بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین کامپیوتری هفتم سیگنال و سیستم

دکتر اخوان

علیرضا کریمی - ۸۱۰۱۰۱۴۹۲

مهدی وجهی - ۸۱۰۱۰۱۵۵۸

سوال ۱

الف

$$R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

ابتدا عبارات را در معادله جایگزین کردیم و سپس مشتق گرفتیم.

ب

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) \quad \mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) \quad \mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$R.s.I(s) + L.s^2.I(s) + \frac{1}{C}I(s) = s.V_{in}(s) \rightarrow I(s) = \frac{s.V_{in}(s)}{Rs+Ls^2+\frac{1}{C}}$$

ابتدا تبدیل لاپلاس گرفتیم با قواعد مذکور. سپس جریان را بر حسب ولتاژ ورودی تعریف کردیم.

ج

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \rightarrow i(t) = C\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow I(s) = C.s.Y(s)$$

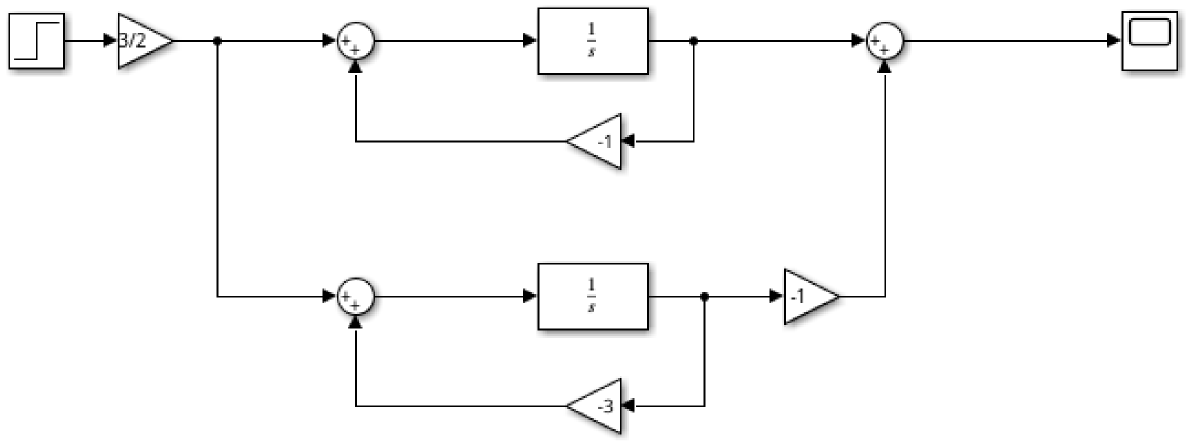
$$x(t) = v_{in}(t) \rightarrow X(s) = V_{in}(s)$$

$$I(s) = \frac{s.V_{in}(s)}{Rs+Ls^2+\frac{1}{C}} = C.s.Y(s) \rightarrow Y(s) = \frac{V_{in}(s)}{RCs+LCs^2+1} = \frac{X(s)}{RCs+LCs^2+1}$$

ابتدا جریان و ولتاژ اولیه را برحسب x,y حساب کردیم و سپس در معادله جایگزین کردیم.

د

$$Y(s) = \frac{X(s)}{RCs+LCs^2+1} = \frac{X(s)}{\frac{4}{3}s+\frac{1}{3}s^2+1} = \frac{3}{2}X(s)\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right)$$



