

Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 11

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick - 340528
 Maximilian Bachl - 341455
 Marius Liwotto - 341051

Aufgabe 1

(i) a) **Behauptung:** Das untenstehende Sequenzkalkül ist korrekt:

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} c \text{ kommt nicht in } \Phi, \delta, \psi(x) \text{ vor}$$

Beweis: Sei $J = (\mathcal{A}, \beta)$ ein τ -Interpretation die Φ und für mindestens ein x , $\psi(x)$ erfüllt. Also:

$$J \models \Phi$$

$$J \models \exists x \psi(x)$$

Sei $a := \llbracket c \rrbracket^J$. Also gilt $J \models \psi[a]$, daraus folgt offensichtlich, dass $J \models \psi(c)$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es also ein $\varphi \in \Delta$, sodass $J \models \varphi$.

b) **Behauptung:** Das untenstehende Sequenzkalkül ist korrekt:

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

Beweis: Sei τ die Signatur die alle Relations-, Funktions- und Konstantensymbole enthält, die in $\Phi, \Delta, \psi(x)$ vorkommen, aber nicht t . Sei $\mathcal{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine τ -Interpretation mit $J \models \Phi$. Nach Voraussetzung erfüllt J eine Formel in $\Delta \cup \{\psi(t)\}$

Fall: 1. $\mathcal{J} \models \varphi \in \Delta$, dies gilt offensichtlich.

Fall: 2. $\mathcal{J} \models \psi(t)$

Z.z. $\mathcal{J} \models \exists x \psi(x)$

Sei J_a die $\tau \cup \{t\}$ -Interpretation sodass J_a die Konstante c mit a belegt und sonst ist J_a gleich J .

Es gilt $J_{a|_{\tau}} = J$, daraus folgt, dass $\forall \varphi \in \Delta. J_a \models \varphi$. Also muss $J_a \models \psi(t)$. Also gilt $\mathcal{J} \models \psi[a]$ für mindestens ein $a \in A$. Daher also $J \models \exists x \psi(x)$

Aufgabe 2

(i)

$$\frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an. Wir wählen $\Phi = \{\top\}$, $\psi = \perp$ sowie $\Delta = \{\top\}$.

Dann gilt:

$$\frac{\{\top\}, \perp \Rightarrow \{\top\}}{\{\top\} \Rightarrow \{\top\}}$$

Somit gilt in jeder beliebigen Interpretation \mathcal{J} , dass die obere Sequenz ungültig ist, die untere aber nicht.

(ii)

$$\frac{\Phi, \neg \forall x \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi}$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an. Wir wählen $\Phi = \{\top\}$, $\varphi = (x = x)$ sowie $\Delta = \emptyset$.

Dann gilt:

$$\frac{\{\top\}, (\neg \forall x x = x) \Rightarrow \emptyset}{\{\top\} \Rightarrow (\exists x x = x)}$$

Somit gibt es offensichtlich eine Interpretation, sodass die obere Sequenz gültig ist, die untere aber nicht