

基础数学习题初汇^{*}

muzimuzhi

2015 年 10 月-

目录

1	微积分	3
1.1	函数基础	3
1.2	数列的极限	3
1.3	函数的极限	6
1.3.1	常用极限及其推导	7
1.4	函数的连续性、可导性与微分中值定理	14
1.5	原函数与不定积分	15
1.6	定积分	18
1.7	级数	18
2	线性代数	19
2.1	行列式	19
2.2	矩阵的基本运算，可逆矩阵	21
2.3	线性方程组的解，解空间	22
3	概率论与数理统计	23
4	常微分方程	25
5	偏微分方程	27
5.1	边界条件	27
5.1.1	细杆的热传导方程	27
5.1.2	弦的振动方程	27

^{*}这是自己学习 \LaTeX 之际，回答基础数学课程问题时积累下的文档，既不全面亦非权威，仅作参考。错漏或有，你提我改。
`tex` 原文件尚有诸多不足之处，他日整理后再上传。

目录	2
5.2 初始条件	28
5.2.1 波动方程	28
5.2.2 热传导方程	28
5.3 本征值问题	28
5.4 补充习题	29
6 未归类	33

1 微积分

1.1 函数基础

习题 1.1.1. 已知 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$, 求其反函数.

解. 记 $a = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}}$, $b = \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$, 则有

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (x + \sqrt{1+x^2}) + (x - \sqrt{1+x^2}) = 2x, \\ ab &= \sqrt[3]{x^2 - (1+x^2)} = -1. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y^3 &= (a+b)^3 \\ &= (a^3 + b^3) + 3ab(a+b) \\ &= 2x - 3(a+b) \\ &= 2x - 3y. \end{aligned}$$

于是得到反函数

$$y^{-1} = \frac{y^3 + 3y}{2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

1.2 数列的极限

习题 1.2.1 (利用单调有界性). 已知数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{1+u_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

解. 对每一 $(k \geq 2)$, 若 $u_k \in \left[\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, 则有

$$u_{k+1} = 2 - \frac{1}{1+u_k} \in \left[\frac{8}{5}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \subseteq \left[\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);$$

又 $k=2$ 时, $u_2 = \frac{3}{2} \in \left[\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 成立. 由数学归纳法可得, $u_n \in \left[\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ($n \geq 2$), 此时

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n - u_n^2}{1 + u_n} > 0.$$

故 $\{u_n\}$ 单调有界, $\{u_n\}$ 的极限存在 (且大于 0).

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ ($a > 0$). 在数列递推式等号两侧取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 得到关于 a 的方程, 解得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

习题 1.2.2 (ϵ - δ 定义法). 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = a$.

证明. 任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{即} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

又, 当 $n > N$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n a_i \right), \quad (1)$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N a_i &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n (a - \varepsilon) &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n a_i < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n (a + \varepsilon), \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n (a \pm \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - N}{n} (a \pm \varepsilon) = a \pm \varepsilon$$

所以, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$a - \varepsilon < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n a_i < a + \varepsilon, \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n a_i = a.$$

所以 (1) 式可化为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N a_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n a_i = 0 + a = a. \quad \square$$

习题 1.2.3 (ϵ - δ 定义法). 已知数列 $\{u_n\}$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell < 1$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

习题 1.2.4 (算术-几何平均数). 设 $0 \leq a < b$, $x_1 = a$, $y_1 = b$, 且 $x_n = (x_{n-1} + y_{n-1})/2$, $y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$. 试证数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的极限存在且相等.

解. 由题, $0 \leq a < y_2 < x_2 < b$, 归纳可知 $a < y_n < x_n < b$, 于是 $y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}} > \sqrt{y_{n-1}y_{n-1}} = y_{n-1}$. 所以 $\{y_n\}$ 递增且有界, 存在 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. 这样, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}^2 / y_n = y$, 证毕.

注意: 这样生成的 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的共同极限, 称为**算术-几何平均数 (Arithmetic-geometric mean)**, 可记作 $M(a, b)$. 对于一般的 a 和 b , $M(a, b)$ 的值与第一类完全椭圆积分有关, 故没有初等表示.

Proof. 略 □

习题 1.2.5 (放缩法). 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n + 1/i}$.

解. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n+1/i} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1/n}}{n(2^{1/n}-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{(2^{1/n}-1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} = \frac{1}{\ln 2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n+1/i} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\ln 2}.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n+1/i} = \frac{1}{\ln 2}.$$

习题 1.2.6. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 \in (0, \pi)$, $x_n = \sin x_{n-1}$. 求证: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \sim \sqrt{n}/3$.

习题 1.2.7 (归结原理). 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^2 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right].$$

解. 因为函数极限

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[e^2 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} \right] &\stackrel{t=1/x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^2 - (1+t)^{2/t}}{t} \quad (\text{分子为平方差形式}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (e + (1+t)^{1/t}) \frac{e - (1+t)^{1/t}}{t} \\ &= 2e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e - (1+t)^{1/t}}{t} \\ &\stackrel{0/0}{=} -2e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t - (1+t) \ln(1+t)}{t^2(1+t)} (1+t)^{1/t} \\ &= -2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t - (1+t) \ln(1+t)}{t^2(1+t)} \\ &\stackrel{0/0}{=} 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{3t^2 + 2t} \\ &\stackrel{0/0}{=} e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(t+1)(3t+1)} \\ &= e^2,\end{aligned}$$

由归结原理, 有数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^2 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[e^2 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} \right] = e^2.$$

习题 1.2.8 (级数收敛的积分判别法). 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k \sin(\frac{k}{n})}{n^2 + n + k}.$$

解. 因为

$$\frac{k \sin(\frac{k}{n})}{n^2 + n + k} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n})}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}},$$

根据夹逼定理, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n})}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n}), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n})}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n})}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n}). \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k \sin(\frac{k}{n})}{n^2 + n + k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n}) = \int_0^1 x \sin x \, dx = \sin 1 - \cos 1$$

[在定积分中取分割 $x_i = i/n$ ($i = 0, 1, \dots, n$)].

习题 1.2.9 (斯托尔兹-切萨罗定理).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln C_n^k.$$

解. 记 $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln C_n^k$, $b_n = n^2$. 因为 $\{b_n\}$ 严格递增且无上界, 连续应用斯托尔兹-切萨罗 (Stolz-Cesàro) 定理两次, 可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \ln(n!)}{2n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n[\ln(n+2) - \ln(n+1)]}{2} \\ &= 1/2, \end{aligned}$$

其中

$$a_n = \ln \left(\frac{(n!)^n}{\prod_{k=1}^n (k!)^2} \right), \quad a_{n+1} - a_n = \ln \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.$$

注: 斯托尔兹-切萨罗定理可视为洛必达法则的离散形式, 两者的证明与联系见[这个链接](#).

