Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
Maximillian Bachl - 341455
Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1.

(i) a) **Behauptung:** Das untenstehende Sequenzkalkül ist korrekt:

$$(\exists \Rightarrow)\frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta} c \text{ kommt nicht in } \Phi, \delta, \psi(x) \text{ vor}$$

Beweis: Sei $J = (\mathcal{A}, \beta)$ ein τ-Interpretation die Φ und für mindestens ein x, $\psi(x)$ erfüllt. Also:

$$J \models \Phi$$
$$J \models \exists x\psi(x)$$

Sei $a := [\![c]\!]^J$. Also gilt $J \models \psi[a]$, daraus folgt offensichtlich, dass $J \models \psi(c)$ gilt. Nach Vorraussetzung gibt es also ein $\varphi \in \Delta$, sodass $J \models \varphi$.

b) **Behauptung:** Das untenstehende Sequenzkalkül ist korrekt:

$$(\Rightarrow \exists)\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$$

Beweis: Sei τ die Signatur die alle Relations, Funktions und Konstanten Symbole enthält, die in $\Phi, \Delta, \psi(x)$ vorkommen, aber nicht t. Sei $J = (\mathcal{A}, \beta)$ eine τ-Interpretation mit $J \models \Phi$. Nach Vorraussetzung erfüllt J eine Formel in $\Delta \cup \{\psi(t)\}$

Fall: 1. $J \models \varphi \in \Delta$, dies gilt offensichtlich.

Fall: 2. $J \models \psi(t)$

Z.z. $J \models \exists\forall x\psi(x)$

Sei J_a die $\tau \cup \{t\}$-Interpretation sodass J_a die Konstante c mit a belegt und sonst ist J_a gleich J. Es gilt $J_{a|_\tau} = J$, daraus folgt, dass $\forall\varphi \in \Delta. J_a \not\models \varphi$. Also muss $J_a \models \psi(t)$. Also gilt $J \models \psi[a]$ für mindestens ein $a \in A$. Daher also $J \models \exists\psi(x)$