پردازش اطلاعات کوانتومی

نام و نام خانوادگی: مهدی وجهی

تکلیف ۲

۸۱۰۱۰۱۵۵۸

۱ سوال ۱

۱.۱ a

این عبارت بی معنی است زیرا جمع یک بردار ستونی (کت) با یک بردار سطری (برا) ممکن نیست.

۲.۱ b

بله ممکن است. ضرب کت در برا از لحاظ جبر خطی ممکن است و یک ماتریس می دهد. به آن ضرب خارجی می گویند و یک عملگر را توصیف می کند. لازم به ذکر است که در برا لازم است ترانهاده مزدوج نوشته شود اما برای سادگی مقادیر را مزدوج فرض می کنیم و دیگر $*$ صرف نظر شده.

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1\phi_1 & \psi_1\phi_2 & \dots & \psi_1\phi_n \\ \psi_2\phi_1 & \psi_2\phi_2 & \dots & \psi_2\phi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\phi_1 & \psi_n\phi_2 & \dots & \psi_n\phi_n \end{bmatrix}$$

۳.۱ c

ضرب یک ماتریس در بردار سطری ممکن نیست زیرا سطر های آن که n تا است باید در ستون های بردار سطری ضرب شود ولی کلا تک ستونی است و ممکن نیست.

۴.۱ d

مجدد مانند قبلی این نیز بی معنی است و ممکن نیست زیرا این دفعه باید عناصر یک سطر را که در بردار ستونی کت که یک است را در ستون n عنصری ماتریس ضرب کنیم که ممکن نیست.

۵.۱ e

این حالت ممکن است و تعداد سطر و ستون به هم می خورد. نتیجه آن یک بردار ستونی کت است که وضعیت یک حالت کوانتومی را توصیف می کند.

$$\langle\psi| A = \begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n \psi_i a_{i,1} & \sum_{i=1}^n \psi_i a_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^n \psi_i a_{i,n}\end{bmatrix} = \langle x|$$

۶.۱ f

بخش اول عبارت در بخش e حساب شد و معادل یک کت است. با انجام این محاسبه عبارت می شود همان عبارت بخش a که گفته شد بی معنی است.

۷.۱ g

ضرب دو بردار ستونی بی معنی است اما معمولا از این نحوه نمایش برای ضرب تانسوری استفاده می شود و داریم:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle\,|\phi\rangle = |\psi\phi\rangle$$

۸.۱ h

بخش اول همانطور که قبلا محاسبه شد تشکیل یک عملگر می دهد و ما می توانیم با ضرب دو عملگر، عملگر جدیدی ایجاد کنیم. همچنین از لحاظ جبر خطی نیز ضرب ۲ ماتریس $n \times n$ یک ماتریس $n \times n$ خروجی می دهد.

۹.۱ i

عبارت در هر دو حالت پرانتز گذاری یکی از حالت های c, d رو تولید می کند که همانطور که گفته شد بی معنی است.

۱۰.۱ j

بله ممکن است و خروجی آن یک عدد اسکالر است. داریم: $\langle\psi| A |\phi\rangle = (\langle\psi| A)\,|\phi\rangle \overset{e}{=} \langle x|\phi\rangle = \begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_n\end{bmatrix}$

۱۱.۱ k

هر دو طرف عبارت جمع در بخش j محاسبه شدند و هردو عدد اسکالر هستن وجمع دو عدد اسکار ممکن است.

۱۲.۱ l

عبارت $\langle\psi|\phi\rangle$ همانطور که محاسبه شد یک عدد اسکالر هست و ضرب عدد اسکار در هر نوع ماتریسی از جمله بردار سطری ممکن است.

۱۳.۱ m

همانطور که محاسبه شد یک عدد اسکالر هست و ضرب عدد اسکار در هر نوع ماتریسی از جمله ماتریس مربعی ممکن است.

۱۴.۱ n

عبارت $\langle\psi|\phi\rangle$ یک عدد اسکالر است و ضرب عدد اسکالر در ماتریس قابلیت جابه جایی دارد. پس تساوی درست است.

۲ سوال ۲

۱.۲ صفحه ۳

یک بردار احتمال که یک وضعیت را نشان می دهد و احتمال قرار داشتن در هر پایه را مشخص کرده.

