پردازش اطلاعات کوانتومی

نام و نام خانوادگی: مهدی وجهی

۸۱۰۱۰۱۵۵۸

تخته ۱۵ تا ۱۸

۱ $Shift\ Invariance$

در این قسمت ما $Shift\ Invariance$ را بررسی می کنیم. به صورت دقیق تر نشان می دهیم که اگر داده‌های ورودی در زمان جابه‌جا شوند الگوی فرکانسی (مکان قله‌ها) تغییر نمی‌کند و تنها فاز (علامت) آن‌ها تغییر می‌کند. برای توضیح این موضوع ما یک فضای ۸ بعدی (N) در نظر می گیریم. همچنین دوره تناوب (r) هم ۴ در نظر می گیریم یعنی بعد از ۴ گام ما تکرار داریم. با توجه به این دو مورد هم فرکانس ما ۲ می شود. حال فرض کنید حالت زیر را داریم.

$$Input_1 = |0\rangle + |4\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

حال تبدیل فوریه آن را محاسبه می کنیم. چون صرفا می خواهیم بررسی کنیم که کدام خانه ها مقدار دارند ضرایب و نرمال سازی را انجام نمی دهیم. فرمول تبدیل فوریه گسسته به شکل زیر است:

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega^{jk}$$

با جایگذاری داریم که:

$$y_k = (1 \times \omega^{0 \cdot k}) + (1 \times \omega^{4 \cdot k}) = 1 + (-1)^k$$

یعنی در نهایت خانه های دارای مقدار بعد از تبدیل به صورت زیر است:

$$Output_1 = QFT(Input_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = |0\rangle + |2\rangle + |4\rangle + |6\rangle$$

تمام ضرایب پشت این بردارها عدد ۱ (مثبت) هستند. این نشان‌دهنده حالتی است که ورودی هیچ جابه‌جایی نداشته است.

حال یک حالت دیگر را در نظر بگیرید. در این حالت مقادیر غیرصفر در خانه‌هایی قرار دارند که نسبت به حالت قبل یک واحد جلوتر هستند.

$$Input_2 = |1\rangle + |5\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

وقتی فرمول DFT را روی این ورودی جدید اعمال می‌کنیم یک اتفاق ریاضی جالب رخ می‌دهد.

$$y'_k = \omega^{1k} + \omega^{5k} = \omega^k(\underbrace{1+\omega^{4k}}_{Output_1})$$

عبارت داخل پرانتز دقیقاً همان خروجی آزمایش اول است! ضریب پشت پرانتز (ω^k) همان «عامل فاز» است. این فرمول ثابت می‌کند که خروجی جدید همان خروجی قبلی است که فقط چرخیده است (تغییر فاز داده). همچنین به صورت ضرب بردار در ماتریس هم می توان آن را نشان داد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^1 & \omega^4 & \omega^7 & \omega^2 & \omega^5 \\ 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 \\ 1 & \omega^5 & \omega^2 & \omega^7 & \omega^4 & \omega^1 & \omega^6 & \omega^3 \\ 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^7 & \omega^6 & \omega^5 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ \omega^1+\omega^5 \\ \omega^2+\omega^2 \\ \omega^3+\omega^7 \\ \omega^4+\omega^4 \\ \omega^5+\omega^1 \\ \omega^6+\omega^6 \\ \omega^7+\omega^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین بردار خروجی می شود:

$$Output_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 0 & -1 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}^T = |0\rangle + i\,|2\rangle - |4\rangle - i\,|6\rangle$$

برای ۲ حالت دیگر هم داریم:

$$Input_3 = |2\rangle + |6\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$Output_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = |0\rangle - |2\rangle + |4\rangle - |6\rangle$$

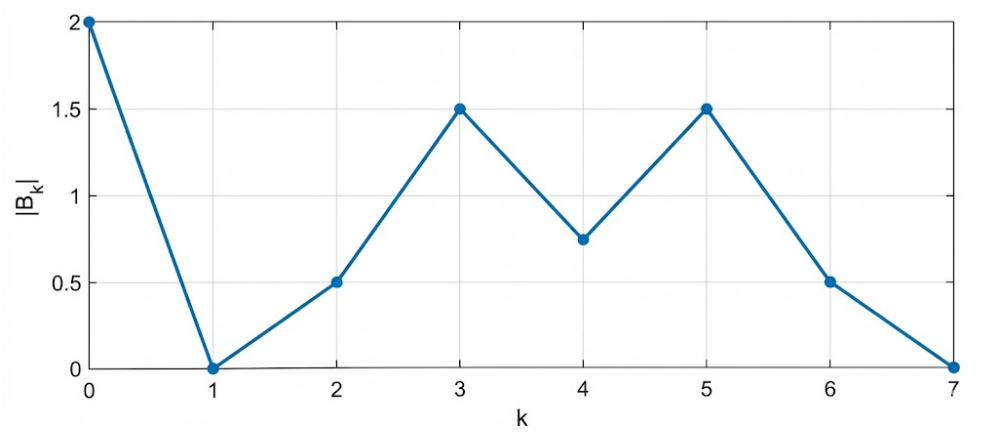
$$Input_4 = |3\rangle + |7\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$Output_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 0 & -1 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}^T = |0\rangle - i\,|2\rangle - |4\rangle + i\,|6\rangle$$

