基础数学习题初汇*

muzimuzhi

17 Jan 2018　　v0.1

目录

*这是自己学习 LaTeX 之际，回答基础数学课程问题时积累下的文档，仅作参考．初版约始于 2015 年 10 月．

1 微积分

1.1 函数基础

习题 1.1.1. 已知 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$, 求其反函数.

解. 记 $a=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}$, $b=\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$, 则有

$$\begin{aligned} a^3+b^3&=(x+\sqrt{1+x^2})+(x-\sqrt{1+x^2})=2x,\\ ab&=\sqrt[3]{x^2-(1+x^2)}=-1. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y^3&=(a+b)^3\\ &=(a^3+b^3)+3ab(a+b)\\ &=2x-3(a+b)\\ &=2x-3y. \end{aligned}$$

于是得到反函数

$$y^{-1}=\frac{y^3+3y}{2},\quad y\in\mathbb{R}.$$

1.2 数列的极限

习题 1.2.1 (利用单调有界性)**.** 已知数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{1+2u_n}{1+u_n}$, 求 $\lim_{n\to\infty}u_n$.

解. 对每一 $(k\geq 2)$, 若 $u_k\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, 则有

$$u_{k+1}=2-\frac{1}{1+u_k}\in\left[\frac{8}{5},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\subseteq\left[\frac{3}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);$$

又 $k=2$ 时, $u_2=\dfrac{3}{2}\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 成立. 由数学归纳法可得, $u_n\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ $(n\geq 2)$, 此时

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1-u_n-u_n^2}{1+u_n}>0.$$

故 $\{u_n\}$ 单调有界, $\{u_n\}$ 的极限存在（且大于 0）.

设 $\lim_{n\to\infty}u_n=a$ $(a>0)$. 在数列递推式等号两侧取 $n\to\infty$ 时的极限, 得到关于 a 的方程, 解得

$$a=\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

习题 1.2.2 (ϵ-δ 定义法)**.** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a$.

证明. 任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad 即 \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

又, 当 $n > N$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} a_i\right), \tag{1}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} a_i = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} (a-\varepsilon) < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} a_i < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} (a+\varepsilon),$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} (a\pm\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-N}{n}(a\pm\varepsilon) = a \pm \varepsilon$$

所以, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$a - \varepsilon < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} a_i < a + \varepsilon, \quad 即 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} a_i = a.$$

所以 (1) 式可化为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} a_i + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} a_i = 0 + a = a. \qquad \square$$

习题 1.2.3 (ϵ-δ 定义法)**.** 已知数列 $\{u_n\}$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell < 1$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

习题 1.2.4 (算术-几何平均数)**.** 设 $0 \le a < b$, $x_1 = a$, $y_1 = b$, 且 $x_n = (x_{n-1} + y_{n-1})/2$, $y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$. 试证数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的极限存在且相等.

解. 由题, $0 \le a < y_2 < x_2 < b$, 归纳可知 $a < y_n < x_n < b$, 于是 $y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}} > \sqrt{y_{n-1}y_{n-1}} = y_{n-1}$. 所以 $\{y_n\}$ 递增且有界, 存在 $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. 这样, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}^2/y_n = y$, 证毕.

注意: 这样生成的 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的共同极限, 称为算数-几何平均数 *(Arithmetic–geometric mean)*, 可记作 $M(a,b)$. 对于一般的 a 和 b, $M(a,b)$ 的值与第一类完全椭圆积分有关, 故没有初等表示.

证明. 略 $\square$

习题 1.2.5 (放缩法)**.** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n+1/i}$.

解. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n+1/i}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/n}}{n\left(2^{1/n}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{\left(2^{1/n}-1\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}2^{1/n}=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n+1/i}\ge\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{\ln 2}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n+1/i}=\frac{1}{\ln 2}.$$

习题 1.2.6. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\in(0,\pi)$, $x_n=\sin x_{n-1}$. 求证: 当 $n\to\infty$ 时, $x_n\sim\sqrt{n}/3$.

习题 1.2.7 (归结原理)**.** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left[e^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right].$$

解. 因为函数极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\left[e^2-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right]&\xlongequal{t=1/x}\lim_{t\to0}\frac{e^2-(1+t)^{2/t}}{t}\quad\text{(分子为平方差形式)}\\&=\lim_{t\to0}\left(e+(1+t)^{1/t}\right)\frac{e-(1+t)^{1/t}}{t}\\&=2e\lim_{t\to0}\frac{e-(1+t)^{1/t}}{t}\\&\xlongequal{0/0}-2e\lim_{x\to0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}(1+t)^{1/t}\\&=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\\&\xlongequal{0/0}2e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+t)}{3t^2+2t}\\&\xlongequal{0/0}e^2\lim_{x\to0}\frac{1}{(t+1)(3t+1)}\\&=e^2,\end{aligned}$$

由归结原理, 有数列极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left[e^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[e^2-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right]=e^2.$$

习题 1.2.8 (级数收敛的积分判别法)**.** 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sin(\frac{k}{n})}{n^2+n+k}.$$

解. 因为

$$\frac{k\sin(\frac{k}{n})}{n^2+n+k}=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}},$$

根据夹逼定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n}).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sin(\frac{k}{n})}{n^2+n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n})=\int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1$$

[在定积分中取分割 $x_i=i/n$ $(i=0,1,\dots,n)$].

习题 1.2.9 (斯托尔兹-切萨罗定理)**.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln C_n^k.$$

解. 记 $a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln C_n^k$, $b_n=n^2$. 因为 $\{b_n\}$ 严格递增且无上界，连续应用斯托尔兹-切萨罗 (Stolz-Cesàro) 定理两次，可得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\ln(n!)}{2n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n[\ln(n+2)-\ln(n+1)]}{2}\\&=1/2,\end{aligned}$$

其中

$$a_n=\ln\left(\frac{(n!)^n}{\prod_{k=1}^{n}(k!)^2}\right),\qquad a_{n+1}-a_n=\ln\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.$$

注：斯托尔兹-切萨罗定理可视为洛必达法则的离散形式，两者的证明与联系见这个链接.

1.3 函数的极限

习题 1.3.1 (换元, 分子有理化)**.** 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right).$$

解.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+\sqrt{t^2+t}}-t\right) && (\text{令 } t=\sqrt{x}\to+\infty)\\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+\sqrt{t^2+t}}+t} && (\text{分子有理化})\\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+1/t}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}}}+1} && (\text{上下同除 } t)\\
&= 1/2.
\end{aligned}$$

1.3.1 常用极限及其推导

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2(\frac{x}{2})^2}=1$
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$
4. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x=e$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln\left((1+x)^{1/x}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}\right)=\ln e=1$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\xlongequal{t=e^x-1}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\ln(t+1)}=1$
7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=1$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^a-1}{ax}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{a\ln(x+1)}-1}{a\ln(x+1)}\cdot\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

注:

1. 极限 (1) 由夹逼定理求得. 极限 (4) 的存在由单调有界性保证, 这也是 e 的定义式.
2. 由函数的连续性, 若以 $u=u(x)$ 代替 x, 上述每一极限在 $\lim_{x\to0}u(x)=0$ 时仍然成立.