1.3 函数的极限

习题 1.3.1 (换元, 分子有理化). 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

解.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 + \sqrt{t^2 + t}} - t) && (\text{令 } t = \sqrt{x} \rightarrow +\infty) \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2 + t}}{\sqrt{t^2 + \sqrt{t^2 + t}} + t} && (\text{分子有理化}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + 1/t}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}} + 1}} && (\text{上下同除 } t) \\
 &= 1/2.
 \end{aligned}$$

1.3.1 常用极限及其推导

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2(\frac{x}{2})^2} = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^x = e$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln((1+x)^{1/x}) = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}) = \ln e = 1$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{t=e^x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} = 1$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(x+1)} - 1}{a \ln(x+1)} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

注:

1. 极限 (1) 由夹逼定理求得. 极限 (4) 的存在由单调有界性保证, 这也是 e 的定义式.
2. 由函数的连续性, 若以 $u = u(x)$ 代替 x , 上述每一极限在 $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ 时仍然成立.

习题 1.3.2 (利用常用极限). 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - 2)$$

解.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1/x} \left(\frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \right)^2 = 1.$$

习题 1.3.3. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin(3 \sin x)}{3^x + 2^x - 6^x - 1}.$$

解. 先通过分子分母同乘、分拆成多个式子相乘, 加上再减去同一项, 分拆成多个式子相加等方法, 将原式尽可能化为以基本极限表示的四则运算形式. 然后利用已知极限四则运算的性质, 逐步得到要求极限的值.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin(3 \sin x)}{3 \sin x} \cdot \frac{3 \sin x}{3x} \cdot \frac{3x^2}{(3^x - 1) + (2^x - 1) - (6^x - 1)} \right) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{x^2} + \frac{2^x - 1}{x^2} - \frac{6^x - 1}{x^2} \right)^{-1} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \left((\ln 3)^2 + (\ln 2)^2 - (\ln 6)^2 \right)^{-1} \\ &= -\frac{3}{\ln 3 \cdot \ln 2}, \end{aligned}$$

其中

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x / x$ 可由基本极限 1 推出,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1) / x$ ($a > 0$) 的计算, 依赖于极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) / x^2 = 1/2$:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{e^{x/2} - 1}{x/2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^{x/2} - 1}{x/2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} I.$$

习题 1.3.4 (多种方法的展示). 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right).$$

解.

法 1: (洛必达法则)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2) \sin 2x - x \cos 2x - x}{x^2 \sin 2x - x \cos x + x} \\ &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \sin 2x + (1 + 2x^2) \sin 2x^2 - 1}{4x \cos 2x + (2x^2 - 1) \cos 2x + 1} \\ &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2x^2) \sin 2x + 6x \cos 2x}{(3 - 4x^2) \sin 2x + 6x \cos 2x} \\ &= 2/3. \end{aligned}$$

法 2: (泰勒展开)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - x^3/6 + o(x^4)]^2 - x^2 [1 - x^2/2 + o(x^4)]^2}{x^2 [x + o(x^2)]^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2 - x^4/3 + o(x^4)] - x^2 [1 - x^4 + o(x^3)]}{x^4 + o(x^5)} \\
 &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^5)} \\
 &= 2/3.
 \end{aligned}$$

法 3: (常用极限) 此处提供一种仅使用基本极限的解法, 虽显麻烦, 然体现了一些有用的技巧:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x + x \cos x}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \right) \cdot \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \right] \\
 &= 1 \cdot (1 + 1) \cdot (-1/6 + 1/2) \\
 &= 2/3.
 \end{aligned}$$

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 1)/x^3$ 的计算见习题 1.3.6.

习题 1.3.5 (常用极限). 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

解. 因为

$$\frac{e^{2x} - 1 - 2x}{2x^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^x - 1 - x}{x^2},$$

等式两侧取 $x \rightarrow 0$ 时的极限, 并在左侧令 $t = 2x$, 有

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} I,$$

所以 $I = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x)/x^2 = 1/2$.

据此, 可以计算以下极限:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(1+1/t)^t}{e} \right]^t &\stackrel{x=1/t}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)}{e^x} \right]^{1/x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \frac{e^x - 1 - x}{e^x} \right]^{1/x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(-\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \cdot \frac{1}{e^x} \right) \\&= e^{-1/2}.\end{aligned}$$

习题 1.3.6 (常用极限). 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

解. 因为 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, 于是

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(3x)^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 3 \sin x + 4 \sin^3 x}{(3x)^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{9} \frac{x - \sin x}{x^3} + \frac{4}{27} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \right] \\&= \frac{1}{9} I + \frac{4}{27},\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x)/x^3 = I = 1/6$.

习题 1.3.7 $((1+1/x)^x$ 型). 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x \right)^{1/x}.$$

解. 记实数 a_1, a_2, \dots, a_n 的幂平均为 $M_p(n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}$ ($p \neq 0$), 几何平均为 $G(n) = (\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n}$, 又记 $M'_p(n) = (M_p(n))^p - 1$. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{M'_x(n)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x - 1}{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_i^x - 1}{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i,$$

可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} M_x(n) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(M'_x(n) + 1)^{1/M'_x(n)} \right]^{M'_x(n)/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(M'_x(n)/x) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i \right) = G(n).\end{aligned}$$

实例:

• 若取 $n = 2, t = 1/x$, 即为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[t]{a} + \sqrt[t]{b}}{2} \right)^t = \sqrt{ab}$;

• 单取 $n = 3$ 时, 为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} = \sqrt[3]{abc}$.

习题 1.3.8 (函数有界性). 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x}$.

解. 因为 $\left| \arctan \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2}, (x \rightarrow 0)$, 即 $\arctan \frac{1}{x}$ 有界, 所以原式 $= 0$.

习题 1.3.9 (含参数). 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$.

解. i) $n = m$, 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$.

ii) $n \neq m$, 不妨记 $n > m$:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\sum_{i=1}^n C_n^i m^i x^i - \sum_{i=1}^m C_m^i n^i x^i \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\sum_{i=1}^m (C_n^i - C_m^i) (m^i - n^i) x^i + \sum_{i=m+1}^n C_n^i m^i x^i \right] \\ &= \begin{cases} C_n^2 & m = 1, \\ (C_n^2 - C_m^2)(m^2 - n^2) & m \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

综上,

$$\text{原式} = \begin{cases} -C_m^2 & m > n = 1, \\ C_n^2 & n > m = 1, \\ 0 & n = m, \\ (C_n^2 - C_m^2)(m^2 - n^2) & n \neq m \text{ 且 } \min(n, m) \geq 2. \end{cases}$$

习题 1.3.10. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[3^x (3^{-x} + 1) \right]}{\ln \left[2^x (2^{-x} + 1) \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x + \ln(3^{-x} + 1)}{\ln 2^x + \ln(2^{-x} + 1)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

习题 1.3.11. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$$

解.

法 1: (洛必达法则)

$$\text{原式} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1-t+\frac{t^2}{2}e^t) - \sqrt{1+t^6}}{t^3} \stackrel{0}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^t}{6} - \frac{5t^3}{6} \right) = \frac{1}{6}.$$

法 2: (泰勒公式) 因为

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\ \sqrt{1+t^6} &= 1 + \frac{t^6}{2} + o(t^6) = 1 + o(t^3), \end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{t=1/x}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1-t+t^2e^t/2) - \sqrt{1+t^6}}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \left[0 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \right] = \frac{1}{6}.$$

习题 1.3.12. 设 $f(x) = \sin ax/(x(x-1))$ ($a \in (0, 2\pi)$ 为常数), 试补充定义 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的值, 并确定 a 的值, 使函数在闭区间 $[0, 1]$ 上连续.

