Theoretische Grundlagen der Informatik 3: Hausaufgabenabgabe 2

Tutorium: Sebastian , Mi 14.00 - 16.00 Uhr

Tom Nick	- 340528
Maximillian Bachl	- 341455
Marius Liwotto	- 341051

Aufgabe 1

(i) $E' := \{(v_1, v_2) | \{v_1, v_2\} \in E\}$
$G' := (V, t(s(r(E'))))$ mit $t(s(r(E)))$ = reflexiver, symmetrischer und transitiver Abschluss von E.

Die Menge aller Pfade von v_n nach v_m mit $v_n, v_m \in V$ in G':
$P_{v_n,v_m} = \{p \mid \text{wenn p ein Pfad von } v_n \text{ zu } v_m \text{ ist mit } v_n, v_m \in V\}$

Ein Pfad von v_n nach v_m ist eine Menge von Tupel (v_i, v_j) mit:
$\forall (v_i, v_j) \in p. \exists (v_j, v_l) \in p \lor (v_j, v_m). \mathit{True}$

$$\phi(P_i) = \begin{cases} X_{ij} \land \phi(P_i \setminus \{(v_i, v_j)\}), & \#(P_i) \geq 2 \land (v_i, v_j) \in P_i \\ X_{ij}, & \#(P_i) = 1 \land (v_i, v_j) \in P_i \end{cases}$$

Jeder Pfad $P_i \in P_{v_n,v_m}$ wird mit $\phi(P_i)$ zu einem Konjunktionsterm aus X_{ij}
umgebaut.

$$\varphi_n = \bigwedge_{l=1}^{m} \bigwedge_{k=1}^{n} (\bigvee_{c=1}^{\#(P_{v_l,v_k})} \phi(P_c) \text{ mit } P_c \in P_{v_l,v_k})$$

φ_n wird gdw. wahr, wenn für jeden Knoten v_n gilt, dass er zu jedem anderen Knoten v_m
einen Pfad besitzt, der auch in G enthalten ist.
Daraus folgt: $[\![\varphi_n]\!]^{\beta_G} = 1 \Leftrightarrow$ G ist zusammenhängend

(ii) $N_k = \{X_{kj} \mid (v_k, v_j) \in E\}$

$$\phi(k) = \begin{cases} (X_{ij} \land X_{i(j+1)}) \land (\neg X_{i(j+2)} \land ... \land \neg X_{i(j+m)}), & \#(N_k) \geq 2 \\ X_{ij}, & \#(N_k) = 1 \land X_{ij} \in N_k \end{cases}$$

$$\varphi_n = \bigwedge_{k=1}^{\#V} (\phi(k)) \land \left(\bigwedge_{l=1}^{m} \bigwedge_{k=1}^{n} (\bigvee_{c=1}^{\#(P_{v_l,v_k})} \phi(P_c) \text{ mit } P_c \in P_{v_l,v_k}) \right)$$

Wenn ein Graph einen Hamilton-Kreis besitzt, so muss man ihn einmal komplett durchlaufen können, sodass man jeden Knoten genau einmal besucht und wieder beim Anfangsknoten landet. Folglich muss der Graph ein Kreis sein bzw., man kann die Knoten so verschieben, dass ein Kreis entsteht, der äquivalent zum Ausgangsgraph ist.
Diese Kreisstruktur bedeutet, dass jeder Knoten genau 2 Nachbarn hat.
Die Funktion $\phi(k)$ konstruiert für jeden Knoten v_i einen Konjunktionsterm so, dass wenn v_i mehr als 2 Nachbarn hat, der Term zu False auswertet.
φ_n prüft, ob ϕ für jeden Knoten $v_i \in V$ gilt und ob der Graph abgeschlossen ist mit der Formel aus (i).

Aufgabe 2

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi\mathcal{S} &= \mathcal{S}(((X \land Y) \lor Z) \leftrightarrow (((X \lor \neg Y) \leftrightarrow Y)) \\
&= (\mathcal{S}((X \land Y) \lor Z) \leftrightarrow \mathcal{S}(((X \lor \neg Y) \leftrightarrow Y)) \\
&= ((\mathcal{S}(X \land Y) \lor \mathcal{S}(Z)) \leftrightarrow ((\mathcal{S}(X \lor \neg Y) \leftrightarrow \mathcal{S}(Y))) \\
&= (((\mathcal{S}(X) \land \mathcal{S}(Y)) \lor Z) \leftrightarrow (((\mathcal{S}(X) \lor \neg\mathcal{S}(Y)) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \to (Y \land Z)))) \\
&= ((((Z \lor U) \land (Y \leftrightarrow (Z \to (Y \land Z))) \lor Z) \leftrightarrow (((Z \lor U) \lor \neg(Y \leftrightarrow (Z \to (Y \land Z))) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow (Z \to (Y \land Z))))
\end{aligned}$$

