第二章作业

学号：PB20051061 姓名：牟真伟

1.设 $X(k)$ 表示长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的 DFT 。

（1）证明如果 $x(n)$ 满足关系式 $x(n)=-x(N-1-n)$，则 $X(0)=0$ 。

（2）证明当 N 为偶数时，如果 $x(n)=x(N-1-n)$，则 $X\left(\frac{N}{2}\right)=0$ 。

(1) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) + \sum_{n=0}^{N-1} x(N-1-n)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) + x(N-1-n)\right]$

$= 0$

(2) $X(\frac{N}{2}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n}$

$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\pi}$

$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(-1)^n$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)(-1)^n + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(-1)^n\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)(-1)^n + \sum_{n=0}^{N-1} x(N-1-n)(-1)^{N-1-n}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)(-1)^n + x(N-1-n)(-1)^{-1-n}\right]$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)(-1)^n - x(N-1-n)(-1)^n\right]$

$\because x(n) = x(N-1-n)$

$\therefore X(\frac{N}{2}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 0 = 0$

2.已知两个有限长序列为：

$$x(n)=\begin{cases} n+1, & 0\le n\le 3 \\ 0, & 4\le n\le 6 \end{cases}$$

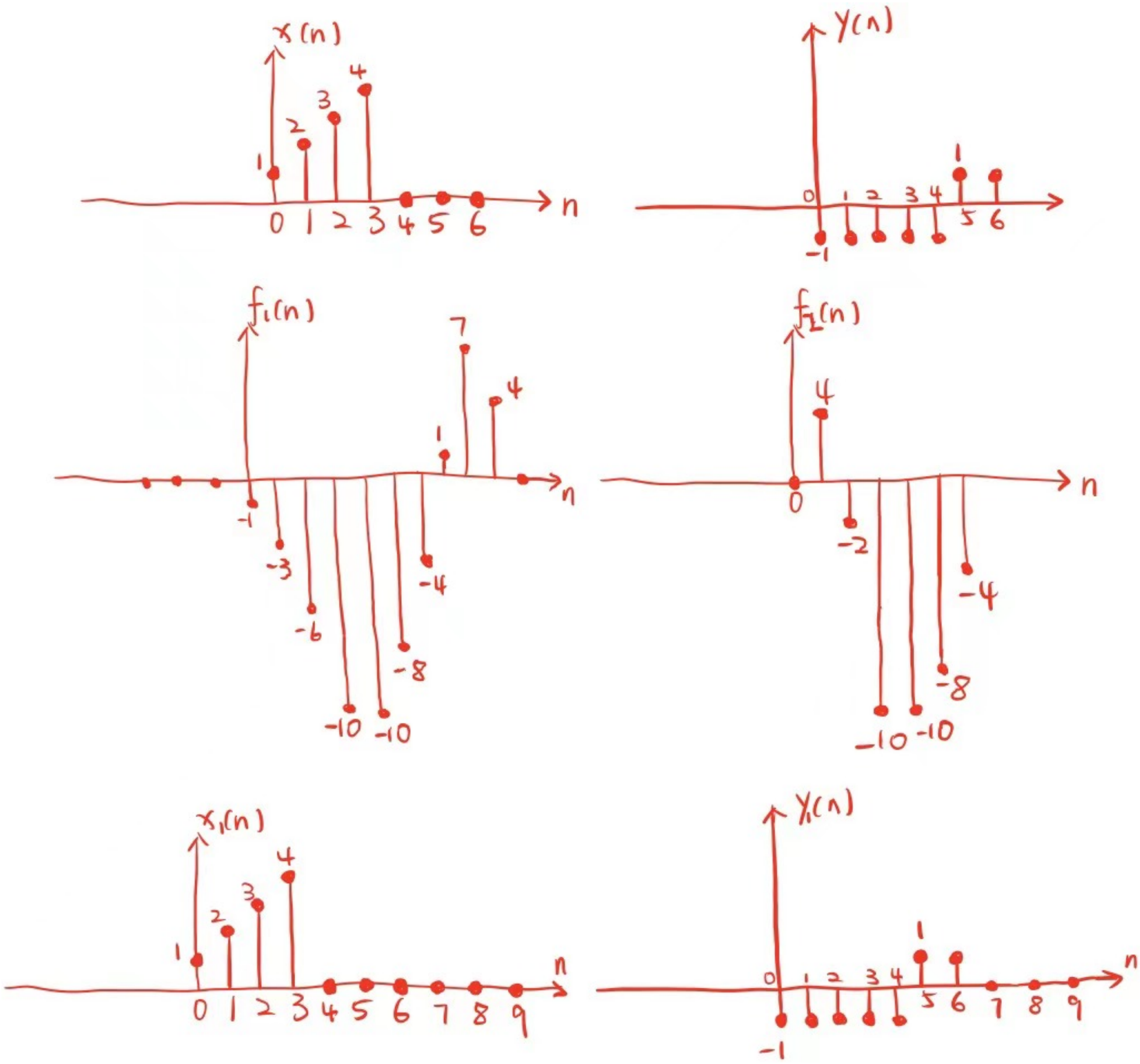
$$y(n)=\begin{cases} -1, & 0\le n\le 4 \\ 1, & 5\le n\le 6 \end{cases}$$

