Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 10

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

(i) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$, wobei M ein 3-stelliges Relationssymbol ist und es gilt $(a, b, c) \in M^{\mathcal{A}_1} \Leftrightarrow a \cdot b = c$ für $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $M^{\mathcal{B}_1} = M^{\mathcal{B}_1} \cap \mathbb{R}^3$

Die Duplikatorin gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_1, a_1, a_1))$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_1, b_1, b_1))$
2. Zug: Fall 1. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_2, a_2, a_1)) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $\neg(M(b_2, b_2, b_1)) \wedge b_1 \neq b_2$
   Fall 3. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $a_2 = a_1$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $b_2 = b_1$

Der Herausforderer gewinnt das 3-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$ sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
   D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$ sonst verliert sie sofort.
3. Zug: H wählt $a_3 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_3, a_3, a_2) \wedge a_3 \neq a_2$ Dann gilt $M^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_3, a_3, a_2)$
   Da $M^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gelten muss, muss b_1 gleich 1 oder 0 sein. Da jedoch auch $M^{\mathcal{B}_1}(b_2, b_2, b_1)$ mit $b_2 \neq b_1$ gelten muss, muss $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$ sein. Nun gibt es aber keine $b_3 \in \mathbb{R}$ mit $M^{\mathcal{B}_1}(b_3, b_3, b_2)$, in $\mathbb{C}$ gibt es dafür $i \vee -i$

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b \exists c (M(a, a, a) \wedge M(b, b, a) \wedge M(c, c, b) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c))$

(ii) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$.

Die Duplikatorin gewinnt das 1-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$
   Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\neg(R(a_1, a_1, a_1))$
   D wählt beliebiges $b_1 \in \mathbb{Z}$

Der Herausforderer gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
   D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$, sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_2, a_2, a_2) \wedge a_1 \neq a_2$
   Dann gilt $R^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), R^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_2)$. $R^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gilt zwar auch, aber da $a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$ gelten muss, jedoch nur die 0 diese Bedingung erfüllt, gewinnt H das 2-Runden Spiel.

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b (R(a, a, a) \wedge R(b, b, b) \wedge b \neq a)$

Aufgabe 2

Um zu beweisen, dass die Strukturen m-Äquivalent sind, reicht es eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin anzugeben.
Gewinnstrategie per Induktion:

IA:
m = 0, weswegen noch nichts gespielt wurde und die Duplikatorin kann noch nicht verloren haben kann.

IS: Es gilt, dass bereits m-Runden gespielt wurden und die Duplikatorin noch nicht verloren hat, wobei $a_1, a_2, ..., a_m \in A$ und $b_1, b_2, ..., b_m \in B$ bereits gespielt wurden.

Angenommen H. spielt auf $b_{m+1} \in B$ mit $b_{m+1} \neq b_i,\ i \in \{1, ..., m\}$. Fall b_{m+1} ein bereits gespieltes Element ist, spielt es die D auf das Element, welches es vorher gewählt hat.

Fall 1. $b_{m+1} = (\infty, b)$ mit $b \in \mathbb{N}$, dann wird b_{m+1} auf (m+k,b) abgebildet, wobei $k > 0$.

i. Es existiert ein i $\in [1, m] a_i = (m + k, b)$.
Suche ein b′, sodass b′ $<$ m + k und (m+k,b′) $\neq a_i$ mit i $\in [1, m]$, welches existiert, da bis jetzt nur m Runden gespielt wurden und damit nur m Elemente, welcher kleiner m + k sind genutzt wurden, existieren noch k passende b′.
D bildet(∞,b) nun auf(m+k, b′) ab.

ii. Es existiert kein i $\in [1, m] a_i = (m + k, b)$.
Suche ein b′, sodass b′ $<$, welches existiert, da bis jetzt nur m Runden gespielt wurden und damit nur m Elemente, welcher kleiner m + k sind genutzt wurden, existieren noch k passende b′.
D bildet (∞,b) nun auf(m+k, b′) ab.

Fall 2. $b_{m+1} = (n, b)$ mit $n, b \in \mathbb{N}$.

i. Falls es ein b_i mit $i \in [1, m]$ gibt, sodass $b_i = (n, l)$ mit l $\in \mathbb{N}$, dann bildet D (n, b) auf (n,b) ab.

A. Falls es ein $i \in [1, m]$ gibt mit $a_i = (n, b)$, dann bildet D (n,b) auf (n,b′) ab und b ¡ n gilt, bildet D (n,b) auf (n,b′) ab, sodass b′ ¡ n gilt. Dieses (n,b′) existiert, da für n genau eine Komponente der Größe n existiert, sodass es eine noch nicht belegte Kombination (n,b′) gibt, für die b′ ¡ n gilt.

