# Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Syntax

## Aussagenlogik

(i) Sei $\varphi \in AL$ und $\beta$ eine passende Belegung.

$$[\![\varphi]\!]^\beta \in \{0, 1\}$$

(ii) Sei $\varphi \in AL$ und $\beta$ eine passende Belegung.

$$\beta \models \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^\beta = 1$$

Man sagt $\beta$ erfüllt $\varphi$ bzw. ist Modell von $\varphi$.

(iii) Sei $\Phi \subseteq AL$ und $\varphi \in AL$.
$\varphi$ folgt aus $\Phi$, wenn jede zu $\Phi \cup \{\varphi\}$ passende Belegung $\beta$, die $\Phi$ erfüllt, auch $\varphi$ erfüllt. Man schreibt:

$$\Phi \models \varphi$$

Falls $\Phi = \{\phi\}$, schreibt man:

$$\phi \models \varphi$$

(iv) Sei $\varphi \in AL$ in DNF.

$$\mathcal{C}(\varphi) = \{C_1, ..., C_n\}$$

Wobei $C_1$ bis $C_n$ die Klauseln von $\mathcal{C}$ sind.

(v) Sei $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ eine endliche Menge von Klauseln mit $C_i = \{L_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m_i\}$.

$$\varphi(\mathcal{C}) = \bigvee_{1 \leq i \leq n} \bigwedge_{1 \leq j \leq m_i} L_{i,j}$$

Falls $\mathcal{C} = \emptyset$, schreibt man:

$$\varphi(\mathcal{C}) = \top$$

(vi) Sei $\beta$ eine Belegung und $\mathcal{C}$ eine Klauselmenge. Man schreibt:

$$\beta \models \mathcal{C}$$

für

$$\beta \models \varphi(\mathcal{C})$$

(vii) Sei $\mathcal{C}$ eine Klauselmenge und C eine Klausel. Man schreibt:

$$\mathcal{C} \models C$$

Falls für jede passende Belegung $\beta$ gilt:

$$\beta \models \mathcal{C} \Rightarrow \beta \models C$$

(viii) Seien $C_1, C_2$ Klauseln, dann schreibt man:

$$Res(C_1, C_2)$$

für die Resolventenmenge von $C_1$ und $C_2$.

(ix) Eine Resolutionsableitung einer Klausel C aus einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist eine Sequenz $(C_1, ..., C_n)$ mit $C_n = C$ und für $1 \leq k < n$:

- $C_k \in \mathcal{C}$ oder
- Es gibt ein $i, j < k$, sodass $C_k \in Res(C_i, C_j)$

Man schreibt auch:

$$\mathcal{C} \vdash_R C$$

(x) Eine Resolutionswiderlegung einer Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist eine Resolutionsableitung der leeren Klausel $\square$.

## Strukturen

(i) Jede Funktion/Relation besitzt eine Stelligkeit:

$$ar(R) \in \mathbb{N} \text{ bzw. } ar(f) \in \mathbb{N}$$

(ii) Sei $\tau$ eine Signatur, $\sigma \subseteq \tau$ und $\mathcal{B}$ eine $\tau$-Struktur.
Das $\sigma$-Redukt $\mathcal{B}_{|_\sigma}$ von $\mathcal{B}$ ist eine $\sigma$-Struktur $\mathcal{B}_{|_\sigma}$, die durch das Weglassen der Symbole in $\tau \setminus \sigma$ entsteht.
$\mathcal{B}$ heißt Expansion von $\mathcal{B}_{|_\sigma}$.

## Prädikatenlogik

(i) Sei $\sigma$ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Struktur.

Eine Belegung in $\mathcal{A}$ ist eine Funktion

$$\beta : Dom(\beta) \to A \text{ mit } Dom(\beta) \subseteq \text{ VAR}$$

$\beta$ heißt passend zu $\varphi \in FO[\sigma]$, falls frei($\varphi$) $\subseteq Dom(\beta)$.

(ii) Sei $\sigma$ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Struktur.

Eine $\sigma$-Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Paar $(\mathcal{A}, \beta)$.
Eine Interpretation ist passend zu $\varphi \in FO[\sigma]$, falls $\beta$ passend zu $\varphi$ ist.
Für

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$$

schreiben wir:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

(iii) Sei $\sigma$ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Struktur.

Eine $\sigma$-Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Paar $(\mathcal{A}, \beta)$.
Eine Interpretation ist passend zu $\Phi \subseteq FO[\sigma]$, falls $\beta$ passend zu allen $\varphi \in \Phi$ ist.
Eine Interpretation erfüllt $\Phi \subseteq FO[\sigma]$, falls $\beta$ alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt.
Man sagt $\mathcal{I}$ ist ein Modell von $\Phi$.

Falls $\Phi$ eine Menge von $\sigma$-Sätzen ist, schreibt man:

$$\mathcal{A} \models \Phi$$

(iv) Sei $\Phi \in FO[\sigma]$ eine Formel mit frei($\Phi$) $\subseteq \{x_1, ..., x_k\}$.

Sei A eine $\sigma$-Struktur und $\beta$ eine Belegung, so dass $\beta(x_i) := a_i$, für alle $1 \leq i \leq k$.
Wir schreiben:

$$\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, ..., x_k/a_k] \text{ statt } \mathcal{I} \models \varphi$$

Ist $\varphi$ ein Satz schreiben wir:

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

(v) Sei $\sigma$ eine Signatur, $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und $\varphi \in FO[\sigma]$.
$\varphi$ ist eine Folgerung von $\Phi$, geschrieben $\Phi \models \varphi$, wenn für jede zu $\Phi$ und $\varphi$ passende $\sigma$-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi$$

Falls $\Phi = \emptyset$, schreiben wir:

$$\models \varphi \text{ statt } \emptyset \models \varphi$$

(vi) Sei $\sigma$ eine Signatur und $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine Menge von $\sigma$-Sätzen.

Mod($\Phi$), ist die Klasse aller $\sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$.
Falls $\Phi := \varphi$ nur einen Satz enthält, schreiben wir kurz Mod($\varphi$).

## Sequenzkalkül

(i) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Menge von Formeln und sei $\varphi \in \mathrm{AL}$.

1. $\Phi$ ist konsistent genau dann, wenn $\Phi$ erfüllbar ist.
2. $\Phi \vdash_S \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$.