习题 1.3.2 (利用常用极限). 计算极限

$$\lim_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-2)$$

解.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}e^{-1/x}\left(\frac{e^{1/x}-1}{1/x}\right)^2=1.$$

习题 1.3.3. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin(3\sin x)}{3^x+2^x-6^x-1}.$$

解. 先通过分子分母同乘、分拆成多个式子相乘, 加上再减去同一项, 分拆成多个式子相加等方法, 将原式尽可能化为以基本极限表示的四则运算形式. 然后利用已知极限四则运算的性质, 逐步得到要求极限的值.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(3\sin x)}{3\sin x}\cdot\frac{3\sin x}{3x}\cdot\frac{3x^2}{(3^x-1)+(2^x-1)-(6^x-1)}\right)\\
&= 1\cdot 1\cdot 3\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x^2}+\frac{2^x-1}{x^2}-\frac{6^x-1}{x^2}\right)^{-1}\\
&= 3\cdot\tfrac{1}{2}\left((\ln 3)^2+(\ln 2)^2-(\ln 6)^2\right)^{-1}\\
&= -\frac{3}{\ln 3\cdot\ln 2},
\end{aligned}$$

其中

1. $\lim_{x\to 0}\arcsin x/x$ 可由基本极限 1 推出,
2. $\lim_{x\to 0}(a^x-1)/x$ $(a>0)$ 的计算, 依赖于极限 $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x^2=1/2$:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{e^{x/2}-1}{x/2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{e^{x/2}-1}{x/2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}I.$$

习题 1.3.4 (多种方法的展示)**.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right).$$

解.

法 1: (洛必达法则)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2}{x^2\sin^2 x}\\
&\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin 2x-x\cos 2x-x}{x^2\sin 2x-x\cos x+x}\\
&\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4x\sin 2x+(1+2x^2)\sin 2x^2-1}{4x\cos 2x+(2x^2-1)\cos 2x+1}\\
&\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x^2)\sin 2x+6x\cos 2x}{(3-4x^2)\sin 2x+6x\cos 2x}\\
&= 2/3.
\end{aligned}$$

法 2: (泰勒展开)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2}{x^2\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - x^3/6 + o(x^4)\right]^2 - x^2\left[1 - x^2/2 + o(x^4)\right]^2}{x^2\left[x + o(x^2)\right]^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2 - x^4/3 + o(x^4)\right] - x^2\left[1 - x^4 + o(x^3)\right]}{x^4 + o(x^5)}\\
&= \tfrac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^5)}\\
&= 2/3.
\end{aligned}
$$

法 3: (常用极限) 此处提供一种仅使用基本极限的解法, 虽显麻烦, 然体现了一些有用的技巧:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x + x\cos x}{x}\cdot\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right)\cdot\left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1-\cos x}{x^2}\right)\right]\\
&= 1\cdot(1+1)\cdot(-1/6 + 1/2)\\
&= 2/3.
\end{aligned}
$$

极限 $\lim_{x\to 0}(\sin x - 1)/x^3$ 的计算见习题 1.3.6.

习题 1.3.5 (常用极限). 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

解. 因为

$$
\frac{e^{2x} - 1 - 2x}{2x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{e^x - 1 - x}{x^2},
$$

等式两侧取 $x\to 0$ 时的极限, 并在左侧令 $t = 2x$, 有

$$
I = \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}I,
$$

所以 $I = \lim_{x\to 0}(e^x - 1 - x)/x^2 = 1/2$.

据此, 可以计算以下极限:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{(1+1/t)^t}{e}\right]^t &\xlongequal{x=1/t} \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)}{e^x}\right]^{1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[1-\frac{e^x-1-x}{e^x}\right]^{1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\exp\left(-\frac{e^x-1-x}{x^2}\cdot\frac{1}{e^x}\right)\\ &= e^{-1/2}.\end{aligned}$$

习题 1.3.6 (常用极限)**.** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解. 因为 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, 于是

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{(3x)^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x-3\sin x+4\sin^3 x}{(3x)^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{9}\frac{x-\sin x}{x^3}+\frac{4}{27}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right]\\ &= \frac{1}{9}I+\frac{4}{27},\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x\to 0}(x-\sin x)/x^3 = I = 1/6$.

习题 1.3.7 ($(1+1/x)^x$ 型)**.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{1/x}.$$

解. 记实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的幂平均为 $M_p(n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}$ $(p\neq 0)$, 几何平均为 $G(n) = (\prod_{i=0}^{n}a_i)^{1/n}$, 又记 $M_p'(n) = \left(M_p(n)\right)^p - 1$. 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{M_x'(n)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^x-1}{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{a_i^x-1}{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i,$$

可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}M_x(n) &= \lim_{x\to 0}\left[(M_x'(n)+1)^{1/M_x'(n)}\right]^{M_x'(n)/x} = \lim_{x\to 0}\exp(M_x'(n)/x)\\ &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i\right) = G(n).\end{aligned}$$

实例:

- 若取 $n=2,\ t=1/x$, 即为 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[t]{a}+\sqrt[t]{b}}{2}\right)^t=\sqrt{ab}$;
- 单取 $n=3$ 时, 为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}=\sqrt[3]{abc}$.

习题 1.3.8 (函数有界性). 计算 $\lim\limits_{x\to 0} x\arctan\dfrac{1}{x}$.

解. 因为 $\left|\arctan\dfrac{1}{x}\right|\le\dfrac{\pi}{2}$, $(x\to 0)$, 即 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 有界, 所以原式 $=0$.

习题 1.3.9 (含参数). 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\quad(m,n\in\mathbb{Z})$.

解. i) $n=m$, 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=0$.

ii) $n\ne m$, 不妨记 $n>m$:

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(\sum_{i=1}^{n}C_n^i m^i x^i-\sum_{i=1}^{m}C_m^i n^i x^i\Big)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big[\sum_{i=1}^{m}(C_n^i-C_m^i)(m^i-n^i)x^i+\sum_{i=m+1}^{n}C_n^i m^i x^i\Big]\\
&=\begin{cases} C_n^2 & m=1,\\ (C_n^2-C_m^2)(m^2-n^2) & m\ge 2.\end{cases}
\end{aligned}$$

综上,

$$\text{原式}=\begin{cases}-C_m^2 & m>n=1,\\ \ \ C_n^2 & n>m=1,\\ \ \ 0 & n=m,\\ \ \ (C_n^2-C_m^2)(m^2-n^2) & n\ne m\ \text{且}\min(n,m)\ge 2.\end{cases}$$

习题 1.3.10. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}$.

解.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[3^x\left(3^{-x}+1\right)\right]}{\ln\left[2^x\left(2^{-x}+1\right)\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3^x+\ln\left(3^{-x}+1\right)}{\ln 2^x+\ln\left(2^{-x}+1\right)}=\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

习题 1.3.11. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$$

解.

法 1:(洛必达法则)

$$\text{原式} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t\right)-\sqrt{1+t^6}}{t^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\mathrm{e}^t}{6}-\frac{5t^3}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

法 2:(泰勒公式)因为

$$\mathrm{e}^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$$
$$\sqrt{1+t^6} = 1+\frac{t^6}{2}+o(t^6)=1+o(t^3),$$

所以

$$\text{原式} \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(1-t+t^2\mathrm{e}^t/2\right)-\sqrt{1+t^6}}{t^3} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\left[0+\tfrac{1}{6}t^3+o(t^3)\right]=\tfrac{1}{6}.$$

习题 1.3.12. 设 $f(x)=\sin ax/(x(x-1))$ $(a\in(0,2\pi)$ 为常数), 试补充定义 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的值, 并确定 a 的值, 使函数在闭区间 $[0,1]$ 上连续.

解.

