# 061B0020 复变函数与积分变换

## 课程期末考试试卷

muzimuzhi

2014 年 1 月 16 日

## 目录

# 1　2012-2013学年 秋学期

## 一、　复数及复函数

（1）　求复数 $\mathrm{Ln}\big[(1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})\big]$ 的实部与虚部;

（2）　求解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$, 写出解的实部与虚部;

（3）　指出函数 $f(z)=(x^2+y^2-x)+\mathrm{i}(2xy-y^2)$ 在何处可导, 何处解析, 并在可导处求出其导数;

（4）　找出函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{1+z}\sin\dfrac{1}{z^2}$ 的孤立奇点, 并求出其留数.

## 二、　积分

（1）　$\displaystyle\int\limits_C \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$, 其中 $C: z=\alpha t$, $t\in[0,+\infty)$, $\mathrm{Re}\,\alpha<0$;

（2）　$\displaystyle\oint\limits_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} z^2\cot z\,\mathrm{d}z$;　　（3）　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\cos x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$

## 三、　级数

（1）　将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-1)(z-2)}$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内展开成罗朗级数;

（2）　将函数 $f(z)=\mathrm{e}^z\cos z$ 展开为麦克劳林级数.

## 四、　保角映射

（1）　试作保角映射 $w=w(z)$, 把第一象限映成单位圆内部, 且 $w(1+\mathrm{i})=0$, $w(\mathrm{i})=\mathrm{i}$;

（2）　求将区域 $\Big\{z;\ |z|<\sqrt{2}, |z+2|<\sqrt{2}\Big\}$ 映为上半平面的一个保角映射 $w=w(z)$.

## 五、　拉氏变换

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t)=t^2-\displaystyle\int_0^\infty\cos\tau\,\mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{d}t$;

（2）　求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, 其中 $F(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{(s-1)(s^2-2s+5)}$.

## 六、　证明

已知 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 $D$ 内解析, 且有 $v=-u^2$, 求证 $f(z)$ 在区域 $D$ 内必为常数.

## 2 2009-2010学年 秋学期

**一、 （每题8分，共32分）**

（1） 求复数 $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的实部与虚部;

（2） 求解方程 $\cos z = 2$, 写出解的实部与虚部;

（3） 指出函数 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}y^2$ 在何处可导, 何处解析, 并在可导处求出其导数;

（4） 找出函数 $f(z) = z^k \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \quad (k \in \mathbb{N})$ 的孤立奇点, 并求出其留数.

**二、 计算积分（每题9分，共18分）**

（1） $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z+2}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z$;

（2） $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

**三、 （16分）**

（1） 请在奇点处将 $f(z) = z\sin\dfrac{1}{z+1}$ 展开成罗朗级数;

（2） 将函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{(z+1)^2}$ 在圆环 $2 < |z-1| < \infty$ 内展开成罗朗级数.

**四、 （12分）**

试作保角映射 $w = w(z)$ 把 $|z-\mathrm{i}| < \sqrt{2}$ 及 $|z+\mathrm{i}| < \sqrt{2}$ 的公共部分映成 $|w| < 1$, 且 $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = 0$.

**五、 （16分）**

（1） 求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t) = k - t\mathrm{e}^{t-t_0}$;

（2） 求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ,其中 $F(s) = \dfrac{2\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s^2+1)}$.

**六、 （6分）**

设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是整函数, 且 $u(x,y) \geq c$, 求证 $f(z)$ 是常数.

## 3 2008-2009学年 秋学期

**一、 计算与简答（每题6分，共24分）**

（1） 计算复数 $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的值;

（2） 计算函数 $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$ 在所有奇点处的留数.

（3） 记 $C$ 是单连通区域中的一条简单闭曲线, $\oint\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$, 问 $f(z)$ 在 $C$ 内部是否一定解析? 举例说明你的结论;

（4） 已知 $u=x^2+xy+ky^2$, $k$ 取什么值时 $u(x,y)$ 是调和函数.

**二、 计算积分（每题7分，共28分）**

（1） $\int\limits_C \dfrac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z$, 其中 $C$ 是连接从 1 到 i 的直线段; （3） $\oint\limits_{|z|=1} \tan\pi z\,\mathrm{d}z$;

（2） $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^4}\,\mathrm{d}z$; （4） $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$.

**三、 （14分）**

（1） 求函数 $f(z)=\ln(2-3z+z^2)$ 的麦克劳林级数;

（2） 将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在圆环 $2<|z|<\infty$ 内展开为罗朗级数.

