Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I

А.В. Улезько, А.А. Тютюников

ПРАКТИКУМ
по моделированию социально-экономических систем и процессов

для студентов, обучающихся по специальности
38.05.01. «Экономическая безопасность»

Воронеж - 2015

Печатается по решению методической комиссии факультета экономики и менеджмента Воронежского государственного аграрного университета.

УДК 338.2:519.86 (075)
ББК 65.013:65 в6 я7
У

Улезько А.В.
Практикум по моделированию социально-экономических систем и процессов:
У учебное пособие. 2-е изд. доп. и перераб. / А.В. Улезько, А.А. Тютюников. – Воронеж: ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ, 2015. – 200 с.

В практикуме раскрывается круг экономических задач, для решения которых могут использоваться методы экономико-математического моделирования. Приведены примеры решения задач, базирующихся на использовании оптимизационных, сетевых и имитационных моделей, а также задач выбора стратегии в условиях риска и неопределенности. В каждом разделе содержатся задания для самостоятельной работы студентов. Приведены вопросы для самоконтроля уровня теоретических знаний и практических навыков решения экономических задач с использованием методов экономико-математического моделирования.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по специальности для студентов, обучающихся по специальности 38.05.01. «Экономическая безопасность».

Табл. 46 Ил. 59.

Рецензенты:

Бурда А.Г., доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической кибернетики Кубанского государственного аграрного университета;

Терновых К.С., доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой организации производства и предпринимательской деятельности Воронежского государственного аграрного университета имени императора Петра I.

© А.В. Улезько, А.А. Тютюников, 2015
© ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **5**
1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ . **6**
1.1. Алгоритм решения задач симплексным методом с естественным базисом 6
Задания для самостоятельной работы 13
Вопросы для самоконтроля 15
1.2. Алгоритм решения задач симплексным методом с искусственным базисом 16
Задание для самостоятельной работы 20
Вопросы для самоконтроля 20
1.3. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов 21
Задание для самостоятельной работы 29
Вопросы для самоконтроля 31
2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ MICROSOFT EXCEL **32**
2.1. Пример решения задачи по оптимизации использования ресурсов 32
2.2. Пример решения транспортной задачи 41
3. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ **48**
3.1. Экономико-математическая модель по оптимизации рационов кормления сельскохозяйственных животных 48
Задание для самостоятельной работы 56
Вопросы для самоконтроля 61
3.1. Экономико-математическая модель по оптимизации использования минеральных удобрений 62
Вопросы для самоконтроля 82
3.3. Экономико-математическая модель по оптимизации отраслевой структуры производства 84
Задание для самостоятельной работы 101
Вопросы для самоконтроля 101
4. ЗАДАЧИ ВЫБОРА СТРАТЕГИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ **103**
4.1. Решение задачи выбора стратегии в условиях неопределенности 103
Задание для самостоятельной работы 107
Вопросы для самоконтроля 108
4.2. Решение задачи выбора стратегии в условиях риска 108
Задание для самостоятельной работы 111
Вопросы для самоконтроля 111

5. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ 112
5.1. Элементы теории графов 112
5.2. Задача нахождения кратчайшего пути на графе. Алгоритм Дейкстры. 114
5.3. Задача нахождения минимального остовного дерева. Алгоритм Прима 118
5.4. Экономико-математическая модель по оптимизации маршрута движения транспортных средств. Линейное программирование. 121
5.5. Экономико-математическая модель по оптимизации маршрута движения транспортных средств. Решение в программе «Графоанализатор». 126
Задания для самостоятельной работы 131
Вопросы для самоконтроля 137
6. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ 138
6.1. Имитационная модель денежных потоков и формирования источников финансирования 139
Задание для самостоятельной работы 148
Вопросы для самоконтроля 149
7. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ 150
7.1. Тесты для оценки знаний по разделам и в целом по изучаемой дисциплине 150
7.2. Вопросы, выносимые на экзамен 194
7.3. Ответы на вопросы тестов 195
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 196

ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум предназначен для получения навыков практической разработки и реализации экономико-математических моделей.

В первой-шестой частях практикума раскрываются методы и приводятся примеры решения задач линейного программирования симплексным методом и методом потенциалов, технологии реализации задач линейного программирования с помощью Microsoft Excel, на конкретных примерах описывается процесс разработки и реализации экономико-математических моделей по оптимизации рационов кормления и отраслевой структуры производства, сетевых и имитационных моделей, приводятся задачи выбора стратегий в условиях риска и неопределенности. После примеров по каждой из тем предлагаются индивидуальные варианты для самостоятельного решения рассмотренных задач. Номер обязательного варианта определяется преподавателем, ведущим лабораторные занятия.

В седьмом разделе для студентов заочной формы обучения приводятся задания для контрольной работы, порядок ее выполнения и сдачи на проверку.

В восьмом разделе даны материалы для текущего и итогового контроля знаний в виде тестовых вопросов по всем разделам изучаемой дисциплины и вопросов, выносимых на экзамен.

Выполнение каждой темы лабораторного занятия завершается составлением отчета, на основании которого преподаватель проверяет правильность решения задач и производит индивидуальный опрос студента с целью текущего контроля знаний. Отчет может быть сформирован как на бумажном, так и на электронном носителе. Индивидуальный опрос проводится на основании вопросов, приведенных в каждой теме после задания для самостоятельной работы в качестве вопросов для самоконтроля. По результатам опроса по каждой теме студенту выставляется оценка. Критерии оценки знаний по отдельным темам:

- оценка «отлично» выставляется, если студент выполнил задание полностью и без ошибок, показал полные и глубокие знания по изученной теме, логично и аргументированно ответил на все вопросы по выполненному заданию;
- оценка «хорошо» выставляется, если студент выполнил задание полностью и без ошибок, твердо знает материал по данной теме, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в ответе, достаточно полно ответил на вопросы по выполненному заданию;
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент выполнил задание полностью, но с незначительными ошибками, показал знание только основ материала по данной теме, усвоил его поверхностно, но не допускал при ответе на вопросы грубых ошибок или неточностей;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент выполнил задание полностью, но с грубыми ошибками, не знает основ материала по данной теме, допускает при ответе на вопросы грубые ошибки и неточности.

Студент не аттестуется по данной теме, если задание по теме не выполнено или выполнено не полностью.

Если студент не аттестован хотя бы по одной из тем лабораторных занятий или имеет оценку «неудовлетворительно», то преподаватель, ведущий лабораторные занятия, имеет право не допустить студента до сдачи экзамена.

К экзамену допускаются студенты: аттестованные по всем темам лабораторных занятий; не имеющие по этим темам ни одной оценки «неудовлетворительно»; набравшие в ходе заключительного тестирования (по всем разделам дисциплины) не менее 40 баллов.

Студенты, имеющие по всем темам лабораторных занятий оценки «отлично» и набравшие в ходе заключительного тестирования не менее 90 баллов, могут быть рекомендованы к освобождению от экзамена с выставлением итоговой оценки «отлично».

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Алгоритм решения задач симплексным методом с естественным базисом

Условие задачи:

В результате присоединения земель соседних хозяйств площадь пашни агрохолдинга увеличилась на 4000 га (B_1). На этой площади планируется возделывать зерновые культуры, сахарную свеклу, подсолнечник. Площадь посева технических культур по агротехническим требованиям не должна превышать 25% площади пашни, т.е. 1000 га (B_2). Под возделывание данных культур хозяйство располагает запасом дизельного топлива в количестве 280 000 кг (B_3) и средствами для приобретения минеральных удобрений в количестве 450 000 кг действующего вещества (B_4).

Данные об урожайности сельскохозяйственных культур, о планируемых затратах ресурсов в натуральном и стоимостном выражении, ценах реализации продукции и планируемом объеме прибыли в расчете на 1 га посева отдельных сельскохозяйственных культур приведены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные для задачи

Показатели	Сельскохозяйственные культуры		
	зерновые культуры	сахарная свекла	подсолнечник
Урожайность, ц/га	40 (a_1)	300 (a_4)	20 (a_7)
Затраты диз топлива, кг на 1 га	50 (a_2)	124 (a_5)	68 (a_8)
Затраты удобрений, кг д.в-ва на 1 га	90 (a_3)	320 (a_6)	90 (a_9)
Цена реализации 1 ц продукции, руб.	720 (k_1)	190 (k_2)	1600 (k_3)
Себестоимость 1 ц продукции, руб.	520 (d_1)	130 (d_2)	980 (d_3)
Прибыль с 1 га, тыс. руб.	8,0 ($a_1 \cdot (k_1 - d_1)/1000$)	18,0 ($a_4 \cdot (k_2 - d_2)/1000$)	12,4 ($a_7 \cdot (k_3 - d_3)/1000$)

Требуется определить такое сочетание посевных площадей зерновых культур, сахарной свеклы и подсолнечника, которое позволило бы при существующих ограничениях в ресурсах получить максимальную сумму прибыли.

За неизвестные примем площади посева указанных в постановке задачи сельскохозяйственных культур (в гектарах):

X_1 - площадь посева зерновых,

X_2 - площадь посева сахарной свеклы,

X_3 - площадь посева подсолнечника.

Ограничения по использованию ресурсов записываются в виде неравенств и отражают условия по использованию пашни, дизельного топлива, минеральных удобрений:

По использованию пашни:	X_1	+	X_2	+	X_3	≤	4 000
По площади посева технических культур:			X_2	+	X_3	≤	1 000
По использованию дизельного топлива:	$50X_1$	+	$124X_2$	+	$68X_3$	≤	280 000
По использованию мин. удобрений:	$90X_1$	+	$320X_2$	+	$90X_3$	≤	450 000

Критерий оптимальности данной задачи – максимизация суммы прибыли. В этом случае целевая функция будет иметь следующий вид

$$Z_{max} = 8{,}0X_1 + 18{,}0X_2 + 12{,}4X_3$$

Поскольку все условия задачи выражены неравенством типа ≤, то задача может быть решена симплексным методом с естественным базисом.

Последовательность решения задачи линейного программирования симплексным методом с естественным базисом рассмотрим на примере поставленной выше задачи.

Чтобы решить задачу, необходимо систему неравенств преобразовать в систему уравнений, т.е. привести к каноническому виду. С этой целью в каждое неравенство вводится по одной дополнительной неизвестной.

Дополнительные неизвестные в данной задаче означают:

X_4 - возможное недоиспользование пашни;

X_5 - возможное недоиспользование пашни, выделяемой под технические культуры;

X_6 - возможное недоиспользование дизельного топлива;

X_7 - возможное недоиспользование минеральных удобрений.

В результате преобразования получим систему четырех уравнений с семью неизвестными:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4000 \\ X_2 + X_3 + X_5 = 1000 \\ 50X_1 + 124X_2 + 68X_3 + X_6 = 280000 \\ 90X_1 + 320X_2 + 90X_3 + X_7 = 450000 \\ Z_{\max} = 8{,}0X_1 + 18{,}0X_2 + 12{,}4X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 \end{cases}$$

Дополнительные неизвестные в целевую функцию записываются с нулевой оценкой, так как недоиспользованные ресурсы не позволяют получить прибыль. Система уравнений, в которой количество неизвестных больше количества уравнений, имеет бесконечное множество решений. Если принять, что

основные неизвестные X_1=0, X_2=0, X_3=0, тогда X_4=4000, X_5=1000, X_6=280000, X_7=450000, а прибыль будет равна нулю:

$$Z_{\max} = 8{,}0 \cdot 0 + 18{,}0 \cdot 0 + 12{,}4 \cdot 0 + 0 \cdot 4000 + 0 \cdot 1000 + 0 \cdot 280000 + 0 \cdot 450000$$

Такое решение задачи называется первым допустимым (базисным) решением или опорным планом. С экономической точки зрения первый опорный план является исходным положением для планирования, так как все производственные ресурсы не используются, объем производства равен нулю.

Решение задачи проводится в специальных симплексных таблицах следующего вида:

Таблица 2. Макет симплексной таблицы

№ строки (i)	Базисные переменные (X_j)	Оценки базисных переменных (C_j)	Значения базисных переменных (B_i)	Целевая строка							Контрольный столбец $B_i + \sum_j a_{ij}$	Симплексные отношения B_i / a_{ir}
				C_1	C_2	…	…	…	…	C_n		
				Строка неизвестных								
				X_1	X_2	…	…	…	…	X_n		
1												
2												
…												
…												
…												
m												
m+1	Z_j-C_j			Индексная строка								

В столбец «№ строки (i)» данной таблицы записываются номера уравнений (ограничений); в столбец «Базисные переменные (X_j)» заносятся неизвестные, относительно которых разрешается система уравнений, а в столбец «Оценки базисных переменных (C_j)» - оценки целевой функции базисных неизвестных.

В столбец «Значения базисных переменных (B_i)» (столбец свободных членов) первого опорного плана (первой симплексной таблицы) заносятся значения базисных неизвестных (объем ресурсов). Целевая строка представлена коэффициентами целевой функции, а строка неизвестных – перечнем основных и дополнительных неизвестных (переменных).

В строки основной матрицы первого опорного плана заносятся технико-экономические коэффициенты при основных переменных. Коэффициенты базисных переменных в корпусе матрицы образуют единичную матрицу.

Строка *m+1* называется индексной, или целевой. Если задача решается на максимум значения целевой функции, коэффициенты целевой функции заносятся в первую симплексную таблицу с обратным знаком, при решении на минимум их знаки не меняются. По числам индексной строки (коэффициентам целевой функции) определяют, в каком направлении следует улучшать план. В столбце свободных членов по этой строке записывается сумма произведений значений базисных переменных на соответствующие им оценки.

Контрольный столбец используется для контроля за правильностью

расчета чисел по строке. В контрольный столбец первого опорного плана записывается алгебраическая сумма чисел по строкам, начиная со столбца свободных членов.

Столбец симплексных отношений предназначен для определения направления улучшения плана при переходе от одной таблицы к другой.

Первая симплексная таблица данной задачи представлена в таблице 3.

Таблица 3. Первая симплексная таблица

i	X_j	C_j	B_i	8,0	18,0	12,4	0	0	0	0	$B_i + \sum_j a_{ij}$	B_i / a_{ir}
				X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
1	X_4	0	4 000,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	4 004,0	4 000,0
2	**X_5**	0	1 000,0	0,0	***1,0***	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1 003,0	**1 000,0**
3	X_6	0	280 000,0	50,0	124,0	68,0	0,0	0,0	1,0	0,0	280 243,0	2 258,1
4	X_7	0	450 000,0	90,0	320,0	90,0	0,0	0,0	0,0	1,0	450 501,0	1 406,3
m+1	Z_j-C_j		0,0	-8,0	**-18,0**	-12,4	0,0	0,0	0,0	0,0	-21,6	

Базисные неизвестные характеризуют недоиспользование пашни (X_4), недоиспользование пашни под посев технических культур (X_5), дизельного топлива (X_6) и минеральных удобрений (X_7) и их значение находится в соответствующих строках столбца B_i. Коэффициенты при основных переменных X_1, X_2, X_3 означают нормативы расхода производственных ресурсов на 1 га посева сельскохозяйственных культур, а коэффициенты при дополнительных переменных X_4, X_5, X_6, X_7 образуют единичную матрицу.

После построения первого опорного плана он испытывается на оптимальность. В соответствии с математическим критерием оптимальности план будет оптимальным, если при решении задачи на максимум все числа индексной строки будут неотрицательными, а при решении задачи на минимум – неположительными.

Первый опорный план нашей задачи не является оптимальным, так как в строке *m+1* имеются отрицательные коэффициенты при X_1, X_2, X_3, что указывает на возможность улучшения плана. Улучшение плана достигается путем замены одних базисных переменных на другие. За одну итерацию (перерасчет) можно сделать только одну замену, т. е. одну переменную вывести из базиса, а другую ввести в базис. С этой целью просматривают индексную строку и при решении задачи на максимум выбирают наибольшее по модулю число среди отрицательных, а при решении на минимум – среди положительных чисел. Эти числа указывают, какую переменную следует ввести в базис. Столбцы вводимых в базис переменных называются разрешающими (направляющими, ключевыми, генеральными). С экономической точки зрения разрешающий столбец указывает на наиболее эффективный вид производственной деятельности. В данном опорном плане разрешающим столбцом является столбец, содержащий переменную X_2, следовательно, для улучшения плана необходимо ввести в базис именно переменную X_2 (площадь посева сахарной свеклы).

Чтобы решить, какую переменную необходимо вывести из базиса, необходимо все числа столбца свободных членов построчно разделить на значения разрешающего столбца (кроме нулевых), а результаты записать в столбец симплексных отношений. Наименьшее положительное симплексное отношение указывает, какую переменную необходимо вывести из базиса. Строка, в которой находится наименьшее положительное симплексное отношение, называется разрешающей (направляющей, ключевой). Разрешающая строка характеризует узкое место производства, т. е. описывает фактор, сдерживающий развитие наиболее эффективного вида производственной деятельности. Деление свободных членов на положительные элементы разрешающего столбца обеспечивает также выполнение условия неотрицательности переменных решаемой задачи.

Деление наличия производственных ресурсов на норматив их расхода по X_2 показывает, что за счет пашни под сахарную свеклу можно было бы отвести 4000 га посевных площадей; наличие дизельного топлива позволит возделывать сахарную свеклу на площади 2 258,1 га, минеральных удобрений – на площади 1 406,3 га, а требование об ограничении площади посева технических культур позволяет возделывать сахарную свеклу лишь на 1 000 га. Следовательно, в данной задаче фактором, сдерживающим развитие наиболее эффективной культуры (сахарной свеклы), являются агротехнические требования. В этом случае вторая строка является разрешающей, а из базиса для улучшения плана необходимо вывести X_5. Число, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим (направляющим, ключевым, генеральным) элементом.

Иногда при нахождении разрешающей строки можно столкнуться с таким положением, когда несколько минимальных симплексных отношений имеют одинаковое значение. Выбор разрешающей строки по любому из этих симплексных отношений ведет к нулевому значению базисной переменной в следующей симплексной таблице, т.е. к вырождению. Вырожденные задачи не имеют решения, так как образуется зацикливание. При зацикливании происходит бесчисленное повторение ввода в базис и вывода из него одних и тех же переменных. Устранить вырождение можно путем замены нулевого значения базисной переменной на очень малую величину, которая не окажет существенного значения на конечный результат решения задачи.

После выбора разрешающего столбца и разрешающей строки приступают к построению новой симплексной таблицы. Заполнение таблицы начинают с замены базисных переменных.

В данном примере для улучшения плана из базиса выводится X_5, а вводится X_2 с оценкой, равной 18,0. Переменные X_4, X_6, *и* X_7 остаются в базисе.

Все числа каждой последующей таблицы рассчитываются на основе элементов предыдущей. Расчет чисел новой симплексной таблицы начинают с начальной строки, т.е. с той строки, которая в предыдущей таблице называлась разрешающей. Эти элементы рассчитываются путем последовательного деления чисел бывшей разрешающей строки на разрешающий элемент: $a'_{ij} = a_{ij}/a_{kr}$.

$B'_2 = B_2 / a_{22}$ = 1000:1=1000 $a'_{24} = a_{24} / a_{22}$ 0:1=0
$a'_{21} = a_{21} / a_{22}$ 0:1=0 $a'_{25} = a_{25} / a_{22}$ 1:1=1
$a'_{22} = a_{22} / a_{22}$ 1:1=1 $a'_{26} = a_{26} / a_{22}$ 0:1=0
$a'_{23} = a_{23} / a_{22}$ 1:1=1 $a'_{27} = a_{27} / a_{22}$ 0:1=0

Таблица 4. Вторая симплексная таблица

i	X_j	C_j	B_i	8,0	18,0	12,4	0	0	0	0	$B_i + \sum_j a_{ij}$	B_i / a_{ir}
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
1	X_4	0	3 000,0	1,0	0,0	0,0	1,0	-1,0	0,0	0,0	3 001,0	3 000,0
2	X_2	18,0	1 000,0	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1 003,0	
3	X_6	0	156 000,0	50,0	0,0	-56,0	0,0	-124,0	1,0	0,0	155 871,0	3 120,0
4	**X_7**	0	130 000,0	***90,0***	0,0	-230,0	0,0	-320,0	0,0	1,0	129 541,0	**1 444,4**
m+1	Z_j-C_j		18 000,0	**-8,0**	0,0	5,6	0,0	18,0	0,0	0,0	18 015,6	

Числа бывшего разрешающего столбца можно не рассчитывать, так как коэффициент на месте бывшего генерального элемента всегда будет равен 1, а все остальные коэффициенты равны 0.

Числа остальных строк рассчитываются по правилу прямоугольника. Правило прямоугольника можно выразить следующей формулой:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \times a_{ir}}{a_{kr}},$$

где i - номер расчетной строки;
j - номер расчетного столбца;
k - номер разрешающей строки;
r - номер разрешающего столбца;
a'_{ij}- новое значение расчетного числа;
a_{ij}-старое значение числа в предыдущей таблице;
a_{kj}-число, стоящее в разрешающей строке по j-му столбцу в предыдущей таблице;
a_{kr}-разрешающий (генеральный) элемент;
a_{ir}- число, стоящее в разрешающем столбце по i-й строке в предыдущей таблице.

Подставляя числа в рассмотренную формулу, рассчитаем новое значение чисел по столбцу B_i:

$$B'_1 = 4000 - \frac{1000 \cdot 1}{1} = 3000,$$

$$B'_3 = 280000 - \frac{1000 \cdot 124}{1} = 156000,$$

$$B'_4 = 450000 - \frac{1000 \cdot 320}{1} = 130000,$$

$$Z_{\max} = 0 - \frac{1000 \cdot (-18{,}0)}{1} = 18000.$$

Рассчитаем коэффициенты при X_1 во второй симплексной таблице:

$$a'_{11} = 1 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 1,$$

$$a'_{13} = 50 - \frac{0 \cdot 124}{1} = 50,$$

$$a'_{14} = 90 - \frac{0 \cdot 320}{1} = 90,$$

$$c_1 = -8{,}0 - \frac{0 \cdot (-18{,}0)}{1} = -8{,}0.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты по остальным столбцам.

Расчет чисел контрольного столбца подчиняется общим правилам расчета коэффициентов симплексных таблиц. Если число контрольного столбца совпадает с алгебраической суммой чисел по строке, следовательно, числа данной строки рассчитаны правильно, если же не совпадает, то необходимо искать ошибку расчета чисел по строке.

Полученный во второй симплексной таблице опорный план не является оптимальным, так как в индексной строке имеются отрицательные числа, следовательно, его необходимо улучшать дальше. Процедура улучшения плана осуществляется по ранее рассмотренной схеме до тех пор, пока не получат оптимальный план.

Таблица 5. Третья симплексная таблица

i	X_j	C_j	B_i	8,0	18,0	12,4	0	0	0	0	$B_i + \sum_j a_{ij}$	B_i / a_{ir}
				X_1	X_2	**X_3**	X_4	X_5	X_6	X_7		
1	**X_4**	0	1 555,6	0,0	0,0	***2,6***	1,0	2,6	0,0	0,0	1 561,7	**608,7**
2	X_2	18,0	1 000,0	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1 021,0	1 000,0
3	X_6	0	83 777,8	0,0	0,0	71,8	0,0	53,8	1,0	-0,6	83 903,8	1 167,2
4	X_1	8,0	14 44,4	1,0	0,0	-2,6	0,0	-3,6	0,0	0,0	1 447,3	-565,2
m+1	Z_j-C_j		29 555,6	0,0	0,0	**-14,8**	0,0	-10,4	0,0	0,1	29 530,4	

Расчет чисел третьей симплексной таблицы показывает, что полученный опорный план не является оптимальным, так как в индексной строке присутствуют отрицательные значения. Рассчитывается следующий опорный план. Из базиса выводится X_4, а вводится X_3.

Таблица 6. Четвертая симплексная таблица

i	X_j	C_j	B_i	8,0	18,0	12,4	0	0	0	0	$B_i + \sum_j a_{ij}$
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
1	X_3	12,4	**608,7**	0,0	0,0	1,0	0,4	1,0	0,0	0,0	611,1
2	X_2	18,0	**391,3**	0,0	1,0	0,0	-0,4	0,0	0,0	0,0	391,9
3	X_6	0	**40 087,0**	0,0	0,0	0,0	-28,1	-18,0	1,0	-0,2	40 041,6
4	X_1	8,0	**3 000,0**	1,0	0,0	0,0	1,0	-1,0	0,0	0,0	3 001,0
m+1	Z_j-C_j		**38 591,3**	0,0	0,0	0,0	5,8	4,4	0,0	0,0	38 601,5

Четвертый опорный план является оптимальным, так как все коэффициенты индексной строки неотрицательны.Максимальная прибыль по оптимальному плану составляет 38 591,3 тыс. руб. и будет получена при условии, если под посев зерновых культур будет отведено 3000 га (X_1=3000), под сахарную свеклу – 391,3 га (X_2=391,3), под подсолнечник – 608,7 га (X_3=608,7). Ми-

неральные удобрения и площадь пашни используются полностью (X_4=0, X_7=0), недоиспользование дизельного топлива составляет 40 087 кг (X_6=40 087). Площадь посева технических культур определилась верхней допустимой границей (недоиспользование - X_5=0) и составляет 1000 га (X_2+X_3=1000).

Задания для самостоятельной работы

Используя условия рассмотренной задачи и данные предлагаемых вариантов, составить экономико-математическую модель задачи и решить ее симплексным методом с естественным базисом. Коэффициенты k_j (цены на продукцию) одинаковы для всех вариантов: k_1 = 720, k_2 = 190, k_3 = 1600. Коэффициенты B_2 рассчитываются самостоятельно.

№	Значения по вариантам:			
1	B_1 = 3000 B_3 = 200000 B_4 = 300000	a_1 = 30 a_2 = 48 a_3 = 60 d_1 = 570	a_4 = 400 a_5 = 120 a_6 = 300 d_2 = 152	a_7 = 20 a_8 = 60 a_9 = 60 d_3 = 1200
2	B_1 = 2500 B_3 = 180000 B_4 = 260000	a_1 = 35 a_2 = 45 a_3 = 60 d_1 = 600	a_4 = 350 a_5 = 115 a_6 = 300 d_2 = 160	a_7 = 18 a_8 = 50 a_9 = 90 d_3 = 1000
3	B_1 = 3400 B_3 = 250000 B_4 = 400000	a_1 = 38 a_2 = 46 a_3 = 80 d_1 = 585	a_4 = 400 a_5 = 125 a_6 = 350 d_2 = 152	a_7 = 22 a_8 = 65 a_9 = 90 d_3 = 900
4	B_1 = 3200 B_3 = 240000 B_4 = 340000	a_1 = 40 a_2 = 50 a_3 = 60 d_1 = 615	a_4 = 400 a_5 = 120 a_6 = 280 d_2 = 136	a_7 = 20 a_8 = 60 a_9 = 80 d_3 = 1100
5	B_1 = 5000 B_3 = 350000 B_4 = 550000	a_1 = 36 a_2 = 50 a_3 = 75 d_1 = 375	a_4 = 420 a_5 = 130 a_6 = 330 d_2 = 144	a_7 = 18 a_8 = 60 a_9 = 75 d_3 = 1200
6	B_1 = 4100 B_3 = 300000 B_4 = 450000	a_1 = 37 a_2 = 52 a_3 = 70 d_1 = 525	a_4 = 370 a_5 = 120 a_6 = 300 d_2 = 144	a_7 = 18 a_8 = 61 a_9 = 70 d_3 = 1000
7	B_1 = 3900 B_3 = 230000 B_4 = 300000	a_1 = 38 a_2 = 50 a_3 = 60 d_1 = 450	a_4 = 380 a_5 = 120 a_6 = 280 d_2 = 152	a_7 = 20 a_8 = 60 a_9 = 60 d_3 = 1080
8	B_1 = 3700 B_3 = 250000 B_4 = 400000	a_1 = 37 a_2 = 50 a_3 = 70 d_1 = 525	a_4 = 400 a_5 = 110 a_6 = 320 d_2 = 144	a_7 = 20 a_8 = 70 a_9 = 90 d_3 = 980
9	B_1 = 3500 B_3 = 200000 B_4 = 380000	a_1 = 36 a_2 = 45 a_3 = 80 d_1 = 600	a_4 = 350 a_5 = 128 a_6 = 300 d_2 = 160	a_7 = 18 a_8 = 50 a_9 = 75 d_3 = 1300

№	Значения по вариантам:			
10	$B_1 = 3400$ $B_3 = 185000$ $B_4 = 380000$	$a_1 = 35$ $a_2 = 50$ $a_3 = 60$ $d_1 = 525$	$a_4 = 400$ $a_5 = 140$ $a_6 = 330$ $d_2 = 160$	$a_7 = 20$ $a_8 = 55$ $a_9 = 50$ $d_3 = 980$
11	$B_1 = 3300$ $B_3 = 250000$ $B_4 = 370000$	$a_1 = 30$ $a_2 = 55$ $a_3 = 70$ $d_1 = 600$	$a_4 = 300$ $a_5 = 130$ $a_6 = 280$ $d_2 = 144$	$a_7 = 15$ $a_8 = 55$ $a_9 = 75$ $d_3 = 1100$
12	$B_1 = 3000$ $B_3 = 200000$ $B_4 = 400000$	$a_1 = 38$ $a_2 = 50$ $a_3 = 90$ $d_1 = 675$	$a_4 = 380$ $a_5 = 110$ $a_6 = 320$ $d_2 = 176$	$a_7 = 19$ $a_8 = 54$ $a_9 = 90$ $d_3 = 1300$
13	$B_1 = 2800$ $B_3 = 150000$ $B_4 = 330000$	$a_1 = 42$ $a_2 = 50$ $a_3 = 80$ $d_1 = 525$	$a_4 = 420$ $a_5 = 115$ $a_6 = 340$ $d_2 = 128$	$a_7 = 20$ $a_8 = 60$ $a_9 = 80$ $d_3 = 900$
14	$B_1 = 2500$ $B_3 = 180000$ $B_4 = 400000$	$a_1 = 50$ $a_2 = 50$ $a_3 = 120$ $d_1 = 630$	$a_4 = 500$ $a_5 = 124$ $a_6 = 360$ $d_2 = 176$	$a_7 = 25$ $a_8 = 68$ $a_9 = 100$ $d_3 = 1240$
15	$B_1 = 2900$ $B_3 = 150000$ $B_4 = 300000$	$a_1 = 37$ $a_2 = 50$ $a_3 = 60$ $d_1 = 525$	$a_4 = 400$ $a_5 = 130$ $a_6 = 325$ $d_2 = 160$	$a_7 = 18$ $a_8 = 50$ $a_9 = 60$ $d_3 = 900$
16	$B_1 = 2000$ $B_3 = 150000$ $B_4 = 220000$	$a_1 = 35$ $a_2 = 50$ $a_3 = 60$ $d_1 = 600$	$a_4 = 400$ $a_5 = 124$ $a_6 = 325$ $d_2 = 128$	$a_7 = 20$ $a_8 = 68$ $a_9 = 60$ $d_3 = 1000$
17	$B_1 = 5000$ $B_3 = 300000$ $B_4 = 560000$	$a_1 = 37$ $a_2 = 50$ $a_3 = 90$ $d_1 = 525$	$a_4 = 400$ $a_5 = 120$ $a_6 = 300$ $d_2 = 160$	$a_7 = 20$ $a_8 = 65$ $a_9 = 90$ $d_3 = 1000$
18	$B_1 = 4000$ $B_3 = 250000$ $B_4 = 475000$	$a_1 = 36$ $a_2 = 50$ $a_3 = 100$ $d_1 = 640$	$a_4 = 350$ $a_5 = 120$ $a_6 = 300$ $d_2 = 160$	$a_7 = 18$ $a_8 = 55$ $a_9 = 100$ $d_3 = 1170$
19	$B_1 = 2800$ $B_3 = 200000$ $B_4 = 275000$	$a_1 = 35$ $a_2 = 45$ $a_3 = 75$ $d_1 = 525$	$a_4 = 380$ $a_5 = 125$ $a_6 = 310$ $d_2 = 168$	$a_7 = 16$ $a_8 = 50$ $a_9 = 80$ $d_3 = 1000$
20	$B_1 = 3100$ $B_3 = 180000$ $B_4 = 420000$	$a_1 = 40$ $a_2 = 50$ $a_3 = 100$ $d_1 = 450$	$a_4 = 420$ $a_5 = 135$ $a_6 = 350$ $d_2 = 120$	$a_7 = 20$ $a_8 = 60$ $a_9 = 100$ $d_3 = 700$

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае задача линейного программирования может быть решена симплексным методом с естественным базисом?

2. Что значит «привести систему неравенств к каноническому виду»?

3. Каков экономический смысл дополнительных неизвестных?

4. Каков экономический смысл первого опорного плана?

5. Каков порядок заполнения m+1 (индексной) строки?

6. Как определить оптимальность опорного плана?

7. Каков порядок заполнения контрольного столбца?

8. Каков порядок заполнения столбца симплексных отношений?

9. Как определяется разрешающий столбец?

10. Каков экономический смысл разрешающего столбца?

11. Как определяется разрешающая строка?

12. Когда задача считается вырожденной, как бороться с вырожденностью задачи?

13. Что такое итерация?

14. С чего начинается переход от одного опорного плана к другому?

15. Как при переходе к новой симплексной таблице осуществляется пересчет элементов, стоявших в разрешающей строке?

16. Как при переходе к новой симплексной таблице осуществляется пересчет элементов, стоявших в разрешающем столбце?

17. Как при переходе к новой симплексной таблице осуществляется пересчет всех остальных элементов, не стоявших в разрешающих строке и столбце?

18. Какой формулой можно описать правило прямоугольника, по которому происходит пересчет элементов, не стоявших в разрешающих строке и столбце?

19. Каков смысл технико-экономических коэффициентов в первом опорном плане?

20. Что такое коэффициенты замещения и каков их экономический смысл?

1.2. Алгоритм решения задач симплексным методом с искусственным базисом

Задачи, у которых хотя бы одно из условий задано неравенством типа (≥) или уравнением, решаются симплексным методом с искусственным базисом. Для рассмотрения алгоритма решения задач симплексным методом с искусственным базисом в ранее рассмотренную задачу введем дополнительные условия по гарантированному объему производства зерна и сахарной свеклы и сформулируем постановку задачи следующим образом.

Условие задачи:

В результате присоединения земель соседних хозяйств площадь пашни агрохолдинга увеличилась на 4000 га (B_1). На этой площади планируется возделывать зерновые культуры, сахарную свеклу, подсолнечник. Под возделывание данных культур хозяйство располагает запасом дизельного топлива в количестве 280 000 кг (B_2) и средствами для приобретения минеральных удобрений в количестве 450 000 кг действующего вещества (B_3).

Данные об урожайности сельскохозяйственных культур, нормативах затрат производственных ресурсов и оценке продукции приведены в таблице 1. Требуется определить оптимальное сочетание посевных площадей зерновых культур, сахарной свеклы и подсолнечника с тем, чтобы получить максимум прибыли при выполнении запланированных объемов производства зерновых культур и сахарной свеклы, если известно, что производство зерна должно составлять 126 000 ц (P_1), а сахарной свеклы – не менее 125 000 ц (P_2).

За неизвестные примем площади посева различных культур в гектарах:

X_1 - площадь посева зерновых,

X_2 - площадь посева сахарной свеклы,

X_3 - площадь посева подсолнечника.

Ограничения по использованию ресурсов записываются в виде неравенств типа (≤) и отражают условия по использованию пашни, труда, минеральных удобрений; условия по обеспечению гарантированных объемов производства записываются в виде уравнений и неравенств типа (≥):

По использованию пашни:	X_1	+	X_2	+	X_3	≤	4 000
По использованию дизельного топлива:	$50X_1$	+	$124X_2$	+	$68X_3$	≤	280 000
По использованию минеральных удобрений:	$90X_1$	+	$320X_2$	+	$90X_3$	≤	450 000
По производству зерна:	$40X_1$					=	126 000
По производству сахарной свеклы:			$300X_2$			≥	125 000

Критерий оптимальности данной задачи – максимизация суммы прибыли. В этом случае целевая функция будет иметь следующий вид:

$$Z_{max} = 8{,}0X_1 + 18{,}0X_2 + 12{,}4X_3$$

Приведем запись ограничений к каноническому виду, для чего в систему условий введем дополнительные неизвестные. Тогда условия и цель задачи будут представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4000 \\ 50X_1 + 124X_2 + 68X_3 + X_5 = 280000 \\ 90X_1 + 320X_2 + 90X_3 + X_6 = 450000 \\ 40X_1 = 126000 \\ 300X_2 - X_7 = 125000 \\ Z_{\max} = 8{,}0X_1 + 18{,}0X_2 + 12{,}4X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 \end{cases}$$

Дополнительные неизвестные X_4, X_5, X_6, как и в ранее рассмотренной задаче, с экономической точки зрения означают возможное недоиспользование пашни, дизельного топлива и минеральных удобрений, а X_7 означает возможное перевыполнение планового задания по производству сахарной свеклы.

В полученной системе первые три заданных уравнения можно разрешить относительно дополнительных неизвестных X_4, X_5, X_6. В пятом уравнении дополнительная неизвестная X_7 записана со знаком минус и не может быть принята за базисную неизвестную, так как отрицательное значение базисных величин не допускается в экономических задачах, а четвертое уравнение вообще не содержит дополнительной неизвестной. Поэтому в ограничения, которые заданы неравенством (≥) или уравнением, вводят искусственные неизвестные Y, которые экономического содержания не имеют и вводятся в задачу для образования допустимого решения. Искусственные неизвестные в целевую функцию записываются с оценкой «М». М-оценка единицы измерения не имеет и является величиной, во много раз превышающей оценки основных неизвестных. При решении задач на максимум М-оценка вводится в целевую функцию с отрицательным знаком, а на минимум - с положительным. Такая запись делает невыгодным наличие искусственных неизвестных в опорном плане и способствует их выводу из базиса. С введением искусственных неизвестных задача примет вид:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4000 \\ 50X_1 + 124X_2 + 68X_3 + X_5 = 280000 \\ 90X_1 + 320X_2 + 90X_3 + X_6 = 450000 \\ 40X_1 + Y_1 = 126000 \\ 300X_2 - X_7 + Y_2 = 125000 \\ Z_{\max} = 8{,}0X_1 + 18{,}0X_2 + 12{,}4X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 - MY_1 - MY_2 \end{cases}$$

Решение задачи осуществляется в симплексных таблицах, которые отличаются от симплексных таблиц при решении задач с естественным базисом тем, что содержат две индексные строки $m+1$ и $m+2$.

За базисные неизвестные в первом опорном плане будут приняты X_4, X_5, X_6, Y_1, Y_2. Порядок заполнения первой симплексной таблицы такой же, как и при решении задачи с естественным базисом. В корпус матрицы записываются технико-экономические коэффициенты при переменных, а в контрольный столбец – алгебраическая сумма чисел по строке.

В индексную строку *m+1* первого опорного плана по графе B_i записывается значение целевой функции, а по остальным – оценки основных неизвестных с противоположным знаком. В *m+2* строку с проивоположным знаком записывается алгебраическая сумма произведений М-оценки на коэффициенты соответствующего столбца (таблица 7).

В соответствии с математическим критерием оптимальности при решении задачи с искусственным базисом план будет оптимальным тогда, когда все искусственные неизвестные будут выведены из базиса, числа *m+2* строки превратятся в нули, а в *m+1* строке при решении задачи на максимум все числа будут неотрицательными, а при решении на минимум – неположительными. Иногда при решении задач на максимум все числа *m+2* строки принимают неотрицательные, а при решении на минимум – неположительные значения. В этом случае задача не имеет решения.

Таблица 7. Сплошная симплексная таблица

i	X_j	C_j	B_i	8,0	18,0	12,4	0	0	0	0	
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
1	X_4	0	4 000,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	4 000,0
2	X_5	0	280 000,0	50,0	124,0	68,0	0,0	1,0	0,0	0,0	2 258,1
3	X_6	0	450 000,0	90,0	320,0	90,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1 406,3
4	Y_1	M	126 000,0	40,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
5	**Y_2**	M	125 000,0	0,0	***300,0***	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,0	**416,7**
m+1	Z_j-C_j		0,0	-8,0	-18,0	-12,4	0,0	0,0	0,0	0,0	
m+2			-251	-40,0M	**-300,0M**	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	
1	X_4	0	3 583,3	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	3 583,3
2	X_5	0	228 333,3	50,0	0,0	68,0	0,0	1,0	0,0	0,4	4 566,7
3	X_6	0	316 666,7	90,0	0,0	90,0	0,0	0,0	1,0	1,1	3 518,5
4	**Y_1**	M	126 000,0	***40,0***	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**3 150,0**
5	X_2	18,0	416,7	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
m+1	Z_j-C_j		7 500,0	-8,0	0,0	-12,4	0,0	0,0	0,0	-0,1	
m+2			-126	**-40,0M**	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
1	X_4	0	433,3	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	433,3
2	X_5	0	70 833,3	0,0	0,0	68,0	0,0	1,0	0,0	0,4	1 041,7
3	**X_6**	0	33 166,7	0,0	0,0	***90,0***	0,0	0,0	1,0	1,1	**368,5**
4	X_1	8,0	3 150,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
5	X_2	18,0	416,7	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
m+1	Z_j-C_j		32 700,0	0,0	0,0	**-12,4**	0,0	0,0	0,0	-0,1	-2 637,1
m+2			0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
1	X_4	0	**64,8**	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	
2	X_5	0	**45 774,1**	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	-0,8	-0,4	
3	X_3	12,4	**368,5**	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
4	X_1	8,0	**3 150,0**	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
5	X_2	18,0	**416,7**	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
m+1	Z_j-C_j		**37 269,6**	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	

Улучшение опорного плана при решении задач с искусственным базисом осуществляется, как и при решении с естественным, путем последовательной замены одних базисных неизвестных на другие. Выбор направляющего столбца осуществляется по *m+2* строке до тех пор, пока все числа этой строки не превратятся в нулевые. После выведения всех искусственных переменных из базиса и получения нулевых значений чисел *m+2* строки выбор направляющего столбца осуществляется по числам *m+1* строки, как и при решении задач с естественным базисом.

Решение данной задачи приведено в сплошной симплексной таблице (таблица 7). В первом опорном плане наибольшее по модулю отрицательное число в *m+2* строке принадлежит X_2, следовательно, этот столбец будет разрешающим, а разрешающая строка - пятая, так как в этой строке получено наименьшее симплексное отношение.

Перерасчет всех коэффициентов нового опорного плана осуществляется по ранее рассмотренным правилам. Начальная строка рассчитывается делением всех чисел бывшей разрешающей строки на разрешающий элемент, а числа остальных строк рассчитываются по правилу прямоугольника.

В третьем опорном плане все искусственные неизвестные выведены из базиса, *m+2* строка обратилась в нулевую строку, но план не является оптимальным, так как в *m+1* строке имеются отрицательные числа. Поэтому разрешающий столбец находим по коэффициентам *m+1* строки, как и при решении задач с естественным базисом.

Оптимальное решение получено в четвертом опорном плане, так как данная задача решается на максимум значения целевой функции, все искусственные неизвестные выведены из базиса, числа индексной строки *m+2* равны нулю, а в *m+1* строке все числа не отрицательные.

В соответствии с оптимальным планом под посев зерновых следует отвести 3 150 га пашни (X_1=3150,0), под посев сахарной свеклы – 416,7 га (X_2=416,7) и под посев подсолнечника – 368,5 га (X_3=368,5). По оптимальному плану полностью используются только минеральные удобрения (X_6=0). Недоиспользование пашни составляет 64,8 га (X_4=64,8), а дизельного топлива – 45 774,1 кг (X_5=45 774,1). Производство сахарной свеклы и зерна соответствует плановым объемам. Сумма прибыли составит 37 269,9 тыс. рублей (Z_{max}= 37 269,9). Любое другое сочетание посевных площадей при данных условиях неизбежно повлечет уменьшение суммы прибыли.

Задание для самостоятельной работы

Используя условия рассматриваемой задачи и вариантные данные предыдущей и текущей темы, составить экономико-математическую модель задачи и решить ее симплексным методом с искусственным базисом.

№	Значения по вариантам:		№	Значения по вариантам:	
1	P_1 =74250	P_2 =100000	11	P_1 =81675	P_2 =99000
2	P_1 =70000	P_2 =87500	12	P_1 =90000	P_2 =114000
3	P_1 =106590	P_2 =136000	13	P_1 =97020	P_2 =117600
4	P_1 =105600	P_2 =128000	14	P_1 =103125	P_2 =125000
5	P_1 =148500	P_2 =210000	15	P_1 =80000	P_2 =100000
6	P_1 =125150	P_2 =151700	16	P_1 =50000	P_2 =80000
7	P_1 =120000	P_2 =148200	17	P_1 =152625	P_2 =200000
8	P_1 =112940	P_2 =148000	18	P_1 =118800	P_2 =140000
9	P_1 =103950	P_2 =122500	19	P_1 =80850	P_2 =106400
10	P_1 =96000	P_2 =136000	20	P_1 =102300	P_2 =130200

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае задача линейного программирования должна решаться симплексным методом с искусственным базисом?

2. Каков экономический смысл дополнительных неизвестных?

3. Каков экономический смысл искусственных переменных?

4. Какую оценку имеют искусственные переменные в целевой функции? Каков экономический смысл искусственных переменных?

5. В каких случаях «М»-оценка вводится в целевую функцию с отрицательным знаком, а в каком - с положительным?

6. Каким образом заполняется m+2 строка симплексной таблицы?

7. Когда опорный план задачи, которая решается симплексным методом с искусственным базисом, считается оптимальным?

8. В каком случае задача, решаемая симплексным методом с искусственным базисом, не имеет решения?

9. Каким образом осуществляется улучшение опорного плана при решении задач с искусственным базисом?

10. Каким образом осуществляется выбор разрешающего столбца?

1.3. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Симплексный метод является универсальным для решения задач линейного программирования. Однако в практике планирования существуют такие классы задач, которые могут быть решены более простыми методами. Одним из таких методов является метод потенциалов.

Основной задачей линейного программирования, решаемой методом потенциалов, является транспортная задача. Следует заметить, что название транспортных задач обусловлено тем, что вышеперечисленные методы вначале были разработаны к организации перевозки грузов. В настоящее время этим методом решаются многие другие задачи, не связанные с грузоперевозками. Например, распределение машинно-тракторного парка по видам работ, распределение посевных площадей сельскохозяйственных культур по наилучшим предшественникам или по группам почв и т.д.

Чтобы сформулировать общую постановку транспортной задачи, примем следующие условные обозначения:

- i – номер пункта отправления груза;
- j – номер пункта доставки груза;
- m – количество пунктов отправления;
- n – количество пунктов доставки груза;
- A_i – наименование i-го пункта отправления груза;
- a_i – наличие груза в i-м пункте отправления;
- B_j – наименование j-го пункта доставки груза;
- b_j – потребность j-го пункта в грузе;
- X_{ij} – количество перевозимого груза из i-го пункта отправления в j-й пункт доставки;
- C_{ij} – оценка переменных в целевой функции;
- Z_{min} – значение целевой функции.

Приняв условия обозначения, постановку транспортной задачи в общем виде можно сформулировать следующим образом. Имеется m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots A_m$, на которых сосредоточено определенное количество груза $a_1, a_2, \ldots a_m$, и имеется n пунктов доставки груза $B_1, B_2, \ldots B_n$ с потребностью в этом грузе $b_1, b_2 \ldots b_n$. Требуется определить такие маршруты перевозок, которые бы при всех неотрицательных переменных x_{ij} обеспечивали минимальное значение целевой функции Z_{min}.

В транспортных задачах различают ограничения (условия) по наличию груза в пунктах отправления и ограничение по потребностям в данном грузе пунктов доставки (назначения).

Математически ограничения по наличию груза в пунктах отправления запишутся следующим образом:

$$X_{11}+X_{12}+ \ldots +X_{1n} = a_1$$
$$X_{21}+X_{22}+ \ldots +X_{2n} = a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{m1}+X_{m2}+ \ldots +X_{mn} = a_m$$

Если в данной группе ограничений трансформировать столбцы в строки, то получим ограничения по удовлетворению потребности пунктов доставки в грузе.

$$X_{11}+X_{21}+\ \ldots+X_{m1}\ =b_1$$
$$X_{12}+X_{22}+\ \ldots+X_{m2}\ =b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{1n}+X_{2n}+\ \ldots+\ _{mn}\ =\ b_n$$

Целевая функция будет представлена выражением

$$Z_{min} = C_{11}\,X_{11} + C_{12}\,X_{12} + \ldots + C_{1n}\,X_{1n} + C_{21}\,X_{21} + C_{22}X_{22} + \ldots + C_{mn}\,X_{mn}.$$

Структурная форма записи транспортной задачи выглядит следующим образом:

Найти минимум функции

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}\sum_{j=1} C_{ij}X_{ij}$$

при условиях:

1) наличия груза в пунктах отправления

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \ \ (\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{m});$$

2) потребности в грузе в пунктах доставки

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \ \ (\mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{n});$$

3) неотрицательности переменных

$$X_{ij} \ \geq\ 0\ .$$

В транспортных задачах встречаются модели открытого и закрытого типа. Если общая сумма груза во всех пунктах отправления равна потребности в нем всех пунктов назначения, то такая модель называется закрытой. Закрытая модель транспортной задачи в структурной форме имеет следующий вид:

$$\sum_{i==1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ \ .$$

Если же такого равенства не наблюдается, то модель называется открытой. Открытая модель задачи описывается формулой

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_j\ .$$

При решении транспортных задач открытая модель всегда приводится к закрытому типу путем введения в условие фиктивного пункта отправления груза или фиктивного пункта назначения. Наличие груза в фиктивном пункте отправления или потребность фиктивного пункта назначения равны разности

между наличием груза во всех пунктах отправления и потребностью в грузе всех пунктов назначения. Оценка фиктивных грузоперевозок в целевой функции равна нулю.

Алгоритм решения транспортных задач методом потенциалов разберем на конкретном примере.

Условие задачи:

В хозяйстве грубые корма заготовлены на трех участках в следующем объеме: на первом участке – 500 т (A_1), на втором – 850 т (A_2), на третьем – 600 т (A_3). Заготовленные корма предстоит развезти по четырем фермам. Первой ферме требуется 400 т (B_1), второй – 550 т (B_2), третьей – 700 т (B_3), четвертой – 300 т (B_4). Расстояние от участков до ферм приведено в таблице 8. Себестоимость 1 тонно-километра в среднем по хозяйству составляет 10 рублей. Требуется определить такие маршруты перевозок грубых кормов, чтобы общие затраты на их перевозку с участков до ферм были бы минимальными.

Таблица 8. Расстояние от мест складирования корма до ферм, км

Места складирования корма	Фермы			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$3(c_{11})$	$4(c_{12})$	$2(c_{13})$	$9(c_{14})$
A_2	$8(c_{21})$	$5(c_{22})$	$7(c_{23})$	$8(c_{24})$
A_3	$5(c_{31})$	$6(c_{32})$	$4(c_{33})$	$4(c_{34})$

Так как в задаче себестоимость тонно-километра приведена как средняя величина, то можно найти минимальное значение грузооборота, а потом полученное количество тонно-километров умножить на его среднюю себестоимость. Таким образом будет найдена минимальная сумма затрат на перевозку грубых кормов с участков на фермы.

Запишем данную задачу в виде системы уравнений, приняв за неизвестные возможное количество перевозимого груза с *i*-го участка на *j*-ую ферму:

Ограничения по количеству заготовленного грубого корма на участках:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=500$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=850$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=600$$

Всего заготовлено грубых кормов 1950 т.

Ограничения по потребности ферм в грубых кормах:

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}=400$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}=550$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}=700$$
$$X_{14}+X_{24}+X_{34}=300$$

Всего потребность ферм в грубых кормах равна 1950 т.

Целевая функция принимает следующий вид:

$$Z_{min}=3X_{11}+4X_{12}+2X_{13+}9X_{14}+8X_{21}+5X_{22}+7X_{23}+8X_{24}+5X_{31}+6X_{32}+4X_{33}+4X_{34}$$

Так как сумма количества заготавливаемых грубых кормов на всех участках и потребность ферм в этих кормах равны, то задача считается закрытой.

Решение транспортных задач методом потенциалов осуществляется в таблицах следующего вида.

Таблица 9. Форма таблицы для решения транспортной задачи

Участки	Потенциалы	Фермы				Кол-во кормов на складах, т
		B_1	B_2	B_3	B_4	
	U_i \ V_j	V_1	V_2	V_3	V_4	
A_1	U_1	$\boxed{3}$ X_{11}	$\boxed{4}$ X_{12}	$\boxed{2}$ X_{13}	$\boxed{9}$ X_{14}	500
A_2	U_2	$\boxed{8}$ X_{21}	$\boxed{5}$ X_{22}	$\boxed{7}$ X_{23}	$\boxed{8}$ X_{24}	850
A_3	U_3	$\boxed{5}$ X_{31}	$\boxed{6}$ X_{32}	$\boxed{4}$ X_{33}	$\boxed{4}$ X_{34}	600
Потребность ферм в кормах, т		400	550	700	300	1950

Строка V_j и столбец U_i в данной таблице предназначены для записи значений потенциалов занятых клеток по столбцам и по строкам. В правом верхнем углу каждой клетки записывается оценка целевой функции.

Существует несколько способов построения первого опорного плана: способ северо-западного угла, способ предпочтение наименьшей (при решении на минимум целевой функции) или наибольшей (при решении на максимум целевой функции) оценки по строке; способ двойного предпочтения и т.д. Наиболее часто применяется способ северо-западного угла. Он предполагает начало построения первого опорного плана с заполнения левой верхней клетки таблицы без учета величины оценки. В данной задаче количество грубых кормов на первом участке составляет 500 т, а первой ферме требуется 400 т (таблица 10). Следовательно, потребность первой фермы будет удовлетворена за счет кормов, имеющихся на первом участке.

Таблица 10. Первый опорный план (оценки L)

Участки	Потенциалы	Фермы				Кол-во кормов на складах, т
		B_1	B_2	B_3	B_4	
	U_i \ V_j	$V_1=3$	$V_2=4$	$V_3=6$	$V_4=6$	
A_1	$U_1=0$	3 400	4 - 100	2 + **-4**	9 **3**	500
A_2	$U_2=1$	8 **4**	$\boxed{5}$ + 450	7 - 400	8 **1**	850
A_3	$U_3=-2$	5 **4**	6 **4**	4 300	4 300	600
Потребность ферм в кормах, т		400	550	700	300	1950

Оставшиеся 100 т корма будут перевезены на вторую ферму. Итак, наличие кормов на первом участке распределено полностью. Приступаем к распределению кормов, заготовленных на втором участке, где имеется 850 т. Второй ферме для полного удовлетворения потребнсти в кормах недостает 450 т. Этот недостаток покрывается за счет кормов второго участка. Оставшиеся 400 т кормов на втором участке отдаем третей ферме, так как ее потребность больше остатка, но третьей ферме до полного покрытия потребности недостает 300 т кормов. Недостаток потребности третьей фермы покрывается за счет кормов, заготовленных на третьем участке. Оставшиеся 300 т кормов на третьем участке будут переданы на четвертую ферму. Итак, все заготовленные корма на участках распределены в соответствии с их потребностями.

Значение целевой функции в первом опорном плане равно 9050 т/км.

$$Z_{min}=3\cdot 400+4\cdot 100+5\cdot 450+7\cdot 400+4\cdot 300+4\cdot 300=9050 \text{ т/км.}$$

В построенном опорном плане количество занятых клеток должно быть не менее чем $m+n-1$, где m - количество строк, n - количество столбцов. Если количество занятых клеток меньше, чем сумма строк и столбцов без единицы, то план является вырожденным, т.е. не имеющим решения. Для устранения вырожденности одну из свободных клеток принимают за условно занятую. В условно занятую клетку записывают ноль грузоперевозок и считают эту клетку занятой.

Полученный опорный план проверяют на оптимальность. При решении задачи на минимум план будет оптимальным тогда, когда все характеристики свободных клеток, рассчитанные по формуле $L_{ij}=C_{ij} - (V_i+U_i)$, будут положительными или равными нулю. В данной формуле L_{ij} - характеристика свободной клетки, которая указывает, как изменяется значение целевой функции при перемещении одной единицы груза в данную свободную клетку. Положительная характеристика указывает на увеличение значения целевой функции, отрицательная − на ее уменьшение, а наличие нулевых характеристик свидетельствует о наличии маршрутов перевозки грузов, при которых значение целевой функции остается неизменной. C_{ij} - оценка занятой клетки, V_j - потенциал занятой клетки по j-му столбцу, U_i - потенциал занятой клетки по i-ой строке. Потенциалы занятых клеток рассчитываются по формуле $C_{ij}=V_j+U_i$.

Рассчитаем потенциалы занятых клеток для первого опорного плана по данной формуле, приняв значение $U_1=0$:

$C_{11}=V_1+U_1;$	$3=V_1+0;$	$V_1= 3$
$C_{12}=V_2+U_1;$	$4=V_2+0;$	$V_2= 4$
$C_{22}=V_2+U_2;$	$5=4+U_2;$	$U_2= 1$
$C_{23}=V_3+U_2;$	$7=V_3+1;$	$V_3= 6$
$C_{33}=V_3+U_3;$	$4=6+U_3;$	$U_3=-2$
$C_{34}=V_4+U_3;$	$4=V_4+(-2);$	$V_4= 6$

Значения рассчитанных потенциалов записывают в соответствующие строку и столбец таблицы.

Подставляя найденные параметры в формулу $L_{ij}=C_{ij} – (V_i+U_i)$, рассчитаем характеристики свободных клеток для первого опорного плана:

$L_{13}=C_{13} – (V_3+U_1)=2 – (6+0)= -4$ $L_{24}= C_{24} – (V_4+U_2)=8 – (6+1)= 1$

$L_{14}= C_{14} – (V_4+U_1)=9 – (6+0)= 3$ $L_{31}= C_{31} – (V_4+U_3)=5 – (3 – 2) = 4$

$L_{21}= C_{21} – (V_1+U_2)=8 – (3+1)= 4$ $L_{32}= C_{32} – (V_2+U_3)=6 – (4 – 2) = 4$

Оценки L_{ij} заносятся в правый нижний уголо свободных клеток (табл. 10). Полученный опорный план не является оптимальным, так как данная задача решается на минимум и одна из характеристик имеет отрицательное значение ($L_{13}=-4$). Следовательно, полученный план необходимо улучшать. Улучшение плана осуществляется путем построения замкнутого контура и перемещения объема грузоперевозок по его вершинам.

Затем просматривают значения L-характеристик свободных клеток и среди них выбирают наибольшую по модулю, при решении на минимум − среди отрицательных, а при решении на максимум − среди положительных. В свободной клетке, соответствующей выбранной характеристике, ставят знак (+) и из нее начинают построение прямоугольного замкнутого контура. Ведут прямую линию до занятой клетки. В занятой клетке ее поворачивают на 90° и ведут прямую линию к следующей занятой клетке. В ней также ее поворачивают на 90° с тем расчетом, чтобы вернуться к свободной клетке, из которой начинали построение прямоугольного контура. Проходить через занятую клетку, не поворачивая в ней линию на 90^0, можно только в том случае, если не представляется возможности вернуться к свободной клетке, из которой начиналось построение контура.

К построению контура предъявляются следующие требования:

– все вершины контура (кроме одной, из которой контур начинал строиться) должны лежать в занятых клетках;
– все углы контура должны быть прямыми;
– количество вершин контура должно быть четным.

После построения замкнутого контура его вершины, чередуя, обозначают знаками (+) и (-). Среди отрицательных вершин контура находят наименьшее количество груза, и эту величину перемещают по контуру, прибавляя его к объемам грузоперевозок, стоящим при вершинах со знаком (+), и вычитают из чисел при отрицательных вершинах контура. В первом опорном плане наименьшее количество груза при отрицательных вершинах равно 100 т (c_{12}). Следовательно, это число перемещаем по вершинам контура, переходя ко второму опорному плану. Числа, которые не принадлежат вершинам контура, в новый опорный план переписываются без изменения.

Грузооборот во втором опорном плане по сравнению с первым уменьшился на 400 т/км. Правильность расчета значения целевой функции можно проверить, если вычесть из значения целевой функции предыдущего плана произведение характеристики свободной клетки, из которой начинали строить прямоугольный контур (L_{13}=-4) на величину перемещаемого груза (X_{13}=100), получая значение целевой функции второго опорного плана: 9050 – (4×100)=8650.

Таблица 11. Второй опорный план

Участки	Потенциалы	Фермы				Кол-во кормов на складах, т
		B_1	B_2	B_3	B_4	
	U_i \ V_j	$V_1=3$	$V_2=0$	$V_3=2$	$V_4=2$	
A_1	$U_1=0$	3 - 400	4 **4**	2 + 100	9 **7**	500
A_2	$U_2=5$	8 **0**	5 550	7 300	8 **1**	850
A_3	$U_3=2$	5 + **0**	6 **4**	4 - 300	4 300	600
Потребность ферм в кормах, т		400	550	700	300	1950

Значение целевой функции во втором опорном плане равно:

$Z_{min}=3\cdot400+2\cdot100+5\cdot550+7\cdot300+4\cdot300+4\cdot300=8650$ *т/км.*

Исследуем новый опорный план на оптимальность. Потенциалы занятых клеток в новом опорном плане примут значения:

$C_{11}=V_1+U_1$ $\quad 3=V_1+0$ $\quad V_1=3$ $\quad C_{22}=V_2+U_2$ $\quad 5=V_2+5$ $\quad V_2=0$

$C_{13}=V_3+U_1$ $\quad 2=V_3+0$ $\quad V_3=2$ $\quad C_{33}=V_3+U_3$ $\quad 4=2+U_3$ $\quad U_3=2$

$C_{23}=V_3+U_2$ $\quad 7=2+U_2$ $\quad U_2=5$ $\quad C_{34}=V_4+U_3$ $\quad 4=V_4+2$ $\quad V_4=2$

Рассчитаем характеристики свободных клеток:

$L_{12}=C_{12}-(V_2+U_1)=4-(0+0)=4$ $\qquad L_{24}=C_{24}-(V_4+U_2)=8-(2+5)=1$

$L_{14}=C_{14}-(V_4+U_1)=9-(2+0)=7$ $\qquad L_{31}=C_{31}-(V_1+U_3)=5-(3+2)=0$

$L_{21}=C_{21}-(V_1+U_2)=8-(3+5)=0$ $\qquad L_{32}=C_{32}-(V_2+U_3)=6-(0+2)=4$

Во втором опорном плане все характеристики свободных клеток положительные, значит, полученный план является оптимальным.

Если план не оптимальный, то вновь строят замкнутый контур, находят наименьшее число среди отрицательных вершин контура и перемещают это число по контуру. Таким образом, получают новый опорный план. Улучшение опорного плана ведут до тех пор, пока не получат оптимальный план.

В соответствии с оптимальным планом грубые корма с первого участка будут перевезены 400 т на первую ферму и 100 т на третью ферму, со второго участка 550 т будут перевезены на вторую ферму и 300 т на третью. С третьего участка корма в равных долях будут распределены между третьей и четвертой фермами. Наличие в оптимальном плане нулевых характеристик свободных клеток ($L_{21}=0$; $L_{31}=0$) свидетельствует о наличии других маршрутов перевозки грубых кормов с участков на фермы, при которых значение целевой функции остается неизменной. В данном случае возможны перевозки кормов со второго и третьего участков на первую ферму. Если предположить возможную перевозку грубого корма с третьего участка на первую ферму, то получим новый опорный план.

Таблица 12. Третий опорный план

Участки	Потенциалы	Фермы				Кол-во кормов на складах, т
		B_1	B_2	B_3	B_4	
	V_j / U_i	$V_1=3$	$V_2=4$	$V_3=6$	$V_4=6$	
A_1	$U_1=0$	3 100	4	2 400	9	500
A_2	$U_2=1$	8	5 550	7 300	8	850
A_3	$U_{3=}-2$	5 300	6	4	4 300	600
Потребность ферм в кормах, т		400	550	700	300	1950

Потенциалы занятых клеток в новом опорном плане примут значения:

$C_{11}=V_1+U_1$ $\quad 3=V_1+0$ $\quad V_1=3$ $\quad C_{22}=V_2+U_2$ $\quad 5=V_2+5$ $\quad V_2=0$

$C_{13}=V_3+U_1$ $\quad 2=V_3+0$ $\quad V_3=2$ $\quad C_{31}=V_1+U_3$ $\quad 5=3+U_3$ $\quad U_3=2$

$C_{23}=V_3+U_2$ $\quad 7=2+U_2$ $\quad U_2=5$ $\quad C_{34}=V_4+U_3$ $\quad 4=V_4+2$ $\quad V_4=2$

Характеристики свободных клеток L_{ij} в третьем опорном плане примут следующие значения:

$L_{12} = C_{12} - (V_2+U_1)=4 – (0+0)=4$ $\qquad L_{24} = C_{24} – (V_4+U_2)=8 – (2+5)=1$

$L_{14} = C_{14} – (V_4+U_1)=9 – (2+0)=7$ $\qquad L_{32} = C_{32} – (V_2+U_3)=6 – (0+2)=4$

$L_{21} = C_{21} – (V_1+U_2)=8 – (3+5)=0$ $\qquad L_{33} = C_{33} – (V_3+U_3)=4 – (2+2)=0$

Все характеристики свободных клеток в третьем опорном плане положительные, следовательно, план является оптимальным. Значение целевой функции данного опорного плана равно 8650 т/км

$$Z_{min} = 3·100+2·400+5·550+7·300+5·300+4·300=8650 \text{ т/км.}$$

Оптимальный план третьего опорного плана альтернативен оптимальному плану второго опорного плана.