1. $f(0^-)=f(0^+)=\lim_{x\to 0} a/(x-1)\cdot\sin(ax)/(ax)=-a$, 所以 $x=0$ 是可去间断点.
2. 先证明 $a=\pi$. 若非, 则 $\lim_{x\to 1^-}|f(x)|=\infty$, 即 $x=1$ 处的左极限不存在, 这与 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续矛盾.
3. 此时, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\pi\lim_{x\to 1^-} 1/x\cdot\sin\pi(x-1)/(\pi(x-1))=-\pi$.
4. 综上, 取 $a=\pi$, 定义 $f(0)=f(1)=-\pi$, 可满足 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续的条件.

注:以上是思考的顺序. 严谨解答, 应该先写第四步, 然后证明在此条件下的 $f(x)$ 满足题设条件.

习题 1.3.13. 求函数

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$$

的间断点.

解.

1. 若 $x<0$, 则 $\lim_{t\to+\infty} e^{tx}=0$, 此时 $f(x)=\lim_{t\to+\infty} x/1=x$.
2. 若 $x>0$, 则 $\lim_{t\to+\infty} e^{-tx}=0$, 此时 $f(x)=\lim_{t\to+\infty}(xe^{-tx}+1)/(e^{-tx}+1)=1$.
3. 若 $x=0$, 则 $e^{tx}\equiv e^0$, 此时 $f(0)=\lim_{t\to+\infty}(x+e^0)/(1+e^0)=\frac{1}{2}$. 由前可得 $f(0^-)=0$, $f(0^+)=1$, $f(0^-)\neq f(0^+)$.
4. 综上, $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续, $x=0$ 为其跳跃间断点.

习题 1.3.14. 设函数 $f(x)$ 对一切 x_1, x_2 适合等式

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2),$$

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0)\neq 0$. 试证明 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

解. 取 $x_1=x_2=0$, 则有 $f(0)=f^2(0)$, $f(0)(f(0)-1)=0$. 又 $f(0)\neq 0$, 所以 $f(0)=1$. 由题知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

对于任意 $x=x_0$, 试作函数在这一点的极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0)f(\Delta x)\\ &= f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) && (\text{注意到 } f(x_0) \text{ 与 } \Delta x \text{ 无关})\\ &= f(x_0) && (\text{利用 } \lim_{x\to 0} f(x)=1)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在任一点处极限存在且连续 (注意到 $\lim_{x\to x_0}=f(x_0)$).

习题 1.3.15. 判断函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解. 当 $x<0$ 时, $0<e^x<1$,

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(e^x)^n+2}{(e^x)^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{0+2}{0+1}=2.$$

当 $x>0$ 时, $e^x>1$,

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2/(e^x)^n}{(1+1/(e^x)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1}=1.$$

所以 $f(0-)=2$, $f(0+)=1$, $x=0$ 是跳跃间断点.

习题 1.3.16. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x.$$

解. 记 $u=\frac{2}{\pi}\arctan x-1$, 则有 $\lim_{x\to+\infty} u=0$,

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot u=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{1/x}\xlongequal{\infty/\infty}\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/(1+x^2)}{-1/x^2}=-\frac{2}{\pi}.$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}(1+u)^x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{x\cdot u}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot u}\\ &= e^{-\pi/2}.\end{aligned}$$

1.4 函数的连续性、可导性与微分中值定理

习题 1.4.1. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & 0\le x\le 1,\\ e^{1/x} & \text{其他},\end{cases}$$

其中 a 和 b 为常数. 试确定 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在其定义域连续.

解. 易得, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ 上连续. 假设 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处也连续, 以下我们将得到一个必要条件. 据连续性, $f(0^-)=f(0)$, $f(1^+)=f(1)$. 由 $f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}e^{1/x}=0$, $f(0)=(ax+b)|_{x=0}=b$, 得到 $b=0$. 再由 $f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}e^{1/x}=e$, $f(1)=(ax+b)|_{x=1}=a+b$, 得到 $a+b=e$. 据此可解得 $a=e, b=0$.

完整的解答仍需说明 $a=e, b=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处连续的充分条件, 此处从略.

注: 从解题角度, 只要求得满足条件的一个充分条件即可, 对此题而言, 可以先提出 a, b 的值, 再说明函数的连续性. 然而此类题大多有且仅有一组充要条件, 故而我们从必要条件入手的思路总是正确的.

习题 1.4.2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶导数存在且连续, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$,

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3.$$

解. 将 $f(x)$ 在点 $c=(a+b)/2$ 处展开为带拉格朗日余项的二阶泰勒公式, 得到

$$f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+\frac{(x-c)^2}{2!}f''(c)+\frac{(x-c)^3}{3!}f'''(\theta), \tag{2}$$

θ 介于 x 和 c 之间. 分别取 $x=a,b$ 代入 (2), 然后两式相减, 注意到 $a-c=-(b-c)=(a-b)/2$, 有

$$f(a)-f(b)=(a-b)f'(c)+\frac{(a-b)^3}{48}(f'''(\eta)+f'''(\zeta)),$$

其中 $a<\eta<c<\zeta<b$. 再由 f''' 的连续性, 可知存在 $\xi\in(\eta,\zeta)$ 使得

$$2f'''(\xi)=f'''(\eta)+f'''(\zeta).$$

于是, 此 ξ 满足要证明的命题, 证毕.

习题 1.4.3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 求证: 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\ne\eta$ 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证明. 记 $g(x)=f^2(x)-x^2$, 满足 $g(0)=g(1)=0$. 由罗尔定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g'(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)-2\xi=0$. 于是 $f(\xi)f'(\xi)=\xi>0$, $f(\xi)\ne 0$, 所以 $f'(\xi)=\xi/f'(\xi)$.

在区间 $[0,\xi]$ 内对 $f(x)$ 使用中值定理, 可知存在 $\eta\in(0,\xi)$, 使得 $f'(\eta)=f(\xi)/\xi$. 所以 $0<\eta<\xi<1$ 满足等式 $f'(\xi)f'(\eta)=1$, 证毕. □

习题 1.4.4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 求证:

1. 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$, $\xi \neq \eta$ 满足

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b, \tag{3}$$

其中 a, b 是任意正实数.

2. 对 n $(n \geq 2)$ 个任意正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 满足

$$\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i.$$

证明. 1. 因为 f 在 $[0,1]$ 连续, 故存在 $c \in (0,1)$ 满足 $f(c) = \frac{a}{a+b}$. 在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 内分别对 f 使用中值定理, 可知存在 $\xi \in (0,c)$, $\eta \in (c,1)$ 使得

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(\xi) \qquad 与 \qquad \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(\eta).$$

这样的 ξ, η 也满足 (3), 原命题得证.

2. 记 $S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. 因为 f 在 $[0,1]$ 连续, 故存在 $c_1 \in (0,1)$ 满足 $f(c_1) = \alpha_1/S$. 当 i 分别取 $2, 3, \dots, n$ 时, 依次定义 $c_i \in (c_{i-1}, 1)$ 使得 $f(c_i) = f(c_{i-1}) + \alpha_i/S$. (这里的依次保证了之后的 β_i 是互不相同的.)

补记 $c_0 = 0$. 在每一区间 $[c_{i-1}, c_i]$ 内对 f 使用中值定理, 可知存在 $\beta_i \in (c_i, c_{i-1})$ 使得

$$\frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{c_i - c_{i-1}} = f'(\beta_i) \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

注意到 β_i 严格递增, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i/S}{f'(\beta_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{f'(\beta_i)} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) = c_n - c_0 = 1,$$

原命题得证. □

1.5 原函数与不定积分

习题 1.5.1. 计算

$$\int 3^x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

解.

法 1: 因为 $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, 所以 $\displaystyle\int 3^x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x(1+\ln 3)} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{x(1+\ln 3)}}{1+\ln 3} = \frac{3^x \cdot \mathrm{e}^x}{1+\ln 3}$.

