Лабораторна робота 3
Дослідження ітераційних циклічних алгоритмів

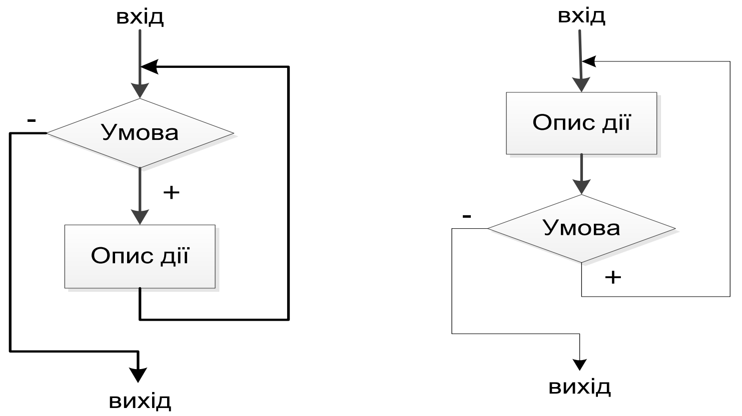
Мета – дослідити подання операторів повторення дій та набути практичних навичок їх використання під час складання циклічних програмних специфікацій.

Основні теоретичні відомості

У блок-схемах для опису операторів повторення використовується основна та похідна схеми (рис.1, а, б). Ромб містить умову, а прямокутник – повторювану дію. За основною схемою (рис.1а) спочатку перевіряється умова, а потім у разі позитивного результату перевірки виконується дія або дії. За похідною схемою (рис.1б) дія або дії передують перевірці умови. З цього виходить, що за похідною схемою дія виконується хоча б один раз.

Приклад застосування оператора повторення під час складання програмних специфікацій

Задача 1.5. Знайти число з номером N ряду Фібоначчі.
Розв'язання
Програмні специфікації запишемо у псевдокоді та графічній формі у вигляді блок-схеми.
Крок 1. Визначимо основні дії.
Крок 2. Деталізуємо дію обчислення двох перших чисел ряду Фібоначчі.
Крок 3. Деталізуємо дію знаходження числа з номером N ряду Фібоначчі



а) *б*)
Рис.1. Опис оператора повторення основної (*а*) та похідної (*б*) форм у блок-схемах

Псевдокод

крок 1
початок
Обчислення двох перших чисел ряду Фібоначчі
Знаходження числа з номером N ряду Фібоначчі
кінець

крок 2
початок
Fib1 := 1
Fib2 := 1
Знаходження числа з номером N ряду Фібоначчі
кінець

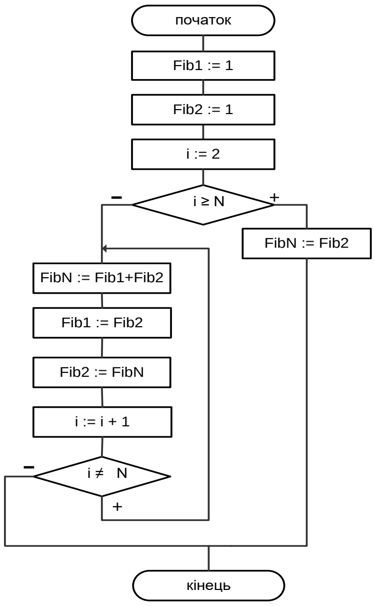
крок 3
початок
Fib1 := 1
Fib2 := 1
i := 2
якщо i ≥ N
  то
    FibN := Fib2
  інакше
    повторити
      FibN := Fib1+Fib2
      Fib1 := Fib2
      Fib2 := FibN
      i := i + 1
    поки i ≠ N
    все повторити
все якщо
кінець

Блок-схема

крок 1

крок 2

крок 3



Варіанти завдань

1. Для $x \in [\,0, 4\,]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ знайти

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ .$$

2. З точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ обчислити значення функції $Ln\,x$:

$$\mathrm{Ln}\,a = (a - 1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\ , \quad \text{для} \quad 0 \le a \le 2\,.$$

Порівняти одержане за допомогою ряду значення зі значенням, отриманим стандартною функцією.