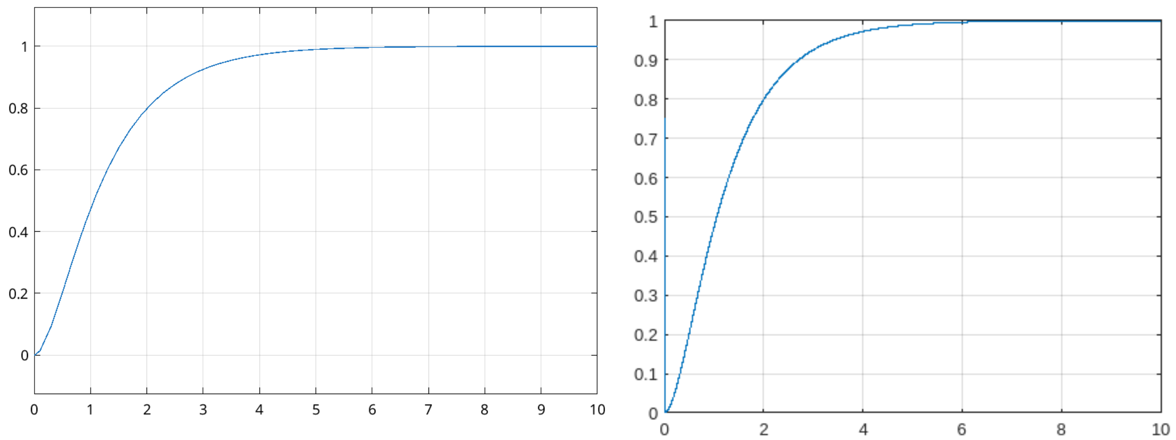
و

$$x(t) = u(t) \to X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{3}{2} X(s) (\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}) = \frac{3}{2} \frac{1}{s} (\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+1}$$

$$\to y(t) = (1 + \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-t}) u(t)$$

ه



نمودار سمت چپ حاصل کد زیر است و نمودار سمت راست برای بلوک دیاگرام است که تطابق دارند.

```
t = 0:0.001:10;
plot(t, 1 + exp(-3 * t) / 2 - 3 * exp(-t) / 2 .* heaviside(t));
grid on;
```

سوال ۲

الف

$$B\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

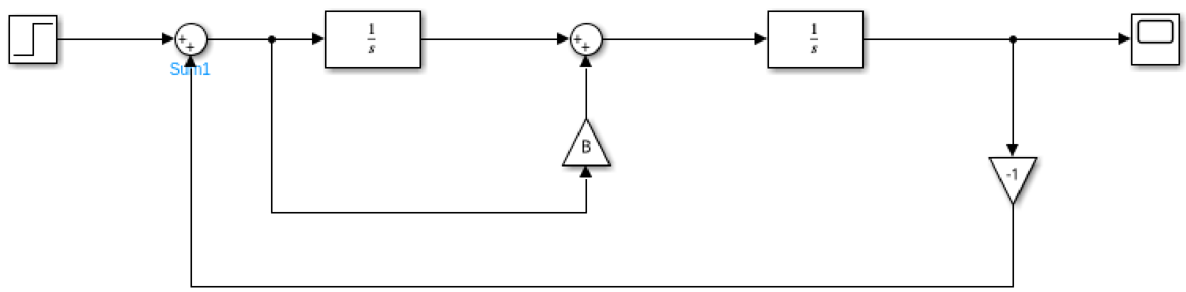
ب

$$BsX(s) + X(s) = s^2Y(s) + BsY(s) + Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}X(s)$$

