



۸۱۰۱۰۱۵۵۸

پردازش اطلاعات کوانتومی  
نام و نام خانوادگی: مهدی وجهی



۱۹

## ۱ ماتریس چگالی

وقتی یک پرتو داریم و اندازه گیری انجام می دهیم، آن پرتو به زیرپرتو هایی در پایه های اندازه گیری تقسیم می شود. ماتریس چگالی شدت هر کدام از این زیر پرتو ها را در پرتو اولیه نشان می دهد. این ماتریس یک داده کلی است و اطلاعی از تک ذرات نمی دهد.

پرتویی خالص

پرتویی را خالص می گویند که تمام ذرات آن در حالت یکسان باشند.

مشاهده پذیر یک عملگر خود الحاقی در فضای  $V$  است.  
در نظر بگیرید داریم:

$$w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 = |w|^2 = 1$$

$|c_j|^2$  شدت زیرپرتوی مربوط به حالت  $v_j$  را مشخص می کند. پس داریم:

$$\langle v_j | w \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle v_j | v_k \rangle = c_k$$

Projector

$$Proj_v(w) = \langle v | w \rangle |v\rangle$$

این عملگر در واقع تصویر بردار را در پایه مدل نظر نمایش می دهد و یک نگاشت  $V \rightarrow V$  است.

## Trace

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle e_i | e_j \rangle$$

تریس در واقع همان جمع مقادیر قطر اصلی است.

## عملگر چگالی

عملگر چگالی برای یک پرتوی خالص در حالت  $w$  همان پروجکشن به  $w$  است. برای حالت ناخالص میانگین پروجکشن‌ها هست یعنی:

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |w_i\rangle \langle w_i|$$

عملگر چگالی خود الحق است یعنی:

$$\forall v, u \in V \quad \langle v | P_W u \rangle = \langle P_W v | u \rangle$$

مشاهده پذیر  $A$  با بردار ویژه‌های نرمال عمود بر هم  $v$  و مقدار ویژه‌های  $\lambda$  به صورت زی ر است:

$$A = \sum_{i=0}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_{v_i} \implies A |v_k\rangle = \lambda_k |v_k\rangle 1\langle v_k | v_k \rangle + \sum_{i=0, i \neq k}^n \lambda_i |v_i\rangle 0\langle v_i | v_k \rangle = \lambda_k |v_k\rangle$$

حال اگر روی ماتریس چگالی اندازه گیری انجام شود شدت زیر پرتوی  $\lambda_k$  برابر است با:

$$|c_k|^2 = \text{tr}(\rho.P_{v_k}) \quad \text{tr}(\rho.A) = \sum_{k=0}^n \lambda_k |c_k|^2$$

ماتریس چگالی علاوه بر این که برای توصیف پرتوی‌های خالص و ناخالص کاربرد دارد می‌توان در توصیف سیستم‌های در هم تنیده نیز استفاده شوند. فرض کنید دو ذره در هم تنیده  $w, v$  داریم. یکی را به  $A$  می‌فرستیم که در فضای  $V$  و دیگری به  $B$  در فضای  $W$ . فقط اندازه گیری در  $A$  انجام می‌شود. می‌توانیم این موضوع را به صورت زیر توصیف کنیم:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} |v_i\rangle |w_j\rangle \quad \rho_v = \text{tr}_w(|\psi\rangle \langle \psi|) = \sum_{i,j,k} c_{ij} c_{kj}^- |v_i\rangle \langle v_k|$$

بنابراین عملگر  $\rho_v$  ماتریسی با درایه‌های  $c_{ij}, C\bar{C}^T$  است. در نهایت حدود ۸۰ درصد مباحثت را فهمیدم.