试画出序列 $x(n), y(n)$ 的图；

作图画出线性卷积 $f_1(n)=x(n)*y(n)$ 以及圆周卷积 $f_2(n)=x(n)\otimes y(n)$ 的结果，并比较其异同；

设 $x_1(n)$ 和 $y_1(n)$ 的周期卷积与 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的线性卷积相等，画出 $x_1(n)$ 和 $y_1(n)$。

注：以上三问回答只需给出最终序列的图。



3.若 $x(n)\{n=0,1,,N-1\}$ 为 N 点有限长序列，$X(e^{j\omega})$为其 DTFT 变换。现对 $x(n)$完整序列作 DFT 变换，得到 $X(k)$ $\{n=0,1,\ldots,N-1\}$。

1）是否可以用 $X(k)$ $\{n=0,1,\ldots,N-1\}$重建 $X(e^{j\omega})$？证明你的结论。

2）给出 $X(e^{j\omega})$使用 $X(k)$的重建表达式。

3. 可以用 $X(k)[n=0,1,\cdots,N-1]$ 重建 $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}e^{-j\omega n}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}e^{-j\omega N}}{1-W_N^{-k}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{1-e^{-j\omega N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}e^{-j\omega}}$$

重建公式 $X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$

$$\Phi_k(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega N}}{N(1-W_N^{-k}e^{-j\omega})}$$

4. 已知 N 点有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 DFT 分别为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$。若 $x_3(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$，试证明 $X_3(k)=\frac{1}{N}X_1(k)\otimes X_2(k)$。这里，$\otimes$ 表示圆周卷积运算。

4.

$$X_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)x_2(n)W_N^{nk}$$

$$x_1(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_1(k)W_N^{-nk}$$

$$x_2(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_2(k)W_N^{-nk}$$

$$X_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}X_1(k)W_N^{-nk_1}x_2(n)W_N^{nk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}X_1(k_1)\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)W_N^{n(k-k_1)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}X_1(k_1)\quad X_2((k-k_1))_N R_N(k)$$

$$=\frac{1}{N}X_1(k)\otimes X_2(k)$$

5. Hanning 窗有如下两种形式的时域序列 $w(n)$，请分别求取两种形式对应的频率响应 $W(e^{j\omega})$。两种形式的序列长度 N 均为奇数。

1）双边形式 $w_1(n)=\cos^2\dfrac{n\pi}{N-1}\qquad n=0,\pm1,\cdots\cdots,\pm\dfrac{N-1}{2}$