$$H(s) = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}$$

$$\frac{1}{s^2}(X(s) - Y(s)) + \frac{B}{s}(X(s) - Y(s)) = Y(s)$$



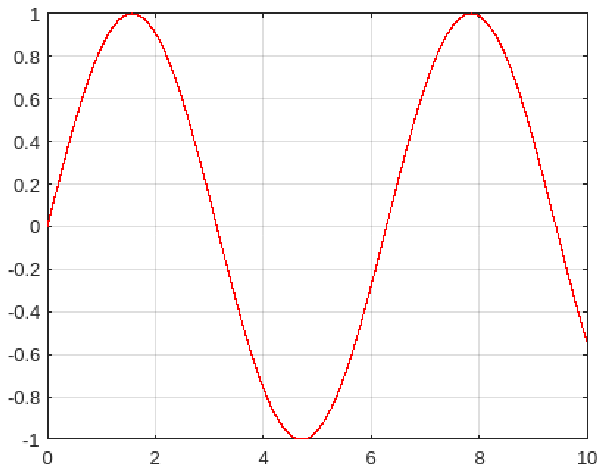
ج

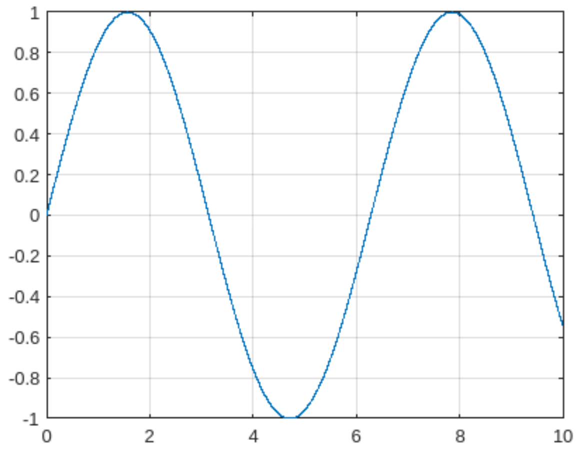
$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$ | $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ $\delta(t-a)$ | e^{-as}

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}X(s) = \frac{1}{s^2+1}(1) \rightarrow y(t) = sin(t)u(t)$$

نمودار قرمز دستی رسم شده و آبی توسط بلوک دیاگرام تولید شده که یکسان است.

```
t = 0:0.001:10;
plot(t, sin(t), ‘r’);
grid on;
```





د

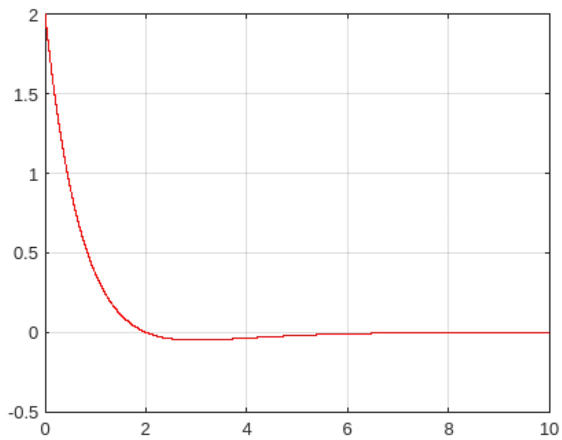
$$H(s) = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1} \to \Delta \geq 0 \to B^2 - 4 \geq 0 \to B \geq 2$$

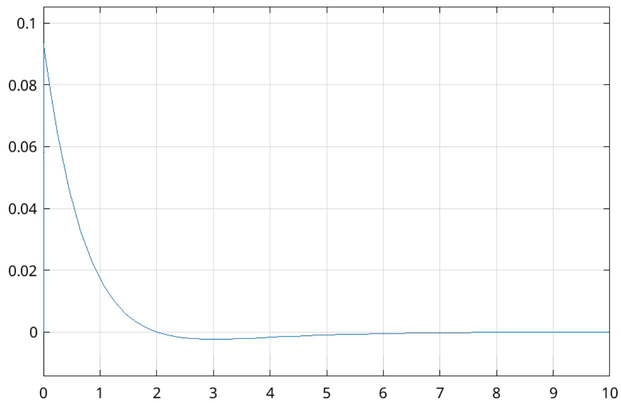
$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = (2e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

```
t = 0:0.001:10;
plot(t, 2.*exp(-t)-t.*exp(-t), 'r');
grid on;
```

نمودار قرمز دستی رسم شده و آبی توسط بلوک دیاگرام تولید شده که یکسان است. در این حالت ضربه وارد شده بعد از تقریبا ۲ ثانیه از بین می رود و این یعنی خودرو به حالت اولیه بر می گردد.