3. З точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ обчислити:

$$s = 1 - \frac{x^2+1}{3} + \frac{x^4+1}{5} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}+1}{2^n+1} + \ldots\ , \quad \text{де} \quad 0 < x < 1.$$

4. З точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ знайти значення змінної:

$$y = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \mathrm{Sin}x} \quad \text{для} \quad x = 0{,}56.$$

5. Обчислити відрізок ряду:

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}+1}{2^n+1} \quad \text{для} \quad x = 0{,}56.$$

Обчислення завершити, якщо $\left|\dfrac{x^{2n}+1}{2^n+1}\right| \le 10^{-4}$.

6. З точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ обчислити значення функції e^x :

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\,.$$

7. Задане дійсне число x. Послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n$ утворена за законом

$$a_n = \frac{x}{\sqrt{n}(n+2)}, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Отримати суму $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, де k - найменше ціле число, що задовольняє двом умовам: $k > 10$, $| a_k | < 10^{-4}$.

8. Із заданою точністю ε обчислити значення функції $\cos x$:

$$\operatorname{Cos} x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\,.$$

9. Дані додатні дійсні числа a, x, ε. У послідовності $y_1, y_2, \ldots$, що утворена за законом

$$y_0 = a; \quad y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1}+\frac{x}{y_{i-1}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots$$

знайти перший член y_n, для якого виконується нерівність $| y_n^2 - y_{n-1}^2 | < \varepsilon$.

10. Для заданого цілого a і дійсного $| x | < 1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ знайти

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)x^k}{k!}\,.$$

11. З точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ обчислити квадратний корінь із довільного цілого числа, використовуючи метод Ньютона:

$$y_n = \frac{y_{n-1}+a/y_{n-1}}{2}, \quad y_0 = 1, \quad \text{де } a \text{ - вихідне число.}$$

Якщо a від’ємне, то вивести відповідне повідомлення.

12. Із заданою точністю обчислити значення функції $\sin x$:

$$\text{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n+1)} + \ldots .$$

13. Для $x \in [\,0, 5\,]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ знайти суму парних компонент ряду

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

14. Із заданою точністю ε обчислити значення суми

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!} .$$

15. З точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ обчислити значення функції $Ln\, x$:

$$\text{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots \quad \text{при } |\,x\,| < 1.$$

16. Нехай $y_0 = 0$; $y_{k=} \frac{y_{k-1}+1}{y_{k-1}\ \ +2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Дано дійсне $\varepsilon > 0$. Знайти перший член y_n, для якого $|\, y_n - y_{n-1}\,| < 10^{-5}$.

17. Із заданою точністю ε обчислити значення функції $Arctg\, x$:

$$\text{Arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad \text{при } |\,\text{x}\,| < 1.$$

18. Задане дійсне число x. Послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_\text{n}$ утворена за законом

$a_\text{n} = x^\text{n} / (2n)!$, $n = 1, 2, \ldots$.

Отримати суму $a_1 + a_2 + \ldots + a_\text{k}$, де k - найменше ціле число, що задовольняє двом умовам: $k > 10$, $|\, a_\text{k}\,| < 10^{-5}$.

19. Обчислити:

$$s = \frac{x^2 - 1}{1+1!} + \frac{2x^2 - 1}{1+2!} + \frac{3x^2 - 1}{1+4!} + \frac{4x^2 - 1}{1+8!} + \ldots , \quad \text{для } 0 \le x \le 2$$

з точністю до члена ряду, що менше 10^{-5}.

20. Для заданого дійсного x і $0 \le n < 5$ з точністю 10^{-4} знайти

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!} .$$

21. Нехай $x_0 = 1; x_k = \frac{2 - x_{k-1}^3}{5}$, $k = 1, 2, \ldots$. Знайти перший член x_n, для якого виконується нерівність $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-5}$.

22. Із заданою точністю обчислити значення математичної константи e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

23. З точністю 10^{-5} обчислити значення суми

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2^k k!)}.$$

Визначити кількість доданків.