2）单边形式 $w_2(n)=\sin^2\dfrac{n\pi}{N-1}\qquad n=0,1,\cdots\cdots,\ N-1$

(1)

$$W_1(n) = \cos^2\frac{n\pi}{N-1}$$

$$= \frac{1+\cos\frac{2n\pi}{N-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n}{N-1}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2n\pi}{N-1}} + e^{-j\frac{2n\pi}{N-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j\frac{2n}{N-1}\pi} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{2n}{N-1}\pi}$$

矩形窗 $W_R(n)=1\ (n=0,\pm1,\cdots,\pm\frac{N-1}{2})$

的频谱函数为 $W_R(e^{j\omega}) = \dfrac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

由频移定理可得

$$W_1(\omega) = \frac{1}{2}W_R(\omega) + \frac{1}{4}W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right) + \frac{1}{4}W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)$$

(2) $W_2(n) = \sin^2\frac{n\pi}{N-1}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi n}{N-1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4j}\left(e^{j\frac{2\pi n}{N-1}} - e^{-j\frac{2\pi n}{N-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4j}e^{j\frac{2\pi n}{N-1}} + \frac{1}{4j}e^{-j\frac{2\pi n}{N-1}}$$

矩形窗函数 $W_R(n)=1\ (n=0,1,\cdots,N-1)$

的频谱函数为 $W_R(e^{j\omega}) = \dfrac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}e^{j\frac{(N-1)\omega}{2}}$

$$W_2(\omega) = \frac{1}{2}W_R(\omega) - \frac{1}{4j}W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right) + \frac{1}{4j}W_R\left(\omega+\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

6.已知 $x(t)=\sin 2\pi f_0 t$， $f_0=2kHz$。现对 $x(t)$按以下两种方式取样和截取数据，用 DFT 变换进行频谱分析：

1） $x_1(n)=\sin 2\pi f_0 nT$， $0\le n\le 19$，取样频率 $f_s=1/T=10kHz$

a)求 $X_1(e^{j\omega})$=DTFT[$x_1(n)$]，按照规定的作图要求给出|$X_1(e^{j\omega})$|的连续曲线图。

b）求 $X_1(k)$=DFT[$x_1(n)$]，按照规定的作图要求给出|$X_1(k)$|的离散谱线图。

c）设 $x_{10}(n)$为 $x_1(n)$的延长序列：

$$x_{10}(n)=\begin{cases}x_1(n), & 0\le n\le 19\\ 0, & 20\le n\le 79\end{cases}$$

求 $X_{10}(k)$=DFT[$x_{10}(n)$]，按照规定的作图要求给出|$X_{10}(k)$|的离散谱线图。

d）观察上述三图，提出问题并分析解释。

2）$x_2(n)=\sin 2\pi f_0 nT$，$0\le n\le 19$，取样频率 $f_s=1/T=6kHz$

a）求 $X_2(e^{j\omega})$=DTFT[$x_2(n)$]，按照规定的作图要求给出|$X_2(e^{j\omega})$|的连续曲线图。

b）求 $X_2(k)$=DFT[$x_2(n)$]，按照规定的作图要求给出|$X_2(k)$|的离散谱线图。

c）设 $x_{20}(n)$为 $x_2(n)$的延长序列：

$$x_{20}(n)=\begin{cases}x_2(n), & 0\le n\le 19\\ 0, & 20\le n\le 79\end{cases}$$