در نتیجه در الگوریتم‌های کوانتومی مهم نیست که رشته متناوب ورودی از کجا شروع شود (از اندیس ۰ یا ۱ یا ...). تبدیل فوریه کوانتومی خاصیت $Shift\ Invariance$ دارد. این خاصیت باعث می‌شود جابه‌جایی زمانی ورودی تنها به صورت تغییر فاز در خروجی ظاهر شود.

حال بیایید حالتی را در نظر بگیریم که دوره تناوب ۳ باشد. در این حالت فرکانس دیگر رند نیست و 2.66 است. حالت های زیر برای این موضوع می تواند مشاهده شود:

$$|0\rangle + |3\rangle + |6\rangle \qquad |1\rangle + |4\rangle + |7\rangle \qquad |2\rangle + |5\rangle$$

از آنجا که فرکانس اصلی ما (2.66) یک عدد صحیح نیست و خروجی QFT گسسته است (فقط اعداد صحیح ۰ تا ۷ را داریم) جواب نمی‌تواند در یک نقطه متمرکز شود. فرکانس واقعی 2.66 است. این عدد بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد. بنابراین در نمودار خروجی ما دو قله در اندیس‌های $k = 2$ و $k = 3$ مشاهده می‌کنیم. احتمال مشاهده عدد ۳ کمی بیشتر است زیرا 2.66 به ۳ نزدیک‌تر است. مضرب بعدی فرکانس برابر است با: $2 \times 2.66 = 5.33$. این عدد بین ۵ و ۶ قرار دارد. به همین دلیل در نمودار قله‌های بعدی در اندیس‌های $k = 5$ و $k = 6$ ظاهر می‌شوند .



شکل ۱: نمودار اندازه به ازای تمام ابعاد در تبدیل فوریه گسسته با فرکانس 2.66

این نمودار نشان می‌دهد که در الگوریتم‌های کوانتومی وقتی اندازه‌گیری انجام می‌دهیم لزوماً عدد دقیق N/r را به دست نمی‌آوریم. بلکه عددی صحیح نزدیک به آن را با احتمال بالا اندازه‌گیری می‌کنیم (مثلاً ۳ یا ۲). سپس با استفاده از روش‌های ریاضی کلاسیک می‌توانیم از این عدد تقریبی ($C \approx N/r$) دوره تناوب دقیق (r) را استخراج کنیم.
حال به اثبات این موضوع می پردازیم. حالت کوانتومی را می توان به این شکل نوشت:

$$|\psi_{in}\rangle = \sqrt{\frac{r}{N}} \sum_{j=0}^{\frac{N}{r}-1} |jr + m\rangle$$

در این عبارت r دوره تناوب m آفست است و j شماره ی گام و N تعداد ابعاد است. همچنین می دانیم که:

$$|j\rangle \xrightarrow{QFT_N} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{jk}{N}\right) |k\rangle$$

بنابراین داریم:

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sqrt{\frac{r}{N}}\sum_{j=0}^{\frac{N}{r}-1}\exp\left(2\pi i\frac{(jr+m)k}{N}\right)\right)|k\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{r}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(2\pi i\frac{mk}{N}\right)\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\frac{N}{r}-1}\exp\left(2\pi i\frac{jrk}{N}\right)\right)}_{\text{بخش اصلی تداخل}}|k\rangle \qquad \frac{(jr+m)k}{N} = \frac{jrk}{N} + \frac{mk}{N}$$

آن بخشی از عبارت که مشخص شده یک تصاعد هندسی است و با توجه به این که r عاد می کند N را پس با فرض این که $\frac{rk}{N}$ یک عدد صحیح است و می دانیم که $e^{2\pi i(integer)} = 1$ همچنین تعداد آنها $\frac{N}{r}$ است. این عبارت تنها زمانی عدد صحیح است که k مضربی از $\frac{N}{r}$ باشد یعنی:

$$k = k'\left(\frac{N}{r}\right)$$

که k' .در اینجا عدد صحیح است با توجه به این موضوع و اعمال آن در عبارت داریم.

$$|\psi_{final}\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k'=0}^{r-1}\exp\left(2\pi i\frac{mk'}{r}\right)\left|k'\frac{N}{r}\right\rangle$$

پس همانطور که مشاهده می کنید در حالت کوانتومی دیگر خبری از آفست نیست و اثر آن مشاهده نمی شود.