Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 5
Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

(i) $h : V(G) \to V(H)$
$v_1 \mapsto w_1$
$v_2 \mapsto w_2$
$v_3 \mapsto w_1$
$v_4 \mapsto w_3$
$v_5 \mapsto w_2$

(ii) Zu zeigen ist:
(i) Graph G ist 3-färbbar $\Rightarrow$ es existiert ein Homomorph. von G nach H
(ii) es existiert ein Homomorph. von G nach H $\Rightarrow$ Graph G ist 3-färbbar

H ist 3-färbbar mit folgender Farbbelegung
c: V(H) $\to \{r, g, b\}$
$c(w_1) \mapsto r$
$c(w_2) \mapsto g$
$c(w_3) \mapsto b$

(i) Da G 3-färbbar ist, gilt:
$\exists c' : V(G) \to$ {r,g,b}. c' ist eine 3-Färbung von G

Daraus kann man nun folgenden Homomorphismus h bilden:

$$h : V(G) \to V(H)$$
$$h(v) \mapsto \begin{cases} w_1, & c'(v) = r \\ w_2, & c'(v) = g \\ w_3, & c'(v) = b \end{cases}$$

Beweis der Richtigkeit des gebildeten h:
Es muss gelten:

$$\forall \{u, v\} \in V(G).\ \{h(u), h(v)\} \in V(H)$$

Da nach Annahme alle Knoten einer Kante aus G verschiedenfarbig sind, gilt:

$$(1)\ \forall \{u, v\} \in V(G).\ h(u) \neq h(v)$$

Des Weiteren gilt:

$$(2)\ \forall\ u \in \{w_1, w_2, w_3\}.\ \forall\ v \in \{w_1, w_2, w_3\} \setminus \{u\}.\ \{u, v\} \in E(H)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\forall \{u, v\} \in V(G).\ \{h(u), h(v)\} \in V(H)$$

(ii) Da ein Homomorphismus h von G nach H existiert, gilt:

$$(*)\ \forall \{u, v\} \in V(G).\ \{h(u), h(v)\} \in V(H)$$

Daraus kann man nun folgende 3-Färbung c′ ableiten:

$c' : V(G) \rightarrow$ {r,g,b}

$c'(v) \mapsto c(h(v))$

Beweis der Richtigkeit der 3-Färbung c′:

Es gilt:

$(**)\ \forall\ \{u,v\} \in V(G).\ h(u) \neq h(v)$

Würde dies nicht gelten, würde das bedeuten, dass $\{h(u), h(u)\} \in E(H)$ sein würde, da aber H irreflexiv ist, wäre das ein Widerspruch.
Aus (*) und (**) folgt:

$\forall\ \{u,v\} \in V(G).\ c(h(u)) \neq c(h(v)) \Leftrightarrow \forall\ \{u,v\} \in V(G).\ c'(u) \neq c'(v)$

$\Rightarrow$ c′ ist eine passende 3-Färbung für G $\Rightarrow$ G ist 3-färbbar