解. 1. $f(0^-) = f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0} a/(x-1) \cdot \sin(ax)/(ax) = -a$, 所以 $x=0$ 是可去间断点.

2. 先证明 $a = \pi$. 若非, 则 $\lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = \infty$, 即 $x=1$ 处的左极限不存在, 这与 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续矛盾.

3. 此时, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\pi \lim_{x \rightarrow 1^-} 1/x \cdot \sin \pi(x-1)/(\pi(x-1)) = -\pi$.

4. 综上, 取 $a = \pi$, 定义 $f(0) = f(1) = -\pi$, 可满足 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续的条件.

注: 以上是思考的顺序. 严谨解答, 应该先写第四步, 然后证明在此条件下的 $f(x)$ 满足题设条件.

习题 1.3.13. 求函数

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$$

的间断点.

解. 1. 若 $x < 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tx} = 0$, 此时 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x/1 = x$.

2. 若 $x > 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} = 0$, 此时 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (xe^{-tx} + 1)/(e^{-tx} + 1) = 1$.

3. 若 $x = 0$, 则 $e^{tx} \equiv e^0$, 此时 $f(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x + e^0)/(1 + e^0) = \frac{1}{2}$. 由前可得 $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$, $f(0^-) \neq f(0^+)$.

4. 综上, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上连续, $x=0$ 为其跳跃间断点.

习题 1.3.14. 设函数 $f(x)$ 对一切 x_1, x_2 适合等式

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2),$$

且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $f(0) \neq 0$. 试证明 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

解. 取 $x_1 = x_2 = 0$, 则有 $f(0) = f^2(0)$, $f(0)(f(0) - 1) = 0$. 又 $f(0) \neq 0$, 所以 $f(0) = 1$. 由题知, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

对于任意 $x = x_0$, 试作函数在这一点极限:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0)f(\Delta x) \\ &= f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) \quad (\text{注意到 } f(x_0) \text{ 与 } \Delta x \text{ 无关}) \\ &= f(x_0) \quad (\text{利用 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1) \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在任一点处极限存在且连续 (注意到 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$).

习题 1.3.15. 判断函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx} + 2}{e^{nx} + 1}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解. 当 $x < 0$ 时, $0 < e^x < 1$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx} + 2}{e^{nx} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^n + 2}{(e^x)^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0 + 2}{0 + 1} = 2.$$

当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx} + 2}{e^{nx} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2/(e^x)^n}{1 + 1/(e^x)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

所以 $f(0-) = 2$, $f(0+) = 1$, $x = 0$ 是跳跃间断点.

习题 1.3.16. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$$

解. 记 $u = \frac{2}{\pi} \arctan x - 1$, 则有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \arctan x - 1}{1/x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(1+x^2)}{-1/x^2} = -\frac{2}{\pi}.$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+u)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(1+u)^{\frac{1}{u}} \right]^{x \cdot u} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(1+u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot u} \\ &= e^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

1.4 函数的连续性、可导性与微分中值定理

习题 1.4.1. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{1/x} & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 a 和 b 为常数. 试确定 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在其定义域连续.

解. 易得, $f(x)$ 在 $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ 上连续. 假设 $f(x)$ 在 $x = 0, 1$ 处也连续, 以下我们将得到一个必要条件. 据连续性, $f(0^-) = f(0)$, $f(1^+) = f(1)$. 由 $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$, $f(0) = (ax + b)|_{x=0} = b$, 得到 $b = 0$. 再由 $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{1/x} = e$, $f(1) = (ax + b)|_{x=1} = a + b$, 得到 $a + b = e$. 据此可解得 $a = e$, $b = 0$.

完整的解答仍需说明 $a = e$, $b = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = 0, 1$ 处连续的充分条件, 此处从略.

注: 从解题角度, 只要求得满足条件的一个充分条件即可, 对此题而言, 可以先提出 a, b 的值, 再说明函数的连续性. 然而此类题大多有且仅有一组充要条件, 故我们从必要条件入手的思路总是正确的.

习题 1.4.2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶导数存在且连续, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3.$$

解. 将 $f(x)$ 在点 $c = (a+b)/2$ 处展开为带拉格朗日余项的二阶泰勒公式, 得到

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!}f''(c) + \frac{(x-c)^3}{3!}f'''(\theta), \quad (2)$$

θ 介于 x 和 c 之间. 分别取 $x = a, b$ 代入 (2), 然后两式相减, 注意到 $a - c = -(b - c) = (a - b)/2$, 有

$$f(a) - f(b) = (a-b)f'(c) + \frac{(a-b)^3}{48}(f'''(\eta) + f'''(\zeta)),$$

其中 $a < \eta < c < \zeta < b$. 再由 f''' 的连续性, 可知存在 $\xi \in (\eta, \zeta)$ 使得

$$2f'''(\xi) = f'''(\eta) + f'''(\zeta).$$

于是, 此 ξ 满足要证明的命题, 证毕.

习题 1.4.3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 求证: 存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$, $\xi \neq \eta$ 满足 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.

Proof. 记 $g(x) = f^2(x) - x^2$, 满足 $g(0) = g(1) = 0$. 由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $g'(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi) - 2\xi = 0$. 于是 $f(\xi)f'(\xi) = \xi > 0$, $f(\xi) \neq 0$, 所以 $f'(\xi) = \xi/f(\xi)$.

在区间 $[0, \xi]$ 内对 $f(x)$ 使用中值定理, 可知存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) = f(\xi)/\xi$. 所以 $0 < \eta < \xi < 1$ 满足等式 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$, 证毕. \square

习题 1.4.4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 求证:

1. 存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$, $\xi \neq \eta$ 满足

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b, \quad (3)$$

其中 a, b 是任意正实数.

2. 对 $n (n \geq 2)$ 个任意正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 在 $(0, 1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 满足

$$\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Proof. 1. 因为 f 在 $[0, 1]$ 连续, 故存在 $c \in (0, 1)$ 满足 $f(c) = \frac{a}{a+b}$. 在区间 $[0, c]$ 和 $[c, 1]$ 内分别对 f 使用中值定理, 可知存在 $\xi \in (0, c)$, $\eta \in (c, 1)$ 使得

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(\xi) \quad \text{与} \quad \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(\eta).$$

这样的 ξ, η 也满足 (3), 原命题得证.

2. 记 $S = \sum_{k=1}^n \alpha_k$. 因为 f 在 $[0, 1]$ 连续, 故存在 $c_1 \in (0, 1)$ 满足 $f(c_1) = \alpha_1/S$. 当 i 分别取 $2, 3, \dots, n$ 时, 依次定义 $c_i \in (c_{i-1}, 1)$ 使得 $f(c_i) = f(c_{i-1}) + \alpha_i/S$. (这里的依次保证了之后的 β_i 是互不相同的.)