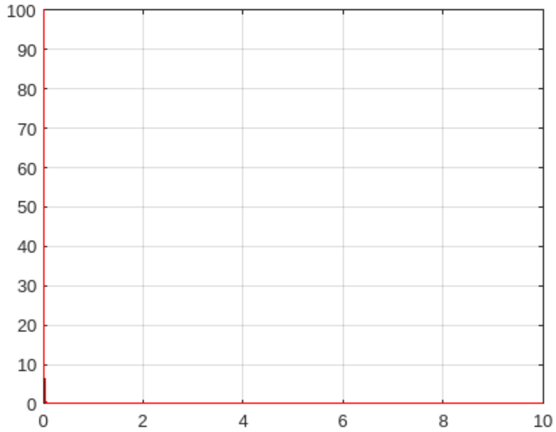
و

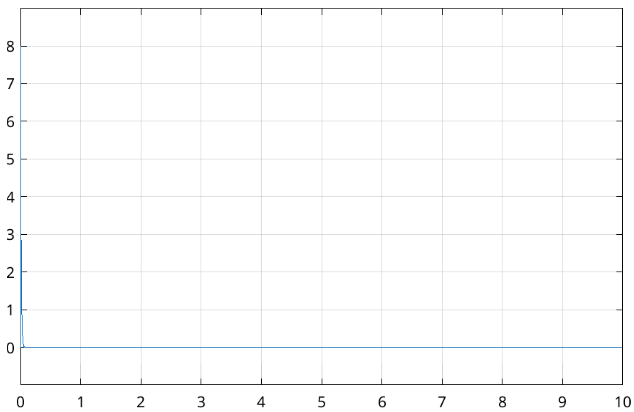
$$Y(s) = \frac{100s+1}{s^2+100s+1} = \frac{100}{s+100}$$

$$y(t) = 100e^{-100t}u(t)$$

```
t = 0:0.001:10;
plot(t, 100.*exp(-100*t), 'r');
grid on;
```

نمودار قرمز دستی رسم شده و آبی توسط بلوک دیاگرام تولید شده که یکسان است. در این حالت عملا تابع ضربه هیچ تاثیر ثانویه ای ندارد و فقط در همان لحظه نمودار پیک می زند اما پیک اول به شدت زیاد است.





ه

حالت دوم که برابر ۲ بود از همه بهتر است حالت اول که هم غیر واقعی است و هم غیر مناسب چون میرا نیست در حالت سوم هم با این که موج به سرعت می را می شود اما ضربه اولیه به شدت زیاد است و این برای سرنشینان خودرو مناسب نیست اما در حالت دو یک تعادلی وجود دارد.

سوال ۳

الف

مرحله ۱: تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل

تبدیل لاپلاس هر عبارت با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{5}{s} \;\; \mathcal{L}\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\} = s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) \;\; \mathcal{L}\{\frac{dy(t)}{dt}\} = sY(s) - y(0^-)$$

معادله در فضای لاپلاس:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = \frac{5}{s}$$

مرحله ۲: جایگذاری شرایط اولیه

$$s^2Y(s) - s - 1 + 3[sY(s) - 1] + 2Y(s) = \frac{5}{s}$$

$$s^2Y(s) - s - 1 + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = \frac{5}{s}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - (s + 4) = \frac{5}{s}$$

مرحله ۳: حل برای Y(s)

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{5}{s} + s + 4$$

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{s}+s+4}{s^2+3s+2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+4s+5}{s(s+1)(s+2)}$$

مرحله ۴: تجزیه کسرها به کسرهای جزئی

$$Y(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s} - 2\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