**四、 （16分）**

（1） 求将区域 $\{z;\ 0<\arg z<\pi/2,\ |z|<1\}$ 映为上半平面的一个保角映射 $w=w(z)$;

（2） 求将单位圆内部映为上半平面, 且 $w(0)=\mathrm{i}$, $\arg w'(0)=\pi/2$ 的保角映射 $w=w(z)$.

**五、 （14分）求下列函数的拉普拉斯变换**

（1） 求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t)=|\sin t|$;

（2） 求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, 其中 $F(s)=\ln\dfrac{s^2}{s^2+1}$.

**六、 （6分）**

设函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点解析, 且级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)$ 收敛, 证明: $f(z)$ 在 $a$ 点展开的 *Taylor* 级数的和函数是整函数.

# 4　2007-2008学年 夏学期

**一、　（每题7分，共21分）**

（1）　设 $w_k, k=1,2,\ldots,n$ 为方程 $z^n=a$ 的 $n$ 个根 $(n\geq 1)$, 求和 $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k$ ;

（2）　指出函数 $f(z)=r^2+3r\cos\theta+1+\mathrm{i}r\sin\theta$ 在何处可导, 何处解析;

（3）　找出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z+2}\sin\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点, 并求出其留数.

**二、　计算积分（每题7分，共28分）**

（1）　$\oint\limits_{|z|=1}\left(\dfrac{|z|}{z}-z^2\mathrm{e}^z\sin z\right)\mathrm{d}z;$

（2）　$\oint\limits_{|z|=7}\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z;$

（3）　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x;$

（4）　$\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\ln(z+3)}{|z-1|^2}\,\mathrm{d}z.$

**三、　（15分）**

（1）　将函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{\cos 2z}$ 在 $z=0$ 处展开为泰勒级数(展开到 $z^3$ ), 并指出其收敛半径;

（2）　求函数 $f(z)=\ln\dfrac{z}{z-1}$ 在圆环 $1<|z-1|<+\infty$ 内的罗朗级数.

**四、　（16分）**

（1）　问映射 $w=\dfrac{2-z}{z}$ 将区域 $\left\{z;\ |z-1-\mathrm{i}|<\sqrt{2}, \operatorname{Im} z>0\right\}$ 映为 $W$ 平面上的什么区域.

（2）　求将单位圆内映为上半平面, 且 $w(1/2)=\mathrm{i}$, $w(1)=0$ 的一个保角映射 $w=w(z)$.

**五、　（14分）求下列函数的拉普拉斯变换**

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{\mathrm{e}^\tau-\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau;$

（2）　求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, 其中 $F(s)=\mathrm{e}^{-s}\dfrac{s}{(s+1)^2}.$

**六、　（6分）**

设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内连续且积分与路径无关, 证明: $f(z)$ 在 $D$ 内解析.

## 5　2007-2008学年 春学期

**一、　（每题7分，共21分）**

（1）　求复数 $\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{20}$ 的实部与虚部;

（2）　已知 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数, 证明: $xu(x,y)-yv(x,y)$ 是调和函数;

（3）　找出函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}\sin\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点, 并求出各点的留数.

**二、　计算积分（每题7分，共28分）**

（1）　$\displaystyle\int_C \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$, 其中 $C$ 是从 $-1$ 到 $1$ 的上半单位圆;

（2）　$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\sin z+\mathrm{e}^z}{z^4}\,\mathrm{d}z$;

（3）　$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z+1}{(z-1)\cos z}\,\mathrm{d}z$;　　（4）　$\displaystyle\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i})\,\mathrm{d}\theta$.

**三、　（15分）**

（1）　求函数 $f(z)=\mathrm{e}^{z^2}\cos z^2$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数, 并指出其收敛半径;

（2）　将函数 $f(z)=\cos\dfrac{z}{z+1}$ 在圆环 $0<|z+1|<+\infty$ 内展开为罗朗级数

**四、　（16分）**

（1）　求将区域 $\left\{z;\ |z-1|<\sqrt{2},\,|z+1|<\sqrt{2}\right\}$ 映为单位圆内部, 且 $w(0)=0$ 的一个保角映射 $w=w(z)$;

（2）　求将单位圆内映为单位圆内的保角映射 $w=w(z)$, 且 $w(1/2)=1/2$, $w'(1/2)<0$.

**五、　（14分）求下列函数的拉普拉斯变换**

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t)=t\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{2t-\tau}\cos\tau\,\mathrm{d}\tau$;

（2）　求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, 其中 $F(s)=\mathrm{e}^{-s}\ln\dfrac{s^2+1}{s^2-2s+2}$.

**六、　（6分）**

设级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2^n c_n$ 收敛, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2^n|c_n|$ 发散, 证明: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$ 的收敛半径 $R=2$.