补记 $c_0 = 0$. 在每一区间 $[c_{i-1}, c_i]$ 内对 f 使用中值定理, 可知存在 $\beta_i \in (c_i, c_{i-1})$ 使得

$$\frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{c_i - c_{i-1}} = f'(\beta_i) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

注意到 β_i 严格递增, 我们有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i/S}{f'(\beta_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{f'(\beta_i)} = \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i-1}) = c_n - c_0 = 1,$$

原命题得证. □

1.5 原函数与不定积分

习题 1.5.1. 计算

$$\int 3^x \cdot e^x dx.$$

解.

法 1: 因为 $a^x = e^{x \ln a}$, 所以 $\int 3^x \cdot e^x dx = \int e^{x(1+\ln 3)} dx = \frac{e^{x(1+\ln 3)}}{1+\ln 3} = \frac{3^x \cdot e^x}{1+\ln 3}$.

法 2: 记 $I = \int 3^x \cdot e^x dx = \int 3^x de^x = 3^x \cdot e^x - \ln 3 \cdot I$ (分部积分), 所以 $I = \frac{3^x \cdot e^x}{1+\ln 3}$.

习题 1.5.2 (换元, 分部积分).

$$\int \arctan \sqrt{x} dx$$

解.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int 2t \arctan t dt \\ &= \int \arctan t dt^2 \\ &= t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= (1+t^2) \arctan t - t \\ &= (1+x) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

习题 1.5.3. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x(x^8-3)}$.

解. 令 $t = x^8 - 3$, 则 $dt = 8x^7 dx$. 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{xt} \cdot \frac{dt}{8x^7} = \int \frac{dt}{8t(t+3)} = \frac{1}{24} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\ &= \frac{1}{24} \ln \left| \frac{t}{t+3} \right| + C = \frac{1}{24} \ln |1 - 3 \cdot x^{-8}| + C. \end{aligned}$$

习题 1.5.4. 计算不定积分

$$\int \sec^3 \theta d\theta.$$

解. 因为 $(\tan \theta)' = \sec^2 \theta$, $(\sec \theta)' = \tan \theta \sec \theta$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^3 \theta d\theta \\ &= \int \sec \theta d \tan \theta \\ &= \sec \theta \tan \theta - \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\ &= \sec \theta \tan \theta - \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta \\ &= \sec \theta \tan \theta + \int \sec \theta d\theta - I, \end{aligned}$$

即

$$I = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta.$$

一般地, 对 $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 3$, 记 $I_n = \int \sec^n \theta d\theta$, 可得

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^{n-2} \theta d \tan \theta \\ &= \sec^{n-2} \theta \tan \theta - (n-2) \int \tan^2 \theta \sec^{n-2} \theta d\theta \\ &= \sec^{n-2} \theta \tan \theta - (n-2) \int (\sec^2 \theta - 1) \sec^{n-2} \theta d\theta \\ &= \sec^{n-2} \theta \tan \theta - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}. \end{aligned}$$

于是

$$I_n = \frac{\sec^{n-2} \theta \tan \theta}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

即

$$\int \sec^n \theta d\theta = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} \theta \tan \theta + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} \theta d\theta,$$

习题 1.5.5. 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a) \cos(x+b)}.$$

解. 由 $a-b = (x+a) - (x+b)$ 和 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, 将被积函数乘以 $\sec(a-b) \cdot \cos(a-b) = 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sec(a-b) \int \frac{\cos[(x+a) - (x+b)]}{\sin(x+a) \cos(x+b)} dx \\ &= \sec(a-b) \int \left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right] dx \\ &= \sec(a-b) \left[\ln(\sin(x+a)) - \ln(\cos(x+b)) \right] + C. \end{aligned}$$

习题 1.5.6 (构造变上限积分). 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $0 \leq f'(x) \leq 1$, $f(0) = 0$. 求证:

$$\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

解. 由

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \int_0^x f'(t) dt,$$

可得 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 递增且 $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 dx \leq 1$. 构造函数

$$F(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt \quad (0 \leq x \leq 1),$$

于是有

$$F'(x) = f(x) \left[2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right].$$

记 $F_1(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$. 因为 $F_1(x)$ 在 $[0, 1]$ 递增且 $F_1(0) = 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 也递增. 结合 $F(0) = 0$, 习题得证.

习题 1.5.7 (构造变上限积分). 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上恒正且单调递减, 求证:

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

解. 构造函数

$$F(x) = \int_0^x f^2(t) dt \cdot \int_0^x t f(t) dt - \int_0^x t f^2(t) dt \cdot \int_0^x f(t) dt. \quad (0 \leq x \leq 1).$$

由

$$F'(x) = f(x) \int_0^x f(t)(x-t)[f(t) - f(x)] dt \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

和 $F(0) = 0$ 可知, $F(1) \geq 0$, 习题得证.

1.6 定积分

习题 1.6.1. 计算定积分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

解. 一般地, 有以下结论:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

这是因为

$$I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx \stackrel{u=\pi-x}{=} - \int_\pi^0 (\pi-u) f(\sin u) du = \pi \int_0^\pi f(\sin u) du - I,$$

所以

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

应用上面的结论, 我们有

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} \arctan(\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

1.7 级数

习题 1.7.1. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$$

收敛, 并计算级数的和.

解. 易证级数绝对收敛, 故其收敛. 由

$$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n},$$

(假设) 我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2,$$

那么级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \frac{(-1)^n}{2n-1} - \frac{(-1)^n}{n} \right) = \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

习题 1.7.2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和函数.

解. 记 $S(x) = 1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$), 则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \\ xS'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \\ (xS'(x))' &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}. \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad |x| < 1.$$

2 线性代数

2.1 行列式

习题 2.1.1. 已知数 18055, 83282, 61042, 48576, 57776 都可被 23 整除, 证明: 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

也可被 23 整除.

证明. 令 $C_5 = \sum_{i=1}^5 10^{5-i} \cdot C_i$, 则有 $23 \mid a_{5j}$, ($j = 1, 2, 3, 4, 5$).

习题 2.1.2. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_i=C_i-iC_1 \\ i=2,3,4}]{\substack{R_1=R_1-2R_2 \\ R_2=R_2-R_3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1-2x & 2-3x & 3-4x \\ x & -x & 1-3x & 2-4x \\ x & -x & -2x & 1-4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2x & 2-3x & 3-4x \\ -x & 1-3x & 2-4x \\ -x & -2x & 1-4x \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[\substack{R_2=R_2-R_3}]{R_1=R_1-2R_2} \begin{vmatrix} 1 & 3x & -1+4x \\ 0 & 1-x & 1 \\ -x & -2x & 1-4x \end{vmatrix} = -4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

习题 2.1.3 (14-15 秋冬). 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解. 这是习题 2.1.2 的一般化:

$$D \xrightarrow[\substack{R_i=R_i-R_{i+1} \\ i=1,2,\dots,n-1}]{\substack{C_i=C_i-C_{i-1} \\ i=n,n-1,\dots,2}} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[\substack{C_i=C_i-C_{i-1} \\ i=n,n-1,\dots,2}]{\substack{R_i=R_i-R_{i+1} \\ i=1,2,\dots,n-1}} \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{对第一列展开}} (1-x)^n + (-1)^{n+1}x^n.$$

习题 2.1.4. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

解. 凑成上三角行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 = C_1 - \sum_{i=1}^n (C_{i+1}/a_i)} \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^n a_i,$$

其中 $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^n (1/a_i)$.