法 2: 记 $\mathrm{I} = \displaystyle\int 3^x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int 3^x \, \mathrm{d}\mathrm{e}^x = 3^x \cdot \mathrm{e}^x - \ln 3 \cdot \mathrm{I}$ （分部积分）, 所以 $\mathrm{I} = \dfrac{3^x \cdot \mathrm{e}^x}{1+\ln 3}$.

习题 1.5.2 (换元，分部积分)**.**

$$\int \arctan \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

解.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{t=\sqrt{x}} \int 2t\arctan t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \arctan t\,\mathrm{d}t^2 \\
&= t^2\arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= (1+t^2)\arctan t - t \\
&= (1+x)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

习题 1.5.3. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^8-3)}$.

解. 令 $t = x^8 - 3$, 则 $\mathrm{d}t = 8x^7\,\mathrm{d}x$. 所以

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{xt}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{8x^7} = \int \frac{\mathrm{d}t}{8t(t+3)} = \frac{1}{24}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{24}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right| + C = \tfrac{1}{24}\ln\left|1-3\cdot x^{-8}\right| + C.
\end{aligned}$$

习题 1.5.4. 计算不定积分

$$\int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

解. 因为 $(\tan\theta)' = \sec^2\theta$, $(\sec\theta)' = \tan\theta\sec\theta$, 所以

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \sec\theta\,\mathrm{d}\tan\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta - I,
\end{aligned}$$

即

$$I = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

一般地, 对 $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 3$, 记 $I_n = \int \sec^n \theta \,\mathrm{d}\theta$, 可得

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sec^{n-2}\theta \,\mathrm{d}\tan\theta \\
&= \sec^{n-2}\theta \tan\theta - (n-2)\int \tan^2\theta \sec^{n-2}\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= \sec^{n-2}\theta \tan\theta - (n-2)\int (\sec^2\theta - 1)\sec^{n-2}\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= \sec^{n-2}\theta \tan\theta - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}.
\end{aligned}$$

于是

$$I_n = \frac{\sec^{n-2}\theta \tan\theta}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

即

$$\int \sec^n \theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}\theta\tan\theta + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}\theta \,\mathrm{d}\theta,$$

习题 1.5.5. 计算不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}.$$

解. 由 $a-b = (x+a)-(x+b)$ 和 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, 将被积函数乘以 $\sec(a-b)\cdot\cos(a-b) = 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sec(a-b)\int \frac{\cos\big[(x+a)-(x+b)\big]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}\,\mathrm{d}x \\
&= \sec(a-b)\int \left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]\mathrm{d}x \\
&= \sec(a-b)\Big[\ln\big(\sin(x+a)\big) - \ln\big(\cos(x+b)\big)\Big] + C.
\end{aligned}$$

习题 1.5.6 (构造变上限积分)**.** *设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $0 \leq f'(x) \leq 1$, $f(0) = 0$. 求证:*

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \geq \int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x.$$

解. 由

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t + f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

可得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 递增且 $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \mathrm{d}x \leq 1$. 构造函数

$$F(x) = \left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 - \int_0^x [f(t)]^3\,\mathrm{d}t \quad (0 \leq x \leq 1),$$

于是有

$$F'(x) = f(x)\left[2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f^2(x)\right].$$

记 $F_1(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f^2(x)$. 因为 $F_1(x)$ 在 $[0,1]$ 递增且 $F_1(0) = 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 也递增. 结合 $F(0) = 0$, 习题得证.

习题 1.5.7 (构造变上限积分)**.** *设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上恒正且单调递减减, 求证:*

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

解. 构造函数

$$F(x) = \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t. \quad (0 \le x \le 1).$$

由

$$F'(x) = f(x)\int_0^x f(t)(x-t)[f(t) - f(x)]\,\mathrm{d}t \ge 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

和 $F(0) = 0$ 可知, $F(1) \ge 0$, 习题得证.

1.6 定积分

习题 1.6.1. *计算定积分*

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

解. 一般地, 有以下结论:

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

这是因为

$$I = \int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=\pi-x} -\int_\pi^0 (\pi-u)f(\sin u)\,\mathrm{d}u = \pi\int_0^\pi f(\sin u)\,\mathrm{d}u - I,$$

所以

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

应用上面的结论, 我们有

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

1.7 定积分的应用

习题 1.7.1 (平面曲线的弧长)**.** *求极坐标曲线 $\theta = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ 在 $1 \le \rho \le 3$ 上一段的弧长.*

解. 一般地，若记

$$\boldsymbol{r}(\rho)=\rho\cos\theta\boldsymbol{i}+\rho\sin\theta\boldsymbol{j}$$

其中 $\theta=\theta(\rho)$，则曲线 $\boldsymbol{r}(\rho)$ 在 $\rho_1\le\rho\le\rho_2$ 上的一段弧长可表示为

$$s=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\|\boldsymbol{r}'(\rho)\|\,\mathrm{d}\rho.$$

由 $\boldsymbol{r}'(\rho)=[\cos\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\sin\theta]\boldsymbol{i}+[\sin\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\cos\theta]\boldsymbol{i}$，我们有

$$s=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\|\boldsymbol{r}'(\rho)\|\,\mathrm{d}\rho=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\right)^2}\,\mathrm{d}\rho.$$

本题中，$\theta(\rho)=\frac{1}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})$，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1}{2}(1-r^{-2})$，所以

$$\begin{aligned}s&=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\right)^2}\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2}\int_1^3\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{4}(2\rho^2+\ln\rho)\Big|_1^3\\&=2+\frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

1.8 级数

习题 1.8.1. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$$

收敛, 并计算级数的和.

解. 易证级数绝对收敛, 故其收敛. 由

$$\frac{1}{n(2n-1)}=\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{n},$$

（假设）我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}\qquad\text{和}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2,$$

那么级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\frac{(-1)^n}{2n-1}-\frac{(-1)^n}{n}\right)=\ln 2-\frac{\pi}{2}.$$

习题 1.8.2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和函数.

解. 记 $S(x) = 1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},$$
$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n},$$
$$(xS'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad |x| < 1.$$

2 线性代数

2.1 行列式

习题 2.1.1. 已知数 18055, 83282, 61042, 48576, 57776 都可被 23 整除, 证明：行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

也可被 23 整除.

证明. 记

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{C_5=\sum_{i=1}^{5} 10^{5-i}\cdot C_i} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 & 18055 \\ 8 & 3 & 2 & 8 & 83283 \\ 6 & 1 & 0 & 4 & 61042 \\ 4 & 8 & 5 & 7 & 48576 \\ 5 & 7 & 7 & 7 & 57776 \end{vmatrix} \triangleq D,$$

则行列式 D 第五列的元素均可被 23 整除，即 $23 \mid a_{j5}$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$. 将 D 按第五列展开，则 D 是 a_{j5} $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的线性组合，所以 $23 \mid D$，证毕.

习题 2.1.2. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{C_i=C_i-iC_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1-2x & 2-3x & 3-4x \\ x & -x & 1-3x & 2-4x \\ x & -x & -2x & 1-4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2x & 2-3x & 3-4x \\ -x & 1-3x & 2-4x \\ -x & -2x & 1-4x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[R_2=R_2-R_3]{R_1=R_1-2R_2} \begin{vmatrix} 1 & 3x & -1+4x \\ 0 & 1-x & 1 \\ -x & -2x & 1-4x \end{vmatrix} = -4x^3+6x^2-4x+1$$

习题 2.1.3 (14–15 秋冬)**.** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解. 这是习题 2.1.2 的一般化：

$$D \xlongequal[i=1,2,\dots,n-1]{R_i=R_i-R_{i+1}} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,n-1,\dots,2]{C_i=C_i-C_{i-1}} \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{对第一列展开}} (1-x)^n + (-1)^{n+1}x^n.$$

习题 2.1.4. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

解. 凑成上三角行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 = C_1 - \sum_{i=1}^{n}(C_{i+1}/a_i)} \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} a_i,$$

其中 $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n}(1/a_i)$.