求 $X_{20}(k)$=DFT[$x_{20}(n)$]，按照规定的作图要求给出|$X_{20}(k)$|的离散谱线图。

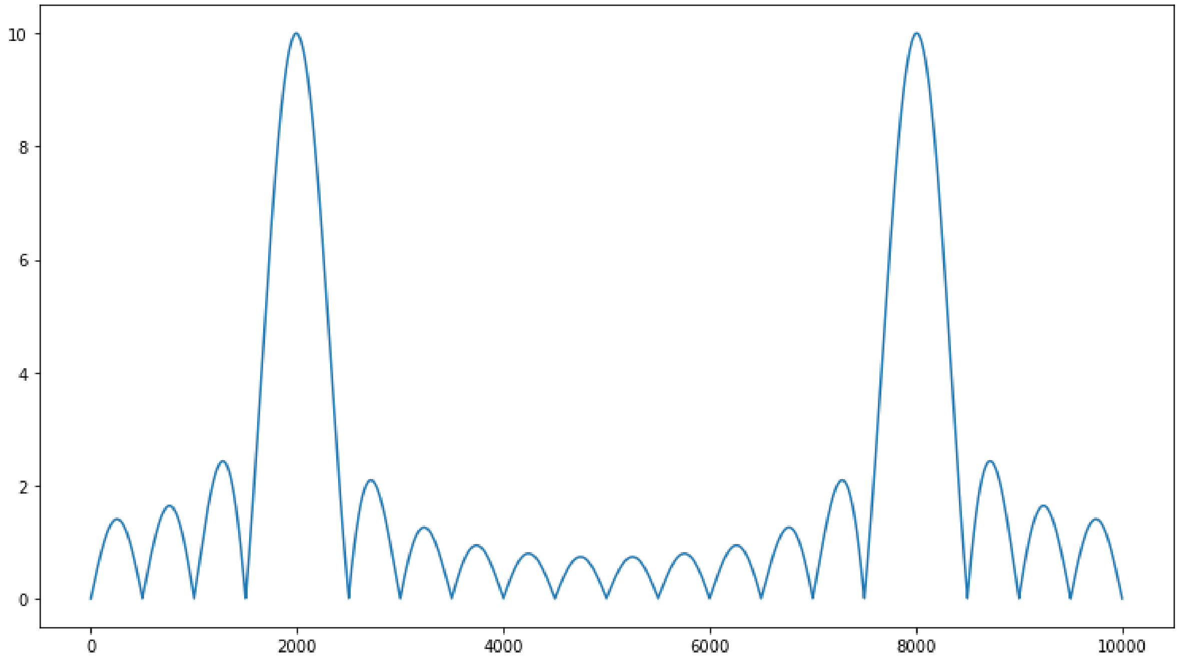
d）观察上述三图，提出问题并分析解释。

作图要求：1）纵坐标谱线幅度要求归一化；2）横坐标为模拟域频率，单位 kHz，频谱示意范围在 $4kHz$ 以内即可；3）|$X(k)$|等离散谱线图，用竖线表示，不要将数值用折线相连。

(1)

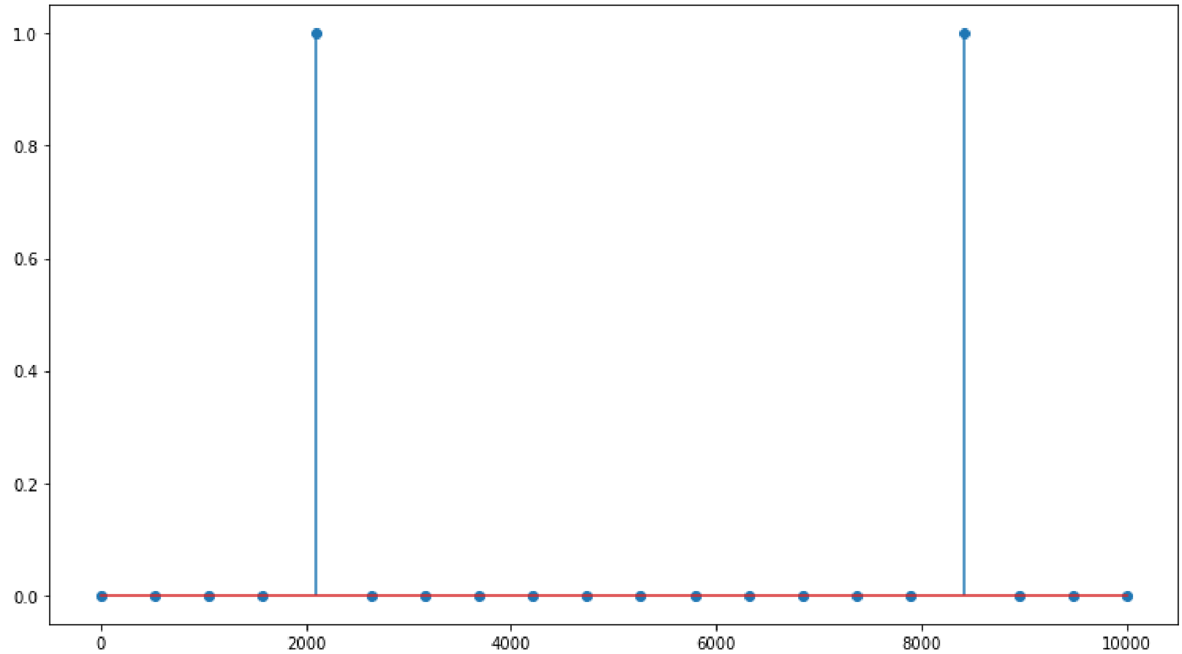
(a)

