



۸۱۰۱۰۱۵۵۸

پردارش اطلاعات کوانتومی  
نام و نام خانوادگی: مهدی وجهی



ارائه ۲۰

ویژگی‌های ماتریس چگالی برای سیستم‌های دوبخشی کوانتومی. قرار دهید  $\rho_V$  ماتریس چگالی برای حالت  $\psi \in V \otimes W$  باشد که شرط  $|\psi|^2 = 1$  را نیز داشته باشد:

## ۱ $\rho_V$ خود الحاق است .

$$\rho_V = \rho_V^\dagger \quad \rho_V = \sum_{ijk} c_{ij} \bar{c}_{kj} |v_i\rangle \langle v_k| \quad \rho_V^\dagger = \sum_{ijk} \bar{c}_{ij} c_{kj} |v_k\rangle \langle v_i|$$

$$i, j, k \text{ یکسان است و می توان نام آنها را باهم عوض کرد} \implies \rho_V^\dagger = \sum_{ijk} c_{ij} \bar{c}_{kj} |v_i\rangle \langle v_k| = \rho_V$$

## ۲ $\rho_V$ نامنفی است .

$$\forall \varphi \in V \quad \langle \varphi | \rho_V | \varphi \rangle \geq 0 \quad \langle \varphi | \rho_V | \varphi \rangle = \langle \varphi | C C^\dagger | \varphi \rangle = \langle C^\dagger \varphi | C^\dagger | \varphi \rangle = \langle C^\dagger \varphi | C^\dagger \varphi \rangle = \|C^\dagger \varphi\|^2 \geq 0$$

## ۳ تریس $\rho_V$ برابر ۱ است.

$$\begin{aligned} \text{تریس}(\rho_V) &= \text{tr} \left( \sum_{ijk} c_{ij} \bar{c}_{kj} |v_i\rangle \langle v_k| \right) \stackrel{\text{خطی بودن}}{=} \sum_{ijk} c_{ij} \bar{c}_{kj} \text{tr}(|v_i\rangle \langle v_k|) \stackrel{\text{چرخشی بودن}}{=} \sum_{ijk} c_{ij} \bar{c}_{kj} \text{tr}(\langle v_k | v_i \rangle) \\ &= \sum_{ij} c_{ij} \bar{c}_{ij} \stackrel{\text{پایه ها متعامد}}{=} \sum_{ij} |c_{ij}|^2 \stackrel{\text{احتمال کل ۱}}{=} 1 \end{aligned}$$

## ۴ مقدار ویژه های $\rho_V$ نامنفی و با جمع ۱ هستند.

$$0 \leq \langle u | \rho_V | u \rangle \stackrel{\text{بردار ویژه}}{=} \langle u | \lambda | u \rangle = \lambda |u|^2 \implies \boxed{\lambda \geq 0}$$

تریس ماتریس قطری شونده برابر با جمع مقادیر ویژه است و طبق ویژگی ۳ این مقدار برابر ۱ است.

## ۵ اگر $\psi$ در هم تنیده نباشد $\rho_V$ یک پروژکتور با رتبه ۱ است.

$$\rho_V = \text{tr}_W(|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{tr}_W(|v\rangle\langle v| \otimes |w\rangle\langle w|) = |v\rangle\langle v| \otimes \langle w|w\rangle = |v\rangle\langle v| (1) = |v\rangle\langle v| = P_V$$

همانطور که از نام پروژکتور مشخص است بردار ها را روی  $V$  تصویر می کند. پس تمامی بردار ها در یک راستا با مقادیر متفاوت قرار می گیرند. پس تنها یک خروجی مستقل خطی وجود دارد و رتبه برابر ۱ است. اما اگر این طور نباشد یعنی  $\psi$  در هم تنیده است.

## ۶ اگر مشاهده پذیر محلی $A$ روی $V$ اعمال شود. میانگین مقدار $\psi$ ، $\text{tr}(\rho_V A)$ است.

$$\begin{aligned} \langle\psi| A |\psi\rangle &= \sum_{p,q} \bar{c}_{pq} \langle v_p| \otimes \langle w_q| \cdot \sum_{s,m} a_{sm} |v_s\rangle \langle v_m| \cdot \sum_{i,j} c_{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle \\ &= \sum_{p,q} \bar{c}_{pq} \langle v_p| \otimes \langle w_q| \cdot \sum_{s,i} a_{si} |v_s\rangle \cdot \sum_j c_{ij} |w_j\rangle \\ &= \sum_{ijs} \bar{c}_{sj} a_{si} c_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{tr}(\rho_V A) = \text{tr}\left(\sum_{ijk} c_{ij} \bar{c}_{kj} |v_i\rangle \langle v_k| \cdot \sum_{s,m} a_{sm} |v_s\rangle \langle v_m|\right) = \sum_{ijs} c_{ij} \bar{c}_{sj} a_{si}$$

در نهایت حدود ۹۰ درصد مباحث را متوجه شدم.