2.2 矩阵的基本运算，可逆矩阵

习题 2.2.1. 设 A, B, $A + B$ 均为 n 阶可逆矩阵，证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 为可逆矩阵，并写出它的逆.

解. 先对 $A^{-1} + B^{-1}$ 左乘 A, 右乘 B, 得到

$$A(A^{-1} + B^{-1})B = B + A = A + B.$$

两侧同时取逆，由 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, 我们有

$$B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

由此可知 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 且其逆矩阵为 $B(A + B)^{-1}A$.

习题 2.2.2. 已知 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 是可逆矩阵. 求其伴随矩阵对应行列式的值 $|A^*|$.

解. 因为 $A^{-1} = |A|^{-1} A^*$ (逆矩阵的一种定义), 我们有

$$|A^*| = \left| |A|\, A^{-1} \right| = |A|^n \cdot \left|A^{-1}\right| = |A|^{n-1}.$$

(注意到 $|A|$ 是一个常数; 当 λ 是常数时, $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{n\times n}, |\lambda A| = \lambda^n |A|$.)

习题 2.2.3. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1 \quad 2 \quad -1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0 \quad -1 \quad 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值,

(2) 求 A 及 $\left|A-\frac{3}{2}E\right|^6$.

解. (1) 0 是 A 的三重特征根.

(2) 由 A 是三阶实对称矩阵, 易得

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

记

$$B=A-\tfrac{3}{2}E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}=Q\Lambda Q^{-1},$$

其中

$$\Lambda=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\text{ 是由 }B\text{ 的特征值构成的对角矩阵,}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\text{ 由 }B\text{ 的特征根对应的特征向量（行向量）构成,}$$

$$Q^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}.$$

所以

$$\left|A-\tfrac{3}{2}E\right|^6=|B|^6=\left|Q\Lambda Q^{-1}\right|^6=\left|Q\Lambda^6Q^{-1}\right|=|Q|\cdot\left|\Lambda^6\right|\cdot\left|Q^{-1}\right|.$$

（后面自己算吧）

2.3 线性方程组的解，解空间

习题 2.3.1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, ..., $\boldsymbol{\alpha}_s$ 是某欧氏空间中不含零向量的正交向量组, 非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是它们的线性组合. 试求 $\sum_{i=1}^s\cos^2\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i\rangle$, 这里 $\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i\rangle$ 表示向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的夹角, $i=1,2,\ldots,s$.

解. 记 $\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$, 其中 $\sum_{i=1}^{s}k_i^2>0$, $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|>0$, 则有

$$\|\boldsymbol{\beta}\|^2=\sum_{i=1}^{s}k_i^2\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2 \qquad \text{及} \qquad \cos\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i\rangle=\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}_i}{\|\boldsymbol{\beta}\|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}=\frac{k_i\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2}{\|\boldsymbol{\beta}\|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}=\frac{k_i\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}{\|\boldsymbol{\beta}\|},$$

于是

$$\sum_{i=1}^{s}\cos^2\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i\rangle=\sum_{i=1}^{s}\frac{k_i^2\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}=\frac{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}=1.$$

习题 2.3.2. 定义矩阵序列 $\left\{(b_y^k)_{m\times n}\right\}_{k\geq 1}$ 的极限为: $\lim_{k\to\infty}(b_y^k)_{m\times n}=(\lim_{k\to\infty}(b_y^k))_{m\times n}$. 设 2 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix},$$

其中 $0<a+b<1$, 求 $\lim_{k\to\infty}A^k$.

解. 记

$$B=A-E=\begin{bmatrix}-a & a\\ b & -b\end{bmatrix},$$

易得 $B^2=-(a+b)B$. 所以

$$A^k=(E+B)^k=E+\left(\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^{i-1}(a+b)^{i-1}\right)B=E-\frac{(1-a-b)^k-1}{a+b}B,$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^{i-1}(a+b)^{i-1}&=-\frac{1}{a+b}\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^i(a+b)^i\\&=-\frac{1}{a+b}\left[\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-1)^i(a+b)^i-1\right]\\&=-\frac{(1-a-b)^k-1}{a+b}.\end{aligned}$$

因为 $0<a+b<1$, $\lim_{k\to\infty}(1-a-b)^k=0$, 所以

$$\lim_{k\to\infty}A^k=E+\frac{1}{a+b}B=\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix}b & a\\ b & a\end{bmatrix}.$$

3 概率论与数理统计

习题 3.0.1. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 根据定义, 其概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$. 特别地，当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时（等价地，我们可以取 $Y = (X-\mu)/\sigma$），我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

这个结论可以用如下的过程来说明

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}\\ &= \left(-2\pi\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{2}\right|_0^{+\infty}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

习题 3.0.2 (12–13 春夏). 设 (X, Y) 服从二元正态分布，$X \sim N(5, 3^2)$, $Y \sim N(0, 2^2)$, ρ_{XY} 是 X 与 Y 的相关系数.

1. 若 $\rho_{XY} = 0$, 求 $P\{X > 2Y\}$, 并写出 $\left(\dfrac{2X-3Y-10}{2X+3Y-10}\right)^2$ 满足的分布（含参数）;
2. 若 $X+Y$ 与 $X-3Y$ 相互独立，求 ρ_{XY};
3. 若对 Y 进行 n 次独立重复观测，结果是 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$，则当 $n\to\infty$ 时，求 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{Y_i}$ 依概率收敛到的极限值;
4. 若对 Y 进行 n 次独立重复观测，结果是 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$，则当 $n = 100$ 时，求 Y 的观测结果中大于 2 出现的次数不超过 22 次的概率近似值.

解. 3. 记 $Z = \exp Y$ 为关于 Y 的统计量. 则

$$\begin{aligned}E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(y)f(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^y}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{8}\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-4)^2}{8}+2\right)\mathrm{d}y\\ &= e^2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-4)^2}{8}\right)\mathrm{d}y\\ &= e^2,\end{aligned}$$

其中 $f(y)$ 是 Y 的概率密度函数. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{Y_i}\xrightarrow{P}E(e^Y)=e^2.$$

一般地，若 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Z=\exp Y$, 则称 Z 满足对数正态分布，$E(Z)=\exp(\mu+\sigma^2/2)$.

4 常微分方程

习题 4.0.1. *求解微分方程组:*

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y, & (4)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x. & (5)\end{cases}$$

解. 由 (4), $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, 代入 (5) 得

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}-x=0. \tag{6}$$

在 (6) 中, 令 $D(\lambda)=\lambda^4-1=0$, 解得 $\lambda=\pm1$, $\pm\mathrm{i}$. 所以 (6) 的通解为

$$x=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t \qquad (c_k \text{ 为常数}, k=1,2,3,4).$$

将通解代入 (4), 得

$$y=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}-c_3\cos t-c_4\sin t.$$

所以, 原方程组的解为

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^t+c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}+c_3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos t+c_4\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\sin t.$$

习题 4.0.2. *（常微分第一章习题 55）求解常微分方程*

$$y''+\sqrt{1+(y')^2}=0. \tag{7}$$

解. 原方程两边对 x 求导, 并用 (7) 中的关系进行代换, 得到方程 $y'''-y'=0$, 其通解为

$$y=c_1^*\mathrm{e}^x+c_2^*\mathrm{e}^{-x}+c \qquad (c_1^*,\ c_2^*,\ c \text{ 为常数}).$$

将通解代入 (7), 得 $c_1^*c_2^*=1/4$ 且 $c_1^*<0$ （注意到 $c_1^*\mathrm{e}^x+c_2^*\mathrm{e}^{-x}=y''=-\sqrt{1+(y')^2}\le 0$）. 所以

$$y=\frac{c_1}{2}\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2c_1}\mathrm{e}^x+c_2 \qquad (c_1,\ c_2 \text{ 为常数, 且} c_1<0)$$

是方程 (7) 的解.