Задание для самостоятельной работы

Используя условия рассмотренной задачи и данные предлагаемых вариантов, составить экономико-математическую модель задачи и решить задачу методом потенциалов.

№	Значения по вариантам:		
1	$A_1=280$ $A_2=250$ $A_3=430$	$B_1=180$ $B_2=210$ $B_3=400$ $B_4=170$	$c_{ij}\begin{cases}18 & 8 & 4 & 10\\ 21 & 5 & 12 & 3\\ 17 & 9 & 7 & 6\end{cases}$
2	$A_1=150$ $A_2=200$ $A_3=100$	$B_1=100$ $B_2=150$ $B_3=100$ $B_4=100$	$c_{ij}\begin{cases}12 & 10 & 8 & 7\\ 13 & 6 & 12 & 4\\ 6 & 14 & 11 & 5\end{cases}$
3	$A_1=200$ $A_2=350$ $A_3=300$	$B_1=150$ $B_2=100$ $B_3=300$ $B_4=300$	$c_{ij}\begin{cases}15 & 11 & 10 & 7\\ 17 & 13 & 9 & 16\\ 9 & 4 & 5 & 3\end{cases}$
4	$A_1=340$ $A_2=280$ $A_3=260$	$B_1=180$ $B_2=220$ $B_3=180$ $B_4=300$	$c_{ij}\begin{cases}12 & 8 & 5 & 14\\ 18 & 13 & 7 & 3\\ 17 & 9 & 4 & 5\end{cases}$
5	$A_1=430$ $A_2=270$ $A_3=350$	$B_1=200$ $B_2=320$ $B_3=180$ $B_4=350$	$c_{ij}\begin{cases}11 & 7 & 9 & 2\\ 3 & 10 & 8 & 5\\ 2 & 13 & 6 & 4\end{cases}$
6	$A_1=250$ $A_2=170$ $A_3=140$	$B_1=200$ $B_2=160$ $B_3=140$ $B_4=60$	$c_{ij}\begin{cases}13 & 8 & 5 & 4\\ 14 & 3 & 7 & 6\\ 5 & 11 & 10 & 2\end{cases}$
7	$A_1=200$ $A_2=250$ $A_3=190$	$B_1=130$ $B_2=220$ $B_3=150$ $B_4=140$	$c_{ij}\begin{cases}19 & 13 & 6 & 2\\ 3 & 12 & 7 & 9\\ 2 & 5 & 4 & 8\end{cases}$
8	$A_1=300$ $A_2=210$ $A_3=200$	$B_1=190$ $B_2=110$ $B_3=180$ $B_4=230$	$c_{ij}\begin{cases}17 & 8 & 2 & 6\\ 4 & 10 & 7 & 3\\ 9 & 11 & 5 & 12\end{cases}$
9	$A_1=350$ $A_2=270$ $A_3=210$	$B_1=280$ $B_2=240$ $B_3=170$ $B_4=140$	$c_{ij}\begin{cases}9 & 15 & 13 & 4\\ 12 & 14 & 2 & 7\\ 13 & 5 & 9 & 11\end{cases}$
10	$A_1=350$ $A_2=200$ $A_3=300$	$B_1=250$ $B_2=200$ $B_3=150$ $B_4=250$	$c_{ij}\begin{cases}13 & 10 & 14 & 7\\ 3 & 9 & 15 & 6\\ 4 & 12 & 8 & 5\end{cases}$

№	Значения по вариантам:		
11	$A_1=210$ $A_2=170$ $A_3=300$	$B_1=180$ $B_2=150$ $B_3=120$ $B_4=230$	$c_{ij}\begin{cases}9 & 12 & 5 & 7\\13 & 8 & 4 & 3\\4 & 17 & 11 & 6\end{cases}$
12	$A_1=300$ $A_2=250$ $A_3=200$	$B_1=170$ $B_2=230$ $B_3=200$ $B_4=150$	$c_{ij}\begin{cases}8 & 10 & 6 & 4\\11 & 5 & 9 & 2\\7 & 13 & 5 & 3\end{cases}$
13	$A_1=120$ $A_2=200$ $A_3=200$	$B_1=100$ $B_2=160$ $B_3=130$ $B_4=130$	$c_{ij}\begin{cases}17 & 13 & 2 & 7\\10 & 11 & 6 & 2\\8 & 15 & 9 & 4\end{cases}$
14	$A_1=200$ $A_2=450$ $A_3=100$	$B_1=160$ $B_2=200$ $B_3=140$ $B_4=250$	$c_{ij}\begin{cases}15 & 11 & 7 & 10\\8 & 16 & 12 & 5\\2 & 9 & 13 & 6\end{cases}$
15	$A_1=260$ $A_2=200$ $A_3=310$	$B_1=130$ $B_2=170$ $B_3=220$ $B_4=250$	$c_{ij}\begin{cases}7 & 12 & 5 & 3\\11 & 8 & 4 & 15\\6 & 10 & 9 & 4\end{cases}$
16	$A_1=270$ $A_2=330$ $A_3=450$	$B_1=250$ $B_2=180$ $B_3=220$ $B_4=400$	$c_{ij}\begin{cases}11 & 3 & 10 & 2\\13 & 9 & 4 & 7\\5 & 12 & 8 & 6\end{cases}$
17	$A_1=290$ $A_2=450$ $A_3=210$	$B_1=220$ $B_2=340$ $B_3=280$ $B_4=110$	$c_{ij}\begin{cases}12 & 4 & 9 & 6\\15 & 8 & 5 & 10\\7 & 11 & 4 & 6\end{cases}$
18	$A_1=300$ $A_2=210$ $A_3=320$	$B_1=200$ $B_2=250$ $B_3=280$ $B_4=100$	$c_{ij}\begin{cases}8 & 3 & 5 & 2\\4 & 7 & 6 & 3\\10 & 5 & 4 & 2\end{cases}$
19	$A_1=190$ $A_2=230$ $A_3=310$	$B_1=150$ $B_2=220$ $B_3=200$ $B_4=160$	$c_{ij}\begin{cases}7 & 15 & 4 & 8\\12 & 6 & 9 & 2\\3 & 5 & 8 & 7\end{cases}$
20	$A_1=290$ $A_2=210$ $A_3=300$	$B_1=220$ $B_2=180$ $B_3=210$ $B_4=190$	$c_{ij}\begin{cases}12 & 6 & 13 & 7\\9 & 4 & 11 & 5\\15 & 3 & 8 & 2\end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Как в общем виде можно сформулировать постановку транспортной задачи?

2. Каким образом можно математически записать ограничения по наличию груза в пунктах отправления?

3. Каким образом можно математически записать ограничения по удовлетворению потребности пунктов потребления в грузе?

4. Приведите запись транспортной задачи в структурной форме.

5. В каком случае транспортная задача считается открытой?

6. В каком случае транспортная задача считается закрытой?

7. Каким образом открытая транспортная задача может быть приведена к закрытому типу?

8. Каков критерий оптимальности в решенной Вами транспортной задаче?

9. Для записи каких значений в таблице для решения транспортной задачи предназначены строка V_j и столбец U_i?

10. Какой способ построения первого опорного плана транспортной задачи Вы использовали?

11. В чем сущность распределения объема перевозок методом северо-западного угла?

12. Каким образом для каждого опорного плана определяется значение целевой функции?

13. Какому значению должно быть равно количество заполненных клеток в каждом опорном плане?

14. Когда опорный план считается вырожденным?

15. Как устранить вырожденность опорного плана?

16. Как проверить опорный план на оптимальность?

17. Каков алгоритм расчета потенциалов заполненных клеток? Приведите формулу.

18. Каков алгоритм расчета характеристик свободных клеток? Приведите формулу.

19. Каков экономический смысл характеристик свободных клеток?

20. Расскажите алгоритм перехода от одного опорного плана к следующему.

21. Раскройте правила построения замкнутого контура, по вершинам которого будут перемещаться объемы грузоперевозок для улучшения опорного плана.

22. Раскройте правила перемещения объемов грузоперевозок по вершинам замкнутого контура.

23. О чем свидетельствует наличие в оптимальном плане нулевых характеристик свободных клеток?

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ MICROSOFT EXCEL

2.1. Пример решения задачи по оптимизации использования ресурсов

Сельскохозяйственное предприятие специализируется на производстве зерна, сахарной свеклы и подсолнечника. Для возделывания этих сельскохозяйственных культур может быть выделено до 3 200 га пашни, дизельного топлива в объеме до 200 000 кг и минеральных удобрений в объеме до 350 000 кг действующего вещества. Требуется найти такое сочетание посевных площадей, которое обеспечило бы получение максимума прибыли.

Следует также учесть, что:

- площадь посева технических культур (сахарной свеклы и подсолнечника) не должна превышать 20% общей площади пашни;
- предприятием заключен договор на продажу зерна в объеме 105 000 ц.

Входная информация, необходимая для разработки экономико-математической модели приведена в таблице 13.

Таблица 13. Входная информация для разработки экономико-математической модели

Показатели	Сельскохозяйственные культуры		
	зерновые	сахарная свекла	подсолнечник
Урожайность, ц/га	40	475	24
Цена реализации 1 ц продукции, руб./ц	720	190	1600
Выход товарной продукции с 1 га, тыс. руб.	28,8	90,3	38,4
Затраты на 1 га: материально-денежных средств, тыс. руб.	19,4	75,8	28,1
дизельного топлива, кг	50	124	68
минеральных удобрений, кг д. в-ва	90,0	360,0	120
Прибыль с 1 га, руб.	9,4	14,5	10,3

За неизвестные примем площади посева сельскохозяйственных культур по видам:

X_1 – площадь посева зерновых культур;

X_2 – площадь посева сахарной свеклы;

X_3 – площадь посева подсолнечника.

Для построения экономико-математической модели задачи необходимо учесть все условия. В данном случае по этим условиям можно составить пять ограничений:

- сумма площадей посева сельскохозяйственных культур не должна превышать площади, имеющейся в предприятии (3 200 га). Коэффициенты при неизвестных характеризуют расход пашни на возделывание 1 га соответствующей сельскохозяйственной культуры. В правой части ограничения указывается объем площади пашни

1) $X_1+X_2+X_3 \leq 3\ 200;$

- сумма площадей посева технических культур не должна превышать площади, которая может быть отведена для этой цели (3200·20%=640 га). Ко-

эффициенты при неизвестных характеризуют расход пашни, отводимой под технические культуры, на возделывание 1 га соответствующей технической культуры. В правой части ограничения указывается объем площади пашни, которая может быть отведена под технические культуры.

2) $X_2+X_3 \leq 640;$

- третье и четвертое ограничения гарантируют, что использование ресурсов не превысит их наличия. То есть сумма произведений затрат ресурсов на 1 га на площади посева соответствующих сельскохозяйственных культур не должна превышать объемов ресурсов, имеющихся в предприятии. Коэффициенты при неизвестных характеризуют расход соответствующего ресурса на возделывание 1 га соответствующей сельскохозяйственной культуры. В правой части ограничений указывается наличие этих ресурсов в хозяйстве:

3) $50X_1+ 124X_2+68X_3 \leq 200\ 000;$

4) $90X_1+360X_2+120X_3 \leq 350\ 000;$

- пятое ограничение гарантирует производство запланированного объема реализации зерна. В качестве коэффициентов при переменных выступает выход зерна с 1 га площади посева зерновых культур. В правой части указывается запланированный объем реализации зерна

5) $40X_1 \geq 105\ 000.$

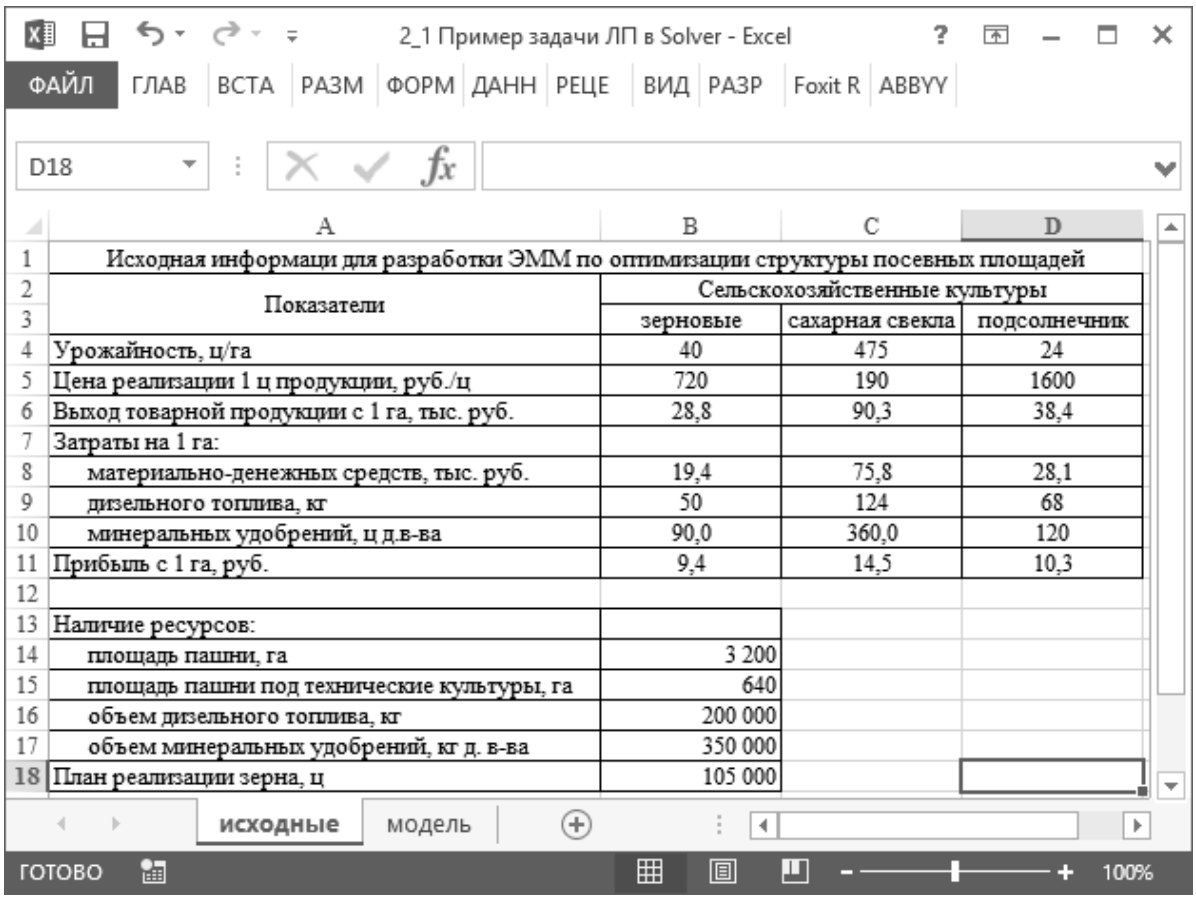
В результате получена система пяти линейных неравенств с тремя неизвестными. Требуется найти такие неотрицательные значения этих неизвестных $X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0$, которые бы удовлетворяли данной системе неравенств и обеспечивали получение максимума прибыли:

$$Z_{max} = 9,4X_1+14,5X_2+10,3X_3.$$

В качестве коэффициентов при неизвестных в целевой функции выступает прибыль, получаемая с 1 га площади посева сельскохозяйственных культур.

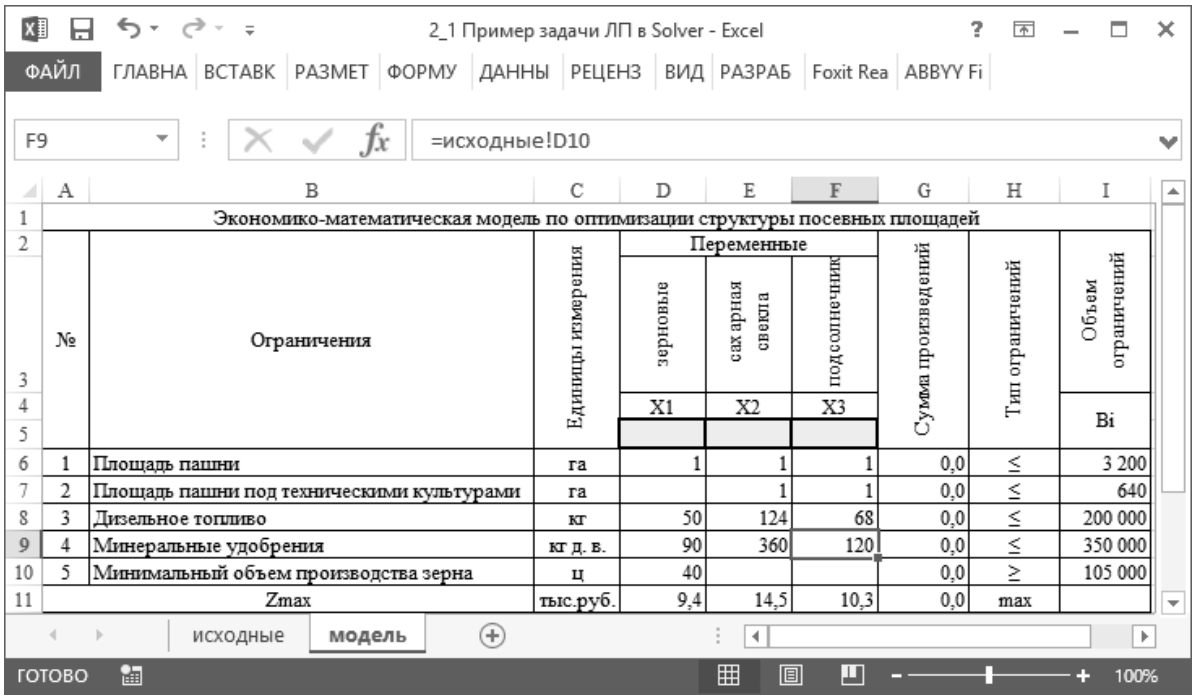
Поскольку данная задача решается с помощью MS Excel, то и подготовку всей входной информации для построения экономико-математической модели целесообразно осуществлять также с использованием этого табличного процессора. Эти расчеты представлены на листе «Исходные» файла MS Excel (рис.1). Это не только облегчает расчеты, связанные с подготовкой входной информации, но и дает возможность в дальнейшем автоматически обновлять параметры экономико-математической модели при реализации различных вариантов.

Экономико-математическая модель по оптимизации структуры посевных площадей в матричном виде заполняется на листе «Модель» файла MS Excel, уже содержащего лист «Исходные» (рисунок 2). Технико-экономические коэффициенты, оценки целевой функции (столбцы **D, E, F**), объемы ограничений (столбец **I**) рекомендуется определять через ссылки на соответствующие ячейки листа «Исходные». На рисунке 2 показано, каким образом произошло заполнение ячейки **F9**, описывающей затраты минеральных удобрений на 1 га посева подсолнечника (смотри строку «f_x» рисунка 1).



	A	B	C	D
1	Исходная информаци для разработки ЭММ по оптимизации структуры посевных площадей			
2	Показатели	Сельскохозяйственные культуры		
3		зерновые	сахарная свекла	подсолнечник
4	Урожайность, ц/га	40	475	24
5	Цена реализации 1 ц продукции, руб./ц	720	190	1600
6	Выход товарной продукции с 1 га, тыс. руб.	28,8	90,3	38,4
7	Затраты на 1 га:			
8	материально-денежных средств, тыс. руб.	19,4	75,8	28,1
9	дизельного топлива, кг	50	124	68
10	минеральных удобрений, ц д.в-ва	90,0	360,0	120
11	Прибыль с 1 га, руб.	9,4	14,5	10,3
12				
13	Наличие ресурсов:			
14	площадь пашни, га	3 200		
15	площадь пашни под технические культуры, га	640		
16	объем дизельного топлива, кг	200 000		
17	объем минеральных удобрений, кг д. в-ва	350 000		
18	План реализации зерна, ц	105 000		

Рисунок 1. Входная информация для разработки экономико-математической модели



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Экономико-математическая модель по оптимизации структуры посевных площадей								
2	№	Ограничения	Единицы измерения	Переменные			Сумма произведений	Тип ограничений	Объем ограничений
3				зерновые	сахарная свекла	подсолнечник			
4				X1	X2	X3			Bi
5									
6	1	Площадь пашни	га	1	1	1	0,0	≤	3 200
7	2	Площадь пашни под техническими культурами	га		1	1	0,0	≤	640
8	3	Дизельное топливо	кг	50	124	68	0,0	≤	200 000
9	4	Минеральные удобрения	кг д. в.	90	360	120	0,0	≤	350 000
10	5	Минимальный объем производства зерна	ц	40			0,0	≥	105 000
11		Zmax	тыс.руб.	9,4	14,5	10,3	0,0	max	

Рисунок 2. Экономико-математическая модель по оптимизации структуры посевных площадей

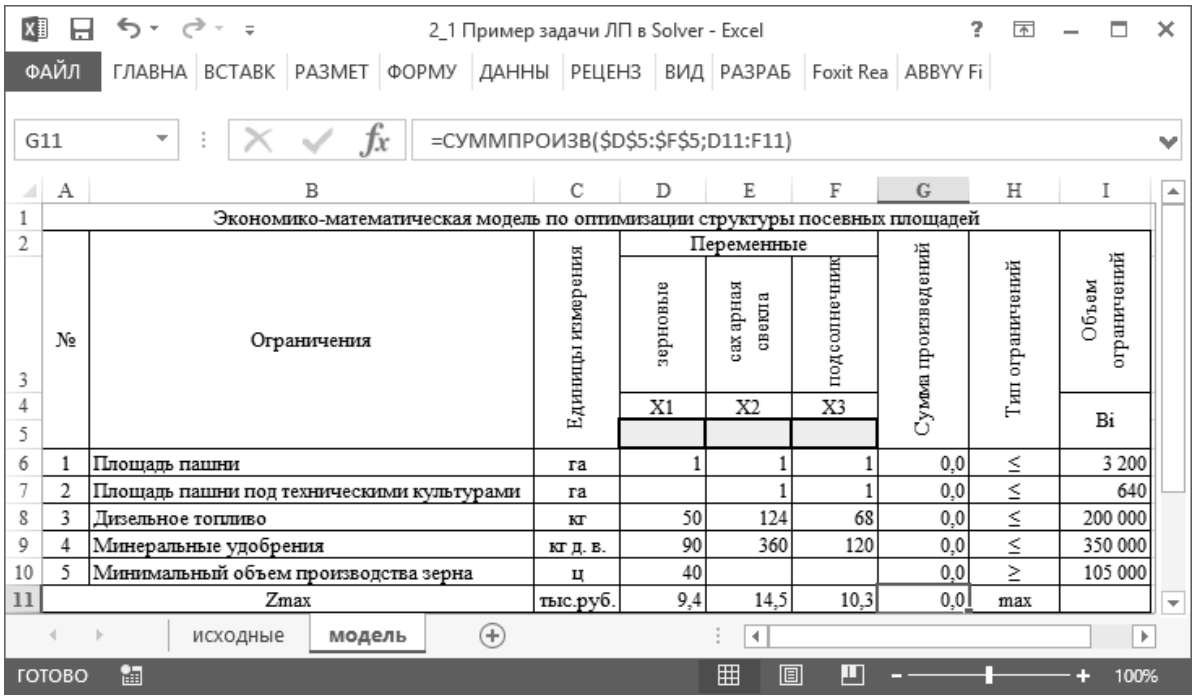
В столбцы **A** (№), **B** (Ограничения), **C** (Единицы измерения) и **H** (Тип ограничений) вводятся соответствующие данные в текстовом формате. Они не используются в расчетах и служат для информативности и облегчения понимания содержания модели.

Для искомых величин переменных X_1, X_2, X_3 необходимо оставить пустые ячейки соответственно **D5, E5, F5**. Столбец **G** (Сумма произведений), предназначен для определения суммы произведений значений искомых неизвестных (ячейки **D5, E5, F5**) и технико-экономических коэффициентов по соответствующим ограничениям (строки **6-10**) и целевой функции (строка **11**). Формула нахождения суммы произведений для строки с целевой функцией (для ячейки **G11**) приведена в верхней строке рисунка **3**.

То есть, в столбце **G** будет определяться:

- количество используемых ресурсов (ячейка **G6** – общей площади пашни; **G7** – пашни, которая может быть использована под посевы технических культур; **G8** – трудовых ресурсов; **G9** – минеральных удобрений);
- количество произведенного зерна (ячейка **G10**);
- величина прибыли (ячейка **G11**).

Таким образом, построен опорный план и получено первое допустимое решение. Значения неизвестных X_1, X_2, X_3 равны нулю (ячейки **D5, E5, F5** – пустые ячейки), ячейки столбца **G** «Сумма произведений» по всем ограничениям (строкам **6-10**) и целевой строке (строка **11**) также имеют нулевые значения.



Экономико-математическая модель по оптимизации структуры посевных площадей

№	Ограничения	Единицы измерения	Переменные: зерновые X1	Переменные: сахарная свекла X2	Переменные: подсолнечник X3	Сумма произведений	Тип ограничений	Объем ограничений Bi
1	Площадь пашни	га	1	1	1	0,0	≤	3 200
2	Площадь пашни под техническими культурами	га		1	1	0,0	≤	640
3	Дизельное топливо	кг	50	124	68	0,0	≤	200 000
4	Минеральные удобрения	кг д. в.	90	360	120	0,0	≤	350 000
5	Минимальный объем производства зерна	ц	40			0,0	≥	105 000
	Zmax	тыс.руб.	9,4	14,5	10,3	0,0	max	

Рисунок 3. Заполнение столбца Сумма произведений

Для оптимизации имеющегося плана воспользуемся инструментом **Поиск решения,** который находится во вкладке **Данные** (для Microsoft Excel 2007, 2010 и 2013). Если такая команда во вкладке данные отстутствует, необходимо войти во вкладку **Файл**, нажать на пункт меню **Параметры**, в открывшемся диалоговом окне выбрать пункт меню **Надстройки**, в выпадающем списке **Управление** выбрать пункт **Надстройки Excel**, нажать на кнопку **Перейти**, в открывшемся диалоговом окне поставить галочку напротив пункта **Поиск решения,** нажать кнопку **ОК.** После этого **Поиск решения** станет доступным во вкладке **Данные.**

В более ранних версиях Microsoft Excel (2000-2003) **Поиск решения** находится в пункте меню **Сервис**, если он не подключен, в пункте **Надстройки** меню **Сервис** необходимо поставить галочку напротив **Поиск решения**. После этого **Поиск решения** станет доступным в меню **Сервис.**

После выбора команды **Поиск решения** появляется диалоговое окно **Параметры поиска решения** (рис. 4).

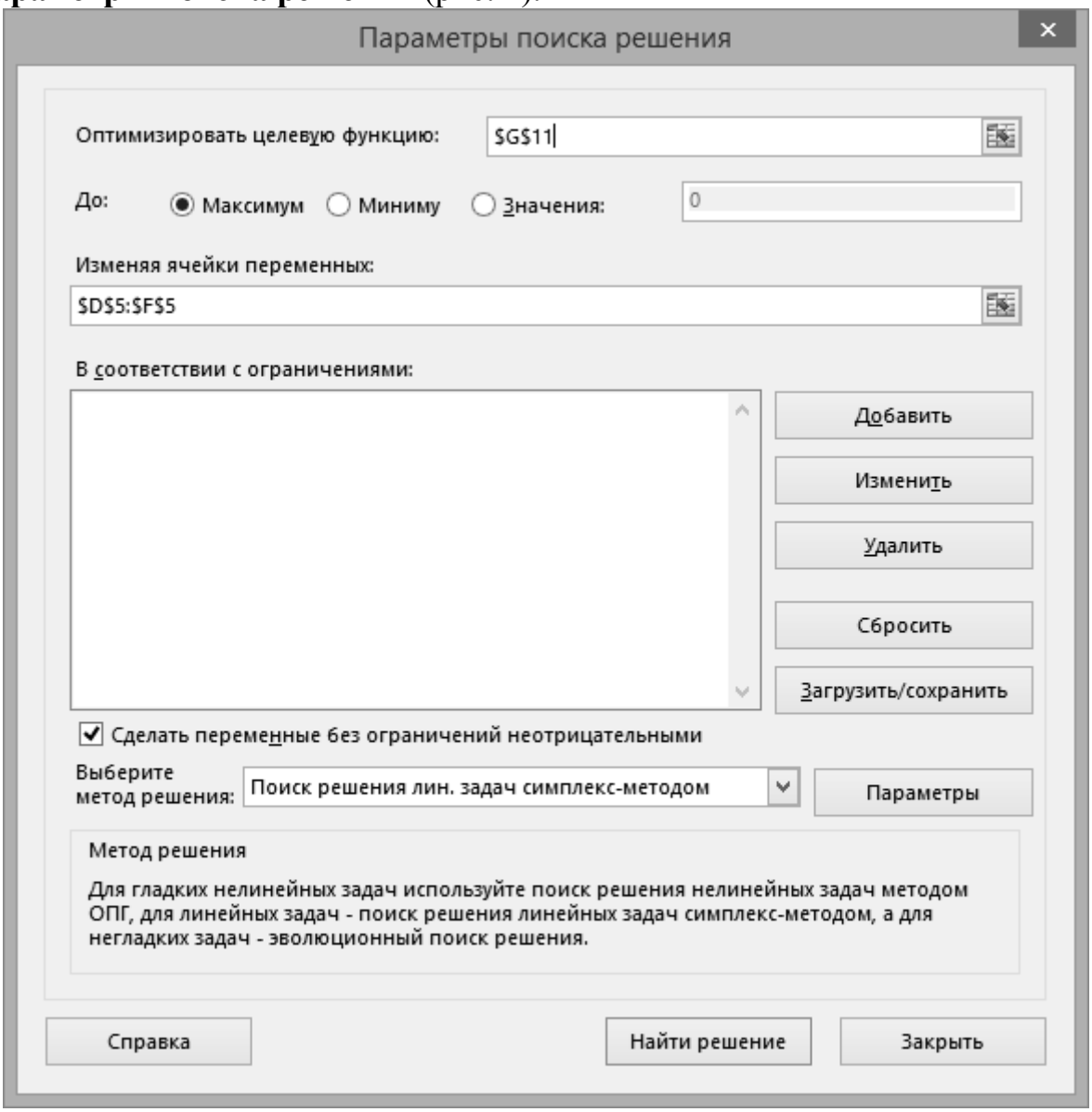


Рисунок 4. Диалоговое окно команды **Параметры поиска решения**

В поле **Оптимизировать целевую функцию** диалогового окна **Праметры поиска решения** необходимо ввести ссылку на ячейку, содержащую сумму произведений по целевой строке Z_{max} (формулу расчета прибыли). В нашем случае это ячейка **$G$11**. Поскольку в качестве критерия оптимизации нами выбран максимум прибыли, в переключателе **До** требуется установить позицию **Максимум**. В поле **Изменяя ячейки переменных** необходимо ввести ссылки на изменяемые ячейки, которые предназначены для хранения искомых (влияющих) неизвестных, разделяя их запятыми, либо, если ячейки находятся рядом, указывая первую и последнюю ячейку, разделяя их двоеточием (**$D$5:$F$5**).

Чтобы обеспечить выполнения условия неотрицательности влияющих переменных, необходимо поставить галочку в разделе **Сделать переменные без ограничений неотрицательными**. Так как модель является линейной, необходимо выбрать в выпадающем списке **Выберите метод решения** пункт **Пойск решения линейных задач симплекс-методом**. Остальные параметры **Поиска решения** можно оставить без изменений либо изменить, используя диалоговое окно **Параметры** и опцию **Справка**.

Для введения ограничений и условий в модель в диалоговом окне **Параметры поиска решения** необходимо нажать на кнопку **Добавить**, после чего появится диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 5).

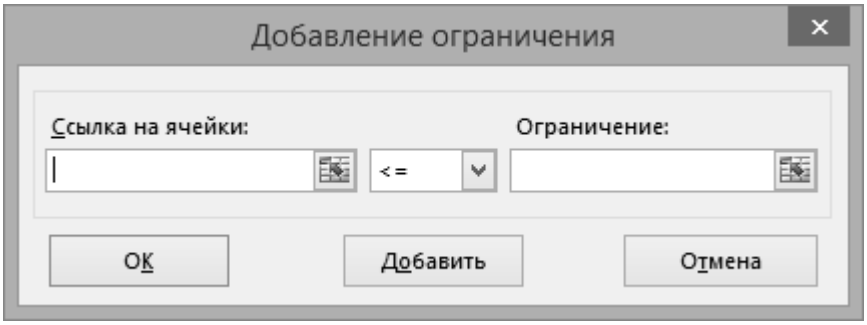


Рисунок 5. Диалоговое окно команды **Добавление ограничения**

В поле **Ссылка на ячейки** окна **Добавление ограничения** следует сослаться на ячейку, содержащую сумму произведений соответствующего ограничения, в выпадающем списке необходимо выбрать тип ограничения, а в поле **Ограничение** требуется сослаться на ячейку, содержащую объем соответствующего ограничения. Если тип нескольких последовательно идущих ограничений одинаков, в полях данного диалогового окна можно использовать ссылки на массивы ячеек. Рассмотрим добавление ограничений на примере нашей модели. Ограничения 1, 2, 3 и 4 имеют тип одинаковый тип – ≤, поэтому их можно вводить группой, ссылаясь на массивы ячеек. В поле **Ссылка на ячейки** вводим ссылку на диапазон **$G$6:$G$9**, в которых находятся формулы расчета суммы произведений. Затем из раскрывающегося списка типов ограничения выбираем необходимый знак, который должен располагаться между ссылкой на ячейку и ограничением. В нашем случае, это ≤ (<= в нотации Excel). В поле **Ограничение** необходимо ввести ссылки на ячейки, в которых находятся значения, характеризующие наличие ресурсов (объемы ограничений). В нашем случае это ячейки **$I$6:$I$9**.

В результате диалоговое окно примет следующий вид (рис. 6).

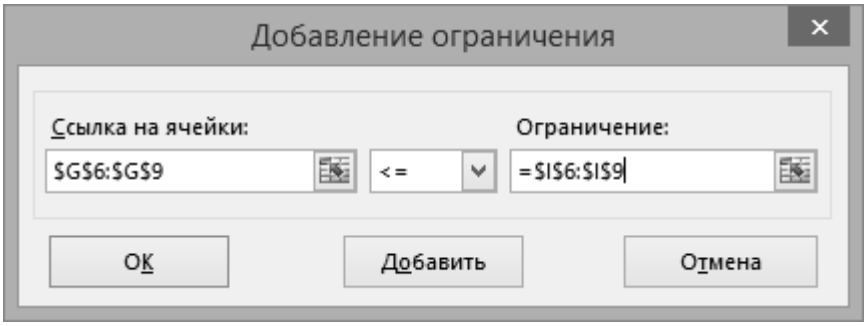


Рисунок 6. Добавление группы ограничений, имеющих один и тот же тип

После подтверждения добавления описанных ограничений (необходимо нажать кнопку **Добавить**), аналогично добавляется ограничение по обеспечению минимального объема производства зерна (рис. 7).

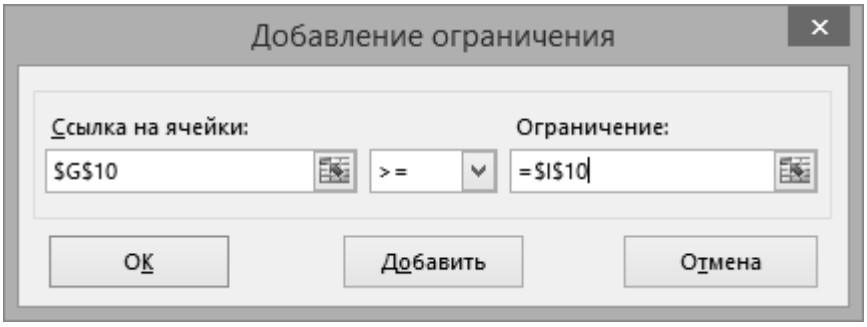


Рисунок 7. Добавление отдельного ограничения

После описания последнего ограничения необходимо вернуться в диалоговое окно **Параметры поиска решения**, нажав кнопку **OK**.

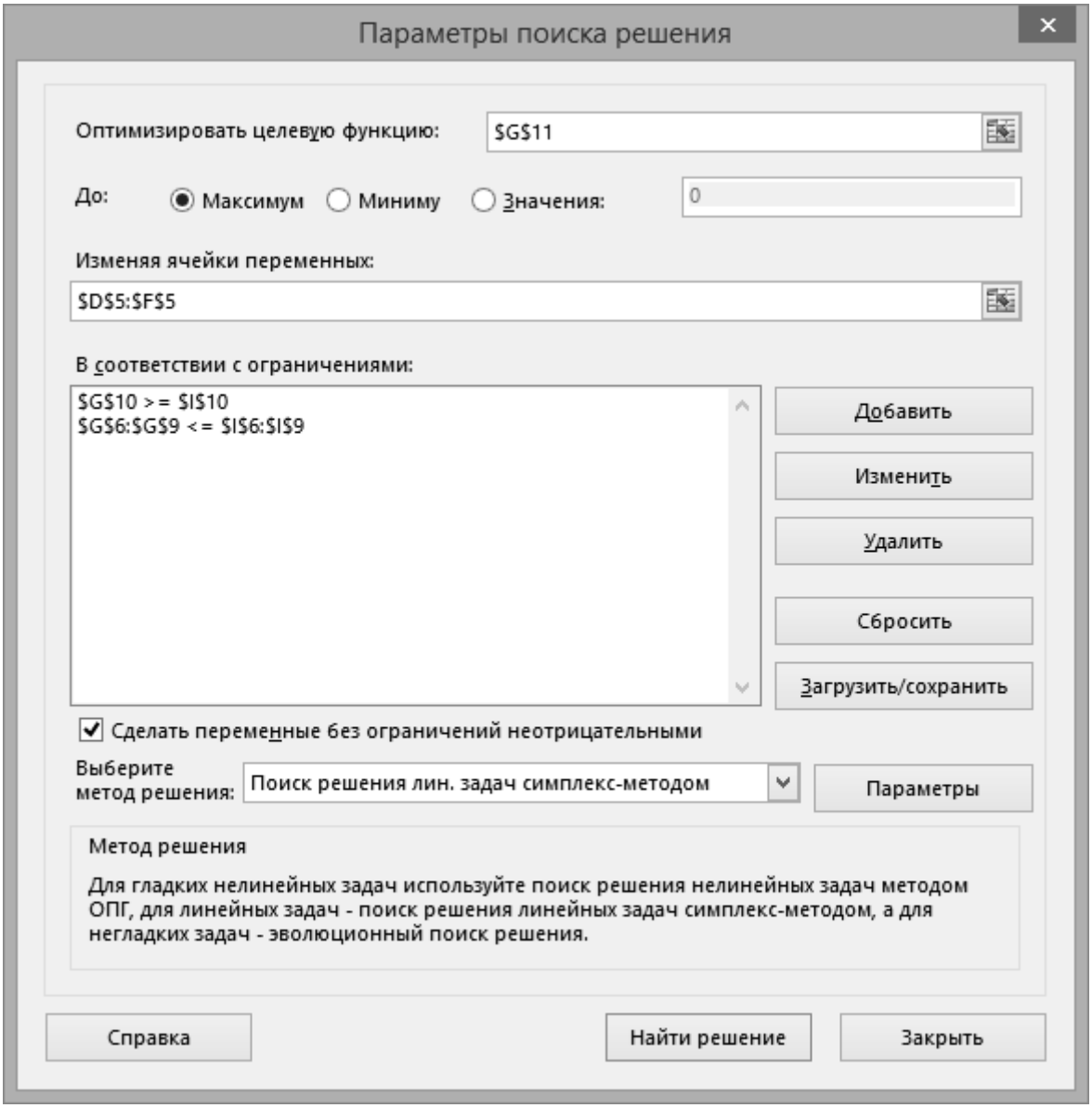


Рисунок 8. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Для изменения какого-либо из ограничений, необходимо выделить его в списке **В соответствии с ограничениями** и выбрать команду **Изменить**. Аналогичным способом можно удалить ненужное ограничение.

Для запуска задачи на решение необходимо нажать кнопку **Найти решение** диалогового окна **Парметры поиска решения**. Если задача была составлена корректоно и имеет домустимое решение, появится диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 9), которое сообщит, что решение найдено, а ограничения и условия оптимальности выполнены. Для сохранения найденного решения на рабочем листе необходимо выбрать в диалоговом окне **Результаты поиска решения** опцию **Сохранить найденное решение. Кроме того,** можно сформировать отчеты по результатам, устойчивости и пределам решения.

Для восстановления исходных данных применяется опция **Восстановить исходные значения** диалогового окна **Результаты поиска решения.**

Прерывание поиска решения осуществляется нажатием клавиши **ESC**.

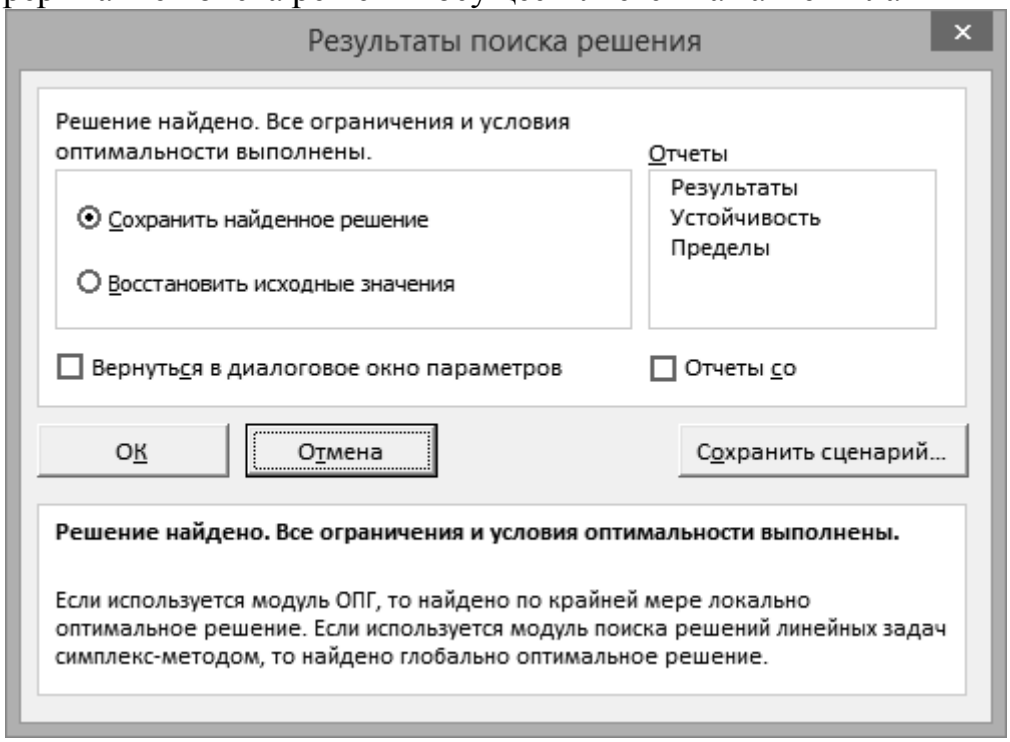
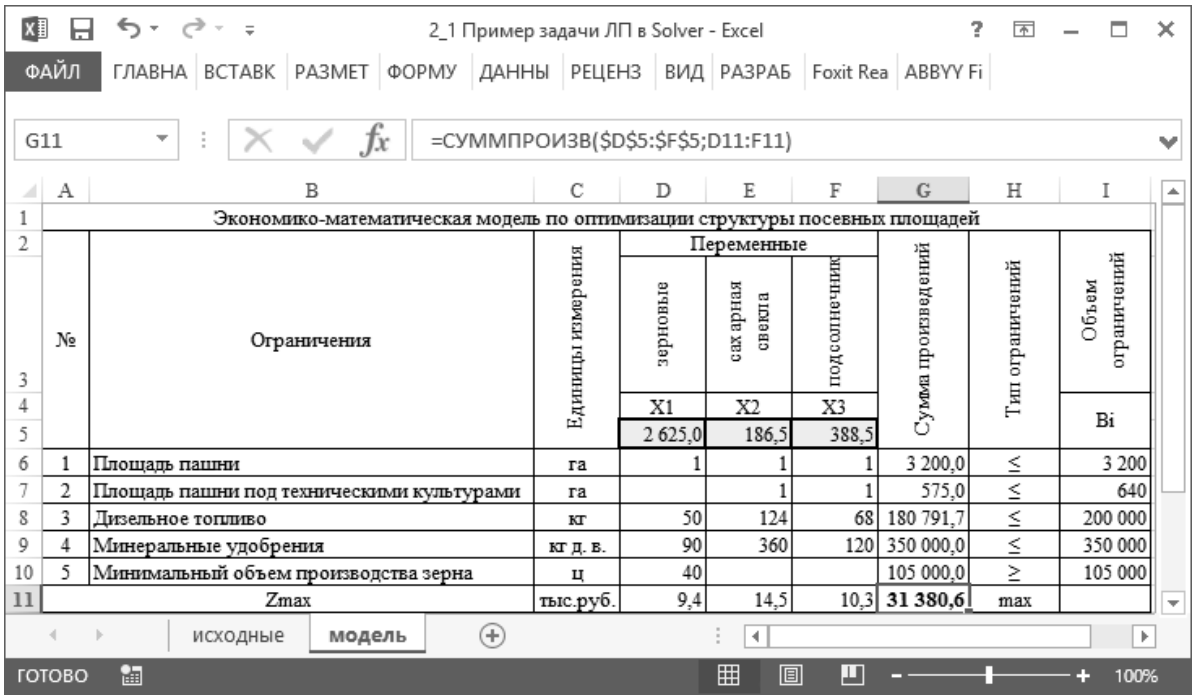


Рисунок 9. Диалоговое окно **Результаты поиска решения**

В результате решения и сохранения результатов поиска модель примет вид, представленный на рис. 10.

В ячейках **D5:F5** получены значения искомых неизвестных (площади посева равны: зерновых – 2 625,0 га, сахарной свеклы – 186,5 га, подсолнечника – 388,5 га), в ячейках **G6:G9** определены объемы используемых ресурсов (общей площади пашни – 3200 га; площади пашни, которая будет использоваться под посевы технических культур, – 575 га; дизельного топлива – 180 791,7 кг; минеральных удобрений – 350 000 кг д. в-ва), в ячейке G10 найдено количество зерна, которое может быть реализовано, – 105 000 ц). При этом величина прибыли достигнет максимального значения – 31 380,6 тыс. руб. (ячейка **G11**).



2_1 Пример задачи ЛП в Solver - Excel

ФАЙЛ ГЛАВНА ВСТАВК РАЗМЕТ ФОРМУ ДАННЫ РЕЦЕНЗ ВИД РАЗРАБ Foxit Rea ABBYY Fi

G11 =СУММПРОИЗВ($D$5:$F$5;D11:F11)

Экономико-математическая модель по оптимизации структуры посевных площадей

№	Ограничения	Единицы измерения	Переменные: зерновые X1	сахарная свекла X2	подсолнечник X3	Сумма произведений	Тип ограничений	Объем ограничений Bi
			2 625,0	186,5	388,5			
1	Площадь пашни	га	1	1	1	3 200,0	≤	3 200
2	Площадь пашни под техническими культурами	га		1	1	575,0	≤	640
3	Дизельное топливо	кг	50	124	68	180 791,7	≤	200 000
4	Минеральные удобрения	кг д. в.	90	360	120	350 000,0	≤	350 000
5	Минимальный объем производства зерна	ц	40			105 000,0	≥	105 000
	Zmax	тыс.руб.	9,4	14,5	10,3	31 380,6	max	

исходные модель

ГОТОВО 100%

Рисунок 10. Экономико-математическая модель по оптимизации структуры посевных площадей с результатами решения

В случае если в результате поиска не было найдено решение, удовлетворяющее заданным условиям, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** появится соответствующее сообщение (рис. 11).

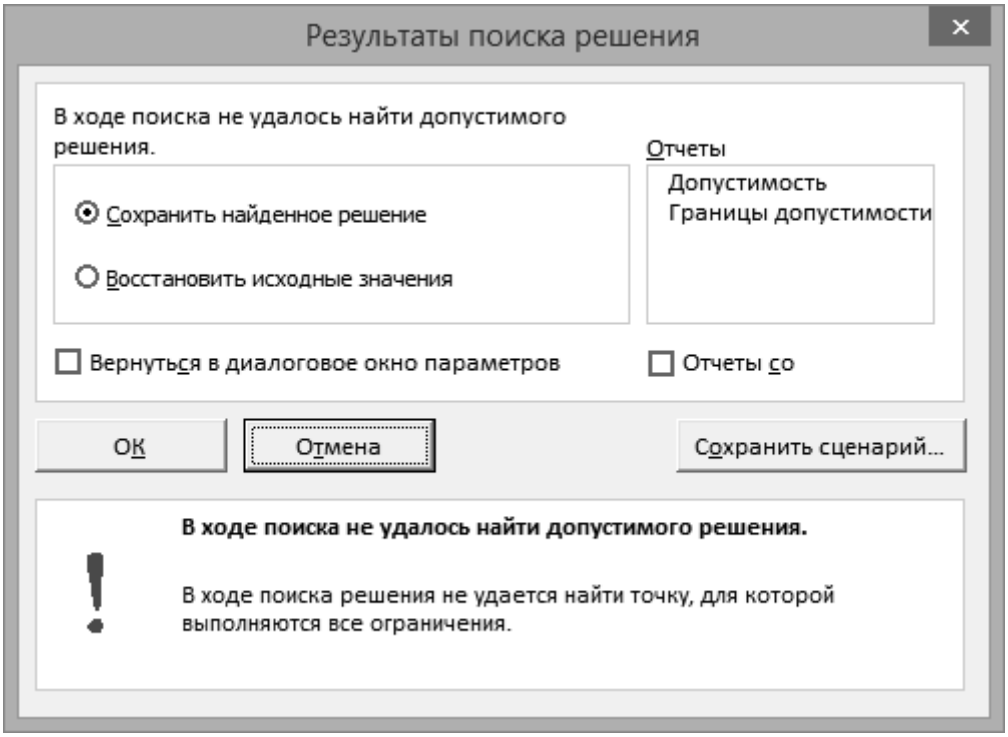


Рисунок 11. Диалоговое окно команды **Результаты поиска решения**

Одной из наиболее часто встречающихся причин невозможности найти оптимальное решение является невыполнение одного или нескольких ограничений. Сохранив найденное решение, требуется построчно сравнить полученные значения столбцов «Сумма произведений» и «Объем ограничений» и проверить, удовлетворяет ли отношение между ними ограничению, стояще-

му в столбце «Тип ограничений». Найдя, таким образом, невыполняемые ограничения, необходимо найти и ликвидировать причины, обусловливающие невозможность соблюдения данного конкретного условия (это может быть, например, слишком большие или, наоборот, очень маленькие запланированные объемы ограничений и т.п.).

2.2. Пример решения транспортной задачи

В агрохолдинге имеется четыре склада, на которых хранится 1 350 т дизельного топлива, которое необходимо доставить в пять сельскохозяйственных предприятий. Общая потребность предприятий в дизельном топливе составляет 1 300 т.

Информация о наличии дизельного топлива в разрезе складов и потребность в дизельном топливе в разрезе предприятий приведены в табл. 14.

Таблица 14. Информация о наличии и потребности в дизельном топливе, т

Склады	Имеется дизельного топлива		Механизированные отряды	Требуется дизельного топлива
Склад №1	365		Предприятие №1	150
Склад №2	520		Предприятие №2	250
Склад №3	145		Предприятие №3	300
Склад №4	320		Предприятие №4	350
			Предприятие №5	250
Всего имеется	1 350		Всего требуется	1 300

Требуется определить, с какого склада, сколько и в какое предприятие поставлять дизельное топливо, чтобы объем грузооборота был минимальным.

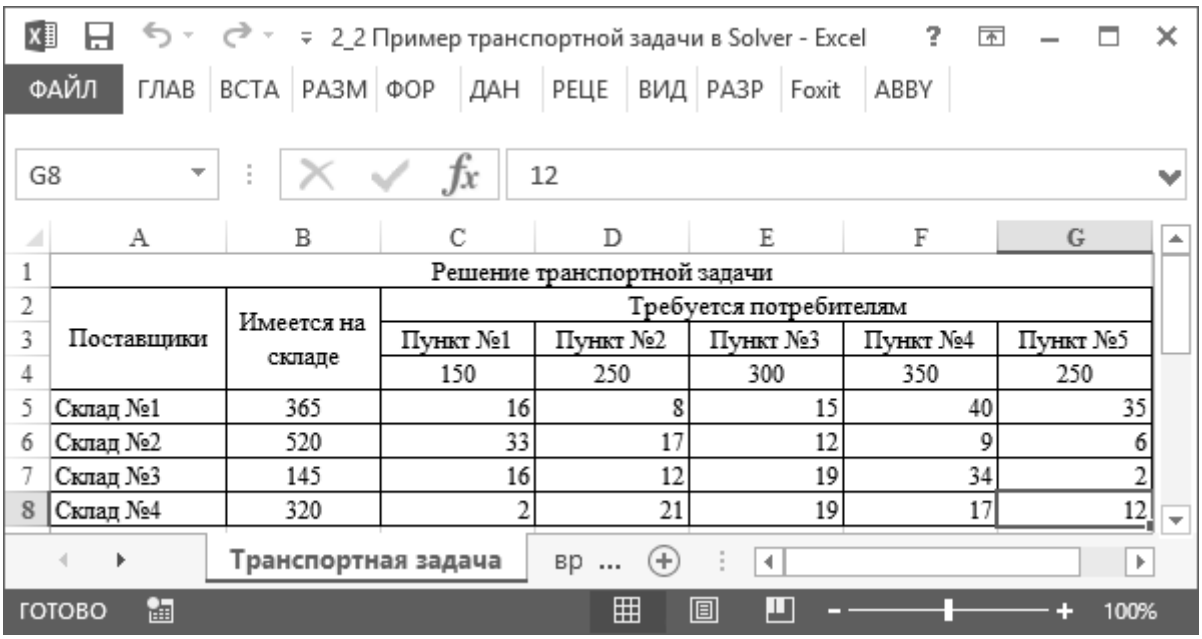
Информация о расстояниях между складами и сельскохозяйственными предприятиями приведена в табл. 15.

Таблица 15. Информация о расстояниях между складами и сельскохозяйственными предприятиями, км

Поставщики	Потребители				
	Предприятие №1	Предприятие №2	Предприятие №3	Предприятие №4	Предприятие №5
Склад №1	16	8	15	40	35
Склад №2	33	17	12	9	6
Склад №3	16	12	19	34	2
Склад №4	2	21	19	17	12

На пересечении столбца конкретного предприятия со строкой склада находится информация о расстояниях между этим пунктом доставки и складом. Например, расстояние между предприятием №1 и складом №3 равно 16 км.

Исходные данные для решения транспортной задачи представлены на листе «Транспортная задача» файла MS Excel (рис. 12).



2_2 Пример транспортной задачи в Solver - Excel

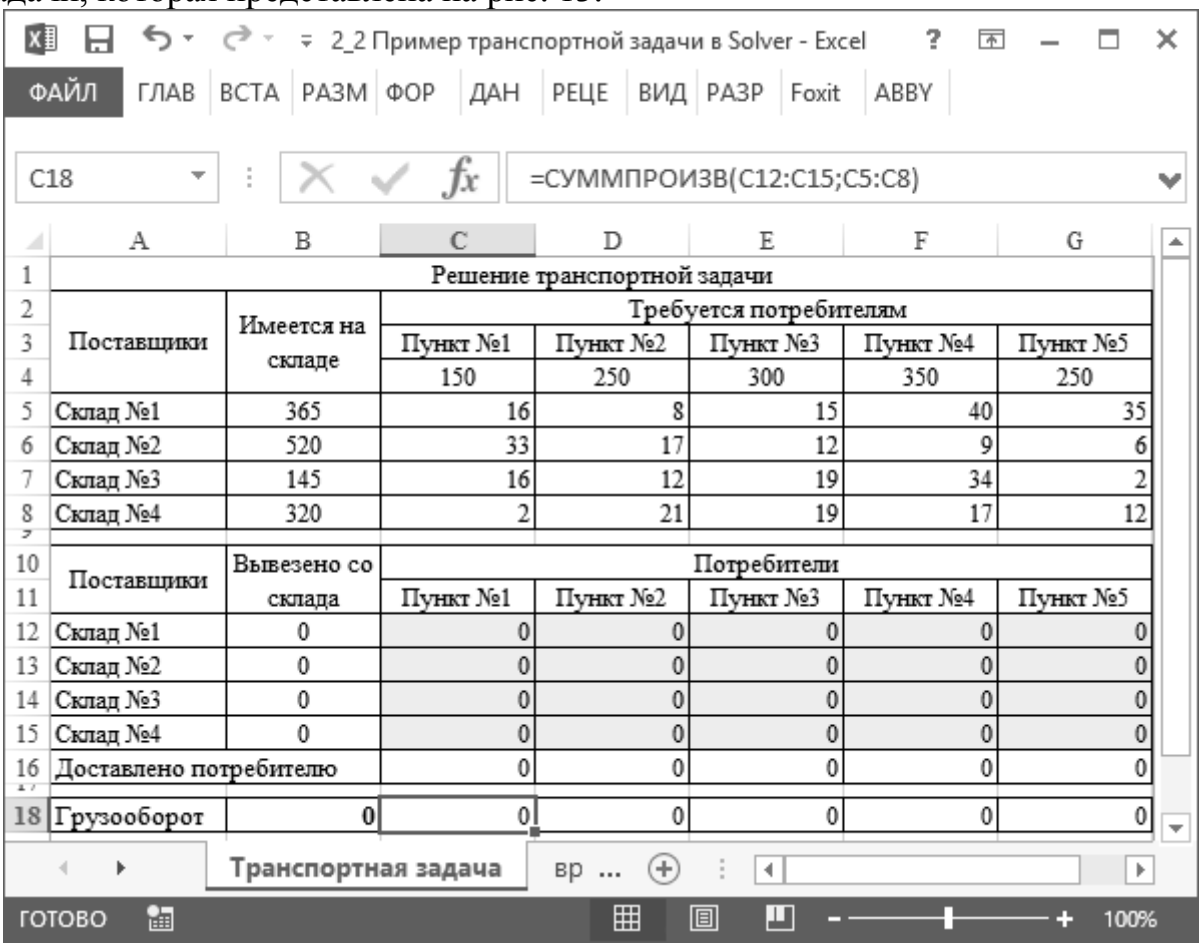
G8 | 12

	A	B	C	D	E	F	G
1	Решение транспортной задачи						
2	Поставщики	Имеется на складе	Требуется потребителям				
3			Пункт №1	Пункт №2	Пункт №3	Пункт №4	Пункт №5
4			150	250	300	350	250
5	Склад №1	365	16	8	15	40	35
6	Склад №2	520	33	17	12	9	6
7	Склад №3	145	16	12	19	34	2
8	Склад №4	320	2	21	19	17	12

Транспортная задача

Рисунок 12. Исходные данные для решения транспортной задачи

После формирования таблицы с исходными данными необходимо сформировать в матричной форме экономико-математическую модель транспортной задачи, которая представлена на рис. 13.



2_2 Пример транспортной задачи в Solver - Excel

C18 | =СУММПРОИЗВ(C12:C15;C5:C8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Решение транспортной задачи						
2	Поставщики	Имеется на складе	Требуется потребителям				
3			Пункт №1	Пункт №2	Пункт №3	Пункт №4	Пункт №5
4			150	250	300	350	250
5	Склад №1	365	16	8	15	40	35
6	Склад №2	520	33	17	12	9	6
7	Склад №3	145	16	12	19	34	2
8	Склад №4	320	2	21	19	17	12
10	Поставщики	Вывезено со склада	Потребители				
11			Пункт №1	Пункт №2	Пункт №3	Пункт №4	Пункт №5
12	Склад №1	0	0	0	0	0	0
13	Склад №2	0	0	0	0	0	0
14	Склад №3	0	0	0	0	0	0
15	Склад №4	0	0	0	0	0	0
16	Доставлено потребителю		0	0	0	0	0
18	Грузооборот	0	0	0	0	0	0

Транспортная задача

Рисунок 13. Исходные данные для решения транспортной задачи

Каждое значение в ячейках (диапазон ячеек **C12:G15**) на пересечении столбца конкретного пункта назначения и строки склада означает количество тонн, поставляемых с этого склада в данный пункт назначения. Поэтому в пер-

вом опорном плане эти ячейки заполняются нулями. Ячейки **B12:B15** (Вывезено со склада) определяются суммированием элементов соответствующих строк. Например, ячейка **B12 =СУММ(C12:G12)**. Ячейки **C16:G16** (Доставлено потребителю) определяются суммированием элементов соответствующих столбцов. Например, ячейка **C16 =СУММ(C12:C15)**. В 18-ой строке в ячейках **C18:G18** определим грузооборот по каждому пункту назначения. Грузооборот определяется как сумма произведений расстояний от конкретного пункта назначения до каждого из складов и объемов перевозок груза в этот пункт потребления с каждого склада. Пример формулы расчета ячейки **C18 =СУММПРОИЗВ(C12:C15;C5:C8)** приведен в строке *fx* на рис. 13. В ячейке **B18** по формуле **СУММ(C16:G16)** будет вычисляться общий объем грузооборота дизельного топлива. В первом опорном плане все объемы грузоперевозок равны нулю. Для решения транспортной задачи воспользуемся командой **Поиск решения,** которая находится во вкладке **Данные.**

В поле **Оптимизировать целевую функцию** необходимо ввести ссылку на ячейку расчета общего объема грузооборота (ячейка **$B$18)** (рис. 14).

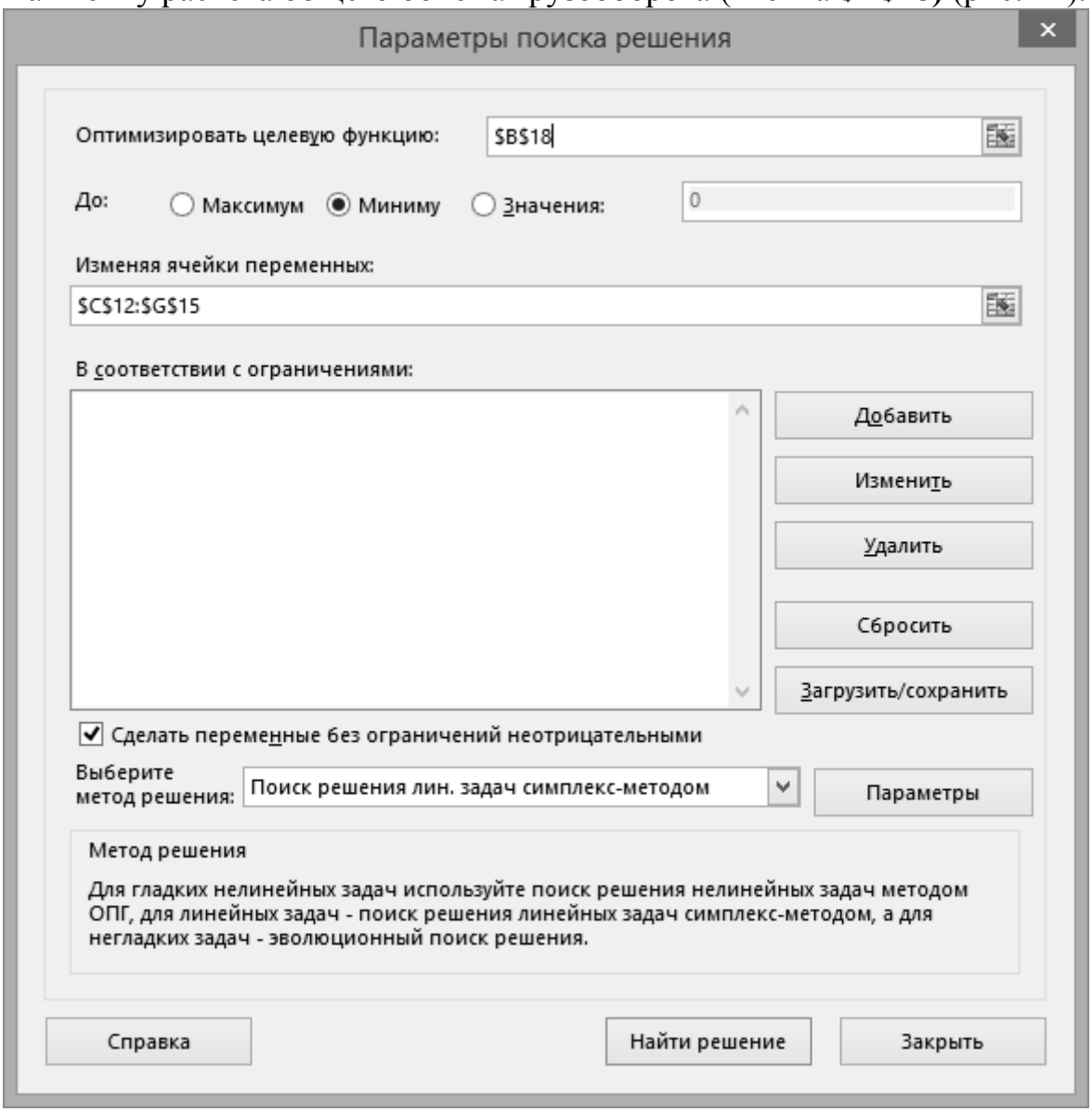


Рисунок 14. Диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Чтобы минимизировать значение конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек, установите переключатель **До** в положение **Минимум**.