$DTFT[x_1(n)]$的连续频谱图为



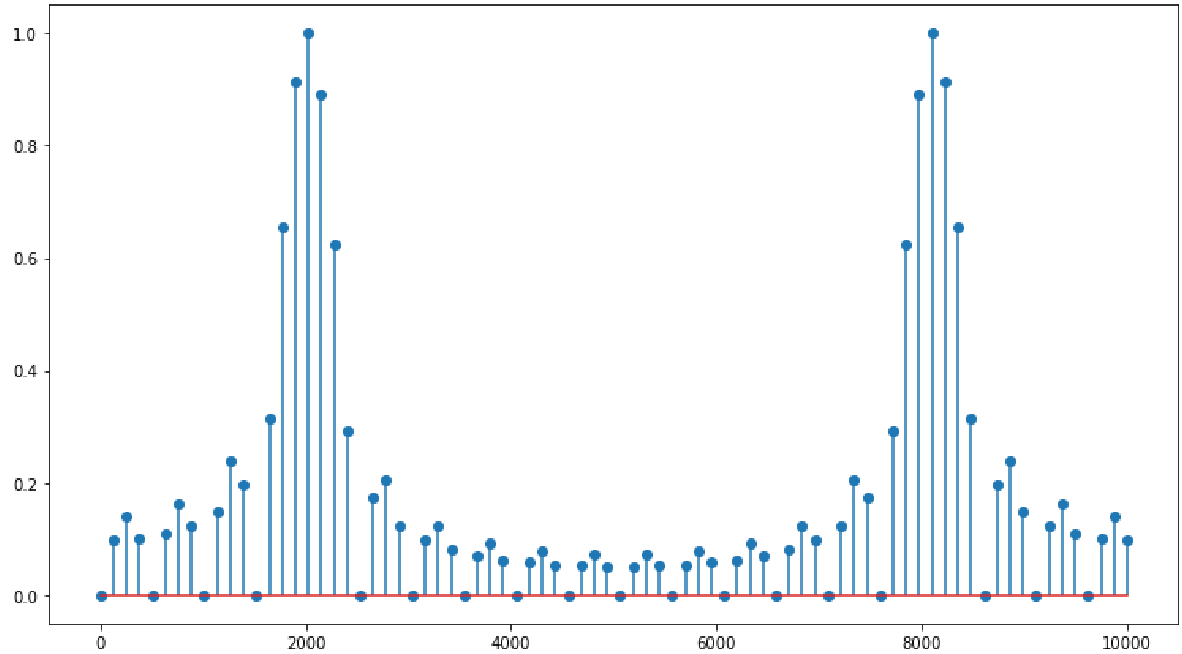
(b)

$DFT[x_1(n)]$的离散谱线图为



(c)

延长序列$x_{10}(n)$的DFT离散谱线图为



(d)