2.2 矩阵的基本运算, 可逆矩阵

习题 2.2.1. 设 $A, B, A+B$ 均为 n 阶可逆矩阵, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 为可逆矩阵, 并写出它的逆。

解. 先对 $A^{-1} + B^{-1}$ 左乘 A , 右乘 B , 得到

$$A(A^{-1} + B^{-1})B = B + A = A + B.$$

两侧同时取逆, 由 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, 我们有

$$B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

由此可知 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 且其逆矩阵为 $B(A + B)^{-1}A$.

习题 2.2.2. 已知 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 是可逆矩阵. 求其伴随矩阵对应行列式的值 $|A^*|$.

解. 因为 $A^{-1} = |A|^{-1}A^*$ (逆矩阵的一种定义), 我们有

$$|A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n \cdot |A^{-1}| = |A|^{n-1}.$$

(注意到 $|A|$ 是一个常数; 当 λ 是常数时, $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{n \times n}, |\lambda A| = \lambda^n |A|$.)

习题 2.2.3. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1 \ 2 \ -1)^T$, $\alpha_2 = (0 \ -1 \ 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值,

(2) 求 A 及 $|A - \frac{3}{2}E|^6$.

解. (1) 0 是 A 的三重特征根.

(2) 由 A 是三阶实对称矩阵, 易得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

记

$$B = A - \frac{3}{2}E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = Q\Lambda Q^{-1},$$

其中

$$\Lambda = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ 是由 } B \text{ 的特征值构成的对角矩阵,}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 由 } B \text{ 的特征根对应的特征向量 (行向量) 构成,}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\left| A - \frac{3}{2}E \right|^6 = |B|^6 = |Q\Lambda Q^{-1}|^6 = |Q\Lambda^6 Q^{-1}| = |Q| \cdot |\Lambda^6| \cdot |Q^{-1}|.$$

(后面自己算吧)

2.3 线性方程组的解, 解空间

习题 2.3.1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是某欧氏空间中不含零向量的正交向量组, 非零向量 β 是它们的线性组合。试求 $\sum_{i=1}^s \cos^2 \langle \beta, \alpha_i \rangle$, 这里 $\langle \beta, \alpha_i \rangle$ 表示向量 β 与向量 α_i 的夹角, $i = 1, 2, \dots, s$.

解. 记 $\beta = \sum_{i=1}^s k_i \alpha_i$, 其中 $\sum_{i=1}^s k_i^2 > 0$, $\|\alpha_i\| > 0$, 则有

$$\|\beta\|^2 = \sum_{i=1}^s k_i^2 \|\alpha_i\|^2 \quad \text{及} \quad \cos \langle \beta, \alpha_i \rangle = \frac{\beta \cdot \alpha_i}{\|\beta\| \cdot \|\alpha_i\|} = \frac{k_i \|\alpha_i\|^2}{\|\beta\| \cdot \|\alpha_i\|} = \frac{k_i \|\alpha_i\|}{\|\beta\|},$$

于是

$$\sum_{i=1}^s \cos^2 \langle \beta, \alpha_i \rangle = \sum_{i=1}^s \frac{k_i^2 \|\alpha_i\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\beta\|^2} = 1.$$

习题 2.3.2. 定义矩阵序列 $\{(b_y^k)_{m \times n}\}_{k \geq 1}$ 的极限为: $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_y^k)_{m \times n} = (\lim_{k \rightarrow \infty} (b_y^k))_{m \times n}$. 设 2 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

其中 $0 < a+b < 1$, 求 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$.

解. 记

$$B = A - E = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix},$$

易得 $B^2 = -(a+b)B$. 所以

$$A^k = (E+B)^k = E + \left(\sum_{i=1}^k C_k^i (-1)^{i-1} (a+b)^{i-1} \right) B = E - \frac{(1-a-b)^k - 1}{a+b} B,$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k C_k^i (-1)^{i-1} (a+b)^{i-1} &= -\frac{1}{a+b} \sum_{i=1}^k C_k^i (-1)^i (a+b)^i \\ &= -\frac{1}{a+b} \left[\sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i (a+b)^i - 1 \right] \\ &= -\frac{(1-a-b)^k - 1}{a+b}. \end{aligned}$$

因为 $0 < a+b < 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (1-a-b)^k = 0$, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = E + \frac{1}{a+b} B = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix}.$$

3 概率论与数理统计

习题 3.0.1. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 根据定义, 其概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. 特别地, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时 (等价地, 我们可以取 $Y = (X - \mu)/\sigma$), 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

这个结论可以用如下的过程来说明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \right)^{1/2} \\ &= \left(-2\pi \cdot \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^{+\infty} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

习题 3.0.2 (12-13 春夏). 设 (X, Y) 服从二元正态分布, $X \sim N(5, 3^2), Y \sim N(0, 2^2), \rho_{XY}$ 是 X 与 Y 的相关系数.

1. 若 $\rho_{XY} = 0$, 求 $P\{X > 2Y\}$, 并写出 $\left(\frac{2X - 3Y - 10}{2X + 3Y - 10}\right)^2$ 满足的分布 (含参数);
2. 若 $X + Y$ 与 $X - 3Y$ 相互独立, 求 ρ_{XY} ;
3. 若对 Y 进行 n 次独立重复观测, 结果是 Y_1, Y_2, \dots, Y_n , 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 求 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{Y_i}$ 依概率收敛到的极限值;
4. 若对 Y 进行 n 次独立重复观测, 结果是 Y_1, Y_2, \dots, Y_n , 则当 $n = 100$ 时, 求 Y 的观测结果中大于 2 出现的次数不超过 22 次的概率近似值.

解. 3. 记 $Z = \exp Y$ 为关于 Y 的统计量. 则

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(y) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^y}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{8}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-4)^2}{8} + 2\right) dy \\ &= e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-4)^2}{8}\right) dy \\ &= e^2, \end{aligned}$$

其中 $f(y)$ 是 Y 的概率密度函数. 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{Y_i} \xrightarrow{P} E(e^Y) = e^2.$$

一般地, 若 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \exp Y$, 则称 Z 满足对数正态分布, $E(Z) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$.

4 常微分方程

习题 4.0.1. 求解微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = x. \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = x. \quad (5)$$

解. 由 (4), $\frac{d^4 x}{dt^4} = \frac{d^2 y}{dt^2}$, 代入 (5) 得

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - x = 0. \quad (6)$$

在 (6) 中, 令 $D(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0$, 解得 $\lambda = \pm 1, \pm i$. 所以 (6) 的通解为

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \quad (c_k \text{ 为常数}, k = 1, 2, 3, 4).$$

将通解代入 (4), 得

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t.$$

所以, 原方程组的解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos t + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t.$$

习题 4.0.2. (常微分第一章习题 55) 求解常微分方程

$$y'' + \sqrt{1 + (y')^2} = 0. \quad (7)$$

解. 原方程两边对 x 求导, 并用 (7) 中的关系进行代换, 得到方程 $y''' - y' = 0$, 其通解为

$$y = c_1^* e^x + c_2^* e^{-x} + c \quad (c_1^*, c_2^*, c \text{ 为常数}).$$

将通解代入 (7), 得 $c_1^* c_2^* = 1/4$ 且 $c_1^* < 0$ (注意到 $c_1^* e^x + c_2^* e^{-x} = y'' = -\sqrt{1 + (y')^2} \leq 0$). 所以

$$y = \frac{c_1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2c_1} e^x + c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为常数, 且 } c_1 < 0)$$

是方程 (7) 的解.