В поле **Изменяя ячейки переменных** необходимо ввести ссылки на диапазон изменяемых ячеек (**$C$12:$G$15**). Это означает, что для достижения минимального грузооборота перевозок будут меняться значения в массиве ячеек с C12 по G15, то есть будет изменяться количество груза, перевезенного по конкретному маршруту.

Чтобы обеспечить выполнения условия неотрицательности влияющих переменных, необходимо поставить галочку в разделе **Сделать переменные без ограничений неотрицательными**. Так как модель является линейной, необходимо выбрать в выпадающем списке **Выберите метод решения** пункт **Пойск решения линейных задач симплекс-методом**. Остальные параметры **Поиска решения** можно оставить без изменений либо изменить, используя диалоговое окно **Параметры** и опцию **Справка**.

В поле **В соответствии с ограничениями** необходимо ввести все ограничения, накладываемые на поиск решения, что делается при помочи команды **Добавить**.

Экономический смысл ограничений в данной задаче состоит в следующем:

а) с каждого склада должно быть вывезено дизельного топлива не больше, чем на нем есть; т.е.: **B12≤B5, B13≤B6, B14≤B7, B15≤B8**

или **$B$12:$B$15<=$B$5:$B$8** (рис. 15)

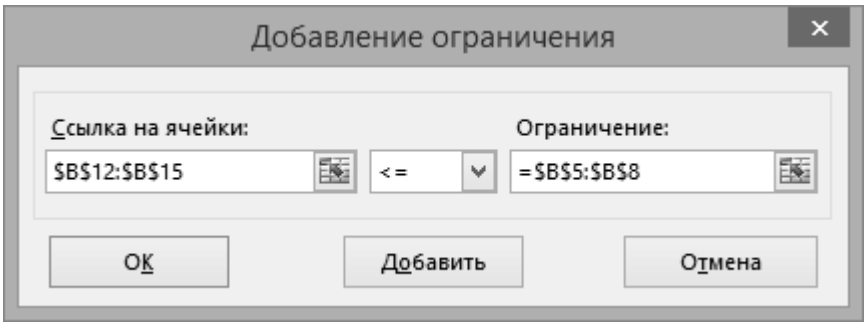


Рисунок 15. Добавление ограничений на вывоз груза из складов

б) каждый потребитель должен получить именно то количество груза, которое было им заказано, т.е.: **C16=C4, D16=D4, E16=E4, F16=F4, G16=G4** или **$C$16:$G$16=$C$4:$G$4** (рис. 16)

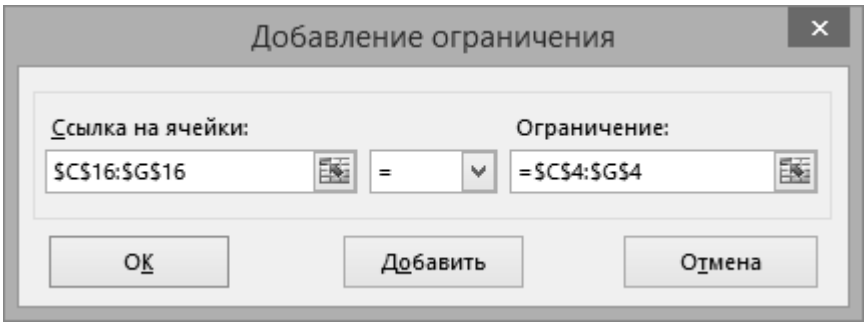


Рисунок 16. Добавление ограничений на доставку груза потребителям

После ввода первой группы ограничений следует нажать кнопку **Добавить** и ввести вторую гуппу. По окончании ввода необходимо нажать на кнопку **ОК**. В случае внесения изменения в какое-либо из ограничений, необходимо указать его в списке **Ограничения** диалогового окна команды **Поиск решения** и выбрать команду **Изменить**. Аналогичным способом можно удалить ненужное ограничение. После выполнения вышеперечисленных инструкций диалоговое окно команды **Параметры поиска решения** будет иметь следующий вид (рис. 17). Остальные параметры модели можно оставить без изменений, либо установить необходимые параметры, используя раздел **Параметры** и опцию **Справка**. Выбор параметров поиска подтверждается нажатием кнопки **ОК.** Для запуска задачи на решение необходимо нажать кнопку **Найти решение** диалогового окна команды **Параметры поиска решения**.

Для сохранения найденного решения на листе, необходимо выбрать в диалоговом окне **Результаты поиска решения** опцию **Сохранить найденное решение** (рис. 18). Для восстановления исходных данных модели можно выбрать в диалоговом окне **Результаты поиска решения** опцию **Восстановить исходные значения**. Прерывание поиска решения осуществляется нажатием клавиши **ESC**.

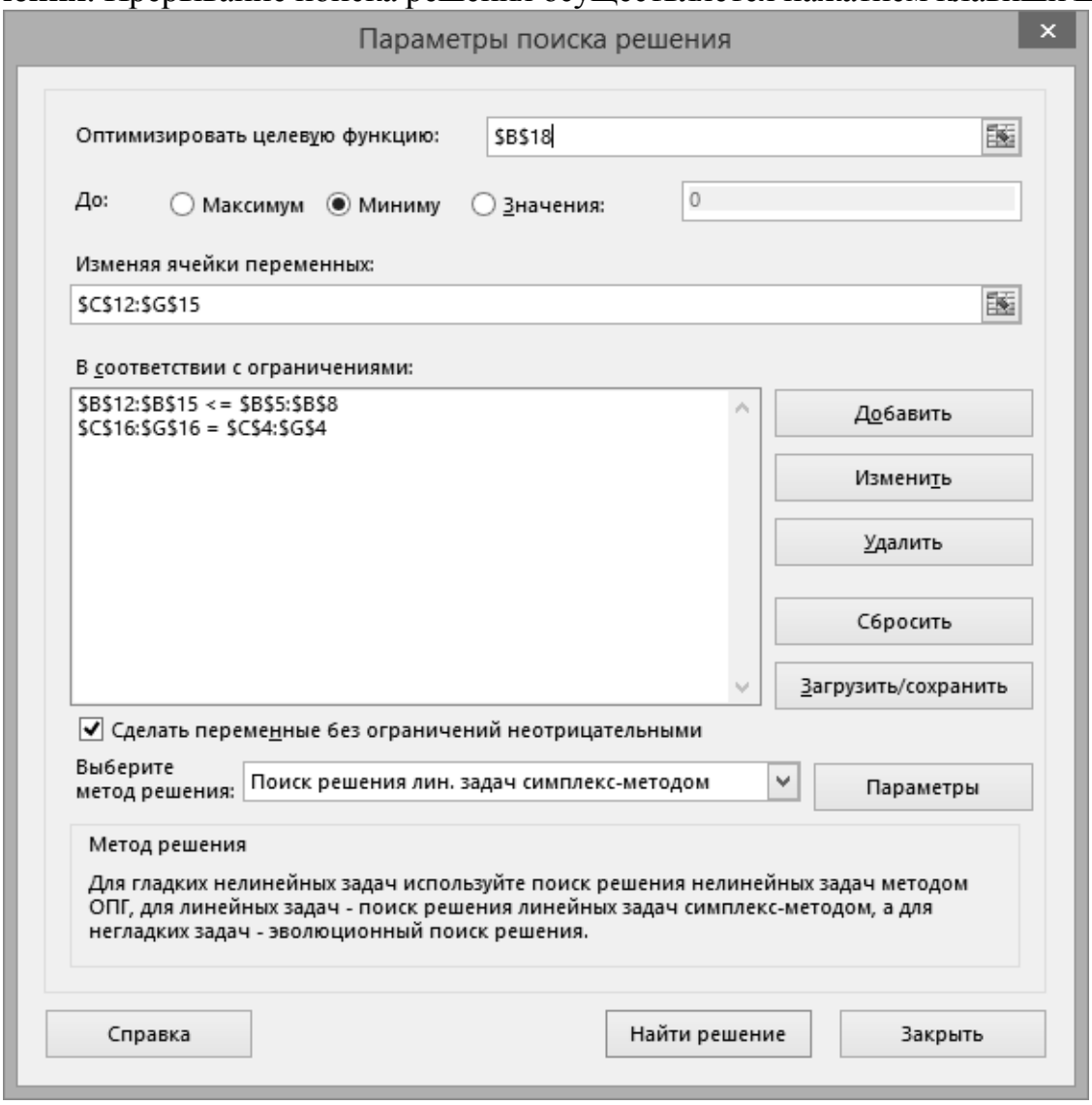


Рисунок 17. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

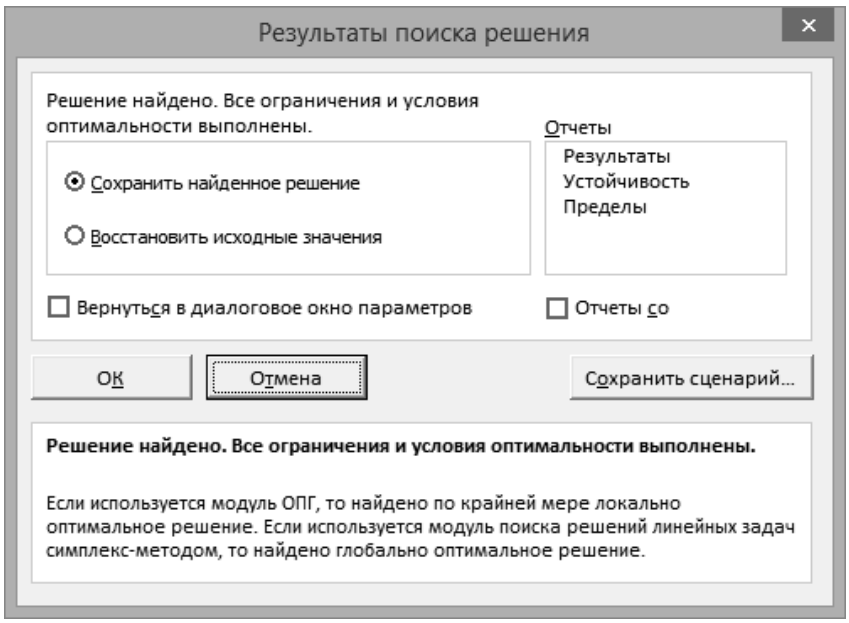
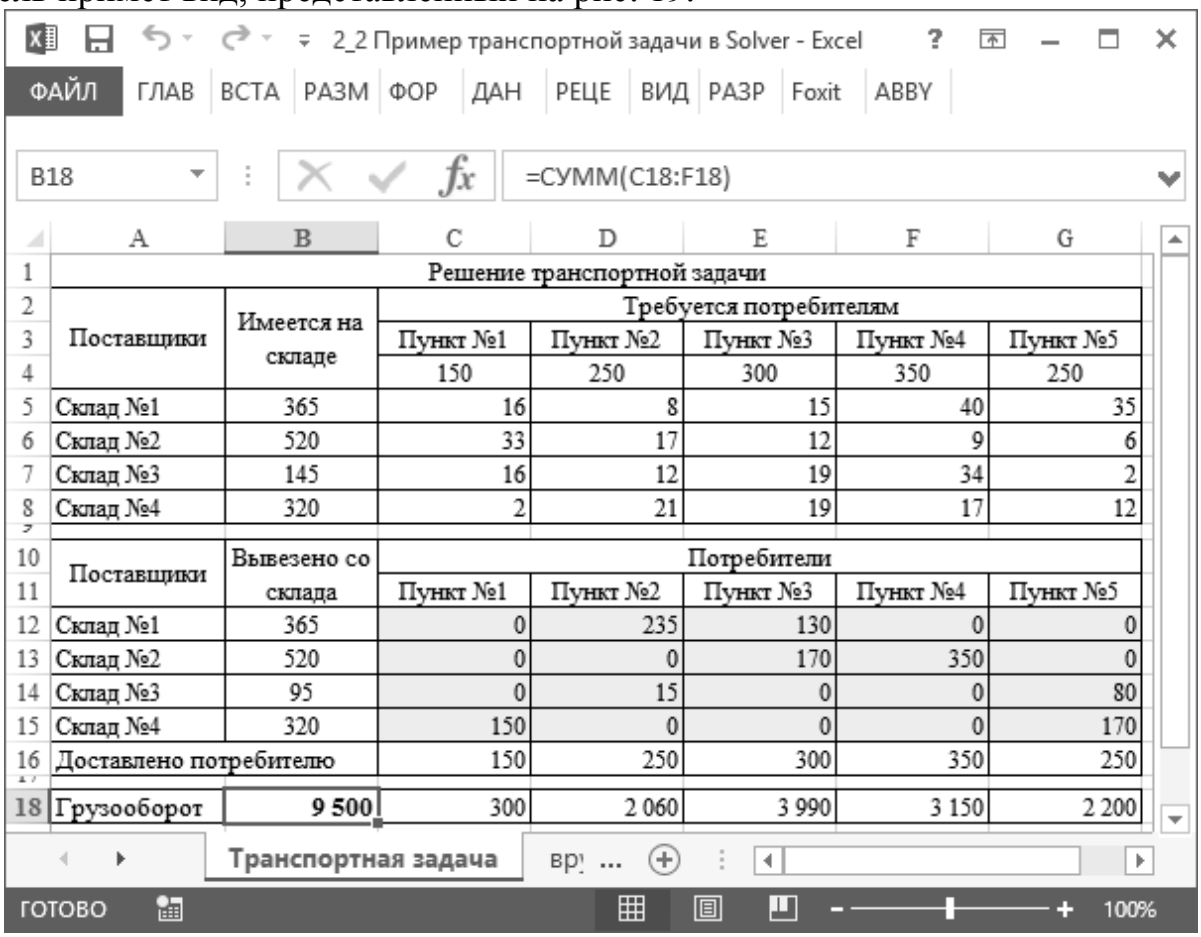


Рисунок 18. Диалоговое окно команды **Результаты поиска решения**

В результате решения и сохранения результатов поиска решения модель примет вид, представленный на рис. 19.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Решение транспортной задачи						
2	Поставщики	Имеется на складе	Требуется потребителям				
3			Пункт №1	Пункт №2	Пункт №3	Пункт №4	Пункт №5
4			150	250	300	350	250
5	Склад №1	365	16	8	15	40	35
6	Склад №2	520	33	17	12	9	6
7	Склад №3	145	16	12	19	34	2
8	Склад №4	320	2	21	19	17	12
10	Поставщики	Вывезено со склада	Потребители				
11			Пункт №1	Пункт №2	Пункт №3	Пункт №4	Пункт №5
12	Склад №1	365	0	235	130	0	0
13	Склад №2	520	0	0	170	350	0
14	Склад №3	95	0	15	0	0	80
15	Склад №4	320	150	0	0	0	170
16	Доставлено потребителю		150	250	300	350	250
18	Грузооборот	9 500	300	2 060	3 990	3 150	2 200

Рисунок 19. Результаты решения транспортной задачи

В результате решения потребность всех сельскохозяйственных предприятий удовлетворена полностью. Потребность в дизельном топливе предприятия №1 (150 т) удовлетворяется полностью за счет запасов, имеющихся на складе №4. С этого же склада 170 т дизельного топлива доставляется в пред-

приятие №5. Еще 80 т, необходимые данному предприятию, будут доставлены со склада №3.

Со склада №3 15 т дизельного топлива будут доставлены в предприятие №2. Остальная потребность этого предприятия (235 т) будет покрыта за счет дизельного топлива, хранящегося на складе №1. Потребность в дизельном топливе предприятия №3 будет покрыта со склада №1 (130 т) и склада №2 (170 т). Вся потребность предприятия №4 будет покрыта за счет доставки дизельного топлива со склада №2 (350 т). В предприятие №5 будет доставлено 80 т со склада № 3 и 170 т со склада № 4.

Со склада №3 остались невывезенными 50 т дизельного топлива.

Суммарный грузооборот составил 9 500 тонно-километров.

3. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Экономико-математическая модель по оптимизации рационов кормления сельскохозяйственных животных

Постановка задачи.

Полноценное кормление сельскохозяйственных животных является неотъемлемым условием их высокой продуктивности. Недостаток какого-либо питательного вещества или элемента в рационе отрицательно сказывается на развитии животных и ведет к снижению их продуктивности, а неполноценное кормление может вызывать перерасход кормов. Поэтому кормовой рацион должен быть полностью сбалансирован по всем элементам, необходимым для каждого вида животных. Исходя из наличия имеющихся в хозяйстве кормов при заданном уровне продуктивности необходимо составить суточный рацион кормления, который должен полностью удовлетворять биологические потребности животных в питательных веществах, макро- и микроэлементах, соответствовать зоотехническим требованиям по пределам включения в него различных групп кормов и иметь наименьшую себестоимость.

Входная информация.

Для разработки экономико-математической модели данной задачи необходимо подготовить следующую информацию:

- ассортимент имеющихся в наличии кормов и кормовых добавок;
- содержание питательных веществ и элементов в единице корма;
- требуемое количество питательных веществ и элементов в рационе;
- максимально и минимально возможные нормы скармливания отдельных кормов и их групп;
- соотношение между отдельными кормами;
- себестоимость единицы кормов и цены приобретения кормов.

Основными источниками получения информации являются фактические данные, получаемые в хозяйствах, справочная литература, данные лабораторных анализов. Подготовку входной информации и построение экономико-математической модели рассмотрим на конкретном примере.

Условия задачи и подготовка входной информации.

Необходимо определить суточный рацион кормления молодняка крупного скота живой массой 150 кг при планируемом суточном приросте 800 г, который должен полностью удовлетворять биологические потребности животных в питательных веществах, макро- и микроэлементах, соответствовать зоотехническим требованиям по пределам включения в него различных групп кормов и иметь наименьшую себестоимость. В хозяйстве имеются в наличии: пшеница дробленая, ячмень дробленый, горох, витаминно-травяная мука, солома, сено, сенаж, силос кукурузный. Имеется возможность приобретения комбикорма, жома, патоки, минерально-витаминного премикса. Информация о содержании питательных веществ, макро- и микроэлементов в 1 кг указанных кормов и кормовых добавок приведена в таблице 16.

Таблица 16. Содержание питательных веществ, макро- и микроэлементов в 1 кг кормов и кормовых добавок

Питательное вещество	Пшеница дробленая	Ячмень дробленый	Горох	Комбикорм	Витаминно-травяная мука	Сено	Солома	Сенаж	Силос	Жом	Патока	Минерально-витаминный премикс
Кормовые единицы, к.ед.	1,20	1,15	1,18	1,00	0,72	0,48	0,20	0,32	0,20	0,12	0,76	0,50
Обменная энергия, мДж	10,80	10,50	11,10	9,10	8,60	6,45	4,80	3,68	2,30	1,13	9,36	
Сухое вещество, кг	0,850	0,850	0,850	0,880	0,900	0,830	0,830	0,450	0,250	0,112	0,800	
Сырой протеин, г	133	113	218	165	189	91	37	54	25	12	99	
Переваримый протеин, г	106	27	192	110	119	51	5	38	14	6	60	55
Сырая клетчатка, г	17	49	54	55	211	237	331	148	75	33		
Сахар, г	20,0	22,0	55,0	51,0	40,0	29,0	2,4	22,0	6,0	2,5	626,0	25,5
Сырой жир, г	20	22	19	25	29	21	13	13	10	3		
Кальций, г	0,8	2,0	2,0	6,5	17,3	5,6	2,8	2,8	1,4	1,5	3,2	133,6
Фосфор, г	3,6	3,9	4,3	6,0	3,1	1,3	0,8	1,4	0,4	0,14	0,2	257,3
Магний, г	1,0	1,0	1,2	4,0	3,3	1,4	0,8	0,8	0,5	0,5	0,1	11,0
Каротин, мг	1,0	0,2	0,2		260,0	24,0	4,0	30,0	20,0			
Кобальт, мг	0,10	0,26	0,18	0,20	0,20	0,20	0,14	0,39	0,02	0,06	0,60	0,50
Витамин Е, мг	11,9	50,0	53,0	35,0	93,5	300,0		45,0	46,0		3,0	85,0
Соль, г												81,0

В соответствии с зооветеринарными требованиями в суточном рационе кормления молодняка КРС живым весом 150 кг при среднесуточном приросте в 800 г должно содержаться не менее 5,5 кг кормовых единиц (B_1), 45 мДж обменной энергии (B_2), 4,6 кг сухого вещества (B_3), 775 г сырого протеина (B_4), 505 г переваримого протеина (B_5), 840 г сырой клетчатки (B_6), 400 г сахара (B_7), 200 г сырого жира (B_8), 25 г кальция (B_9), 11 г фосфора (B_{10}), 7 г магния (B_{11}), 75 мг каротина (B_{12}), 2,4 мг кобальта (B_{13}), 100 мг витамина Е (B_{14}), 10 г соли (B_{15}).

В связи с физиологическими особенностями животных в суточном рационе различные группы кормов должны скармливаться в определенном соотношении и пределах. Содержание каждого вида корма в рационе может изменяться в пределах разницы между нижней и верхней границами.

В данном примере заданы следующие границы скармливания отдельных групп кормов в процентах от суммарной питательности рациона (табл. 17).

Таблица 17. Границы скармливания отдельных кормов и их групп, в процентах от суммарной питательности рациона

Корма и их группы	Минимальная граница	Максимальная граница
Концентрированные корма	20 (α_{16})	30 (β_{17})
Грубые корма	10 (α_{18})	25 (β_{19})
Силос	15 (α_{20})	25 (β_{21})
Жом	5 (α_{22})	15 (β_{23})
Сенаж	8 (α_{24}),	15 (β_{25})

Максимальная суточная дача витаминно-травяной муки - не более 1,8 кг на одну голову в сутки (M_{26}), патоки – не более 2 кг (M_{27}), силоса – не более 30 кг (M_{28}). Использование комбикорма ограничено в размере до 50% общего объема концентрированных кормов (μ_{29}), сена – до 55% объема грубых кормов (μ_{30}).

Корма и кормовые добавки оприходованы в хозяйстве по следующим ценам (за 1 кг): пшеница дробленая – 4,58 руб. (c_1), ячмень дробленый – 3,86 руб. (c_2), горох – 8,11 руб. (c_3), комбикорм – 4,26 руб./кг (c_4), витаминно-травяная мука – 5,02 руб. (c_5), сено – 1,50 руб. (c_6), солома – 0,48 руб. (c_7), сенаж – 1,58 руб. (c_8), силос кукурузный – 1,01 руб. (c_9), жом – 0,11 руб. (c_{10}), патока – 2,85 руб. (c_{11}), минерально-витаминный премикс – 10,41 руб. (c_{12}).

Построение экономико-математической модели.

Система переменных данной экономико-математической задачи представлена основными и вспомогательной переменными. За основные переменные (X_j) принимается искомое количество кормов и кормовых добавок в суточном рационе кормления 1 головы скота; эти переменные измеряются в килограммах. Вспомогательная переменная $\overline{X_j}$ используется для определения суммарного содержания в рационе кормовых единиц.

Все условия задачи записаны в виде линейных уравнений и неравенств (ограничений), которые можно разбить на группы:

- по гарантированному удовлетворению потребности сельскохозяйственных животных в питательных веществах, макро- и микроэлементах;
- по пределам включения отдельных кормов или групп кормов в рацион;
- по соотношению отдельных видов кормов и добавок;
- по определению суммарного количества кормовых единиц в рационе.

Основными ограничениями (с 1 по 15) являются условия по гарантированному удовлетворению потребности сельскохозяйственных животных в питательных веществах, макро- и микроэлементах

$$\sum_{j=1}^{12} a_{ij} X_j \geq B_i \quad (i = 1,...,15),$$

где X_j - искомое количество кормов и кормовых добавок в суточном рационе кормления 1 головы скота;

a_{ij} - содержание питательных веществ, макро- и микроэлементов *i*-го вида в 1 кг *j*-го вида корма или кормовой добавки;

B_i - минимально допустимое количество питательных веществ i-го вида в рационе.

Эти ограничения составляются на основании данных о содержании питательных веществ, макро- и микроэлементов в 1 кг кормов и кормовых добавок (таблица 16) и их минимальном содержании в суточном рационе кормления.

Например, ограничение, гарантирующее, что в суточном рационе кормления будет содержаться не менее 5,3 к.ед., будет записано в следующем виде:

$$1{,}20X_1+1{,}15X_2+1{,}18X_3+1{,}00X_4+0{,}72X_5+0{,}48X_6+0{,}20X_7+0{,}32X_8+0{,}20X_9+0{,}12X_{10}+0{,}76X_{11}+0{,}50X_{12}>=5{,}5.$$

Коэффициент 1,20 при X_1 обозначает, что в одном килограмме дробленой пшеницы содержится 1,20 к.ед., коэффициент 0,48 при X_6 - что в одном килограмме сена содержится 0,48 к.ед. и т.д.

Дополнительные ограничения (по пределам включения отдельных кормов или групп кормов в рацион и по соотношению отдельных видов кормов и добавок) разделены на три группы.

Пределы включения отдельных кормов или групп кормов в рацион могут описываться двумя способами: во-первых, через указание минимальных и максимальных границ скармливания отдельных кормов и их групп в процентах от суммарного количества кормовых единиц, содержащихся в рационе; во–вторых, через ограничение максимального суточного потребления отдельных кормов в физической массе.

Первую группу дополнительных ограничений (с 16 по 25) составляют ограничения по установлению минимальных и максимальных границ скармливания отдельных кормов и их групп в процентах от суммарного количества кормовых единиц, содержащихся в рационе

$$\alpha_{h13} \overline{X}_{13} \leq \sum_{j=1}^{12} a_{1j} X_j \leq \beta_{h13} \overline{X}_{13} \quad (i = 16,\ldots,25),$$

где X_j - искомое количество кормов и кормовых добавок в суточном рационе кормления 1 головы скота;

$\overline{X}_{13}$ - суммарное содержание в рационе кормовых единиц;

α_{h13}, β_{h13} - нижняя и верхняя граница включения в рацион h-ой группы корма в процентах.

Например, условие по минимальному (20%) и максимальному (30%)

удельному весу концентрированных кормов в рационе имеет вид:

нижняя граница

$$1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4>=0,20X_{13} \text{ или}$$
$$1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4 - 0,20X_{13}>=0;$$

верхняя граница

$$1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4<=0,30X_{13} \text{ или}$$
$$1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4 - 0,30X_{13}<=0.$$

Вторую группу дополнительных ограничений (с 26 по 28) составляют ограничения по максимальному суточному потреблению отдельных кормов в физической массе

$$\gamma_{ij} X_j \le M_i \quad (i = 26,27,28),$$

где γ_{ij} - булевы коэффициенты связи (равны либо 0, либо 1) по *i*-му виду корма;

M_i - максимальное суточное потребление *i*-го корма в физической массе.

Ограничения по максимальному суточному потреблению витаминно-травяной муки в размере 1,8 кг, силоса – 30 кг, патоки - 2,0 кг имеют следующий вид:

$X_5 <= 1,8$

$X_9 <=30,0$

$X_{11}<= 2,0$

Третью группу дополнительных ограничений (с 29 по 30) составляют ограничения по соотношению отдельных видов кормов и добавок

$$\sum_{j=1}^{12} a_{1j} X'_j \le \mu_{ih} \sum_{j=1}^{12} a_{1j} X_j \quad i = (29,30),$$

где X'_j - вид корма, удельный вес которого в h-ой группе кормов ограничен;

μ_{ih} - максимальный удельный вес i-го корма в h-ой группе кормов.

Эти ограничения формулируют с использованием алгебраических преобразований. Так, ограничение по включению комбикорма в размере не более 50 % от питательности концентрированных кормов первоначально имеет форму

$$1,00X_4<=0,50\cdot(1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4)$$

Проведем преобразования:

$$1,00X_4 - 0,50\cdot(1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4) <=0,$$
$$-0,50\cdot 1,20X_1-0,50\cdot 1,15X_2-0,50\cdot 1,18X_3+(1,00-0,50)\cdot X_4<=0,$$
$$0,600X_1-0,575X_2-0,590X_3+0,500X_4<=0.$$

Ограничение по включению сена в группу грубых кормов в размере не более 55% их питательности будет записано так:

$0,48X_6<=0,55\cdot(0,48X_6+0,20X_7)$

Проведем преобразования:

$$0,48X_6 - 0,55\cdot(0,48X_6+0,20X_7) <=0,$$
$$(1-0,55)\cdot 0,48X_6-0,55\cdot 0,20X_7<=0,$$
$$0,216X_6-0,110X_7<=0.$$

Вспомогательное ограничение (31) накладывается для подсчета суммарного количества кормовых единиц в рационе

$$\sum_{j=}^{12} a_{1j} X_j = \overline{X}_{13} ,$$

где a_{1j} - содержание кормовых единиц в единице j-го корма и кормовой добавки.

Это ограничение имеет следующий вид:

$$1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4+0,72X_5+0,48X_6+0,20X_7+0,32X_8+0,20X_9+0,12X_{10}+0,76X_{11}+0,5X_{12} = X_{13},$$

или

$$1,20X_1+1,15X_2+1,18X_3+1,00X_4+0,72X_5+0,48X_6+0,20X_7+0,32X_8+0,20X_9+0,12X_{10}+0,76X_{11}+0,5X_{12}-X_{13}= 0.$$

Значения переменных должны быть неотрицательными:

$X_j \geq 0$, $\overline{X}_j \geq 0$.

В качестве критерия оптимальности данной задачи принята минимизация себестоимости рациона

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{12} c_j X_j ,$$

где c_j - себестоимость или цена приобретения 1 кг j-го корма или кормовой добавки.

Целевая функция записывается следующим образом:

$$Z_{min}=4,58X_1+3,86X_2+8,11X_3+4,26X_4+5,02X_5+1,50X_6+0,48X_7+1,58X_8+1,01X_9+0,11X_{10}+2,85X_{11}+10,41X_{12}$$

Вся подготовленная информация сводится в экономико-матема-тическую модель, которая в матричной форме представлена в таблице 18.

Реализация разработанной экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления осуществляется с помощью надстройки **Поиск решения** Microsoft Excel. Порядок работы с данной надстройкой описан в разделе 1.4 настоящего практикума.

Таблица 18. Экономико-математическая модель по оптимизации суточного рациона кормления молодняка КРС

№	ограничения	. мя. дЕ	Переменные															
			ание шП ренборд	внемч Я ванеборд	хороГ	ебомо К	ниматиВ ,мгмонякарт	онеС	замолоС	жанеС	солиС	мо Ж	акота П	кимер П	С ноцнар в		Ограничения	
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}			
	Значения переменных по решению →		**0,29**	**0,00**	**0,44**	**0,86**	**0,00**	**1,64**	**3,23**	**1,80**	**4,30**	**7,17**	**0,29**	**0,12**	**5,74**			
1	Содержание кормовых единиц	к.ед.	1,20	1,15	1,18	1,00	0,72	0,48	0,20	0,32	0,20	0,12	0,76	0,50		3,74	>=	3,5
2	Содержание обменной энергии	мДж	10,80	10,50	11,10	9,10	8,60	6,45	4,80	3,68	2,30	1,13	9,36			90,27	>=	45
3	Содержание сухого вещества	кг	0,850	0,850	0,850	0,880	0,900	0,830	0,830	0,450	0,250	0,112	0,800			14,34	>=	14,6
4	Содержание сырого протеина	г	133,0	113,0	218,0	165,0	189,0	91,0	37,0	54,0	25,0	12,0	99,0			864,39	>=	775
5	Содержание переваримого протеина	г	106,0	27,0	192,0	110,0	119,0	51,0	5,0	38,0	14,0	6,0	60,0	55,0		505,00	>=	505
6	Содержание сырой клетчатки	г	17,0	49,0	54,0	55,0	211,0	237,0	331,0	148,0	75,0	33,0				2359,51	>=	840
7	Содержание сахара	г	20,0	22,0	55,0	51,0	40,0	29,0	2,4	22,0	6,0	2,5	626,0	25,5		400,00	>=	400
8	Содержание сырого жира	г	20,0	22,0	19,0	25,0	29,0	21,0	13,0	13,0	10,0	3,0				200,00	>=	200
9	Содержание кальция	г	0,8	2,0	2,0	6,5	17,3	5,6	2,8	2,8	1,4	1,5	3,2	133,6		64,20	>=	25
10	Содержание фосфора	г	3,6	3,9	4,3	6,0	3,1	1,3	0,8	1,4	0,4	0,1	0,2	257,3		49,87	>=	11
11	Содержание магния	г	1,0	1,0	1,2	4,0	3,3	1,4	0,8	0,8	0,5	0,5	0,1	11,0		17,70	>=	7
12	Содержание каротина	мг	1,0	0,2	0,2		260,0	24,0	4,0	30,0	20,0					192,75	>=	75
13	Содержание кобольта	мг	0,10	0,26	0,18	0,20	0,20	0,20	0,14	0,39	0,02	0,06	0,60	0,50		2,52	>=	2,4
14	Содержание витамина Е	мг	11,9	50,0	53,0	35,0	93,5	300,0		45,0	46,0		3,0	85,0		840,10	>=	100
15	Содержание соли	г												81,0		10,00	>=	10
16	По минимальному включению в рацион концентрированных кормов	к.ед.	1,20	1,15	1,18	1,00									-0,20	0,57	>=	0
17	По максимальному включению в рацион концентрированных кормов	к.ед.	1,20	1,15	1,18	1,00									-0,30	0,00	<=	0
18	По минимальному включению в рацион грубых кормов	к.ед.						0,48	0,20						-0,10	0,86	>=	0
19	По максимальному включению в рацион грубых кормов	к.ед.						0,48	0,20						-0,25	0,00	<=	0
20	По минимальному включению в рацион силоса	к.ед.									0,20				-0,15	0,00	>=	0
21	По максимальному включению в рацион силоса	к.ед.									0,20				-0,25	-0,57	<=	0
22	По минимальному включению в рацион жома	к.ед.										0,12			-0,05	0,57	>=	0
23	По максимальному включению в рацион жома	к.ед.										0,12			-0,15	0,00	<=	0
24	По минимальному включению в рацион сенажа	к.ед.								0,32					-0,08	0,12	>=	0
25	По максимальному включению в рацион сенажа	к.ед.								0,32					-0,15	-0,29	<=	0
26	По максимальной суточной даче патоки	кг											1			0,29	<=	2
27	По максимальной суточной даче витаминно-травяной муки	кг					1									0,00	<=	1,8
28	По максимальной суточной даче силоса	кг									1					4,30	<=	30
29	По доле комбикорма в составе концентрированных кормов	к.ед.	-0,600	-0,575	-0,590	0,500										0,00	<=	0
30	По доле сена в составе грубых кормов	к.ед.						0,216	-0,110							0,00	<=	0
31	Общее содержание кормовых единиц	к.ед.	1,20	1,15	1,18	1,00	0,72	0,48	0,20	0,32	0,20	0,12	0,76	0,50	-1	0,00	=	0
	Z_{min} (минимум себестоимости рациона кормления)	руб	4,58	3,86	8,11	4,26	5,02	1,50	0,48	1,58	1,01	0,11	2,85	10,41		**22,64**	min	

Анализ результатов решения задачи

Результаты реализации экономико-математической модели по оптимизации суточного рациона кормления молодняка крупного скота живой массой 150 кг при суточном приросте 800 г приведены в таблице 19.

Таблица 19. Результаты решения задачи по оптимизации суточного рациона кормления

Переменные		Значение по решению, кг	Содержится в 1 кг корма, к.ед.	Содержится в рационе кормления, к.ед.	Удельный вес в рационе, %
X_1	Пшеница дробленая	0,29	1,20	0,35	6,05
X_2	Ячмень дробленый	0,00	1,15	0,00	0,00
X_3	Горох	0,44	1,18	0,51	8,95
X_4	Комбикорм	0,86	1,00	0,86	15,00
X_5	Витаминно-травяная мука	0,00	0,72	0,00	0,00
X_6	Сено	1,64	0,48	0,79	13,75
X_7	Солома	3,23	0,20	0,65	11,25
X_8	Сенаж	1,80	0,32	0,58	10,02
X_9	Силос	4,30	0,20	0,86	15,00
X_{10}	Жом	7,17	0,12	0,86	15,00
X_{11}	Патока	0,29	0,76	0,22	3,90
X_{12}	Премикс минеральный	0,12	0,50	0,06	1,08
X_{13}	Всего			5,74	100,00

По оптимальному решению удельный вес концентрированных кормов в рационе кормления составил 30,0%, грубых кормов – 25,0%, сенажа – 10,0%, силоса – 15,0%, жома – 15,0%. Доля комбикорма в составе концентрированных кормов не превысила требуемых 50%, а сена – 55% в составе грубых кормов. Суточная дача патоки, витаминно-травяной муки и силоса не превысила заданных пределов. Содержание кормовых единиц в рационе составило 5,74 к.ед., что выше минимально необходимого на 0,24 к.ед. Это произошло из-за относительного дефицита в используемых кормах таких питательных веществ, как переваримый протеин и сырой жир, поскольку дефицит сахара может быть покрыт за счет патоки. То есть для дальнейшей оптимизации рациона кормления необходимо включить в рацион корма с высоким содержанием переваримого протеина и сырого жира.

Себестоимость суточного рациона по оптимальному решению составила 22,64 руб. Любое другое сочетание кормов в рационе при данных условиях приведет к повышению его себестоимости.

Задание для самостоятельной работы

Используя условия предыдущей задачи и предлагаемых вариантов, разработать и реализовать экономико-математическую модель по оптимизации суточного рациона кормления животных.

№	Значения по вариантам:			
1	$B_1 = 5,8$ $B_2 = 49$ $B_3 = 5,4$ $B_4 = 850$ $B_5 = 550$ $B_6 = 1050$ $B_7 = 440$ $B_8 = 220$ $B_9 = 27$ $B_{10} = 14$ $B_{11} = 11$	$B_{12} = 90$ $B_{13} = 3$ $B_{14} = 125$ $B_{15} = 15$ $\alpha_{16} = 19\%$ $ß_{17} = 29\%$ $\alpha_{18} = 11\%$ $ß_{19} = 26\%$ $\alpha_{20} = 13\%$ $ß_{21} = 24\%$ $\alpha_{22} = 17\%$	$ß_{23} = 27\%$ $\alpha_{24} = 7\%$ $ß_{25} = 18\%$ $M_{26} = 2,2$ $M_{27} = 2$ $M_{28} = 31$ $\mu_{29} = 49\%$ $\mu_{30} = 37\%$ $c_1 = 5,75$ $c_2 = 5,93$	$c_3 = 6,65$ $c_4 = 5,24$ $c_5 = 7,89$ $c_6 = 1,81$ $c_7 = 0,63$ $c_8 = 1,63$ $c_9 = 0,72$ $c_{10} = 0,99$ $c_{11} = 2,20$ $c_{12} = 11,8$
2	$B_1 = 6,2$ $B_2 = 54$ $B_3 = 6$ $B_4 = 905$ $B_5 = 590$ $B_6 = 1260$ $B_7 = 470$ $B_8 = 235$ $B_9 = 31$ $B_{10} = 18$ $B_{11} = 14$	$B_{12} = 115$ $B_{13} = 3,6$ $B_{14} = 150$ $B_{15} = 20$ $\alpha_{16} = 20\%$ $ß_{17} = 31\%$ $\alpha_{18} = 10\%$ $ß_{19} = 25\%$ $\alpha_{20} = 12\%$ $ß_{21} = 23\%$ $\alpha_{22} = 18\%$	$ß_{23} = 30\%$ $\alpha_{24} = 9\%$ $ß_{25} = 19\%$ $M_{26} = 2,3$ $M_{27} = 1,2$ $M_{28} = 26$ $\mu_{29} = 37\%$ $\mu_{30} = 39\%$ $c_1 = 5,15$ $c_2 = 4,16$	$c_3 = 8,36$ $c_4 = 6,54$ $c_5 = 7,37$ $c_6 = 1,58$ $c_7 = 0,61$ $c_8 = 1,63$ $c_9 = 1,16$ $c_{10} = 0,80$ $c_{11} = 1,56$ $c_{12} = 8,27$
3	$B_1 = 7$ $B_2 = 61$ $B_3 = 7,5$ $B_4 = 915$ $B_5 = 595$ $B_6 = 1575$ $B_7 = 540$ $B_8 = 260$ $B_9 = 38$ $B_{10} = 21$ $B_{11} = 17$	$B_{12} = 140$ $B_{13} = 4,5$ $B_{14} = 185$ $B_{15} = 25$ $\alpha_{16} = 21\%$ $ß_{17} = 28\%$ $\alpha_{18} = 12\%$ $ß_{19} = 22\%$ $\alpha_{20} = 11\%$ $ß_{21} = 25\%$ $\alpha_{22} = 22\%$	$ß_{23} = 28\%$ $\alpha_{24} = 10\%$ $ß_{25} = 20\%$ $M_{26} = 1,5$ $M_{27} = 1,8$ $M_{28} = 25$ $\mu_{29} = 44\%$ $\mu_{30} = 50\%$ $c_1 = 6,37$ $c_2 = 5,81$	$c_3 = 9,35$ $c_4 = 6,61$ $c_5 = 6,21$ $c_6 = 2,01$ $c_7 = 0,59$ $c_8 = 1,77$ $c_9 = 1,10$ $c_{10} = 0,76$ $c_{11} = 1,43$ $c_{12} = 11,88$
4	$B_1 = 7,3$ $B_2 = 66$ $B_3 = 8,5$ $B_4 = 955$ $B_5 = 620$ $B_6 = 1785$ $B_7 = 560$ $B_8 = 270$ $B_9 = 40$ $B_{10} = 23$ $B_{11} = 19$	$B_{12} = 160$ $B_{13} = 5,1$ $B_{14} = 215$ $B_{15} = 30$ $\alpha_{16} = 22\%$ $ß_{17} = 27\%$ $\alpha_{18} = 9\%$ $ß_{19} = 19\%$ $\alpha_{20} = 12\%$ $ß_{21} = 22\%$ $\alpha_{22} = 19\%$	$ß_{23} = 29\%$ $\alpha_{24} = 5\%$ $ß_{25} = 17\%$ $M_{26} = 1,7$ $M_{27} = 2,2$ $M_{28} = 22$ $\mu_{29} = 58\%$ $\mu_{30} = 51\%$ $c_1 = 5,21$ $c_2 = 5,09$	$c_3 = 9,29$ $c_4 = 4,09$ $c_5 = 5,26$ $c_6 = 2,34$ $c_7 = 0,63$ $c_8 = 1,81$ $c_9 = 1,10$ $c_{10} = 0,70$ $c_{11} = 2,13$ $c_{12} = 8,66$

№	Значения по вариантам:			
5	$B_1 = 8,1$ $B_2 = 75$ $B_3 = 9,5$ $B_4 = 1080$ $B_5 = 650$ $B_6 = 1805$ $B_7 = 650$ $B_8 = 300$ $B_9 = 44$ $B_{10} = 24$ $B_{11} = 22$	$B_{12} = 180$ $B_{13} = 5,7$ $B_{14} = 235$ $B_{15} = 35$ $\alpha_{16} = 18\%$ $ß_{17} = 25\%$ $\alpha_{18} = 15\%$ $ß_{19} = 28\%$ $\alpha_{20} = 14\%$ $ß_{21} = 19\%$ $\alpha_{22} = 21\%$	$ß_{23} = 30\%$ $\alpha_{24} = 3\%$ $ß_{25} = 16\%$ $M_{26} = 2,1$ $M_{27} = 2,3$ $M_{28} = 19$ $\mu_{29} = 57\%$ $\mu_{30} = 52\%$ $c_1 = 5,83$ $c_2 = 4,12$	$c_3 = 6,82$ $c_4 = 4,60$ $c_5 = 6,73$ $c_6 = 1,98$ $c_7 = 0,61$ $c_8 = 1,43$ $c_9 = 0,91$ $c_{10} = 0,65$ $c_{11} = 1,44$ $c_{12} = 10,68$
6	$B_1 = 8,4$ $B_2 = 84$ $B_3 = 10,5$ $B_4 = 1120$ $B_5 = 670$ $B_6 = 1995$ $B_7 = 670$ $B_8 = 315$ $B_9 = 50$ $B_{10} = 27$ $B_{11} = 25$	$B_{12} = 190$ $B_{13} = 6,3$ $B_{14} = 265$ $B_{15} = 40$ $\alpha_{16} = 19\%$ $ß_{17} = 32\%$ $\alpha_{18} = 10\%$ $ß_{19} = 16\%$ $\alpha_{20} = 11\%$ $ß_{21} = 28\%$ $\alpha_{22} = 20\%$	$ß_{23} = 29\%$ $\alpha_{24} = 7\%$ $ß_{25} = 15\%$ $M_{26} = 1,3$ $M_{27} = 1,5$ $M_{28} = 28$ $\mu_{29} = 34\%$ $\mu_{30} = 46\%$ $c_1 = 5,13$ $c_2 = 4,31$	$c_3 = 9,44$ $c_4 = 4,86$ $c_5 = 5,43$ $c_6 = 2,34$ $c_7 = 0,51$ $c_8 = 1,27$ $c_9 = 0,72$ $c_{10} = 0,97$ $c_{11} = 1,43$ $c_{12} = 8,76$
7	$B_1 = 8,7$ $B_2 = 96$ $B_3 = 11$ $B_4 = 1160$ $B_5 = 695$ $B_6 = 2280$ $B_7 = 695$ $B_8 = 325$ $B_9 = 55$ $B_{10} = 30$ $B_{11} = 28$	$B_{12} = 200$ $B_{13} = 7,2$ $B_{14} = 300$ $B_{15} = 45$ $\alpha_{16} = 20\%$ $ß_{17} = 26\%$ $\alpha_{18} = 13\%$ $ß_{19} = 25\%$ $\alpha_{20} = 10\%$ $ß_{21} = 18\%$ $\alpha_{22} = 5\%$	$ß_{23} = 10\%$ $\alpha_{24} = 9\%$ $ß_{25} = 13\%$ $M_{26} = 2$ $M_{27} = 1,7$ $M_{28} = 16$ $\mu_{29} = 46\%$ $\mu_{30} = 48\%$ $c_1 = 4,18$ $c_2 = 4,77$	$c_3 = 5,83$ $c_4 = 4,62$ $c_5 = 8,08$ $c_6 = 1,60$ $c_7 = 0,49$ $c_8 = 1,27$ $c_9 = 1,03$ $c_{10} = 0,93$ $c_{11} = 2,20$ $c_{12} = 11,78$
8	$B_1 = 6,1$ $B_2 = 51$ $B_3 = 5$ $B_4 = 890$ $B_5 = 580$ $B_6 = 925$ $B_7 = 465$ $B_8 = 230$ $B_9 = 25$ $B_{10} = 13$ $B_{11} = 7$	$B_{12} = 85$ $B_{13} = 2,6$ $B_{14} = 110$ $B_{15} = 20$ $\alpha_{16} = 21\%$ $ß_{17} = 31\%$ $\alpha_{18} = 11\%$ $ß_{19} = 19\%$ $\alpha_{20} = 15\%$ $ß_{21} = 25\%$ $\alpha_{22} = 19\%$	$ß_{23} = 28\%$ $\alpha_{24} = 5\%$ $ß_{25} = 12\%$ $M_{26} = 1,4$ $M_{27} = 2,1$ $M_{28} = 25$ $\mu_{29} = 52\%$ $\mu_{30} = 53\%$ $c_1 = 5,13$ $c_2 = 5,02$	$c_3 = 8,61$ $c_4 = 5,78$ $c_5 = 7,98$ $c_6 = 2,30$ $c_7 = 0,55$ $c_8 = 1,46$ $c_9 = 0,97$ $c_{10} = 1,01$ $c_{11} = 1,54$ $c_{12} = 11,69$

№	Значения по вариантам:			
9	$B_1 = 6,6$ $B_2 = 55$ $B_3 = 5,6$ $B_4 = 960$ $B_5 = 625$ $B_6 = 1135$ $B_7 = 500$ $B_8 = 250$ $B_9 = 30$ $B_{10} = 16$ $B_{11} = 11$	$B_{12} = 105$ $B_{13} = 3,2$ $B_{14} = 135$ $B_{15} = 25$ $\alpha_{16} = 17\%$ $ß_{17} = 27\%$ $\alpha_{18} = 8\%$ $ß_{19} = 18\%$ $\alpha_{20} = 18\%$ $ß_{21} = 29\%$ $\alpha_{22} = 20\%$	$ß_{23} = 27\%$ $\alpha_{24} = 8\%$ $ß_{25} = 11\%$ $M_{26} = 1,6$ $M_{27} = 1,3$ $M_{28} = 29$ $\mu_{29} = 50\%$ $\mu_{30} = 55\%$ $c_1 = 5,91$ $c_2 = 3,97$	$c_3 = 6,99$ $c_4 = 6,42$ $c_5 = 6,67$ $c_6 = 2,11$ $c_7 = 0,42$ $c_8 = 1,82$ $c_9 = 0,82$ $c_{10} = 1,01$ $c_{11} = 1,71$ $c_{12} = 9,20$
10	$B_1 = 7,6$ $B_2 = 71$ $B_3 = 5,8$ $B_4 = 1143$ $B_5 = 494$ $B_6 = 1251$ $B_7 = 594$ $B_8 = 212$ $B_9 = 37$ $B_{10} = 28$ $B_{11} = 16$	$B_{12} = 185$ $B_{13} = 2,9$ $B_{14} = 122$ $B_{15} = 29$ $\alpha_{16} = 27\%$ $ß_{17} = 34\%$ $\alpha_{18} = 16\%$ $ß_{19} = 25\%$ $\alpha_{20} = 10\%$ $ß_{21} = 19\%$ $\alpha_{22} = 15\%$	$ß_{23} = 26\%$ $\alpha_{24} = 9\%$ $ß_{25} = 21\%$ $M_{26} = 1,1$ $M_{27} = 2,5$ $M_{28} = 17$ $\mu_{29} = 36\%$ $\mu_{30} = 40\%$ $c_1 = 5,07$ $c_2 = 4,58$	$c_3 = 9,41$ $c_4 = 5,47$ $c_5 = 6,35$ $c_6 = 1,92$ $c_7 = 0,44$ $c_8 = 1,41$ $c_9 = 0,84$ $c_{10} = 0,78$ $c_{11} = 1,62$ $c_{12} = 10,91$
11	$B_1 = 8,8$ $B_2 = 58$ $B_3 = 10,3$ $B_4 = 1238$ $B_5 = 455$ $B_6 = 1351$ $B_7 = 655$ $B_8 = 222$ $B_9 = 36$ $B_{10} = 25$ $B_{11} = 18$	$B_{12} = 101$ $B_{13} = 3,6$ $B_{14} = 134$ $B_{15} = 16$ $\alpha_{16} = 27\%$ $ß_{17} = 34\%$ $\alpha_{18} = 14\%$ $ß_{19} = 25\%$ $\alpha_{20} = 12\%$ $ß_{21} = 24\%$ $\alpha_{22} = 26\%$	$ß_{23} = 34\%$ $\alpha_{24} = 7\%$ $ß_{25} = 16\%$ $M_{26} = 1$ $M_{27} = 1,4$ $M_{28} = 23$ $\mu_{29} = 54\%$ $\mu_{30} = 62\%$ $c_1 = 5,02$ $c_2 = 4,69$	$c_3 = 8,11$ $c_4 = 5,04$ $c_5 = 6,52$ $c_6 = 2,36$ $c_7 = 0,67$ $c_8 = 1,71$ $c_9 = 0,91$ $c_{10} = 1,06$ $c_{11} = 1,82$ $c_{12} = 7,87$
12	$B_1 = 9,2$ $B_2 = 71$ $B_3 = 9,4$ $B_4 = 1149$ $B_5 = 692$ $B_6 = 2084$ $B_7 = 449$ $B_8 = 269$ $B_9 = 44$ $B_{10} = 16$ $B_{11} = 11$	$B_{12} = 102$ $B_{13} = 5,1$ $B_{14} = 222$ $B_{15} = 23$ $\alpha_{16} = 19\%$ $ß_{17} = 26\%$ $\alpha_{18} = 16\%$ $ß_{19} = 26\%$ $\alpha_{20} = 9\%$ $ß_{21} = 18\%$ $\alpha_{22} = 25\%$	$ß_{23} = 33\%$ $\alpha_{24} = 10\%$ $ß_{25} = 22\%$ $M_{26} = 1,6$ $M_{27} = 1,8$ $M_{28} = 34$ $\mu_{29} = 54\%$ $\mu_{30} = 43\%$ $c_1 = 5,05$ $c_2 = 5,53$	$c_3 = 7,73$ $c_4 = 6,52$ $c_5 = 5,89$ $c_6 = 1,88$ $c_7 = 0,63$ $c_8 = 1,20$ $c_9 = 0,84$ $c_{10} = 0,80$ $c_{11} = 1,56$ $c_{12} = 8,65$

№	Значения по вариантам:			
13	$B_1 = 7,3$ $B_2 = 68$ $B_3 = 6,8$ $B_4 = 780$ $B_5 = 817$ $B_6 = 1197$ $B_7 = 659$ $B_8 = 193$ $B_9 = 29$ $B_{10} = 26$ $B_{11} = 11$	$B_{12} = 187$ $B_{13} = 6$ $B_{14} = 192$ $B_{15} = 17$ $\alpha_{16} = 29\%$ $ß_{17} = 35\%$ $\alpha_{18} = 12\%$ $ß_{19} = 24\%$ $\alpha_{20} = 8\%$ $ß_{21} = 21\%$ $\alpha_{22} = 20\%$	$ß_{23} = 30\%$ $\alpha_{24} = 11\%$ $ß_{25} = 19\%$ $M_{26} = 1,9$ $M_{27} = 2,1$ $M_{28} = 29$ $\mu_{29} = 50\%$ $\mu_{30} = 41\%$ $c_1 = 6,59$ $c_2 = 3,84$	$c_3 = 5,74$ $c_4 = 4,09$ $c_5 = 6,78$ $c_6 = 1,94$ $c_7 = 0,40$ $c_8 = 1,69$ $c_9 = 0,95$ $c_{10} = 0,82$ $c_{11} = 2,28$ $c_{12} = 7,58$
14	$B_1 = 5,4$ $B_2 = 82$ $B_3 = 8$ $B_4 = 1091$ $B_5 = 468$ $B_6 = 1237$ $B_7 = 690$ $B_8 = 170$ $B_9 = 28$ $B_{10} = 22$ $B_{11} = 13$	$B_{12} = 138$ $B_{13} = 4,5$ $B_{14} = 167$ $B_{15} = 33$ $\alpha_{16} = 22\%$ $ß_{17} = 28\%$ $\alpha_{18} = 8\%$ $ß_{19} = 21\%$ $\alpha_{20} = 8\%$ $ß_{21} = 18\%$ $\alpha_{22} = 24\%$	$ß_{23} = 34\%$ $\alpha_{24} = 12\%$ $ß_{25} = 20\%$ $M_{26} = 1,6$ $M_{27} = 2,4$ $M_{28} = 32$ $\mu_{29} = 34\%$ $\mu_{30} = 59\%$ $c_1 = 4,58$ $c_2 = 4,98$	$c_3 = 9,39$ $c_4 = 5,95$ $c_5 = 8,21$ $c_6 = 1,56$ $c_7 = 0,55$ $c_8 = 1,25$ $c_9 = 1,06$ $c_{10} = 0,97$ $c_{11} = 1,88$ $c_{12} = 7,18$
15	$B_1 = 6,1$ $B_2 = 76$ $B_3 = 4,8$ $B_4 = 1187$ $B_5 = 392$ $B_6 = 2026$ $B_7 = 606$ $B_8 = 196$ $B_9 = 24$ $B_{10} = 26$ $B_{11} = 20$	$B_{12} = 115$ $B_{13} = 5,3$ $B_{14} = 138$ $B_{15} = 23$ $\alpha_{16} = 21\%$ $ß_{17} = 29\%$ $\alpha_{18} = 11\%$ $ß_{19} = 23\%$ $\alpha_{20} = 13\%$ $ß_{21} = 21\%$ $\alpha_{22} = 16\%$	$ß_{23} = 28\%$ $\alpha_{24} = 12\%$ $ß_{25} = 21\%$ $M_{26} = 1,4$ $M_{27} = 2,2$ $M_{28} = 17$ $\mu_{29} = 38\%$ $\mu_{30} = 46\%$ $c_1 = 4,60$ $c_2 = 4,31$	$c_3 = 6,78$ $c_4 = 4,66$ $c_5 = 5,87$ $c_6 = 1,43$ $c_7 = 0,63$ $c_8 = 1,20$ $c_9 = 0,87$ $c_{10} = 0,97$ $c_{11} = 2,20$ $c_{12} = 10,34$
16	$B_1 = 5,3$ $B_2 = 60$ $B_3 = 7,3$ $B_4 = 716$ $B_5 = 567$ $B_6 = 1086$ $B_7 = 361$ $B_8 = 205$ $B_9 = 42$ $B_{10} = 27$ $B_{11} = 21$	$B_{12} = 102$ $B_{13} = 4,7$ $B_{14} = 206$ $B_{15} = 26$ $\alpha_{16} = 23\%$ $ß_{17} = 30\%$ $\alpha_{18} = 16\%$ $ß_{19} = 26\%$ $\alpha_{20} = 9\%$ $ß_{21} = 18\%$ $\alpha_{22} = 23\%$	$ß_{23} = 33\%$ $\alpha_{24} = 8\%$ $ß_{25} = 17\%$ $M_{26} = 90\%$ $M_{27} = 1,5$ $M_{28} = 27$ $\mu_{29} = 54\%$ $\mu_{30} = 46\%$ $c_1 = 6,06$ $c_2 = 4,12$	$c_3 = 8,28$ $c_4 = 5,87$ $c_5 = 5,76$ $c_6 = 1,73$ $c_7 = 0,65$ $c_8 = 1,33$ $c_9 = 0,97$ $c_{10} = 0,87$ $c_{11} = 1,75$ $c_{12} = 8,49$

№	Значения по вариантам:			
17	$B_1 = 9,4$ $B_2 = 40$ $B_3 = 7,2$ $B_4 = 1047$ $B_5 = 649$ $B_6 = 1653$ $B_7 = 727$ $B_8 = 254$ $B_9 = 41$ $B_{10} = 14$ $B_{11} = 16$	$B_{12} = 152$ $B_{13} = 4,3$ $B_{14} = 156$ $B_{15} = 29$ $\alpha_{16} = 22\%$ $ß_{17} = 29\%$ $\alpha_{18} = 10\%$ $ß_{19} = 19\%$ $\alpha_{20} = 15\%$ $ß_{21} = 23\%$ $\alpha_{22} = 22\%$	$ß_{23} = 32\%$ $\alpha_{24} = 13\%$ $ß_{25} = 21\%$ $M_{26} = 1,8$ $M_{27} = 1,6$ $M_{28} = 22$ $\mu_{29} = 55\%$ $\mu_{30} = 39\%$ $c_1 = 5,05$ $c_2 = 4,39$	$c_3 = 6,75$ $c_4 = 5,51$ $c_5 = 6,50$ $c_6 = 1,98$ $c_7 = 0,63$ $c_8 = 1,79$ $c_9 = 1,08$ $c_{10} = 0,99$ $c_{11} = 2,00$ $c_{12} = 10,89$
18	$B_1 = 6,9$ $B_2 = 74$ $B_3 = 8,6$ $B_4 = 892$ $B_5 = 528$ $B_6 = 1791$ $B_7 = 420$ $B_8 = 233$ $B_9 = 30$ $B_{10} = 25$ $B_{11} = 12$	$B_{12} = 133$ $B_{13} = 4,1$ $B_{14} = 153$ $B_{15} = 34$ $\alpha_{16} = 13\%$ $ß_{17} = 19\%$ $\alpha_{18} = 10\%$ $ß_{19} = 20\%$ $\alpha_{20} = 13\%$ $ß_{21} = 22\%$ $\alpha_{22} = 25\%$	$ß_{23} = 36\%$ $\alpha_{24} = 6\%$ $ß_{25} = 17\%$ $M_{26} = 1,5$ $M_{27} = 1,8$ $M_{28} = 27$ $\mu_{29} = 38\%$ $\mu_{30} = 40\%$ $c_1 = 4,26$ $c_2 = 5,89$	$c_3 = 6,33$ $c_4 = 5,59$ $c_5 = 7,49$ $c_6 = 1,79$ $c_7 = 0,63$ $c_8 = 1,54$ $c_9 = 1,18$ $c_{10} = 0,80$ $c_{11} = 2,07$ $c_{12} = 7,35$
19	$B_1 = 7,8$ $B_2 = 73$ $B_3 = 6,7$ $B_4 = 1235$ $B_5 = 582$ $B_6 = 1041$ $B_7 = 665$ $B_8 = 335$ $B_9 = 33$ $B_{10} = 27$ $B_{11} = 21$	$B_{12} = 105$ $B_{13} = 6$ $B_{14} = 178$ $B_{15} = 24$ $\alpha_{16} = 14\%$ $ß_{17} = 20\%$ $\alpha_{18} = 13\%$ $ß_{19} = 23\%$ $\alpha_{20} = 12\%$ $ß_{21} = 24\%$ $\alpha_{22} = 26\%$	$ß_{23} = 37\%$ $\alpha_{24} = 6\%$ $ß_{25} = 17\%$ $M_{26} = 1,4$ $M_{27} = 2,3$ $M_{28} = 19$ $\mu_{29} = 42\%$ $\mu_{30} = 40\%$ $c_1 = 4,58$ $c_2 = 4,56$	$c_3 = 7,13$ $c_4 = 5,07$ $c_5 = 7,01$ $c_6 = 1,50$ $c_7 = 0,42$ $c_8 = 1,56$ $c_9 = 1,08$ $c_{10} = 0,95$ $c_{11} = 2,19$ $c_{12} = 9,16$
20	$B_1 = 6,6$ $B_2 = 43$ $B_3 = 9,7$ $B_4 = 791$ $B_5 = 545$ $B_6 = 2004$ $B_7 = 554$ $B_8 = 253$ $B_9 = 24$ $B_{10} = 27$ $B_{11} = 17$	$B_{12} = 191$ $B_{13} = 6$ $B_{14} = 139$ $B_{15} = 34$ $\alpha_{16} = 21\%$ $ß_{17} = 26\%$ $\alpha_{18} = 8\%$ $ß_{19} = 18\%$ $\alpha_{20} = 14\%$ $ß_{21} = 27\%$ $\alpha_{22} = 24\%$	$ß_{23} = 35\%$ $\alpha_{24} = 9\%$ $ß_{25} = 19\%$ $M_{26} = 1,3$ $M_{27} = 1,5$ $M_{28} = 18$ $\mu_{29} = 53\%$ $\mu_{30} = 57\%$ $c_1 = 6,57$ $c_2 = 3,99$	$c_3 = 6,56$ $c_4 = 4,77$ $c_5 = 5,72$ $c_6 = 2,05$ $c_7 = 0,49$ $c_8 = 1,54$ $c_9 = 1,12$ $c_{10} = 1,03$ $c_{11} = 2,00$ $c_{12} = 11,8$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте постановку задачи по оптимизации рационов кормления.

2. Какой критерий оптимальности в задаче по оптимизации рационов кормления?

3. Что принимается за основные переменные в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления? Найдите их в разработанной Вами модели.

4. Что принимается за вспомогательную переменную в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления? Найдите ее в разработанной Вами модели.

5. Запишите в структурной форме целевую функцию экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите целевую функцию в разработанной Вами модели.

6. Какая входная информация необходима для разработки экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления?

7. Запишите в структурной форме ограничение по гарантированному удовлетворению потребности животных в питательных веществах, макро- и микроэлементах. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

8. Какими способами описываются пределы включения отдельных кормов или групп кормов в рацион?

9. Запишите в структурной форме ограничение по установлению минимальных и максимальных границ скармливания отдельных кормов и их групп в процентах от суммарного количества кормовых единиц, содержащихся в рационе. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

10. Запишите в структурной форме ограничение по максимальному суточному потреблению отдельных кормов в физической массе. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

11. Запишите в структурной форме ограничение по соотношению отдельных видов кормов и добавок. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной модели.

12. Запишите в структурной форме ограничение для подсчета суммарного количества кормовых единиц в рационе. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите это ограничение в разработанной Вами модели.

13. На примере разработанной Вами экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления раскройте экономический смысл всех технико-экономических коэффициентов. Например, что означают коэффициенты, расположенные на пересечении: первого ограничения и X_1; шестнадцатого ограничения и X_{13} и т.д.?

3.1. Экономико-математическая модель по оптимизации использования минеральных удобрений

Постановка задачи.

Для поддержания плодородия почвы при возделывании сельскохозяйственных культур должен быть обеспечен баланс питательных веществ, выносимых из почвы продукцией и вносимых в виде минеральных удобрений. Многие сельскохозяйственные предприятия сталкиваются с проблемой распределения дополнительных объемов минеральных удобрений для обеспечения прибавки урожайности отдельных культур с учетом эффективности их использования.

Размер максимальной прибавки урожайности для каждой сельскохозяйственной культуры зависит от уровня интенсивности применяемых технологий и естественного плодородия почвы. Он определяется методом экспертных оценок на основе нормативных данных о влиянии внесения минеральных удобрений на урожайность сельскохозяйственных культур. Потребность в минеральных удобрениях определяется исходя из планируемого размера прибавки урожая и нормы выноса из почвы питательных веществ каждой единицей дополнительно получаемой продукции.

Минеральные удобрения характеризуются содержанием в них трех основных элементов (питательных веществ): азота, фосфора и калия. Минеральные удобрения могут вноситься тремя основными способами: основное внесение (сплошное внесение перед основной обработкой почвы), рядковое (в рядок с семенами при посеве) и подкормка (в период вегетации растений). Существуют научно обоснованные рекомендуемые максимальные пределы внесения питательных веществ при каждом способе использования удобрений.

