Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 7

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

Die gebundenen Variablen bekommen im nachfolgenden Teil Indizes, die anzeigen, welcher Quantor welche Variablen bindet. Freie Variablen sind somit jene, die keinen Index haben.

(i)

$$\varphi_1 = \forall x_1 \forall y_1 \forall z_1\left((E(x_1, y_1) \wedge E(y_1, z_1) \rightarrow E(x_1, z_1)) \wedge \exists x_2 E(x_2, x_2)\right)$$

(ii)

$$\varphi_2 = \forall y_1(E(x, y_1) \rightarrow \forall x_1(E(y_1, x_1) \rightarrow P(x_1))) \rightarrow \forall y_2(E(x, y_2) \rightarrow P(y_2))$$

(iii)

$$\varphi_3 = \exists y_1(E(x, y_1) \wedge P(y_1)) \rightarrow \exists y_2(E(x, y_2) \wedge (\neg \exists x_1(E(y_2, x_1) \wedge P(x_1)) \wedge P(y_2)))$$

Aufgabe 2

(i)

- **Konstruktion:**
  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
  $n \mapsto n$
- **Beweis für Richtigkeit des Homomorphismus:**
  - **Konstanten:**
    $h(0^{\mathcal{N}}) = 0^{\mathcal{N}} = 0$
    $h(1^{\mathcal{N}}) = 1^{\mathcal{N}} = 1$
  - **Operatoren:**
    Sei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$h(+^{\mathcal{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 + n_2) = n_1 + n_2 = h(n_1) + h(n_2) = +^{\mathcal{Z}}(h(n_1), h(n_2))$$
$$h(\cdot^{\mathcal{N}}(n_1, n_2)) = h(n_1 \cdot n_2) = n_1 \cdot n_2 = h(n_1) \cdot h(n_2) = \cdot^{\mathcal{Z}}(h(n_1), h(n_2))$$

Somit ist h ein gültiger Homomorphismus von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$.

(ii) Angenommen es gäbe besagten Homomorphismus. Nach der Definition des Homomorphismus, müssen die Konstantensymbole wieder auf sich abgebildet werden. Somit gilt:

$h(0^{\mathcal{Z}}) = 0^{\mathcal{N}} = 0$
$h(1^{\mathcal{Z}}) = 1^{\mathcal{N}} = 1$

Außerdem gilt:

$$h(\cdot^{\mathcal{Z}}(-1, -1)) = h(1) \overset{Def.Hom.}{=} 1 = \cdot^{\mathcal{N}}(h(-1), h(-1)) \Rightarrow -1 \mapsto 1 \tag{1}$$
$$h(+^{\mathcal{Z}}(-1, 1)) = h(0) = 0 \neq 2 = +^{\mathcal{N}}(1, 1) = +^{\mathcal{N}}(h(-1), h(1)) \tag{2}$$

Somit entsteht aus (1) und (2) unweigerlich ein Widerspruch, wenn es einen Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$ gäbe.

Aufgabe 3

Damit $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(i) Das Bild von h(A) $\subseteq$ B

(ii) Für alle Operatoren $op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}$ der Substruktur $\mathfrak{B}_{h(A)}$, muss gelten, dass sie abgeschlossen bzgl. des Bildes von h(A) sind.

- **Beweis für (i):**
  Der Homomorphismus h ist als Funktion folgendermaßen definiert:

  $$\text{h: A} \rightarrow \text{B}$$

  Daraus folgt sofort, dass h(A) $\subseteq$ B ist.

- **Beweis für (ii)** Da h ein Homomorphismus von A nach B ist, muss gelten mit n als Stelligkeit des Operators:

  $$(*)\ \forall a_1\ \forall a_2 ... \forall a_n\ h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, ..., a_n)) = op^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)) = op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n))$$

  Wären die Operatoren nicht abgeschlossen bzgl. des Bildes von h, dann würde folgendes gelten:

  $$\exists a_1\ \exists a_2 ... \exists a_n\ (op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n))) \notin \text{h(A)}$$

  Nach (*) gilt aber:

  $$\forall a_1\ \forall a_2 ... \forall a_n\ (h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, ..., a_n)) = op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)))$$

  mit

  $$h(op^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, ..., a_n)) \in h(A) \Leftrightarrow op^{\mathfrak{B}}_{h(A)}(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)) \in h(A)$$

  was ein Widerspruch zur Annahme darstellt. Folglich müssen die Operatoren abgeschlossen sein, weshalb h(A) eine σ-abgeschlossene Menge ist.

Da (i) und (ii) gilt, folgt nach dem Satz der VL, dass h(A) eine Substruktur $\mathfrak{B}_{h(A)} \subseteq \mathfrak{B}$ induziert.