另解: 令 $p(y) = y'$, 则 $y'' = pp'$. 代入 (7), 得 $pp' + \sqrt{1+p^2} = 0$, 此为可分离变量方程, 整理、积分得

$$y = \sqrt{1+p^2} + c \quad (c \text{ 为常数}). \quad (8)$$

由 (7) 可得 $y'' = \sqrt{1+p^2}$, 代入 (8) 得到 $y'' - y = -c$, 其通解为

$$y = c_1^* e^x + c_2^* e^{-x} + c \quad (c_1^*, c_2^*, c \text{ 为常数}). \quad (9)$$

(后续与第一种解法类似)

习题 4.0.3. (常微分第二章习题 56) 已知常微分方程

$$(1-x^2)y''' - xy'' + y' = 0 \quad (10)$$

的一个解 $y_1 = x^2$, 求该方程的通解.

解. 令 $z = y'$, 则 $z_1 = 2x$ 是方程

$$(1-x^2)z'' - xz' + z = 0 \quad (11)$$

的一个解. 设方程 (11) 的通解为 $z = u \cdot z_1$, 即 $z = 2x \cdot u(x)$.

计算 z' , z'' 并代入 (11), 得 $x(1-x^2)u'' + (2-3x^2)u' = 0$, 此为可分离变量方程. 整理、积分, 得

$$u' = \frac{c_1^*}{x^2 \sqrt{|x^2-1|}} \quad (c_1^* \text{ 为常数}). \quad (12)$$

i) 若 $0 < |x| < 1$, 则

$$u = \int \frac{c_1^*}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{c_1^*}{x} \sqrt{1-x^2} + c_2^* \quad (c_1^*, c_2^* \text{ 为常数}).$$

故有 $z = 2x \cdot u = -2c_1^* \sqrt{1-x^2} + 2c_2^* x$, 于是

$$y = \int z dx = -c_1^* (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c_2^* x^2 + c_3^* \quad (c_1^*, c_2^*, c_3^* \text{ 为常数}).$$

ii) 若 $|x| > 1$, 则

$$u = \int \frac{c_1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx = \frac{c_1}{x} \sqrt{x^2-1} + c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为常数}).$$

故有 $z = 2x \cdot u = 2c_1 \sqrt{x^2-1} + 2c_2 x$, 于是

$$y = \int z dx = c_1 (\arcsin x + x\sqrt{x^2-1}) + c_2 x^2 + c_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ 为常数}).$$

iii) 综上, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时,

$$y = c_1 \left(\arcsin x + x\sqrt{x^2 - 1} \right) + c_2 x^2 + c_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ 为常数})$$

是方程 (10) 的通解.

注: 题中的积分有一定难度.

5 偏微分方程

5.1 边界条件

5.1.1 细杆的热传导方程

第 I 类边界条件 杆在端点处保持与介质一样的温度.

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &\equiv u(0, t) = f_1(t) \\ u|_{x=\ell} &\equiv u(\ell, t) = f_2(t). \end{aligned}$$

第 II 类边界条件 杆在 $x = \ell$ 处“绝热”, 即该端点的热流强度为零.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0.$$

一般地, 单位时间内流经端点界面的热量可表示为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=\ell} = g(t).$$

第 III 类边界条件 杆的一端处于“自由冷却”状态.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \mu u \right) \Big|_{x=\ell} = f(t).$$

5.1.2 弦的振动方程

- 一端固定:

$$u|_{x=\ell} = 0.$$

- 一端自由:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0.$$

- 一端与弹性支座相连:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + ku \right) \Big|_{x=\ell} = 0.$$

5.2 初始条件

5.2.1 波动方程

初始位移

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

初始速度

$$u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

5.2.2 热传导方程

初始时刻区域内的温度分布:

一维情况

$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

三维情况

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

5.3 本征值问题

若函数 $X(x)$ 满足 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ($0 < x < \ell$) 和以下边界条件之一,

i) $X(0) = 0, X(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin \frac{k\pi}{\ell}x. \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ii) $X'(0) = 0, X(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin \frac{(2k-1)\pi}{2\ell}x. \quad (k = 1, 2, \dots)$$

iii) $X(0) = 0, X'(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin \frac{(2k-1)\pi}{2\ell}x. \quad (k = 1, 2, \dots)$$

iv) $X'(0) = 0, X'(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \cos \frac{k\pi}{\ell}x. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

v) $X(0) = 0, X'(\ell) + hX(\ell) = 0$ ($h > 0$ 为常数), 则

$$\lambda_k = \left(\frac{r_k}{\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin \frac{r_k}{\ell}x, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

其中 r_k 是 $\tan r = -r/lh$ 的第 k 个正根.

5.4 补充习题

习题 5.4.1 (141223 补充练习题). 求解下列方程:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 1 \\ u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = \cos^2 \theta \\ u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \end{cases}$$

解. 方法一: 用叠加原理拆成两组方程, 一组方程非齐次而两对边值条件都齐次, 一组的方程齐次而仅有一对边值条件齐次.

由叠加原理, $u(r, \theta) = u_I(r, \theta) + u_{II}(r, \theta)$, 其中 $u_I(r, \theta)$ 与 $u_{II}(r, \theta)$ 分别满足

$$\text{I)} \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = \cos^2 \theta \\ u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 1 \\ u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 0 \\ u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \end{cases}$$

对 I), 记 $u_I(r, \theta) = R(r)H(\theta)$, 则有

$$-\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = \frac{H''}{H} \triangleq -\lambda.$$

于是有

$$H(\theta) \text{ 满足 } \begin{cases} H''(\theta) + \lambda H(\theta) = 0 \\ H(\theta) = H(\theta + 2\pi), \end{cases} \quad R(r) \text{ 满足 } r^2 R''(r) + rR' - \lambda r = 0.$$

对 $H(\theta)$, 可解得

$$\lambda_k = k^2, \quad H_k(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

此时, $R(r)$ 满足 $r^2 R''(r) + rR' - k^2 r = 0$, 为欧拉方程形式, 解得

$$\begin{aligned} R_0(r) &= c_0 + d_0 \ln r, \\ R_k(r) &= c_k r^k + d_k r^{-k}. \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

所以

$$u_I(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(A_k r^k + B_k r^{-k}) \cos k\theta + (C_k r^k + D_k r^{-k}) \sin k\theta \right]. \quad (13)$$

代入边值条件, 得

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(A_k + B_k) \cos k\theta + (C_k + D_k) \sin k\theta] = 1,$$

$$A_0 + B_0 \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(A_k \cdot 2^k + B_k \cdot 2^{-k}) \cos k\theta + (C_k \cdot 2^k + D_k \cdot 2^{-k}) \sin k\theta] = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