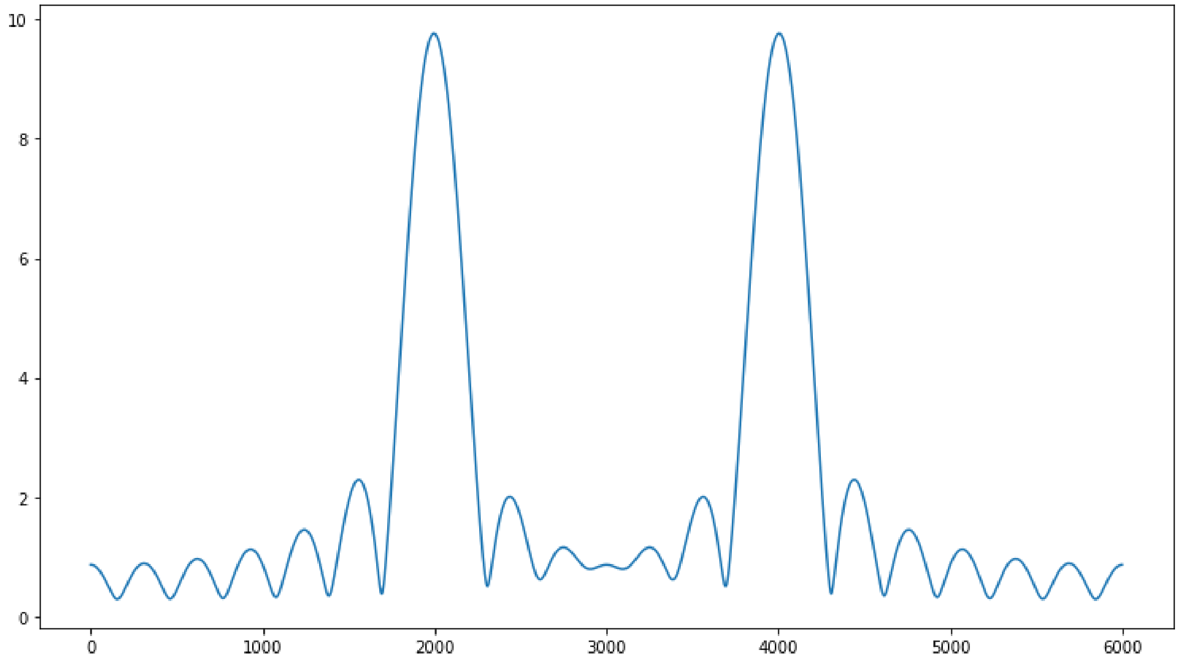
延长序列后在做DFT有什么影响?

DTF是对DTFT频域的采样，延长时域抽样的区间长度，可以减小DFT频域采样间隔,减小栅栏效应。

(2)

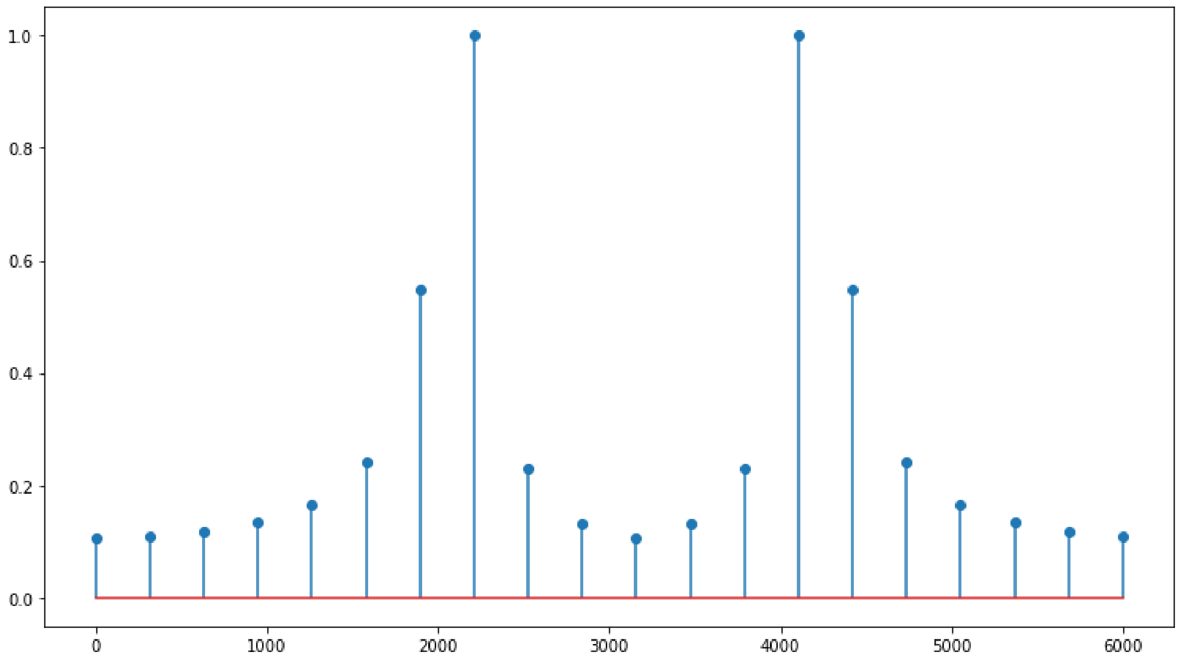
(a)