Aufgabe 4

- **Struktur:**

  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}})$
  $n_1 <^{\mathcal{N}} n_2$ gdw. $(n_1 \bmod 2 < n_2 \bmod 2) \vee ((n_1 \bmod 2 = n_2 \bmod 2) \wedge n_1 < n_2)$

  Damit $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ isomorph sind, muss es einen Isomorphismus zwischen $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ geben.

- **Isomorphismus**

  $b : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\} \times \mathbb{N}$
  $n \rightarrow (n \bmod 2, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)$

- **Beweis der Richtigkeit von b:**
  b muss folgende Dinge erfüllen:

  (i) b muss eine Bijektion sein:
  b: $\mathbb{N} \mapsto \{0,1\} \times \mathbb{N}$

  (ii) Für alle n-stelligen Relationssymbole R $\in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^n$:
  wenn $\overline{a} \in \mathbb{N}^n$ genau, dann wenn $(b(a_1), b(a_2), ..., b(a_n)) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}$

  (iii) Für alle n-stelligen Funtionssymbole f $\in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^n$:
  $b(f^{\mathcal{N}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{M}}(b(a_1), b(a_2), ..., b(a_n))$

  (iv) Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt:
  $b(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{M}}$

- **Beweis für (i):**
  Damit b eine Bijektion ist, muss b und seine Inverse die Eigenschaften einer Funktion erfüllen, nämlich Linkstotalität und Injektivität.

  - b ist offensichtlich linkstotal.
  - b ist auch injektiv, da Folgendes gilt:
    Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \neq n_2$:

  Fall 1. n_1 mod 2 $\neq n_2$ mod 2:
  b(n_1) = (n_1 mod 2, $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$) $\neq$ (n_2 mod 2, $\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$) = b($n_2$)

  Fall 2. $n_1 + 2 \leq n_2$:
  $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor < \left\lfloor \frac{n_1+2}{2} \right\rfloor = \lfloor \frac{n_1}{2} + 1 \rfloor \leq \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$
  $\Rightarrow$ b(n_1) = (n_1 mod 2, $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$) $\neq$ (n_2 mod 2, $\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$) = b($n_2$)

  Fall 3. $n_2 + 2 \leq n_1$:
  analog zu Fall 2.

  Fall 4. $n_1 + 1 = n_2$ oder $n_2 + 1 = n_1$:
  Nach Annahme muss n_1 eine gerade und n_2 eine ungerade Zahl sein oder umgekehrt. Daraus folgt:

  n_1 mod 2 $\neq n_2$ mod 2 $\Rightarrow$ b(n_1) = (n_1 mod 2, $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$) $\neq$ (n_2 mod 2, $\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$) = b($n_2$)

  Daraus folgt, dass b(n_1) $\neq$ b(n_2) und damit die Injektivität von b.

  Die Inverse von b:

  $b^{-1} : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  $$(k, n) \to \begin{cases} 2 \cdot n, & k = 0 \\ 2 \cdot n + 1, & sonst \end{cases}$$

  - b^{-1} ist offensichtlich linkstotal.
  - b^{-1} ist auch injektiv, da Folgendes gilt:
    Seien $(k_1, n_1), (k_2, n_2) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ mit $(k_1, n_1) \neq (k_2, n_2)$:

  Fall 1. $k_1 = 0 \neq 1 = k_2$:
  $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_1, n_2)$

  Fall 2. $k_1 = 1 \neq 0 = k_2$:
  analog zu Fall 1

  Fall 3. $n_1 \neq n_2$ und $k_1 = k_2 = 0$:
  $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2 = b^{-1}(k_2, n_2)$

  Fall 4. $n_1 \neq n_2$ und : $k_1 = k_2 = 1$
  $b^{-1}(k_1, n_1) = 2 \cdot n_1 + 1 \neq 2 \cdot n_2 + 1 = b^{-1}(k_2, n_2)$

  Die Inverse b^{-1} ist also injektiv.

  b ist damit eine Bijektion.

- **Beweis für (ii):**
  2-stelliges Relationssymbol $<$:

  $\forall a_1 \forall a_2$ $((a_1, a_2) \in <^N$
  $\Leftrightarrow$ $(a_1$ mod 2 $< a_2$ mod 2) $\vee$ ((a_1 mod 2 $= a_2$ mod 2) $\wedge$ $a_1 < a_2$)
  $\Leftrightarrow$ $(a_1$ mod 2 $< a_2$ mod 2) $\vee$ ((a_1 mod 2 $= a_2$ mod 2) $\wedge$ $\lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor < \lfloor \frac{a_2}{2} \rfloor$)
  $\Leftrightarrow$ $(b(a_1), b(a_2)) \in <^M)$

- **Beweis für (iii):**
  Es gibt keine Funktionssymbole aus σ, also ist hier nichts zu beweisen.

- **Beweis für (iv):**
  Es gibt keine Konstantensymbole aus σ, also ist hier nichts zu beweisen.

b erfüllt damit i-iv und ist somit ein korrekter Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{M}$.