24. Із заданою точністю ε обчислити значення функції $Sh\, x$:

$$\mathrm{Sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots .$$

25. Задане дійсне число x. Послідовність $a_1, a_2, ..., a_n$ утворена за законом

$$a_n = \frac{x^{2n} \mathrm{Sin}\, x^n}{n^2}, \; n = 1, 2, \dots .$$

Отримати суму $a_1 + a_2 + ... + a_k$, де $x \in (-2, 2)$, k - найменше ціле число, що задовольняє двом умовам: $k > 10$, $| a_k | < 10^{-4}$.

26. Використовуючи метод послідовних наближень, з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, обчислити $x = \sqrt[5]{a}$ за формулою:

$$x_{n+1} = \frac{4}{5} x_n + \frac{a}{5x_n^4},$$

вважаючи

$$x_0 = \begin{cases} min(2a, 0.95), & a \le 1 \\ a/5, & 1 < a < 25 \\ a/25, & \text{інакше} \end{cases}$$

27. Обчислити значення квадратного кореня із числа $a > 0$ із заданою точністю e на основі рекурентного співвідношення

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[x_n + \frac{a}{x_n} \right], \; x_0 = \frac{a}{2},$$

де x_n – попереднє, x_{n+1} - наступне наближення до кореня. Точність обчислення вважається досягнутою, коли $| x_{n+1} - x_n | < 10^{-5}$.

28. Дано дійсне $a > 0$. Послідовність $x_0, x_1, \dots$ утворена за законом

$$x_0 = \begin{cases} min(2a, 0.95), & a \le 1 \\ a/5, & 1 < a < 25, \\ a/25, & \text{інакше} \end{cases}$$

$$x_n = \frac{4}{5}x_{n-1} + \frac{a}{5x_{n-1}^4}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Знайти перший член x_n, для якого виконується нерівність $\frac{5}{4}a\,|\,x_{n+1} + x_n\,| < 10^{-6}$.

Обчислити для знайденого значення x_n різницю $a - x_n^5$.

29. Наближено (із заданою точністю ε) обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} \mathrm{Ln}(2 + \mathrm{Sin}x)dx$, використовуючи формулу прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \right),$$

де $h = (b - a)/n, \quad x_i = a + i \cdot h - h/2$.

30. Обчислити $x = \sqrt[p]{a}$, використовуючи формулу

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{p^2} \cdot \left[\left(p^2 - 1\right) + \frac{1}{2} \cdot (p+1) \cdot \frac{a}{x_n^p} - \frac{1}{2} \cdot (p+1) \cdot \frac{x_n^p}{p} \right], \ \boldsymbol{x_0 = 1}$$

з точністю, заданою користувачем. Значення a, p ($p \neq 1, p \neq 2$) ввести з клавіатури.

31. З точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ обчислити значення функції $\ln\frac{1+x}{x}$ за формулою

$$S = 1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} - \frac{X^3}{4} + \dots + (-1)^{N+1}\frac{X^{N-1}}{N} + \dots$$

32. Наближено (із заданою точністю ε) обчислити $(1 + X)^m$, за формулою $S = 1 + m \cdot X + \frac{m(m-1)X^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)X^3}{3!} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)X^4}{4!} + \dots$

33. З точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ обчислити значення функції $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, x$\in (-1; 1)$ за формулою $S = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + .. + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)x^n}{2n!}$

34. З точністю $\varepsilon = 10^{-8}$ обчислити значення функції $\frac{e^X - e^{-X}}{2}$ за формулою $S = x + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} + \frac{X^7}{7!} + \frac{X^9}{9!} + \dots$, використавши рекурентну формулу для обчислення члена ряду.

35. З точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ обчислити значення функції $\ln\frac{1+X}{1-X}$ за формулою $S = 2 \cdot (x + \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} + \frac{X^7}{7} + \frac{X^9}{9} + \dots)$, використавши рекурентну формулу для обчислення члена ряду.

Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- титульний аркуш;
- назву та мету роботи;
- варіант;
- постановку задачі;
- побудову математичної моделі, графіка функції;
- псевдокод алгоритму;
- блок схема алгоритму;
- випробування алгоритму;
- висновки.

Критерії оцінювання

Критерії оцінювання в процентах від максимального балу:

постановка задачі - 20%;
побудова математичної моделі – 30%;
псевдокод алгоритму – 15%;
блок схема алгоритму – 15%;
випробування алгоритму – 15%;
висновки – 5%.