B. Falls es ein $i \in [1, m]$ gibt mit $a_i = (n, b)$, dann bildet D (n,b) auf (n,b′) ab und b ¿ n gilt, bildet D (n,b) auf (n,b′) ab, sodass b′ ¡ n gilt. Dieses (n,b′) existiert, da unendlich viele b′ $\in \mathbb{N}$ existieren, die größer als n sind.

ii. Falls es kein b_i mit $i \in [1, m]$ gibt, sodass $b_i = (n, l)$ mit l $\in \mathbb{N}$, dann bildet D (n, b) auf (n,b) ab.

Angenommen H. spielt in $\mathcal{A}$,dann gilt der Fall, wenn H in $\mathcal{B}$ analog dazu.

Beweis, dass es kein Isomorphismus $\pi : B \to A$ gibt zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Wenn es eine Isomorphismus geben würde, müsste er auch die Tupel aus B mit unendlich auf Elemente aus A abbilden, in der Weise, dass ∞ des Tupels (∞,b) immer auf das selbe Element x abgebildet wird und b auf ein beliebiges y.

$$\pi((\infty, b)) = (x, y)$$

Würde dies nicht gelten, so würde gäbe es 2 Tupel (∞, b),(∞, b′):

$$\pi((\infty, b)) = (x, y) \neq (x', y) = \pi((\infty, b')) \Rightarrow E^{\mathcal{B}}((\infty, b), (\infty, b')) \neq E^{\mathcal{A}}(\pi((\infty, b)), \pi((\infty, b')))$$

Das stünde im Widerspruch zu den Isomorphismuseigenschaften.
Da gilt $E^B((\infty, b), (\infty, b')) \equiv T$ für alle b, b′ $\in \mathbb{N}$ muss nach Isomorphimuseigenschaften gelten:

$$E^A(\pi((\infty, b)), \pi((\infty, b'))) \equiv T \text{ für alle b, b}' \in \mathbb{N}.$$

Das ist aber nicht möglich, denn ∞ wird immer auf die natürliche Zahl x abgebildet, für das es immer ein y gibt, sodass y $>$ x. Da es nur endliche viele verschiedene Zahlen gibt, die kleiner sind als x, aber unendlich viele Tupel der Form (∞,b) auf ein Tupel (x,y) injektiv abgebildet werden müssen, folgt, dass es ein Tupel (x,y) geben muss, sodass x $<$ y.
Daraus folgt unweigerlich: $E^A((x, y), (x, y)) \equiv false$, was ein Widerspruch zu den Isomorphismuseigenschaften ist.

Aufgabe 3

In Aufgabe 2. wurde gezeigt, dass die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent sind, d.h. heißt f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$. $\mathcal{A}$ besitzt nur endliche Komponenten, $\mathcal{B}$ auch eine unendliche.
Somit kann es keine Formel $\varphi \in FO[\sigma]$ geben, die nur dann erfüllbar ist genau dann wenn der Graph nur endliche Komponenten enthält, da die Strukturen elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4

Bei bestimmten Strukturen, bei denen man keine allgemeine Gewinnstrategie für die Duplikatorin wählen kann, sondern ein m benötigt, sagt ein Gewinn für die Duplikatorin in $\mathfrak{G}_\infty$ etwas anderes aus, als dass sie f.a. m das $\mathfrak{G}_m$ Spiel gewinnt. (Die Strukturen aus 2. sind solche)

Wie in 2.) gezeigt wurde, sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent, also das die Duplikatorin f.a. $m \in \mathbb{N}$ das $\mathfrak{G}_m$ Spiel gewinnt. Sei zu zeigen, dass die Duplikatorin das $\mathfrak{G}_\infty$ nicht gewinnen kann.

Beweis: Der Herausforderer gewinnt das ∞-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in B$ mit $a_1 = (\infty, 0)$
D wählt $b_1 \in A$ mit $b_1 = (x, 0)$. Normalerweise sollte x eine möglichst grosse Zahl sein, damit D lange überlebt, aber dies ist irrelevant bei diesem Spiel.

2-x Zug: H wählt $a_x \in B$ mit $a_x = a_{x-1} + (0, 1)$
D wählt $b_x \in A$ mit $b_x = b_{x-1} + (0, 1)$

x+1. Zug: H wählt $a_{x+1} \in B$ mit $a_x = a_x + (0, 1)$
D wählt $b_{x+1} \in A$

Da D von Anfang an eine Struktur auswählen muss, aus der sie wählt, hat diese eine bestimmte Grösse x, nach x-Runden sind alle Elemente daraus aufgebraucht und ein Element aus einer anderen Struktur würde den partiellen Isomorphismus zerstören.

Damit wurde gezeigt, dass dies zwei verschiedene Spiele sind.