Исходя из наличия денежных средств, запланированных на приобретение минеральных удобрений, требуется определить ассортимент используемых удобрений, объемы их приобретения, способы применения и дозы внесения, таким образом, чтобы обеспечить получение максимально возможной суммы дополнительной прибыли от использования удобрений.

Входная информация.

Для разработки экономико-математической модели данной задачи необходимо иметь следующую информацию:

- перечень сельскохозяйственных культур, под которые планируется дополнительное внесение минеральных удобрений;
- площадь их посева;
- размер максимальной прибавки урожайности;
- вынос питательных веществ сельскохозяйственными культурами;
- уровень усвояемости питательных веществ из минеральных удобрений различными сельскохозяйственными культурами;
- максимально допустимые дозы внесения питательных веществ при различных способах применения минеральных удобрений;
- перечень минеральных удобрений, имеющихся на рынке;
- содержание в минеральных удобрениях питательных веществ;
- цены реализации сельскохозяйственной продукции;

- цены приобретения минеральных удобрений;
- затраты на транспортировку и внесение удобрений;
- затраты на уборку, транспортировку и подработку продукции.

Условия задачи и подготовка входной информации.

У сельскохозяйственного предприятия имеется возможность выделить дополнительно на приобретение минеральных удобрений 6,0 млн. руб. Дополнительный объем удобрений планируется распределить между озимой пшеницей, ячменем, сахарной свеклой и подсолнечником. Информация о планируемых площадях посева, урожайности сельскохозяйственных культур, выносе питательных веществ из почвы, максимально допустимых дозах внесения питательных веществ при различных способах применения минеральных удобрений, ценах реализации продукции и дополнительных затратах на ее уборку, транспортировку и первичную подработку приведена в табл. 20.

Предприятие имеет возможность приобрести следующие виды минеральных удобрений:

- азотные: аммиачная селитра и сульфат аммония;
- фосфорные: суперфосфат двойной;
- калийные: калийная соль и хлористый калий;
- комплексные: аммофос и азофоска.

Информация о питательности минеральных удобрений (содержании в них действующих веществ), а также о ценах их приобретения и затратах, связанных с их транспортировкой и внесением, приведена в табл. 21.

Расстояние от склада минеральных удобрений предприятия до места их приобретения составляет 39 км. Перевозка удобрений от места их приобретения до места хранения осуществляется автомобилем КАМАЗ-68901-31. Планируемая себестоимость 1 т-км для данного автомобиля составляет 5,00 руб. Затраты на доставку 1 т удобрений до склада составят 195,00 руб. Среднее расстояние от склада до места внесения удобрений – 5 км. Перевозки осуществляется автомобилем ГАЗ САЗ-3507. Планируемая себестоимость 1 т*км внутрихозяйственных перевозок для данного автомобиля составляет 8,00 руб. Затраты на доставку 1 т удобрений со склада до места внесения составят 40,00 руб. Суммарные затраты на транспортировку 1 т удобрений составят 235,00 руб.

Для основного внесения минеральных удобрений на предприятии используется агрегат в составе МТЗ-82 и МВУ-5. В соответствии с технологическим картами затраты на внесение 1 т удобрений данным агрегатом составляют 410,00 руб. Посев зерновых с одновременным внесением удобрений осуществляется агрегатом в составе МТЗ-82 и СЗ-5,4, посев сахарной свеклы – МТЗ-82 и ССТ-12В, подсолнечника – МТЗ-82 и СУПН-8. Дополнительные затраты на внесение 1 т удобрений данными агрегатами составляют 70,00 руб. Подкормка посевов всех сельскохозяйственных культур планируется агрегатом МТЗ-82 и Amazone ZA-X Perfect. Затраты на внесение 1 т минеральных удобрений данным агрегатом в соответствии с технологическими картами составляют 810,00 руб.

Таблица 20. Исходная информация для разработки экономико-математической модели в разрезе сельскохозяйственных культур

Сельскохозяйственные культуры	Площадь посева, га	Максимально возможная прибавка урожайности, ц/га	Планируемая цена реализации 1 т, руб.	Затраты на уборку, транспортировку и подработку 1 ц прибавки урожая, руб.	Вынос питательных веществ с 1 т основной продукции с учетом побочной, кг д. в-ва			Коэффициент использования питательных веществ из удобрений			Рекомендуемые максимальные дозы внесения питательных веществ, кг д.в.								
											при основном внесении			при рядковом внесении			при подкормке		
					N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O
Озимая пшеница	900	10	7200	50,0	29,50	11,50	22,00	0,435	0,225	0,450	10	60	90	10	10		40	20	
Ячмень	700	9	6000	51,1	24,50	10,50	19,50	0,400	0,225	0,375	30	60	90	10	10		20	20	
Сахарная свекла	100	90	2000	62,5	4,25	1,25	6,00	0,475	0,350	0,625	60	100	120	10	20		40	25	
Подсолнечник	200	8	17000	75,0	45,00	18,50	97,50	0,425	0,305	0,775	30	60	60	10	10		10	10	

Таблица 21. Исходная информация для разработки экономико-математической модели в разрезе минеральных удобрений

Минеральные удобрения	Содержание питательных веществ, %			Затраты на 1 т удобрений, руб.				
				приобретение	транспортировку	внесение (по способам)		
	N	P_2O_5	K_2O			основное	рядковое	подкормка
Аммиачная селитра	34,0			12 900	235	410	70	810
Сульфат аммония	21,0			10 200	235	410	70	810
Суперфосфат двойной		45,0		35 300	235	410	70	810
Калийная соль			40,0	22 440	235	410	70	810
Хлористый калий			60,0	14 300	235	410	70	810
Аммофос	12,0	52,0		29 400	235	410	70	810
Азофоска	16,0	16,0	16,0	20 500	235	410	70	810

Построение экономико-математической модели.

Система неизвестных данной экономико-математической задачи представлена основными, дополнительными и вспомогательными переменными. Для описания экономико-математической модели будут использоваться следующие условные обозначения:

K – количество видов сельскохозяйственных культур, k – порядковый номер вида сельскохозяйственной культуры;

R – количество способов использования минеральных удобрений, r - порядковый номер способа внесения;

J – количество видов минеральных удобрений, j - порядковый номер вида удобрения.

По условиям задачи моделируется использование семи видов минеральных удобрений (*J*=7), вносимых тремя способами (*R*=3) под четыре сельскохозяйственные культуры (*K*=4).

За основные переменные принимаются:

X_{krj} – дозы внесения *j-го* вида минеральных удобрений *r-ым* способом на 1га посева *k-ой* сельскохозяйственной культуры, ц.

№	Индексы			Название переменной
	k	r	j	
X_1	1	1	1	доза внесения аммиачной селитры при основном внесении под оз. пшеницу
X_2	1	1	2	доза внесения сульфата аммония при основном внесении под озимую пшеницу
X_3	1	1	3	доза внесения суперфосфата дв. при основном внесении под озимую пшеницу
X_4	1	1	4	доза внесения калийной соли при основном внесении под озимую пшеницу
X_5	1	1	5	доза внесения хлористого калия при основном внесении под озимую пшеницу
X_6	1	1	6	доза внесения аммофоса при основном внесении под озимую пшеницу
X_7	1	1	7	доза внесения азофоски при основном внесении под озимую пшеницу
X_8	1	2	1	доза внесения аммиачной селитры при посеве озимой пшеницы
X_9	1	2	2	доза внесения сульфата аммония при посеве озимой пшеницы
X_{10}	1	2	3	доза внесения суперфосфата двойного при посеве озимой пшеницы
X_{11}	1	2	4	доза внесения калийной соли при посеве озимой пшеницы
X_{12}	1	2	5	доза внесения хлористого калия при посеве озимой пшеницы
X_{13}	1	2	6	доза внесения аммофоса при посеве озимой пшеницы
X_{14}	1	2	7	доза внесения азофоски при посеве озимой пшеницы
X_{15}	1	3	1	доза внесения аммиачной селитры при подкормке озимой пшеницы
X_{16}	1	3	2	доза внесения сульфата аммония при подкормке озимой пшеницы
X_{17}	1	3	3	доза внесения суперфосфата двойного при подкормке озимой пшеницы
X_{18}	1	3	4	доза внесения калийной соли при подкормке озимой пшеницы
X_{19}	1	3	5	доза внесения хлористого калия при подкормке озимой пшеницы
X_{20}	1	3	6	доза внесения аммофоса при подкормке озимой пшеницы
X_{21}	1	3	7	доза внесения азофоски при подкормке озимой пшеницы
X_{22}	2	1	1	доза внесения аммиачной селитры при основном внесении под ячмень
X_{23}	2	1	2	доза внесения сульфата аммония при основном внесении под ячмень
X_{24}	2	1	3	доза внесения суперфосфата двойного при основном внесении под ячмень
X_{25}	2	1	4	доза внесения калийной соли при основном внесении под ячмень
X_{26}	2	1	5	доза внесения хлористого калия при основном внесении под ячмень
X_{27}	2	1	6	доза внесения аммофоса при основном внесении под ячмень

X_{28}	2	1	7	доза внесения азофоски при основном внесении под ячмень
X_{29}	2	2	1	доза внесения аммиачной селитры при посеве озимой пшеницы
X_{30}	2	2	2	доза внесения сульфата аммония при посеве озимой пшеницы
X_{31}	2	2	3	доза внесения суперфосфата двойного при посеве озимой пшеницы
X_{32}	2	2	4	доза внесения калийной соли при посеве озимой пшеницы
X_{33}	2	2	5	доза внесения хлористого калия при посеве озимой пшеницы
X_{34}	2	2	6	доза внесения аммофоса при посеве озимой пшеницы
X_{35}	2	2	7	доза внесения азофоски при посеве озимой пшеницы
X_{36}	2	3	1	доза внесения аммиачной селитры при подкормке озимой пшеницы
X_{37}	2	3	2	доза внесения сульфата аммония при подкормке озимой пшеницы
X_{38}	2	3	3	доза внесения суперфосфата двойного при подкормке озимой пшеницы
X_{39}	2	3	4	доза внесения калийной соли при подкормке озимой пшеницы
X_{40}	2	3	5	доза внесения хлористого калия при подкормке озимой пшеницы
X_{41}	2	3	6	доза внесения аммофоса при подкормке озимой пшеницы
X_{42}	2	3	7	доза внесения азофоски при подкормке озимой пшеницы
с X_{43} по X_{63}				дозы внесения удобрений под сахарную свеклу
с X_{64} по X_{84}				дозы внесения удобрений под подсолнечник

Дополнительные переменные:

X_k – прибавка урожая с 1 га посева *k-ой* сельскохозяйственной культуры, ц;

X_j – потребность в удобрении *j-го* вида, ц.

X_{85}	прибавка урожая с 1 га посева озимой пшеницы
X_{86}	прибавка урожая с 1 га посева ячменя
X_{87}	прибавка урожая с 1 га посева сахарной свеклы
X_{88}	прибавка урожая с 1 га посева подсолнечника
X_{89}	требуется аммиачной селитры
X_{90}	требуется сульфата аммония
X_{91}	требуется суперфосфата двойного
X_{92}	требуется калийной соли
X_{93}	требуется хлористого калия
X_{94}	требуется аммофоса
X_{95}	требуется азофоски

Вспомогательные переменные:

X^v – сумма выручки от реализации полученной прибавки урожая, тыс. руб.;

X^u – сумма затрат на приобретение минеральных удобрений, тыс. руб.;

X^w – сумма затрат на транспортировку и внесение минеральных удобрений, тыс. руб.;

X^p – сумма затрат на уборку, транспортировку и подработку прибавки урожая, тыс. руб.

X_{96}	сумма затрат на приобретение минеральных удобрений
X_{97}	сумма затрат на транспортировку и внесение минеральных удобрений
X_{98}	сумма затрат на уборку, транспортировку и подработку прибавки урожая
X_{99}	сумма выручки от реализации полученной прибавки урожая

На неизвестные наложены девять групп ограничений:

- по обеспечению компенсации выноса из почвы питательных веществ;
- по установлению верхних пределов доз внесения удобрений;
- по лимитированию прибавок урожая;
- по определению потребности в минеральных удобрениях;

- по определению затрат на приобретение удобрений;
- по определению затрат на транспортировку и внесение удобрений;
- по определению затрат на уборку прибавки урожая;
- по определению выручки от реализации прибавки урожая;
- по лимитированию средств на приобретение удобрений.

Первая группа ограничений, связанных с обеспечением компенсации выноса из почвы питательных веществ, описывается следующим образом:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} a_{ij} h_{ikj} X_{krj} \geq w_{ik} X_k \quad (i \in I)$$

где X_{krj} – доза внесения j-го вида удобрения r-м способом под k-ую культуру;

X_k – суммарная прибавка урожая по k-ой культуре;

a_{ij} – содержание питательного вещества i-го вида в j-ом удобрении;

h_{ikj} – коэффициент использования питательного вещества i-го вида из j-ого удобрения k-ой сельскохозяйственной культурой;

a_{ik} – вынос питательных веществ i-го вида l-ой культурой.

В соответствии с этим, ограничение по обеспечению компенсации выноса из почвы азота прибавкой урожая озимой пшеницы будет иметь следующий вид ($i=1$):

$$14{,}8X_1+9{,}1X_2+5{,}2X_6+7{,}0X_7+14{,}8X_8+9{,}1X_9+5{,}2X_{13}+7{,}0X_{14}+14{,}8X_{15}+9{,}1X_{16}+5{,}2X_{20}+7{,}0X_{21}-2{,}95X_{85} \geq 0,$$

фосфора ($i=2$):

$$10{,}1X_3+11{,}7X_6+3{,}6X_7+10{,}1X_{10}+11{,}7X_{13}+3{,}6X_{14}+10{,}1X_7+11{,}7X_{20}+3{,}6X_{21}-1{,}15X_{85} \geq 0,$$

калия ($i=3$):

$$18{,}0X_4+27{,}0X_5+7{,}2X_7+18{,}0X_{11}+27{,}0X_{12}+7{,}2X_{14}+18{,}0X_{18}+27{,}0X_{19}+7{,}2X_{21}-2{,}20X_{85} \geq 0.$$

Аналогичным образом записываются ограничения по выносу из почвы питательных веществ ячменем ($i=4,5,6$), сахарной свеклой ($i=7,8,9$) и подсолнечником ($i=10,11,12$). Технико-экономические коэффициенты при переменных, отражающих дозы внесения минеральных удобрений, определяются перемножением показателей, характеризующих содержание действующего вещества i-го вида в j-ом удобрении (табл. 21) и коэффициентов использования i-го питательного вещества из удобрений k-ой сельскохозяйственной культурой (табл. 20). При выборе показателя, характеризующего вынос питательных веществ прибавкой урожая, нормативы были переведены из тонн в центнеры.

Моделирование ограничений по соблюдению верхних пределов доз внесения удобрений происходит следующим образом:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} X_{krj} \leq d_{ikr} \quad (i \in I)$$

где X_{krj} – доза внесения j-го вида удобрения r-м способом под k-ую культуру;

a_{ij} – содержание действующего вещества i-го вида в j-ом удобрении;

d_{ikr} – максимальная доза внесения действующего вещества i-го вида на 1 га посева k-ой культуры r-ым способом.

Таким образом, ограничение объемов азота при основном внесении под озимую пшеницу будет иметь вид ($i=13$):

$$34{,}0X_1+21{,}0X_2+12{,}0X_6+16{,}0X_7 \leq 10{,}0.$$

Ограничения объемов фосфора и калия записываются как:

$45{,}0X_3+52{,}0X_6+16{,}0X_7 \le 60{,}0$ $\quad i=14,$

$40{,}0X_4+60{,}0X_5+16{,}0X_7 \le 90{,}0$ $\quad i=15.$

Аналогичным образом записываются ограничения по максимальному объему внесения питательных веществ под озимую пшеницу при посеве (*i=16,17,18*) и подкормке (*i=19,20,21*).

По такой же схеме осуществляется ограничение объемов внесения питательных веществ под ячмень (*i=22-30*), сахарную свеклу (*i=31-39*) и подсолнечник (*i=40-48*).

Ограничения пределов роста урожайности культур имеют вид:

$$X_k \le g_k \quad (k \in K)$$

где X_k – прибавка урожая в расчете на 1 га посева *k*-ой сельскохозяйственной культуры;

g_k – максимальная прибавка урожая от внесения удобрений в расчете на 1 га посева *k*-ой сельскохозяйственной культуры.

Для озимой пшеницы данное условие записываются как:

$X_{85} \le 10{,}0$ $\quad i=49.$

Для ячменя, сахарной свеклы и подсолнечника соответственно:

$X_{86} \le 9{,}0$ $\quad i=50,$

$X_{87} \le 90{,}0$ $\quad i=51,$

$X_{88} \le 8{,}0$ $\quad i=52.$

Определение потребности в минеральных удобрениях по их видам происходит при использовании следующих ограничений:

$$\sum_{k \in K} s_{jk} X_{krj} = X_j \quad (j \in J)$$

где X_{krj} – доза внесения *j*-го вида удобрения *r*-м способом под *k*-ую сельскохозяйственную культуру;

X_j – общая потребность в удобрении *j*-ого вида;

s_{jk} – площадь посева *k*-ой сельскохозяйственной культуры, на которую вносятся удобрения *j*-ого вида.

Ограничение по определению общей потребности в аммиачной селитре (*i=53*) отображается следующим образом:

$900X_1+900X_8+900X_{15}+700X_{22}+700X_{29}+700X_{36}+100X_{43}+100X_{50}+100X_{57}+200X_{64}+200X_{71}+200X_{78}-X_{89} = 0$

Аналогичным образом записываются ограничения по определению потребности в сульфате аммония (*i=54*), двойном суперфосфате (*i=55*), калийной соли (*i=56*), хлористом калии (*i=57*), аммофосе (*i=58*) и азофоске (*i=59*).

Для определения суммы затрат на приобретение удобрений используется ограничение типа:

$$\sum_{j \in J} c_j X_j = X^u$$

где X_j – общая потребность в удобрении *j*-ого вида;

X^u – сумма затрат на приобретение минеральных удобрений;

c_j – цена приобретения единицы *j*-ого вида минеральных удобрений.

Данное условие записывается как:

$1,290X_{89}+1,020X_{90}+3,530X_{91}+2,244X_{92}+1,430X_{93}+2,940X_{94}+2,050X_{95}-X_{96}=0$ $i=60$.

Определение затрат на транспортировку и внесение удобрений происходит с помощью ограничения следующего типа:

$$\sum_{k\in K}\sum_{r\in R}\sum_{j\in J} s_{rk} z_r X_{krj} = X^w$$

где X_{krj} – доза внесения j-го вида удобрения r-м способом под k-ую культуру;

X^w – сумма затрат на транспортировку и внесение минеральных удобрений;

s_{rk} – площадь посева k-ой культуры, удобряемая r-ым способом;

z_r – затраты на транспортировку и внесение 1 ц удобрений r-ым способом.

Данное условие записывается как:

$58,1X_1+ \ldots +58,1X_7+27,5X_8+ \ldots +94,1X_{15}+ \ldots +20,9X_{83}+20,9X_{84} - X_{97} = 0$ $i=61$.

Технико-экономические коэффициенты при переменных, отражающих дозы внесения минеральных удобрений, определяются перемножением показателя, в котором суммируются затрат на транспортировку и внесение 1 ц удобрений r-ым способом (табл. 21) и площади k-ой сельскохозяйственной культуры, на которую планируется вносить минеральные удобрения (табл. 20). При определении уровня затрат на транспортировку и внесение удобрений нормативы были переведены из тонн в центнеры.

Ограничение по определению затрат на уборку, транспортировку и подработку прибавки урожая имеет вид:

$$\sum_{k\in K} s_k b_k X_k = X^p$$

где X_k – прибавка урожая на 1 га посева k-ой сельскохозяйственной культуры;

X^p – сумма затрат на уборку, транспортировку и подработку прибавки урожая по всем сельскохозяйственным культурам;

s_k – площадь посева k-ой сельскохозяйственной культуры;

b_k – затраты на уборку, транспортировку и подработку 1 ц прибавки урожая k-ой сельскохозяйственной культуры.

Данное условие записывается как:

$45,0X_{85}+35,8X_{86}+7,8X_{87}+12,5X_{88} - X_{98} = 0$ $i=62$.

Технико-экономические коэффициенты при переменных, отражающих размер прибавок урожая по сельскохозяйственным культурам, определяются перемножением затрат на уборку, транспортировку и подработку 1 ц прибавки урожая k-ой сельскохозяйственной культуры и площади k-ой сельскохозяйственной культуры, с которой данная прибавка будет получена (табл. 20).

Для определения суммы выручки от реализации прибавки урожая используется ограничение типа:

$$\sum_{k\in K} s_k v_k X_k = X^v$$

где X_k – прибавка урожая на 1 га посева k-ой сельскохозяйственной культуры;

X^v – сумма выручки от реализации прибавки урожая по всем сельскохозяйственным культурам;

s_k – площадь посева k-ой сельскохозяйственной культуры;

v_k – цена реализации 1 ц прибавки урожая k-ой культуры.

Данное условие записывается следующим образом:

$648{,}0X_{85}+420{,}0X_{86}+20{,}0X_{87}+340{,}0X_{88}-X_{99}=0$ $\qquad i=63.$

Технико-экономические коэффициенты при переменных, отражающих размер прибавок урожая по сельскохозяйственным культурам, определяются перемножением планируемой цены реализации 1 ц прибавки урожая k-ой сельскохозяйственной культуры и площади k-ой сельскохозяйственной культурой, с которой данная прибавка будет получена (табл. 20). При определении уровня цен реализации значения переведены из тонн в центнеры.

В данной задаче предусмотрено ограничение объемов минеральных удобрений, распределяемых между сельскохозяйственными культурами, через лимитирование средств, выделяемых на их приобретение. Моделирование данного условия происходит через использование следующего ограничения:

$$X^u \le L^u$$

где X^u – сумма затрат на приобретение минеральных удобрений;

L^u – лимит средств, выделяемых на приобретение минеральных удобрений.

Исходя из условий задачи, данное ограничение отображается следующим образом:

$X_{96} \le 6\,000$ $\qquad i=64.$

Обязательным условием решения задачи линейного программирования является условие неотрицательности всех переменных:

$$X \ge 0$$

Поскольку в качестве критерия оптимальности в данной задаче была выбрана максимизация суммы дополнительного чистого дохода (разница между выручкой от реализации полученной прибавки урожая и затратами на приобретение, транспортировку и внесение минеральных удобрений и на уборку, транспортировку и подработку прибавки урожая), то целевая функция примет вид:

$$Z_{\max} = X^v - X^u - X^w - X^p$$

где X^v – сумма выручки от реализации полученной прибавки урожая;

X^u – сумма затрат на приобретение минеральных удобрений;

X^w – сумма затрат на транспортировку и внесение минеральных удобрений;

X^p – сумма затрат на уборку, транспортировку и подработку прибавки урожая.

Целевая функция может быть записана следующим образом:

$Z_{max}= X_{99} - X_{96} - X_{97} - X_{98}.$

Фрагмент экономико-математической модели по оптимизации использования ограниченного объема минеральных удобрений в матричном виде представлен в табл. 22.

Реализация разработанной экономико-математической модели осуществляется с помощью надстройки **Поиск решения** Microsoft Excel. В результате решения задачи определяются дозы внесения минеральных удобрений под каждую сельскохозяйственную культуру каждым способом внесения; возможные прибавки урожайности по каждой культуре и потребность в ми-

неральных удобрениях, обеспечивающих компенсацию выноса питательных веществ из почвы прибавками урожая; выручка от реализации получаемой прибавки урожая и размеры затрат, связанных с приобретением, транспортировкой и внесением удобрений и реализацией, транспортировкой и первичной подработкой прибавки урожая.

Анализ результатов решения поставленной экономико-математической задачи предусматривает оценку оптимальных доз внесения минеральных удобрений и объемов их внесения в разрезе отдельных сельскохозяйственных культур; оценку прибавки урожайности отдельных сельскохозяйственных культур, обеспеченной внесением дополнительных объемов минеральных удобрений, в натуральном и стоимостном выражении; оценку эффективности использования минеральных удобрений.

Схема данного анализа приведена на примере результатов решения описанной в данном разделе задачи.

Распределение минеральных удобрений характеризуется дозами их внесения, полученными в результате решения поставленной оптимизационной задачи, и суммарным объемом их использования (табл. 23 и 24).

Таблица 23. Дозы внесения минеральных удобрений по оптимальному решению, ц/га

Культуры	Основное внесение			Внесение при посеве		Подкормка
	аммиачная селитра	хлористый калий	аммофос	аммиачная селитра	аммофос	аммиачная селитра
Озимая пшеница	0,09	0,64	0,58	0,23	0,19	0,99
Ячмень						
Сахарная свекла	1,68	1,44	0,23	0,16	0,38	0,31
Подсолнечник	0,76	0,99	0,36	0,23	0,19	0,29

Таблица 24. Объемы применения удобрений по оптимальному решению

Культуры	Приобретение удобрений всего, ц			Затраты на приобретение удобрений тыс.руб.
	аммиачная селитра	хлористый калий	аммофос	
Озимая пшеница	1 172,7	579,9	699,5	4 398,6
Ячмень				
Сахарная свекла	215,0	144,0	61,8	665,0
Подсолнечник	255,2	198,0	110,2	936,3
Всего	1 642,9	921,9	871,5	6 000,0

Анализ данных таблиц позволяет сделать вывод о том, что основным удобрением для подкормки растений в период их вегетации будет являться аммиачная селитра, при посеве – смесь аммиачной селитры и аммофоса, при основном внесении – аммиачная селитра, хлористый калий и аммофос. Общая потребность в аммиачной селитре составляет 1 642,9 ц, в хлористом калии – 921,9 ц, в аммофосе – 871,5 ц.

Для закупки минеральных удобрений в данных объемах и ассортименте будут использованы все денежные средства выделенные на приобретение удобрений (6 000 тыс. руб.). Затраты на транспортировку и внесение минеральных удобрений составляют 243,3 тыс. руб. (табл. 26)

Таблица 22. Экономико-математическая модель по оптимизации использования минеральных удобрений (часть 1)

№	Ограничения	Единицы измерения	Озимая пшеница																				
			основное внесение							внесение при посеве							подкормка						
			Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
	Значения переменных →		0,09				0,64	0,58		0,23					0,19		0,99						
	По балансу питательных веществ	кг д. в.																					
1	Для озимой пшеницы: азот	кг д. в.	14,8	9,1				5,2	7,0	14,8	9,1				5,2	7,0	14,8	9,1				5,2	7,0
2	фосфор	кг д. в.			10,1			11,7	3,6			10,1			11,7	3,6			10,1			11,7	3,6
3	калий	кг д. в.				18,0	27,0		7,2				18,0	27,0		7,2				18,0	27,0		7,2
4	Для ячменя: азот	кг д. в.																					
5	фосфор	кг д. в.																					
6	калий	кг д. в.																					
7	Для сахарной свеклы: азот	кг д. в.																					
8	фосфор	кг д. в.																					
9	калий	кг д. в.																					
10	Для подсолнечника: азот	кг д. в.																					
11	фосфор	кг д. в.																					
12	калий	кг д. в.																					

Продолжение таблицы 22. (часть 2)

№	Ограничения	Единицы измерения	Ячмень																				
			основное внесение							внесение при посеве							подкормка						
			Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска
			x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{37}	x_{38}	x_{39}	x_{40}	x_{41}	x_{42}
	Значения переменных →																						
	По балансу питательных веществ	кг д. в.																					
1	Для озимой пшеницы: азот	кг д. в.																					
2	фосфор	кг д. в.																					
3	калий	кг д. в.																					
4	Для ячменя: азот	кг д. в.	13,6	8,4				4,8	6,4	13,6	8,4				4,8	6,4	13,6	8,4				4,8	6,4
5	фосфор	кг д. в.			10,1			11,7	3,6			10,1			11,7	3,6			10,1			11,7	3,6
6	калий	кг д. в.				15,0	22,5		6,0				15,0	22,5		6,0				15,0	22,5		6,0
7	Для сахарной свеклы: азот	кг д. в.																					
8	фосфор	кг д. в.																					
9	калий	кг д. в.																					
10	Для подсолнечника: азот	кг д. в.																					
11	фосфор	кг д. в.																					
12	калий	кг д. в.																					

Продолжение таблицы 22. (часть 3)

№	Ограничения	Единицы измерения	Прибавка урожая с 1 га посева:				Требуется удобрений:							Затраты на приобретение удобрений	Затраты на внесение удобрений	Затраты на уборку прибавки урожая	Выручка от реализации прибавки урожая	Сумма произведений	Тип ограничений	Объем ограничений
			озимой пшеницы	ячменя	сахарной свеклы	подсолнечника	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска							
			x_{85}	x_{86}	x_{87}	x_{88}	x_{89}	x_{90}	x_{91}	x_{92}	x_{93}	x_{94}	x_{95}	x_{96}	x_{97}	x_{98}	x_{99}			
	Значения переменных =>		7,9		90,0	4,7	1643				921,9	871,5		6 000	243	1 115	8 530			
	По балансу питательных веществ	кг д. в.																		
1	Для озимой пшеницы: азот	кг д. в.	-2,95															0,0	≥	0
2	фосфор	кг д. в.	-1,15															0,0	≥	0
3	калий	кг д. в.	-2,20															0,0	≥	0
4	Для ячменя: азот	кг д. в.		-2,45														0,0	≥	0
5	фосфор	кг д. в.		-1,05														0,0	≥	0
6	калий	кг д. в.		-1,95														0,0	≥	0
7	Для сахарной свеклы: азот	кг д. в.			-0,43													0,0	≥	0
8	фосфор	кг д. в.			-0,13													0,0	≥	0
9	калий	кг д. в.			-0,60													0,0	≥	0
10	Для подсолнечника: азот	кг д. в.				-4,50												0,0	≥	0
11	фосфор	кг д. в.				-1,85												0,0	≥	0
12	калий	кг д. в.				-9,75												0,0	≥	0

Продолжение таблицы 22. (часть 4)

№	Ограничения	Единицы измерения	Озимая пшеница																				
			основное внесение							внесение при посеве							подкормка						
			Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
	По ограничению доз внесения	кг д. в.																					
13	Для оз. пшеницы: азот (основное)	кг д. в.	34,0	21,0				12,0	16,0														
14	фосфор (основное)	кг д. в.			45,0			52,0	16,0														
15	калий (основное)	кг д. в.				40,0	60,0		16,0														
16	Для озимой пшеницы: азот (рядковое)	кг д. в.								34,0	21,0				12,0	16,0							
17	фосфор (рядковое)	кг д. в.										45,0			52,0	16,0							
18	калий (рядковое)	кг д. в.											40,0	60,0		16,0							
19	Для оз. пшеницы: азот (подкормка)	кг д. в.															34,0	21,0				12,0	16,0
20	фосфор (подкормка)	кг д. в.																	45,0			52,0	16,0
21	калий (подкормка)	кг д. в.																		40,0	60,0		16,0
22	Для ячменя: азот (основное)	кг д. в.																					
23	фосфор (основное)	кг д. в.																					
24	калий (основное)	кг д. в.																					
25	Для ячменя: азот (рядковое)	кг д. в.																					
26	фосфор (рядковое)	кг д. в.																					
27	калий (рядковое)	кг д. в.																					
28	Для ячменя: азот (подкормка)	кг д. в.																					
29	фосфор (подкормка)	кг д. в.																					
30	калий (подкормка)	кг д. в.																					

Продолжение таблицы 22. (часть 5)

№	Ограничения	Единицы измерения	Ячмень																				
			основное внесение							внесение при посеве							подкормка						
			Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска
			x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{37}	x_{38}	x_{39}	x_{40}	x_{41}	x_{42}
	По ограничению доз внесения	кг д. в.																					
13	Для оз. пшеницы: азот (основное)	кг д. в.																					
14	фосфор (основное)	кг д. в.																					
15	калий (основное)	кг д. в.																					
16	Для оз. пшеницы: азот (рядковое)	кг д. в.																					
17	фосфор (рядковое)	кг д. в.																					
18	калий (рядковое)	кг д. в.																					
19	Для озимой пшеницы: азот (подкормка)	кг д. в.																					
20	фосфор (подкормка)	кг д. в.																					
21	калий (подкормка)	кг д. в.																					
22	Для ячменя: азот (основное)	кг д. в.	34,0	21,0				12,0	16,0														
23	фосфор (основное)	кг д. в.			45,0			52,0	16,0														
24	калий (основное)	кг д. в.				40,0	60,0		16,0														
25	Для ячменя: азот (рядковое)	кг д. в.								34,0	21,0				12,0	16,0							
26	фосфор (рядковое)	кг д. в.										45,0			52,0	16,0							
27	калий (рядковое)	кг д. в.											40,0	60,0		16,0							
28	Для ячменя: азот (подкормка)	кг д. в.															34,0	21,0				12,0	16,0
29	фосфор (подкормка)	кг д. в.																	45,0			52,0	16,0
30	калий (подкормка)	кг д. в.																		40,0	60,0		16,0

Продолжение таблицы 22. (часть 6)

№	Ограничения	Единицы измерения	Прибавка урожая с 1 га посева:				Требуется удобрений:							Затраты на приобретение удобрений	Затраты на внесение удобрений	Затраты на уборку прибавки урожая	Выручка от реализации прибавки урожая	Сумма произведений	Тип ограничений	Объем ограничений
			озимой пшеницы	ячменя	сахарной свеклы	подсолнечника	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска							
			x_{85}	x_{86}	x_{87}	x_{88}	x_{89}	x_{90}	x_{91}	x_{92}	x_{93}	x_{94}	x_{95}	x_{96}	x_{97}	x_{98}	x_{99}			
	По ограничению доз внесения	кг д. в.																		
13	Для оз. пшеницы: азот (основное)	кг д. в.																10,0	≤	10
14	фосфор (основное)	кг д. в.																30,4	≤	60
15	калий (основное)	кг д. в.																38,7	≤	90
16	Для оз. пшеницы: азот (рядковое)	кг д. в.																10,0	≤	10
17	фосфор (рядковое)	кг д. в.																10,0	≤	10
18	калий (рядковое)	кг д. в.																0,0	≤	0
19	Для оз. пшеницы: азот (подкормка)	кг д. в.																33,6	≤	40
20	фосфор (подкормка)	кг д. в.																0,0	≤	20
21	калий (подкормка)	кг д. в.																0,0	≤	0
22	Для ячменя: азот (основное)	кг д. в.																0,0	≤	30
23	фосфор (основное)	кг д. в.																0,0	≤	60
24	калий (основное)	кг д. в.																0,0	≤	90
25	Для ячменя: азот (рядковое)	кг д. в.																0,0	≤	10
26	фосфор (рядковое)	кг д. в.																0,0	≤	10
27	калий (рядковое)	кг д. в.																0,0	≤	0
28	Для ячменя: азот (подкормка)	кг д. в.																0,0	≤	20
29	фосфор (подкормка)	кг д. в.																0,0	≤	20
30	калий (подкормка)	кг д. в.																0,0	≤	0

Продолжение таблицы 22. (часть 7)

№	Ограничения	Единицы измерения	Озимая пшеница																				
			основное внесение							внесение при посеве							подкормка						
			Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска
			x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{37}	x_{38}	x_{39}	x_{40}	x_{41}	x_{42}
	Максимальная прибавка урожайности																						
49	озимой пшеницы	ц																					
50	ячменя	ц																					
51	сахарной свеклы	ц																					
52	подсолнечника	ц																					
	Определение потребности в:																						
53	аммиачной селитре	ц	900							900							900						
54	сульфате аммония	ц		900							900							900					
55	суперфосфате двойном	ц			900							900							900				
56	калийной соли	ц				900							900							900			
57	хлористом калии	ц					900							900							900		
58	аммофосе	ц						900							900							900	
59	азофоске	ц							900							900							900
60	Затраты на приобретение удобрений	тыс. р.																					
61	Затраты на транспорт. и внесение	тыс. р.	58,1	58,1	58,1	58,1	58,1	58,1	58,1	27,5	27,5	27,5	27,5	27,5	27,5	27,5	94,1	94,1	94,1	94,1	94,1	94,1	94,1
62	Затраты на уборку прибавки урожая	тыс. р.																					
63	Выручка от реализ. прибавки урожая	тыс. р.																					
64	Средства на приобр. удобрений	тыс. р.																					
	Zmax (дополнительная прибыль)	тыс. р.																					

Продолжение таблицы 22. (часть 8)

№	Ограничения	Единицы измерения	Ячмень																				
			основное внесение							внесение при посеве							подкормка						
			Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
	Максимальная прибавка урожайности																						
49	озимой пшеницы	ц																					
50	ячменя	ц																					
51	сахарной свеклы	ц																					
52	подсолнечника	ц																					
	Определение потребности в:																						
53	аммиачной селитре	ц	700							700							700						
54	сульфате аммония	ц		700							700							700					
55	суперфосфате двойном	ц			700							700							700				
56	калийной соли	ц				700							700							700			
57	хлористом калии	ц					700							700							700		
58	аммофосе	ц						700							700							700	
59	азофоске	ц							700							700							700
60	Затраты на приобретение удобрений	тыс. р.																					
61	Затраты на транспорт. и внесение	тыс. р.	45,2	45,2	45,2	45,2	45,2	45,2	45,2	21,4	21,4	21,4	21,4	21,4	21,4	21,4	73,2	73,2	73,2	73,2	73,2	73,2	73,2
62	Затраты на уборку прибавки урожая	тыс. р.																					
63	Выручка от реализ. прибавки урожая	тыс. р.																					
64	Средства на приобр. удобрений	тыс. р.																					
	Zmax (дополнительная прибыль)	тыс. р.																					

Продолжение таблицы 22. (часть 9)

№	Ограничения	Единицы измерения	Прибавка урожая с 1 га посева:				Требуется удобрений:							Затраты на приобретение удобрений	Затраты на внесение удобрений	Затраты на уборку прибавки урожая	Выручка от реализации прибавки урожая	Сумма произведений	Тип ограничений	Объем ограничений
			озимой пшеницы	ячменя	сахарной свеклы	подсолнечника	Аммиачная селитра	Сульфат аммония	Суперфосфат двойной	Калийная соль	Хлористый калий	Аммофос	Азофоска							
			x_{85}	x_{86}	x_{87}	x_{88}	x_{89}	x_{90}	x_{91}	x_{92}	x_{93}	x_{94}	x_{95}	x_{96}	x_{97}	x_{98}	x_{99}			
	Максимальная прибавка урожайности																			
49	озимой пшеницы	ц	1															7,9	≤	10
50	ячменя	ц		1														0,0	≤	9
51	сахарной свеклы	ц			1													90,0	≤	90
52	подсолнечника	ц				1												4,7	≤	8
	Определение потребности в:																			
53	аммиачной селитре	ц					-1											0,0	=	0
54	сульфате аммония	ц						-1										0,0	=	0
55	суперфосфате двойном	ц							-1									0,0	=	0
56	калийной соли	ц								-1								0,0	=	0
57	хлористом калии	ц									-1							0,0	=	0
58	аммофосе	ц										-1						0,0	=	0
59	азофоске	ц											-1					0,0	=	0
60	Затраты на приобретение удобрений	тыс. р.					1,29	1,02	3,53	2,24	1,43	2,94	2,05	-1				0,0	=	0
61	Затраты на транспорт. и внесение	тыс. р.													-1			0,0	=	0
62	Затраты на уборку прибавки урожая	тыс. р.	45,0	35,8	7,8	12,5										-1		0,0	=	0
63	Выручка от реализ. прибавки урожая	тыс. р.	648,0	420,0	20,0	340,0											-1	0,0	=	0
64	Средства на приобр. удобрений	тыс. р.												1				6000,0	≤	6 000
	Zmax (дополнительная прибыль)	тыс. р.												-1	-1	-1	1	1171,6		

Использование данного объема минеральных удобрений по обоснованной в ходе решения задачи схеме позволит получить от реализации прибавки урожая 8 529,8 тыс. руб. (табл. 25).

Таблица 25. Прибавка урожая и выручка от ее реализации

Культуры	Максимально возможная прибавка на 1 га, ц	По оптимальному решению, ц		Выручка от реализации прибавки урожая, тыс. руб.
		на 1 га	на всю площадь	
Озимая пшеница	10	7,9	7 117,0	5 124,3
Ячмень	9	0,0	0,0	0,0
Сахарная свекла	90	90,0	9 000,0	1 800,0
Подсолнечник	8	4,7	944,4	1 605,6
Всего	X	X	X	8 529,8

Затраты на уборку, транспортировку и подработку прибавки урожая составят по оптимальному решению 1 114,9 тыс. руб. (табл. 26). Суммарные затраты, связанные с приобретением, транспортировкой и внесением минеральных удобрений, а также затратами на уборку, транспортировку и первичную подработку дополнительно полученной продукции составляют 7 358,2 тыс. руб. (6 000,0 + 243,3 + 1 114,9).

Прибыль от применения дополнительного объема минеральных удобрений составит 1 171,6 тыс. руб., а уровень рентабельности этих мероприятий в целом по предприятию достигнет 15,9%.

Таблица 26. Эффективность применения минеральных удобрений

Культуры	Выручка от реализации, тыс. руб.	Затраты, тыс. руб.					Прибыль, тыс. руб.	Уровень рентабельности, %
		на приобретение удобрений	на транспортировку удобрений	на внесение удобрений	на уборку прибавки урожая	всего		
Озимая пшеница	5 124,3	4 398,6	57,6	123,3	355,9	4 935,5	188,8	3,8
Ячмень								
Сахарная свекла	1 800,0	665,0	9,9	16,6	700,0	1 391,6	408,4	29,4
Подсолнечник	1 605,6	936,3	13,2	22,6	59,0	1 031,2	574,4	55,7
Всего	8 529,8	6 000,0	80,8	162,6	1 114,9	7 358,2	1 171,6	15,9

Достижение максимально возможной прибавки урожайности наблюдается только по сахарной свекле, что обусловлено наивысшим значением размера дополнительной прибыли в расчете на 1 га посевов. Наименее привлекательной сельскохозяйственной культурой, с точки зрения применения удобрений, при сложившемся уровне цен будет ячмень, поскольку внесение удобрений под эту сельскохозяйственную культуру по оптимальному решению не предусматривается.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте постановку задачи по оптимизации использования минеральных удобрений.

2. Какой критерий оптимальности в задаче по оптимизации использования минеральных удобрений?

3. Что принимается за основные переменные в экономико-математической модели по оптимизации использования минеральных удобрений? Найдите их в разработанной Вами модели.

4. Что принимается за дополнительные и вспомогательные переменные в экономико-математической модели по оптимизации использования минеральных удобрений? Найдите их в разработанной Вами модели.

5. Запишите в структурной форме целевую функцию экономико-математической модели по оптимизации использования минеральных удобрений. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите целевую функцию в разработанной Вами модели.

6. Какая входная информация необходима для разработки экономико-математической модели по оптимизации использования минеральных удобрений?

7. Запишите в структурной форме ограничение по по обеспечению компенсации выноса из почвы питательных веществ. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

8. Какими способами описываются пределы доз внесения удобрений?

9. Запишите в структурной форме ограничение по установлению верхних пределов доз внесения удобрений. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

10. Запишите в структурной форме ограничение по лимитированию прибавок урожая. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

11. Запишите в структурной форме ограничение по определению потребности в минеральных удобрениях. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

12. Запишите в структурной форме ограничение по определению затрат на приобретение удобрений. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

13. Запишите в структурной форме ограничение по определению затрат на транспортировку и внесение удобрений. Раскройте экономиче-

ский смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

14. Запишите в структурной форме ограничение по определению затрат на уборку прибавки урожая. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

15. Запишите в структурной форме ограничение по определению выручки от реализации прибавки урожая. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

16. Запишите в структурной форме ограничение по лимитированию средств на приобретение удобрений. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

17. *На примере разработанной Вами экономико-математической модели по оптимизации использования минеральных удобрений раскройте экономический смысл всех технико-экономических коэффициентов.*

3.3. Экономико-математическая модель по оптимизации отраслевой структуры производства

Постановка задачи.

Большинство современных сельскохозяйственных предприятий развивает совокупность отраслей, рациональное сочетание которых в значительной степени определяет эффективность всей производственно-финансовой деятельности хозяйствующего субъекта. Очевидно, что есть отрасли более эффективные, чем другие. Но отдать доминирующий приоритет самым эффективным отраслям невозможно иногда в силу агротехнических или зооветеринарных, иногда в силу организационно-экономических требований. Именно поэтому проблема поиска оптимального сочетания развиваемых в предприятии отраслей действительно актуальна.

Постановку данной задачи сформулируем следующим образом: исходя из наличия ресурсов необходимо найти такое сочетание отраслей, которое обеспечило бы получение максимальной суммы чистого дохода при условии соблюдения всех агротехнических и зооветеринарных требований, выполнения договорных обязательств по реализации продукции, гарантированного обеспечения отраслей животноводства кормами.

Входная информация.

Для разработки экономико-математической модели данной задачи необходимо иметь следующую информацию:

- площадь пашни, имеющуюся у предприятия;
- перечень сельскохозяйственных культур, которые планируется возделывать;
- урожайность основной и побочной продукции, нормы высева семян (по культурам, по которым используются семена собственного производства), нормативы отходов;
- производственные затраты и затраты труда в расчете на 1 га посева;
- агротехнические требования по насыщению севооборотов отдельными культурами и группами культур;
- поголовье имеющихся у предприятия сельскохозяйственных животных;
- структуру стада, продуктивность скота, затраты корма на единицу продукции;
- рационы кормления скота;
- питательность кормов, включенных в рационы кормления;
- выход продукции в расчете на 1 структурную голову;
- производственные затраты в расчете на 1 структурную голову без учета стоимости кормов;
- цену приобретения покупных кормов;
- цену реализации реализуемой продукции.

Основными источниками получения информации являются фактические данные, получаемые в хозяйствах, справочная литература, информация о нормативной или фактической питательности кормов. Подготовку входной информации и построение экономико-математической модели рассмотрим на конкретном примере.

Условия задачи и подготовка входной информации.

В хозяйстве имеется 5 000 га пашни. Продуктивные сенокосы и пастбища отсутствуют. Планируется возделывать следующие сельскохозяйственные культуры: озимую пшеницу, ячмень, сою, горчицу, сахарную свеклу, подсолнечник, кукурузу на силос и зеленый корм, однолетние травы, многолетние травы. В соответствии с потребностями отрасли животноводства травы будут выращиваться на сено, сенаж и зеленый корм.

Исходя из запланированного уровня урожайности и на основании рассчитанных технологических карт были определены размеры затрат материально-денежных средств и затраты труда в расчете на 1 га посева сельскохозяйственных культур. Результаты расчетов приведены в табл. 27.

Таблица 27. Информация об урожайности, затратах материально-денежных средств и затратах труда в расчете на 1 га посева сельскохозяйственных культур

Сельскохозяйственные культуры	Планируемая урожайность, ц/га		Материально-денежные затраты в расчете на 1 га, тыс.руб.
	основной продукции	побочной продукции	
Озимая пшеница	38	57	15,2
Ячмень	34	34	12,8
Соя	15	12	13,4
Горчица	15	12	11,9
Сахарная свекла	450	180	67,4
Подсолнечник	22		10,8
Кукуруза на силос	300		16,2
Кукуруза на зеленый корм	290		15,3
Однолетние травы на сено	29		8,4
Однолетние травы на сенаж	48		8,1
Однолетние травы на зеленый корм	145		7,8
Многолетние травы на сено	48		10,1
Многолетние травы на сенаж	79		9,8
Многолетние травы на зеленый корм	240		9,3
Озимые на зеленый корм	105		6,9
Пар			4,1

Хозяйством заключены договора на реализацию 23 000 ц озимой пшеницы, 12 000 ц ячменя, 195 000 ц сахарной свеклы и 20 000 ц молока.

Исходя из агротехнических требований заданы следующие границы насыщения севооборота отдельными культурами и группами культур (табл. 28).

Таблица 28. Пределы насыщения севооборота отдельными культурами и группами культур

Сельскохозяйственные культуры	Нижняя граница		Верхняя граница	
	%	га	%	га
Всего пашни	100,0%	5 000	100,0%	5 000
Зерновые и зернобобовые	40,0%	2 000	60,0%	3 000
Озимые	20,0%	1 000	35,0%	1 750
Соя и горчица	0,0%	0	25,0%	750
Сахарная свекла	0,0%	0	10,0%	500
Подсолнечник	0,0%	0	12,5%	625
Пар	5,0%	250	10,0%	500

В хозяйстве развивается молочное скотоводство. Оборот стада предусматривает реализацию всего сверхремонтного молодняка в 20-ти дневном возрасте населению и предприятиям, специализирующимся на выращивании, доращивании и откорме крупного рогатого скота.

При описании животноводческих отраслей для упрощения расчетов, связанных с подготовкой исходной информации, в качестве единицы измерения используются структурные головы. За структурную голову, как правило, принимается маточное поголовье: в молочном скотоводстве – фуражные коровы, в свиноводстве – основные свиноматки, в овцеводстве – овцематки. В откормочных хозяйствах за структурную голову принимается откормочное поголовье. В птицеводческих хозяйствах, специализирующихся на производстве яиц, за структурную голову принимается 1000 кур-несушек, а специализирующихся на производстве мяса птицы – 1000 голов молодняка птицы.

Информация о среднегодовом поголовье крупного рогатого скота, полученная на основе составленного оборота стада исходя из фактического поголовья фуражных коров, приведена в табл. 29.

Таблица 29. Информация о среднегодовом поголовье крупного рогатого скота

Половозрастные группы	Поголовье, гол	Структура стада, %
Коровы	400	76,3
Нетели	25	4,8
Телочки до 20 дней	7	1,3
Бычки до 20 дней	7	1,3
Телочки с 20 дней до 6 месяцев	25	4,8
Телки с 6 месяцев до 1 года	25	4,8
Телки с 1 года до 18 месяцев	25	4,8
Выбракованный скот на откорме	10	1,9
Всего крупного рогатого скота	524	100,0

Посредством расчета оборота стада была получена следующая информация. Валовое производство прироста по стаду крупного рогатого скота составило 276,0 ц (или 276,0/400=0,69 ц в расчете на 1 структурную голову). Реализация прироста крупного рогатого скота составляет 452 ц (или 452,0/400=1,13 ц в расчете на 1 структурную голову). Превышение объемов реализации над объемами производства прироста связано с тем, что в расчет прироста не входит вес приплода и коров, который они набирают, находясь в основном стаде. Надой на 1 фуражную корову планируется на уровне 5110 кг. Исходя из рыночной конъюнктуры планируются следующие цены реализации продукции животноводства: молоко – 1 950, прирост КРС – 8 300 руб. за 1 ц. В этом случае стоимость товарной продукции в расчете на 1 структурную голову составит (если будет реализовано все молоко):

$(51{,}10 \cdot 1950 + 1{,}13 \cdot 8300)/1000 = 109{,}02$ тыс. руб.

Исходя из фактических рационов кормления по каждой половозрастной группе и количества кормодней пребывания была определена годовая потребность в кормах и структура рациона кормления в расчете на 1 структурную голову (табл. 30).

Исходя из зооветеринарных требований в 1 ц корма, направляемого на производство молока, должно содержаться не менее 0,101 кг, а в 1 ц корма, направляемого на производство прироста, – 0,107 кг переваримого протеина.

Материально-денежные затраты в расчете на 1 структурную голову (без стоимости кормов) составляют 65,5 тыс. руб. Материально-денежные затраты включаются в модель без учета стоимости кормов для того, чтобы избежать двойного счета, поскольку затраты на производство кормов и их приобретение определяются в ходе решения экономико-математической задачи.

Таблица 30. Расчет структуры рациона кормления в расчете на 1 структурную голову

Корма и кормовые добавки	Содержится в 1 ц корма, ц.к.ед.	Годовая потребность в кормах, ц		Годовая потребность в кормах, ц к.ед.		Структура годового рациона кормления, %	
		основное стадо	молодняк и скот на откорме	основное стадо	молодняк и скот на откорме	на молоко	на прирост
Комбикорм	1,10	2 920	354	3 212,0	389,4	14,88	17,12
Пшеница	1,28	1 216		1 556,5		7,21	
Ячмень	1,15	1 216		1 398,4		6,48	
Сено	0,48	6 448	249	3 095,0	119,5	14,34	5,25
Солома	0,25		164		41,0		1,80
Сенаж	0,32	19 025	2 237	6 088,0	715,8	28,21	31,46
Силос	0,20	23 844	1 663	4 768,8	332,6	22,09	14,62
Зеленые корма	0,22		2 316		509,5		22,40
Патока	0,76	1 824		1 386,2		6,42	
Премикс	0,50	158	20	79,0	10,0	0,37	0,44
Молоко	0,34		125		42,5		1,87
Обрат	0,13		365		47,5		2,09
ЗЦМ	2,40		28		67,2		2,95
Всего				21 583,9	2 275,0	100,00	100,00

Молоко на корм собственного производства потребляется по складывающейся себестоимости, а остальные корма и кормовые добавки приобретаются по следующим ценам: комбикорм – 14,40; обрат – 2,00; заменитель цельного молока (ЗЦМ) – 48,00; патока – 3,00; премикс – 11,00 руб. за 1 кг.

Для разработки экономико-математической модели необходимо провести дополнительные расчеты. Первая расчетная таблица связана с обоснованием распределения продукции в расчете на 1 га посева отдельных сельскохозяйственных культур (табл. 31).

Данные о выходе продукции с 1 га посева берутся из табл. 27.

Норматив отходов по группе зерновых и зернобобовых, горчице и подсолнечнику устанавливается на уровне 2% от урожайности в физическом весе. Норматив угара силосной массы берется на уровне 25% от урожайности кукурузы на силос.

Семена озимой пшеницы и ячменя производятся непосредственно в хозяйстве. Формирование семенного фонда по данным сельскохозяйственным культурам происходит исходя из следующих норм высева семян: озимая пшеница – 2,5 ц на 1 га, ячмень – 3,0 ц на 1 га. При этом по ячменю предусматривается создание страхового фонда семян в размере 10% семенного фонда.

Таблица 31. Распределение продукции в расчете на 1 га посева сельскохозяйственных культур

Сельскохозяйственные культуры	Выход продукции с 1 га, ц		Отходы, ц	Семена со страховым фондом, ц	На корм скоту, ц		Товарная продукция	
	основной	побочной			основной	побочной	в натуральном выражении, ц	в денежном выражении, тыс.руб.
Озимая пшеница товарная	38	57,0	0,76	2,50	0,76		34,74	25,01
Озимая пшеница фуражная	38	57,0	0,76	2,50	35,50			
Ячмень товарный	34	34,0	0,68	3,30	0,68	34,00	30,02	18,91
Ячмень фуражный	34	34,0	0,68	3,30	30,70	34,00		
Соя	15	12,0	0,30		0,30	12,00	14,70	27,93
Горчица	15	12,0	0,30				14,70	31,61
Сахарная свекла	450						450,00	85,50
Подсолнечник	22		0,44				21,56	34,50
Кукуруза на силос	300		75,00		225,00			
Кукуруза на зеленый корм	290				290,00			
Однолетние травы на сено	29				29,00			
Однолетние травы на сенаж	48				48,00			
Однолетние травы на зеленый корм	145				145,00			
Многолетние травы на сено	48				48,00			
Многолетние травы на сенаж	79				79,00			
Многолетние травы на зеленый корм	240				240,00			
Озимые на зеленый корм	105				105,00			

Объем продукции, направляемой на корм скоту, по озимой пшенице и ячменю товарным определяется на уровне отходов, а по этим же культурам, посеянным на фуражные цели, – как разница между урожайностью и нормой высева семян с учетом страхового фонда. Выход готового силоса в расчете на 1 га посева кукурузы на силос рассчитывается с учетом угара силосной массы при хранении этого корма. Из побочной продукции на корм скоту предполагается использовать солому ячменя и сои. Выход товарной продукции в натуральном выражении с 1 га посева определяется по товарным культурам как разница между урожайностью, количеством отходов и нормой высева семян с учетом страхового фонда.

Исходя из рыночной конъюнктуры планируются следующие цены реализации производимой продукции: озимая пшеница – 720, ячмень – 630, соя - 1 900, горчица – 2 150, сахарная свекла – 190, подсолнечник – 1 600 руб. за 1 ц.

На основании данных таблицы 31 и питательности кормов заполняется таблица 32.

Для равномерного обеспечения отрасли животноводства зелеными кормами необходимо провести планирование зеленого конвейера (с. 90, табл. 33).

Таблица 33. Схема зеленого конвейера

Источники зеленого корма	Выход с 1 га, ц.к.ед.	Сроки использования зеленых кормов, ц к.ед. с 1га					
		2-я половина мая	1-я половина июня	2-я половина июня	июль	август	сентябрь
Кукуруза 1 срока сева	60,9					60,9	
Кукуруза 2 срока сева	60,9						60,9
Многолетние травы на зеленый корм	52,8		31,7		21,1		
Однолетние травы 1 срока сева	26,1			26,1			
Однолетние травы 2 срока сева	26,1				26,1		
Озимые на зеленый корм	21,0	21,0					

По многолетним травам планируется провести два укоса. На первый укос приходится 60% их урожайности, на второй – 40%.

Таблица 32. Расчет выхода корма с 1 га посевов, содержание кормовых единиц и переваримого протеина в кормах и кормовых добавках

Сельскохозяйственные культуры	Содержится в 1 ц корма				Выход корма с 1 га (или 1 ц), ц		Основная продукция		Побочная продукция		Всего	
	основной продукции		побочной продукции									
	кормовых ед.	переваримого протеина, г	кормовых ед.	переваримого протеина, г	основной	побочной	кормовых ед.	переваримого протеина, ц	кормовых ед.	переваримого протеина, ц	кормовых ед.	переваримого протеина, ц
Озимая пшеница товарная	1,28	11,60			0,76		0,97	0,081			0,97	0,081
Озимая пшеница фуражная	1,28	11,60			35,50		45,44	3,763			45,44	3,763
Ячмень товарный	1,15	8,50	0,28	1,10	0,68	34,00	0,78	0,058	9,52	0,374	10,30	0,432
Ячмень фуражный	1,15	8,50	0,28	1,10	30,70	34,00	35,31	2,610	9,52	0,374	44,83	2,984
Соя	1,29	22,00	0,32	1,30	0,30	11,25	0,39	0,066	3,60	0,146	3,99	0,212
Горчица												
Сахарная свекла												
Подсолнечник												
Кукуруза на силос	0,20	1,40			225,00		45,00	3,150			45,00	3,150
Кукуруза на зеленый корм	0,21	1,40			290,00		60,90	4,060			60,90	4,060
Однолетние травы на сено	0,45	6,70			29,00		13,05	1,943			13,05	1,943
Однолетние травы на сенаж	0,32	3,30			48,00		15,36	1,584			15,36	1,584
Однолетние травы на зеленый корм	0,18	2,40			145,00		26,10	3,480			26,10	3,480
Многолетние травы на сено	0,50	8,20			48,00		24,00	3,936			24,00	3,936
Многолетние травы на сенаж	0,34	4,20			79,00		26,86	3,318			26,86	3,318
Многолетние травы на зеленый корм	0,22	3,10			240,00		52,80	7,440			52,80	7,440
Озимые на зеленый корм	0,20	2,50			105,00		21,00	2,625			21,00	2,625
Комбикорм	1,10	11,00			1,00		1,10	0,110			1,10	0,110
Премикс	0,50	5,50			1,00		0,50	0,055			0,50	0,055
Патока	0,76	6,00			1,00		0,76	0,060			0,76	0,060
Молоко	0,34	5,10			1,00		0,34	0,051			0,34	0,051
Обрат	0,13	3,50			1,00		0,13	0,035			0,13	0,035
ЗЦМ	2,40	42,60			1,00		2,40	0,426			2,40	0,426

Определение потребности в кормах в расчете на 1 структурную голову с учетом страхового фонда приведено в табл. 34 (затраты корма на производство 1 ц молока и прироста КРС планируются на уровне 1,06 и 8,24 ц.к.ед.).

Таблица 34. Определение потребности в кормах в расчете на 1 структурную голову

Корма и кормовые добавки	На молоко		На прирост		Страховой фонд		Всего, ц.к.ед.
	%	ц к.ед.	%	ц к.ед.	%	ц к.ед.	ц к.ед.
Корма всего	100,00	54,17	100,00	5,69		8,63	68,49
Концентраты всего:	28,57	15,48	17,12	0,97	10,0	1,65	18,10
в т.ч. комбикорм	14,88	8,06	17,12	0,97	10,0	0,90	9,94
прочие концентраты	13,69	7,42			10,0	0,74	8,16
Сено	14,34	7,77	5,25	0,30	15,0	1,21	9,28
Солома			1,80	0,10	15,0	0,02	0,12
Сенаж	28,21	15,28	31,46	1,79	15,0	2,56	19,63
Силос	22,09	11,97	14,62	0,83	25,0	3,20	16,00
Зеленый корм во 2-ой половине мая			2,80	0,16			0,16
в 1-ой половине июня			2,80	0,16			0,16
во 2-ой половине июня			2,80	0,16			0,16
в июле			5,60	0,32			0,32
в августе			5,60	0,32			0,32
в сентябре			2,80	0,16			0,16
Патока	6,42	3,48					3,48
Премикс	0,37	0,20	0,44	0,03			0,23
Молоко на корм			1,87	0,11			0,11
Обрат			2,09	0,12			0,12
Заменитель цельного молока			2,95	0,17			0,17
Требуется переваримого протеина, ц		5,47		0,61			6,08

Построение экономико-математической модели

Система переменных данной экономико-математической задачи представлена основными и вспомогательной переменными. За основные переменные принимаются:

X_j – площадь посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры;

X_j^g – поголовье *j*-го вида сельскохозяйственных животных;

X_j^k – объем приобретения *j*-го вида корма или кормовой добавки;

x_1 – Озимая пшеница товарная
x_2 – Озимая пшеница фуражная
x_3 – Ячмень товарный
x_4 – Ячмень фуражный
x_5 – Соя
x_6 – Горчица
x_7 – Сахарная свекла
x_8 – Подсолнечник
x_9 – Кукуруза на силос
x_{10} – Кукуруза на зеленый корм 1 срока сева
x_{11} – Кукуруза на зеленый корм 2 срока сева
x_{12} – Однолетние травы на сено

x_{13} – Однолетние травы на сенаж
x_{14} – Однолетние травы на зеленый корм 1 срока сева
x_{15} – Однолетние травы на зеленый корм 2 срока сева
x_{16} – Многолетние травы на сено
x_{17} – Многолетние травы на сенаж
x_{18} – Многолетние травы на зеленый корм
x_{19} – Озимые на зеленый корм
x_{20} – Пар
x_{21} – Комбикорм
x_{22} – Патока
x_{23} – Премикс
x_{24} – Молоко на корм
x_{25} – Обрат
x_{26} – ЗЦМ
x_{27} – Поголовье крупного рогатого скота

Вспомогательная переменная ($\overline{X_j}$) используется для определения суммы производственных затрат по предприятию.

x_{28} – Производственные затраты

Все условия задачи записаны в виде линейных уравнений и неравенств (ограничений), которые можно разбить на группы:

- по использованию ресурсов;
- по выполнению агротехнических требований возделывания сельскохозяйственных культур;
- по выполнению договорных обязательств по реализации продукции;
- по обеспеченности потребностей животноводства кормами собственного производства;
- по определению стоимости производственных затрат.

Основными ограничениями (с 1 по 2) являются условия, ограничивающие систему фактическим наличием ресурсов. В данном конкретном примере ограничивающими факторами будут являться площадь пашни и поголовье сельскохозяйственных животных.

В общем виде ограничение по использованию ресурсов записывается следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij} X_j + \sum_{j=l+1}^{m} a_{ij}^g X_j^g \le B_i$$

где X_j – площадь посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры;

X_j^g – поголовье *j*-го вида скота;

a_{ij} – затраты ресурсов *i*-го вида в расчете на 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры;

a_{ij}^g – затраты ресурсов *i*-го вида в расчете на 1 структурную голову *j*-го вида скота;

B_i – наличие ресурсов *i*-го вида.

Поскольку по условиям задачи рассматривается только два вида ресурсов, то будут рассмотрены два частных случая ограничения по ресурсам

$$\sum_{j=1}^{20} a_{ij} X_j \le B_i \quad (i = 1)$$

где a_{ij} – затраты пашни в расчете на 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры;

B_i – наличие пашни в хозяйстве.

Таким образом, ограничение, гарантирующее, что площадь посева всех сельскохозяйственных культур и пара не превысит площади пашни, имеющейся в наличии, будет записано в следующем виде

$$X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots\ldots+X_{17}+X_{18}+X_{19}+X_{20}<=5000 \qquad (i=1).$$

Коэффициенты при X_j (единицы) означают, что для возделывания 1 га каждой сельскохозяйственной культуры необходимо затрачивать 1 га пашни.

Так как по условию задачи поголовье сельскохозяйственных животных должно быть сохранено на фактическом уровне, то второе основное ограничение в структурном виде записывается как:

$$\sum_{j=27}^{27} a_{ij}^{g} X_j^{g} = B_i \quad (i = 2)$$

где a_{ij}^{g} – бинарные коэффициенты связи (равны либо 0, либо 1) по *i*-му виду сельскохозяйственных животных;

B_i – фактическое поголовье *i*-го вида сельскохозяйственных животных в хозяйстве.

То есть сохранение существующего поголовья крупного рогатого скота обеспечивается через реализацию условия

$$X_{27} = 400 \qquad (i=2).$$

При необходимости в систему основных ограничений могут быть введены условия по использованию сенокосов, пастбищ, трудовых и других ресурсов.