将上面两个等式的右侧按本征函数展开并比较系数, 易得

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = 1 \\ A_0 + B_0 \ln 2 = \frac{1}{2} \\ A_k + B_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \\ 4A_2 + \frac{1}{4}B_2 = \frac{1}{2} \\ A_k \cdot 2^k + B_k \cdot 2^{-k} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}_+ \text{ 且 } k \neq 2) \\ C_k + D_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \\ C_k \cdot 2^k + D_k \cdot 2^{-k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad \text{解得} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = 1 \\ B_0 = -\frac{1}{2 \ln 2} \\ A_2 = \frac{2}{15} \\ B_2 = -\frac{2}{15} \\ A_k = B_k = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}_+ \text{ 且 } k \neq 2) \\ C_k = D_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{array} \right.$$

代入 (13), 得

$$\boxed{u_{\text{I}}(r, \theta) = 1 - \frac{\ln r}{2 \ln 2} + \frac{2}{15} (r^2 - r^{-2}) \cdot \cos 2\theta.} \quad (14)$$

对 II), 其方程对应的齐次形式, 有本征函数

$$H_k(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

设

$$u_{\text{II}}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} (C_k(r) \cos k\theta + D_k(r) \sin k\theta), \quad (15)$$

代入 I) 中的方程与 r 的边值条件, 即得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \left[C_k''(r) + \frac{1}{r} C_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} C_k(r) \right] \cos k\theta + \left[D_k''(r) + \frac{1}{r} D_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} D_k(r) \right] \sin k\theta \right\} &= 1, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} [C_k(1) \cos k\theta + D_k(1) \sin k\theta] &= 0, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} [C_k(2) \cos k\theta + D_k(2) \sin k\theta] &= 0. \end{aligned}$$

将上面三个等式的右侧按本征函数展开并比较系数, 易得

$$\begin{aligned} C_0''(r) + \frac{1}{r}C_0'(r) &= 1, & C_k(1) &= 0 & C_k(2) &= 0 \\ C_k''(r) + \frac{1}{r}C_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}C_k(r) &= 0, & C_k(1) &= 0 & C_k(2) &= 0 & (k = 1, 2, \dots) \\ D_k''(r) + \frac{1}{r}D_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}D_k(r) &= 0, & D_k(1) &= 0 & D_k(2) &= 0 & (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

它们都具有欧拉方程的形式. 解方程, 并代入初值条件, 分别得到

$$\begin{aligned} C_0(r) &= \frac{1}{4}r^2 - \frac{3 \ln r}{4 \ln 2} - \frac{1}{4}, \\ C_k(r) &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \\ D_k(r) &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

将这些解代入 (15), 得到

$$u_{\text{II}}(r, \theta) = \frac{1}{4}r^2 - \frac{3 \ln r}{4 \ln 2} - \frac{1}{4}.$$

最后, 由叠加原理, 原方程的解为

$$u(r, \theta) = \frac{r^2 + 3}{4} - \frac{5 \ln r}{4 \ln 2} + \frac{2(r^2 - r^{-2})}{15} \cos 2\theta.$$

方法二: 找一个满足两对边值条件的特殊函数, 将方程化为满足齐次边值条件的形式.

取一个满足两对边值条件的函数 $w(r, \theta) = (2 - r) + (r - 1) \cos^2 \theta$, 即

$$w(r, \theta) = -\frac{r-3}{2} + \frac{r-1}{2} \cos 2\theta. \quad (16)$$

令

$$v(r, \theta) = u(r, \theta) - w(r, \theta), \quad (17)$$

则 $v(r, \theta)$ 满足

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = \frac{3r-4}{2r^2} \cos 2\theta + \frac{1}{2r} + 1 \\ v|_{r=1} = 0, \quad v|_{r=2} = 0 \\ v(r, \theta) = v(r, \theta + 2\pi). \end{cases} \quad (18)$$

易得 (18) 中的方程有本征函数

$$H_k(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

设

$$v(r, \theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} (C_k(r) \cos k\theta + D_k(r) \sin k\theta), \quad (19)$$

代入 (18) 中的方程与 r 的边值条件, 即得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \left[C_k''(r) + \frac{1}{r} C_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} C_k(r) \right] \cos k\theta + \left[D_k''(r) + \frac{1}{r} D_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} D_k(r) \right] \sin k\theta \right\} \\ = \frac{3r-4}{2r^2} \cos 2\theta + \frac{1}{2r} + 1, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \left[C_k(1) \cos k\theta + D_k(1) \sin k\theta \right] = 0, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \left[C_k(2) \cos k\theta + D_k(2) \sin k\theta \right] = 0. \end{aligned}$$

将上面三个等式的右侧按本征函数展开并比较系数, 可得

$$\begin{aligned} C_0''(r) + \frac{1}{r} C_0'(r) &= \frac{1}{2r} + 1, & C_k(1) &= 0 & C_k(2) &= 0 \\ C_2''(r) + \frac{1}{r} C_2'(r) - \frac{4}{r^2} C_2(r) &= \frac{3r-4}{2r^2}, & C_2(1) &= 0 & C_2(2) &= 0 \\ C_k''(r) + \frac{1}{r} C_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} C_k(r) &= 0, & C_k(1) &= 0 & C_k(2) &= 0 \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k \neq 2) \\ D_k''(r) + \frac{1}{r} D_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} D_k(r) &= 0, & D_k(1) &= 0 & D_k(2) &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

它们都具有欧拉方程的形式. 解方程, 并代入初值条件, 分别得到

$$\begin{aligned} C_0(r) &= \frac{r^2 + 2r - 3}{4} - \frac{5 \ln r}{4 \ln 2}, \\ C_2(r) &= -\frac{r-1}{2} + \frac{2}{15} (r^2 - r^{-2}), \\ C_k(r) &= 0, \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k \neq 2) \\ D_k(r) &= 0. \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

将这些解代入 (19), 得到

$$v(r, \theta) = \frac{r^2 + 2r - 3}{4} - \frac{5 \ln r}{4 \ln 2} + \frac{2(r^2 - r^{-2})}{15} \cos 2\theta. \quad (20)$$

最后, 将 (16) 和 (20) 代入 (17), 得原方程的解为

$$u(r, \theta) = \frac{r^2 + 3}{4} - \frac{5 \ln r}{4 \ln 2} + \frac{2(r^2 - r^{-2})}{15} \cos 2\theta.$$

6 未归类

习题 6.0.1. 证明:

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad (21)$$

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n}. \quad (22)$$

注: 以上两式均收敛. 此结论称为 Sophomore's dream. 证明可参见[英文维基](#)和 [StackExchange Math 分版](#).