۲.۲ صفحه ۴

در این صفحه یک ماتریس جهت انقال وضعیت نشان داده شده که همان عملگر ها یا گیت های کوانتومی ما هستند. همچنین نتیجه اعمال آن روی یک حالت و بردار همراه با بردار نتیجه نشان داده شده.

۳.۲ صفحه ۵

یک حالت کوانتومی ۲ پایه ای را نشان داده که نماینده یک کیوبیت است و نشان داده احتمال کل آن که با جمع مربع اندازه مقدار حالات محاسبه می شود برابر ۱ است.

۴.۲ صفحه ۶

برای یک ماتریس مزدوج آن و مزدوج ترانهاده ی آن را حساب کرده و سپس یونیتاری بودن را با ضرب ماتریس در مزدوج ترانهاده خود حساب کرده که به درستی برابر ماتریس همانی شده. در آخر هم عملگر را در یک کیوبیت اعمال کرده و نشان داده باز هم وضعیت درست و احتمال کل ۱ است.

۵.۲ صفحه ۷

احتمال هر وضعیت را در حالت کوانتومی حساب کرده که برای این کار اندازه مربع مقدار آن پایه است.

۶.۲ صفحه ۸

دو حالت پایه کوانتومی (بردار های پایه) یعنی $\langle 1| \,, \langle 0|$ را تعریف کرده

۷.۲ صفحه ۹

بردار مثال را تجزیه کرده و در نهایت به صورت ترکیب خطی دو پایه کوانتومی نوشته.

۸.۲ صفحه ۱۰

مشابه صفحه قبل تجزیه را روی یک بردار سطر (برا) انجام داده و با پایه های محاسباتی نوشته.

۹.۲ صفحه ۱۱

ضرب داخلی ۲ حالت کوانتومی را حساب کرده یکبار خودشان و یکبار مزدوج ترانهاده آنها و نشان داده مقدار آن یکسان شده.

۱۰.۲ صفحه ۱۲

همان ضرب داخلی را نشان می دهد ولی این دفعه با تجزیه به پایه ها آن را محاسبه کرده.

۱۱.۲ صفحه ۱۳

نرم یک بردار را حساب کرده که ریشه ضرب داخلی آن در مزدوج ترانهاده خود است.

۱۲.۲ صفحه ۱۴

جفت پایه متعامد نرمال $\langle -| , \langle +|$ را نوشته و محاسبه کرده که نرم آنها ۱ است و ضرب داخلی آنها صفر که یعنی بر هم عمود هستند.

۱۳.۲ صفحه ۱۵

در این قسمت یک حالت کوانتومی را با پایه های $\langle -| , \langle +|$ نشان داده و برای این کار ضرب داخلی آن ها را روی این بردار های حساب کرده که درواقع نشان دهنده تصویر آنها روی آن بردار آن و با ضرب این مقدار در آن پایه و در نهایت جمع این مقدار برای ۲ پایه توصیف کرده.

۱۴.۲ صفحه ۱۶

در این بخش وضعیت $\langle 0|$ را در پایه های $\langle -| , \langle +|$ نمایش داده.

۱۵.۲ صفحه ۱۷

یک متایس مختلط را نشان داده و دو درایه آن را مجزا نمایش داده.

۱۶.۲ صفحه ۱۸

ضرب اسکالر در ماترس را نمایش داده به این صورت که عدد اسکالر در تک تک درایه ها ضرب شده.

۱۷.۲ صفحه ۱۹

جمع دو ماتریس را نشان داده به این صورت که داریه با درایه متناظر جمع می شوند.

۱۸.۲ صفحه ۲۰

برای یک ماتریس مزدوج حساب کرده به این صورت که تک تک درایه ها را مزدوج گرفته. یعنی بخش مختلط قرینه شده و بخش حقیقی بی تغییر باقی می ماند.

۱۹.۲ صفحه ۲۱

ترانهاده ماتریس را حساب کرده به این صورت که برای هر درایه داریم $M_{i,j} = M_{j,i}^{T}$

۲۰.۲ صفحه ۲۲

مزدوج ترانهاده یک ماتریس را حساب کرده که با یک دگر در بالای ماتریس نمایش می دهند. برای این کار به ترتیبی دلخواه عملیات مزدوج و ترانهاده را انجام می دهیم.