Первую группу дополнительных ограничений (с 3 по 12) составляют ограничения по выполнению агротехнических требований, соблюдение которых необходимо для соблюдения научно обоснованного чередования сельскохозяйственных культур. Эти требования представлены условиями двух видов: во-первых, по насыщению севооборота отдельными культурами или группами культур; во-вторых, по обеспечению озимых культур предшественниками.

Ограничение по насыщению севооборота отдельными культурами или группами культур в структурном виде может быть записано как

$$\sum_{j=1}^{20} X_j \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} Q_i \; (i = 3,\ldots,11)$$

где Q_i – верхние или нижние пределы насыщения севооборотов отдельными сельскохозяйственными культурами или группами культур.

Например, ограничение по насыщению севооборота зерновыми и зернобобовыми культурами может быть записано следующим образом:

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 >= 2000$ *(i=3),*

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 <= 3000$ *(i=4).*

Ограничение по насыщению севооборота озимыми:

$X_1+X_2 >= 1000$ *(i=5),*

$X_1+X_2 <= 1750$ *(i=6).*

Аналогично заполняются ограничения по насыщению севооборота горчицей и соей, сахарной свеклой, подсолнечником, паром.

Информация о пределах насыщения севооборота отдельными сельскохозяйственными культурами или группами культур берется из табл. 28 (столбцы 2 и 4).

Ограничение по обеспечению озимых культур предшественниками в структурном виде может быть записано как:

$$\sum_{j=1}^{2} X_j - \sum_{j=3}^{20} \alpha_j X_j^p \le 0 \quad (i = 12)$$

где X_j – площадь посева *j*-ой озимой культуры;

X_j^p – площадь посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры;

α_j – коэффициент возможного использования посевов *j*-ой сельскохозяйственной культуры в качестве предшественника под озимые.

Данное ограничение может быть записано следующим образом

$X_1+X_2-X_5-X_{10}-X_{12}-X_{13}-X_{14}-X_{15}-0,33X_{16}-0,33X_{17}-0,33X_{18}-X_{20}<=0$ *(i=12).*

Коэффициент 0,33 при переменных, означающих многолетние травы, означает, что планируемый срок использования многолетних трав в хозяйстве составляет три года, поэтому ежегодно третья часть многолетних трав запахивается и может быть использована в качестве предшественника под озимые. Если срок эксплуатации многолетних трав будет равен четырем годам, то данный коэффициент будет равен 0,25.

Вторую группу дополнительных ограничений (с 13 по 16) составляют ограничения по выполнению договорных обязательств по реализации продукции.

$$\sum_{j=1}^{20,27} r_{ij} X_j \ge R_i \quad (i = 13,...,16)$$

где X_j – площадь посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры или поголовье *j*-го вида скота;

r_{ij} – выход продукции *i*-го вида в расчете на 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры или 1 структурную голову *j*-го вида скота;

R_i – минимально необходимый объем производства товарной продукции *i*-го вида.

Ограничения по реализации пшеницы, ячменя, сахарной свеклы записываются следующим образом:

$34,74X_1 >= 23000$ (i=13),

$30,02X_3 >= 12000$ (i=14),

$450X_7 >= 950000$ (i=15).

Ограничение по реализации молока будет иметь несколько иной вид

$-X_{24}+51,10X_{27} >=20000$ (i=16).

Поскольку потребность в молоке на корм планируется удовлетворять за счет молока собственного производства, а его объем будет определяться в ходе решения задачи, то в данном ограничении из объема валового производства молока ($51,10X_{27}$) необходимо вычесть потребность в молоке на корм (X_{24}).

Информация о выходе товарной продукции с 1 га посева соответствующих сельскохозяйственных культур берется из столбца 7 табл. 31.

Третью группу дополнительных ограничений (с 17 по 36) составляют ограничения по обеспечению потребности отрасли животноводства в кормах. Эти ограничения гарантируют, что эти потребности будут удовлетворены как за счет собственных, так и приобретенных кормов.

$$\sum_{j=1}^{19} k_{ij}X_j + \sum_{j=21}^{26} p_{ij}X_j^k - \sum_{j=27}^{27} d_{ij}X_j^g \geq 0 \quad (i = 17,...,36)$$

где k_{ij} – выход корма *i*-го вида в расчете на 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры;

p_{ij} – содержание питательных веществ *i*-го вида в единице приобретаемого *j*-ого вида корма или *j*-ой кормовой добавки;

d_{ij} – потребность в корме *i*-го вида в расчете на 1 структурную голову *j*-ого вида сельскохозяйственных животных.

Ограничение по удовлетворению общей потребности отрасли животноводства в кормах (*i=17)* может быть записано следующим образом

$0,97X_1+45,44X_2+10,30X_3+44,83X_4+...+0,34X_{24}+0,13X_{25}+2,40X_{26}-68,49X_{27}>=0,$

По обеспечению рациона кормления переваримым протеином (*i=18)*

$0,08X_1+3,76X_2+0,43X_3+2,98X_4+...+0,05X_{24}+0,04X_{25}+42,60X_{26}-6,08X_{27}>=0.$

В ограничениях 17 и 18 информация о выходе корма (с учетом основной и побочной продукции) берется из столбцов 11 и 12 табл. 32.

В ограничениях 20-22 и 24-25 – из столбца 11 таблицы 32. Например, ограничение по удовлетворению потребности в комбикорме запишется:

$1,10X_{21}-9,94X_{27}>=0$ (i=20)

Ограничение по удовлетворению потребности в концентрированных кормах собственного производства будет записано как

$0,97X_1+45,44X_2+0,78X_3+35,31X_4+0,39X_5-8,16X_{27}>=0$ (i=21).

В ограничении по соломе (23) информация о выходе соломы с 1 га посева зерновых и зернобобовых культур берется из столбца 9 таблицы 32

$9,52X_3+9,52X_4+3,84X_5-0,12X_{27}>=0$ (i=23).

С помощью ограничений 26-31 происходит моделирование так называемого «зеленого конвейера», позволяющего обеспечить равномерное

поступление зеленых кормов.

По условиям задачи хозяйство не располагает пастбищами, поэтому выход зеленых кормов планируется только с посевных площадей кормовых культур. Схема зеленого конвейера приведена в табл. 33.

Например, ограничение по удовлетворению потребности в зеленых кормах в июле запишется следующим образом

$26,10X_{15}+21,10X_{18}-0,32X_{27}>=0$ $(i=29)$.

Вспомогательным является ограничение по определению стоимости производственных затрат в целом по предприятию:

$$\sum_{j=1}^{19} z_j X_j + \sum_{j=21}^{26} c_j X_j^k + \sum_{j=27}^{27} v_j X_j^g - \overline{X_j} = 0 \quad (i = 37)$$

где z_j - материально-денежные затраты в расчете на 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры;

c_j - цена приобретения *j*-ого вида корма или *j*-ой кормовой добавки;

v_j материально-денежные затраты без учета стоимости кормов в расчете на 1 структурную голову *j*-ого вида сельскохозяйственных животных.

Это ограничение может быть записано следующим образом

$15,20X_1+15,20X_2+12,80X_3+\ldots+1,44X_{21}+\ldots+65,50X_{27}-X_{28}=0$ $(i=37)$.

Значения переменных должны быть неотрицательными

$X_j \geq 0$, $X_j^g \geq 0$, $X_j^k \geq 0$, $\overline{X_j} \geq 0$

Поскольку в качестве критерия оптимальности в данной задаче выбрана максимизация сумма чистого дохода (разница между стоимостью товарной продукции и общей суммой производственных затрат по предприятию), то целевая функция примет вид:

$$Z_{\max} = \sum_{j=1}^{20,27} t_j X_j - \overline{X}_j,$$

где X_j - площадь посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры или поголовье *j*-го вида скота;

t_j - выход товарной продукции в стоимостном выражении в расчете на 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры или 1 структурную голову *j*-го вида скота.

Целевая функция может быть записана следующим образом:

$Z_{max}=16,68X_1+12,31X_3+17,64X_5+19,26X_6+49,50X_7+20,48X_8-1,95X_{24}-53,27X_{27}-X_{28}$.

где $-1,95X_{24}$ представляет собой вычитание из выручки стоимости кормового молока. В матричном виде экономико-математическая модель по оптимизации отраслевой структуры производства представлена в табл. 35.

Реализация разработанной экономико-математической модели производства осуществляется с помощью надстройки **Поиск решения** Microsoft Excel.

Таблица 35. Экономико-математическая модель по оптимизации отраслевой структуры производства (часть 1)

№	Ограничения	Единица измерения	Переменные										
			Озимая пшеница		Ячмень		Соя	Горчица	Сахарная свекла	Подсолнечник	Кукуруза		
			товарная	фуражная	товарный	фуражный					на силос	на зеленый корм	
												1 срока сева	2 срока сева
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
Значения переменных по решению →			1000,0	0,0	1241,1	30,9	594,0	156,0	500,0	625,0	142,2	2,1	1,0
1	Пашня	га	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	Поголовье КРС	стр.гол.											
3	Площадь зерновых и зернобобовых min	га	1	1	1	1	1						
4	Площадь зерновых и зернобобовых max	га	1	1	1	1	1						
5	Площадь озимых min	га	1	1									
6	Площадь озимых max	га	1	1									
7	Площадь горчицы и сои	га					1	1					
8	Площадь сахарной свеклы	га							1				
9	Площадь подсолнечника	га								1			
10	Площадь пара min	га											
11	Площадь пара max	га											
12	Баланс озимых и предшественников	га	1	1			-1					-1	
	Объем реализации по договорам:												
13	пшеница	ц	34,74										
14	ячмень	ц			30,02								
15	сахарная свекла	ц							450				
16	молоко	ц											
17	Требуется корма всего	ц.к.ед.	0,97	45,44	10,30	44,83	4,23				45,00	60,90	60,90
18	Требуется переваримого протеина	кг	0,08	3,76	0,43	2,98	0,22				3,15	4,06	4,06
19	Концентраты всего:	ц.к.ед.	0,97	45,44	0,78	35,31	0,39						
20	в т.ч. комбикорм	ц.к.ед.											
21	прочие концентраты	ц.к.ед.	0,97	45,44	0,78	35,31	0,39						
22	Сено	ц.к.ед.											
23	Солома	ц.к.ед.			9,52	9,52	3,84						
24	Сенаж	ц.к.ед.											
25	Силос	ц.к.ед.									45,00		
26	Зеленый корм во 2-ой половине мая	ц.к.ед.											
27	в 1-й половине июня	ц.к.ед.											
28	во 2-й половине июня	ц.к.ед.											
29	в июле	ц.к.ед.											
30	в августе	ц.к.ед.										60,90	
31	в сентябре	ц.к.ед.											60,90
32	Патока	ц.к.ед.											
33	Премикс	ц.к.ед.											
34	Молоко	ц.к.ед.											
35	Обрат	ц.к.ед.											
36	ЗЦМ	ц.к.ед.											
37	Производственные затраты	тыс.р.	15,20	15,20	12,80	12,80	13,40	11,90	67,40	10,80	16,20	15,30	15,30
Z_{max}			25,01		18,91		27,93	31,61	85,50	34,50			

Продолжение таблицы 35 (часть 2).

№	Переменные																	Сумма произведений	Тип ограничений	Объем ограничений
	Однолетние травы				Многолетние травы			Озимые на зеленый корм	Пар	Комбикорм	Патока	Премикс	Молоко на корм	Обрат	ЗЦМ	Поголовье крупного рогатого скота	Производственные затраты			
	на сено	на сенаж	на зеленый корм		на сено	на сенаж	на зеленый корм													
			1 срока сева	2 срока сева																
	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}			B_i
	0,0	0,0	2,4	3,3	154,6	292,4	2,0	3,0	250,0	3614	1830	180,4	125,2	365,9	28	400,0	121993			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1									5 000	=	5 000
2																1		400	=	400
3																		2 866	>=	2 500
4																		2 866	<=	3 000
5																		1 000	>=	1 000
6																		1 000	<=	1 500
7																		750	<=	1 000
8																		500	<=	750
9																		625	<=	625
10									1									250	>=	250
11									1									250	<=	500
12	-1	-1	-1	-1	-0,33	-0,33	-0,33		-1									0	<=	0
13																		34 740	>=	23 000
14																		37 257	>=	12 000
15																		225 000	>=	195 000
16													-1			51,10		20 315	>=	20 000
17	13,05	15,3	26,1	26,1	24,00	26,86	52,80	21,00		1,10	0,76	0,50	0,34	0,13	2,4	-68,49		14 200	>=	0
18	1,94	1,58	3,48	3,48	3,94	3,32	7,44	2,63		0,11	0,06	0,06	0,001	0,000	0,426	-6,08		1 014,1	>=	0
19										1,10						-18,10		0	>=	0
20										1,10						-9,94		0	>=	0
21																-8,16		0	>=	0
22	13,05				24,00											-9,28		0	>=	0
23																-0,12		14 200	>=	0
24		15,3				26,86										-19,63		0	>=	0
25																-16,00		0	>=	0
26								21,00								-0,16		0	>=	0
27							31,70									-0,16		0	>=	0
28			26,1													-0,16		0	>=	0
29				26,1			21,10									-0,32		0	>=	0
30																-0,32		0	>=	0
31																-0,16		0	>=	0
32											0,76					-3,48		0	=	0
33												0,50				-0,23		0	=	0
34													0,34			-0,11		0	=	0
35														0,13		-0,12		0	=	0
36															2,4	-0,17		0	=	0
37	8,40	8,10	7,80	7,80	10,1	9,80	9,30	6,90	4,10	1,44	0,30	1,10		0,20	4,8	65,50	-1	0	=	0
Z_{max}													-1,95			109,02	-1	**55657,5**	max	

Анализ результатов решения задачи

Результаты реализации экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства приведены в табл. 36.

Таблица 36. Результаты решения задачи по оптимизации отраслевой структуры производства

Номер переменой	Наименование переменной	Значение по решению
x_1	Озимая пшеница товарная	1 000,0
x_2	Озимая пшеница фуражная	0,0
x_3	Ячмень товарный	1 241,1
x_4	Ячмень фуражный	30,9
x_5	Соя	594,0
x_6	Горчица	156,0
x_7	Сахарная свекла	500,0
x_8	Подсолнечник	625,0
x_9	Кукуруза на силос	142,2
x_{10}	Кукуруза на зеленый корм 1-го срока сева	2,1
x_{11}	Кукуруза на зеленый корм 2-го срока сева	1,0
x_{12}	Однолетние травы на сено	0,0
x_{13}	Однолетние травы на сенаж	0,0
x_{14}	Однолетние травы на зеленый корм 1 срока сева	2,4
x_{15}	Однолетние травы на зеленый корм 2 срока сева	3,3
x_{16}	Многолетние травы на сено	154,6
x_{17}	Многолетние травы на сенаж	292,4
x_{18}	Многолетние травы на зеленый корм	2,0
x_{19}	Озимые на зеленый корм	3,0
x_{20}	Пар	250,0
x_{21}	Комбикорм	3 613,8
x_{22}	Патока	1 830,4
x_{23}	Премикс	180,4
x_{24}	Молоко на корм	125,2
x_{25}	Обрат	365,9
x_{26}	ЗЦМ	28,0
x_{27}	Поголовье крупного рогатого скота	400,0
x_{28}	Сумма производственных затрат	121 993,3

В результате решения задачи были определены площади посева сельскохозяйственных культур, объемы приобретаемых кормов и кормовых добавок, поголовье крупного рогатого скота (в структурных головах) и сумм производственных затрат по предприятию.

Все ограничения выполнены. Анализируя результаты, представленные в столбце «Сумма произведений» можно сделать следующие выводы:

Имеющаяся в хозяйстве пашня используется полностью. Площадь посева зерновых и зернобобовых (ограничения 3 и 4) составляет 2 866 га и занимает 57,3% площади пашни. Площадь озимых культур (ограничения 3 и 4) формируется на уровне 1 000 га (при нижней и верхней границе соответственно 1 000 и

1 750 га). Максимально возможных значений достигает площадь подсолнечника, площадь сахарной свеклы и суммарная площадь посевов сои и горчицы (соответственно 625, 500 и 750 га). Площадь пара берется по минимально допустимой границе в 250 га.

Все озимые культуры размещены по хорошим предшественникам. Излишки площадей по таким культурам отсутствуют.

Таблица 37. Выполнение договорных обязательств по реализации продукции, ц

Продукция	Объемы реализации по плану	Объемы реализации по решению	Объемы реализации сверх плана
Пшеница	23 000,0	34 740,0	11 740,0
Ячмень	12 000,0	37 257,0	25 257,0
Сахарная свекла	95 000,0	225 000,0	30 000,0
Молоко	20 000,0	20 314,8	314,8

Если реализация пшеницы, ячменя сахарной свеклы сверх плана объясняется выгодностью данных видов продукции, то перевыполнение плана по молоку связано с тем, что поголовье крупного рогатого скота было зафиксировано на фактическом уровне.

Анализ обеспеченности отрасли животноводства кормами показывает, что по оптимальному решению излишек кормов составит 14 200 ц к.ед и 1 014,1 ц переваримого протеина. Этот излишек образуется за счет соломы, которая является побочной продукцией при производстве зерновых и зернобобовых культур.

Сумма чистого дохода по оптимальному решению составляет 55 657,5 тыс. руб.

Рекомендации по освоению материала

С целью более глубокого понимания взаимосвязей, между отраслями производства в моделируемом хозяйстве предлагается реализовать и решить следующие варианты задачи:

1. Отмена ограничения по сохранению фактического поголовья крупного рогатого скота ($X_{27}<=400 \quad i=2$) при снятии ограничений по обязательным объемам реализации молока ($-X_{24}+51,10X_{27}>= 20000 \quad i=16$).
2. При сохранении условий первого варианта снизить закупочную цену молока до 1600 руб. за 1 ц.
3. Увеличить закупочную цену молока до 2 200 руб. за 1 ц молока.

Проанализировать результаты решения по каждому варианту и сделать выводы о перспективах развития молочного скотоводства в данном хозяйстве при различном уровне закупочных цен на молоко.

Задание для самостоятельной работы

Используя условия предыдущей задачи и предлагаемых вариантов, разработать и реализовать экономико-математическую модель по оптимизации отраслевой структуры производства.

Таблица 38. Исходные данные для разработки экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства

Показатели	Варианты, значения по вариантам:														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Пашня, га	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900	6000	6100	6200	6300	6400	6500
Поголовье коров, гол	425	400	425	450	400	425	450	425	400	450	475	450	500	525	550
Урожайность сельскохозяйственных культур, ц/га															
Озимая пшеница	44	50	40	41	43	34	35	38	32	31	45	44	39	40	48
Ячмень	39	32	36	36	38	31	32	34	29	28	42	39	35	36	43
Соя	17	14	16	16	17	14	14	15	13	12	17	17	15	16	19
Горчица	17	14	16	16	17	14	14	15	13	12	17	17	15	16	19
Сахарная свекла	518	428	473	482	504	405	419	400	383	369	496	518	464	473	563
Подсолнечник	25	21	23	24	25	20	20	18	19	18	24	25	23	23	28
Кукуруза на силос	345	285	315	321	336	270	279	297	255	246	306	270	369	225	300
Кукуруза на зеленый корм	334	276	305	310	325	261	270	287	247	238	296	261	357	218	290
Однолетние травы на сено	33	28	30	31	32	26	27	29	25	24	30	26	36	22	29
Однолетние травы на сенаж	55	46	50	51	54	43	45	48	41	39	49	43	59	36	48
Однолетние на зеленый корм	167	138	152	155	162	131	135	144	123	119	148	131	178	109	145
Многолетние травы на сено	55	46	50	51	54	43	45	48	41	39	49	43	59	36	48
Многолетние на сенаж	91	75	83	85	88	71	73	78	67	65	81	71	97	59	79
Многолетние на зел. корм	276	228	252	257	269	216	223	238	204	197	245	216	295	180	240
Озимые на зеленый корм	121	100	110	112	118	95	98	104	89	86	107	95	129	79	105

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте постановку задачи по оптимизации отраслевой структуры производства.

2. Какой показатель выбирается в данной задаче в качестве критерия оптимальности?

3. Что принимается за основные переменные в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства? Найдите их в разработанной Вами модели.

4. Что принимается за вспомогательную переменную в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства? Найдите ее в разработанной Вами модели.

5. Запишите в структурной форме целевую функцию экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите целевую функцию в разработанной Вами модели.

6. Какая входная информация необходима для разработки экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства?

7. Запишите в структурной форме ограничение по использованию ресурсов. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

8. Каким образом в разработанной Вами модели описываются агротехнические требования?

9. Запишите в структурной форме ограничение по установлению минимальных и максимальных пределов насыщения севооборотов отдельными культурами или группами культур. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

10. Запишите в структурной форме ограничение по обеспеченности озимых культур предшественниками. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите это ограничение в разработанной Вами модели.

11. Запишите в структурной форме ограничение по выполнению договорных обязательств по реализации продукции. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

12. Запишите в структурной форме ограничение по обеспечению отрасли животноводства кормами. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите эти ограничения в разработанной Вами модели.

13. Запишите в структурной форме ограничение для определения суммы производственных затрат по предприятию. Раскройте экономический смысл всех элементов этого выражения. Найдите это ограничение в разработанной Вами модели.

14. На примере разработанной Вами экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства раскройте экономический смысл всех технико-экономических коэффициентов. Например, что означают коэффициенты, расположенные на пересечении:

первого ограничения и X_1;
двенадцатого ограничения и X_{16};
тринадцатого ограничения и X_1;
семнадцатого ограничения и X_5;
семнадцатого ограничения и X_{22};
семнадцатого ограничения и X_{27};
тридцать седьмого ограничения и X_1;
тридцать седьмого ограничения и X_{22};
тридцать седьмого ограничения и X_{27} и т.д.?

15. Вспомните алгоритм расчета всех технико-экономических коэффициентов экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства.

4. ЗАДАЧИ ВЫБОРА СТРАТЕГИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Детерминированные экономико-математические модели являются важным инструментом обоснования перспективных параметров развития социально-экономических систем при неких фиксированных условиях их хозяйствования. Нестабильность внешней среды, разнородность ее структурных элементов обуславливают многообразие возможных исходов. Ситуацию, когда вероятность изменений условий функционирования можно оценить количественно, а значит и спрогнозировать возможные выигрыши и потери, принято называть риском. Ситуация, когда из-за недостатка информации вероятность изменений условий функционирования оценить нельзя, трактуется как неопределенность.

Анализ среды функционирования социально-экономических систем показывает, что исходы, формирующиеся под влиянием изменений условий хозяйствования, можно представить в виде нескольких групп. Например, исход при благоприятных условиях, исход при средних условиях, исход при неблагоприятных условиях. Причем количество таких групп исходов может выбираться произвольно, исходя из целей данной группировки.

Под исходом в данной конкретной задаче будет пониматься объем прибыли, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегии в тех или иных условиях функционирования.

4.1. Решение задачи выбора стратегии в условиях неопределенности

Условие задачи

Имеются результаты реализации 5 вариантов экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства при благоприятных, средних и неблагоприятных условиях хозяйствования.

Таблица 39. Размер прибыли по вариантам отраслевой структуры при различных условиях хозяйствования

Варианты отраслевой структуры	Условия		
	Неблагоприятные	Средние	Благоприятные
1 вариант	12,7	17,5	26,6
2 вариант	10,5	13,5	27,4
3 вариант	14,1	15,2	19,8
4 вариант	13,1	16,2	24,2
5 вариант	10,2	14,8	27,2

Вероятность наступления того или иного исхода неизвестна.

Из совокупности имеющихся стратегий необходимо выбрать оптимальную.

Алгоритмы решения задачи выбора стратегии.

Существует целый ряд критериев, позволяющих осуществлять выбор стратегии в условиях неопределенности: критерий Вальда, критерий нейтрального игрока, критерий азартного игрока, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица и др.

Критерий Вальда (максиминный критерий). Использование этого критерия выбора стратегии считается прерогативой игрока, который, в первую очередь, стремится не выиграть, а не проиграть. Его позицию можно выразить поговоркой: «Лучше синица в руках, чем журавль в небе».

Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_o = \left\{ B_j \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \min_i r_{ij} \right\}$$

Алгоритм выбора решения: матрица решений дополняется столбцом из наименьших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$A = \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12{,}7 \\ 10{,}5 \\ 14{,}1 \\ 13{,}1 \\ 10{,}2 \end{bmatrix}$$

В соответствии с максиминным критерием наилучшей является стратегия №3, позволяющая получить максимально возможный выигрыш при неблагоприятных условиях.

Критерий нейтрального игрока. Нейтральным считается игрок, который не стремится ни рисковать, ни осторожничать. Его позицию можно выразить фразой: «Золотая середина». Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_{ij} \right\}$$

Алгоритм выбора решения: матрица решений дополняется столбцом из среднеарифметических значений элементов для каждой строки. Затем из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$A = \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18{,}9 \\ 17{,}1 \\ 16{,}4 \\ 17{,}8 \\ 17{,}4 \end{bmatrix}$$

В соответствии с критерием нейтрального игрока наилучшей является стратегия №1, ориентированная на получение усредненной суммы прибыли.

Критерий азартного игрока. Азартным считается игрок, готовый ради максимального выигрыша идти на любой риск. Его позицию можно выразить фразой: «Все или ничего». Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \max_i r_{ij} \right\}$$

Алгоритм выбора решения: матрица решений дополняется столбцом из наибольших элементов каждой строки. Затем из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$A = \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26{,}6 \\ 27{,}4 \\ 19{,}8 \\ 24{,}2 \\ 27{,}2 \end{bmatrix}$$

В соответствии с критерием азартного игрока наилучшей является стратегия №2, позволяющая рассчитывать на получение максимально возможного выигрыша.

Критерий Сэвиджа. Данный критерий часто называют критерием минимального риска или критерием минимизации сожалений. Сожаление - это величина, равная изменению полезности решения (результата) при данном текущем состоянии среды относительно наилучшего возможного состояния (для данного решения). Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_O = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \min_j \left[\max_i (\max_j r_{ij} - r_{ij}) \right] \right\}$$

Алгоритм выбора решения: в каждом столбце определяется максимальное значение элементов. Затем матрица исходов преобразуется в матрицу рисков, элементы которой находятся как разница между максимальным элементом для соответствующего столбца и текущим элементом. После этого в каждой строке определяется максимальный элемент, а из совокупности этих элементов определяется минимальный.

$$\begin{array}{ccc} 14{,}1 & 17{,}5 & 27{,}4 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}0 & 0{,}8 \\ 3{,}6 & 4{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 2{,}3 & 7{,}6 \\ 1{,}0 & 1{,}3 & 3{,}2 \\ 3{,}9 & 2{,}7 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}4 \\ 4{,}0 \\ 7{,}6 \\ 3{,}2 \\ 3{,}9 \end{bmatrix}$$

В соответствии с критерием Сэвиджа наилучшей является стратегия №1, позволяющая минимизировать величину максимального риска (отклонений от максимально возможных значений для каждого исхода).

Критерий Гурвица. Данный критерий предполагает компромисс между крайним оптимизмом и крайним пессимизмом. Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \left[\alpha \max_i r_{ij} + (1-\alpha) \min_i r_{ij} \right] \wedge 0 \le \alpha \le 1 \right\}$$

Алгоритм выбора решения: в каждой строке определяются максимальное и минимальное значение элементов. Затем находится сумма произведения весового коэффициента (α) на максимальное значение и произведения единицы за минусом весового коэффициента на минимальное значение по каждой строке. Весовой коэффициент α показывает в сторону оптимизма или пессимизма смещается приоритет игрока. При α =0,5 между оптимизмом и пессимизмом достигается паритет. В данном случае рассмотрим выбор стратегии при α =0,4, то есть при небольшом смещении приоритетов в сторону пессимизма.

Затем из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$A = \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \max \\ \begin{bmatrix} 26{,}6 \\ 27{,}4 \\ 19{,}8 \\ 24{,}2 \\ 27{,}2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \min \\ \begin{bmatrix} 12{,}7 \\ 10{,}5 \\ 14{,}1 \\ 13{,}1 \\ 10{,}2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 18{,}3 \\ 17{,}3 \\ 16{,}4 \\ 17{,}5 \\ 17{,}0 \end{bmatrix}$$

В соответствии с критерием Гурвица наилучшей является стратегия №4, позволяющая найти компромиссный вариант между оптимизмом и пессимизмом со смещением приоритетов в сторону пессимизма.

Задание для самостоятельной работы

Используя условия предлагаемых вариантов, выбрать наилучшие стратегии развития системы по критериям Вальда, нейтрального игрока, азартного игрока, Сэвиджа, Гурвица (α =0,3).

Таблица 40. Исходные данные для решения задачи выбора стратегии в условиях неопределенности

№ варианта	Стратегии	Условия			№ варианта	Стратегии	Условия		
		Неблагоприятные	Средние	Благоприятные			Неблагоприятные	Средние	Благоприятные
1	Стратегия №1	12,7	15,2	18,2	2	Стратегия №1	14,0	18,2	20,9
	Стратегия №2	10,5	14,8	20,5		Стратегия №2	11,6	17,8	23,6
	Стратегия №3	9,6	16,8	17,5		Стратегия №3	10,6	20,2	20,1
	Стратегия №4	13,1	16,2	18,1		Стратегия №4	14,4	19,4	20,8
	Стратегия №5	10,2	16,8	20,0		Стратегия №5	11,2	20,2	23,0
3	Стратегия №1	8,0	16,2	22,2	4	Стратегия №1	8,8	19,4	25,5
	Стратегия №2	14,2	14,8	15,5		Стратегия №2	15,6	17,8	17,8
	Стратегия №3	13,8	15,5	20,3		Стратегия №3	15,2	18,6	23,3
	Стратегия №4	15,2	18,2	21,2		Стратегия №4	16,7	21,8	24,4
	Стратегия №5	10,2	12,3	20,0		Стратегия №5	11,2	14,8	23,0
5	Стратегия №1	10,4	15,7	20,2	6	Стратегия №1	11,4	18,8	23,2
	Стратегия №2	12,4	14,8	18,0		Стратегия №2	13,6	17,8	20,7
	Стратегия №3	11,7	16,2	18,9		Стратегия №3	12,9	19,4	21,7
	Стратегия №4	14,2	17,2	19,7		Стратегия №4	15,6	20,6	22,6
	Стратегия №5	10,2	14,6	20,0		Стратегия №5	11,2	17,5	23,0
7	Стратегия №1	9,2	16,0	21,2	8	Стратегия №1	10,1	19,1	24,4
	Стратегия №2	13,3	14,8	16,8		Стратегия №2	14,6	17,8	19,3
	Стратегия №3	12,8	15,9	19,6		Стратегия №3	14,0	19,0	22,5
	Стратегия №4	16,2	17,7	20,5		Стратегия №4	16,2	21,2	23,5
	Стратегия №5	11,2	13,5	20,0		Стратегия №5	11,2	16,1	23,0
9	Стратегия №1	9,8	17,4	20,7	10	Стратегия №1	10,8	20,9	23,8
	Стратегия №2	12,9	16,3	17,4		Стратегия №2	14,2	19,6	20,0
	Стратегия №3	12,3	17,7	19,3		Стратегия №3	13,5	21,2	22,2
	Стратегия №4	16,7	17,5	20,1		Стратегия №4	18,4	21,0	23,1
	Стратегия №5	11,8	14,1	20,0		Стратегия №5	13,0	16,9	23,0
11	Стратегия №1	12,4	16,7	21,0	12	Стратегия №1	13,6	20,0	24,2
	Стратегия №2	17,0	15,6	17,1		Стратегия №2	18,7	18,7	19,7
	Стратегия №3	16,3	16,8	19,5		Стратегия №3	17,9	20,2	22,4
	Стратегия №4	16,5	17,6	20,3		Стратегия №4	18,2	21,1	23,3
	Стратегия №5	11,5	13,8	20,0		Стратегия №5	12,7	16,6	23,0
13	Стратегия №1	11,1	17,1	20,9	14	Стратегия №1	12,7	15,2	18,2
	Стратегия №2	15,0	16,0	17,3		Стратегия №2	10,5	14,8	20,5
	Стратегия №3	14,3	17,3	19,4		Стратегия №3	15,7	20,7	22,3
	Стратегия №4	16,6	17,6	20,2		Стратегия №4	18,3	21,1	23,2
	Стратегия №5	11,7	14,0	20,0		Стратегия №5	12,8	16,7	23,0
15	Стратегия №1	11,8	16,9	25,1	16	Стратегия №1	13,2	17,6	21,2
	Стратегия №2	16,0	15,8	20,6		Стратегия №2	14,6	16,8	20,1
	Стратегия №3	15,3	17,1	23,3		Стратегия №3	16,8	20,4	22,4
	Стратегия №4	16,6	17,6	24,3		Стратегия №4	18,2	21,1	23,3
	Стратегия №5	11,6	13,9	20,0		Стратегия №5	12,7	16,6	23,0

№ варианта	Стратегии	Условия			№ варианта	Стратегии	Условия		
		Неблагоприятные	Средние	Благоприятные			Неблагоприятные	Средние	Благоприятные
17	Стратегия №1	11,5	17,0	23,0	18	Стратегия №1	13,0	16,4	19,7
	Стратегия №2	15,5	15,9	19,0		Стратегия №2	12,6	15,8	20,3
	Стратегия №3	14,8	17,2	21,4		Стратегия №3	16,3	20,6	22,4
	Стратегия №4	16,6	17,6	22,3		Стратегия №4	18,3	21,1	23,3
	Стратегия №5	11,7	14,0	20,0		Стратегия №5	12,8	16,7	23,0
19	Стратегия №1	11,7	17,0	24,1	20	Стратегия №1	13,1	17,0	20,5
	Стратегия №2	15,8	15,9	19,8		Стратегия №2	17,4	19,1	22,8
	Стратегия №3	15,1	17,2	22,4		Стратегия №3	16,6	20,6	25,8
	Стратегия №4	16,6	17,6	23,3		Стратегия №4	18,3	21,1	26,8
	Стратегия №5	11,7	14,0	20,0		Стратегия №5	12,9	16,8	23,0

Вопросы для самоконтроля

1. *Раскройте понятие риска и неопределенности.*
2. *Запишите формулу выбора стратегии по критерию Вальда.*
3. *Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию Вальда.*
4. *Запишите формулу выбора стратегии по критерию нейтрального игрока.*
5. *Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию нейтрального игрока.*
6. *Запишите формулу выбора стратегии по критерию азартного игрока.*
7. *Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию азартного игрока.*
8. *Запишите формулу выбора стратегии по критерию Сэвиджа.*
9. *Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию Сэвиджа.*
10. *Запишите формулу выбора стратегии по критерию Гурвица.*
11. *Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию Гурвица.*

4.2. Решение задачи выбора стратегии в условиях риска

Условие задачи

Имеются результаты реализации 5 вариантов экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства при благоприятных, средних и неблагоприятных условиях хозяйствования.

Таблица 41. Размер прибыли по вариантам отраслевой структуры при различных условиях хозяйствования

Варианты отраслевой структуры	Условия		
	Неблагоприятные	Средние	Благоприятные
1 вариант	12,7	17,5	26,6
2 вариант	10,5	13,5	27,4
3 вариант	14,1	15,2	19,8
4 вариант	13,1	16,2	24,2
5 вариант	10,2	14,8	27,2

Задана следующая вероятность наступления исходов: q1=0,2; q2=0,5; q3=0,3. Из совокупности имеющихся стратегий необходимо выбрать оптимальную.

Алгоритмы решения задачи выбора стратегии.

Существует целый ряд критериев, позволяющих осуществлять выбор стратегии в условиях риска: критерий Байеса-Лапласа, расширенный максиминный критерий, критерий Ходжа–Лемана, критерий Гермейера и др.

Критерий Байеса-Лапласа. Данный критерий учитывает вероятность q_j проявления внешнего состояния Y_j. Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \sum_{i=1}^{n} r_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{m} q_j = 1 \right\}$$

Алгоритм выбора решения: матрица решений дополняется столбцом из математических ожиданий значений каждой из строк матрицы (сумма произведений элемента матрицы и вероятности события для каждого столбца). Затем из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} q_1=0{,}2 & q_2=0{,}5 & q_3=0{,}3 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19{,}3 \\ 17{,}1 \\ 16{,}4 \\ 18{,}0 \\ 17{,}6 \end{bmatrix} \end{array}$$

В соответствии с критерием Байеса-Лапласа наилучшей является стратегия №1, позволяющая найти вариант, обеспечивающий максимальное получение прибыли с учетом вероятности наступления каждого из трех возможных исходов.

Расширенный максиминный критерий. Данный критерий определяет долгосрочную стратегию осторожного игрока. Позволяет наряду с вероятностью наступления исходов учесть вероятность применения той или иной стратегии. Математически этот критерий записывается как:

$$B(p_o) = \left\{ B(p_o) \middle| B(p_o) \in B \wedge r(p_o q_o) = \max_p \min_q \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} p_i q_j \wedge \sum_{1}^{n} p_i = \sum_{1}^{m} q_j = 1 \right\}$$

Алгоритм выбора решения: формируется новая матрица путем нахождения произведения значений элементов исходной матрицы, вероятности исхода (q_j) и вероятности выбора стратегии (p_i). Затем для каждой строки новой матрицы выбирается минимальный элемент, а из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} q_1=0{,}2 & q_2=0{,}5 & q_3=0{,}3 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} p_1 = 0{,}15 \\ p_2 = 0{,}25 \\ p_3 = 0{,}10 \\ p_4 = 0{,}35 \\ p_5 = 0{,}15 \end{array} \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 1{,}3 & 1{,}2 \\ 0{,}5 & 1{,}7 & 2{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 2{,}8 & 2{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}9 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array}$$

В соответствии с расширенным максиминным критерием наилучшей является стратегия №4, позволяющая найти вариант, обеспечивающий максимальное получение прибыли в самых неблагоприятных условиях.

Критерий Ходжа–Лемана. С помощью параметра γ в этом критерии оценивается степень доверия к используемому распределению вероятностей. Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \left[\gamma \sum_{i=1}^{n} r_{ij} q_j + (1-\gamma) \min_i r_{ij} \right] \wedge 0 \le \gamma \le 1 \right\}$$

Алгоритм выбора решения: находится сумма произведений математических ожиданий значений каждой из строк матрицы с коэффициентом доверия γ и минимальных элементов каждой строки с разницей между единицей и коэффициентом доверия γ. Затем из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$\begin{array}{cccccc} q_1=0{,}2 & q_2=0{,}5 & q_3=0{,}3 & M[r_{ij}] & \min_i & \text{при } \gamma=0{,}2 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 12{,}7 & 17{,}5 & 26{,}6 \\ 10{,}5 & 13{,}5 & 27{,}4 \\ 14{,}1 & 15{,}2 & 19{,}8 \\ 13{,}1 & 16{,}2 & 24{,}2 \\ 10{,}2 & 14{,}8 & 27{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19{,}3 \\ 17{,}1 \\ 16{,}4 \\ 18{,}0 \\ 17{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12{,}7 \\ 10{,}5 \\ 14{,}1 \\ 13{,}1 \\ 10{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14{,}0 \\ 11{,}8 \\ 14{,}6 \\ 14{,}1 \\ 11{,}7 \end{bmatrix}$$

В соответствии с критерием Ходжа–Лемана наилучшей является стратегия №3, позволяющая найти вариант, обеспечивающий максимальное получение прибыли с учетом степени доверия к используемому распределению вероятностей.

Критерий Гермейера. Данный критерий оценивает возможные величины потерь. При использовании данного критерия исходную матрицу необходимо преобразовать в матрицу, в которой все элементы имеют отрицательное значение (из каждого элемента вычитается любое число, большее максимального из всех элементов). Математически этот критерий можно записать следующим образом:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \min_i r_{ij} q_j \wedge r_{ij} < 0 \right\}$$

Алгоритм выбора решения: матрица решений (A) преобразуется в матрицу P_0 с отрицательными элементами (преобразование матрицы происходило путем вычитания каждого элемента из 30). Затем формируется матрица P_1, элементы которой рассчитываются как произведение текущего элемента преобразованной матрицы P_0 и вероятности состояния Y_j. Затем в каждой строке находится минимальный элемент, а из совокупности этих элементов определяется максимальный.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1=0,2 & q_2=0,5 & q_3=0,3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12,7 & 17,5 & 26,6 \\ 10,5 & 13,5 & 27,4 \\ 14,1 & 15,2 & 19,8 \\ 13,1 & 16,2 & 24,2 \\ 10,2 & 14,8 & 27,2 \end{bmatrix} \end{array} P_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1=0,2 & q_2=0,5 & q_3=0,3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -17,3 & -12,5 & -3,4 \\ -19,5 & -16,5 & -2,6 \\ -15,9 & -14,8 & -10,2 \\ -16,9 & -13,8 & -5,8 \\ -19,8 & -15,2 & -2,8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -3,5 & -6,3 & -1,0 \\ -3,9 & -8,3 & -0,8 \\ -3,2 & -7,4 & -3,1 \\ -3,4 & -6,9 & -1,7 \\ -4,0 & -7,6 & -0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6,3 \\ -8,3 \\ -7,4 \\ -6,9 \\ -7,6 \end{bmatrix}$$

В соответствии с критерием Гермейера наилучшей является стратегия №1, позволяющая найти вариант, обеспечивающий минимизацию возможных потерь.

Задание для самостоятельной работы

Используя исходные данные вариантов раздела 4.1. настоящего практикума, выбрать наилучшие стратегии развития системы по критериям: Байеса-Лапласа, расширенного максиминного, Ходжа-Лемана, Гермейера.

Задана следующая вероятность наступления исходов: q_1=0,25; q_2=0,60; q_3=0,15.

При применении расширенного максиминного критерия использовать следующие вероятности выбора стратегий: p_1=0,10; p_2=0,15; p_3=0,25; p_4=0,35; p_5=0,15.

При выборе стратегии с помощью Критерий Ходжа–Лемана степень доверия к используемому распределению вероятностей оценивается на уровне γ=0,35.

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулу выбора стратегии по критерию Байеса-Лапласа.

2. Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию Байеса-Лапласа.

3. Запишите формулу выбора стратегии по расширенному максиминному критерию.

4. Раскройте алгоритм выбора стратегии по расширенному максиминному критерию.

5. Запишите формулу выбора стратегии по критерию Ходжа-Лемана.

6. Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию Ходжа-Лемана.

7. Запишите формулу выбора стратегии по критерию Гермейера.

8. Раскройте алгоритм выбора стратегии по критерию Гермейера.

5. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

5.1. Элементы теории графов

Экономические задачи, связанные с нахождением наилучшей последовательности действий для достижения цели, удобно представлять для восприятия и анализа в виде графов. Граф – диаграмма точек и линий, где каждая точка называется вершиной или узлом, а каждая линия – ребром или дугой.

С точки зрения математической логики, граф – совокупность двух конечных множеств G:= (V, E), где

V – непустое множество вершин;

E – множество ребер (пар вершин).

Если каждому ребру графа присвоено направление, т.е. возможность двигаться лишь в одну из сторон по направлению от одной вершины к другой, он называется ориентированным графом или оргарафом (рис. 20). Если ребрам графа присвоены какие-либо оценки, означающие, например, расстояние, время работы и т.п. граф называется взвешенным или нагруженным (рис. 21). Граф одновременно может быть и ориентированным, и взвешенным (рис. 22).

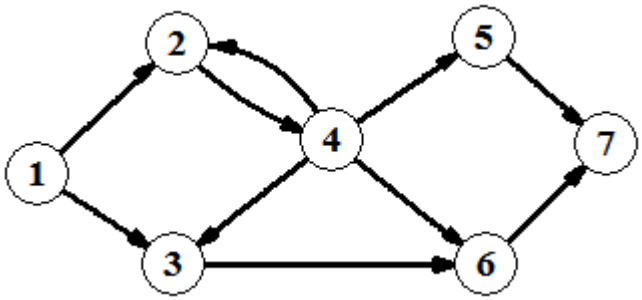


Рисунок 20. Пример ориентированного графа

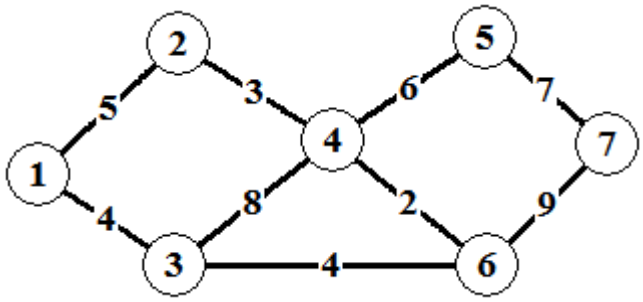


Рисунок 21. Пример взвешенного графа

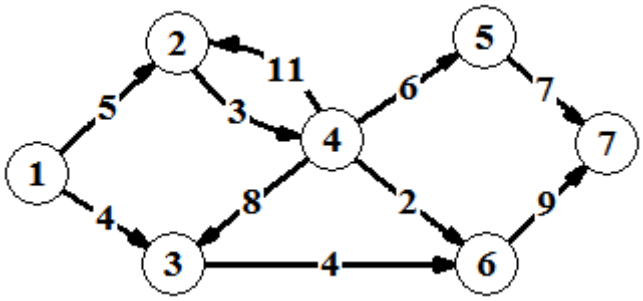


Рисунок 22. Пример ориентированного взвешенного графа

Путем или маршрутом в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей ребром (рис. 23).

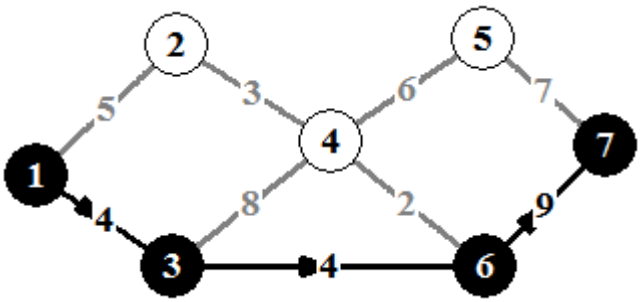


Рисунок 23. Путь от вершины 1 к вершине 7 (1-3-6-7, общая протяженность – 17)

Циклом называется путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают:

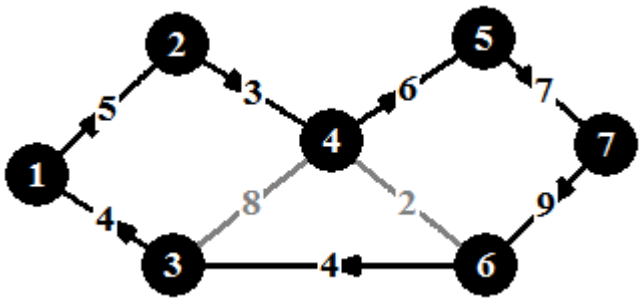


Рисунок 24. Цикл 1-2-4-5-7-6-3-1 (протяженность – 38)

Под сетевой моделью (сетевым графиком) понимается граф, вершины которого отображают состояния (характеристики) некоторого объекта (например, строительного объекта, дорожной сети и т.д.), а дуги - работы (процессы), связанные с этим объектом. Каждой дуге соответствует показатель (время, расстояние и т.д.), характеризующий работу (процесс). Для разных областей применения виды графов могут различаться направленностью, ограничениями на количество связей и дополнительными данными о вершинах или рёбрах. В зависимости от задач управления применяют различные типы сетевых моделей, отличающиеся составом информации о комплексе работ (процессов). Среди них можно выделить два основных типа: модели с учетом только временных характеристик (ограничения на ресурсы не накладываются) и модели с учетом временных и ресурсных характеристик.

Модели первого типа не являются оптимизационными. Их применение позволяет найти минимальное время, в течение которого может быть выполнен весь комплекс работ, и определить календарные сроки начала и окончания каждой работы.

Модели второго типа относятся к задачам распределения ресурсов. Эти задачи являются оптимизационными и встречаются в разных постановках. В зависимости от принятого критерия оптимальности и характера ограничений их можно разбить на две основные группы:

- задачи минимизации сроков наступления завершающего события при соблюдении заданных ограничений на использование ресурсов;

- задачи оптимизации некоторого показателя качества использования ресурсов при заданных сроках выполнения комплекса. К этой группе относится, в частности, задача минимизации ресурсов при заданном времени выполнения комплекса работ.

Частным случаем сетевых моделей являются модели определения оптимального маршрута при различных условиях его формирования.

Наиболее распространенными сетевыми задачами, решаемыми при помощи графов, являются:

- поиск кратчайших путей в сети;
- поиск наиболее длинных (критических) путей;
- поиск остовных (стягивающих) деревьев;
- поиск оптимальных циклов;
- поиск оптимальных способов передачи потоков через сеть;
- оптимизация структуры сети.

Основными направлениями прикладного использования сетевых моделей являются: транспортные задачи, технологические задачи, обменные схемы, управление проектами, моделирование коллективов и групп, моделирование организационных структур, составление расписаний и графиков работ.

5.2. Задача нахождения кратчайшего пути на графе. Алгоритм Дейкстры.

Алгоритмы нахождения кратчайшего пути на графах применяются для решения транспортных задач, в которых требуется составить маршрут передвижения из одной заданной точки в другую, кратчайший по пройденному расстоянию или потраченному времени (планирование перевозок, спутниковая навигация, передача данных и т.п.). Кроме того, они широко применяются при составлении расписаний. В настоящее время существует целый ряд подобных алгоритмов, учитывающих специфику используемых графов – ориентированность, нагруженность, наличие отрицательных весов дуг. В него входят: алгоритм поиска A-star, алгоритм Беллмана-Форда, алгоритм Дейкстры, алгоритм Джонсона, алгоритм Ли, алгоритм Флойда-Уоршелла. Для решения большинства экономических задач можно использовать алгоритм Дейкстры, который позволяет найти кратчайший путь от одной из вершин графа до всех остальных при условии отсутствия ребер отрицательного веса.

При решении задачи при помощи алгоритма Дейкстры каждой из вершин графа присваивается метка, обозначающая минимальное расстояние (минимальный путь) от нее до начальной вершины. Алгоритм работает пошагово – на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены. На этапе инициализации алгоритма Дейкстры метка начальной вершины полагается равной 0, а метки всех остальных вершин – бесконечности, т.е. предполагается, что кратчайшие расстояния от них до начальной вершины неизвестны. Все вершины графа помечаются как непосещённые.

На этапе шага алгоритма проверяют, все ли вершины графа посещены. Если это так, то алгоритм завершается. В противном случае, из ещё не посещённых вершин выбирается вершина U, имеющая минимальную метку. Рас-

сматривают все всевозможные маршруты, в которых вершина U является предпоследним пунктом. Вершины, в которые ведут ребра из вершины U, называют соседями этой вершины. Для каждого соседа вершины U, кроме отмеченных как посещённые, рассматривается новая длина пути, равная сумме значений текущей метки вершины U и длины ребра, соединяющего вершину U с этим соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, значение метки соседа заменяется полученным значением длины. После рассмотрения всех соседей вершины U, она отмечается как посещенная, и шаг алгоритма повторяется.

Рассмотрим логику алгоритма Дейкстры на примере графа автодорожной сети, где вешинами моделируются перекрестки, а ребрами – дороги, соединяющие эти перекрестки (рис. 25). Граф является взвешенным, числовые характеристике ребер (веса) обозначают расстояния между перекрестками в километрах. Граф является неориентированным, т.е. разрешено двигаться между вершинами в любом порядке. Требуется найти кратчайший путь (маршрут) между начальной вершиной 1 и конечной вершиной 7.

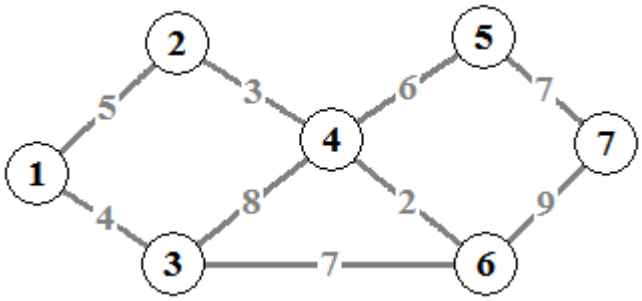


Рисунок 25. Взвешенный граф задачи

Инициализируем алгоритм (рис. 26). Присвоим вершине 1 метку 0 (это логично – так как кратчайшее расстояние от вершины 1 до вершины 1 равно нулю), всем остальным вершинам – метку бесконечность (т.е. мы предполагаем, что алгоритму неизвестно кратчайшее расстояние от вершины 1 к любой другой вершине).

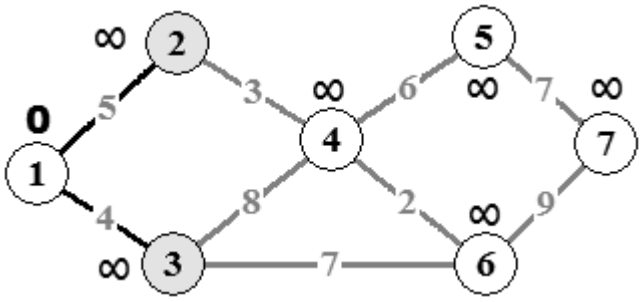


Рисунок 26. Соседи вершины 1

Шаг 1. Минимальную метку (0) из непосещенных вершин имеет вершина 1, она же и принимается в качестве вершины U. Ее непосредственными соседями являются вершины 2 и 3. Возможная длина пути из начальной вершины 1 к вершине 2 составляет 0+5 = 5, что меньше чем отметка вершины 2 (бесконечность). Таким образом, в качестве новой метки вершины 2 принимается 0+5 = 5. Возможная длина пути для из вершины 1 до вершины 3 составлет 0+5 = 4, что также меньше бесконечности. Таким образом, в качестве новой метки вершины

3 принимается 0+4 = 4. Новые метки вершин 2 и 3 наносятся на граф (рис. 27), а вершина 1 отмечается как посещенная.

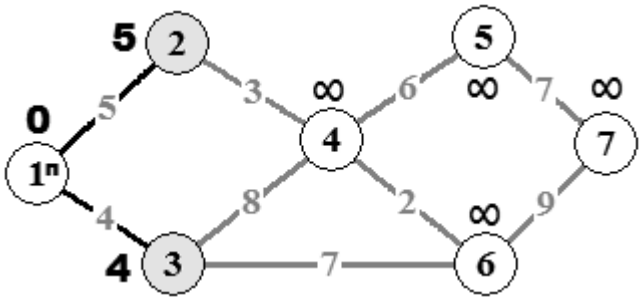


Рисунок 27. Результаты шага 1.

Шаг 2. Минимальную метку (4) из непосещенных вершин имеет вершина 3, она же и принимается в качестве вершины U. Ее непосредственными соседями являются вершины 4 и 6. Возможная длина пути из начальной вершины 1 к вершине 4 составляет 4+8 = 12, что меньше чем отметка вершины 4 (∞). Таким образом, в качестве новой метки вершины 4 принимается 12. Возможная длина пути для из вершины 1 до вершины 6 составлет 4+7 = 11 < ∞. Таким образом, в качестве новой метки вершины 6 принимается 11. Новые метки вершин 4 и 6 наносятся на граф (рис. 28), а вершина 3 отмечается как посещенная.

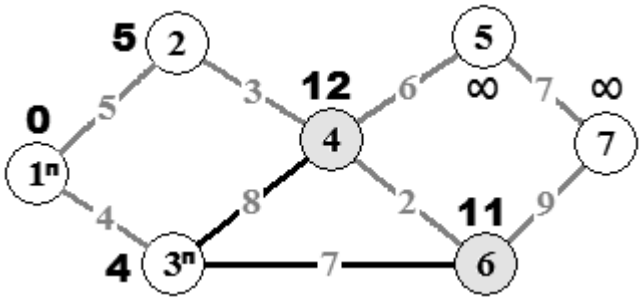


Рисунок 28. Результаты шага 2.

Шаг 3. Минимальную метку (5) из непосещенных вершин имеет вершина 2, она же и принимается в качестве вершины U. Ее непосредственным соседом является вершина 4. Возможная длина пути из начальной вершины 1 к вершине 4 (через вершину 2) составляет 5+3 = 8, что меньше чем отметка вершины 4 (12). Таким образом, в качестве новой метки вершины 4 принимается 8. Новая метка вершины 4 наносится на граф (рис. 29), а вершина 2 отмечается как посещенная.

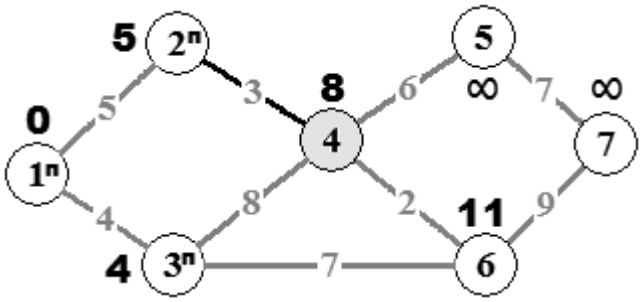


Рисунок 29. Результаты шага 3.

Шаг 4. Минимальную метку (8) из непосещенных вершин имеет вершина 4, она же и принимается в качестве вершины U. Ее непосредственными соседями являются вершины 5 и 6. Возможная длина пути из начальной вершины 1 к

вершине 5 составляет 8+6 = 14 < ∞. Таким образом, в качестве новой метки вершины 5 принимается 14. Возможная длина пути для из вершины 1 до вершины 6 (через вершину 4) составлет 8+2 = 10 < 11. Таким образом, в качестве новой метки вершины 6 принимается 10. Новые метки вершин 5 и 6 наносятся на граф (рис. 30), а вершина 4 отмечается как посещенная.

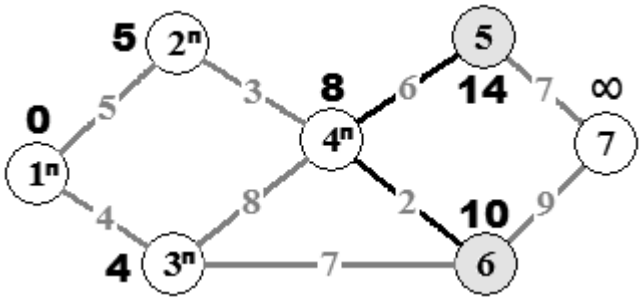


Рисунок 30. Результаты шага 4.

Шаг 5. Минимальную метку (10) из непосещенных вершин имеет вершина 6, она же и принимается в качестве вершины U. Ее непосредственным соседом являются вершина 7. Возможная длина пути из начальной вершины 1 к вершине 7 составляет 10+9 = 19 < ∞. Таким образом, в качестве новой метки вершины 7 принимается 19. Новая метка вершины 7 наносится на граф (рис. 31), а вершина 6 отмечается как посещенная.

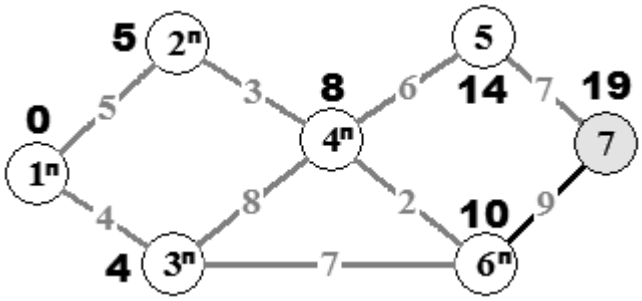


Рисунок 31. Результаты шага 5.

Шаг 6. Минимальную метку (14) из непосещенных вершин имеет вершина 5, она же и принимается в качестве вершины U. Ее непосредственным соседом являются вершина 7. Возможная длина пути из начальной вершины 1 к вершине 7 (через вершину 5) составляет 14+7 = 21 > 19. Таким образом, старая метка вершины 7 сохраняется равной 19. Вершина 5 отмечается как посещенная (рис. 32).

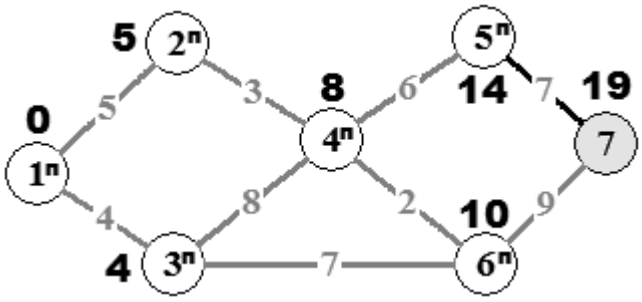


Рисунок 32. Результаты шага 6.

Вершину 7 можно также считать посещенной, т.к. она является конечной. Таким образом, все вершины графа посещены, и кратчайшим расстоянием от

начальной вершины 1 до конечной вершины 7 равняется 19 км. Это расстояние соответствует маршруту 1-2-4-6-7 (5+3+2+9 = 19 км), рис. 33.

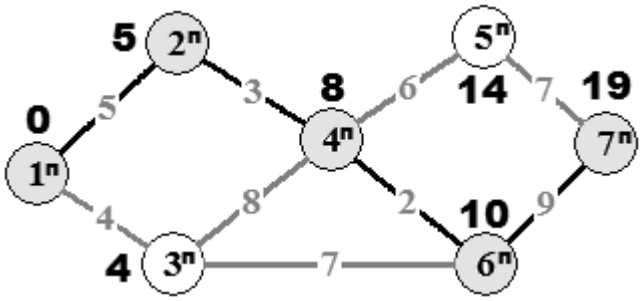


Рисунок 33. Результаты решения: кратчайший путь 1-2-4-6-7 равен 19 км.

5.3. Задача нахождения минимального остовного дерева. Алгоритм Прима

Остовное дерево – ациклический связный подграф данного связного неориентированного графа, в который входят все его вершины. Неформально говоря, остовное дерево состоит из некоторого подмножества ребер графа, таких, что из любой вершины графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим ребрам, и в нем нет циклов, то есть из любой вершины нельзя попасть в саму себя, не пройдя какое-то ребро дважды. Минимальное остовное дерево – это остовное дерево графа, имеющее минимальный возможный вес, где под весом дерева понимается сумма весов входящих в него ребер.

Задача о нахождении минимального остовного дерева часто встречается в подобной постановке: допустим, есть N городов, которые необходимо соединить дорогами, так, чтобы можно было добраться из любого города в любой другой (напрямую или через другие города). Разрешается строить дороги между заданными парами городов и известна стоимость строительства каждой такой дороги. Требуется решить, какие именно дороги нужно строить, чтобы минимизировать общую стоимость строительства. Эта задача может быть сформулирована в терминах теории графов как задача о нахождении минимального остовного дерева в графе, вершины которого представляют города, ребра – это пары городов, между которыми можно проложить прямую дорогу, а вес ребра равен стоимости строительства соответствующей дороги.

Одним из алгоритмов, позволяющий находить минимальные остовные деревья графов, является алгоритм Прима. При решении задачи при помощи алгоритма Прима для каждого ребра неориентированного графа задается его вес. В качестве начальной вершины принимается любая произвольная и находится минимальное по весу исходящее из начальной вершины ребро. Найденное ребро и соединяемые им две вершины образуют дерево. Затем, рассматриваются ребра графа, один конец которых – уже принадлежащая дереву вершина, а другой – нет; из этих ребер выбирается ребро с минимальным весом. Выбираемое на каждом шаге ребро присоединяется к дереву. Таким образом, при выполнении каждого шага алгоритма, высота формируемого дерева увеличивается на 1. Рост дерева происходит до тех пор, пока не будут исчерпаны все вершины исходного графа. Результатом работы алгоритма является остовное дерево минимальной стоимости.

Рассмотрим логику алгоритма Прима на примере графа потенциальной

автодорожной сети, где вершинами моделируются населенные пункты, а ребрами – дороги с асфальтовым покрытием, которые можно построить между ними (рис. 34). Граф является взвешенным, числовые характеристике ребер (веса) обозначают расстояния между населенными пунктами в километрах. Граф является неориентированным, т.е. разрешено строить дороги между вершинами в любом направлении. Требуется найти минимальную по суммарной длиннее асфальтированную автодорожную сеть, которая соединила бы все населенные пункты между собой (т.е. найти минимальное остовное дерево).

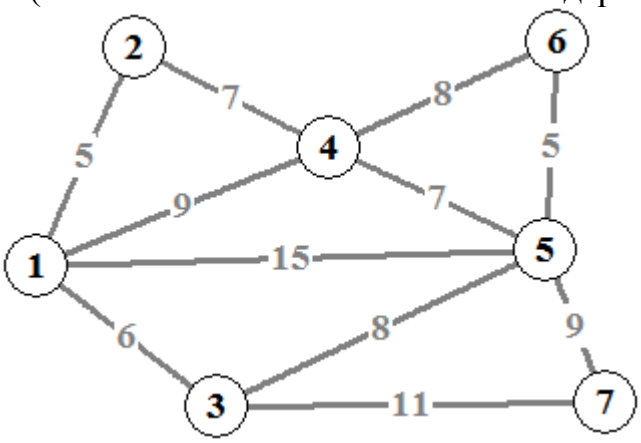


Рисунок 34. Взвешенный граф задачи

Наиболее очевидным с точки зрения обыденной длогики решением кажется прокладка асфальтированной дороги для всех альтернатив (т.е. по всем ребрам графа). В таком случае общая длина асфальтированной автодорожной сети составит 5+9+15+6+7+7+8+11+8+5+9 = 90 км. Однако использование сетевой модели с алгоритмом Прима позволит существенно сократить эту цифру.

Шаг 1. В качестве начальной вершины дерева принимается вершина 1. Отмечаются исходящие из нее ребра (1-2, 1-4, 1-5, 1-3), среди которых выбирается наименьшее по весу (1-2, вес 5). Это ребро станет первой ветвью минимального остовного дерева (рис. 35).

