



۸۱۰۱۰۱۵۵۸

پردازش اطلاعات کوانتومی
نام و نام خانوادگی: مهدی وجهی



۲۰ ارائه

ویژگی‌های ماتریس چگالی برای سیستم‌های دوبخشی کوانتومی. قرار دهید ρ_V ماتریس چگالی برای حالت $\psi \in V \otimes W$ باشد که شرط $1 = |\psi|^2$ را نیز داشته باشد:

۱. ρ_V خود الحق است.

$$\rho_V = \rho_V^\dagger \quad \rho_V = \sum_{ijk} c_{ij} c_{kj}^- |v_i\rangle \langle v_k| \quad \rho_V^\dagger = \sum_{ijk} c_{ij}^- c_{kj} |v_k\rangle \langle v_i|$$

$$i, j, k \text{ یکسان است و می توان نام آنها را باهم عوض کرد} \implies \rho_V^\dagger = \sum_{ijk} c_{ij} c_{kj}^- |v_i\rangle \langle v_k| = \rho_V$$

۲. ρ_V نامنفی است.

$$\forall \varphi \in V \quad \langle \varphi | \rho_V | \varphi \rangle \geq 0 \quad \langle \varphi | \rho_V | \varphi \rangle = \langle \varphi | C C^\dagger | \varphi \rangle = \langle C^\dagger \varphi | C^\dagger | \varphi \rangle = \langle C^\dagger \varphi | C^\dagger \varphi \rangle = | |C^\dagger \varphi \rangle |^2 \geq 0$$

۳. ρ_V تریس برابر ۱ است.

$$\begin{aligned} tr(\rho_V) &= tr\left(\sum_{ijk} c_{ij} c_{kj}^- |v_i\rangle \langle v_k|\right) \stackrel{\text{خطی بودن}}{=} \sum_{ijk} c_{ij} c_{kj}^- tr(|v_i\rangle \langle v_k|) \stackrel{\text{چربخشی بودن}}{=} \sum_{ijk} c_{ij} c_{kj}^- tr(\langle v_k | v_i \rangle) \\ &= \sum_{ij} c_{ij} c_{ij}^- \stackrel{\substack{\text{پایه ها متعامد} \\ \text{احتمال کل}}} {=} \sum_{ij} |c_{ij}|^2 \stackrel{\text{کل}}{=} 1 \end{aligned}$$

۴. مقدار ویژه های ρ_V نامنفی و با جمع ۱ هستند.

$$0 \leq \langle u | \rho_V \underbrace{|u\rangle}_{\text{بردار ویژه}} = \langle u | \lambda |u\rangle = \lambda |u|^2 \implies \boxed{\lambda \geq 0}$$

تریس ماتریس قطری شونده برابر با جمع مقادیر ویژه است و طبق ویژگی ۳ این مقدار برابر ۱ است.

۵ اگر ψ در هم تنیده نباشد ρ_V یک پروژکتور با رتبه ۱ است.

$$\rho_V = \text{tr}_W(|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{tr}_W(|v\rangle\otimes|w\rangle\cdot\langle v|\otimes\langle w|) = |v\rangle\langle v|\langle w|w\rangle|v\rangle = |v\rangle\langle v|(1)|v\rangle = |v\rangle\langle v| = P_V$$

همانطور که از نام پروژکتور مشخص است بردارها را روی V تصویر می‌کند. پس تمامی بردارها در یک راستا با مقادیر متفاوت قرار می‌گیرند. پس تنها یک خروجی مستقل خطی وجود دارد و رتبه برابر ۱ است. اما اگر این طور نباشد یعنی ψ در هم تنیده است.

۶ اگر مشاهده پذیر محلی A روی V اعمال شود. میانگین مقدار ψ است. $\text{tr}(\rho_V A)$

$$\begin{aligned}\langle\psi|A|\psi\rangle &= \sum_{p,q} c_{pq}^- \langle v_p | \otimes \langle w_q | \cdot \sum_{s,m} a_{sm} |v_s\rangle \langle v_m| \cdot \sum_{i,j} c_{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle \\ &= \sum_{p,q} c_{pq}^- \langle v_p | \otimes \langle w_q | \cdot \sum_{s,i} a_{si} |v_s\rangle \cdot \sum_j c_{ij} |w_j\rangle \\ &= \sum_{ijs} c_{sj}^- a_{si} c_{ij}\end{aligned}$$

$$\text{tr}(\rho_V A) = \text{tr}\left(\sum_{ijk} c_{ij} c_{kj}^- |v_i\rangle \langle v_k| \cdot \sum_{s,m} a_{sm} |v_s\rangle \langle v_m|\right) = \sum_{ijs} c_{ij} c_{sj}^- a_{si}$$

در نهایت حدود ۹۰ درصد مباحث را متوجه شدم.