پردازش اطلاعات کوانتومی

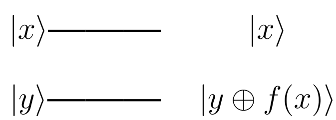
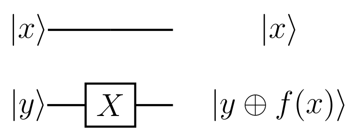
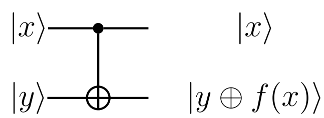
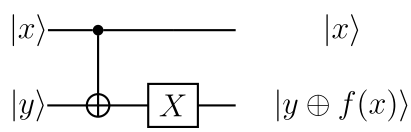
نام و نام خانوادگی: مهدی وجهی

ارائه ۷

۸۱۰۱۰۱۵۵۸

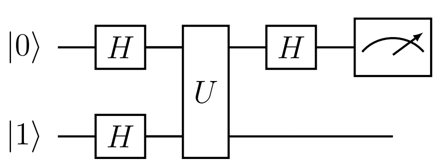
۱ توابع ثابت و متعادل

به توابعی ثابت می گویند که به ازای همه ورودی ها مقدار ثابتی برگرداند یعنی مثلا همیشه ۰ برگرداند. به توابعی متعادل می گویند که به ازای تمام ورودی ها در نیمی از موارد ۰ و در نیمی دیگر ۱ تولید کنند.

Function	**x**	**f(x)**	**Type**	**Unitary**
f(x)=0	0 1	0 0	Constant	
f(x)=1	0 1	1 1	Constant	
f(x)=x	0 1	0 1	Balanced	
f(x)=x⊕1	0 1	1 0	Balanced	

۲ الگوریتم دویچ $(Deutsch)$

این الگوریتم با یک بار فراخوانی تابع تشخیص می دهد که آن ثابت است یا متعادل.

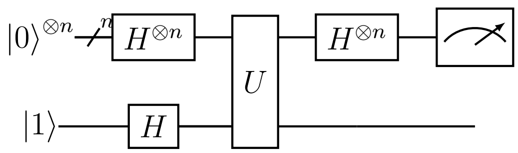


$$Before\ measurement : \lvert\psi\rangle = \begin{cases} \pm\lvert 0\rangle \left(\frac{\lvert 0\rangle-\lvert 1\rangle}{\sqrt{2}}\right) & if\ f(0)=f(1) \\ \pm\lvert 1\rangle \left(\frac{\lvert 0\rangle-\lvert 1\rangle}{\sqrt{2}}\right) & if\ f(0)\neq f(1) \end{cases}$$

در سیستم های کوانتومی یک راه بیان پیچیدگی تعداد پرسوجو (اجرا) است و هدف ما کاهش آن است.

۳ الگوریتم دویچ - جوزا $(Deutsch - Jozsa)$

این الگوریتم، الگوریتم قبلی را به n بیت تعمیم می دهد. اگر بخواهیم این کار را با روش های سنتی انجام دهیم حداقل باید $2^{n-1}+1$ حالت را امتحان کنیم تا متوجه شویم که تابع متعادل است یا ثابت. اما در این روش تنها با یک بار اجرا این کار ممکن است. مدار و محاسبات آن به شکل زیر است:



$$Before\ U : |\psi\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$After\ U : |\psi\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} (-1)^{f(x)} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \qquad H^{\otimes n} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z\in\{0,1\}^n} (-1)^{x.z} |z\rangle$$

$$Before\ measurement : |\psi\rangle = \sum_{z\in\{0,1\}^n} \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{1}{2^n} (-1)^{x.z+f(x)} |z\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

قبل از اعمال اوراکل x ها را در حالت برهم نهی می بریم و سپس از گیت عبور می دهیم. بعد از آن حالت آن را نوشته‌ایم. توجه کنید که با در نظر گرفتن مقادیر ۰ و ۱ برای $f(x)$ و XOR کردن آن با y در صورتی که تابع ۱ باشد -1 از y خارج می شود و درصورتی که صفر باشد ۱ خارج می شود. پس می شود آن را با $(-1)^{f(x)}$ توصیف کرد. سپس گیت هادامارد را اعمال می کنیم. در حالت کلی می توان اعمال گیت هادامارد در n بیت را به صورت فرمول بالا نوشت که در آن ضرب $x.z$ در واقع AND بیتی و سپس جمع زدن یک های نتیجه است. همچنین در این قسمت زیر سیستم y را تفکیک می کنیم و دیگر نمی نویسیم. حال حالت $|z\rangle^{\otimes n} = |0\rangle^{\otimes n}$ را در نظر گیرید:

$$Before\ measurement : |\psi'\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{1}{2^n} (-1)^{f(x)} |0\rangle$$

حال با دو فرض ثابت و متعادل بودن تابع آن را باز نویسی می کنیم:

$$|\psi'\rangle_{Const} = \begin{cases} \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{1}{2^n} (-1)^0 |0\rangle & f(x)=0 \\ \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{1}{2^n} (-1)^1 |0\rangle & f(x)=1 \end{cases} = \begin{cases} |0\rangle^{\otimes n} & f(x)=0 \\ -|0\rangle^{\otimes n} & f(x)=1 \end{cases} \xRightarrow{\text{احتمال}} \begin{cases} |1|^2 & f(x)=0 \\ |-1|^2 & f(x)=1 \end{cases} = 1$$

$$|\psi'\rangle_{Balanced} = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{1}{2^n} (-1)^{f(x)} |0\rangle = \Big((\sum_{2^{n-1}} \frac{1}{2^n} (-1)^0) + (\sum_{2^{n-1}} \frac{1}{2^n} (-1)^1) \Big) |0\rangle^{\otimes n} = 0\, |0\rangle^{\otimes n} \xRightarrow{\text{احتمال}} |0|^2 = 0$$

پس در زمانی که اوراکل ثابت هست ما حتما در همه x ها ۰ مشاهده می کنیم و اگر متعادل باشد ما قطعا در همه x ها ۰ مشاهده نمی کنیم. بنابراین با اندازه گیری می توانیم متوجه بشویم که اوراکل ثابت است یا متعادل.

در نهایت چیزی در حدود ۸۰ درصد مطالب را فهم کردم.