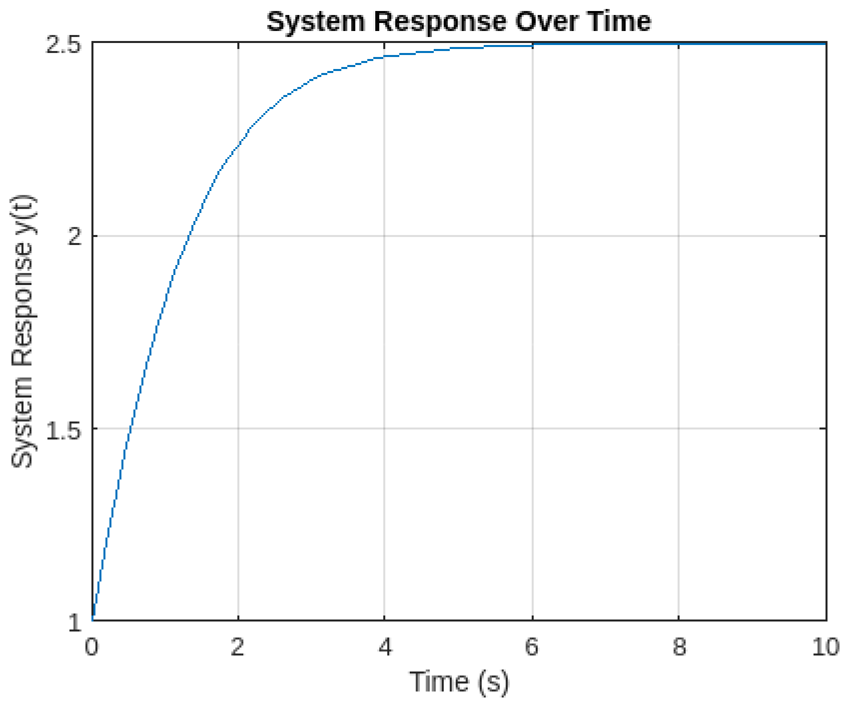
مرحله ۵: تبدیل لاپلاس معکوس

$$y(t) = \frac{5}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

ب

```
syms y(t) x(t) s Y
x(t) = 5 * heaviside(t);
y0 = 1;
dy0 = 1;
eqn = diff(y, t, 2) + 3 * diff(y, t) + 2 * y == x(t);
eqn_laplace = laplace(eqn, t, s);
eqn_laplace = subs(eqn_laplace, [laplace(y(t), t, s), y(0),
subs(diff(y(t), t), t, 0)], [Y, y0, dy0]);
Y = solve(eqn_laplace, Y);
y_time = ilaplace(Y, s, t);
disp(y_time)
fplot(y_time, [0, 10]);
xlabel('Time (s)');
ylabel('System Response y(t)');
title('System Response Over Time');
grid on;
```

$$\frac{e^{-2t}}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}$$



تعریف متغیرهای نمادین:

در ابتدای کد، متغیرهای `s`، `x(t)`، `y(t)` و `Y` به‌صورت نمادین تعریف شده‌اند. این متغیرها برای محاسبات لاپلاس و لاپلاس معکوس استفاده می‌شوند.

تعریف ورودی سیستم:

ورودی سیستم به‌صورت یک تابع پله تعریف شده است. مقدار ورودی برابر با 5 است که با استفاده از تابع `heaviside(t)` مشخص شده است.

تعریف شرایط اولیه:

شرایط اولیه سیستم عبارت‌اند از مقدار اولیه y برابر با 1 و مشتق اولیه y برابر با 1. این مقادیر در متغیرهای `y0` و `dy0` ذخیره شده‌اند.

تعریف معادله دیفرانسیل:

معادله دیفرانسیل دوم سیستم به این صورت نوشته شده:

مشتق دوم y به‌علاوه سه برابر مشتق اول y به‌علاوه دو برابر y برابر است با ورودی x.

تبدیل لاپلاس معادله:

معادله دیفرانسیل با استفاده از دستور `laplace` به فضای لاپلاس منتقل می‌شود. این تبدیل، مشتقات زمانی را به معادلات جبری در حوزه s تبدیل می‌کند.

جایگذاری شرایط اولیه:

شرایط اولیه در فضای لاپلاس جایگذاری می‌شوند. این شرایط شامل مقدار اولیه و مشتق اولیه y هستند که با استفاده از دستور `subs` در معادله لاپلاس اعمال شده‌اند.

حل معادله در فضای لاپلاس:

معادله جبری حاصل از تبدیل لاپلاس برای به دست آوردن Y، که پاسخ سیستم در فضای لاپلاس است، حل می‌شود. این کار با دستور `solve` انجام می‌شود.

تبدیل لاپلاس معکوس:

پاسخ زمانی سیستم با استفاده از دستور `ilaplace` از فضای لاپلاس به فضای زمان تبدیل می‌شود. نتیجه این مرحله تابع پاسخ زمانی y برحسب t است.

رسم نمودار پاسخ زمانی:

پاسخ زمانی سیستم در بازه زمانی صفر تا ده ثانیه با استفاده از دستور `fplot` رسم می‌شود. محور افقی نشان‌دهنده زمان و محور عمودی نشان‌دهنده مقدار y(t) است. همچنین عنوان و برچسب محورها به نمودار اضافه شده‌اند و شبکه نمودار فعال است.