Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Syntax

Aussagenlogik

(i) Sei $\varphi \in AL$ und β eine passende Belegung.

$$[\![\varphi]\!]^\beta \in \{0,1\}$$

(ii) Sei $\varphi \in AL$ und β eine passende Belegung.

$$\beta \vDash \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^\beta = 1$$

Man sagt β erfüllt φ bzw. ist Modell von φ.

(iii) Sei $\Phi \subseteq AL$ und $\varphi \in AL$.
φ folgt aus Φ, wenn jede zu $\Phi \cup \{\varphi\}$ passende Belegung β, die Φ erfüllt, auch φ erfüllt. Man schreibt:

$$\Phi \vDash \varphi$$

Falls $\Phi = \{\phi\}$, schreibt man:

$$\phi \vDash \varphi$$

(iv) Sei $\varphi \in AL$ in DNF.

$$\mathcal{C}(\varphi) = \{C_1, ..., C_n\}$$

Wobei C_1 bis C_n die Klauseln von $\mathcal{C}$ sind.

(v) Sei $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ eine endliche Menge von Klauseln mit $C_i = \{L_{i,j} \mid 1 \le j \le m_i\}$.

$$\varphi(\mathcal{C}) = \bigvee_{1 \le i \le n} \bigwedge_{1 \le j \le m_i} L_{i,j}$$

Falls $\mathcal{C} = \emptyset$, schreibt man:

$$\varphi(\mathcal{C}) = \top$$

(vi) Sei β eine Belegung und $\mathcal{C}$ eine Klauselmenge. Man schreibt:

$$\beta \vDash \mathcal{C}$$

für

$$\beta \vDash \varphi(\mathcal{C})$$

(vii) Sei $\mathcal{C}$ eine Klauselmenge und C eine Klausel. Man schreibt:

$$\mathcal{C} \vDash C$$

Falls für jede passende Belegung β gilt:

$$\beta \vDash \mathcal{C} \Rightarrow \beta \vDash C$$

(viii) Seien C_1, C_2 Klauseln, dann schreibt man:

$$Res(C_1, C_2)$$

für die Resolventenmenge von C_1 und C_2.

(ix) Eine Resolutionsableitung einer Klausel C aus einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist eine Sequenz $(C_1, ..., C_n)$ mit $C_n = C$ und für $1 \le k < n$:

- $C_k \in \mathcal{C}$ oder
- Es gibt ein $i, j < k$, sodass $C_k \in Res(C_i, C_j)$

Man schreibt auch:

$$\mathcal{C} \vdash_R C$$

(x) Eine Resolutionswiderlegung einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist eine Resolutionsableitung der leeren Klausel $\square$.

Strukturen

(i) Jede Funktion/Relation besitzt eine Stelligkeit:

$$ar(R) \in \mathbb{N} \text{ bzw. } ar(f) \in \mathbb{N}$$

(ii) Sei τ eine Signatur, $\sigma \subseteq \tau$ und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur.
Das σ-Redukt $\mathcal{B}_{|_\sigma}$ von $\mathcal{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{B}_{|_\sigma}$, die durch das Weglassen der Symbole in $\tau \setminus \sigma$ entsteht.
$\mathcal{B}$ heißt Expansion von $\mathcal{B}_{|_\sigma}$.

Prädikatenlogik

(i) Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

Eine Belegung in $\mathcal{A}$ ist eine Funktion

$$\beta : Dom(\beta) \rightarrow A \text{ mit } Dom(\beta) \subseteq \text{ VAR}$$

β heißt passend zu $\varphi \in FO[\sigma]$, falls frei(φ) $\subseteq Dom(\beta)$.

(ii) Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Paar $(\mathcal{A}, \beta)$.
Eine Interpretation ist passend zu $\varphi \in FO[\sigma]$, falls β passend zu φ ist.
Für

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$$

schreiben wir:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

(iii) Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

Eine Interpretation ist passend zu $\Phi \subseteq FO[\sigma]$, falls β passend zu allen $\varphi \in \Phi$ ist.
Eine Interpretation erfüllt $\Phi \subseteq FO[\sigma]$, falls β alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt.
Man sagt $\mathcal{I}$ ist ein Modell von Φ und schreibt:

$$\mathcal{I} \models \Phi$$

Falls Φ eine Menge von σ-Sätzen ist, schreibt man:

$$\mathcal{A} \models \Phi$$

(iv) Sei $\Phi \in FO[\sigma]$ eine Formel mit frei(Φ) $\subseteq \{x_1, ..., x_k\}$.

Sei A eine σ-Struktur und β eine Belegung, so dass $\beta(x_i) := a_i$, für alle $1 \leq i \leq k$.
Wir schreiben:

$$\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, ..., x_k/a_k] \text{ statt } \mathcal{I} \models \varphi$$

Ist φ ein Satz schreiben wir:

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

(v) Sei σ eine Signatur, $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und $\varphi \in FO[\sigma]$.

φ ist eine Folgerung von Φ, geschrieben $\Phi \models \varphi$, wenn für jede zu Φ und φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi$$

Falls $\Phi = \emptyset$, schreiben wir:

$$\models \varphi \text{ statt } \emptyset \models \varphi$$

(vi) Sei σ eine Signatur und $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine Menge von σ-Sätzen.

Mod(Φ), ist die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$.
Falls $\Phi := \varphi$ nur einen Satz enthält, schreiben wir kurz Mod(φ).

Sequenzkalkül

(i) Sei $\Phi \subseteq$ AL eine Menge von Formeln und sei $\varphi \in$ AL.
1. Φ ist konsistent genau dann, wenn Φ erfüllbar ist.
2. $\Phi \vdash_S \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$.