



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

1

2 Implementación de una formulación
3 corrotacional en dinámica no lineal y aplicación
4 al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería

7

Estructural

8

Instituto de Estructuras y Transporte

9

Universidad de la República

10

Montevideo – Uruguay

11

Marzo de 2021



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

1

2

3

4

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

Dr. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

D.Sc. Prof. Gabriel Usera

7

Montevideo – Uruguay

8

Marzo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte, 2021.

XVII, 57 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 19 – 20.

1. Elementos de viga corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Cables de alta tensión, 5. Transmisión eléctrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural. III. Título.

1 INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

2

3 D.Sc. Prof. Gonzalo Cetrángolo

4

5 M.Sc. Prof. Bruno Bazzano

6

7 D.Sc. Prof. Marcelo Forets

8 Montevideo – Uruguay

9 Marzo de 2021

A mi Madre por su apoyo
incondicional,
por enseñarme a aprender y
enseñar,
por impulsarme a hablar, a crear
y amar

1 Agradecimientos

2 Agradezco al universo por haberme dado hálito de vida a través de ese río
3 inefable que fluye entre la casualidad y la causalidad. Por haberme maravilla-
4 do con la lagrima, la risa y el atrapante mundo del conocimiento. Las raíces
5 de ese universo son principalmente mi familia, que me nutrieron de valores y
6 vivencias envueltas de un afecto incommensurable. A mi padre, por haberme
7 enseñado a remar por mis objetivos, pelear por mis proyectos con determina-
8 ción, sacrificio y sobre todo, por haberme inculcado que no hay que ganarle a
9 nadie, únicamente aprender a levantarse. A mi madre por su incondicionalidad
10 eterna, por transferirme la vocación de la enseñanza. Por enseñarme la diver-
11 sidad de las inteligencias múltiples y sobre todo, la semilla del amor inmenso.
12 A Quique por su sabiduría, su visión biocéntrica y su flecha existencial que
13 atraviesa cualquier tormenta.

14 También agradezco a mis tutores; A Jorge por ser primero un gran ser
15 humano con una visión fascinante, por enseñarme no solo conocimientos técni-
16 cos, sino para la vida. Además por su paciencia, constancia y persistencia
17 para guiarme hacia las salidas en los laberintos. A Gabriel por darme la
18 oportunidad de dedicarme a la investigación e instruirme desde su experiencia
19 insoslayable en aspectos estratégicos profesionales.

20 A Flor por convidarme de sus dulces pétalos y por perfumar cada parte
21 de mi ser con el más sincero y sano amor. Por ser un alero cuando llueve y
22 dos alas cuando hay sol. Que este camino hubiese sido árido y desolado sin
23 ella. A Maximiliano por estar siempre latente en mi pensamiento, convertir las
24 palabras en aves y despertarme un sin fin de ideas. Por enseñarme la senda de
25 la filosofía, e iluminar el portal donde un punto es la inmensidad, y un segundo
26 la eternidad.

27 Agradezco enormemente a mis compañeros del IIMPI y del grupo MISEs
28 por guiarme, apoyarme y cuestionarme en este camino de aprendizaje. Por el
29 ambiente relajado y distendido que hacen del trabajo una instancia de disfrute.

1 Finalmente, quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrados
2 (CAP) de la Universidad de la República por viabilizar económicamente es-
3 ta investigación. También a la Agencia Nacional de Investigación (ANII) por
4 financiar el proyecto VioLETa "Modelado del efecto del viento sobre líneas
5 eléctricas de transmisión y su mitigación" que fue el pilar indispensable en este
6 trabajo.