另解: 令 $p(y)=y'$, 则 $y''=pp'$. 代入 (7), 得 $pp'+\sqrt{1+p^2}=0$, 此为可分离变量方程, 整理、积分得

$$y=\sqrt{1+p^2}+c \qquad (c\text{ 为常数}). \tag{8}$$

由 (7) 可得 $y''=\sqrt{1+p^2}$, 代入 (8) 得到 $y''-y=-c$, 其通解为

$$y=c_1^*\mathrm{e}^x+c_2^*\mathrm{e}^{-x}+c \qquad (c_1^*,\ c_2^*,\ c\text{ 为常数}). \tag{9}$$

（后续与第一种解法类似）

习题 4.0.3. *（常微分第二章习题 56）已知常微分方程*

$$(1-x^2)y'''-xy''+y'=0 \tag{10}$$

的一个解 $y_1=x^2$, 求该方程的通解.

解. 令 $z=y'$, 则 $z_1=2x$ 是方程

$$(1-x^2)z''-xz'+z=0 \tag{11}$$

的一个解. 设方程 (11) 的通解为 $z=u\cdot z_1$, 即 $z=2x\cdot u(x)$.

计算 z', z'' 并代入 (11), 得 $x(1-x^2)u''+(2-3x^2)u'=0$, 此为可分离变量方程. 整理、积分, 得

$$u'=\frac{c_1^*}{x^2\sqrt{|x^2-1|}} \qquad (c_1^*\text{ 为常数}). \tag{12}$$

i) 若 $0<|x|<1$, 则

$$u=\int\frac{c_1^*}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{c_1^*}{x}\sqrt{1-x^2}+c_2^* \qquad (c_1^*,\ c_2^*\text{ 为常数}).$$

故有 $z=2x\cdot u=-2c_1^*\sqrt{1-x^2}+2c_2^*x$, 于是

$$y=\int z\,\mathrm{d}x=-c_1^*\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+c_2^*x^2+c_3^* \qquad (c_1^*,\ c_2^*,\ c_3^*\text{ 为常数}).$$

ii) 若 $|x|>1$, 则

$$u=\int\frac{c_1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x=\frac{c_1}{x}\sqrt{x^2-1}+c_2 \qquad (c_1,\ c_2\text{ 为常数}).$$

故有 $z=2x\cdot u=2c_1\sqrt{x^2-1}+2c_2x$,, 于是

$$y=\int z\,\mathrm{d}x=c_1\left(\arcsin x+x\sqrt{x^2-1}\right)+c_2x^2+c_3 \qquad (c_1,\ c_2,\ c_3\text{ 为常数}).$$

iii) 综上, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时,

$$y = c_1\left(\arcsin x + x\sqrt{x^2-1}\right) + c_2x^2 + c_3 \qquad (c_1,\, c_2,\, c_3\ \text{为常数})$$

是方程 (10) 的通解.

注: 题中的积分有一定难度.

5 偏微分方程

5.1 边界条件

5.1.1 细杆的热传导方程

第 I 类边界条件 杆在端点处保持与介质一样的温度.

$$u\big|_{x=0} \equiv u(0,t) = f_1(t)$$
$$u\big|_{x=\ell} \equiv u(\ell,t) = f_2(t).$$

第 II 类边界条件 杆在 $x=4$ 处"绝热", 即该端点的热流强度为零.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0.$$

一般地, 单位时间内流经端点界面的热量可表示为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=\ell} = g(t).$$

第 II 类边界条件 杆的一端处于"自由冷却"状态.

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \mu u\right)\right|_{x=\ell} = f(t).$$

5.1.2 弦的振动方程

- 一端固定:

$$u\big|_{x=\ell} = 0.$$

- 一端自由:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0.$$

- 一端与弹性支座相连:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + ku\right)\right|_{x=\ell} = 0.$$

5.2 初始条件

5.2.1 波动方程

初始位移

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

初始速度

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$

5.2.2 热传导方程

初始时刻区域内的温度分布：

一维情况

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x).$$

三维情况

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

5.3 本征值问题

若函数 $X(x)$ 满足 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ $(0 < x < \ell)$ 和以下边界条件之一,

i) $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x. \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

ii) $X'(0) = 0$, $X(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)k\pi}{2\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin\frac{(2k-1)k\pi}{2\ell}x. \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

iii) $X(0) = 0$, $X'(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin\frac{(2k-1)\pi}{2\ell}x. \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

iv) $X'(0) = 0$, $X'(\ell) = 0$, 则

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x. \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

v) $X(0) = 0$, $X'(\ell) + hX(\ell) = 0$ ($h > 0$ 为常数), 则

$$\lambda_k = \left(\frac{r_k}{\ell}\right)^2, \quad X_k(x) = c_k \sin\frac{r_k}{\ell}x, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

其中 r_k 是 $\tan r = -r/lh$ 的第 k 个正根.

5.4 补充习题

习题 5.4.1 (141223 补充练习题). 求解下列方程:

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=1 \\ u\Big|_{r=1}=1, \quad u\Big|_{r=2}=\cos^2\theta \\ u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi) \end{cases}$$

解. 方法一: 用叠加原理拆成两组方程, 一组的方程非齐次而两对边值条件都齐次, 一组的方程齐次而仅有一对边值条件齐次.

由叠加原理, $u(r,\theta)=u_{\mathrm{I}}(r,\theta)+u_{\mathrm{II}}(r,\theta)$, 其中 $u_{\mathrm{I}}(r,\theta)$ 与 $u_{\mathrm{II}}(r,\theta)$ 分别满足

$$\mathrm{I})\ \begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u\Big|_{r=1}=1, \quad u\Big|_{r=2}=\cos^2\theta \\ u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi) \end{cases} \qquad \mathrm{II})\ \begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=1 \\ u\Big|_{r=1}=0, \quad u\Big|_{r=2}=0 \\ u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi) \end{cases}$$

对 I), 记 $u_{\mathrm{I}}(r,\theta)=R(r)H(\theta)$, 则有

$$-\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{H''}{H}\triangleq-\lambda.$$

于是有

$$H(\theta)\ 满足\ \begin{cases} H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0 \\ H(\theta)=H(\theta+2\pi), \end{cases} \qquad R(r)\ 满足\ r^2R''(r)+rR'-\lambda r=0.$$

对 $H(\theta)$, 可解得

$$\lambda_k=k^2, \qquad H_k(\theta)=a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta. \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

此时, $R(r)$ 满足 $r^2R''(r)+rR'-k^2r=0$, 为欧拉方程形式, 解得

$$\begin{aligned} &R_0(r)=c_0+d_0\ln r, \\ &R_k(r)=c_kr^k+d_kr^{-k}. \quad (k=1,2,\dots) \end{aligned}$$

所以

$$u_{\mathrm{I}}(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(A_kr^k+B_kr^{-k}\right)\cos k\theta+\left(C_kr^k+D_kr^{-k}\right)\sin k\theta\right]. \qquad (13)$$