Proof. 此处只证明式 (21), 式 (22) 的证明与之类似。

首先, 将 x^{-x} 展开, 得到

$$x^{-x} = \exp(-x \ln x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

对上式两边做定积分, 有

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} dx,$$

右侧的级数一致收敛, 故求和与求积分可交换顺序, 于是有

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} dx.$$

计算上式右侧一般项 (当 $n = k$ 时) 的积分,

$$\int_0^1 \frac{(-1)^k x^k (\ln x)^k}{k!} dx =$$

□

习题 6.0.2. 考察 $f(x, y) = y^{-1} \sin y$ 在平面区域 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi/2, x \leq y \leq \pi/2\}$ 上的二重积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} dy dx.$$

解. 注意到积分区域

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi/2, x \leq y \leq \pi/2\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq x \leq y\},$$

可交换 I 中的积分次序, 得到

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^{\pi/2} \sin y dy = 1.$$

习题 6.0.3. 若有

$$\lim_{a, b \text{ s.t. } \mathcal{F}} \frac{2^a - 2^b}{a - b} = \ln 2,$$

求变量 a, b 需满足的条件 \mathcal{F} .

例如, 当 $a = 1/n, b = 1/(n+1), n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 [2^{1/n} - 2^{1/(n+1)}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1) [2^{1/n} - 2^{1/(n+1)}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/n} - 2^{1/(n+1)}}{1/n - 1/(n+1)}.$$

$$u_n = \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p \cdot (\ln \ln n)^q}$$

$$4 \int_0^a y \, dx = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t \, dt = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{\pi/2} (2 - \cos 2t - 2 \cos 4t + \cos 6t) \, dt = \frac{3\pi}{8} a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln \ln \left[x + (1+x)^{\frac{(1+x)^{1/x}}{x}} \right] + x(1 - e^{-(e+1)})}{x^2}$$

习题 6.0.4. 求证: 切比雪夫-拉盖尔 (Chebyshev-Laguerre) 多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

有 n 个不同的零点.

习题 6.0.5. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 3, \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使

$$f''(\xi) \geq 18.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx &\stackrel{t=\sqrt{x}}{=} 2 \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} dt \\ &\stackrel{t=\tan \theta}{=} 2 \int \frac{\sec^3 \theta}{1+\tan \theta} d\theta \\ &\stackrel{u=\tan(\theta/2)}{=} 4 \int \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2(1-u^2+2u)} du \\ &= \frac{2}{1-u^2} + \log(1-u) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} 2 \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} dt \\
& \stackrel{t=\tan \theta}{=} 2 \int \frac{1}{\cos^2 \theta (\sin \theta + \cos \theta)} d\theta \\
& = \sqrt{2} \int \frac{1}{\cos^2 \theta \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} d\theta \\
& = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\frac{\pi}{4})} \int \frac{\cos[(\theta + \frac{\pi}{4}) - \theta]}{\cos^2 \theta \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} d\theta \\
& = 2 \int \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{\cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right] d\theta \\
& = 2 \int \frac{\cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos \theta \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} d\theta + I_1 \\
& = 2\sqrt{2} \int \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \frac{\cos[(\theta + \frac{\pi}{4}) - \theta]}{\cos \theta \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} d\theta + I_1 \\
& = 2\sqrt{2} \int \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \left[\frac{\cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right] d\theta + I_1 \\
& = 2 \int (\cos \theta - \sin \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta + I_1 + I_2 \\
& = I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2 \int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{2}{\cos \theta} + C_1 \\
I_2 &= 2\sqrt{2} \int \frac{\cos^2(\theta + \frac{\pi}{4})}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} d\theta \\
I_3 &= 2 \int (\cos \theta - \sin \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta
\end{aligned}$$

习题 6.0.6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 且 $f'''(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) + \frac{a-b}{2}[f'(a) + f'(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi).$$

Proof. 记 $g(x) = f'(x)$, 那么我们只要证明存在 $\xi \in (a, b)$ 满足

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{2}[g(a) + g(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}g''(\xi). \quad (23)$$

令 $p = \frac{a+b}{2}$, $m = \frac{a-b}{2}$, 连续运用两次分部积分, 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b g(x) d(x-p) \\
 &= (x-p)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b (x-p)g'(x) dx \\
 &= (x-p)g(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b g'(x) d[(x-p)^2 - m^2] \\
 &= (x-p)g(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} [(x-p)^2 - m^2]g'(x) \Big|_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b [(x-p)^2 - m^2]g''(x) dx.
 \end{aligned} \tag{24}$$

因为

$$\begin{aligned}
 (x-p)g(x) \Big|_a^b &= \frac{b-a}{2} [g(a) + g(b)], \\
 [(x-p)^2 - m^2]g'(x) \Big|_a^b &= 0,
 \end{aligned}$$

且 $x \in [a, b]$ 时 $(x-p)^2 - m^2 \leq 0$, 存在 $\xi \in (a, b)$,

$$\int_a^b [(x-p)^2 - m^2]g''(x) dx = g''(\xi) \int_a^b [(x-p)^2 - m^2] dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3 g''(\xi),$$

将这些代回到 (24), 即可得 (23), 也就完成了证明.

特别地, 若任意函数 $h(x)$ 满足 $h(0) = h(1) = 0$, 在 $(0, 1)$ 内二阶导连续, 则存在 $\eta \in (0, 1)$,

$$\int_0^1 h(x) dx = -\frac{1}{12} h''(\eta).$$

一般地, 我们可以取变换

$$\begin{aligned}
 p(x) &= g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{b-a}(x-a), & p(a) &= p(b) = 0, \\
 q(x) &= (b-a)x + a, & q(0) &= a, \quad q(1) = b,
 \end{aligned}$$

则有

$$h(x) = g[q(x)] - p[q(x)], \quad h(0) = h(1) = 0.$$

注: 此题与梯形积分法 trapezoid rule 的残差形式相关. □

习题 6.0.7 (k 值法). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 2 阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证: 对 $\forall t \in (a, b)$, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$2f(t) = f''(\xi)(t-a)(t-b).$$

Proof. 对 $\forall t \in (a, b)$, 记

$$k = \frac{2f(t)}{(t-a)(t-b)} \quad (k \text{ 为常数}).$$

令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}k(x-a)(x-b)$, 则有 $F(a) = f(a) = 0$, $F(b) = f(b) = 0$,

$$F(t) = f(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2f(t)}{(t-a)(t-b)} \cdot (t-a)(t-b) = 0.$$

所以

$$\exists c_1 \in (a, t) \quad F'(c_1) = 0, \quad \exists c_2 \in (t, b) \quad F'(c_2) = 0,$$

于是 $\exists \xi \in (c_1, c_2)$, $F''(\xi) = f''(\xi) - k = 0$, 原命题得证. □

习题 6.0.8. 设常数 $\alpha > 0$, 积分

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x^\alpha} dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x^\alpha} dx.$$

试比较 I_1 与 I_2 的大小.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(I_2 - I_1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x - \pi/4)}{1+x^\alpha} dx \\ &\stackrel{t=x-\pi/4}{=} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin t}{1+(x+\pi/4)^\alpha} dt \\ &= \int_{-\pi/4}^0 \frac{\sin t}{1+(t+\pi/4)^\alpha} dt + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{1+(t+\pi/4)^\alpha} dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin t \left[\frac{1}{1+(\pi/4+t)^\alpha} - \frac{1}{1+(\pi/4-t)^\alpha} \right] dt \end{aligned}$$