(ii)

$$\beta\mathcal{S}(X) = [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta}$$
$$\beta\mathcal{S}(Y) = [\![\mathcal{S}(Y)]\!]^{\beta}$$
$$\beta\mathcal{S}(U) = \beta(U)$$

- $\beta\mathcal{S}$ ist passend für φ, da $\{X, Y\} = \mathsf{var}(\varphi) \subseteq \mathsf{Dom}(\beta\mathcal{S}) = \{X, Y, U\}$
  β ist passend für $\varphi\mathcal{S}$, da $\{X, Y, U\} = \mathsf{var}(\varphi\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{Dom}(\beta) = \{X, Y, U\}$
- Dies ist im Substitutionslemma bewiesen, was ja eine vollständige Verifikation ist, dass es auch mit der hier angegebenen Formel, Substitution und Belegung gilt.

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \equiv X \Rightarrow (Y \wedge Z) &\equiv \neg X \vee (Y \wedge Z) \\
&\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \\
&\equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z) \\
&\equiv \psi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow Q &\equiv \neg(X \wedge Y \wedge Z) \vee Q \\
&\equiv \neg X \vee \neg Y \vee \neg Z \vee Q \\
&\equiv (\neg X \vee (\neg Y \vee (\neg Z \vee Q))) \\
&\equiv (X \Rightarrow (Y \Rightarrow (Z \Rightarrow Q))) \\
&\equiv \psi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 \equiv (X \wedge Y) \Rightarrow \neg(Z \Rightarrow X) &\equiv \neg(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Z \vee X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \vee (Z \wedge \neg X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge \mathit{True} \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee \neg X \vee X) \\
&\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X) \vee \neg X \\
&\equiv (X \Rightarrow \neg Y) \wedge (\neg Y \Rightarrow X) \vee \neg X \\
&\equiv \psi_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_4 \equiv (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \Rightarrow X) &\equiv \neg(Y \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow X) \\
&\equiv \neg(\neg Y \vee Z) \vee (\neg Y \vee X) \\
&\equiv (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \vee X) \\
&\equiv (Y \vee \neg Y \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
&\equiv (T \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
&\equiv T \wedge (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \\
&\equiv \neg Z \vee \neg Y \vee X \\
&\equiv \psi_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_5 = (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X) &\equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X) \\ &\equiv \neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X) \\ &\equiv \neg((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \\ &\equiv \neg(X \Leftrightarrow Y) \\ &\equiv \psi_5\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Aus der VL wissen wir, dass zu jeder aussagenlogischen Formel eine äquivalente KNF existiert.
Folglich gilt: $\varphi \equiv knf_\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} L_{ij}$
Aus $\varphi \equiv True$ kann man folgern, dass alle Disjunktionsterme von knf_φ wahr sein müssen.
Des Weiteren gilt, dass χ die folgende äquivalente Form besitzt, wenn χ keine Tautologie ist:

$\chi \equiv t_{\varphi 1} \vee ... \vee t_{\varphi i} \vee \gamma$ mit
$\gamma \in AL,\ t_{\varphi i}$ ist ein Disjunktionsterm mit i $\in [1, u]$ und $1 \leq$ u $\leq$ n von
knf_φ und $var(\gamma)\ \cap\ var(\varphi) = \emptyset$

Würde dies nicht gelten, so gäbe es eine passende Belegung β,
sodass $[\![\chi]\!]^\beta \equiv False$, obwohl $\varphi \equiv True$.
Das stünde im Widerspruch zur Aussage, dass $\varphi \Rightarrow \chi$ gilt.
Ist χ eine Tautologie gilt: $t_\varphi = True$
Aus der Struktur von χ folgt ebenfalls, dass t_φ folgende Bedingungen erfüllt:

$\varphi \Rightarrow t_\varphi \wedge t_\varphi \Rightarrow \chi \wedge var(t_\varphi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$

Daraus folgt, dass für alle Formeln $\varphi, \chi \in$ AL gilt mit $\varphi \Rightarrow \chi \equiv True$:

$\exists \psi \in AL. \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \chi \wedge var(\psi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\chi)$