## 6　2007-2008学年 春学期 B卷

**一、　（每题7分，共21分）**

（1）　求复数 $\mathrm{e}^{2z+1}$ 的实部与虚部, $z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}$;

（2）　求解方程 $z^4 + \mathrm{i} = 0$;

（3）　求所有具有形式 $u = f(x^2 + y^2)$ 的调和函数.

**二、　计算积分（每题7分，共28分）**

（1）　$\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^5}\,\mathrm{d}z$;　　（3）　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + 1}{2 - 2x + x^2}\,\mathrm{d}x$;

（2）　$\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2 + z}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z$;　　（4）　$\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\mathrm{e}^z}{|z-1|^2}\,\mathrm{d}z$.

**三、　（15分）**

（1）　求函数 $f(z) = \sin z^2$ 的麦克劳林级数, 并指出其收敛半径;

（2）　将函数 $f(z) = \dfrac{1 + z^2}{\sin z}$ 在圆环 $0 < |z| < \pi$ 内展开为罗朗级数(计算到 $z^3$ 的系数).

**四、　（16分）**

（1）　求将单位圆内映为单位圆内的保角映射 $w = w(z)$, 且 $w(1/2) = 0$, $w'(1/2) > 0$;

（2）　求将区域 $\{z;\ 0 < \arg z < \pi/3,\ |z| < 1\}$ 映为上半平面的一个保角映射 $w = w(z)$.

**五、　（14分）求下列函数的拉普拉斯变换**

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\tau\sin\tau\,\mathrm{d}\tau$;

（2）　求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, 其中 $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s-1)}$.

**六、　（6分）**

设幂级数 $\sum c_n z^n$ 的收敛半径为 $R$, 证明: 幂级数在圆周 $|z| = R$ 上处处绝对收敛或处处不绝对收敛.

# 7　2007-2008学年 冬学期 B卷

**一、　（每题7分，共28分）**

（1）　把复数 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 用指数形式表示;

（2）　求解方程 $\sinh z = 2\mathrm{i}$;

（3）　已知 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数, 且 $xu+yv=(x^2+y^2)\mathrm{e}^x\cos y$, 求 $f(z)$;

（4）　找出函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z+1}}$ 的孤立奇点, 并求出其留数.

**二、　计算积分（每题7分，共21分）**

（1）　$\displaystyle\int_C \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{d}z$, 其中 $C$ 是从原点 0 到 $1+\mathrm{i}$ 的直线段;

（2）　$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z\cos z}\,\mathrm{d}z$;　　（3）　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x$.

**三、　（15分）**

（1）　求 $f(z)=\dfrac{2(z+1)}{z(z+2)}$ 在 $z=-1$ 处展开的泰勒级数, 并指出其收敛半径;

（2）　将 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 在 $0<|z|<\pi$ 内展开为罗朗级数(计算 $z$ 到 $z^3$ 的系数).

**四、　（16分）**

（1）　求将区域 $\{z;\ 0<\arg z<\pi/4,\ |z|<2\}$ 映为上半平面的一个保角映射 $w=w(z)$;

（2）　求将单位圆内映为单位圆内的保角映射 $w=w(z)$, 且 $w(1/2)=1/2$, $\arg w'(1/2)=\pi/2$.

**五、　（14分）求下列函数的拉普拉斯变换**

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t)=\mathrm{e}^t\displaystyle\int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$;

（2）　求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, 其中 $F(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{(s-1)(s^2+1)}$.

**六、　（6分）设 $f(z)$ 在 $D=\{z;\ |z-z_0|\le r\}$ 上解析, 证明:**

(1)　$f(z_0)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\displaystyle\int_0^{2\mathrm{i}} f(z_0+r\mathrm{e}^{\pi\theta})\,\mathrm{d}\theta$;

(2)　若有 $|f(z)|\le|f(z_0)|$, $\forall z\in D$, 则 $f(z)\equiv f(z_0)$, $\forall z\in D$ .

# 8　2007-2008学年 秋学期

**一、　（每题7分，共21分）**

（1）　求复数 $(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n$ 的实部与虚部;

（2）　求解方程 $\tan z=2\mathrm{i}$, 写出解的实部与虚部;

（3）　函数 $u(x,y)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{z^3-1}\right)$ 在什么区域内是调和函数? 且求函数 $v(x,y)$ 使得 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在该区域内解析.

**二、　计算积分（每题7分，共28分）**

（1）　$\displaystyle\int_C \frac{1}{4+z^2}\,\mathrm{d}z$, 其中 $C$ 是连接从 1 到 $-1$ 的上半单位圆周部分;

（2）　$\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1-\cos z}{(z+1)z^3}\,\mathrm{d}z$;　（3）　$\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2\sin(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}})\,\mathrm{d}z$;　（4）　$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

**三、　（15分）**

（1）　将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)(z+4)}$ 在圆环 $2<|z-2|<6$ 内展开为罗朗级数;

（2）　求函数 $f(z)=\dfrac{z^4+1}{\cos z}$ 的麦克劳林级数(计算到 $z^4$ 的系数), 并指出其收敛半径.

