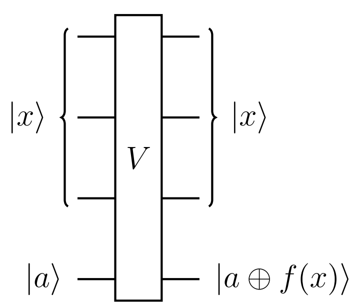
پردازش اطلاعات کوانتومی
نام و نام خانوادگی: مهدی وجهی

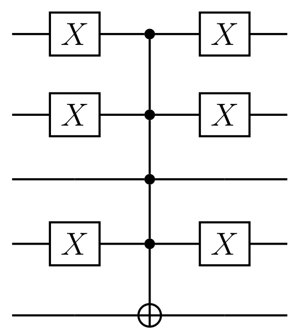
ارائه ۱۰ | ۸۱۰۱۰۱۵۵۸

۱ الگوریتم $Grover$

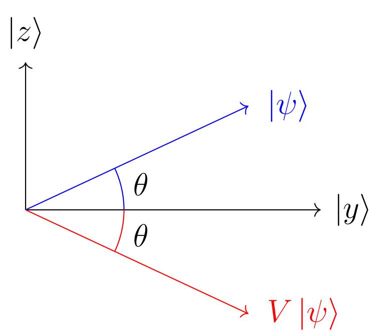
در دنیای کلاسیک هزینه جست و جو مجموعه داده بدون ساختار از پیچیدگی $O(N)$ است و به صورت متوسط به $\frac{N}{2}$ گام نیاز دارد. این کار در دنیای کوانتوم سریع تر است اما دیگر به اندازه الگوریتم های قبلی که مسائل نمایی را خطی حل می کردند نیست و به $O(\sqrt{N})$ پرس و جو نیاز دارد. مدار کلی آن به شکل زیر است که اوراکل V مشخص می کند که ورودی مقدار مورد نظر است یا خیر و این کار را با XOR کردن خروجی با تک بیت خروجی مسئله انجام می دهد.



$For\ value\ 0010:$

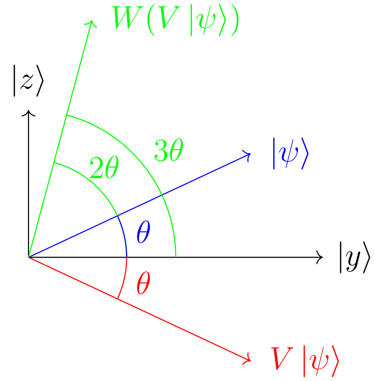


در این حالت نیز اگر $|a\rangle = |-\rangle$ باشد پدیده $Phase\ Kickback$ رخ می دهد و وضعیت خروجی به شکل $(-1)^{f(x)}\,|x-\rangle$ قرار می گیرد. یعنی تنها درصورتی که جواب را به اوراکل بدهیم یک فاز سراسری منفی به خروجی اضافه می شود.
در این قسمت پایه های خود را $|y\rangle$, $|z\rangle$ تعریف می کنیم که $|z\rangle$ حالت درست را نشان می دهد و احتمال آن برابر با $\frac{1}{N}$ و $|y\rangle$ هم سایر حالات با احتمال $\frac{N-1}{N}$ است. با نمایش وضعیت روی این پایه می بینیم که بعد از اعمال گیت بردار نسبت به $|y\rangle$ قرینه می شود.



$$|\psi\rangle = \cos(\theta)\,|y\rangle + \sin(\theta)\,|z\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}}\,|y\rangle + \sqrt{\frac{1}{N}}\,|z\rangle$$
$$V\,|\psi\rangle = \cos(\theta)\,|y\rangle - \sin(\theta)\,|z\rangle$$

در این مرحله هدف ما افزایش احتمال $|z\rangle$ است و برای این کار عملگری تعریف می کنیم که بردار را نسبت به $|\psi\rangle$ قرینه کند. این عملگر را W می نامیم و تعریف می کنی $2\,|\psi\rangle\langle\psi| - I$. در $|\psi\rangle\langle\psi|$ ما مقدار بازتاب روی بردار $|\psi\rangle$ را به دست می آوریم و با محاسبه W عملا مقدار بردار $|\psi\rangle$ ثابت می ماند ولی مقدار عمود بر آن قرینه می شود. با توجه به این که زاویه بین $|\psi\rangle$ و $V\,|\psi\rangle$ برابر 2θ پس قرینه ی آن هم نسبت به $|\psi\rangle$ زاویه 2θ و نسبت به $|y\rangle$ زاویه $3\theta = \theta + 2\theta$ دارد. یعنی با این عمل توانستیم احتمال حالت مطلوب را افزایش دهیم. حالت ایده آل این است که مقدار زاویه نهایی ۹۰ درجه شود و روی $|z\rangle$ منطبق شود. برای ایجاد زاویه $(2k+1)\theta$ لازم است k بار عملیات را تکرار کنیم.



$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= a\,|\psi\rangle + b\,|\psi^{\perp}\rangle \\ W\,|\phi\rangle &= 2a\,|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle + 2b\,|\psi\rangle\langle\psi|\psi^{\perp}\rangle - a\,|\psi\rangle - b\,|\psi^{\perp}\rangle \\ &= a\,|\psi\rangle - b\,|\psi^{\perp}\rangle \end{aligned}$$

۲ پیاده سازی گیت W

گیت W را می توان به صورت زیر با گیت هایی که آموخته ایم پیاده کنیم :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = |+\rangle \implies X^{\otimes n}(H^{\otimes n} W H^{\otimes n})X^{\otimes n} &= X^{\otimes n}(2\,|0\rangle^{\otimes n}\langle 0|^{\otimes n} - I)X^{\otimes n} = 2\,|1\rangle^{\otimes n}\langle 1|^{\otimes n} - I \\ &= -\left(I - 2\,|1\rangle^{\otimes n}\langle 1|^{\otimes n}\right) = -C_{n-1}Z \\ &\implies W = -H^{\otimes n}X^{\otimes n}C_{n-1}ZX^{\otimes n}H^{\otimes n} \end{aligned}$$

درنهایت چیزی در حدود ۷۵ درصد مباحث را فهمیدم.