$DTFT[x_2(n)]$的连续频谱图为



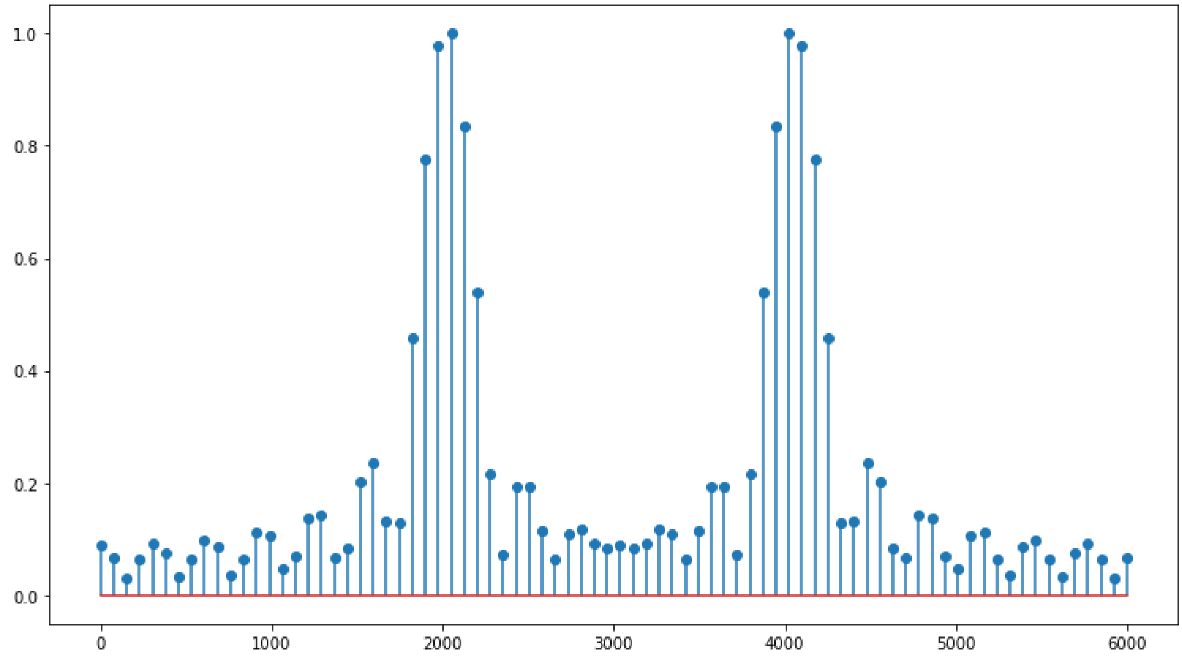
(b)

$DFT[x_2(n)]$的离散谱线图为



(c)

延长序列$x_{20}(n)$的DFT离散谱线图为



（d）

提高时域采样频率有什么好处？

提高时域采样频率可以时频域周期延拓的频率加大，减小频谱混叠的现象。