**四、　（16分）**

（1）　求分式线性映射 $w=w(z)$, 将 $Z$ 平面上三个点 $-1,\mathrm{i},1$ 分别映为 $W$ 平面上三个点 $-0,1,\infty$; 并求出 $w=w(z)$ 把单位圆映成的区域.

（2）　求将右半单位圆 $\{z;\ -\pi/2<\arg z<\pi/2,\ |z|<1\}$ 映为单位圆, 且 $w(1/2)=0$, $w'(1/2)>0$ 的一个保角映射 $w=w(z)$.

**五、　（14分）求下列函数的拉普拉斯变换**

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t)=t\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-3\tau}\sin\tau\,\mathrm{d}\tau$;

（2）　求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, 其中 $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s}$.

**六、　（6分）**

设区域 $D$ 内含有一段实轴, 又设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 及 $g(z)=u(z,0)+\mathrm{i}v(z,0)$ 都在 $D$ 内解析, 证明: 在 $D$ 内 $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=u(z,0)+\mathrm{i}v(z,0)$.

# 9　2009-2010学年 秋学期 重修

**一、　（每题8分，共32分）**

（1）　求复数 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}+1}$ 的实部与虚部;

（2）　求解方程 $\sinh z = 2\mathrm{i}$;

（3）　指出函数 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}2xy$ 在何处可导, 何处解析, 并在可导处求出其导数;

（4）　找出函数 $f(z) = \dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z+2}}$ 的孤立奇点, 并求出其留数.

**二、　计算积分（每题8分，共16分）**

（1）　$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{2z+1}{1-\cosh z}\,\mathrm{d}z$;

（2）　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

**三、　（16分）**

（1）　将函数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z-1}$ 在圆环 $1 < |z-1| < +\infty$ 内展开成罗朗级数;

（2）　将函数 $f(z) = \cos(\dfrac{z+1}{z})$ 在圆环 $0 < |z| < +\infty$ 内展开成罗朗级数.

**四、　（16分）**

（1）　求将区域 $\{z;\ 0 < \arg z < \pi/3,\ |z| < 2\}$ 映为上半平面的一个保角映射 $w = w(z)$;

（2）　试作保角映射 $w = w(z)$ ,将上半平面 $\{z;\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$映为 $W$ 平面上的上半平面, 且 $w(0) = 1$, $w(1+\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

**五、　（14分）求下列函数的拉普拉斯变换**

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\sin\tau\,\mathrm{d}\tau$;

（2）　缺

**六、　缺（应为6分）**

# 10　2008-2009学年 秋学期 重修

## 一、　计算与简答（每题7分，共21分）

（1）　求解方程 $z^4-1-\mathrm{i}=0$, 写出解的实部与虚部;

（2）　已知 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数, 且 $xu+yv=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^x\cos y$, 求 $f(z)$;

（3）　找出函数 $f(z)=z\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$ 的孤立奇点, 并求出其留数.

## 二、　计算积分（每题7分，共28分）

（1）　$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z$;　　（3）　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x$;

（2）　$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{1-\cos z}{(z-1)\sin^3 z}\,\mathrm{d}z$;　　（4）　$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{|z|^2\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$.

## 三、　（15分）

（1）　将函数 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}$ 在圆环 $0<|z|<+\infty$ 内展开为罗朗级数;

（2）　求函数 $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^3\right)^2}$ 的麦克劳林级数, 并指出其收敛范围.

## 四、　（16分）

（1）　求将区域 $\{z;\ |z|<1,\ -\pi/2<\arg z<\pi/2\}$ 映为上半平面的一个保角映射 $w=w(z)$;

（2）　求将单位圆内部映为单位圆内部, 且 $w(0)=1/2$, $w'(0)<0$ 的保角映射 $w=w(z)$.

## 五、　（14分）求下列函数的拉普拉斯变换

（1）　求 *Laplace* 变换 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t)=\displaystyle\int_0^t\tau\mathrm{e}^\tau\sin\tau\,\mathrm{d}\tau$;

（2）　求 *Laplace* 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s}F(s)\right\}$, 其中 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$.

## 六、　（6分）

设 $f(z)$ 是整函数, 且当 $z$ 的模充分大时有 $|f(z)|\le M|z|^n$, 这里常数 $M>0$, $n$ 为自然数, 证明: $f(z)$ 是一个至多 $n$ 次的多项式.