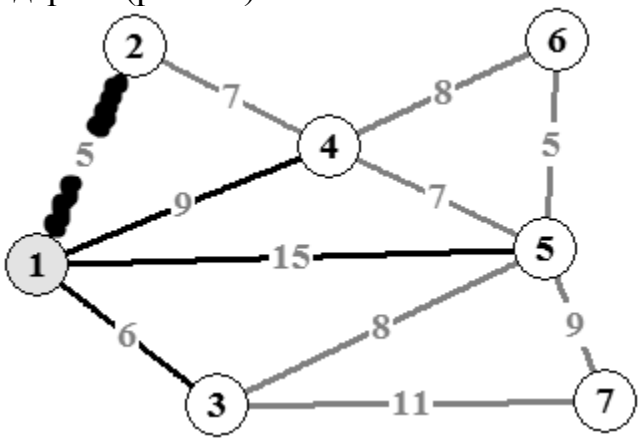


Рисунок 35. Результаты шага 1.

Шаг 2. К дереву добавилась вершина 2, т.к. это конечная вершина первой ветви дерева. Отмечается исходящее из нее ребро (2-4), которое добавляется к группе ребер, исходящих из вершины 1 (1-4, 1-5, 1-3). Из этой совокупности выбирается наименьшее по весу (1-3, вес 6). Это ребро станет второй ветвью минимального остовного дерева (рис. 36)

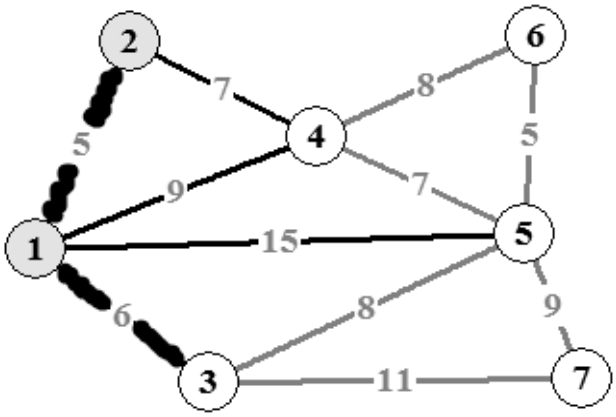


Рисунок 36. Результаты шага 2.

Шаг 3. К дереву добавилась вершина 3, т.к. это конечная вершина второй ветви дерева. Отмечаются исходящие из нее ребра (3-4, 3-7), которые добавляются к группе ребер, исходящих из вершин 1 и 2. Из этой совокупности выбирается наименьшее по весу (2-4, вес 7). Это ребро станет третьей ветвью минимального остовного дерева (рис. 37)

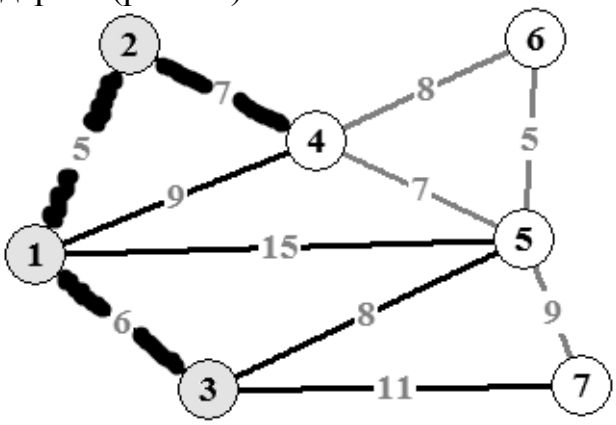


Рисунок 37. Результаты шага 3.

Шаг 4. К дереву добавилась вершина 4, т.к. это конечная вершина третьей ветви дерева. Отмечаются исходящие из нее ребра (4-5, 4-6), которые добавляются к группе ребер, исходящих из вершин 1, 2 и 3. Из этой совокупности выбирается наименьшее по весу (4-5, вес 7). Это ребро станет четвертой ветвью минимального остовного дерева (рис. 38)

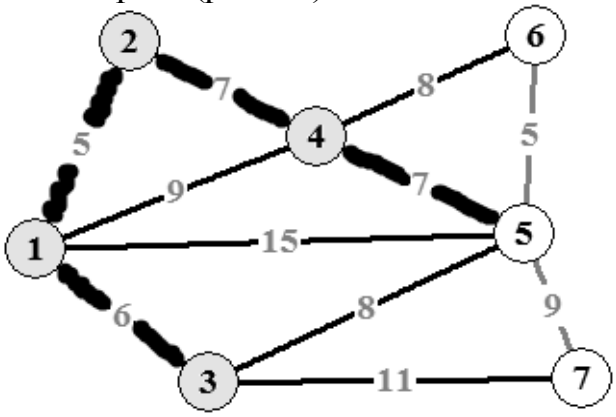


Рисунок 38. Результаты шага 4.

Шаг 5. К дереву добавилась вершина 5, т.к. это конечная вершина четвертой ветви дерева. Отмечаются исходящие из нее ребра (5-6, 5-7), которые до-

бавляются к группе ребер, исходящих из вершин 1, 2, 3 и 4. Из этой совокупности выбирается наименьшее по весу (5-6, вес 5). Это ребро станет пятой ветвью минимального остовного дерева (рис. 39)

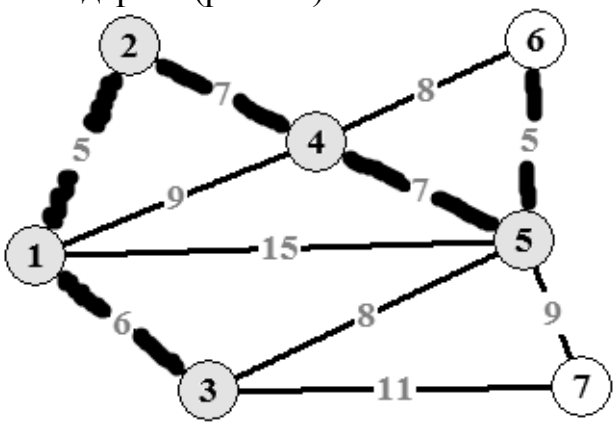


Рисунок 39. Результаты шага 5.

Шаг 6. К дереву добавилась вершина 6, т.к. это конечная вершина пятой ветви дерева. На графе видно, что единственная вершина, которая еще не вошла в минимальное остовное дерево – вершина 7. Отмечаются исходящие из нее ребра (7-3, 7-5), из которых выбирается наименьшее по весу (7-5, вес 9) (рис. 40).

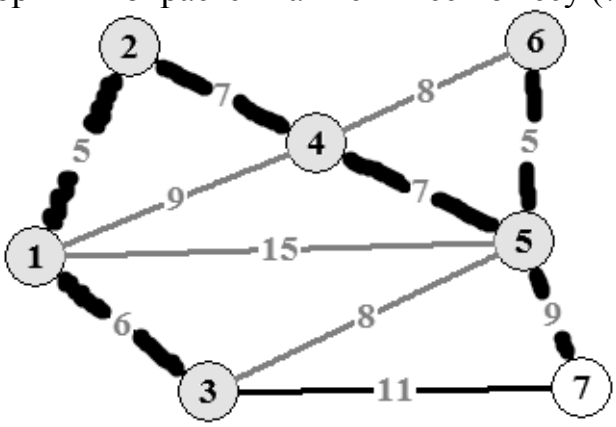


Рисунок 40. Результаты шага 6.

Это ребро станет шестой и последней ветвью минимального остовного дерева. Таким образом, минимальное остовное дерево графа составили ребра 1-2, 1-3, 2-4, 4-5, 5-6 и 5-7, которые имеют общий суммарный вес в 39 км (рис. 41).

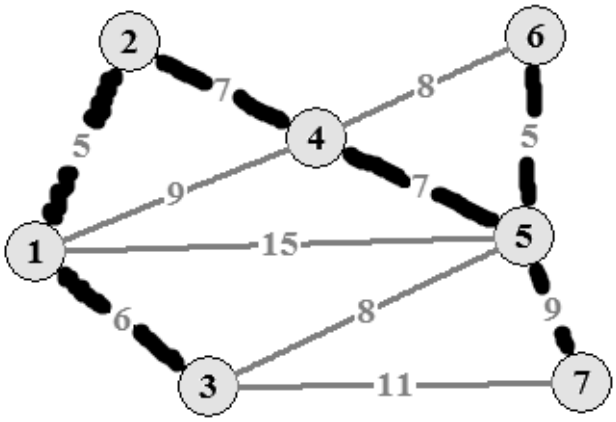


Рисунок 41. Результаты решения: минимальное остовное дерево, общий вес 39 км.

5.4. Экономико-математическая модель по оптимизации маршрута дви-

жения транспортных средств. Линейное программирование.

Постановка задачи и подготовка входной информации

Необходимо найти наиболее короткий маршрут доставки продукции из сельскохозяйственного предприятия (Пункт 1) на перерабатывающее (Пункт 15). Пунктами 2-14 отмечены все развилки и перекрестки дорог, на которых можно менять направление движения (рис. 42).

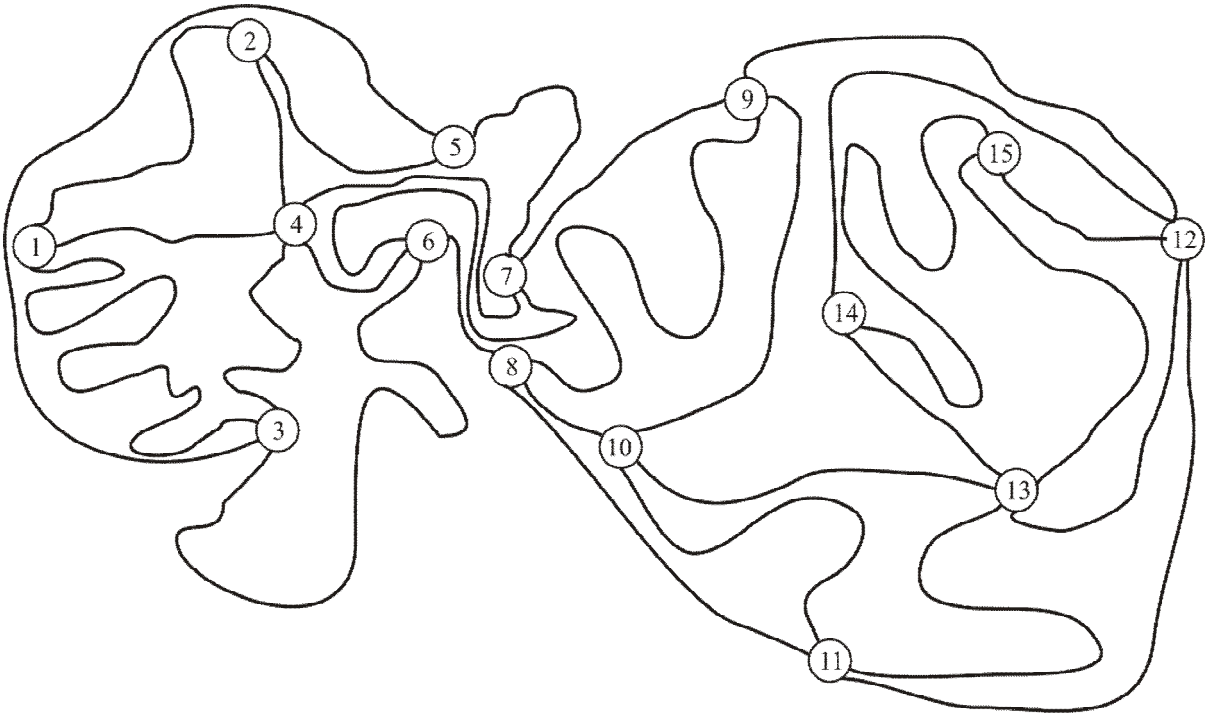


Рисунок 42. Карта автодорожной сети

Расстояния между пунктами известны и представлены в виде матрицы в таблице 35 ($C_{i\text{-}j}$, где i – номер пункта отправления, а j – номер пункта прибытия). Решение задачи нахождения кратчайшего пути при помощи методов линейного программирования требует ориентировать ребра графа, для того, чтобы соблюсти баланс между количеством въездов и выездов в одну и ту же вершину.

Таблица 42. Расстояния между пунктами дорожной сети, км

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		9,0	16,1	7,0											
2	9,0			6,5	8,1										
3	16,1			9,4	16,3	16,0									
4	7,0	6,5	9,4			6,9	10,0								
5		8,1	16,3				7,0	14,2							
6			16,0	6,9			9,0	4,2							
7				10,0	7,0	9,0		11,5	7,8						
8					14,2	4,2	11,5		18,4	5,0	12,9				
9							7,8	18,4		18,5		12,1			
10								5,0	18,5		18,5		13,7		
11								12,9		18,5		18,8	13,5		
12									12,1		18,8		11,5	15,2	6,7
13										13,7	13,5	11,5		7,0	16,0
14												15,2	7,0		16,0
15												6,7	16,0	16,0	

Построение экономико-математической модели

Задачу по оптимизации маршрута легко представить в виде сети, так как каждое перемещение из пункта отправки в пункт прибытия является направленным и представляет собой дугу, а сами пункты в таком случае, представляют вершины сети (сетью называется ориентированный граф, в котором существует лишь одна вершина, не имеющая входящих дуг, и лишь одна вершина, не имеющая выходящих дуг).

Карта, приведенная на рис. 42, по своей сути сама является сетью, но сеть удобнее представлять в упрощенном виде, не соблюдая масштабов и пропорций, а указывая только связи между вершинами. (рис. 43).

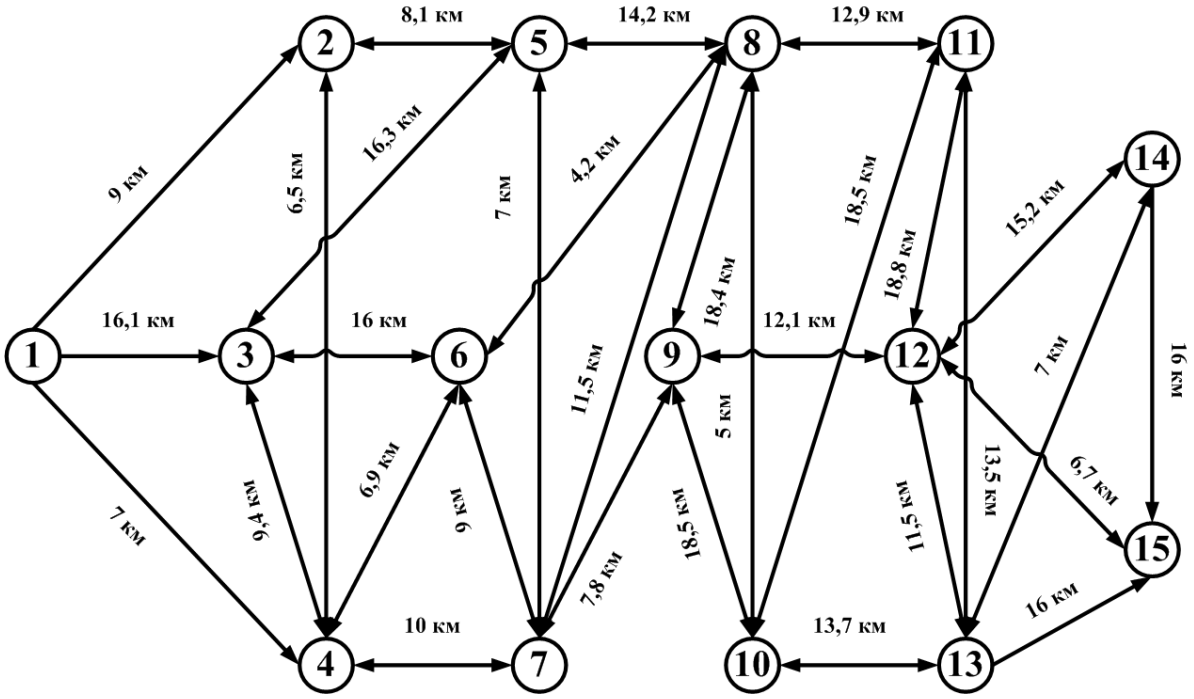


Рисунок 43. Сеть поставленной задачи по оптимизации маршрута

Пункты пронумерованы в порядке «слева-направо, сверху-вниз». Стрелки на концах дуг указывают направления, в которых может происходить перемещение транспорта из одного пункта в другой. В целях упрощения расчетов будем считать, что перемещение обратно в пункт 1 из пунктов 2, 3 и 4 невозможно (так как не соответствует требованиям задачи); также невозможен выезд из пункта 15 (так как цель уже достигнута). Рядом с каждой дугой указана ее характеристика (в данном случае – расстояние между пунктами в километрах).

Для решения задач оптимизации маршрута разработаны несколько методов: метод полного перебора вариантов, метод ветвей и границ, метод Дейкстры и т.д. Но для выполнения вручную они требуют значительных затрат времени, а для автоматизированного решения – специальных программных средств.

Практически любую сетевую задачу оптимизации маршрута движения можно решить с помощью методов линейного программирования. В качестве переменных в данной задаче принимаются передвижения по дугам. Например, передвижение из пункта 2 в пункт 4 будет обозначено переменной $X_{2\text{-}4}$, а переезд из пункта 4 в пункт 2 – переменной $X_{2\text{-}4}$. Таким образом, дуге с двумя стрел-

ками на концах будут соответствовать две переменные, дуге с одной стрелкой – одна переменная. Переменные в этой задаче – булевого (двоичного) типа, они принимают значение 0, если перемещение по дуге состоялось, и значение 1, если перемещения не было.

Таким образом, выезд транспортного средства из пункта 1 может быть описан в следующем виде:

$$X_{1-2} + X_{1-3} + X_{1-4} = 1.$$

Так как переменная булева, то лишь одна из трех переменных примет значение 1. Например, если $X_{1-3} = 1$, то транспортное средство переместится из пункта 1 в пункт 3.

Проезд через остальные пункты будет обеспечен уравнениями следующего вида (пример - уравнение для пятого пункта):

$$X_{5-2} + X_{5-3} + X_{5-7} + X_{5-8} = X_{2-5} + X_{3-5} + X_{7-5} + X_{8-5}.$$

По этому условию количество выездов из 5 пункта (во 2, 3, 7 или 8 пункт) равно количеству въездов в него (из 2, 3, 7 или 8 пункта). В левой, как и в правой части уравнения, лишь одна переменная может принять значение 1. Например, $X_{5-8} = 1$ и $X_{3-5} = 1$, таким образом, в пятый пункт транспорт прибыл из третьего, а уедет – в восьмой. Для простоты реализации этих уравнений в «Поиске решения» перенесем переменные из правой части в левую:

$$X_{5-2} + X_{5-3} + X_{5-7} + X_{5-8} - X_{2-5} - X_{3-5} - X_{7-5} - X_{8-5} = 0.$$

Достижение конечного (пятнадцатого) пункта будет реализовано следующим уравнением:

$$X_{12-15} + X_{13-15} + X_{14-15} = 1.$$

Целевая функция данной задачи представляет собой пройденное расстояние, находимое как сумма произведений расстояний между пунктами на количество переездов между ними (0 или 1):

$$Z_{\min} = 9X_{1-2} + 16{,}1X_{1-3} + \ldots + 16X_{14-15}.$$

В структурном виде данная задача записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1} X_{i-j} = 1 \quad (j \in \{1,2,...,n\}) \\ \sum\limits_{i=2}^{n-1} X_{i-j} - \sum\limits_{i=2}^{n-1} X_{(i=j)-(j=i)} = 0 \quad (j \in \{2,3,...,n\}) \\ \sum\limits_{i=n} X_{(i=j)-(j=i)} = 1 \quad (j \in \{1,2,...,n\}) \\ X_{ij} \in \{0,1\} \\ Z_{\min} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} C_{i-j} X_{i-j} \end{cases}$$

где n – количество вершин сети (или номер конечного пункта назначения), C_{i-j} – вес дуги i-j (расстояние от i-го пункта до j-го пункта).

Сетевая модель в матричной форме приведена в таблице 43.

Таблица 43. Модель по оптимизации маршрута движения в матричной форме

№	1-2	1-3	1-4	2-4	2-5	3-4	3-5	3-6	4-2	4-3	4-6	4-7	5-2	5-3	5-7	5-8	6-3	6-4	6-7	6-8
1	1	1	1																	
2	-1			1	1				-1				-1							
3		-1				1	1	1		-1				-1			-1			
4			-1	-1		-1			1	1	1	1						-1		
5					-1		-1						1	1	1	1				
6								-1			-1						1	1	1	1
7												-1			-1				-1	
8																-1				-1
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
Z	9,0	16,1	7,0	6,5	8,1	9,4	16,3	16,0	6,5	9,4	6,9	10,0	8,1	16,3	7,0	14,2	16,0	6,9	9,0	4,2

Продолжение Таблицы 43

№	7-4	7-5	7-6	7-8	7-9	8-5	8-6	8-7	8-9	8-10	8-11	9-7	9-8	9-10	9-12	10-8	10-9	10-11	10-13	11-8
1																				
2																				
3																				
4	-1																			
5		-1				-1														
6			-1				-1													
7	1	1	1	1	1			-1				-1								
8				-1		1	1	1	1	1	1		-1			-1				-1
9					-1				-1			1	1	1	1		-1			
10										-1				-1		1	1	1	1	
11											-1							-1		1
12															-1					
13																			-1	
14																				
15																				
Z	10,0	7,0	9,0	11,5	7,8	14,2	4,2	11,5	18,4	5,0	12,9	7,8	18,4	18,5	12,1	5,0	18,5	18,5	13,7	12,9

Продолжение Таблицы 43

№	11-10	11-12	11-13	12-9	12-11	12-13	12-14	12-15	13-10	13-11	13-12	13-14	13-15	14-12	14-13	14-15		
1																	=	1
2																	=	
3																	=	
4																	=	
5																	=	
6																	=	
7																	=	
8																	=	
9				-1													=	
10	-1								-1								=	
11	1	1	1		-1					-1							=	
12		-1		1	1	1	1	1			-1			-1			=	
13			-1			-1			1	1	1	1	1		-1		=	
14							-1					-1		1	1	1	=	
15								-1					-1			-1	=	-1
Z	18,5	18,8	13,5	12,1	18,8	11,5	15,2	6,7	13,7	13,5	11,5	7,0	16,0	15,2	7,0	16,0		

Анализ результатов решения задачи

Задача решалась в табличном процессоре Microsoft Excel с использованием надстройки **Поиск решения**. В результате решения следующие переменные приняли значение 1: $X_{1\text{-}4}$, $X_{4\text{-}7}$, $X_{7\text{-}9}$, $X_{9\text{-}12}$ и $X_{12\text{-}15}$. Значение целевой функции составило 43,6 км.

Оптимальный маршрут 1-4-7-9-12-15 протяженностью 43,6 км представлен выделенной линией на рис. 44 и 45.

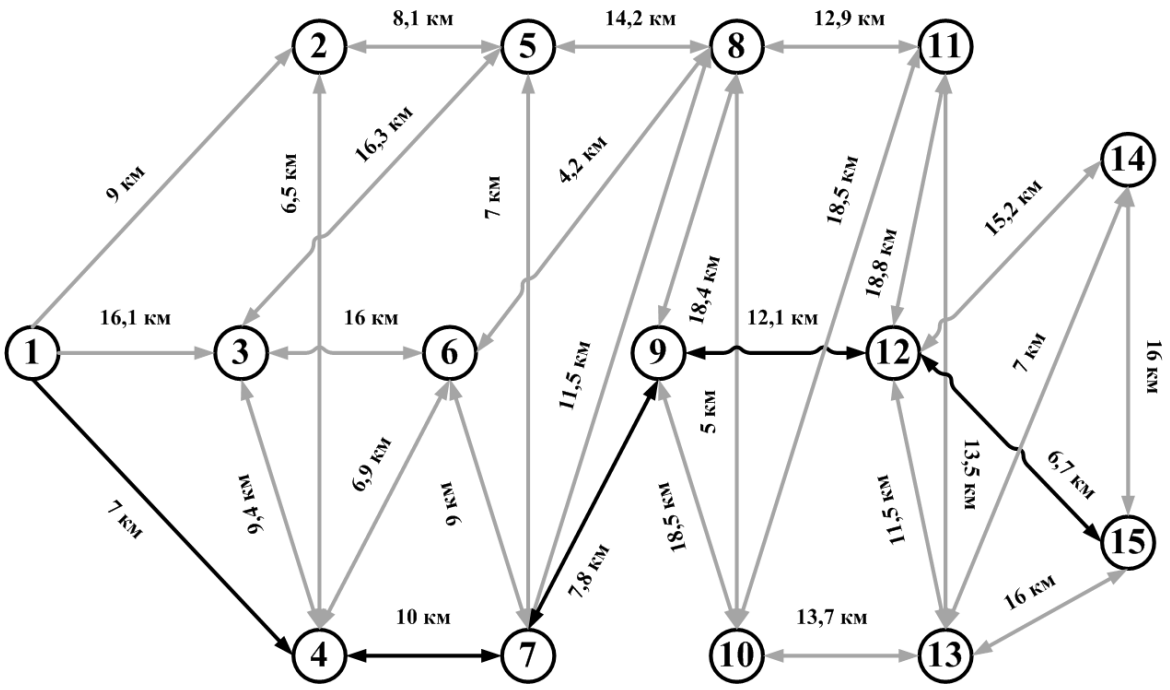


Рисунок 44. Сеть поставленной задачи с указанием оптимального маршрута

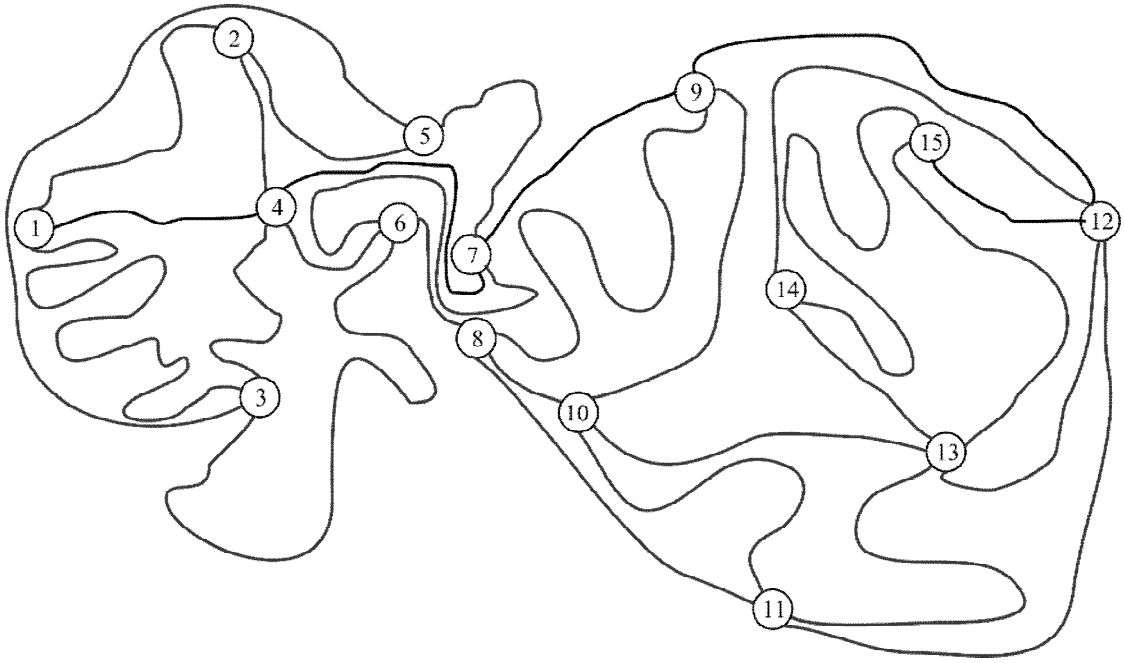


Рисунок 45. Карта автодорожной сети с указанием оптимального маршрута

5.5. Экономико-математическая модель по оптимизации маршрута движения транспортных средств. Решение в программе «Графоанализатор».

Сетевые модели могут решаться при помощи специализированного программного обеспечения, реализующего алгоритмы вычисления на графах. Одним из представителей подобного ПО является программа с открытым кодом «Графоанализатор 1.3», бесплатно предоставляемая на сайте разработчика http://grafoanalizator.unick-soft.ru. Она обладает широким спектром возможностей для построения графов, реализует алгоритмы поиска пути, циклов, остовных деревьев, хроматического числа, определения максимального

потока и т.д. В данном разделе будет рассмотрено решение сетевой транспортной задачи при помощи «Графоанализатор 1.3».

Постановка задачи и подготовка входной информации

Рассматривается задача из раздела 5.4: необходимо найти наиболее короткий маршрут доставки продукции из сельскохозяйственного предприятия (Пункт 1) на перерабатывающее (Пункт 15). Пунктами 2-14 отмечены все развилки и перекрестки дорог. Исходная информация представлена на рис. 42 и в табл. 42.

Построение экономико-математической модели

При создании сетевой модели в программе «Графоанализатор» задаются свойства исследуемого графа, которые могут быть впоследствии изменены через пункт меню **Граф – Свойства графа** (рис. 46). Требуется указать, является ли создаваемый граф ориентированным и взвешенным (нагруженным), применяя опции **Орграф** и **Нагруженный граф**. Также следует указать принцип нумерации вершин графа, пользуясь выпадающими списками **Нумерация вершин** и **Начиная с**. По умолчанию доступны цифровая нумерация и нумерация латинскими буквами, кроме того пользователь может вводить названия вершин вручную, выбрав пункт выпадающего списка **Задается пользователем**.

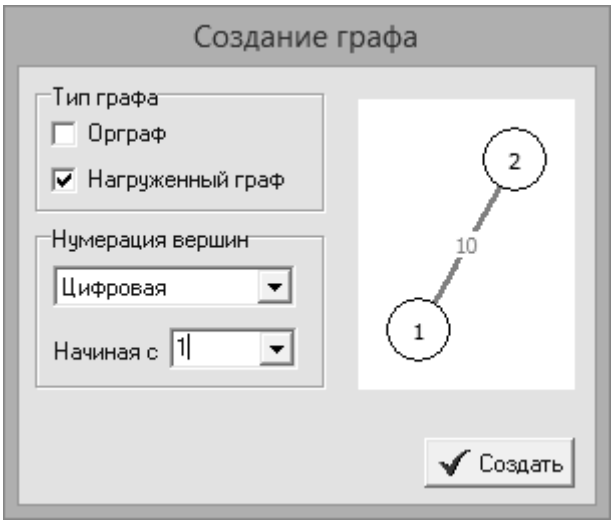


Рисунок 46. Диалоговое окно «Создание графа» программы «Графоанализатор 1.3»

Для данной задачи будет выбран взвешенный (нагруженный) неориентированный граф, так как алгоритмы поиска пути в программе не имеют проблемы зацикливания, встречающейся при оптимизации сетевых моделей методами линейного программирования.

Рабочее пространство программы разделено на следующие части (рис. 47): **Меню** (предоставляет доступ ко всем функциям программы), **Палитра** (доступ к наиболее часто используемым командам), **Холст** (пространство для построения графа), **Результаты** (вывод результатов и логики решения) и **Матрица смежности** (представляет граф в табличном виде).

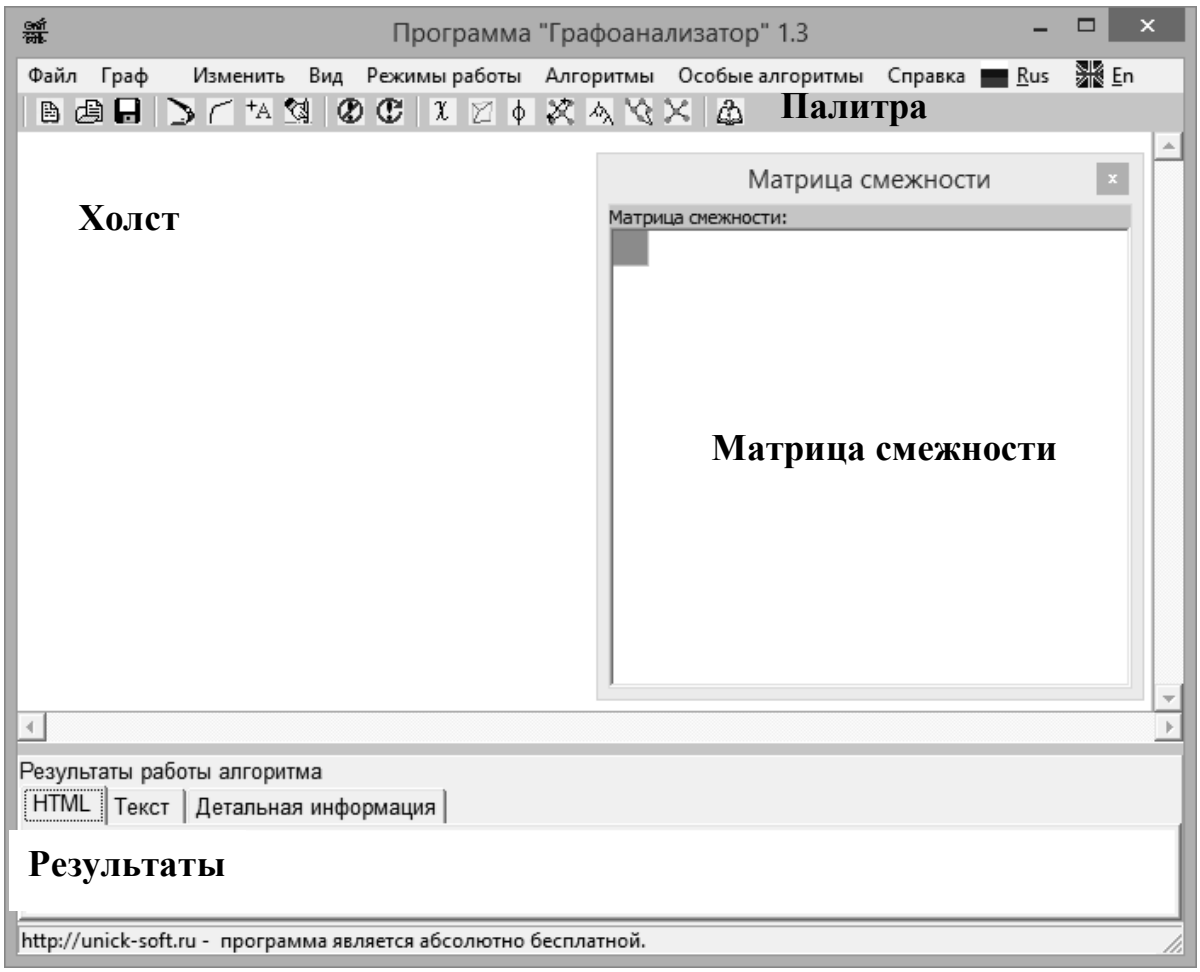


Рисунок 47. Рабочее пространство программы «Графоанализатор 1.3»

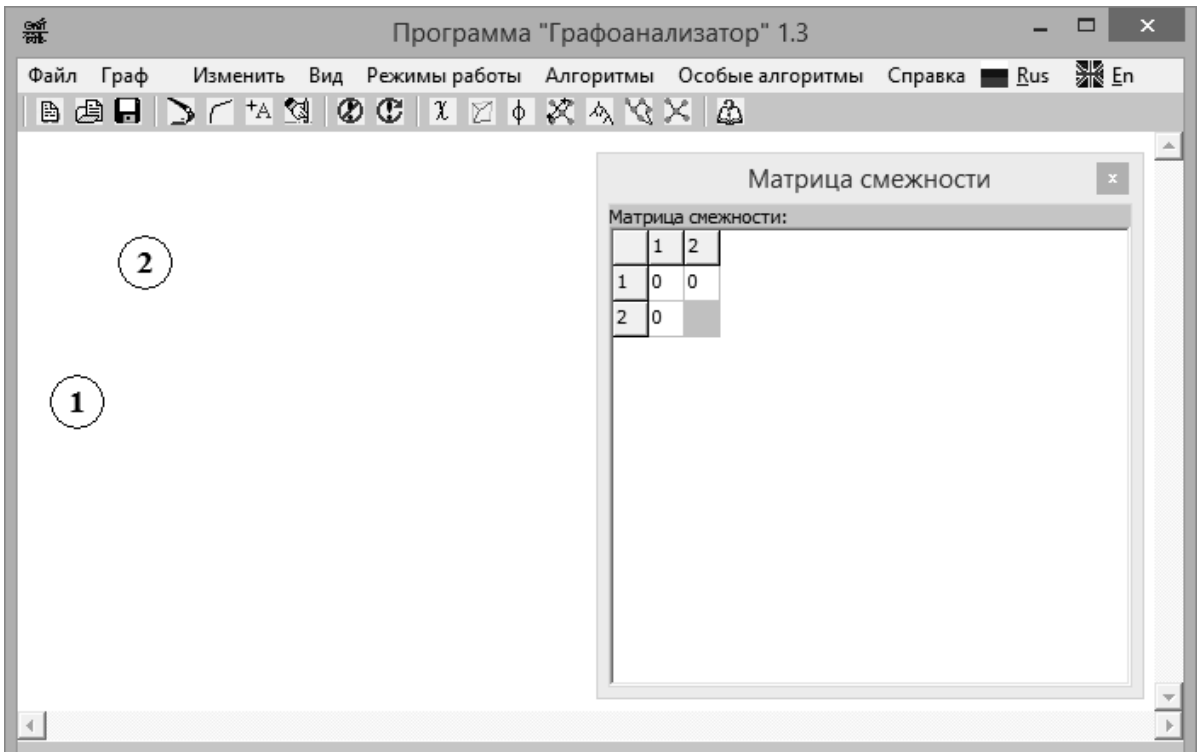
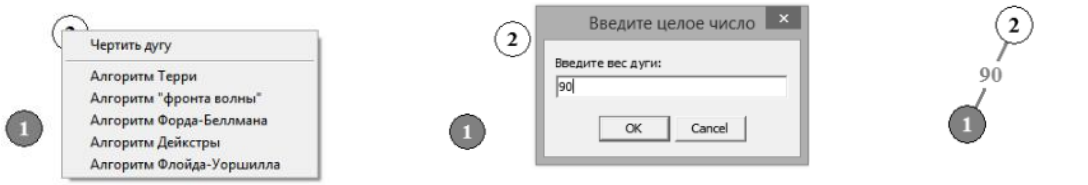


Рисунок 48. Задание вершин графа в программе «Графоанализатор 1.3».

Вершины и ребра графа могут быть заданы средствами **Меню** (**Граф – Создать вершину**, **Граф – Создать дугу**), кнопками **Палитры**, а также объектно на **Холсте**. Воспользуемся последним способом: создадим вершины 1 и 2 двойным щелчком мыши (рис. 48). Вершины могут быть перемещены в любой момент при помощи перетаксивания указателем мыши с зажатой левой клавишей.

Соединим вершины 1 и 2 ребром. Для этого выделим вершину 1 щелчком левой кнопки мыши, после этого – щелкнем правой кнопкой мыши на вершине 2. Контекстное меню предложит **Чертить дугу** между данными вершинами (рис. 49а).



а) б) в)

Рисунок 49. Задание вершин графа в программе «Графоанализатор 1.3».

В появившемся поле ввода необходимо задать вес дуги, т.е. растояние между смежными вершинами (рис. 49б). «Графоанализатор 1.3» поддерживает вычисления только с целыми числами, поэтому если в задаче есть дробные значения, все веса дуг необходимо домножить на 10, 100 и т.п. для получения целочисленные значения. В условиях данной задачи используются десятые доли, поэтому веса всех дуг мы домножаем на 10: таким образом, вес 9 дуги между вершинами 1 и 2 преобразуется в вес 90 (рис. 49в). Подобным образом добавляем все остальные вершины и дуги (рис. 50). В случае необходимости кривизну ребер можно изменять перетаскиванием указателем мыши с зажатой левой клавишей. Вершины и ребра можно удалять клавишей **Delete**.

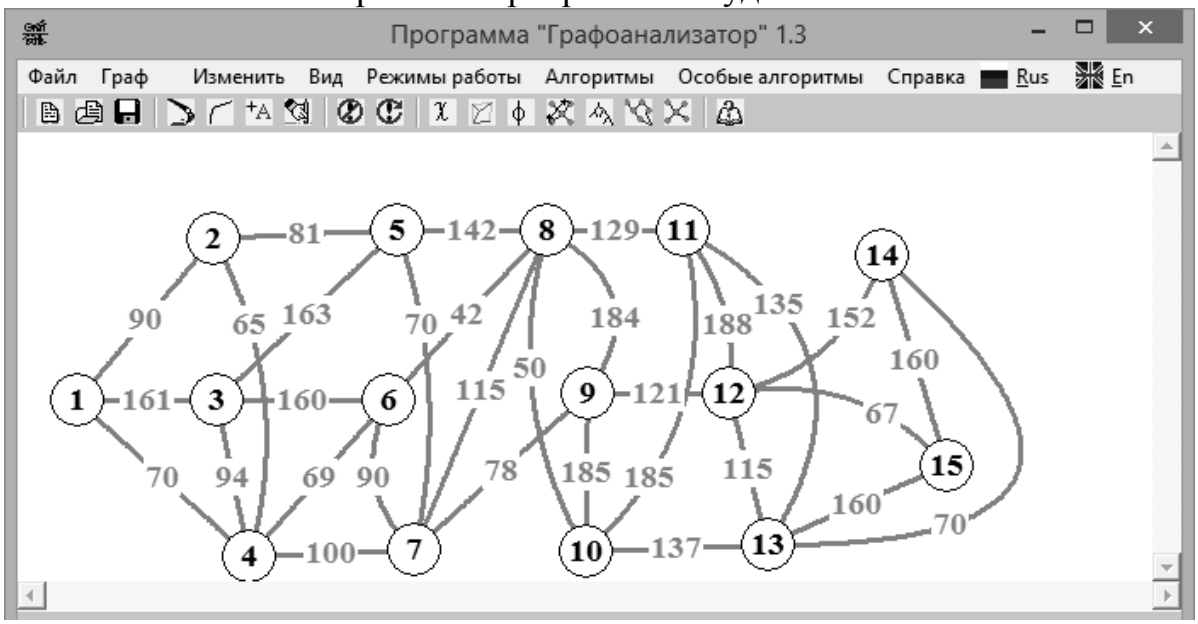


Рисунок 50. Граф задачи в программе «Графоанализатор 1.3».

Матрица смежности будет отображать ребра, прошедшие между вершинами и их веса. Значения весов в матрице доступны для изменения (рис. 51)

Матрица смежности

Матрица смежности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	90	161	70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	90		0	65	81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	161	0		94	163	160	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	70	65	94		0	69	100	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	81	163	0		0	70	142	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	160	69	0		90	42	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	100	70	90		115	78	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	142	42	115		184	50	129	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	78	184		185	0	121	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	50	185		185	0	137	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	129	0	185		188	135	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	121	0	188		115	152	67
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	137	135	115		70	160
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	152	70		160
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	67	160	160	

Рисунок 51. Матрица смежности задачи в программе «Графоанализатор 1.3».

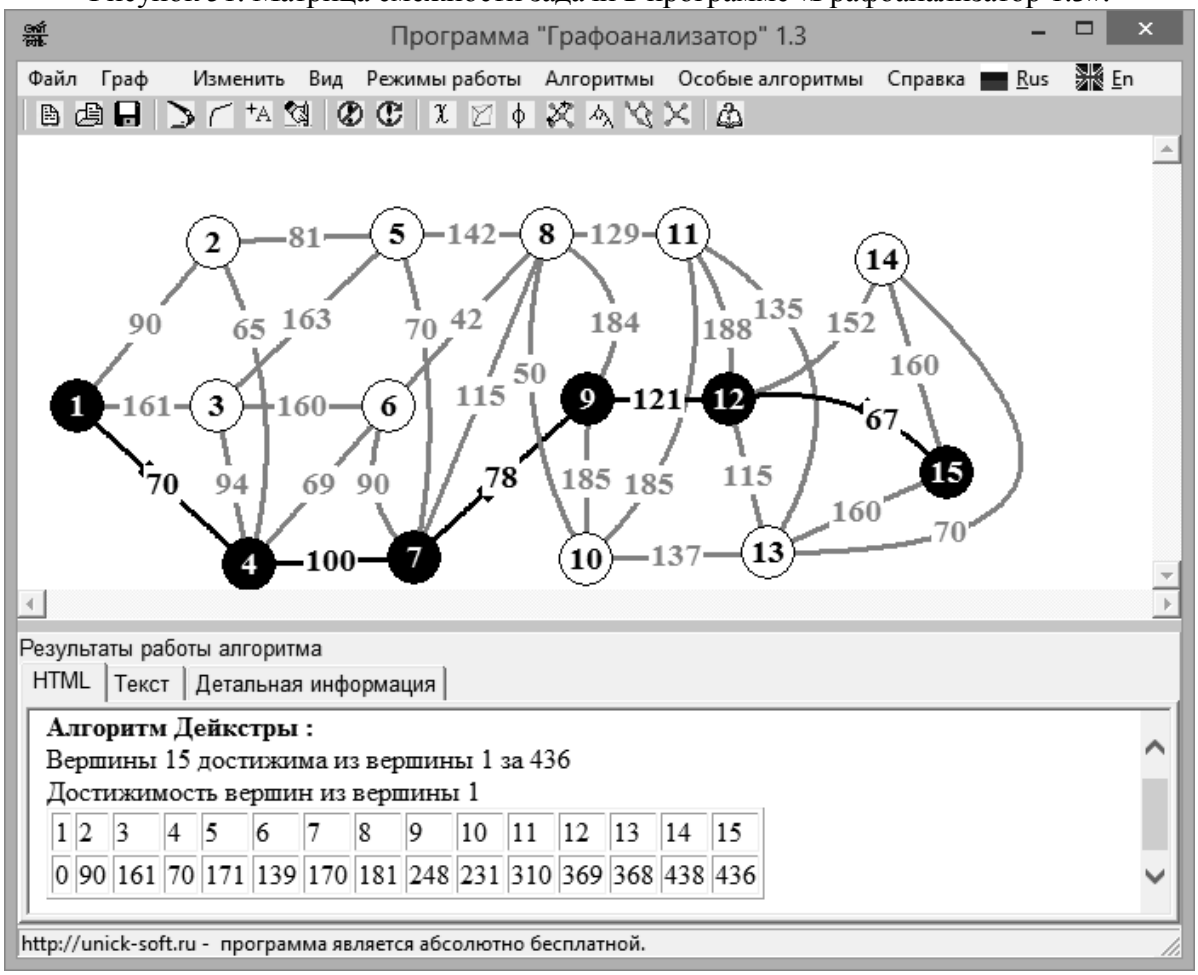


Рисунок 52. Решение задачи в программе «Графоанализатор 1.3».

Для того чтобы найти кратчайший путь в графе необходимо запустить соответствующий алгоритм. Для этого в **Меню** необходимо выбрать пункт **Алгоритмы**, далее – **Поиск пути**, далее – необходимый алгоритм (например, **Алгоритм Дейкстры**). В появившемся диалоговом окне нужно последовательно выбрать **Начальную** и **Конечную вершину** пути. Кратчайший путь будет отмечен на графе, а его характеристики появятся в поле **Результаты** (рис. 52).

Кратчайший путь, соединяющий вершины 1 и 15 изучаемого графа, пройдет через вершины 1-4-7-9-12-15. Его длина составит 436; разделив результат на 10, получим протяженность минимального пути – 43,6 км.

Задания для самостоятельной работы

1. Используя алгоритм Дейкстры и условия предлагаемых вариантов, найти кратчайший путь в неориентированном взвешенном графе из вершины 1 в вершину 7.

Ребро	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C_{1-2}	7	7	14	4	13	3	9	15	14	11	14	14	9	12	4	9	4	6	15	15
C_{1-3}	5	6	12	11	9	14	7	10	6	9	4	5	11	14	6	5	15	14	9	13
C_{2-3}	15	3	9	15	7	3	4	12	13	12	7	10	9	9	10	11	5	10	4	9
C_{2-4}	7	11	15	6	4	8	12	11	11	14	8	15	7	10	6	10	3	7	11	4
C_{3-4}	13	15	13	3	5	12	8	10	13	5	15	7	14	4	11	8	3	6	3	9
C_{3-6}	4	15	8	4	6	13	9	10	15	14	13	15	7	6	5	5	3	10	7	6
C_{4-5}	7	6	10	10	14	3	9	9	8	7	8	4	9	15	11	11	7	15	8	6
C_{4-6}	13	14	9	12	7	14	4	10	13	14	3	11	9	12	8	7	11	7	3	4
C_{5-7}	5	4	8	11	13	14	12	12	10	15	3	6	8	10	15	4	9	8	12	4
C_{6-7}	4	5	4	5	10	8	14	3	11	6	14	12	13	3	8	13	12	12	12	14

2. Используя алгоритм Прима и условия предлагаемых вариантов, найти минимальное остовное дерево в неориентированном взвешенном графе.

Ребро	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C_{1-2}	9	7	7	11	13	12	8	3	8	14	10	5	13	5	12	3	9	4	8	12
C_{1-3}	11	7	3	13	4	5	13	9	13	10	13	7	5	5	12	7	5	11	4	11
C_{1-4}	12	10	14	6	10	3	6	13	14	4	3	6	15	4	9	6	9	12	5	13
C_{1-5}	6	15	8	8	4	7	5	8	14	4	6	14	10	13	14	7	9	10	3	5
C_{2-4}	9	4	13	7	5	6	4	6	3	6	13	11	5	11	5	3	9	13	3	14
C_{3-5}	10	13	11	15	8	5	14	14	14	3	9	15	6	11	5	7	13	12	4	13
C_{3-7}	14	15	15	7	9	5	11	5	14	8	5	5	7	8	12	7	4	5	4	3
C_{4-5}	6	13	8	13	8	10	7	14	14	13	3	11	3	11	4	7	4	13	12	11
C_{4-6}	7	11	3	13	8	14	15	14	13	11	12	8	11	13	4	5	4	11	8	6
C_{5-6}	4	15	8	12	6	9	11	5	7	13	9	5	11	3	12	3	14	4	14	8
C_{5-7}	9	15	5	5	5	5	11	13	13	13	8	11	7	7	15	7	15	7	10	14

3. Используя условия задачи раздела 5.4. и предлагаемых вариантов, построить сеть, составить и реализовать экономико-математическую модель по

оптимизации маршрута при помощи Microsoft Excel и **Поиск решения**.

4. Используя условия задачи раздела 5.4. и предлагаемых вариантов, построить сеть, составить и реализовать экономико-математическую модель по оптимизации маршрута движения транспортных средств при помощи «Графоанализатор 1.3».

№	Значения по вариантам:				
1	$C_{1-2} = 13,3$ $C_{1-3} = 7,3$ $C_{1-4} = 8,7$ $C_{2-3} = 4,4$ $C_{3-2} = 4,4$ $C_{3-4} = 10,9$ $C_{3-6} = 13$ $C_{4-3} = 10,9$ $C_{4-6} = 6,6$ $C_{4-7} = 14$ $C_{5-6} = 4,1$	$C_{5-7} = 9,9$ $C_{5-8} = 15,5$ $C_{6-3} = 13$ $C_{6-4} = 6,6$ $C_{6-5} = 4,1$ $C_{6-7} = 11,2$ $C_{6-8} = 14,5$ $C_{7-4} = 14$ $C_{7-5} = 9,9$ $C_{7-6} = 11,2$ $C_{7-8} = 14$	$C_{7-9} = 18,8$ $C_{7-10} = 17,5$ $C_{8-5} = 15,5$ $C_{8-6} = 14,5$ $C_{8-7} = 14$ $C_{8-9} = 18,7$ $C_{9-7} = 18,8$ $C_{9-8} = 18,7$ $C_{9-10} = 10,2$ $C_{9-12} = 11$ $C_{10-7} = 17,5$	$C_{10-9} = 10,2$ $C_{10-11} = 5,7$ $C_{10-13} = 10,3$ $C_{11-10} = 5,7$ $C_{11-13} = 8,5$ $C_{11-14} = 13$ $C_{12-9} = 11$ $C_{12-13} = 16,7$ $C_{12-14} = 12$ $C_{12-15} = 11,2$ $C_{13-10} = 10,3$	$C_{13-11} = 8,5$ $C_{13-12} = 16,7$ $C_{13-14} = 10,2$ $C_{13-15} = 18,3$ $C_{14-11} = 13$ $C_{14-12} = 12$ $C_{14-13} = 10,2$ $C_{14-15} = 6,3$
2	$C_{1-2} = 15,8$ $C_{1-3} = 12,4$ $C_{1-4} = 14,9$ $C_{2-3} = 5,1$ $C_{2-4} = 10,9$ $C_{3-2} = 5,1$ $C_{3-4} = 6,3$ $C_{3-6} = 12,7$ $C_{4-2} = 10,9$ $C_{4-3} = 6,3$	$C_{4-5} = 8,1$ $C_{4-7} = 8,9$ $C_{5-4} = 8,1$ $C_{5-6} = 6,4$ $C_{6-3} = 12,7$ $C_{6-5} = 6,4$ $C_{6-7} = 15,1$ $C_{6-9} = 16,5$ $C_{7-4} = 8,9$ $C_{7-6} = 15,1$	$C_{7-8} = 10,3$ $C_{7-9} = 17,1$ $C_{8-7} = 10,3$ $C_{8-9} = 14,3$ $C_{8-10} = 11,8$ $C_{8-11} = 16,9$ $C_{9-6} = 16,5$ $C_{9-7} = 17,1$ $C_{9-8} = 14,3$ $C_{9-10} = 12,4$	$C_{9-12} = 6,9$ $C_{10-8} = 11,8$ $C_{10-9} = 12,4$ $C_{10-11} = 9,4$ $C_{10-12} = 5,5$ $C_{10-13} = 10,1$ $C_{11-8} = 16,9$ $C_{11-10} = 9,4$ $C_{11-13} = 12,1$ $C_{11-14} = 5$	$C_{12-9} = 6,9$ $C_{12-10} = 5,5$ $C_{12-13} = 17,8$ $C_{12-15} = 15,6$ $C_{13-10} = 10,1$ $C_{13-11} = 12,1$ $C_{13-12} = 17,8$ $C_{14-11} = 5$ $C_{14-15} = 7,9$
3	$C_{1-3} = 16,4$ $C_{1-4} = 13,7$ $C_{2-3} = 13,2$ $C_{2-4} = 16,3$ $C_{3-2} = 13,2$ $C_{3-4} = 18,6$ $C_{4-2} = 16,3$ $C_{4-3} = 18,6$ $C_{4-5} = 13,9$	$C_{5-4} = 13,9$ $C_{5-6} = 17,2$ $C_{5-7} = 13,0$ $C_{6-5} = 17,2$ $C_{6-7} = 13,6$ $C_{6-9} = 15,3$ $C_{7-5} = 13$ $C_{7-6} = 13,6$ $C_{7-9} = 14,5$	$C_{7-10} = 13,8$ $C_{8-9} = 12,2$ $C_{8-11} = 14,4$ $C_{9-6} = 15,3$ $C_{9-7} = 14,5$ $C_{9-8} = 12,2$ $C_{9-10} = 16$ $C_{9-11} = 11$ $C_{9-12} = 11,4$	$C_{10-7} = 13,8$ $C_{10-9} = 16$ $C_{10-11} = 13,8$ $C_{10-13} = 12,2$ $C_{11-8} = 14,4$ $C_{11-9} = 11$ $C_{11-10} = 13,8$ $C_{11-13} = 9,1$ $C_{11-14} = 14,3$	$C_{12-9} = 11,4$ $C_{12-13} = 11,7$ $C_{12-15} = 14,8$ $C_{13-10} = 12,2$ $C_{13-11} = 9,1$ $C_{13-12} = 11,7$ $C_{14-11} = 14,3$
4	$C_{1-2} = 12,6$ $C_{1-3} = 14,7$ $C_{1-4} = 12,7$ $C_{2-3} = 17,4$ $C_{3-2} = 17,4$ $C_{3-4} = 18,2$ $C_{3-5} = 6,3$ $C_{3-6} = 12,7$ $C_{4-3} = 18,2$ $C_{4-5} = 9,2$ $C_{4-6} = 12,3$	$C_{4-7} = 7,7$ $C_{5-3} = 6,3$ $C_{5-4} = 9,2$ $C_{5-7} = 12,2$ $C_{5-8} = 8,5$ $C_{6-3} = 12,7$ $C_{6-4} = 12,3$ $C_{6-8} = 4,7$ $C_{6-9} = 11,4$ $C_{7-4} = 7,7$ $C_{7-5} = 12,2$	$C_{7-8} = 9$ $C_{7-9} = 10,5$ $C_{7-10} = 6,8$ $C_{8-5} = 8,5$ $C_{8-6} = 4,7$ $C_{8-7} = 9$ $C_{8-9} = 17,8$ $C_{8-10} = 12,7$ $C_{9-6} = 11,4$ $C_{9-7} = 10,5$ $C_{9-8} = 17,8$	$C_{9-10} = 16,7$ $C_{9-11} = 14,4$ $C_{9-12} = 16,1$ $C_{10-7} = 6,8$ $C_{10-8} = 12,7$ $C_{10-9} = 16,7$ $C_{10-11} = 11,9$ $C_{10-12} = 6,6$ $C_{11-9} = 14,4$ $C_{11-10} = 11,9$ $C_{11-12} = 11,4$	$C_{11-13} = 17,7$ $C_{12-9} = 16,1$ $C_{12-10} = 6,6$ $C_{12-11} = 11,4$ $C_{12-14} = 4,7$ $C_{12-15} = 7,1$ $C_{13-11} = 17,7$ $C_{14-12} = 4,7$ $C_{14-15} = 16,7$

№	Значения по вариантам:				
5	$C_{1-2} = 12,2$ $C_{1-3} = 15,4$ $C_{1-4} = 11,6$ $C_{2-3} = 4,1$ $C_{3-2} = 4,1$ $C_{3-4} = 16,6$ $C_{3-5} = 7,1$ $C_{3-6} = 5,9$ $C_{4-3} = 16,6$ $C_{4-5} = 16,6$ $C_{4-6} = 12,9$	$C_{4-7} = 14,2$ $C_{5-3} = 7,1$ $C_{5-4} = 16,6$ $C_{5-7} = 4,4$ $C_{5-8} = 10,2$ $C_{6-3} = 5,9$ $C_{6-4} = 12,9$ $C_{6-8} = 14,5$ $C_{6-9} = 15,4$ $C_{7-4} = 14,2$ $C_{7-5} = 4,4$	$C_{7-8} = 5,7$ $C_{7-9} = 14,4$ $C_{7-10} = 17,7$ $C_{8-5} = 10,2$ $C_{8-6} = 14,5$ $C_{8-7} = 5,7$ $C_{8-9} = 14,3$ $C_{8-10} = 13,3$ $C_{9-6} = 15,4$ $C_{9-7} = 14,4$ $C_{9-8} = 14,3$	$C_{9-10} = 6,4$ $C_{9-11} = 16,4$ $C_{9-12} = 13,4$ $C_{10-7} = 17,7$ $C_{10-8} = 13,3$ $C_{10-9} = 6,4$ $C_{10-11} = 18,6$ $C_{10-12} = 4,6$ $C_{11-9} = 16,4$ $C_{11-10} = 18,6$ $C_{11-12} = 4,6$	$C_{11-13} = 16,1$ $C_{12-9} = 13,4$ $C_{12-10} = 4,6$ $C_{12-11} = 4,6$ $C_{12-14} = 7$ $C_{12-15} = 5,4$ $C_{13-11} = 16,1$ $C_{14-12} = 7$ $C_{14-15} = 17,4$
6	$C_{1-2} = 15,5$ $C_{1-3} = 6,1$ $C_{1-4} = 17,5$ $C_{2-3} = 13,5$ $C_{2-4} = 6,4$ $C_{3-2} = 13,5$ $C_{3-5} = 18,4$ $C_{3-6} = 17,6$ $C_{4-2} = 6,4$ $C_{4-5} = 13,5$	$C_{4-6} = 16,1$ $C_{5-3} = 18,4$ $C_{5-4} = 13,5$ $C_{5-6} = 5,7$ $C_{5-7} = 10,4$ $C_{6-3} = 17,6$ $C_{6-4} = 16,1$ $C_{6-5} = 5,7$ $C_{6-7} = 6,3$ $C_{6-8} = 12$	$C_{7-5} = 10,4$ $C_{7-6} = 6,3$ $C_{7-8} = 16,3$ $C_{7-9} = 6,3$ $C_{7-10} = 6$ $C_{8-6} = 12$ $C_{8-7} = 16,3$ $C_{8-9} = 6,1$ $C_{9-7} = 6,3$ $C_{9-8} = 6,1$	$C_{9-10} = 16,2$ $C_{9-12} = 8,6$ $C_{10-7} = 6$ $C_{10-9} = 16,2$ $C_{10-11} = 9,6$ $C_{10-13} = 14,8$ $C_{11-10} = 9,6$ $C_{11-12} = 6,6$ $C_{11-13} = 12,6$ $C_{11-14} = 8,9$	$C_{12-9} = 8,6$ $C_{12-11} = 6,6$ $C_{12-14} = 7,2$ $C_{13-10} = 14,8$ $C_{13-11} = 12,6$ $C_{13-15} = 17,6$ $C_{14-11} = 8,9$ $C_{14-12} = 7,2$ $C_{14-15} = 4,7$
7	$C_{1-2} = 17,5$ $C_{1-3} = 6,2$ $C_{1-4} = 17,8$ $C_{2-3} = 14$ $C_{2-4} = 12,7$ $C_{2-5} = 6,1$ $C_{3-2} = 14$ $C_{3-4} = 11,4$ $C_{3-5} = 17,2$ $C_{3-6} = 11,4$ $C_{4-2} = 12,7$	$C_{4-3} = 11,4$ $C_{4-7} = 13,8$ $C_{5-2} = 6,1$ $C_{5-3} = 17,2$ $C_{5-6} = 13,5$ $C_{5-7} = 14,5$ $C_{5-8} = 11,1$ $C_{6-3} = 11,4$ $C_{6-5} = 13,5$ $C_{6-7} = 6,2$ $C_{6-9} = 14,4$	$C_{7-4} = 13,8$ $C_{7-5} = 14,5$ $C_{7-6} = 6,2$ $C_{7-9} = 6,5$ $C_{7-10} = 16,9$ $C_{8-5} = 11,1$ $C_{8-9} = 6,2$ $C_{9-6} = 14,4$ $C_{9-7} = 6,5$ $C_{9-8} = 6,2$ $C_{9-10} = 15,3$	$C_{10-7} = 16,9$ $C_{10-9} = 15,3$ $C_{10-12} = 4,1$ $C_{10-13} = 9$ $C_{11-12} = 16,2$ $C_{11-13} = 6,9$ $C_{11-14} = 13,7$ $C_{12-10} = 4,1$ $C_{12-11} = 16,2$ $C_{12-13} = 5,4$ $C_{12-14} = 13,2$	$C_{12-15} = 12,5$ $C_{13-10} = 9$ $C_{13-11} = 6,9$ $C_{13-12} = 5,4$ $C_{13-14} = 4,2$ $C_{13-15} = 10,2$ $C_{14-11} = 13,7$ $C_{14-12} = 13,2$ $C_{14-13} = 4,2$ $C_{14-15} = 6,7$
8	$C_{1-2} = 9,3$ $C_{1-4} = 17,3$ $C_{2-3} = 5,5$ $C_{2-4} = 15,2$ $C_{2-5} = 10,8$ $C_{3-2} = 5,5$ $C_{3-4} = 9,7$ $C_{4-2} = 15,2$ $C_{4-3} = 9,7$	$C_{4-6} = 18,4$ $C_{4-7} = 11,8$ $C_{5-2} = 10,8$ $C_{5-6} = 10,5$ $C_{5-8} = 13,9$ $C_{6-4} = 18,4$ $C_{6-5} = 10,5$ $C_{6-8} = 4,4$ $C_{6-9} = 16$	$C_{7-4} = 11,8$ $C_{7-8} = 18,1$ $C_{8-5} = 13,9$ $C_{8-6} = 4,4$ $C_{8-7} = 18,1$ $C_{8-9} = 7,8$ $C_{8-10} = 8,9$ $C_{8-11} = 7,4$ $C_{9-6} = 16$	$C_{9-8} = 7,8$ $C_{9-10} = 10,7$ $C_{9-11} = 8,3$ $C_{9-12} = 17,5$ $C_{10-8} = 8,9$ $C_{10-9} = 10,7$ $C_{10-13} = 9,9$ $C_{11-8} = 7,4$ $C_{11-9} = 8,3$	$C_{11-13} = 7,6$ $C_{11-14} = 10,1$ $C_{12-9} = 17,5$ $C_{12-15} = 10,3$ $C_{13-10} = 9,9$ $C_{13-11} = 7,6$ $C_{13-15} = 5,7$ $C_{14-11} = 10,1$

