

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 10

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximilian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

- (i) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$, wobei M ein 3-stelliges Relationssymbol ist und es gilt $(a, b, c) \in M^{\mathcal{A}_1} \Leftrightarrow a \cdot b = c$ für $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $M^{\mathcal{B}_1} = M^{\mathcal{B}_1} \cap \mathbb{R}^3$

Die Duplikatorin gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$
Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_1, a_1, a_1))$
D wählt beliebiges $b_1 \in \mathbb{R}$
2. Zug: Fall 1. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$
Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $\neg(M(a_2, a_2, a_1))$
D wählt beliebiges $b_1 \in \mathbb{R}$
Fall 3. H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $a_2 = a_1$
D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $b_2 = b_1$

Der Herausforderer gewinnt das 3-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_1, b_1, b_1)$ sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_2, a_2, a_1) \wedge a_1 \neq a_2$
D wählt $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $M(b_2, b_2, b_1) \wedge b_1 \neq b_2$ sonst verliert sie sofort.
3. Zug: H wählt $a_3 \in \mathbb{C}$ mit $M(a_3, a_3, a_2) \wedge a_3 \neq a_2$ Dann gilt $M^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_1), M^{\mathcal{A}_1}(a_3, a_3, a_2)$
Da $M^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gelten muss, muss b_1 gleich 1 oder 0 sein. Da jedoch auch $M^{\mathcal{B}_1}(b_2, b_2, b_1)$ mit $b_2 \neq b_1$ gelten muss, muss $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$ sein. Nun gibt es aber keine $b_3 \in \mathbb{R}$ mit $M^{\mathcal{B}_1}(b_3, b_3, b_2)$, in \mathbb{C} gibt es dafür $i \vee -i$

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b \exists c (M(a, a, a) \wedge M(b, b, a) \wedge M(c, c, b) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c))$

- (ii) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{C}, M^{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{R}, M^{\mathcal{B}_1})$.

Die Duplikatorin gewinnt das 1-Runden Spiel

1. Zug: Fall 1. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$
Fall 2. H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\neg(R(a_1, a_1, a_1))$
D wählt beliebiges $b_1 \in \mathbb{Z}$

Der Herausforderer gewinnt das 2-Runden Spiel

1. Zug: H wählt $a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_1, a_1, a_1)$
D wählt $b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $R(b_1, b_1, b_1)$, sonst verliert sie sofort.
2. Zug: H wählt $a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $R(a_2, a_2, a_2) \wedge a_1 \neq a_2$
Dann gilt $R^{\mathcal{A}_1}(a_1, a_1, a_1), R^{\mathcal{A}_1}(a_2, a_2, a_2)$. $R^{\mathcal{B}_1}(b_1, b_1, b_1)$ gilt zwar auch, aber da $a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$ gelten muss, jedoch nur die 0 diese Bedingung erfüllt, gewinnt H das 2-Runden Spiel.

Aus dem Spiel folgt die Formel: $\exists a \exists b (R(a, a, a) \wedge R(b, b, b) \wedge b \neq a)$

Aufgabe 2

1. Zwei σ -Strukturen $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind elementar Äquivalent, genau dann wenn f.a. $\varphi \in FO(\sigma)$ gilt $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ bzw. die Duplikatorin gewinnt für jedes $m \in \mathbb{N}$ das m-Runden Spiel.
2. Zwei σ -Strukturen $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind isomorph, wenn es eine Bijektion f zwischen diesen existiert und f ein Homomorphismus ist.

Beweis:

1. \mathcal{A} und \mathcal{B} sind elementar äquivalent \Leftrightarrow Die Duplikatorin gewinnt jedes m-Runden Spiel
Sei $m \in \mathbb{N}$ ein beliebig. Eine Gewinnstrategie der Duplikatorin würde jeden Zug des Herausforderers kopieren, da $\infty \notin \mathbb{N}$ gilt diese Strategie für jedes m-Runden Spiel.
2. $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B} \Leftrightarrow$ Es gibt keine Bijektion zwischen den Strukturen und f ein Homomorphismus ist

Aufgabe 3

In Aufgabe 2.) wurde gezeigt, dass die σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} elementar äquivalent sind, d.h. heisst f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$. \mathcal{A} besitzt nur endliche Komponenten, \mathcal{B} auch eine unendliche. Somit kann es keine Formel $\varphi \in FO[\sigma]$ geben, die nur dann erfüllbar ist genau dann wenn der Graph nur endliche Komponenten enthält, da die Strukturen elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4

Ein Aussage eines unendlichen EF-Spiels ist äquivalent zur Aussage ob zwischen den Strukturen ein Isomorphismus vorliegt, also:

$$D \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$$

Beweis:

1. (a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow D$ gewinnt \mathfrak{G}_∞
Der Isomorphismus ist eine Gewinnstrategie für D.
- (b) D gewinnt $\mathfrak{G}_\infty \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$
Die Züge von D. stellen ein Isomorphismus da...

In Aufgabe 2.) gewinnt die Duplikatorin jedes Spiel, da die Strukturen elementar äquivalent sind, sie sind jedoch nicht isomorph, womit sie das unendliche EF-Spiel nicht gewinnen würde.