psi_i$. Sie können weiterhin folgende Äquivalenzen benutzen: $\top \equiv (X \vee \neg X)$, $\top \vee X \equiv \top$, $\bot \wedge X \equiv \bot$ und $X \wedge \neg X \equiv \bot$.

Hausaufgabe 4

5 Punkte

Seien φ, χ zwei Formeln der Aussagenlogik, sodass $\varphi \rightarrow \chi$ allgemeingültig ist. Zeigen Sie, dass es eine Formel ψ gibt mit $\mathrm{var}(\psi) \subseteq \mathrm{var}(\varphi) \cap \mathrm{var}(\chi)$ und der Eigenschaft, dass $\varphi \rightarrow \psi$ und $\psi \rightarrow \chi$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die unendliche Menge

$$\{\psi \in \mathrm{AL} \mid \mathrm{var}(\psi) \subseteq \mathrm{var}(\varphi) \cap \mathrm{var}(\chi) \text{ und es gilt } \varphi \rightarrow \psi\}.$$

Können Sie eine große Konjunktion dieser Menge bilden?