№	Значения по вариантам:				
9	C_{1-2} = 8,8 C_{2-3} = 7,4 C_{2-4} = 14,5 C_{2-5} = 9,1 C_{3-2} = 7,4 C_{3-4} = 14,4 C_{3-5} = 6,4 C_{3-6} = 10,6 C_{4-2} = 14,5 C_{4-3} = 14,4 C_{4-5} = 14,9	C_{4-7} = 10,8 C_{5-2} = 9,1 C_{5-3} = 6,4 C_{5-4} = 14,9 C_{5-7} = 10,8 C_{6-3} = 10,6 C_{6-7} = 5,4 C_{6-8} = 18,2 C_{6-9} = 6,9 C_{7-4} = 10,8 C_{7-5} = 10,8	C_{7-6} = 5,4 C_{7-8} = 16,1 C_{7-9} = 10,1 C_{8-6} = 18,2 C_{8-7} = 16,1 C_{8-9} = 16,6 C_{9-6} = 6,9 C_{9-7} = 10,1 C_{9-8} = 16,6 C_{9-10} = 13,8 C_{10-9} = 13,8	C_{10-11} = 7,8 C_{10-12} = 17,4 C_{10-13} = 10,9 C_{11-10} = 7,8 C_{11-12} = 18,5 C_{11-14} = 16,8 C_{12-10} = 17,4 C_{12-11} = 18,5 C_{12-13} = 12,9 C_{12-14} = 5,3 C_{12-15} = 10,9	C_{13-10} = 10,9 C_{13-12} = 12,9 C_{13-14} = 18,4 C_{13-15} = 5,9 C_{14-11} = 16,8 C_{14-12} = 5,3 C_{14-13} = 18,4 C_{14-15} = 15,1
10	C_{1-3} = 4,6 C_{1-4} = 15,8 C_{2-3} = 11,1 C_{2-4} = 10,9 C_{2-5} = 13,6 C_{3-2} = 11,1 C_{3-6} = 15,8 C_{4-2} = 10,9 C_{4-5} = 6,6 C_{4-7} = 4,8	C_{5-2} = 13,6 C_{5-4} = 6,6 C_{5-6} = 8,9 C_{5-7} = 7,1 C_{5-8} = 16,1 C_{6-3} = 15,8 C_{6-5} = 8,9 C_{7-4} = 4,8 C_{7-5} = 7,1 C_{7-8} = 16,9	C_{7-9} = 5,7 C_{7-10} = 9,7 C_{8-5} = 16,1 C_{8-7} = 16,9 C_{8-9} = 7,7 C_{8-11} = 17,3 C_{9-7} = 5,7 C_{9-8} = 7,7 C_{9-11} = 12,8 C_{9-12} = 10,1	C_{10-7} = 9,7 C_{10-12} = 4,5 C_{11-8} = 17,3 C_{11-9} = 12,8 C_{11-12} = 10,3 C_{11-13} = 9,4 C_{11-14} = 9,1 C_{12-9} = 10,1 C_{12-10} = 4,5 C_{12-11} = 10,3	C_{12-13} = 13,4 C_{12-14} = 15,3 C_{12-15} = 4,9 C_{13-11} = 9,4 C_{13-12} = 13,4 C_{14-11} = 9,1 C_{14-12} = 15,3 C_{14-15} = 16,3
11	C_{1-2} = 6,7 C_{1-3} = 9,7 C_{2-3} = 10,7 C_{2-4} = 5,1 C_{2-5} = 7,9 C_{3-2} = 10,7 C_{3-4} = 11 C_{3-5} = 16 C_{4-2} = 5,1 C_{4-3} = 11 C_{4-5} = 10,2 C_{4-7} = 8,4	C_{5-2} = 7,9 C_{5-3} = 16 C_{5-4} = 10,2 C_{5-6} = 15 C_{5-7} = 10,4 C_{5-8} = 5,7 C_{6-5} = 15 C_{6-8} = 11,7 C_{6-9} = 13 C_{7-4} = 8,4 C_{7-5} = 10,4 C_{7-9} = 14,1	C_{7-10} = 11,5 C_{8-5} = 5,7 C_{8-6} = 11,7 C_{8-9} = 4,2 C_{8-10} = 9,2 C_{8-11} = 5 C_{9-6} = 13 C_{9-7} = 14,1 C_{9-8} = 4,2 C_{9-10} = 7,4 C_{9-11} = 7,2 C_{10-7} = 11,5	C_{10-8} = 9,2 C_{10-9} = 7,4 C_{10-11} = 10 C_{10-12} = 15,3 C_{10-13} = 4,3 C_{11-8} = 5 C_{11-9} = 7,2 C_{11-10} = 10 C_{11-12} = 10 C_{11-13} = 13,1 C_{11-14} = 11,5 C_{12-10} = 15,3	C_{12-11} = 10 C_{12-14} = 17 C_{12-15} = 10,3 C_{13-10} = 4,3 C_{13-11} = 13,1 C_{13-14} = 6 C_{14-11} = 11,5 C_{14-12} = 17 C_{14-13} = 6 C_{14-15} = 14,4
12	C_{1-2} = 7,3 C_{1-3} = 14,9 C_{1-4} = 12,8 C_{2-3} = 15 C_{2-4} = 7,4 C_{2-5} = 4,1 C_{3-2} = 15 C_{3-4} = 12,8 C_{4-2} = 7,4 C_{4-3} = 12,8	C4-7 = 18,6 C5-2 = 4,1 C_{5-6} = 16,3 C_{5-7} = 4,7 C_{6-5} = 16,3 C_{6-7} = 6,3 C_{6-8} = 18,6 C_{6-9} = 17,2 C_{7-4} = 18,6 C_{7-5} = 4,7	C7-6 = 6,3 C7-8 = 11,1 C7-9 = 16,1 C7-10 = 12,6 C_{8-6} = 18,6 C_{8-7} = 11,1 C_{8-9} = 12,9 C_{8-10} = 8,6 C_{8-11} = 6,1 C_{9-6} = 17,2	C_{9-7} = 16,1 C_{9-8} = 12,9 C_{9-10} = 14,6 C_{9-11} = 7,7 C_{9-12} = 10,5 C_{10-7} = 12,6 C_{10-8} = 8,6 C_{10-9} = 14,6 C_{10-12} = 5,6 C_{10-13} = 9,8	C_{11-8} = 6,1 C_{11-9} = 7,7 C_{11-12} = 7,8 C_{12-9} = 10,5 C_{12-10} = 5,6 C_{12-11} = 7,8 C_{13-10} = 9,8 C_{13-15} = 12,6 C_{14-15} = 9,8

№	Значения по вариантам:				
13	$C_{1-2} = 9,3$ $C_{1-4} = 16,3$ $C_{2-3} = 14,9$ $C_{2-4} = 9$ $C_{2-5} = 15$ $C_{3-2} = 14,9$ $C_{4-2} = 9$ $C_{4-5} = 7,9$ $C_{4-6} = 9,9$	$C_{4-7} = 18,8$ $C_{5-2} = 15$ $C_{5-4} = 7,9$ $C_{5-6} = 14,7$ $C_{5-7} = 17,9$ $C_{5-8} = 6,8$ $C_{6-4} = 9,9$ $C_{6-5} = 14,7$ $C_{6-7} = 6,4$	$C_{7-4} = 18,8$ $C_{7-5} = 17,9$ $C_{7-6} = 6,4$ $C_{7-8} = 14,1$ $C_{7-9} = 16,4$ $C_{8-5} = 6,8$ $C_{8-7} = 14,1$ $C_{8-11} = 5,5$ $C_{9-7} = 16,4$	$C_{9-10} = 17$ $C_{9-12} = 13,2$ $C_{10-9} = 17$ $C_{10-12} = 17,8$ $C_{10-13} = 8,5$ $C_{11-8} = 5,5$ $C_{11-13} = 14,9$ $C_{12-9} = 13,2$ $C_{12-10} = 17,8$	$C_{12-13} = 11,7$ $C_{12-15} = 13,4$ $C_{13-10} = 8,5$ $C_{13-11} = 14,9$ $C_{13-12} = 11,7$ $C_{13-14} = 4,2$ $C_{13-15} = 11,4$ $C_{14-13} = 4,2$ $C_{14-15} = 9,2$
14	$C_{1-2} = 8,8$ $C_{1-3} = 10,5$ $C_{1-4} = 9,9$ $C_{2-3} = 12,7$ $C_{2-4} = 14,6$ $C_{2-5} = 13,9$ $C_{3-2} = 12,7$ $C_{3-4} = 11,7$ $C_{3-6} = 12$ $C_{4-2} = 14,6$ $C_{4-3} = 11,7$	$C_{4-5} = 15,5$ $C_{4-6} = 10,3$ $C_{4-7} = 14,1$ $C_{5-2} = 13,9$ $C_{5-4} = 15,5$ $C_{5-7} = 17,1$ $C_{6-3} = 12$ $C_{6-4} = 10,3$ $C_{6-7} = 5,6$ $C_{6-9} = 7,9$ $C_{7-4} = 14,1$	$C_{7-5} = 17,1$ $C_{7-6} = 5,6$ $C_{7-8} = 4,7$ $C_{7-9} = 5,7$ $C_{8-7} = 4,7$ $C_{8-9} = 8,7$ $C_{8-10} = 4,3$ $C_{8-11} = 11,5$ $C_{9-6} = 7,9$ $C_{9-7} = 5,7$ $C_{9-8} = 8,7$	$C_{9-10} = 11,1$ $C_{9-11} = 7,6$ $C_{9-12} = 10,1$ $C_{10-8} = 4,3$ $C_{10-9} = 11,1$ $C_{10-12} = 7,5$ $C_{11-8} = 11,5$ $C_{11-9} = 7,6$ $C_{11-12} = 6,5$ $C_{11-13} = 6,8$ $C_{12-9} = 10,1$	$C_{12-10} = 7,5$ $C_{12-11} = 6,5$ $C_{12-13} = 5,3$ $C_{12-14} = 5,8$ $C_{13-11} = 6,8$ $C_{13-12} = 5,3$ $C_{13-15} = 12$ $C_{14-12} = 5,8$ $C_{14-15} = 4,2$
15	$C_{1-2} = 16,9$ $C_{1-4} = 5,6$ $C_{2-3} = 18,4$ $C_{3-2} = 18,4$ $C_{3-4} = 12$ $C_{3-6} = 8,6$ $C_{4-3} = 12$ $C_{4-5} = 14,6$ $C_{4-6} = 5,1$	$C_{4-7} = 8,5$ $C_{5-4} = 14,6$ $C_{5-6} = 7,1$ $C_{5-7} = 15,6$ $C_{5-8} = 12,2$ $C_{6-3} = 8,6$ $C_{6-4} = 5,1$ $C_{6-5} = 7,1$ $C_{6-7} = 14,4$	$C_{6-8} = 11,2$ $C_{6-9} = 13,5$ $C_{7-4} = 8,5$ $C_{7-5} = 15,6$ $C_{7-6} = 14,4$ $C_{8-5} = 12,2$ $C_{8-6} = 11,2$ $C_{9-6} = 13,5$ $C_{9-11} = 4,7$	$C_{9-12} = 12,8$ $C_{10-12} = 9,5$ $C_{11-9} = 4,7$ $C_{11-12} = 9,4$ $C_{11-13} = 13,2$ $C_{11-14} = 18,5$ $C_{12-9} = 12,8$ $C_{12-10} = 9,5$ $C_{12-11} = 9,4$	$C_{12-13} = 7,3$ $C_{12-14} = 4,8$ $C_{12-15} = 5,2$ $C_{13-11} = 13,2$ $C_{13-12} = 7,3$ $C_{13-15} = 16,2$ $C_{14-11} = 18,5$ $C_{14-12} = 4,8$ $C_{14-15} = 9,6$
16	$C_{1-3} = 5,3$ $C_{2-3} = 12,2$ $C_{2-4} = 16,9$ $C_{2-5} = 17,3$ $C_{3-2} = 12,2$ $C_{3-4} = 18,3$ $C_{3-5} = 17,6$ $C_{4-2} = 16,9$ $C_{4-3} = 18,3$	$C_{4-6} = 10,9$ $C_{5-2} = 17,3$ $C_{5-3} = 17,6$ $C_{5-6} = 18,4$ $C_{5-7} = 12,1$ $C_{6-4} = 10,9$ $C_{6-5} = 18,4$ $C_{6-8} = 17,6$ $C_{6-9} = 13,4$	$C_{7-5} = 12,1$ $C_{7-9} = 4,3$ $C_{8-6} = 17,6$ $C_{8-10} = 13,2$ $C_{8-11} = 8,1$ $C_{9-6} = 13,4$ $C_{9-7} = 4,3$ $C_{9-11} = 12,3$ $C_{9-12} = 16,5$	$C_{10-8} = 13,2$ $C_{10-11} = 17,9$ $C_{10-13} = 16,8$ $C_{11-8} = 8,1$ $C_{11-9} = 12,3$ $C_{11-10} = 17,9$ $C_{11-12} = 10,2$ $C_{11-14} = 17,9$ $C_{12-9} = 16,5$	$C_{12-11} = 10,2$ $C_{12-14} = 11,6$ $C_{12-15} = 12,7$ $C_{13-10} = 16,8$ $C_{13-14} = 16,8$ $C_{14-11} = 17,9$ $C_{14-12} = 11,6$ $C_{14-13} = 16,8$ $C_{14-15} = 11,4$

№	Значения по вариантам:				
17	$C_{1-2} = 10,1$ $C_{1-3} = 13,9$ $C_{1-4} = 16,1$ $C_{2-4} = 4$ $C_{3-5} = 13,6$ $C_{4-2} = 4$ $C_{4-6} = 12,7$ $C_{4-7} = 12,9$ $C_{5-3} = 13,6$ $C_{5-6} = 6,7$ $C_{5-7} = 4,4$	$C_{5-8} = 15,6$ $C_{6-4} = 12,7$ $C_{6-5} = 6,7$ $C_{6-9} = 7,9$ $C_{7-4} = 12,9$ $C_{7-5} = 4,4$ $C_{7-8} = 16,4$ $C_{7-9} = 10,7$ $C_{7-10} = 11,8$ $C_{8-5} = 15,6$ $C_{8-7} = 16,4$	$C_{8-9} = 11,3$ $C_{8-10} = 10,3$ $C_{8-11} = 5,4$ $C_{9-6} = 7,9$ $C_{9-7} = 10,7$ $C_{9-8} = 11,3$ $C_{9-10} = 7,1$ $C_{9-12} = 17,5$ $C_{10-7} = 11,8$ $C_{10-8} = 10,3$ $C_{10-9} = 7,1$	$C_{10-11} = 17,3$ $C_{10-12} = 14,3$ $C_{10-13} = 8,4$ $C_{11-8} = 5,4$ $C_{11-10} = 17,3$ $C_{11-12} = 5$ $C_{11-13} = 14,3$ $C_{11-14} = 6,7$ $C_{12-9} = 17,5$ $C_{12-10} = 14,3$ $C_{12-11} = 5$	$C_{12-13} = 18,6$ $C_{12-15} = 5,9$ $C_{13-10} = 8,4$ $C_{13-11} = 14,3$ $C_{13-12} = 18,6$ $C_{13-14} = 8,3$ $C_{13-15} = 8,1$ $C_{14-11} = 6,7$ $C_{14-13} = 8,3$
18	$C_{1-3} = 18,1$ $C_{1-4} = 4$ $C_{2-3} = 7,7$ $C_{2-4} = 17,7$ $C_{2-5} = 13,7$ $C_{3-2} = 7,7$ $C_{3-6} = 4,8$ $C_{4-2} = 17,7$ $C_{4-5} = 9,8$ $C_{5-2} = 13,7$ $C_{5-4} = 9,8$	$C_{5-6} = 6$ $C_{5-7} = 8,2$ $C_{5-8} = 17,7$ $C_{6-3} = 4,8$ $C_{6-5} = 6$ $C_{6-7} = 13$ $C_{6-8} = 6,9$ $C_{7-5} = 8,2$ $C_{7-6} = 13$ $C_{7-8} = 14,5$ $C_{7-9} = 10,4$	$C_{7-10} = 16,3$ $C_{8-5} = 17,7$ $C_{8-6} = 6,9$ $C_{8-7} = 14,5$ $C_{8-9} = 18,5$ $C_{8-11} = 7,2$ $C_{9-7} = 10,4$ $C_{9-8} = 18,5$ $C_{9-10} = 16$ $C_{9-11} = 4,2$ $C_{10-7} = 16,3$	$C_{10-9} = 16$ $C_{10-11} = 7,9$ $C_{11-8} = 7,2$ $C_{11-9} = 4,2$ $C_{11-10} = 7,9$ $C_{11-12} = 17,2$ $C_{11-13} = 18,6$ $C_{11-14} = 11,6$ $C_{12-11} = 17,2$ $C_{12-13} = 12,1$ $C_{12-14} = 4,8$	$C_{13-11} = 18,6$ $C_{13-12} = 12,1$ $C_{13-14} = 10,6$ $C_{13-15} = 9$ $C_{14-11} = 11,6$ $C_{14-12} = 4,8$ $C_{14-13} = 10,6$ $C_{14-15} = 5,6$
19	$C_{1-3} = 4,3$ $C_{1-4} = 6,7$ $C_{2-5} = 8,9$ $C_{3-4} = 17,1$ $C_{3-5} = 10,1$ $C_{4-3} = 17,1$ $C_{4-5} = 14,2$ $C_{4-6} = 4,1$ $C_{4-7} = 13,5$ $C_{5-2} = 8,9$	$C_{5-3} = 10,1$ $C_{5-4} = 14,2$ $C_{5-7} = 6,2$ $C_{5-8} = 5,4$ $C_{6-4} = 4,1$ $C_{6-7} = 11,9$ $C_{6-8} = 8,4$ $C_{7-4} = 13,5$ $C_{7-5} = 6,2$ $C_{7-6} = 11,9$	$C_{7-8} = 14,9$ $C_{7-9} = 16,1$ $C_{7-10} = 7,6$ $C_{8-5} = 5,4$ $C_{8-6} = 8,4$ $C_{8-7} = 14,9$ $C_{8-9} = 11,4$ $C_{8-11} = 13,2$ $C_{9-7} = 16,1$ $C_{9-8} = 11,4$	$C_{9-10} = 15,5$ $C_{9-11} = 15,8$ $C_{10-7} = 7,6$ $C_{10-9} = 15,5$ $C_{11-8} = 13,2$ $C_{11-9} = 15,8$ $C_{11-12} = 10,4$ $C_{11-14} = 11,9$ $C_{12-11} = 10,4$ $C_{12-13} = 12,9$	$C_{12-14} = 17,7$ $C_{12-15} = 13,9$ $C_{13-12} = 12,9$ $C_{13-14} = 17,6$ $C_{13-15} = 16,8$ $C_{14-11} = 11,9$ $C_{14-12} = 17,7$ $C_{14-13} = 17,6$ $C_{14-15} = 5,2$
20	$C_{1-3} = 13,2$ $C_{1-4} = 12$ $C_{3-4} = 5,8$ $C_{3-5} = 13,1$ $C_{3-6} = 15,6$ $C_{4-3} = 5,8$ $C_{4-5} = 17,5$ $C_{4-7} = 18,3$ $C_{5-3} = 13,1$ $C_{5-4} = 17,5$ $C_{5-6} = 18,1$	$C_{5-7} = 9,3$ $C_{6-3} = 15,6$ $C_{6-5} = 18,1$ $C_{6-7} = 16,5$ $C_{6-8} = 16,8$ $C_{6-9} = 11,9$ $C_{7-4} = 18,3$ $C_{7-5} = 9,3$ $C_{7-6} = 16,5$ $C_{7-8} = 14,8$ $C_{7-9} = 17,8$	$C_{7-10} = 18,4$ $C_{8-6} = 16,8$ $C_{8-7} = 14,8$ $C_{8-10} = 14,7$ $C_{8-11} = 12,4$ $C_{9-6} = 11,9$ $C_{9-7} = 17,8$ $C_{9-10} = 4,3$ $C_{9-11} = 5,8$ $C_{9-12} = 17,6$ $C_{10-7} = 18,4$	$C_{10-8} = 14,7$ $C_{10-9} = 4,3$ $C_{10-12} = 7$ $C_{10-13} = 16,9$ $C_{11-8} = 12,4$ $C_{11-9} = 5,8$ $C_{11-12} = 15,6$ $C_{11-13} = 14,4$ $C_{12-9} = 17,6$ $C_{12-10} = 7$ $C_{12-11} = 15,6$	$C_{12-14} = 8$ $C_{12-15} = 8$ $C_{13-10} = 16,9$ $C_{13-11} = 14,4$ $C_{13-15} = 12,2$ $C_{14-12} = 8,0$ $C_{14-15} = 12,5$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение графа.

2. Дайте определение сетевой модели.

3. Какие два основных типа сетевых моделей, отличающиеся составом информации о комплексе работ (процессов), Вы можете назвать?

4. Что в теории графов называется сетью?

5. Что принималось за неизвестные в разработанной Вами сетевой модели?

6. В чем специфика переменных в задачах оптимизации маршрута движения?

7. Запишите в математическом виде целевую функцию разработанной Вами модели по оптимизации маршрута движения.

8. Запишите в структурном виде задачу по оптимизации маршрута движения.

6. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Для раскрытия сущности имитационного моделирования предлагается использовать определение, данное Р. Шенноном в книге «Имитационное моделирование систем – искусство и наука». Он трактует имитационное моделирование как процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить последствия реализации различных стратегий развития системы, а имитационную модель Шеннон рассматривает как инструмент анализа поведения системы в условиях, определяемых экспериментатором.

В последнее время с развитием инструментальных и программных средств метод имитационного моделирования все чаще сводится к «многократному испытанию модели с нужными входными данными для определения их влияния на выходные критерии оценки работы системы». При чем, изменение входных данных, как правило, задается с помощью стохастически изменяющихся параметров. При этом следует помнить, слова Р.Шеннона, одного из основоположников имитационного моделирования, в свое время предупреждавшего о том, что «многие авторы употребляют термин «имитационное моделирование» в гораздо более узком смысле, чем тот, который был определен выше. … входы модели и (или) функциональные соотношения между различными ее компонентами могут содержать, а могут и не содержать элемент случайности, подчиняющийся вероятностным законам. Более того, мы не ограничиваем наше определение имитационного моделирования лишь экспериментами, проводимых с помощью машинных моделей. Много полезных видов имитационного моделирования может быть осуществлено … с помощью бумаги и пера или настольного вычислителя».

Всю совокупность имитационных моделей, используемых ля исследования агроэкономических систем можно представить в виде моделей трех уровней. Модели первого уровня предполагают имитацию изменений параметров системы или процесса без учета элементов случайности, второго уровня - имитацию изменения случайных факторов; третьего уровня - имитацию процесса развития системы во времени с учетом изменения случайных факторов. С помощью моделей первого уровня можно, например, провести сравнительную оценку эффективности технологий возделывания отдельных сельскохозяйственных культур, имитируя использование различных агрегатов и различных технологических операций. Примером использования моделей второго уровня является оценка возможной урожайности сельскохозяйственных культур при различном уровне осадков по периодам. Модели третьего уровня наиболее части используются для оценки эффективности инвестиционных проектов на заданном горизонте планирования с учетом стохастического изменения определенной заранее группы факторов.

Имитационная модель – это логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта. Имитационная модель имеет определенную минимальную опорную структуру, ко-

торую пользователь может дополнить и расширить с учетом специфики решаемых задач и базовых методов обработки.

Имитационное моделирование — это метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе. В общем виде структуру имитационной модели в математической форме можно представить следующим образом:

$$E = f(x_i, y_i)$$

где Е – результат действия системы;

x_i – переменные и параметры, которыми мы можем управлять;

y_i – переменные и параметры, которыми мы управлять не можем;

f – функциональная зависимость между x_i и y_i, которая определяет величину E.

В отличие от аналитического моделирования, конструирующего математические модели реального объекта в виде алгебраических, дифференциальных и других уравнений, а также предусматривающих осуществление однозначной вычислительной процедуры, приводящей к их точному решению, имитационное моделирование исследует математические модели в виде алгоритмов, воспроизводящих функционирование исследуемой системы путем последовательного выполнения большого количества элементарных операций.

В имитационных моделях для получения необходимой информации или результатов необходимо осуществлять их «прогон» в отличие от аналитических моделей, которые необходимо «решать».

Имитационные модели неспособны формировать свое собственное решение в том виде, в каком это имеет место в аналитических моделях, а могут лишь служить в качестве средства для анализа поведения системы в условиях, которые определяются экспериментатором.

6.1. Имитационная модель денежных потоков и формирования источников финансирования

Постановка задачи и подготовка входной информации

Моделирование денежных потоков является одним из основных инструментов финансового планирования. Для реализации данной модели целесообразно использовать методы имитационного моделирования, поскольку именно имитационные модели предоставляют наиболее широкие возможности анализа и оценки функционирования объекта при разнообразных изменениях входных параметров.

Разработку имитационной модели денежных потоков приведем на примере одной сельскохозяйственной культуры: пивоваренного ячменя.

В хозяйстве возделывается пивоваренный ячмень сорта Скарлетт на площади 100 га. Планируемая урожайность – 40 ц/га. Для моделирования помесячного денежного потока была разработана технологическая карта выращивания данной культуры. Путем обработки технологической карты была получена информация, представленная в таблице 44.

Таблица 44. Потребность в денежных средствах, тыс. руб.

Статьи затрат	Номер месяца												За год
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Прошлый хозяйственный год													
Оплата с отчислениями									12,0				12,0
Семена													
Удобрения									589,2				589,2
ХСЗР													
Дизельное топливо									79,3				79,3
Текущий ремонт									9,9				9,9
Электроэнергия													
Автотранспорт									1,4				1,4
Всего									691,8				691,8
Текущий хозяйственный год													
Оплата с отчислениями				22,8	3,1	3,1	27,7						56,7
Семена				337,2									337,2
Удобрения				182,3									182,3
ХСЗР				18,1	158,1	73,5							249,7
Дизельное топливо				22,8	3,1	3,1	27,7						56,7
Текущий ремонт				6,4	1,5	1,5	35,9						45,3
Электроэнергия				0,1			3,1						3,2
Автотранспорт				1,0			13,9						14,8
Всего				590,8	165,8	81,2	108,2						946,0

По условиям задачи на начало производственного цикла собственные средства у предприятия отсутствуют. Все операционные (текущие) расходы до реализации произведенной продукции ежемесячно покрываются за счет заемных средств. Предприятие имеет кредитную линию с лимитом до 2,0 млн руб. Процентная ставка за пользование кредитом составляет 17% годовых. Информация о планируемых денежных потоках приведена в табл. 45.На рис. 53 приведена имитационная модель денежных потоков и формирования источников финансирования производства ячменя.

В строках 6-17 листа «Потоки» приведена информация, характеризующая операционную деятельность по производству ячменя. Информация по строкам 8-17 заполняется на основании данных табл. 44. Реализация ячменя планируется в августе. Объем выручки от реализации ячменя определяется по формуле: **N7=H1*H2/10*C1/1000**.Сальдо денежных потоков (строка 18) определяется как разница между поступлением и расходованием денежных средств**. C18=C7-C17**, а затем эта формула копируется для ячеек **D18:O18**.

Сальдо нарастающим итогом (строка 19) определяется по формуле: **C19=B19+C18**, а затем эта формула копируется для ячеек **D18:N18**.

Модель формирования источников финансирования приведена в строках 20-32 листа «Потоки».

Таблица 45. Имитационная модель денежных потоков по операционной деятельности, тыс. руб.

Показатели	Дата операции	Прошлый год				Текущий год								Всего
		9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	
Операционная деятельность														
Операционные доходы, тыс. руб.														
Реализация ячменя													2 800,0	2 800,0
Операционные расходы, тыс. руб.														
Оплата с отчислениями		12,0							22,8	3,1	3,1	27,7		68,8
Семена									337,2					337,2
Удобрения		589,2							182,3					771,5
ХСЗР									18,1	158,1	73,5			249,7
Дизельное топливо		79,3							22,8	3,1	3,1	27,7		136,0
Текущий ремонт		9,9							6,4	1,5	1,5	35,9		55,2
Электроэнергия									0,1			3,1		3,2
Автотранспорт		1,4							1,0			13,9		16,2
Всего		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
Сальдо от операционной деятельности, тыс. руб.		-691,8							-590,8	-165,8	-81,2	-108,2	2 800,0	1 162,2
то же, нарастающим итогом		-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-1 282,5	-1 448,3	-1 529,5	-1 637,8	1 162,2	

Таблица 46. Имитационная модель формирования источников финансирования производства ячменя, тыс. руб.

Показатели	Д о лачан	Прошлый год				Текущий год								Всего
		9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	
Потребность в денежных средствах														
На операционную деятельность		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
На выплату процентов за кредит			9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	10,7	19,2	21,8	23,3	25,1	161,0
Всего требуется		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5	25,1	1 798,7
Имеется выручки													2 800,0	2 800,0
Источники покрытия														
Из выручки													25,1	25,1
Заемные средства		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5		1 773,6
Остаток выручки													2 774,9	
На погашение основного долга по кредиту													1 773,6	
Остаток кредита нарастающим итогом		691,8	701,6	711,5	721,6	731,8	742,2	752,7	1 354,1	1 539,1	1 642,1	1 773,6		
Сальдо от финансовой деятельности													1 001,3	
то же, нарастающим итогом													1 001,3	

6_1 Пример имитационной модели - Excel

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД РАЗРАБОТЧИК Foxit Reader PDF ABBYY FineReader 12

C26 =ЕСЛИ(СУММ($B$24:C24)-СУММ($B$26:B26)-СУММ($B$29:B29)>C23;C23;СУММ($B$24:C24)-СУММ($B$26:B26)-СУММ($B$29:B29))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Цена реализации 1 т ячменя, руб.		7 000		Площадь посева, га			100							
2	Стака по кредитам		17%		Урожайность, ц/га			40							
3	Показатели	До начала производства	Прошлый год				Текущий год								Всего
4			9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	
5	**Операционная деятельность**														
6	Операционные доходы, тыс. руб.														
7	Реализация ячменя													2 800,0	2 800,0
8	Операционные расходы, тыс. руб.														
9	Оплата с отчислениями		12,0							22,8	3,1	3,1	27,7		68,8
10	Семена									337,2					337,2
11	Удобрения		589,2							182,3					771,5
12	ХСЗР									18,1	158,1	73,5			249,7
13	Дизельное топливо		79,3							22,8	3,1	3,1	27,7		136,0
14	Текущий ремонт		9,9							6,4	1,5	1,5	35,9		55,2
15	Электроэнергия									0,1			3,1		3,2
16	Автотранспорт		1,4							1,0			13,9		16,2
17	Всего		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
18	Сальдо от операционной деятельности, тыс. руб.		-691,8							-590,8	-165,8	-81,2	-108,2	2 800,0	1 162,2
19	то же, нарастающим итогом		-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-691,8	-1 282,5	-1 448,3	-1 529,5	-1 637,8	1 162,2	
20	**Потребность в денежных средствах**														
21	На операционную деятельность		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
22	На выплату процентов за кредит			9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	10,7	19,2	21,8	23,3	25,1	161,0
23	Всего требуется		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5	25,1	1 798,7
24	Имеется выручки													2 800,0	2 800,0
25	**Источники покрытия**														
26	Из выручки													25,1	25,1
27	Заемные средства		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5		1 773,6
28	Остаток выручки													2 774,9	
29	На погашение основного долга по кредиту													1 773,6	
30	Остаток кредита нарастающим итогом		691,8	701,6	711,5	721,6	731,8	742,2	752,7	1 354,1	1 539,1	1 642,1	1 773,6		
31	Сальдо от финансовой деятельности													1 001,3	
32	то же, нарастающим итогом													1 001,3	

Справочник | Оборотные средства | Техкарты | Затраты помесячно | Потоки | Потоки (2) | ...

ГОТОВО 100%

Рисунок 53. Имитационная модель денежных потоков и формирования источников финансирования производства ячменя

Месячная потребность в денежных средствах на операционную деятельность (строка 21) соответствует строке 17, то есть **C21=C17**, а затем эта формула копируется для ячеек **D21: O21**.

Месячная потребность в денежных средствах на выплату процентов за кредит (строка 22) определяется как произведение величины кредиторской задолженности в предыдущем месяце и ставки по кредитам, деленной на 12: **C22=B30·$C$2/12**, а затем эта формула копируется для ячеек **D22:N22**.

Годовая сумма выплат процентов определяется как сумма месячных выплат: **O22=СУММ(C22:N22)**.

Общая потребность в денежных средствах определяется путем суммирования месячной потребности в денежных средствах на операционную деятельность (строка 21) и месячной потребности в денежных средствах на выплату процентов за кредит (строка 22). **C23=C21+C22**, а затем эта формула копируется для ячеек **D23: O23**.

Значения строки 24 «Имеется выручки» соответствуют значениям строки 7, характеризующим размер выручки от реализации ячменя. **C24=C7**, а затем эта формула копируется для ячеек **D24:O24**.

Покрытие потребности в денежных средствах из выручки (строка 26) происходит в соответствии с условием: если разница между имеющейся выручкой нарастающим итогом, суммарными выплатами, произведенными из выручки и суммарным погашением основного долга по кредиту превышает текущую месячную потребность в денежных средствах, то из выручки покрывается весь объем текущей месячной потребности в денежных средствах. В противном случае из выручки может быть покрыта лишь разница между имеющейся выручкой нарастающим итогом, суммарными выплатами из выручки и суммарным погашением основного долга по кредиту: **C26=ЕСЛИ(СУММ($B$24:C24)-СУММ($B$26:B26)-СУММ($B$29:B29)>C23;C23;СУММ($B$24:C24)-СУММ($B$26:B26) - СУММ($B$29:B29))**, а затем эта формула копируется для ячеек **D26:N26**.

Годовая сумма финансирования текущих затрат из выручки определяется как сумма месячных выплат: **O26=СУММ(C26:N26)**.

Объем заемных средств в текущем месяце определяется исходя из следующего условия: если разница между общей потребностью в денежных средствах и сальдо от операционной деятельности нарастающим итогом имеет отрицательное значение, меньше или равна нулю, то заемные средства не привлекаются, в противном случае находится разница между общей потребностью в денежных средствах и покрытием потребности в денежных средствах в текущем месяце за счет выручки. **C27=ЕСЛИ(C23-C19<=0;0;C23-C26)**, а затем эта формула копируется для ячеек **D27:N27**.

Годовая сумма заемных средств определяется как сумма месячных заимствований: **O27=СУММ(C27:N27)**.

Для определения ежемесячного остатка выручки проверяется условие:

если разница между имеющейся выручкой и выплатами из выручки меньше или равна нулю, то остатка выручки нет, в противном случае остаток выручки определяется как разница между имеющейся выручкой и выплатами из нее. **C28=ЕСЛИ(C24-C26<=0;0;C24-C26)**, а затем эта формула копируется для ячеек **D28:N28**.

Величина средств, направляемых на погашение основного долга по кредиту, определяется исходя из условия: если остаток выручки превышает остаток основного долга по кредиту, то весь остаток кредита гасится, в противном случае на погашение основного долга направляется весь имеющийся остаток выручки. **C29=ЕСЛИ(C28>B30;B30;C28)**, а затем эта формула копируется для ячеек **D29:N29**.

Остаток кредита нарастающим итогом определяется исходя из условия: если разница между суммой заемных средств нарастающим итогом и суммой денежных средств нарастающим итогом, направленных на погашение основного долга, отрицательна, то остатка основного долга по кредиту нет, в противном случае остаток находится как разница между суммой заемных средств нарастающим итогом и суммой денежных средств нарастающим итогом, направленных на погашение основного долга. **C30= ЕСЛИ(СУММ($B$27:C27)-СУММ($B$29:C29)<0;0;СУММ($B$27:C27)-СУММ($B$29:C29))**, а затем эта формула копируется для ячеек **D30:N30**.

Сальдо от финансовой деятельности находится как сумма имеющейся в текущем месяце выручки и заемных средств за вычетом средств, направленных на покрытие текущей потребности в денежных средствах, и погашение основного долга по кредиту. **C31=C24+C27-C23-C29**, а затем эта формула копируется для ячеек **D31:N31**.

Сальдо нарастающим итогом (строка 32) определяется по формуле**: C32=B32+C31**, а затем эта формула копируется для ячеек **D32:N32**.

В отличие от моделей оптимального выбора данная модель не позволяет выбрать наилучшее решение в соответствии с каким-либо критерием, но является надежным инструментом изучения поведения системы при различных изменениях входных параметров.

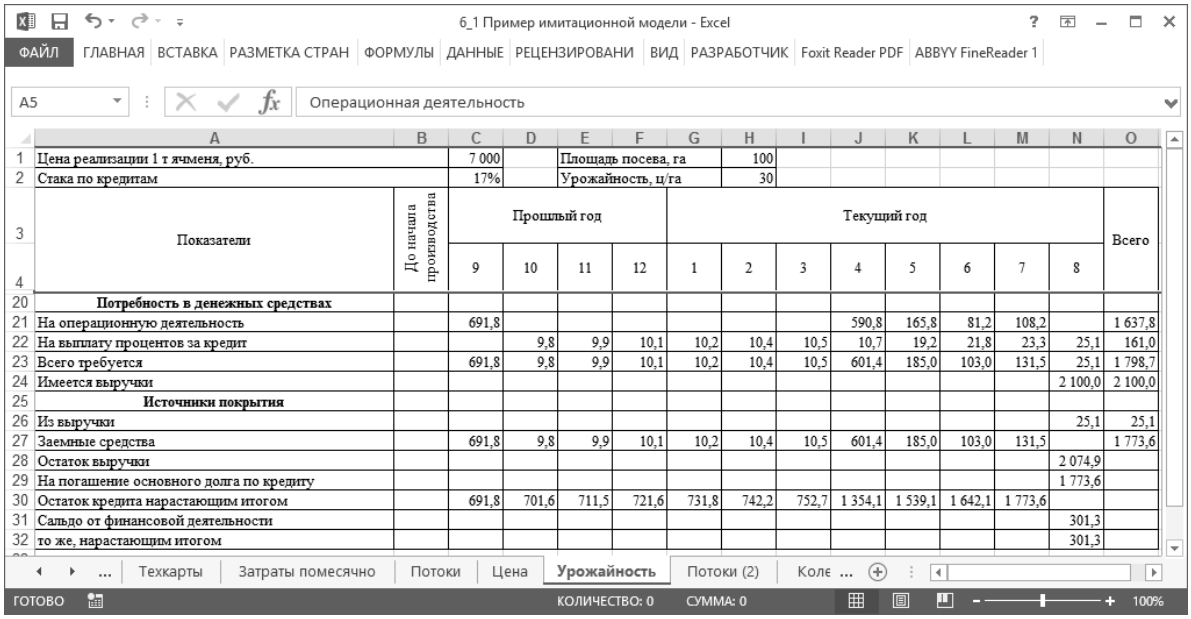
Так, при планируемых условиях хозяйствования общая потребность в денежных средствах, необходимых для выращивания ячменя на площади 100 га, составит 1 798,7 тыс. руб., из которых 1 637,8 тыс. руб. будет направлена на финансирование операционной деятельности, а 161,0 тыс. руб. – на выплату процентов по кредитам. Сальдо денежных потоков составит 1001,3 тыс. руб., что свидетельствует о довольно высоком уровне привлекательности пивоваренного ячменя для сельских товаропроизводителей. Правда, этот вывод корректен лишь для заданных условий функционирования.

С помощью разработанной модели можно как сымитировать изменения условий хозяйствования через корректировку входных параметров модели, так и определить критические для предприятия значения этих параметров.

Например, при падении цены реализации ячменя с 7 000 до 5 000 руб. за 1 т сальдо денежных потоков за рассматриваемый период снизится до 201,3 тыс. руб. (рис. 54), при снижении урожайности с 40 до 30 ц/га – до 301,3 тыс. руб. (рис. 55).

1	Цена реализации 1 т ячменя, руб.		5 000		Площадь посева, га			100							
2	Стака по кредитам		17%		Урожайность, ц/га			40							
3	Показатели	До начала производства	Прошлый год				Текущий год								Всего
4			9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	
20	**Потребность в денежных средствах**														
21	На операционную деятельность		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
22	На выплату процентов за кредит			9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	10,7	19,2	21,8	23,3	25,1	161,0
23	Всего требуется		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5	25,1	1 798,7
24	Имеется выручки													2 000,0	2 000,0
25	**Источники покрытия**														
26	Из выручки													25,1	25,1
27	Заемные средства		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5		1 773,6
28	Остаток выручки													1 974,9	
29	На погашение основного долга по кредиту													1 773,6	
30	Остаток кредита нарастающим итогом		691,8	701,6	711,5	721,6	731,8	742,2	752,7	1 354,1	1 539,1	1 642,1	1 773,6		
31	Сальдо от финансовой деятельности													**201,3**	
32	то же, нарастающим итогом													201,3	

Рисунок 54. Результаты прогона имитационной модели при цене реализации ячменя 5 000 руб. за 1 т



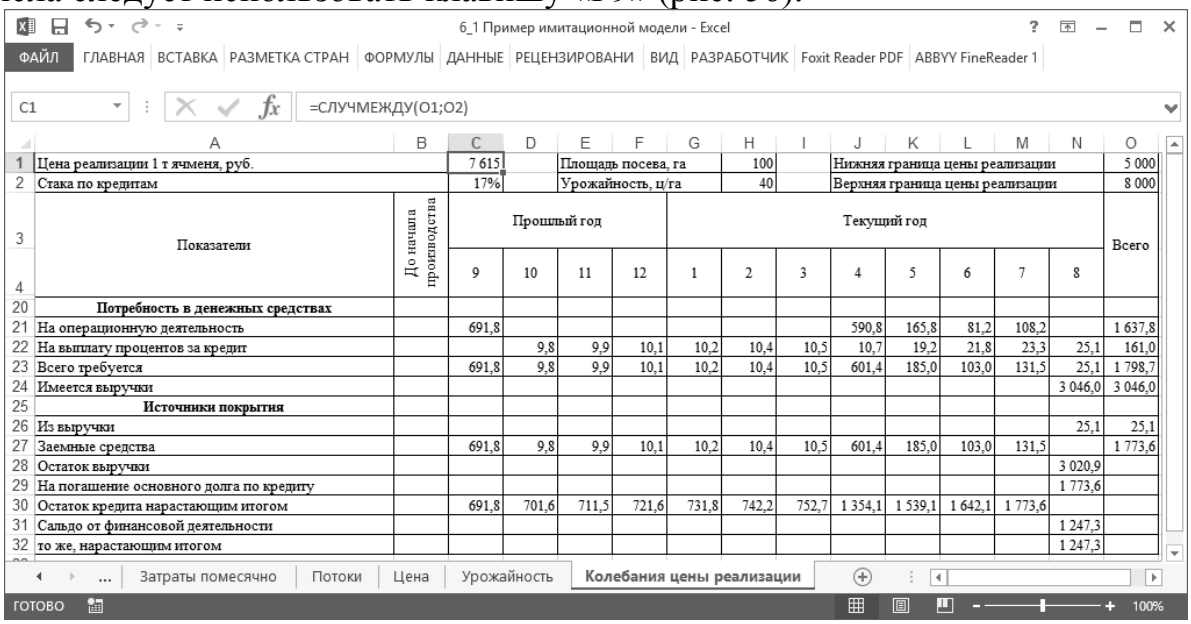
1	Цена реализации 1 т ячменя, руб.		7 000		Площадь посева, га			100							
2	Стака по кредитам		17%		Урожайность, ц/га			30							
3	Показатели	До начала производства	Прошлый год				Текущий год								Всего
4			9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	
20	**Потребность в денежных средствах**														
21	На операционную деятельность		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
22	На выплату процентов за кредит			9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	10,7	19,2	21,8	23,3	25,1	161,0
23	Всего требуется		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5	25,1	1 798,7
24	Имеется выручки													2 100,0	2 100,0
25	**Источники покрытия**														
26	Из выручки													25,1	25,1
27	Заемные средства		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5		1 773,6
28	Остаток выручки													2 074,9	
29	На погашение основного долга по кредиту													1 773,6	
30	Остаток кредита нарастающим итогом		691,8	701,6	711,5	721,6	731,8	742,2	752,7	1 354,1	1 539,1	1 642,1	1 773,6		
31	Сальдо от финансовой деятельности													301,3	
32	то же, нарастающим итогом													301,3	

Рисунок 55. Результаты прогона имитационной модели при урожайности ячменя 30 ц/га

Изменения параметров можно задавать с помощью генератора случайных чисел. Для этого необходимо задать нижнюю **(НГ)** и верхнюю **(ВГ)** границу значений параметра и использовать функцию **СЛУЧМЕЖДУ()** или **СЛЧИС()**. Обратите внимание, что аргументы у функции **СЛЧИС()** отсутствует, и в случае ее использования генерация случайного числа в заданных пределах изменения происходит по формуле: **=СЛЧИС()·(ВГ-НГ)+НГ.**

Для исследования поведения системы при случайных изменениях цен реализации ячменя на расчетном листе «Потоки» в ячейках **O1** и **O2** необходимо ввести значения нижнего и верхнего пределов ее колебаний. Тогда в

ячейку **C1** вместо заданной по условию цены реализации необходимо ввести формулу **C1=СЛУЧМЕЖДУ(O1; O2).** Для генерации нового случайного числа следует использовать клавишу «F9» (рис. 56).



6_1 Пример имитационной модели - Excel

C1 =СЛУЧМЕЖДУ(O1;O2)

1	Цена реализации 1 т ячменя, руб.		7 615		Площадь посева, га		100		Нижняя граница цены реализации						5 000
2	Стака по кредитам		17%		Урожайность, ц/га		40		Верхняя граница цены реализации						8 000
3	Показатели	До начала производства	Прошлый год				Текущий год								Всего
4			9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	
20	**Потребность в денежных средствах**														
21	На операционную деятельность		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
22	На выплату процентов за кредит			9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	10,7	19,2	21,8	23,3	25,1	161,0
23	Всего требуется		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5	25,1	1 798,7
24	Имеется выручки													3 046,0	3 046,0
25	**Источники покрытия**														
26	Из выручки													25,1	25,1
27	Заемные средства		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5		1 773,6
28	Остаток выручки													3 020,9	
29	На погашение основного долга по кредиту													1 773,6	
30	Остаток кредита нарастающим итогом		691,8	701,6	711,5	721,6	731,8	742,2	752,7	1 354,1	1 539,1	1 642,1	1 773,6		
31	Сальдо от финансовой деятельности													1 247,3	
32	то же, нарастающим итогом													1 247,3	

Затраты помесячно | Потоки | Цена | Урожайность | Колебания цены реализации

ГОТОВО 100%

Рисунок 56. Результаты прогона имитационной модели при выборе цены реализации ячменя с использованием генератора случайных чисел

Для установления критических или некоторых заданных значений параметров целесообразно использовать инструмент **Подбор параметра** раздела **Анализ “Что, если?»** из вкладки **Данные**. Данный инструмент позволяет получить заданное значение какого-либо параметра при изменении указанной ячейки.

Например, для того чтобы определить, какой уровень цены реализации ячменя является критическим для предприятия (сальдо от финансовой деятельности равно 0), необходимо задать следующие значения инструмента **Подбор параметра**:

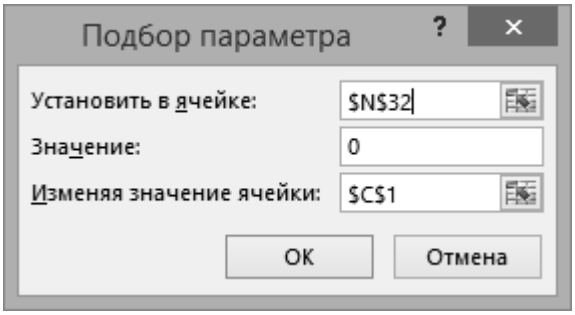


Рисунок 57. Пример заполнения полей инструмента **Подбор параметра**

После подтверждения введенных значений с помощью нажатия виртуальной кнопки «ОК» на экране появляется диалоговое окно **Результаты подбора параметра** (рис. 58):

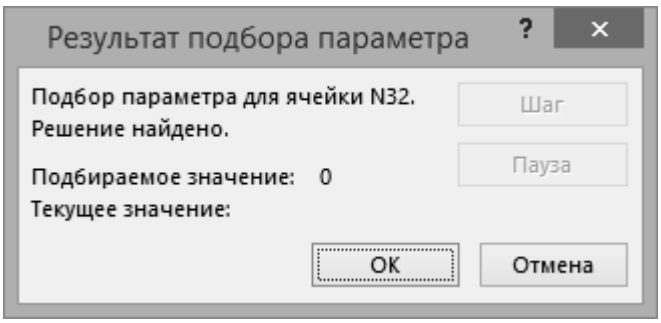


Рисунок 58. Пример состояния диалогового окна **Результаты подбора параметра**

Если в диалоговом окне **Результаты подбора параметра** появляется информация «Решение найдено», то после нажатия кнопки **ОК** можно оценить все выходные параметры, отражающие состояние системы. Если в диалоговом окне **Результаты подбора параметра** появляется информация «Решение не найдено», то после нажатия кнопки **Отмена** необходимо скорректировать значения полей инструмента **Подбор параметра**.

На рис. 59 приведен результат подбора критического уровня цены реализации ячменя, при котором сальдо финансовых потоков принимает нулевое значение. Критической ценой ячменя при прочих заданных условиях является 4 497 руб./т.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Цена реализации 1 т ячменя, руб.		4 497		Площадь посева, га			100							
2	Стака по кредитам		17%		Урожайность, ц/га			40							
3	Показатели	До начала производства	Прошлый год				Текущий год								Всего
4			9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	
20	**Потребность в денежных средствах**														
21	На операционную деятельность		691,8							590,8	165,8	81,2	108,2		1 637,8
22	На выплату процентов за кредит			9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	10,7	19,2	21,8	23,3	25,1	161,0
23	Всего требуется		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5	25,1	1 798,7
24	Имеется выручки													1 798,7	1 798,7
25	**Источники покрытия**														
26	Из выручки													25,1	25,1
27	Заемные средства		691,8	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	601,4	185,0	103,0	131,5		1 773,6
28	Остаток выручки													1 773,6	
29	На погашение основного долга по кредиту													1 773,6	
30	Остаток кредита нарастающим итогом		691,8	701,6	711,5	721,6	731,8	742,2	752,7	1 354,1	1 539,1	1 642,1	1 773,6	0,0	
31	Сальдо от финансовой деятельности														
32	то же, нарастающим итогом														

Затраты помесячно | Потоки | Цена | Урожайность | Колебания цены реализации

Рисунок 59. Результат подбора критического уровня цены реализации ячменя

Задание для самостоятельной работы

Используя условия предыдущей задачи, разработать имитационную модель и осуществить ее прогоны по следующим сценариям:

1. Используя инструмент **Подбор параметра** определить:

- при каких ставках за пользование кредитом сальдо денежных потоков достигнет значения 100 тыс. руб.;
- при каком уровне урожайности сальдо денежных потоков достигнет значения 0;
- при каких ставках за пользование кредитом годовая сумма средств, направленных на выплату процентов, составит 50 тыс. руб.

2. Проанализировать изменения выходных параметров модели при условии, что до начала процесса производства у предприятия имелся остаток выручки в объеме 250 тыс. руб. (ячейка **B24=250**). Для этого в разработанной мо-

дели необходимо дополнительно ввести следующие формулы: **B31=B24** и **B32=B31**.

3. При условиях, заданных в пункте 2, выполнить задания пункта 1.

4. При исходных условиях проанализировать изменения выходных параметров модели при росте цен на дизельное топливо, минеральные удобрения и химические средства защиты растений соответственно на 25%, 20% и 15%.

Вопросы для самоконтроля

При выполнении данного задания проверяются только практические навыки разработки и реализации имитационной модели.

7. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Тесты для оценки знаний по разделам и в целом по изучаемой дисциплине

Раздел 1. Теоретические и методические основы экономико-математического моделирования

Тема 1.1. История применения математических методов в экономике

1. Кто автор «Эссе о политической арифметике» - первой работы, в основе которой лежал статистико-экономический метод исследования?
Карл Маркс
Уильям Пети
Адам Смит
Джон Мейнард Кейнс

2. Кто первым в своих расчетах стал опираться на положение о том, что обмен материальных благ совершается на началах их равноценности, зависящей от одинаковых затрат труда?
Франсуа Кенэ
Адам Смит
Карл Маркс
Давид Рикардо

3. Кто считается основателем концепции общего экономического равновесия, автором первой математической интерпретации экономического равновесия?
Альфред Маршалл
Мари Эспри Леон Вальрас
Вильфредо Парето
Роберт Мертон Солоу

4. Кто установил, что функция спроса является непрерывной, и применил ее для решения задачи максимизации дохода в условиях монополии и свободной конкуренции?
Антуан Курно
Давид Рикардо
Мари Эспри Леон Вальрас
Альфред Маршалл

5. Кто открыл производственную функцию, определяющую зависимость величины совокупного общественного продукта от совокупных затрат живого труда и капитала?
Чарльз Кобб и Пол Дуглас
Карл Маркс и Фридрих Энгельс
Джон Мейнард Кейнс и Артур Сесил Пигу
Фридрих фон Визер и Эйген фон Бём-Баверк

6. Кто из указанных ниже ученых является авторами фундаментальной монографии «Теория игр и экономического поведения», в которой изложены принципы математического анализа и оптимизации принятия решения в ситуациях, когда два или более субъекта экономических отношений, имеющие разные интересы, взаимодействуют между собой?
Фридрих фон Визер и Эйген фон Бём-Баверк
Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн
Вильфредо Парето и Леон Вальрас

Чарльз Кобб и Пол Дуглас

7. Какой ученый считается основателем эконометрики?

Мари Эспри Леон Вальрас

Джон фон Нейман

Рагнар Антон Киттиль Фриш

Вильфредо Парето

8. Кто считается автором макроэкономической модели, учитывающей вклад технологического параметра в экономический рост?

Роберт Мертон Солоу

Мари Эспри Леон Вальрас

Вильфредо Парето

Антуан Курно

9. Кто разработал метод экономического анализа и прогнозирования «затраты-выпуск» (метод межотраслевого баланса)?

Давид Рикардо

Чарльз Кобб

Леонид Витальевич Канторович

Василий Васильевич Леонтьев

10. Кто из ученых считается создателем теории линейного программирования?

Роберт Мертон Солоу

Леонид Витальевич Канторович

Джон Мейнард Кейнс

Рагнар Антон Киттиль Фриш

11. Кто считается основателем математической школы в политической экономии, одним из первых попытавшихся применить математические средства к экономическому анализу?

Мари Эспри Леон Вальрас

Джевонс Уильям Стэнли

Вильфредо Парето

Фридрих фон Визер

12. Кто предложил модель «спрос-предложение», сформулировал свойства кривой спроса, дал понятие эластичности спроса от цены, ввел в анализ понятия мгновенного, короткого и длительного периодов, показав, как зависит цена от длительности рассматриваемого периода?

Альфред Маршалл

Мари Эспри Леон Вальрас

Вильфредо Парето

Роберт Мертон Солоу

13. Кто предложил под оптимальностью понимать такое состояние системы, при котором значение каждого частного критерия, описывающего состояние системы, не может быть улучшено без ухудшения положения дру-

гих элементов?

Леонид Витальевич Канторович

Мари Эспри Леон Вальрас

Вильфредо Парето

Роберт Мертон Солоу

14. Кто первый разработал модель общего экономического равновесия, развил понятие мультипликатора?

Джон Мейнард Кейнс

Мари Эспри Леон Вальрас

Вильфредо Парето

Антуан Курно

15. Этот ученый является одним из основателей математической статистики, с помощью которой оцениваются параметры уравнения регрессии. Он внес вклад в теорию статистической проверки гипотез, разработал методику планирования эксперимента.

Чарльз Кобб

Мари Эспри Леон Вальрас

Вильфредо Парето

Рональд Эйлмер Фишер

Тема 1.2. Системы и системный подход

1. Что такое система?

Совокупность взаимосвязанных элементов

Совокупность взаимосвязанных элементов, позволяющая получить новые свойства

Совокупность взаимосвязанных элементов, позволяющая получить новые свойства и дополнительный синергетический эффект

Совокупность взаимосвязанных элементов, позволяющая получить новые свойства и дополнительный экономический эффект.

2. Какая из приведенных ниже характеристик не является классификационным признаком систем?

Степень сложности

Детерминированность

Характер взаимодействия со средой

Эффективность функционирования

3. Какие системы считаются простыми?

Системы, имеющие в своем составе не более двух элементов

Системы, имеющие простую структуру

Системы, имеющие простую структуру и линейную взаимосвязь между элементами

Системы, имеющие простую структуру, легко поддающиеся математическому описанию

4. Какие системы считаются сложными?

Системы, имеющие в своем составе много элементов

Системы, имеющие в своем составе много элементов и много внутренних связей

Системы, имеющие много внутренних связей и сложное математическое описание

Системы, имеющие много внутренних связей, которые нельзя описать с помощью линейных функций

5. Какие системы считаются сверхсложными?

   Системы, имеющие в своем составе неопределенное число элементов

   Системы, имеющие очень много внутренних связей и очень сложное математическое описание

   Системы, в которых отдельные элементы имеют сверхсложный характер

   Системы, в которых сущность взаимосвязей между элементами не вполне понятна. Не поддаются математическому описанию

6. Какие системы считаются детерминированными?

   Системы, в процессе функционирования которых последовательность событий задана однозначно

   Системы, процесс функционирования которых является непрерывным

   Системы, процесс функционирования которых является устойчивым

   Системы, в процессе функционирования которых элементы системы остаются неизменными.

7. Какие системы считаются вероятностными?

   Системы, процесс функционирования которых имеет дискретный характер

   Системы, в процессе функционирования которых последовательность событий не детерминирована

   Системы, в процессе функционирования которых элементы системы меняют свои характеристики.

   Системы, процесс функционирования которых является неустойчивым

8. Какие системы называются закрытыми?

   Системы, имеющие неизменные границы

   Системы, имеющие неизменный состав элементов

   Системы, не получающие ресурсы из внешней среды функционирования.

   Системы, имеющие фиксированные границы и функционирующие относительно изолированно и независимо от окружающей среды

9. Какие системы называются открытыми?

   Системы, не имеющие границ

   Системы, функционирующие в условиях постоянного влияния внешней среды

   Системы, элементы которых постоянно меняют свои характеристики

   Системы, получающие ресурсы из внешней среды.

10. Что такое системный подход?

    Методология исследования не взаимосвязанных систем

    Направление методологии исследования, в основе которого лежит рассмотрение каждого элемента системы в отрыве от других

    Направление методологии исследования, в основе которого лежит рассмотрение объекта как целостного множества элементов в совокупности отношений и связей между ними

    Технология поэтапного формирования системы

Тема 1.3. Модели и моделирование

1. Что такое модель?
   Эталон, образец
   Способ отображения наиболее существенных характеристик изучаемых систем и процессов
   Точная копия оригинала
   Увеличенная или уменьшенная копия оригинала

2. Что такое моделирование?
   Метод создания точной копии оригинала
   Метод доведения модели до идеального сходства с оригиналом
   Метод исследования оригинала посредством создания аналога (модели)
   Метод определения взаимосвязей между моделями

3. Физическое подобие между оригиналом и моделью проявляется:
   в сходстве физических размеров оригинала и модели
   в сходстве физической природы оригинала и модели
   в сходстве физических характеристик внешней среды оригинала и модели
   в сходстве физических формул, использованных для описания оригинала и модели

4. Геометрическое подобие между оригиналом и моделью проявляется:
   в сходстве пространственных характеристик оригинала и модели
   в сходстве пространственной протяженности оригинала и модели
   в сходстве геометрических фигур, используемых при описании оригинала и модели
   в сходстве категорий геометрии, используемых при описании оригинала и модели

5. Структурное подобие между оригиналом и моделью проявляется:
   в сходстве элементов оригинала и модели
   в сходстве структур оригинала и модели
   в сходстве структуры среды функционирования оригинала и модели
   в сходстве структур всех систем

6. Функциональное подобие между оригиналом и моделью проявляется:
   в том, что оригинал и модель выполняют сходные функции
   в том, что модель полностью описывает функции хотя бы одного элемента системы
   в том, что модель хотя бы частично описывает функции хотя бы одного элемента системы
   в том, что модель хотя бы частично описывает функции всех элементов системы

7. Динамическое подобие между оригиналом и моделью проявляется:
   в сходстве изменений модели под влиянием изменения оригинала

в сходстве времени на создание оригинала и модели

в сходстве времени функционирования оригинала и модели

в сходстве последовательных изменений оригинала и модели во времени

8. Вероятностное подобие между оригиналом и моделью проявляется:

в высокой вероятности соответствия модели оригиналу

в сходстве между процессами вероятностного характера в оригинале и модели

в вероятности одинаковых изменений в оригинале и модели

в вероятности не одинаковых изменений в оригинале и модели

9. Словесные модели - это:

модели, описываемые с помощью операторов языков высокого уровня

модели, описываемые с помощью одного слова

словесные описания систем и процессов в виде определений, правил, теорем и законов

словесные описания систем и процессов в виде простых предложений

10. Графические модели - это:

графики, на которых представлены все характеристики оригинала

графики, на которых представлены все характеристики всех элементов оригинала

графические описания отдельных элементов систем и процессов с помощью графиков

графические описания систем и процессов с помощью чертежей, рисунков, карт и других способов графического отображения

11. Символьные модели - это:

модели описания систем и процессов с помощью заранее определенного набора символов

детальное описание элементов систем и процессов с помощью набора символов

совокупность символов для использования в процессе моделирования

минимальный набор символов, необходимых для описания оригинала

12. Физические модели - это:

модели, описанные с помощью физических формул

модели сходной природы с оригиналом или геометрически подобные оригиналу

модели, обеспечивающие сходство физических размеров оригинала и модели

модели, описывающие физические взаимосвязи между элементами оригинала

13. Математические модели - это:

модели в виде системы математических уравнений и неравенств, которые могут быть решены методами линейного программирования

модели в виде системы математических уравнений и неравенств, которые могут быть решены с помощью персонального компьютера

модели в виде системы математических уравнений и неравенств, описывающих количественные взаимосвязи между элементами оригинала

модели в виде системы математических уравнений и неравенств, описывающих количественные и качественные характеристики элементов оригинала

14. Переменные математических моделей - это:

переменные величины, характеризующие структуру и состояние моделируемых систем или процессов

переменные величины, значения которых могут изменяться случайным образом

переменные величины, значения которых могут изменяться по заранее описанным алгоритмам

переменные величины, значения которых не могут изменяться

15. Параметры математических моделей - это:

числовые константы, которые описывают качественные характеристики переменных

числовые константы, которые описывают взаимосвязь переменных

числовые константы, которые необходимо пересчитывать после каждой итерации

числовые константы, имеющие неотрицательные значения

Тема 1.4. Классификация экономико-математических методов и моделей

1. Классификационными признаками при классификации экономико-математических моделей являются:

способ отражения действительности, предназначение, способ описания моделируемых экономических систем, временной признак, тип связей, уровень моделируемого объекта

размер модели, предназначение, способ описания моделируемых экономических систем, временной признак, тип связей, уровень моделируемого объекта

размер модели, сложность модели, математический аппарат реализации моделей

способ отражения действительности, предназначение, способ описания моделируемых экономических систем

2. Аналоговые модели (классификация моделей по способу отражения действительности) - это:

модели, аналогичные хотя бы одному элементу оригинала

модели, имеющие структуру, аналогичную оригиналу

модели, имеющие физические размеры, аналогичные оригиналу

модели, свойства которых определяются законами, аналогичными законам изучаемой системы

3. Концептуальные модели (классификация моделей по способу отражения действительности) - это:

модели, дающие наиболее полное описание всех элементов оригинала

модели, дающие предварительное представление об оригинале в виде обобщенной схемы, фиксирующей наиболее существенные параметры и связи между ними

модели, описывающие концепции происхождения оригинала

модели, описывающие эволюцию развития оригинала

4. Структурные модели (классификация моделей по способу отражения действительности) – это:

модели, структура которых является универсальной

модели, описывающие не элементы оригинала, а только взаимосвязи между ними

модели, отражающие структуру и параметры системы, характеристики внешних возмущений

модели, в которых структура каждого элемента соответствует структуре аналогичных элементов оригинала

5. Функциональные модели (классификация моделей по способу отражения действительности) – это:

модели, описывающие поведение оригинала безотносительно к его внутренней структуре

модели, описывающие функциональное предназначение каждого элемента оригинала

модели, описанные с помощью математических функций

модели, описанные с помощью линейных функций

6. Описательные модели (классификация моделей по предназначению) – это:

модели, используемые для описания наблюдаемых фактов или прогноза поведения оригинала

модели, используемые для описания структуры оригинала

модели, используемые для описания отдельных элементов оригинала

модели, используемые для описания размера оригинала

7. Информационные модели (классификация моделей по предназначению) – это:

модели, требующие предварительной обработки информации до начала их разработки

модели данных, используемых для описания элементов оригинала

модели, отображающие информацию о размере и структуре оригинала

модели, отображающие схемы потоков информации, обращающейся в процессе управления объектом

8. Балансовые модели (классификация моделей по предназначению) – это:

модели в виде системы уравнений, которые удовлетворяют требованию соответствия наличия ресурсов и их использования

модели в виде системы неравенств, которые удовлетворяют требова-

нию соответствия наличия ресурсов и их использования

модели в виде системы уравнений и неравенств, которые удовлетворяют требованию соответствия наличия ресурсов и их использования

модели, состоящие из одного уравнения.