代入边值条件, 得

$$A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[(A_k+B_k)\cos k\theta+(C_k+D_k)\sin k\theta\right]=1,$$

$$A_0+B_0\ln 2+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(A_k\cdot 2^k+B_k\cdot 2^{-k}\right)\cos k\theta+\left(C_k\cdot 2^k+D_k\cdot 2^{-k}\right)\sin k\theta\right]=\frac{1+\cos 2\theta}{2}.$$

将上面两个等式的右侧按本征函数展开并比较系数, 易得

$$\begin{cases}A_0=1\\ A_0+B_0\ln 2=\dfrac{1}{2}\\ A_k+B_k=0\quad(k=1,2,\dots)\\ 4A_2+\dfrac{1}{4}B_2=\dfrac{1}{2}\\ A_k\cdot 2^k+B_k\cdot 2^{-k}=0\quad(k\in\mathbb{Z}_+\text{ 且 }k\neq 2)\\ C_k+D_k=0\quad(k=1,2,\dots)\\ C_k\cdot 2^k+D_k\cdot 2^{-k}=0\quad(k=1,2,\dots)\end{cases}\text{解得}\begin{cases}A_0=1\\ B_0=-\dfrac{1}{2\ln 2}\\ A_2=\dfrac{2}{15}\\ B_2=-\dfrac{2}{15}\\ A_k=B_k=0\quad(k\in\mathbb{Z}_+\text{ 且 }k\neq 2)\\ C_k=D_k=0\quad(k=1,2,\dots)\end{cases}$$

代入 (13), 得

$$\boxed{u_{\mathrm{I}}(r,\theta)=1-\frac{\ln r}{2\ln 2}+\frac{2}{15}\left(r^2-r^{-2}\right)\cdot\cos 2\theta.}\tag{14}$$

对 II), 其方程对应的齐次形式, 有本征函数

$$H_k(\theta)=a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta.\quad(k=0,1,2,\dots)$$

设

$$u_{\mathrm{II}}(r,\theta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(C_k(r)\cos k\theta+D_k(r)\sin k\theta\right),\tag{15}$$

代入 I) 中的方程与 r 的边值条件, 即得

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{\left[C_k''(r)+\frac{1}{r}C_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}C_k(r)\right]\cos k\theta+\left[D_k''(r)+\frac{1}{r}D_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}D_k(r)\right]\sin k\theta\right\}=1,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left[C_k(1)\cos k\theta+D_k(1)\sin k\theta\right]=0,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left[C_k(2)\cos k\theta+D_k(2)\sin k\theta\right]=0.$$

将上面三个等式的右侧按本征函数展开并比较系数, 易得

$$
\begin{aligned}
C_0''(r)+\frac{1}{r}C_0'(r)&=1, &\quad C_k(1)&=0 &\quad C_k(2)&=0 & \\
C_k''(r)+\frac{1}{r}C_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}C_k(r)&=0, & C_k(1)&=0 & C_k(2)&=0 &\quad (k&=1,2,\dots) \\
D_k''(r)+\frac{1}{r}D_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}D_k(r)&=0. & D_k(1)&=0 & D_k(2)&=0 & (k&=0,1,2,\dots)
\end{aligned}
$$

它们都具有欧拉方程的形式. 解方程, 并代入初值条件, 分别得到

$$
\begin{aligned}
C_0(r)&=\frac{1}{4}r^2-\frac{3\ln r}{4\ln 2}-\frac{1}{4}, \\
C_k(r)&=0 \qquad (k=1,2,\dots), \\
D_k(r)&=0 \qquad (k=0,1,2,\dots).
\end{aligned}
$$

将这些解代入 (15), 得到

$$
\boxed{u_{\mathrm{II}}(r,\theta)=\frac{1}{4}r^2-\frac{3\ln r}{4\ln 2}-\frac{1}{4}.}
$$

最后, 由叠加原理, 原方程的解为

$$
\boxed{u(r,\theta)=\frac{r^2+3}{4}-\frac{5\ln r}{4\ln 2}+\frac{2\left(r^2-r^{-2}\right)}{15}\cos 2\theta.}
$$

方法二: 找一个满足两对边值条件的特殊函数, 将方程化为满足齐次边值条件的形式.

取一个满足两对边值条件的函数 $w(r,\theta)=(2-r)+(r-1)\cos^2\theta$, 即

$$
w(r,\theta)=-\frac{r-3}{2}+\frac{r-1}{2}\cos 2\theta. \tag{16}
$$

令

$$
v(r,\theta)=u(r,\theta)-w(r,\theta), \tag{17}
$$

则 $v(r,\theta)$ 满足

$$
\begin{cases}
v_{rr}+\dfrac{1}{r}v_r+\dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=\dfrac{3r-4}{2r^2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{2r}+1 \\
v\big|_{r=1}=0, \quad v\big|_{r=2}=0 \\
v(r,\theta)=v(r,\theta+2\pi).
\end{cases} \tag{18}
$$

易得 (18) 中的方程有本征函数

$$
H_k(\theta)=a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta. \quad (k=0,1,2,\dots)
$$

设

$$
v(r,\theta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(C_k(r)\cos k\theta+D_k(r)\sin k\theta\right), \tag{19}
$$

代入 (18) 中的方程与 r 的边值条件, 即得

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{\left[C_k''(r)+\frac{1}{r}C_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}C_k(r)\right]\cos k\theta+\left[D_k''(r)+\frac{1}{r}D_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}D_k(r)\right]\sin k\theta\right\}$$
$$=\frac{3r-4}{2r^2}\cos 2\theta+\frac{1}{2r}+1,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left[C_k(1)\cos k\theta+D_k(1)\sin k\theta\right]=0,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left[C_k(2)\cos k\theta+D_k(2)\sin k\theta\right]=0.$$

将上面三个等式的右侧按本征函数展开并比较系数, 可得

$$\begin{aligned}
&C_0''(r)+\frac{1}{r}C_0'(r)=\frac{1}{2r}+1, && C_k(1)=0 && C_k(2)=0 && \\
&C_2''(r)+\frac{1}{r}C_2'(r)-\frac{4}{r^2}C_2(r)=\frac{3r-4}{2r^2}, && C_2(1)=0 && C_2(2)=0 && \\
&C_k''(r)+\frac{1}{r}C_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}C_k(r)=0, && C_k(1)=0 && C_k(2)=0 && (k\in\mathbb{Z}\text{ 且 }k\neq 2)\\
&D_k''(r)+\frac{1}{r}D_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}D_k(r)=0. && D_k(1)=0 && D_k(2)=0 && (k=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$

它们都具有欧拉方程的形式. 解方程, 并代入初值条件, 分别得到

$$\begin{aligned}
C_0(r)&=\frac{r^2+2r-3}{4}-\frac{5\ln r}{4\ln 2},\\
C_2(r)&=-\frac{r-1}{2}+\frac{2}{15}\left(r^2-r^{-2}\right),\\
C_k(r)&=0,\qquad (k\in\mathbb{Z}\text{ 且 }k\neq 2)\\
D_k(r)&=0.\qquad (k=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$

将这些解代入 (19), 得到

$$v(r,\theta)=\frac{r^2+2r-3}{4}-\frac{5\ln r}{4\ln 2}+\frac{2\left(r^2-r^{-2}\right)}{15}\cos 2\theta. \tag{20}$$

最后, 将 (16) 和 (20) 代入 (17), 得原方程的解为

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{r^2+3}{4}-\frac{5\ln r}{4\ln 2}+\frac{2\left(r^2-r^{-2}\right)}{15}\cos 2\theta.}$$

6 未归类

习题 6.0.1. 证明:

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \tag{21}$$

$$\int_0^1 x^{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n}. \tag{22}$$

注：以上两式均收敛. 此结论称为 Sophomore's dream. 证明可参见英文维基和 StackExchange Math 分版.

