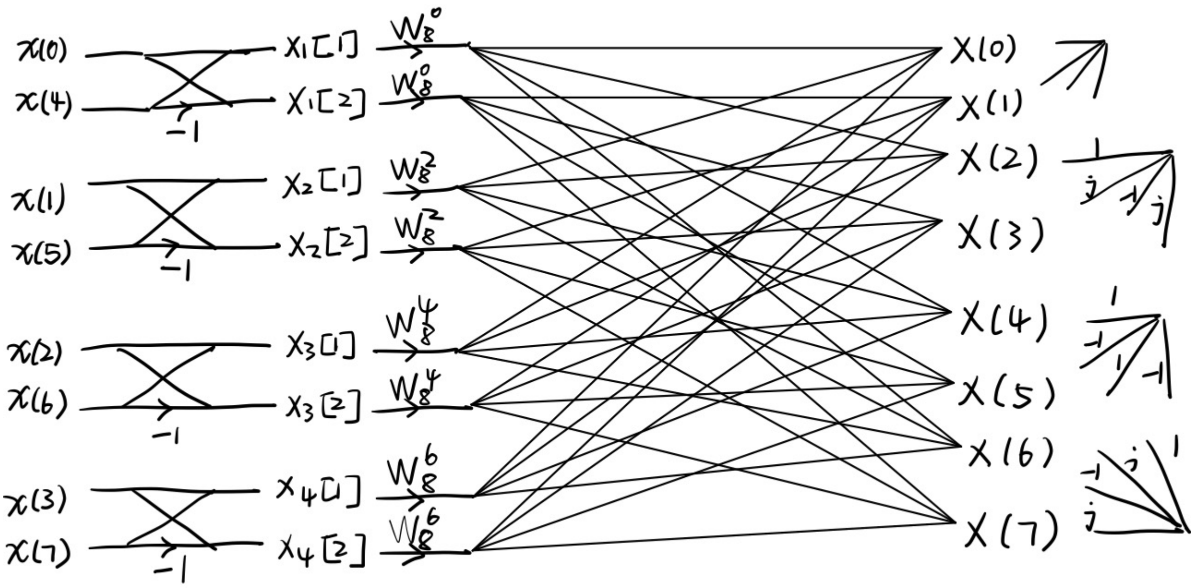
第二章作业

学号：PB20051061 姓名：牟真伟

1. 按照复合数分解算法的原理，推导设计 $X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{7}nk}$ 的快速算法，画出算法流程图，并与基 2 算法的结果进行比较。

$N=8=2\times4$ 可将其按基4分解为 4个2点DFT，流程图如下.



计算量为 $8\times(2+4+1)=56$ 次复乘

$8\times(2+4-2)=32$ 次复加

基2算法需 $\frac{8}{2}\times3=12$ 次复乘

$8\times3=24$ 次复加.

2. $X(k)=\sum_{n=0}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$，这里 $N=ML$。

设 $n=n_1M+n_0$， $k=k_1L+k_0$， 其中 $0\le n_1,k_0\le L-1$， $0\le k_1,n_0\le M-1$

请分析说明，在以上的定义条件下，$X(k)$的复合数分解快速算法不可以采用以下计算顺序：

$$X(k_1L+k_0)==\sum_{n_1=0}^{L-1}W_L^{k_0n_1}\sum_{n_0=0}^{M-1}[x(n_1,n_0)W_N^{k_0n_0}]W_M^{k_1n_0}$$

而只能采用的计算顺序为：

$$X(k_1L+k_0)=\sum_{n_0=0}^{M-1}[W_N^{k_0n_0}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)W_L^{k_0n_1}]W_M^{k_1n_0}$$

$$X(k_1L+k_0)=\sum_{n_0=0}^{M-1}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)\,W_N^{(n_1M+n_0)(Lk_1+k_0)}$$

$$\because\ W_N^{n_1k_1ML}=1$$

$$\therefore\ W_N^{(n_1M+n_0)(Lk_1+k_0)}=W_N^{n_0k_0}\,W_M^{n_0k_1}\,W_L^{n_1k_0}$$

$$\therefore\ X(k_1L+k_0)=\sum_{n_0=0}^{M-1}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)\,W_N^{n_0k_0}\,W_M^{n_0k_1}\,W_L^{n_1k_0}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{L-1}\left[\sum_{n_0=0}^{M-1}x(n_1M+n_0)\,W_N^{n_0k_0}W_M^{n_0k_1}\right]W_L^{n_1k_0}$$

显然 $\sum_{n_0=0}^{M-1}x(n_1M+n_0)\,W_N^{n_0k_0}W_M^{n_0k_1}\neq\sum_{n_0=0}^{M-1}\left[x(n_1M+n_0)W_N^{n_0k_0}\right]W_M^{k_1n_0}$

$$X(k_1L+k_0)=\sum_{n_0=0}^{M-1}\left[W_N^{k_0n_0}\left(\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)\,W_L^{n_1k_0}\right)\right]W_M^{n_0k_1}$$

3. 已知 $X(k),k=0,1,\cdots,2N-1$ 是一个 $2N$ 点实序列 $x(n)$ 的 DFT 值，现需要从 $X(k)$ 求 $x(n)$ 值，为了提高运算效率，设计一个 N 点的 IFFT 运算一次完成。

