FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SS 2012
Stand: 27.10.2012

1. Hausaufgabe – Theoretische Grundlagen der Informatik 3
Abgabe: 1.11.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1: 7 Punkte

Stephan hat zum Kindergeburtstag eingeladen und folgende Rückmeldungen erhalten:

(i) Wenn Tobi kommt, bringt er Christoph und Sebastian mit.

(ii) Es kommt mindestens einer der Freunde Christoph und Viktor.

(iii) Wenn Sebastian kommt, kommt Friederike nicht.

(iv) Viktor kommt nicht.

(v) Wenn Tobi nicht kommt, kommt auch Christoph nicht.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, wer zum Kindergeburtstag kommt und wer nicht.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(i) $\neg(X \rightarrow (Y \rightarrow X))$.

(ii) $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow Y$.

(iii) $(\neg X \rightarrow (X \wedge Y)) \rightarrow (Y \rightarrow X)$.

(iv) $(X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Y)$.

(v) $(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Für $c, i \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit c_i das i-te Bit in der Binärdarstellung von c, beginnend von rechts. Beispiel (42 ist in binär 101010):

$$42_0 = 0$$
$$42_1 = 1.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Geben Sie für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ eine Formel φ_i an mit der Eigenschaft, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a, b < 2^n$ gilt:

$$\varphi_i(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0)$$

ist wahr ist genau dann, wenn $(a + b)_i = 1$. Die Formel φ_i definiert also das i-te Bit der Summe der beiden n-stelligen Binärzahlen a und b.

Aufgabe 4: 3 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe nur Formeln der Aussagenlogik, die aus Variablen und den Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aufgebaut sind.

Für eine Formel φ definieren wir die maximale (minimale) Tiefe max-depth(φ) (min-depth(φ)) durch

- $\text{max-depth}(X) = \text{min-depth}(X) = 0$ für $X \in \text{AVar}$,
- $\text{max-depth}(\varphi) = 1 + \text{max-depth}(\psi)$ für $\varphi = \neg\psi$,
- $\text{min-depth}(\varphi) = 1 + \text{min-depth}(\psi)$ für $\varphi = \neg\psi$,
- $\text{max-depth}(\varphi) = 1 + \max\{\text{max-depth}(\psi), \text{max-depth}(\chi)\}$ für $\varphi = \psi * \chi$ mit $* \in \{\wedge, \vee\}$,
- $\text{min-depth}(\varphi) = 1 + \min\{\text{min-depth}(\psi), \text{min-depth}(\chi)\}$ für $\varphi = \psi * \chi$ mit $* \in \{\wedge, \vee\}$.

Zeigen Sie, dass jede Formel φ äquivalent ist zu einer Formel ψ mit $\text{max-depth}(\psi) = \text{min-depth}(\psi)$.