证明. 此处只证明式 (21), 式 (22) 的证明与之类似.

首先, 将 x^{-x} 展开, 得到

$$x^{-x} = \exp(-x\ln x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

对上式两边做定积分, 有

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x,$$

右侧的级数一致收敛, 故求和与求积分可交换顺序, 于是有

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n (\ln n)^x}{n!}\,\mathrm{d}x.$$

计算上式右侧一般项 (当 $n = k$ 时) 的积分,

$$\int_0^1 \frac{(-1)^k x^k (\ln x)^k}{k!}\,\mathrm{d}x =$$

□

习题 6.0.2. 考察 $f(x,y) = y^{-1}\sin y$ 在平面区域 $\{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi/2,\, x \le y \le \pi/2\}$ 上的二重积分

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

解. 注意到积分区域

$$\left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi/2,\, x \le y \le \pi/2\right\} = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \pi/2,\, 0 \le x \le y\right\},$$

可交换 I 中的积分次序, 得到

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \sin y\,\mathrm{d}y = 1.$$

习题 6.0.3. 若有

$$\lim_{a,b\ s.t.\ \mathcal{F}} \frac{2^a-2^b}{a-b} = \ln 2,$$

求变量 a, b 需满足的条件 $\mathcal{F}$.

例如，当 $a=1/n$, $b=1/(n+1)$, $n\to+\infty$ 时，有

$$\ln 2 = \lim_{n\to+\infty} n^2[2^{1/n}-2^{1/(n+1)}] = \lim_{n\to+\infty} n(n+1)[2^{1/n}-2^{1/(n+1)}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{1/n}-2^{1/(n+1)}}{1/n-1/(n+1)}.$$

$$u_n = \frac{1}{n\cdot(\ln n)^p\cdot(\ln\ln n)^q}$$

$$4\int_0^a y\,\mathrm{d}x = 4a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}a^2\int_0^{\pi/2}\Big(2-\cos 2t-2\cos 4t+\cos 6t\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8}a^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\ln\left[x+(1+x)^{\frac{(1+x)^{1/x}}{x}}\right]+x\left(1-e^{-(e+1)}\right)}{x^2}$$

习题 6.0.4. 求证：切比雪夫-拉盖尔 *(Chebyshev-Laguerre)* 多项式

$$L_n(x) = e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$$

有 n 个不同的零点.

习题 6.0.5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=3$, $\min_{0\le x\le 1} f(x)=-1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使

$$f''(\xi)\ge 18.$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=\tan\theta} 2\int\frac{\sec^3\theta}{1+\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&\xlongequal{u=\tan(\theta/2)} 4\int\frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2(1-u^2+2u)}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{1-u^2}+\log(1-u)-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{t=\tan\theta} 2\int \frac{1}{\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int \frac{1}{\cos^2\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\cos(\frac{\pi}{4})}\int \frac{\cos[(\theta+\frac{\pi}{4})-\theta]}{\cos^2\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int \frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int \frac{\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}{\cos\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}\theta + I_1 \\
&= 2\sqrt{2}\int \cos(\theta+\tfrac{\pi}{4})\frac{\cos[(\theta+\frac{\pi}{4})-\theta]}{\cos\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}\theta + I_1 \\
&= 2\sqrt{2}\int \cos(\theta+\tfrac{\pi}{4})\left[\frac{\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta + I_1 \\
&= 2\int (\cos\theta-\sin\theta)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta + I_1 + I_2 \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\cos\theta} + C_1 \\
I_2 &= 2\sqrt{2}\int \frac{\cos^2(\theta+\frac{\pi}{4})}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}\theta \\
I_3 &= 2\int (\cos\theta-\sin\theta)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

习题 6.0.6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 且 $f'''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$
f(b)-f(a)+\frac{a-b}{2}[f'(a)+f'(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi).
$$

证明. 记 $g(x)=f'(x)$, 那么我们只要证明存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$
\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[g(a)+g(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}g''(\xi). \tag{23}
$$

令 $p=\frac{a+b}{2}$, $m=\frac{a-b}{2}$, 连续运用两次分部积分，我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}(x-p)\\ &= (x-p)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b (x-p)g'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (x-p)g(x)\Big|_a^b - \tfrac{1}{2}\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}[(x-p)^2-m^2]\\ &= (x-p)g(x)\Big|_a^b - \tfrac{1}{2}[(x-p)^2-m^2]g'(x)\Big|_a^b + \tfrac{1}{2}\int_a^b [(x-p)^2-m^2]g''(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{24}$$

因为

$$\begin{aligned}(x-p)g(x)\Big|_a^b &= \frac{b-a}{2}[g(a)+g(b)],\\ [(x-p)^2-m^2]g'(x)\Big|_a^b &= 0,\end{aligned}$$

且 $x\in[a,b]$ 时 $(x-p)^2-m^2\le 0$, 存在 $\xi\in(a,b)$,

$$\int_a^b [(x-p)^2-m^2]g''(x)\,\mathrm{d}x = g''(\xi)\int_a^b [(x-p)^2-m^2]\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{6}(b-a)^3 g''(\xi),$$

将这些代回到 (24), 即可得 (23), 也就完成了证明.

特别地，若任意函数 $h(x)$ 满足 $h(0)=h(1)=0$, 在 $(0,1)$ 内二阶导连续，则存在 $\eta\in(0,1)$,

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{12}h''(\eta).$$

一般地，我们可以取变换

$$\begin{aligned}p(x) &= g(a)+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a), && p(a)=p(b)=0,\\ q(x) &= (b-a)x+a, && q(0)=a,\quad q(1)=b,\end{aligned}$$

则有

$$h(x)=g[q(x)]-p[q(x)], \qquad h(0)=h(1)=0.$$

注：此题与梯形积分法 trapezoid rule 的残差形式相关. □

习题 6.0.7 (k 值法). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 2 阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 求证: 对 $\forall t\in(a,b)$, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$2f(t)=f''(\xi)(t-a)(t-b).$$

证明. 对 $\forall t \in (a,b)$, 记

$$k = \frac{2f(t)}{(t-a)(t-b)} \quad (k \text{ 为常数}).$$

令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}k(x-a)(x-b)$, 则有 $F(a) = f(a) = 0$, $F(b) = f(b) = 0$,

$$F(t) = f(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2f(t)}{(t-a)(t-b)} \cdot (t-a)(t-b) = 0.$$

所以

$$\exists c_1 \in (a,t) \quad F'(c_1) = 0, \qquad \exists c_2 \in (t,b) \quad F'(c_2) = 0,$$

于是 $\exists \xi \in (c_1, c_2)$, $F''(\xi) = f''(\xi) - k = 0$, 原命题得证. □

习题 6.0.8. 设常数 $\alpha > 0$, 积分

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

试比较 I_1 与 I_2 的大小.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}(I_2 - I_1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x-\pi/4)}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=x-\pi/4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin t}{1+(x+\pi/4)^\alpha}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin t}{1+(t+\pi/4)^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{1+(t+\pi/4)^\alpha}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \sin t \left[\frac{1}{1+(\pi/4+t)^\alpha} - \frac{1}{1+(\pi/4-t)^\alpha}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

更新日志

v0.1 17 Jan 2018

开始记录版本