设 $x_1(n)=x(2n)\quad x_2(n)=x(2n+1)\quad 0\leq n\leq N-1$

$x_0(n)=x_1(n)+j\,x_2(n)$

$\therefore\ x_1(n)=\frac{1}{2}(x_0(n)+x_0^*(n))$ ①

$x_2(n)=\frac{1}{2j}(x_0(n)-x_0^*(n))$ ②

$X_0(k)=X_1(k)+j\,X_2(k)$

由基2FFT可知 $X(k)=X_1(k)+W_{2N}^{k}X_2(k)\quad 0\leq k\leq N-1$

$X(k+N)=X_1(k)-W_{2N}^{k}X_2(k)\quad 0\leq k\leq N-1$

$\therefore\ X_1(k)=\frac{1}{2}(X(k)+X(k+N))$

$X_2(k)=\frac{1}{2W_{2N}^{k}}(X(k)-X(k+N))$

$\therefore\ X_0(k)=\frac{1}{2}(X(k)+X(k+N))+j\frac{1}{2W_{2N}^{k}}(X(k)-X(k+N))\quad 0\leq k\leq N-1$

将 $X_0(k)$ 作一次 IFFT 得到 $x_0(n)$，由①②式即可得到 $x_1(n)$，$x_2(n)$，进而得到 $x(n)$

4. 用 $N=50$ 的有限冲激响应滤波器来过滤一段长数据，我们需要使用重叠保留法和 FFT 来实现滤波。为了做到这一点，必须满足两个条件：

（1）输入各段必须重叠 P 个抽样点；

（2）每一段产生的输出中取出 Q 个抽样点。

那么，当这些抽样点连接到一起时，得到的序列就是所要求的滤波输出。假设输入的各段长度为 100 个抽样点，而离散傅里叶变换的长度为 128 点。进一步假设，圆周卷积的输出序列号是从 $n=0$ 到 $n=127$，则：

（a）求 P；

（b）求 Q；

（c）求取出来的 Q 个点之起点和终点的标号，即确定从圆周卷积的 128 点中要取出哪些点去和前一段的点衔接起来。

(a) 系统 $h(n)$ 长度为 50，输入各段必须重叠 $P=50-1=49$

(b) 每段输入前面为重叠的 49 个点，后面为补零的 28 个点

输出中的抽取点数 $Q=128-28-49=51$

(c) 起始点标号 $n=49$ 终点标号 $n=99$.

5. 已知实序列 $x(n)$ 长度为 8，其 8 点 FFT 结果为 $X(k)=\{9,5,3,2,1,2,3,5\}$，另一 16 点序列 $y(n)$ 恰好是 $x(n)$ 的两倍延拓，求 $Y(k)$。

$y(n) = x(n) \quad n=0,1,\cdots 7$

$y(8+n) = x(n) \quad n=0,1,\cdots 7$

令 $y_1(n) = y(n) + y(8+n)$

$y_2(n) = [y(n) - y(8+n)] W_{16}^{n} \quad n=0,1,\cdots 7$

由基2 DIF-FFT可知

$Y(2r) = DFT[y_1(n)]$

$= 2DFT[x(n)]$

$= 2X(r) \quad r=0,1,\cdots 7$

$Y(2r+1) = DFT[y_2(n)] = 0 \quad r=0,1,\cdots 7$

$\therefore Y(k) = \{9,0,5,0,3,0,2,0,1,0,2,0,3,0,5,0\}$.

6. 已知两个 N 点实序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 DFT 分别为 $X(k)$ 和 $Y(k)$，现在需要求出序列 $x(n)$ 和 $y(n)$，试用一次 N 点 IFFT 运算来实现。

设 $z(n) = x(n) + jy(n)$

$\therefore Z(k) = X(k) + jY(k)$

对 $Z(k)$ 作一次 IFFT 运算

$z(n) = IFFT[Z(k)]$

$= IFFT[X(k) + jY(k)]$

$x(n) = \frac{1}{2}(z(n) + z^*(n))$

$y(n) = \frac{1}{2j}(z(n) - z^*(n))$

7. 对一个连续时间信号 $x_a(t)$ 采样 1s 得到一个 4096 个采样点的序列：

（a）若采样后没有发生频谱混叠，$x_a(t)$ 的最高频率是多少？

（b）若计算采样信号的 4096 点的 DFT，DFT 系数之间的频率间隔是多少 Hz？

（c）假定我们仅仅对 $200 \le f \le 300$ Hz 频率范围所对应的 DFT 采样点感兴趣，若直接用 DFT，要计算这些值需要多少次复乘？若用按时间抽取 FFT 则需多少次？

（d）为了使 FFT 算法比直接计算 DFT 效率更高，需要多少个频率采样点？

(a) 采样频率为 4096Hz，若采样后没有发生频谱混叠．

由奈奎斯特采样定理．$x_a(t)$ 最高频率为

$$f_{max} = \frac{1}{2} f_s = 2048\text{Hz}$$

(b) DFT 系数之间的频率间隔为 $\frac{1}{1s} = 1\text{Hz}$.

(c) $200 \le f \le 300$Hz 共有 101 个频率点，每个频率点的 DFT 需 4096 次复乘，

直接 DFT 共需 $101 \times 4096 = 413696$ 次复乘

FFT 需 $\frac{1}{2} \times 4096 \times \log_2 4096 = 24576$ 次复乘

(d) 直接计算 M 个点 DFT 需 MN 次复乘

FFT 需 $\frac{N}{2}\log_2 N$ 次复乘

令 $\frac{N}{2}\log_2 N < MN$ 得 $M > \frac{1}{2}\log_2 N = \frac{1}{2}\log_2 4096 = 6$

∴ 至少需要 6 个频率采样点.