9. Имитационные модели (классификация моделей по предназначению) – это:

модели, позволяющие отслеживать реакцию системы на изменения входных параметров

модели, позволяющие отслеживать реакцию системы на изменения структуры модели

модели, позволяющие выбрать наилучшее решение из совокупности допустимых

модели, имитирующие соответствия наличия ресурсов и их использования

10. Оптимизационные модели (классификация моделей по предназначению) – это:

модели, позволяющие выбрать оптимальный способ описания оригинала

модели, позволяющие выбрать оптимальный метод решения задачи

модели, позволяющие из области допустимых решений выявить наилучшее по какому-либо критерию

модели, позволяющие обосновать оптимальный размер самой модели

11. При классификации моделей по способу описания различают:

графические, аналитические и физические модели

графические, аналитические и матричные модели

аналитические и концептуальные модели

физические и математические модели

12. Статические модели (классификация моделей по временному признаку) – это:

модели, которые остаются неизменными при изменении оригинала

модели, для разработки которых используются методы статистики

модели, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени

модели, в которых все зависимости отнесены к разным моментам времени

13. Динамические модели (классификация моделей по временному признаку) – это:

модели, в которых, как минимум, одна из переменных относится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные

модели, в которых все переменные динамически меняются независимо друг от друга

модели, в которых все параметры меняются независимо от переменных

модели, размер которых постоянно изменяется

14. Детерминированные модели (классификация моделей по типу связей) – это:

модели, в которых хотя бы одна переменная имеет детерминированный характер

модель, которая содержит числовые константы

модели, в которых для каждой совокупности входных значений на выходе может быть получен единственный результат

модели, в которых для каждой совокупности входных значений на выходе может быть получено не более двух результатов

15. Стохастические модели (классификация моделей по типу связей) – это:

модели, предполагающие влияние на конечный результат входных параметров

модели, предполагающие влияние на конечный результат случайных факторов

модели, в которых отсутствуют числовые константы

модели, изменяющие структуру стохастически

Тема 1.5. Этапы моделирования

1. Моделирование предполагает реализацию следующих этапов:

постановку экономической задачи и качественный анализ проблемы, построение математической модели, математический анализ модели, подготовку исходной информации, численное решение, анализ численных результатов и их применение

постановку экономической задачи и качественный анализ проблемы, подготовку исходной информации, численное решение, анализ численных результатов и их применение

постановку экономической задачи и качественный анализ проблемы, численное решение, анализ численных результатов и их применение

построение математической модели, математический анализ модели, постановку экономической задачи и качественный анализ проблемы, подготовка исходной информации, численное решение, анализ численных результатов и их применение

2. Одним из этапов моделирования является постановка экономической задачи и качественный анализ проблемы. Цель этого этапа:

выбор метода решения задачи

формулирование проблемы и вопросов, на которые требуется получить ответы

определение экономического закона, повлиявшего на возникновение задачи

математическое описание взаимосвязей между элементами системы

3. Одним из этапов моделирования является построение математической модели. Цель этого этапа:

выбор метода решения задачи

выбор критерия оптимальности

формализация экономической задачи

описание алгоритма решения экономико-математической задачи

4. Одним из этапов моделирования является математический анализ модели. Цель этого этапа:

выяснение общих свойств модели на основе аналитических исследований

выбор метода решения задачи
формирование системы неизвестных и ограничений
формирование области допустимых решений

5. Одним из этапов моделирования является подготовка исходной информации. Цель этого этапа:

формирование базы данных с информацией о состоянии моделируемой системы

формирование достоверной информации, необходимой для разработки модели

преобразование первичной информации в результативную
фиксация информации на электронном носителе

6. Одним из этапов моделирования является численное решение. Цель этого этапа:

выбор метода решения задачи
математическое описание взаимосвязей между элементами системы
формализация экономической задачи
получение результата

7. Одним из этапов моделирования является анализ численных результатов и их применение. Цель этого этапа:

оценка правильности и полноты результатов, степени их практической применимости

определение количества возможных решений задачи на практике

анализ колеблемости полученного решения при реализации его на практике

анализ воздействия внешней среды на результаты решения

8. На каком этапе моделирования происходит изучение структуры объекта и основных зависимостей, связывающих его элементы?

постановка экономической задачи и качественный анализ проблемы
построение математической модели
математический анализ модели
численное решение

9. На каком этапе моделирования происходит формирование системы переменных и ограничений?

постановка экономической задачи и качественный анализ проблемы
построение математической модели
математический анализ модели
численное решение

10. На каком этапе моделирования оценивается возможность получения решения?

постановка экономической задачи и качественный анализ проблемы
построение математической модели
математический анализ модели
численное решение

Раздел 2. Математические модели задач оптимального выбора

Тема 2.1. Формализация задачи оптимизации

1. Экономические задачи, в которых все основные зависимости могут быть выражены количественно, с точки зрения моделирования называются:

   хорошо структурированными
   легко решаемыми
   дискретными
   детерминированными

2. Хорошо структурируемые задачи принято называть:

   аналитическими
   программируемыми
   алгоритмическими
   математическими

3. Математическое программирование – это математическая дисциплина,

   изучающая теорию и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах векторного пространства, заданных с помощью линейных ограничений

   изучающая теорию и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах векторного пространства, заданных с помощью линейных и нелинейных ограничений

   изучающая программное обеспечение для реализации математических задач

   изучающая класс математических задач, которые могут быть решены с помощью персонального компьютера

4. Задачи оптимального выбора – это:

   задачи, в которых выбор наилучшего решения проходит в несколько этапов

   задачи, решаемые с помощью математических моделей, позволяющих определить из области допустимых решений наилучшее по заранее заданному критерию

   задачи, в которых выбор наилучшего решения из области допустимых решений происходит случайным образом

   задачи, в которых каждое решение является наилучшим

5. К характеристикам задач оптимального выбора относятся:

   наличие цели, достижение которой является решением задачи; наличие критерия для сопоставления качества альтернатив; наличие альтернативных средств достижения цели, наличие способов оценки затрат ресурсов, необходимых для каждой альтернативы; наличие способа отображения связей между целями, альтернативами и затратами

   наличие цели, достижение которой является решением задачи; отсутствие

альтернативных средств достижения цели, наличие способов оценки затрат ресурсов; наличие способа отображения связей между целями и затратами

наличие цели, достижение которой является решением задачи; наличие нескольких критериев для сопоставления качества альтернатив; наличие альтернативных средств достижения цели, наличие способов оценки затрат ресурсов, необходимых для каждой альтернативы; наличие способа отображения связей между целями, альтернативами и затратами

наличие цели, достижение которой является решением задачи; наличие критерия для сопоставления качества альтернатив; наличие альтернативных средств достижения цели, наличие способов оценки затрат ресурсов, необходимых для каждой альтернативы

6. Показатель, используемый для сравнительной оценки вариантов допустимых решений (альтернатив), называется:

целевой функцией

вектором

ограничением

критерием оптимальности

7. Формализованный критерий оптимальности, записанный в математическом виде, называется:

формулой

формальным критерием

целевой функцией

показателем

8. Формирование системы неизвестных заключается:

в выявлении элементов, описывающих структуру моделируемой системы, и описании их в виде переменных

в словесном описании всех переменных, описывающих структуру моделируемой системы

в выявлении факторов, ограничивающих развитие моделируемой системы

в выявлении факторов, влияние которых на развитие моделируемой системы носит переменный характер

9. Формирование системы ограничений заключается:

в выявлении факторов, влияние которых на развитие моделируемой системы носит постоянный характер

в описании в формальном виде условий, которые должны быть соблюдены при реализации задачи

в выявлении условий, воздействующих на систему формально

в словесном описании условий, ограничивающих развитие моделируемой системы

10. Этапами формализации задач оптимального выбора являются:

постановка задачи; выбор критерия оптимальности; численное решение задачи

формирование системы неизвестных; формирование системы ограничений, формулирование критерия оптимальности и запись его в виде целевой функции

построение модели; математический анализ модели; анализ результатов решения

формирование системы неизвестных и ограничений

Тема 2.2. Методы многопараметрической оптимизации

1. Методы многопараметрической оптимизации используются:

в тех случаях, когда система должна развиваться, реализуя две и более цели

в тех случаях, когда при одном критерии оптимальности задача не имеет решения

в тех случаях, когда область допустимых решений не ограничена

в тех случаях, когда взаимосвязь между элементами системы не может быть описана с помощью линейных функций

2. Сущность метода последовательных уступок заключается в следующем:

все ограничения поочередно исключаются из модели

один из оптимизируемых параметров принимается в качестве целевой функции, а для других задаются некоторые предельные значения граничных условий. Задачи решаются в нескольких вариантах, отличающихся предельно задаваемыми значениями граничных условий

все оптимизируемые параметры поочередно принимаются в качестве целевой функции. Задача решается в нескольких вариантах с разными целевыми функциями

все параметры модели принимаются в качестве целевой функции. Задача решается в нескольких вариантах (количество вариантов соответствует количеству параметров модели) с разными целевыми функциями

3. При реализации метода последовательных уступок величина приращения предельных значений граничных условий задается:

произвольно

на основании методических рекомендаций по самостоятельной работе

в зависимости от количества переменных

в зависимости от количества ограничений

4. При реализации метода последовательных уступок выбор наилучшего решения осуществляется на основе:

экспертных оценок

критерия оптимальности, значение которого для системы более важно

путем случайного выбора

симплекс-метода

5. Сущность метода нахождения компромиссной целевой функции заключается в следующем:

выбор компромиссного варианта должен исходить из экстремальных значений по каждому критерию

компромиссная целевая функция определяется путем сложения отдельных целевых функций

компромиссная целевая функция определяется как разница между отдельными целевыми функциями

выбор компромиссного варианта должен исходить как из значимости каждого из параметров, так и от отклонений каждого из этих параметров от неких нормативных значений

6. Для расчета компромиссных коэффициентов необходимо иметь информацию:

о количестве оптимизируемых параметров, о количестве реализованных вариантов, о количестве рассматриваемых ситуаций

о количестве оптимизируемых параметров, о количестве реализованных вариантов, о количестве рассматриваемых ситуаций, о размерности модели

о количестве переменных, о количестве ограничений, о количестве критериев оптимальности

о количестве критериев оптимальности

7. В формуле $R_{il} = \sum_{i \in I} \sum_{i \in L} \sum_{i \in M} (k_{ni} P_{nl}^{+} / P_{nf} + k_{ni} P_{nl}^{-} / P_{nf})$ расчета компромиссных коэффициентов P_{nf} означает:

нормирующее значение *n*-го параметра для *l*-го варианта
максимальное значение *n*-го параметра для *l*-го варианта
минимальное значение *n*-го параметра для *l*-го варианта
любое неотрицательное значение *n*-го параметра для *l*-го варианта

8. В формуле $R_{il} = \sum_{i \in I} \sum_{i \in L} \sum_{i \in M} (k_{ni} P_{nl}^{+} / P_{nf} + k_{ni} P_{nl}^{-} / P_{nf})$ расчета компромиссных коэффициентов k_{ni} означает:

коэффициент корреляции *n*-го параметра в *i*-той ситуации
коэффициент веса *n*-го параметра в *i*-той ситуации
коэффициент веса *n*-го варианта в *i*-той ситуации
коэффициент веса *n*-ой ситуации в *i*-том варианте

9. В формуле $R_{il} = \sum_{i \in I} \sum_{i \in L} \sum_{i \in M} (k_{ni} P_{nl}^{+} / P_{nf} + k_{ni} P_{nl}^{-} / P_{nf})$ расчета компромиссных коэффициентов P_{nl} означает:

значение n-го параметра в *l*-том варианте
значение n-го варианта в *l*-той ситуации
значение n-го параметра в *l*-той ситуации
значение n-ой ситуации в *l*-том варианте

10. В формализованном виде задачу нахождения поиска компромиссной целевой функции можно записать в виде $max\ R_i = max\{R_{il}\}$, где R_{il}

коэффициент по l-тому параметру для i-того варианта

коэффициент по l-тому варианту для i-того параметра

коэффициент по l-тому варианту для i-той ситуации

коэффициент по l-той ситуации для i-того варианта

Тема 2.3. Экономико-математическая модель по оптимизации рационов кормления

1. В качестве критерия оптимальности в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления принимается:

минимизация содержания питательных веществ в рационах кормления

максимизация содержания питательных веществ в рационе кормления

максимизация себестоимости рациона кормления

минимизация себестоимости рациона кормления

2. В качестве основных неизвестных в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления принимаются:

искомое поголовье животных, для которых оптимизируется рацион кормления

цены приобретения кормов и кормовых добавок, себестоимость кормов собственного производства

искомое количество кормов и кормовых добавок в физическом весе в суточном рационе кормления 1 головы скота

суммарное количество питательных веществ в рационе

3. В качестве вспомогательной неизвестной в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления принимается:

суммарное количество питательных веществ в рационе в кормовых единицах

суммарные затраты денежных средств на формирование рациона кормления

суммарное количество концентрированных кормов

суммарное количество зеленых и сочных кормов

4. В качестве основных ограничений в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления принимаются:

ограничения по гарантированному удовлетворению потребности сельскохозяйственных животных в питательных веществах, макро- и микроэлементах

ограничения по гарантированному удовлетворению потребности сельскохозяйственных животных в кормах собственного производства

ограничения по пределам включения отдельных кормов или групп кормов в рацион

ограничения по определению суммарного количества кормовых единиц в рационе

5. В качестве дополнительного ограничения в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления принимаются:

ограничения по производству отдельных видов кормов

ограничения по пределам включения отдельных кормов или групп кормов в рацион

ограничения по определению суммарного количества кормовых единиц в рационе

ограничения по определению себестоимости рациона кормления

6. В качестве вспомогательного ограничения в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления принимается:

ограничение по соотношению отдельных видов кормов и добавок

ограничение по пределам включения отдельных кормов или групп кормов в рацион

ограничение по определению суммарного количества кормовых единиц в рационе

ограничение по определению себестоимости рациона кормления

7. В ограничениях по удовлетворению потребности животных в питательных веществах, макро- и микроэлементах $\sum_{j \in J} a_{ij} X_j \geq B_i$ модели по оптимизации рационов кормления a_{ij} означает:

содержание питательных веществ, макро- и микроэлементов *i*-го вида в 1 кг *j*-го вида корма или кормовой добавки

суточную потребность *j*-го вида животных в *i*-ом виде корма или кормовой добавки

себестоимость 1 кг *i*-го вида корма, содержащего питательные вещества, макро- и микроэлементы *j*-го вида

максимальный предел скармливания *i*-го вида корма *j*-му виду скота

8. В ограничениях по удовлетворению потребности животных в питательных веществах, макро и микроэлементах $\sum_{j \in J} a_{ij} X_j \geq B_i$ модели по оптимизации рационов кормления B_i означает:

максимально допустимое количество питательных веществ *i*-го вида в рационе кормления

минимально допустимое количество питательных веществ *i*-го вида в рационе кормления

максимально допустимую себестоимость корма *i*-го вида в рационе кормления

минимальное поголовье животных, для которых составляется рацион

9. В ограничениях по обеспечению обоснованных границ скармливания отдельных групп кормов $\alpha_{hj} \overline{X_j} \leq \sum_{j \in J} a_{hj} X_j \leq \beta_{hj} \overline{X_j}$ модели по оптимизации рационов кормления $\overline{X_j}$ означает:

суммарное количество питательных веществ в рационе в кормовых единицах

суммарные затраты денежных средств на формирование рациона кормления

суммарное количество концентрированных кормов

суммарное количество зеленых и сочных кормов

10. В ограничениях по обеспечению обоснованных границ скармливания отдельных групп кормов $\alpha_{hj}\overline{X_j} \le \sum_{j\in J} a_{hj}X_j \le \beta_{hj}\overline{X_j}$ модели по оптимизации рационов кормления α_{hj} и β_{hj} означают:

минимальную и максимальную себестоимость корма из h-ой группы

минимальную и максимальную потребность скота в корме из h-ой группы

границы включения в рацион h-ой группы корма в кормовых единицах

нижнюю и верхнюю границы включения в рацион h-ой группы корма в процентах

11. В ограничениях по соотношению между отдельными кормами и добавками $\sum_{j\in J} w_{ij}X_j - \sum_{j\in J} w'_{ij}X_j \le 0$ модели по оптимизации рационов кормления w_{ij}, w'_{ij} означают:

границы включения в рацион *h*-ой группы корма в кормовых единицах

минимальную и максимальную себестоимость *j*-го вида корма

коэффициенты пропорциональности между кормами и добавками

коэффициенты взаимозаменяемости кормов

12. В ограничении по определению суммарного количества кормовых единиц в рационе $\sum_{j\in J} a_j X_j = \overline{X_j}$ модели по оптимизации рационов кормления a_j означает:

суточную потребность *j*-го вида скота в кормовых единицах

содержание кормовых единиц в *j*-ой группе кормов

содержание кормовых единиц в суточном рационе кормления

содержание кормовых единиц в 1 кг *j*-го вида корма

13. В каких единицах указываются зоотехнически обоснованные нижние и верхние границы скармливания отдельных групп кормов в экономико-математической модели по оптимизации рационов кормления принимается:

в кормовых единицах по каждой группе корма

в процентах от суммарного количества питательных веществ в рационе

в физическом весе по каждой группе корма

в рублях по себестоимости по каждой группе корма

Тема 2.4. Экономико-математическая модель по оптимизации отраслевой структуры производства

1. В качестве критерия оптимальности в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства принимается:

минимизация поголовья сельскохозяйственных животных

максимизация производства товарной продукции

максимизация суммы чистого дохода

максимизация суммы текущих затрат

2. Принимаемый в качестве показателя критерия оптимальности в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства чистый доход определяется:

как разница между стоимостью товарной продукции по предприятию и суммой производственных затрат

как разница между стоимостью товарной продукции по предприятию и себестоимостью реализованной продукции

как разница между стоимостью валовой продукции в текущих ценах по предприятию и суммой производственных затрат на ее производство

как разница между стоимостью валовой продукции в сопоставимых ценах по предприятию и суммой производственных затрат на ее производство

3. В качестве основных неизвестных в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства принимаются:

площади посева сельскохозяйственных культур по их целевому назначению; поголовье сельскохозяйственных животных по видам; объемы приобретаемых кормов и кормовых добавок

площади посева сельскохозяйственных культур по их целевому назначению; поголовье сельскохозяйственных животных по видам; объемы приобретаемых кормов и кормовых добавок; стоимость производственных затрат по предприятию

стоимость производственных затрат по предприятию; стоимость товарной продукции; затраты труда

площади посева сельскохозяйственных культур по их целевому назначению; поголовье сельскохозяйственных животных по видам

4. В качестве основных ограничений в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства используются:

ограничения по выполнению агротехнических требований возделывания сельскохозяйственных культур; по выполнению договорных обязательств по реализации продукции растениеводства; по обеспеченности потребностей животноводства

ограничения по определению стоимости товарной продукции; по определению стоимости производственных затрат; по определению потребности в трудовых ресурсах

ограничения по использованию земельных ресурсов и по поголовью сельскохозяйственных животных

ограничения по использованию земельных ресурсов и по поголовью сельскохозяйственных животных; по определению стоимости товарной продукции; по определению стоимости производственных затрат

5. В качестве дополнительных ограничений в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства используются:

ограничения по использованию земельных ресурсов и по поголовью сельскохозяйственных животных

ограничения по выполнению агротехнических требований возделывания сельскохозяйственных культур; по выполнению договорных обязательств по реализации продукции растениеводства; по обеспеченности потребностей животноводства кормами собственного производства

ограничения по определению стоимости товарной продукции; по опре-

делению стоимости производственных затрат; по определению потребности в трудовых ресурсах

ограничения по использованию земельных ресурсов и по поголовью сельскохозяйственных животных; по определению стоимости товарной продукции; по определению стоимости производственных затрат; по определению потребности в трудовых ресурсах

6. В качестве вспомогательных ограничений в экономико-математической модели по оптимизации отраслевой структуры производства используются:

ограничения по использованию земельных ресурсов и по поголовью сельскохозяйственных животных

ограничения по выполнению агротехнических требований возделывания сельскохозяйственных культур; по выполнению договорных обязательств по реализации продукции растениеводства; по обеспеченности потребностей животноводства кормами собственного производства

ограничения по определению стоимости товарной продукции; по определению стоимости производственных затрат; по определению потребности в трудовых ресурсах

ограничения по использованию земельных ресурсов и по поголовью сельскохозяйственных животных; по определению стоимости товарной продукции; по определению стоимости производственных затрат; по определению потребности в трудовых ресурсах

7. В ограничении по использованию земельных ресурсов $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \le b_i$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства a_{ij} означает:

площадь посева j-ой сельскохозяйственной культуры

выход товарной продукции i-го вида с 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры

затраты земельных ресурсов i-го вида на 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры

выход корма i-го вида с 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры

8. В ограничении по использованию земельных ресурсов $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \le b_i$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства b_i означает:

объем имеющихся земельных ресурсов i-го вида

площадь посева i-ой сельскохозяйственной культуры

максимально возможный размер денежной выручки от земельных ресурсов i-го вида

стоимость земельных ресурсов i-го вида

9. В ограничении по поголовью сельскохозяйственных животных $\sum_{j=l+1}^{m} a_{ij}^{g} X_j^{g} = B_i$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства B_i означает:

максимально возможное поголовье сельскохозяйственных животных i-го вида, которое можно разместить без дополнительных инвестиций

минимально возможное поголовье сельскохозяйственных животных *i*-го вида, которое можно разместить без дополнительных инвестиций

максимальное поголовье скота, которое можно разместить на *i*-той ферме без дополнительных инвестиций

фактическое поголовье сельскохозяйственных животных *i*-го вида

10. В ограничении по выполнению агротехнических требований $\sum_{j=1}^{l} X_j \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} Q_i$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства Q_i означает:

верхние или нижние пределы насыщения севооборотов отдельными сельскохозяйственными культурами или группами культур

фактический размер площади посева *i*-ой сельскохозяйственной культуры

верхние или нижние пределы урожайности *i*-ой сельскохозяйственной культуры

верхние или нижние объемы валового производства *i*-ой сельскохозяйственной культуры

11. В ограничении по выполнению агротехнических требований $\sum_{j=1}^{d} X_j - \sum_{j=d+1}^{l} \alpha_j X_j^p \leq 0$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства α_i означает:

урожайность *i*-ой сельскохозяйственной культуры

норму высева семян в расчете на 1 га посевов *j*-ой сельскохозяйственной культуры

выход корма с 1 га посевов *j*-ой сельскохозяйственной культуры

коэффициент возможного использования посевов *j*-ой сельскохозяйственной культуры в качестве предшественника под озимые

12. В ограничении по выполнению заказа на производство товарной продукции $\sum_{j=1}^{m} r_{ij} X_j \geq R_i$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства r_{ij} означает:

цену реализации 1 ц товарной продукции *j*-го вида

выход товарной продукции i-го вида с 1 га посева *j*-й сельскохозяйственной культуры или от 1 головы *j*-го вида сельскохозяйственных животных в натуральном выражении

объем валового производства товарной продукции *j*-го вида

выход товарной продукции i-го вида с 1 га посева j-й сельскохозяйственной культуры или от 1 головы j-го вида сельскохозяйственных животных в стоимостном выражении

13. В ограничении по выполнению заказа на производство товарной про-

дукции $\sum_{j=1}^{m} r_{ij} X_j \geq R_i$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства R_i означает:

урожайность *i*-ой сельскохозяйственной культуры

минимально необходимый объем производства товарной продукции *i*-го вида

стоимость произведенной товарной продукции *i*-го вида

затраты на производство товарной продукции *i*-го вида

14.В ограничении по обеспечению потребности животноводства в кормах $\sum_{j=1}^{l} k_{ij} X_j + \sum_{j=l+1}^{p} p_{ij} X_j^k - \sum_{j=p+1}^{m} d_{ij} X_j^g \geq 0$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства k_{ij} означает:

выход корма *i*-го вида с 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры или содержание питательных веществ в единице покупного корма

выход корма *i*-го вида с 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры

объем кормов *i*-го вида, потребляемый за год одной головой *j*-го вида скота

объем кормов *i*-го вида, потребляемый за сутки одной головой *j*-го вида скота

15.В ограничении по обеспечению потребности животноводства в кормах $\sum_{j=1}^{l} k_{ij} X_j + \sum_{j=l+1}^{p} p_{ij} X_j^k - \sum_{j=p+1}^{m} d_{ij} X_j^g \geq 0$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства p_{ij} означает:

содержание питательных веществ в единице покупного корма

выход корма *i*-го вида с 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры

объем кормов i-го вида, потребляемый за год одной головой j-го вида скота

объем кормов i-го вида, потребляемый за сутки одной головой j-го вида скота

16.В ограничении по обеспечению потребности животноводства в кормах $\sum_{j=1}^{l} k_{ij} X_j + \sum_{j=l+1}^{p} p_{ij} X_j^k - \sum_{j=p+1}^{m} d_{ij} X_j^g \geq 0$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства d_{ij} означает:

выход корма i-го вида с 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры или содержание питательных веществ в единице покупного корма

выход корма i-го вида с 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры

объем кормов i-го вида, потребляемый за год одной головой j-го вида скота

объем кормов i-го вида, потребляемый за сутки одной головой j-го вида скота

17.В ограничении по определению суммы производственных затрат $\sum_{j=1}^{l} z_j X_j + \sum_{j=l+1}^{p} c_j X_j^k + \sum_{j=p+1}^{m} v_j X_j^g - \overline{X_j} = 0$ модели по опти мизации отраслевой структуры производства z_j означает:

материально-денежные затраты в расчете на 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры

цена приобретения единицы j-ого вида корма или j-ой кормовой добавки

материально-денежные затраты без учета стоимости кормов в расчете на 1 структурную голову j-ого вида сельскохозяйственных животных

материально-денежные затраты в расчете на 1 руб. товарной продукции

18.В ограничении по определению суммы производственных затрат $\sum_{j=1}^{l} z_j X_j + \sum_{j=l+1}^{p} c_j X_j^k + \sum_{j=p+1}^{m} v_j X_j^g - \overline{X_j} = 0$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства c_j означает:

материально-денежные затраты в расчете на 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры

цена приобретения единицы j-ого вида корма или j-ой кормовой добавки

материально-денежные затраты без учета стоимости кормов в расчете на 1 структурную голову j-ого вида сельскохозяйственных животных

материально-денежные затраты в расчете на 1 руб. товарной продукции

19.В ограничении по определению суммы производственных затрат $\sum_{j=1}^{l} z_j X_j + \sum_{j=l+1}^{p} c_j X_j^k + \sum_{j=p+1}^{m} v_j X_j^g - \overline{X_j} = 0$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства v_j означает:

материально-денежные затраты в расчете на 1 га посева *j*-ой сельскохозяйственной культуры

цену приобретения единицы *j*-ого вида корма или *j*-ой кормовой добавки

материально-денежные затраты без учета стоимости кормов в расчете на 1 структурную голову *j*-ого вида сельскохозяйственных животных

материально-денежные затраты в расчете на 1 руб. товарной продукции

20.В целевой функции $Z_{\max} = \sum_{j=1}^{m} t_j X_j - \overline{X_j}$ модели по оптимизации отраслевой структуры производства t_j означает:

выход товарной продукции в стоимостном выражении в расчете на 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры или 1 структурную голову j-го вида скота

выход товарной продукции в натуральном выражении в расчете на 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры или 1 структурную голову j-го вида скота

себестоимость товарной продукции в расчете на 1 га посева j-ой сельскохозяйственной культуры или 1 структурную голову j-го вида скота

стоимость товарной продукции по предприятию

Тема 2.5. Оптимизация ресурсного потенциала предприятия

1. Ресурсный потенциал предприятия – это:

способность ресурсов быть вовлеченными в процесс производства

способность предприятия привлечь инвестиции для приобретения отдельных ресурсов

исходные производственные возможности предприятия, определяемые массой всех имеющихся в наличии отдельных ресурсов, их структурой и качеством

потенциал земельных и трудовых ресурсов предприятия

2. Поиск оптимальной комбинации ресурсов, лимитируемых их фактическим наличием, происходит в ограниченной области допустимых значений их сочетаний, поскольку один из факторов, как правило, всегда будет находиться в минимуме,

а часть остальных ресурсов может недоиспользоваться

а часть остальных ресурсов может оказаться в дефиците

а часть остальных ресурсов может быть не ограничена

а все остальные ресурсы могут быть не ограничены

3. Часть совокупного ресурсного потенциала, вовлеченная в процесс производства, называется

производственным капиталом предприятия

производственным потенциалом предприятия

активами предприятия

пассивами предприятия

4. Идеальным состоянием сбалансированного ресурсного потенциала считается такое, когда:

все ресурсы могут быть задействованы в процессе производства полностью

наблюдаются «излишки» по всем видам ресурсов

ни один вид ресурсов не находится в дефиците

только один вид ресурсов находится в дефиците

5. При несбалансированном ресурсном потенциале по части ресурсов наблюдается:

превышение фактического наличия ресурсов над значением, полученным по оптимальному решению

превышение наличия ресурсов по оптимальному решению над фактическим наличием

равенство между фактическим наличием ресурсов и значениями, полученными по оптимальному решению

дефицит всех ресурсов

6. Формулировка экономико-математической задачи по оптимизации ресурсного потенциала предприятия:

определить оптимальную величину земельных ресурсов, необходимых

для ведения сельскохозяйственного производства

определить максимально возможную сумму прибыли, которую можно получить при использовании имеющихся в наличии ресурсов

определить размер инвестиций, необходимых для достижения оптимальных ресурсных пропорций

определить оптимальные ресурсные пропорции предприятия, исходя из фактического наличия ресурсов при условии ограниченности привлеченных средств

7. В ограничении по определению дополнительной потребности в ресурсах и их излишков сверх оптимальных ресурсных пропорций в модели по оптимизации ресурсного потенциала предприятия $X_r^o = B_r + X_r^p - X_r^l$ X_r^o означает:

фактическое наличие ресурса *r*-го вида

потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

дополнительную потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

излишек ресурса *r*-го вида по оптимальному решению

8. В ограничении по определению дополнительной потребности в ресурсах и их излишков сверх оптимальных ресурсных пропорций в модели по оптимизации ресурсного потенциала предприятия $X_r^o = B_r + X_r^p - X_r^l$ B_r означает:

фактическое наличие ресурса *r*-го вида

потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

дополнительную потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

излишек ресурса *r*-го вида по оптимальному решению

9. В ограничении по определению дополнительной потребности в ресурсах и их излишков сверх оптимальных ресурсных пропорций в модели по оптимизации ресурсного потенциала предприятия $X_r^o = B_r + X_r^p - X_r^l$ X_r^p означает:

фактическое наличие ресурса *r*-го вида

потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

дополнительная потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

излишек ресурса *r*-го вида по оптимальному решению

10. В ограничении по определению дополнительной потребности в ресурсах и их излишков сверх оптимальных ресурсных пропорций в модели по оптимизации ресурсного потенциала предприятия $X_r^o = B_r + X_r^p - X_r^l$ X_r^l означает:

фактическое наличие ресурса *r*-го вида

потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

дополнительная потребность в ресурсе *r*-го вида по оптимальному решению

излишек ресурса *r*-го вида по оптимальному решению

11. В ограничении по определению реальной стоимости излишков ликвидных ресурсов $\sum_{r \in R} k_r \overline{X}_r^l = \overline{X}''$ модели по оптимизации ресурсного потенциала предприятия k_r означает:

коэффициент износа основных средств *r*-го вида

коэффициент корректировки остаточной (ликвидационной) стоимости ресурса *r*-го вида

коэффициент удорожания ресурсов *r*-го вида

балансовая стоимость ресурса *r*-го вида

12. В ограничении по определению реальной стоимости излишков ликвидных ресурсов $\sum_{r \in R} k_r \overline{X}_r^l = \overline{X}''$ модели по оптимизации ресурсного потенциала предприятия $\overline{X}''$ означает:

заемные инвестиционные средства

привлеченные инвестиционные средства

собственные инвестиционные средства

балансовая стоимость всех ресурсов

13. В ограничении по определению реальной стоимости излишков ликвидных ресурсов $\sum_{r \in R} k_r \overline{X}_r^l = \overline{X}''$ модели по оптимизации ресурсного потенциала предприятия $\overline{X}_r^l$ означает:

балансовая стоимость ресурса *r*-го вида

остаточная стоимость ресурса *r*-го вида

стоимость износа основных средств

стоимостная оценка излишков ресурса *r*-го вида

14. Модель по оптимизации ресурсного потенциала предприятия позволяет оценить производственные возможности предприятия в разрезе следующих вариантов формирования ресурсного потенциала:

при фактических объемах и структуре ресурсов; при трансформации отдельных факторов производства в инвестиционные ресурсы; при привлечении инвестиций, необходимых для выхода на оптимальные ресурсные пропорции

при фактических объемах и структуре ресурсов; при привлечении инвестиций, необходимых для выхода на оптимальные ресурсные пропорции

при фактических объемах и структуре ресурсов, при неограниченном объеме привлекаемых ресурсов

при стохастически изменяющихся объемах и структуре ресурсов

Раздел 3. Усложненные методы математического моделирования

Тема 3.1. Моделирование в условиях риска и неопределенности

1. Стохастическая модель – это:

математическая модель экономической системы или процесса, учитывающая непрерывный характер переменных

математическая модель экономической системы или процесса с несколькими критериями оптимальности

математическая модель экономической системы или процесса, структура которой меняется стохастически

математическая модель экономической системы или процесса, учитывающая факторы случайной природы

2. Если в качестве целевой функции модели реализации одноэтапной задачи стохастического программирования используется вероятность попадания решения в некоторую случайную область, то такая модель называется:

P-модель
M-модель
V-модель
R-модель

3. Если в качестве целевой функции модели реализации одноэтапной задачи стохастического программирования используется математическое ожидание некоторых функций, то такая модель называется:

P-модель
M-модель
V-модель
R-модель

4. Если в качестве целевой функции модели реализации одноэтапной задачи стохастического программирования используется дисперсия некоторых функций, то такая модель называется:

P-модель
M-модель
V-модель
R-модель

5. Ограничения в одноэтапных задачах стохастического программирования, как правило, бывают трех типов:

жесткие; вероятностные (с заданной вероятностью отклонения от жестких ограничений); статистические (усредненные по распределению случайных параметров)

жесткие; вероятностные (с заданной вероятностью отклонения от жестких ограничений); вспомогательные (для определения значений вспомогательных переменных)

вероятностные (с заданной вероятностью отклонения от жестких ограничений) и статистические (усредненные по распределению случайных па-

раметров)

жесткие и статистические (усредненные по распределению случайных параметров)

6. Решение стохастических задач с помощью моделей блочно-диагональной структуры (один блок - один исход) возможно в том случае:

если известно количество комбинаций возможных сочетаний ресурсов при случайным образом выбираемых технологиях производства

если в каждом блоке все параметры имеют стохастическую природу

если количество возможных исходов не превышает трех

если известно конечное число возможных случайных реализаций условий функционирования производственной системы

7. Технико-экономические коэффициенты базовой М-модели стохастического программирования можно выделить в три группы:

нормативные, случайные, производные

нормативные и расчетные

нормативные, динамические, статические

детерминированные и дискретные

8. В базовой М-модели стохастического программирования к нормативным технико-экономическим коэффициентам относится:

урожайность сельскохозяйственных культур

цена реализации продукции

норма высева семян

производственные затраты в расчете на 1 га посева сельскохозяйственных культур

9. В базовой М-модели стохастического программирования к случайным технико-экономическим коэффициентам относится:

урожайность сельскохозяйственных культур

питательность кормов

норма высева семян

производственные затраты в расчете на 1 га посева сельскохозяйственных культур

10. В базовой М-модели стохастического программирования к производным технико-экономическим коэффициентам относится:

урожайность сельскохозяйственных культур

питательность кормов

норма высева семян

производственные затраты в расчете на 1 га посева сельскохозяйственных культур

Тема 3.2. Моделирование устойчивого развития экономических систем

1. Под устойчивостью экономической системы понимается:

ее способность оставаться неизменной

ее способность сохранять свою целостность при воспроизводстве толь-

ко в фиксированных пропорциях между системообразующими элементами

ее способность сохранять структурную и функциональную целостность в длительной перспективе при прогнозируемых изменениях внешней среды

ее способность воспроизводиться без учета влияния внешней среды

2. При описании интегральной оценки устойчивости в виде отношений типа $\sum_j u_{ij} x_j \Big/ \sum_j x_j$ u_{ij} означает:

коэффициент устойчивости *i*-го вида в расчете на единицу j-ой переменной

вероятность выполнения *i*-го ограничения для *j*-ой переменной

коэффициент корреляции *i*-го параметра с *j*-ой переменной

математическое ожидание *i*-го параметра, рассчитываемого для *j*-ой переменной

3. В ограничении по определению условной суммарной оценки устойчивости расчетного варианта сочетания сельскохозяйственных культур $\sum_j U_j x_j - U_k = 0,$ модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства U_j означает:

оценку устойчивости возделывания *j*-ой сельскохозяйственной культуры

оценку устойчивости получения прибыли при возделывания 1 га *j*-ой сельскохозяйственной культуры

оценку устойчивости влияния урожайности *j*-ой сельскохозяйственной культуры на значение целевой функции

оценку устойчивости влияния урожайности *j*-ой сельскохозяйственной культуры на цену реализации продукции

4. В ограничении по определению условной суммарной оценки устойчивости цен реализации $\sum_j U'_j x_j - U'_k = 0,$ модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства U'_j означает:

оценку устойчивости цены реализации *j*-ой продукции

оценку устойчивости влияния урожайности *j*-ой сельскохозяйственной культуры на цену реализации продукции

оценку устойчивости получения прибыли при реализации *j*-ого вида продукции

оценку устойчивости влияния цены реализации *j*-ой продукции на значение целевой функции

5. На основании уравнения $(x'' - x'') - x''R = 0$ при разработке модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства находится:

сумма чистого дохода

сумма валового дохода

сумма прибыли

уровень рентабельности

6. В модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства используется метод поиска компромиссных решений, называемый:

метод поиска компромиссной целевой функции

метод последовательных уступок

метод минимизации взвешенной суммы уступок по каждому критерию

метод максимизации взвешенной суммы уступок по каждому критерию

7. В модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства относительные веса исследуемых критериев оптимальности P_1, P_2, …, P_n ($P_1+P_2+...+P_n=1$), характеризующие их важность (приоритетность), определяются:

на основе решения задачи симлекс-методом

на основе экспертных оценок

на основе решения задачи методом потенциалов

на основе случайного выбора

8. В модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства в дополнительном ограничении $U_k / Z_{uk\,\max} - U_u = 0$ по определению удельного веса уступок по критерию устойчивости сельскохозяйственных культур $Z_{uk\max}$ означает:

максимально возможную комплексную оценку устойчивости сельскохозяйственных культур при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости сельскохозяйственных культур при любом наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости получения прибыли при возделывании заданного ассортимента сельскохозяйственных культур

максимально возможную комплексную оценку устойчивости уровня рентабельности при возделывании заданного ассортимента сельскохозяйственных культур

9. В модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства в дополнительном ограничении $U'_k / Z_{up\,\max} - U'_u = 0$ по определению удельного веса уступок по критерию устойчивости цен реализации $Z_{up\max}$ означает:

максимально возможную комплексную оценку устойчивости цен реализации при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку цен реализации при любом наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости получения прибыли при реализации заданного ассортимента продукции

максимально возможную комплексную оценку устойчивости уровня рентабельности при реализации заданного ассортимента продукции

10.В модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства в дополнительном ограничении $R/Z_{r\max} - U_r = 0$ по определению удельного веса уступок по уровню рентабельности $Z_{r\max}$ означает:

максимально возможную комплексную оценку устойчивости сельскохозяйственных культур при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости цен реализации при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости уровня рентабельности в целом по предприятию при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости уровня рентабельности в разрезе отдельных сельскохозяйственных культур при данном наборе входных параметров

11.В модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства в дополнительном ограничении $(x'' - x'')/Z_{P\max} - U_p = 0$ по определению удельного веса уступок по прибыли $Z_{P\max}$ означает:

максимально возможную комплексную оценку устойчивости сельскохозяйственных культур при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости цен реализации при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости прибыли в целом по предприятию при данном наборе входных параметров

максимально возможную комплексную оценку устойчивости прибыли в разрезе отдельных видов реализуемой продукции при данном наборе входных параметров

12.В модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства в дополнительном ограничении $(x'' - x'')/Z_{P\max} - U_p = 0$ по определению удельного веса уступок по прибыли X' и X'' означают:

выручку от реализации продукции и прибыль соответственно

выручку от реализации продукции и прибыль соответственно

производственные затраты и выручку от реализации продукции соответственно

выручку от реализации продукции и производственные затраты соответственно

13.В целевой функции $Z_{\min} = \sum_r X_{jur} P_r$ модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства X_{jur} означает:

размер уступки по r-му критерию оптимальности в натуральном выражении

комплексную оценку устойчивости r-го вида по j-ой сельскохозяйственной культуре

индивидуальную оценку устойчивости r-го вида по j-ой сельскохозяй-

ственной культуре

удельный вес уступки по r-му критерию оптимальности

14. В целевой функции $Z_{\min} = \sum_{r} X_{jur} P_r$ модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства P_r означает:

оценку вероятности достижения максимального значения r-ой переменной

оценку относительного веса r-го критерия оптимальности

оценку абсолютного веса r-го критерия оптимальности

комплексную оценку устойчивости r-го вида по j-ой сельскохозяйственной культуре

15. В качестве критерия оптимальности в модели по многокритериальной оптимизации отраслевой структуры производства принимается:

максимизация взвешенной суммы уступок по каждому критерию

минимизации взвешенной суммы уступок по каждому критерию

максимизация критерия, имеющего наивысшую оценку

минимизации критерия, имеющего наименьшую оценку

Тема 3.3. Основы теории игр

1. Теория игр – это:

раздел прикладной математики, изучающий правила антагонистических игр

раздел прикладной математики, изучающий методы решения задач выбора оптимальных стратегий поведения в конфликтных ситуациях (играх)

наука, изучающая историю происхождения игр и математические методы их создания

наука, изучающая теоретические аспекты создания экономико-математических игр

2. В теории игр под игрой понимается:

процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов

процесс распределения возможного выигрыша совокупностью игроков

процесс, складывающийся из последовательных действий каждой из сторон (игроков), с целью реализации общего интереса

процесс, обязательно приводящий через определенное количество шагов к выигрышу каждой стороны (игрока)

3. В теории игр под «игроком» принято понимать:

одного участника или группу участников, имеющих общие интересы, не совпадающие с интересами других групп

одного участника или группу участников, знающих правила игры

любого субъекта, готового рисковать ради получения выигрыша

любого субъекта, готового ради выигрыша нарушить установленные правила игры

4. В теории игр игра считается конечной, если:

хотя бы один из игроков имеет конечное число возможных стратегий

хотя бы один из игроков сможет сделать заданное число ходов

каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий

каждый из игроков в конце концов получит тот или иной выигрыш

5. В теории игр игра считается бесконечной, если:
хотя бы один из игроков не сможет получить тот или иной выигрыш
хотя бы один из игроков имеет бесконечное число стратегий
хотя бы один из игроков нарушает правила игры
каждый из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий

6. В теории игр игра считается одношаговой, если:
заканчивается дележом выигрыша после одного хода первого игрока
заканчивается дележом выигрыша после одного хода каждого игрока
после первого хода каждого игрока каждый игрок получил выигрыш
после первого хода каждого игрока суммарный выигрыш превысил суммарный проигрыш

7. В теории игр игра считается многошаговой, если:
игра предусматривает более одного хода каждым игроком, при этом количество ходов либо ограничивается правилами игры, либо игра продолжается до тех пор, пока у одного из игроков (группы игроков) кроме одного не останется ресурсов для продолжения игры
игра предусматривает более одного хода каждым игроком, при этом количество ходов либо ограничивается правилами игры, либо игра продолжается до тех пор, пока все игроки не получат тот или иной выигрыш
количество ходов определяется правилами игры
после каждого хода хотя бы один игрок получает выигрыш

8. В теории игр игра считается параллельной, если:
игроки ходят одновременно, или, по крайней мере, они не осведомлены о выборе других до тех пор, пока все не сделают свой ход
игроки ходят одновременно, или, по крайней мере, они не осведомлены о выборе хотя бы одного игрока до тех пор, пока он не сделает свой ход
игрок делает свой первый ход, не зная о выборе других игроков
каждый из игроков поочередно делает все ходы свои ходы

9. В теории игр игра считается последовательной, если:
игроки последовательно соблюдают правила игры
игроки могут делать ходы в заранее установленном либо случайном порядке, но при этом они не получают некоторую информацию о предшествующих действиях других
игроки могут делать ходы в заранее установленном или случайном порядке, но при этом получая некоторую информацию о предшествующих действиях других игроков
игроки последовательно друг за другом получают выигрыш независимо от того, был сделан игроком ход или нет

10. В теории игр игра считается с нулевой суммой выигрыша, если:
сумма выигрышей (проигрышей) всех игроков в каждой игре равна нулю
выигрыш правилами игры не предусматривается
в ходе игры никто из игроков не проиграл
в ходе игры никто из игроков не выиграл

11. Алгоритм выбора решения по максиминному критерию Вальда:
матрица решений дополняется столбцом из наименьших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный
матрица решений дополняется одним столбцом из наибольших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из среднеарифметических значений элементов для каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из математических ожиданий значений каждой из строк матрицы. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

12. Алгоритм выбора решения по критерию азартного игрока:

матрица решений дополняется столбцом из наименьших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется одним столбцом из наибольших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из среднеарифметических значений элементов для каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из математических ожиданий значений каждой из строк матрицы. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

13. Алгоритм выбора решения по критерию нейтрального игрока:

матрица решений дополняется столбцом из наименьших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется одним столбцом из наибольших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из среднеарифметических значений элементов для каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из математических ожиданий значений каждой из строк матрицы. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

14. Алгоритм выбора решения по критерию Байеса-Лапласа:

матрица решений дополняется столбцом из наименьших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется одним столбцом из наибольших элементов каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из среднеарифметических значений элементов для каждой строки. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

матрица решений дополняется столбцом из математических ожиданий

значений каждой из строк матрицы. После этого из совокупности этих элементов определяется максимальный

15.Какой критерий выбора решения в условиях неопределенности описывается следующим выражением:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \left[\alpha \max_i r_{ij} + (1-\alpha) \min_i r_{ij} \right] \wedge 0 \le \alpha \le 1 \right\}$$

Критерий азартного игрока
Критерий Гурвица
Критерий Сэвиджа
Критерий Вальда

16.Какой критерий выбора решения в условиях неопределенности описывается следующим выражением: $B_O = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \min_j \left[\max_i (\max_j r_{ij} - r_{ij}) \right] \right\}$

Критерий азартного игрока
Критерий Гурвица
Критерий Сэвиджа
Критерий Вальда

17.Какой критерий выбора решения в условиях неопределенности описывается следующим выражением: $B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \max_i r_{ij} \right\}$

Критерий азартного игрока
Критерий Гурвица
Критерий Сэвиджа
Критерий Вальда

18.Какой критерий выбора решения в условиях риска описывается следующим выражением: $B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \sum_{i=1}^{n} r_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{m} q_j = 1 \right\}$

Критерий Байеса-Лапласа
Критерий Ходжа–Лемана
Критерий Гермейера
Расширенный минимаксный критерий

19.Какой критерий выбора решения в условиях риска описывается следующим выражением:

$$B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \left[\gamma \sum_{i=1}^{n} r_{ij} q_j + (1-\gamma) \min_i r_{ij} \right] \wedge 0 \le \gamma \le 1 \right\}$$

Критерий Байеса-Лапласа
Критерий Ходжа–Лемана
Критерий Гермейера
Расширенный минимаксный критерий

20. Какой критерий выбора решения в условиях риска описывается следующим выражением: $B_o = \left\{ B_{jo} \middle| B_{jo} \in B \wedge r_{jo} = \max_j \min_i r_{ij} q_j \wedge r_{ij} < 0 \right\}$

Критерий Байеса-Лапласа
Критерий Ходжа–Лемана
Критерий Гермейера
Расширенный минимаксный критерий

Раздел 4. Сетевые, имитационные и балансовые модели

Тема 4.1. Сетевые модели

1. Сетевая модель – это:

модель, описывающая совокупность переменных и их логическую и алгоритмическую взаимосвязь

динамическая модель производственного процесса, отражающая технологическую зависимость и последовательность выполнения комплекса работ, увязывающая их свершение во времени с учетом затрат ресурсов и стоимости работ с выделением при этом узких (критических) мест

логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта через имитацию поведения объекта

модель, описывающая объект в виде графиков, схем, рисунков и т.д., предлагающая абстрагирование от непрерывной природы событий и рассмотрение только основных событий моделируемой системы, таких как: «ожидание», «обработка заказа», «движение с грузом», «разгрузка» и другие

2. Методы сетевого моделирования относятся:
к методам построения балансовых моделей
к методам имитационного моделирования
к методам принятия оптимальных решений
к экономико-статистическим методам

3. Различают два основных вида представления сетевых моделей:
сетевые графики и табличные представления сетевой модели
математические и табличные представления сетевой модели
векторные и табличные представления сетевой модели

линейные и нелинейные представления сетевой модели

4. Графом называется:

совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются вершинами, и множества пар вершин, которые называются ребрами

совокупность точек, формирующих график, который описывает исследуемую систему

совокупность графиков, с помощью которых осуществляется графическое описание исследуемой системы.

совокупность графических объектов, используемых для построения графических моделей

5. Основными элементами сетевого графика являются:

работа, событие

событие, путь, ожидание

движение с грузом, движение без груза, разгрузка, простой

работа, событие, путь

6. В сетевых моделях работа характеризует:

связь между двумя или более событиями, не требующую затрат труда, материальных ресурсов и времени, но указывающую, что возможность начала одной операции зависит от выполнения другой

конечное событие, означающее достижение конечной цели комплекса работ

затраты времени и ресурсов

материальное действие, требующее использования ресурсов, или логическое, требующее лишь взаимосвязи событий

7. В сетевых моделях выделяют следующие виды работ:

действительная работа, ожидание, фиктивная работа

действительная работа, фиктивная работа

полезная работа, бесполезная работа

односменная работа, двухсменная работа, трехсменная работа

8. В сетевых моделях под событием понимается:

материальное действие, требующее использования ресурсов, или логическое, требующее лишь взаимосвязи событий

материальное действие, требующее использования ресурсов

результат выполнения одной или нескольких работ

логическое действие, требующее лишь взаимосвязи событий

9. В сетевой модели любая последовательность работ, при которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием последующей, называется:

путь

результат

эффект

граф

10. В сетевых моделях путь, имеющий наибольшую продолжительность от исходного события до завершающего, называется:

динамическим
стохастическим
оптимальным
критическим

Тема 4.2. Имитационные модели

1. Имитационная модель - это:

логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта

логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях имитирования процесса получения оптимального решения

логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях получения оптимального решения

логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях обеспечения сбалансированности наличия ресурсов и их потребления в течение одного производственного цикла

2. Имитационная модель имеет определенную минимальную опорную структуру,

которую пользователь может усложнить после заданного числа «прогонов» модели

которую пользователь может упростить после заданного числа «прогонов» модели

которую пользователь не может дополнить и расширить с учетом специфики решаемых задач и базовых методов обработки

которую пользователь может дополнить и расширить с учетом специфики решаемых задач и базовых методов обработки

3. Имитационное моделирование - это:

метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе

метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты с целью получения оптимальных параметров системы

метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты в целях обеспечения сбалансированности наличия ресурсов и их потребления в течение одного производственного цикла

метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты с целью имитации процесса получения оптимального

решения

4. При записи структуры имитационной модели в виде $E = f(x_i, y_i)$ x_i и y_i означают:

переменные и параметры, которые являются детерминированными, и, соответственно, переменные и параметры, которые являются стохастическими

переменные и параметры, которыми мы можем управлять, и, соответственно, переменные и параметры, которыми мы управлять не можем

переменные и параметры, которые являются статическими, и, соответственно, переменные и параметры, которые являются динамическими

переменные и параметры, которые являются аналитическими, и, соответственно, переменные и параметры, которые являются синтетическими

5. Имитационное моделирование исследует математические модели в виде:

систем уравнений и неравенств, описывающих функционирование исследуемой системы

систем уравнений и неравенств, обеспечивающих соответствие наличия и потребления ресурсов в течение одного производственного цикла.

алгоритмов, воспроизводящих функционирование исследуемой системы путем последовательного выполнения большого количества элементарных операций

алгоритмов, позволяющих обеспечить нахождение оптимальных параметров как всей моделируемой системы, так и ее отдельных компонентов

6. Имитационные модели в отличие от аналитических:

неспособны формировать свое собственное решение в том виде, в каком это имеет место в аналитических моделях, а могут лишь служить в качестве средства для анализа поведения системы в условиях, которые определяются экспериментатором

дают возможность обеспечить соответствие между имеющимися и потребляемыми в процессе производства ресурсами

способны формировать свое собственное оптимальное решение на каждом «прогоне» в несколько ином виде, чем в аналитических моделях

требуют изучения предметной области и подготовки исходной информации

7. Имитационная модель представляет собой комбинацию таких составляющих, как:

переменные, параметры, ограничения, целевые функции

компоненты, переменные, параметры, функциональные зависимости, ограничения

компоненты, переменные, параметры, функциональные зависимости, ограничения, целевые функции

основные, дополнительные и вспомогательные переменные и ограничения

8. В имитационных моделях под параметрами понимаются величины,

которые могут принимать только значения, определяемые видом заданной функции

которые при «прогоне» модели могут выбираться произвольно

устанавливающие пределы изменений значений переменных или ограничивающие условия распределения и расходования тех или иных ресурсов

точно отображающие цели или задачи системы и необходимые правила оценки их выполнения

9. В имитационных моделях под переменными понимаются величины,

которые могут принимать только значения, определяемые видом заданной функции

которые при «прогоне» модели могут выбираться произвольно

устанавливающие пределы изменений значений переменных или ограничивающие условия распределения и расходования тех или иных ресурсов

точно отображающие цели или задачи системы и необходимые правила оценки их выполнения

10. В имитационных моделях под функциональными зависимостями понимаются отношения, описывающие:

взаимосвязь между основными и дополнительными переменными

критерии оптимальности, на основании которых из области допустимых решений будут выбираться наилучшие решения

влияние каждой переменной на критерий оптимальности

поведение переменных и параметров в пределах компонента или выражающие соотношения между компонентами системы

11. В имитационных моделях под ограничениями понимаются:

устанавливаемые пределы изменений значений переменных или ограничивающие условия распределения и расходования тех или иных ресурсов

описываемые сценарии изменений значений переменных или вероятность соблюдения условий распределения и расходования тех или иных ресурсов

описываемые сценарии изменений значений переменных и заданное количество вариантов распределения и расходования тех или иных ресурсов

устанавливаемые пределы изменений значений параметров или функциональные зависимости критериев оптимальности от переменных

12. В имитационных моделях под целевой функцией понимается:

критерий оптимальности, записанный в математическом виде

точное отображение целей или задач системы и необходимых правил оценки их выполнения

матрица прямых затрат

сумма свободных членов всех уравнений, описывающих имитационную модель

Тема 4.3. Балансовые модели

1. Балансовая модель – это:

системы уравнений и неравенств, представляющих балансовые соотношения и характеризующих равенство произведенного (поступившего) и потребленного (распределенного) продукта

системы неравенств, представляющих балансовые соотношения и характеризующих количество произведенного (поступившего) и потребленного (распределенного) продукта

системы уравнений, представляющих балансовые соотношения и характеризующих равенство произведенного (поступившего) и потребленного (распределенного) продукта

системы уравнений, описывающих количество потребленного (распределенного) продукта

2. Количество производящих и потребляющих отраслей в балансовой модели должно описываться следующим соотношением:

количество производящих и потребляющих отраслей должно быть равно

количество производящих отраслей должно быть не меньше количества потребляющих отраслей

количество производящих отраслей должно быть не больше количества потребляющих отраслей

количество производящих и потребляющих отраслей не должно быть равно

3. В балансовых моделях разность X_i - Y_i описывает часть продукции i-ой отрасли:

предназначенную для внешнего потребления

предназначенную для внутрипроизводственного потребления

произведенную сверх плана

потребленную сверх плана

4. В балансовых моделях значение x_{ij} означает:

часть продукции i-ой отрасли, которая потребляется j-ой отраслью, для обеспечения выпуска ее продукции в размере X_j

часть продукции i-ой отрасли, которая передается для внешнего потребления Y_j

часть продукции i-ой отрасли, произведенную сверх плана

часть продукции i-ой отрасли, потребленную сверх плана

5. В балансовой модели с помощью выражения $X_i - \sum_i x_{ij} = Y_i$ описываются:

балансовые равенства, описывающие размер i-ой отрасли

уравнения, позволяющие оценить эффективность i-ой отрасли

системы уравнений, решение которых позволит определить оптимальный размер i-ой отрасли

балансовые равенства, описывающие связь величин, расположенных в строках таблицы

6. Как в балансовых моделях называется совокупность значений

$\overline{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, характеризующих выпуск конечного продукта:

конечный вектор
ассортиментный вектор
оптимальный вектор
вектор-план

7. Как в балансовых моделях называется совокупность значений $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, характеризующих выпуск конечного продукта:

конечный вектор
ассортиментный вектор
оптимальный вектор
вектор-план

8. Как в балансовых моделях называется величина a_{ij}, рассчитываемая как $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$:

коэффициент прямых затрат
коэффициент косвенных затрат
коэффициент производственных затрат
коэффициент непредвиденных затрат

9. С помощью матрицы, содержащей коэффициенты прямых затрат, в балансовых моделях описываются:

внутренние взаимосвязи между объемом и стоимость произведенной продукции
внутренние взаимосвязи между производством и потреблением
внутренние взаимосвязи между плановым и фактическим объемом производства
внутренние взаимосвязи между плановым и фактическим объемом потребления

10. Как в балансовых моделях называется условие, описываемое как $x_{ij} = a_{ij} X_j$:

условие линейности прямых затрат
условие не отрицательности
условие безубыточности
условие пропорциональности

7.2. Вопросы, выносимые на экзамен

1. История применения математических методов в экономике.
2. Системы и системный подход.
3. Модели и моделирование: понятие, способы описания, элементы.
4. Необходимость использования моделей при изучении экономических процессов и систем.
5. Классификация экономико-математических методов и моделей.
6. Этапы моделирования.
7. Системы неизвестных и ограничений оптимизационных моделей.
8. Критерии оптимальности и целевые функции.
9. Формы записи экономико-математических моделей.
10. Методы многопараметрической оптимизации: метод последовательных уступок.
11. Методы многопараметрической оптимизации: метод поиска компромиссной целевой функции.
12. Экономико-математическая модель по оптимизации рационов кормления.
13. Экономико-математическая модель по оптимизации отраслевой структуры производства.
14. Экономико-математическая модель по оптимизации ресурсного потенциала предприятия.
15. Теоретические основы моделирования в условиях риска и неопределенности.
16. Стохастические модели.
17. Оптимизация параметров устойчивого развития системы.
18. Основы теории игр.
19. Критерии выбора стратегии в условиях неопределенности: максиминный, нейтрального и азартного игрока.
20. Критерии выбора стратегии в условиях неопределенности: Сэвиджа и Гурвица.
21. Критерии выбора стратегии в условиях риска: Байеса-Лапласа и расширенный максиминный.
22. Критерии выбора стратегии в условиях риска: критерий Ходжа–Лемана и Гермейера.
23. Сетевые модели: понятие, способы описания, элементы.
24. Имитационные модели.
25. Балансовые модели.

7.3. Ответы на вопросы тестов

№	Раздел № 1					Раздел № 2					Раздел № 3			Раздел № 4		
	Номер темы					Номер темы					Номер темы			Номер темы		
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3
1	2	3	2	1	1	1	1	4	3	3	4	3	2	2	1	3
2	1	4	3	4	2	2	2	3	1	1	1	1	1	3	4	1
3	2	4	2	2	3	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2
4	1	3	1	3	1	2	1	1	3	1	3	1	3	1	2	1
5	1	4	2	1	2	1	4	2	2	1	1	4	2	1	3	4
6	2	1	1	1	4	4	1	3	3	4	4	3	2	4	1	2
7	3	2	4	4	1	3	1	1	3	2	1	2	1	1	3	4
8	1	4	2	1	1	1	2	2	1	1	3	1	1	3	2	1
9	4	2	3	1	2	2	1	1	1	3	1	1	3	1	1	2
10	2	4	4	3	3	2	3	4	1	4	4	3	1	4	4	1
11	2		1	2				3	4	2		3	1		1	
12	1		2	3				4	2	3		4	2		2	
13	3		3	1				2	2	4		4	3			
14	1		1	3					2	1		2	4			
15	4		2	2					1			2	2			
16									3				3			
17									1				1			
18									2				1			
19									3				2			
20									2				3			

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев М.Ю. Прикладные задачи исследования операций: учебное пособие / М.Ю. Афанасьев, К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 352с.
2. Бурда А.Г. Исследование операций в экономике АПК: учебное пособие / А.Г. Бурда, Г.П. Бурда – Краснодар: КубГАУ, 2014. - 566 с.
3. Бурда А.Г. Моделирование процессов расширенного воспроизводства в АПК: монография / А.Г. Бурда, С.Н. Косников, С.И. Турлий. – Краснодар: КубГАУ, 2015. - 146 с.
4. Бурда Г.П. Методы оптимальных решений и теория игр: учебное пособие / Г.П. Бурда, А.Г. Бурда. - Краснодар: КубГАУ, 2011. – 491 с.
5. Глухов В. В. Математические методы и модели для менеджмента: учебное пособие. / В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко - СПб.: «Лань», 2007. - 528 с.
6. Информационное обеспечение принятия управленческих решений: учебное пособие / А.В. Улезько, А.А. Толстых, В.П. Рябов, А.А. Тютюников. - Воронеж: ВГАУ, 2009. - 168 с.
7. Камалян А.К. Оптимизация стратегических параметров устойчивого развития предприятий агарной сферы / А.К. Камалян, А.В. Улезько, Л.П. Яновский и др. - Воронеж: ВГАУ, 2003. – 207 с.
8. Каталевский Д.Ю. Основы имитационного моделирования и системного анализа в управлении: учебное пособие / Д.Ю. Каталевский. - М: Издательство Московского университета, 2011. - 304 с.
9. Кобелев В.П. Имитационное моделирование: Учебное пособие / Н.Б. Кобелев, В.А. Половников, В.В. Девятков; Под общ. ред. д-ра экон. наук Н.Б. Кобелева. - М.: КУРС: НИЦ Инфра-М, 2013. - 368 с.
10. Красс М.С. Математика для экономистов: учебное пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - СПб.: Питер, 2005. - 464 с.
11. Курносов А.П. Математическое моделирование экономических процессов в растениеводстве: учебное пособие / А.П. Курносов, Н.А. Звягин. – Воронеж: СХИ, 1986. – 128 с.
12. Курносов А.П. Методы решения задач математического программирования: Учебное пособие / А.П. Курносов, В.П. Подтележников. – Воронеж: СХИ, 1990. - 107 с.
13. Курносов А.П. Моделирование кормопроизводства в системе АПК: учебное пособие / А.П. Курносов, Н.А. Звягин. – Воронеж: СХИ, 1987. -122 с.
14. Лычкина Н.Н. Имитационное моделирование экономических процессов: учебное пособие / Лычкина Н.Н. - М: ИНФРА-М, 2012. – 254 с.
15. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах: Пер. с англ. - М.: Мир, 1981. - 323 с.

16. Математическое программирование с EXCEL: учебное пособие / Данилин Г.А., Курзина В.М., Курзин П.А. и др. - М.: МГУЛ, 2005. - 113 с.

17. Мур Дж. Экономическое моделирование в Microsoft Office Excel. 6-е издание. / Дж. Мур, Л. Уэдерфорд - М.: Вильямс, 2004. - 1024 с.

18. Невежин В.П. Исследование операций и принятие решений в экономике: Сборник задач и упр.: учебное пособие для вузов / В.П. Невежин, С.И. Кружилов, Ю.В. Невежин – М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 400 с.

19. Нейман фон Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. М.: Издательство «Наука», 1970. - 708 с.

20. Оптимизация параметров функционирования сельскохозяйственных предприятий при изменяющихся условиях хозяйствования / А.П. Курносов, А.В. Улезько, А.К. Камалян, Н.М. Бухонова. - М.: Изд-во МГСУ «Союз», 2000. – 163 с.

21. Оре О. Теория графов / О. Оре. -. М. Наука, 1980. - 336 с.

22. Савиных В.Н. Математическое моделирование производственного и финансового менеджмента: учебное пособие / В.Н. Савиных. М.: КноРус, 2009. - 192 с.

23. Улезько А.В. Имитационное моделирование как инструмент исследования агроэкономических систем / А.В. Улезько, А.П. Курносов, А.А. Тютюников // Экономика сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий. – 2012. - №8. – С. 28-30.

24. Улезько А.В. Обоснование оптимальных параметров развития сельскохозяйственных предприятий: учебное пособие / А.В. Улезько, А.А. Тютюников. – Воронеж: ВГАУ, 2011. – 176 с.

25. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем: искусство и наука / Р. Шеннон. - М.: Издательство «Мир», 1978. - 421 с.

Учебное издание

Улезько Андрей Валерьевич
Тютюников Александр Александрович

Практикум по моделированию социально-экономических систем и процессов

Учебное пособие

Издается в авторской редакции.

Подписано в печать 25.11.2015 г. Формат 60x80 $^{1}/_{16}$
Бумага кн.-журн. П.л. 12,43 Гарнитура Таймс.
Тираж 50 экз. Заказ № 13055

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I»
Типография ФГБОУ ВПО Воронежский ГАУ 394087, Воронеж, ул. Мичурина, 1
Информационная поддержка: **http://tipograf.vsau.ru**

Отпечатано с оригинал-макета заказчика. Ответственность за содержание
предоставленного оригинал-макета типография не несет.
Требования и пожелания направлять авторам данного издания.