(Epígrafe:) *Hay una fuerza
motriz más poderosa que el
vapor, la electricidad y la energía
atómica; la voluntad*

Albert Einstein

2 Los sistemas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectados por even-
3 tos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados. Estos even-
4 tos pueden provocar su desconexión con consecuencias a la integridad de los
5 componentes potencialmente graves, así como también a la integridad de las
6 personas circundantes. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte
7 eventos de salida en servicio. Otro antecedente de este tipo fenómenos, se re-
8 monta al 10 de marzo de 2002 cuando una tormenta convectiva afectó un área
9 de alrededor 6500 km² en el sur del país (“El tornado de Canelones del año
10 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#)). La tormenta causó una destrucción masiva para el país
11 colapsando 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV perte-
12 necientes a la empresa La Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones
13 Eléctricas (UTE). De igual modo, unos 700 edificios y 1250 techos de hogares
14 fueron destruidos según (Durañona, [2015](#)). El costo de reparación de las torres
15 se estimó en 2 millones de dólares y en simultaneo se gastaron unos 10 millo-
16 nes de dólares destinados a suplir la red con energía geotérmica, proveniente
17 de combustibles fósiles (Duranona et al. [2019](#)). Esta problemática en parte
18 responde a la falencia de las normas internacional como ser *Design criteria of*
19 *overhead transmission lines*, [2003](#) para considerar fuerzas debidas a fenómenos
20 de vientos extremos.

21 Este trabajo apuntala la creación de una herramienta capaz de reproducir
22 el comportamiento de conductores eléctricos, sometidos a perfiles de viento
23 tipo tormenta convectiva. Para esto, se extendió un planteo de la formula-
24 ción corrotacional de vigas 3D, considerando componentes aerodinámicos y se
25 implementó en la herramienta de software libre *Open Non-linear Structural*
26 *Analysis Solver* ([ONSAS](#)). Con este cometido se desarrollaron tres modelos: el
27 primero de ellos valida la formulación para un ejemplo clásico en el área corro-
28 tacional, el segundo es una modificación de un modelo presentado en el trabajo
29 de (Foti y Martinelli, [2016](#)), referente en simulación estructural de conductores
30 eléctricos, donde se observan resultados semejantes. Por último, se construye
31 un ejemplo compuesto por tres torres y seis conductores, integrando elementos
32 de viga con barras, atacados por un perfil de corriente descendente, extraído

1 de un estudio experimental en el norte de Alemania publicado por Stengel y
2 Thiele, [2017](#).

3 Finalmente, se concluye que los resultados generados representan un dis-
4 parador para seguir profundizando en la temática, generando capacidades del
5 software para emular el fenómeno de manera más precisa y poder así, incluirlo
6 como una herramienta complementaria durante el diseño de sistemas de tras-
7 misión. Según los resultados obtenidos, se observa como las tormentas con-
8 vectivas afectan severamente a las instalaciones, pudiendo causar potenciales
9 perjuicios graves. De esta forma la metodología planteada en esta tesis cons-
10 tituye el puntapié inicial para la publicación de un trabajo donde se extiende
11 la formulación corrotacional de vigas 3D considerando fuerzas aerodinámicas
12 sobre los elementos.

13 Palabras claves:

14 Elementos de viga corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica
15 estructural, Cables de alta tensión, Transmisión eléctrica.

1 Lista de figuras

2	1.1	Rotaciones a cada configuración.	2
3	1.2	Descripción de las sistemas de coordenadas corrotacionales. . . .	3
4	1.3	Esquema de desplazamientos locales.	9
5	1.4	Ilustración grados de libertad locales.	9
6	2.1	Esquema simplificado del problema	34
7	2.2	Perfil de velocidad media a lo largo del cable según Stengel y	
8		Thiele, 2017	35
9	2.3	Angulo medio del modelo en contraste con Stengel y Thiele,	
10		2017	36
11	2.4	Curva desfajase ángulo fuerza	37
12	2.5	Esquema simplificado del problema 3D	38
13	2.6	Configuración adoptada por el primer modo.	40
14	2.7	Distribución de masas colocadas.	40
15	2.8	Desplazamiento horizontal de la cadena de aisladora en función	
16		del tiempo con y sin masas.	41
17	2.9	Ángulo de la cadena de aisladora en función del tiempo con y	
18		sin masas.	41
19	2.10	Respuesta del angulo de la cadena de aisladora en función del	
20		tiempo.	42
21	2.11	Datos del ángulo sin procesar y luego de aplicarle una media	
22		móvil	42
23	2.12	Contraste de los modelos 2D/3D	43
24	2.13	Respuesta del ángulo para tormenta convectiva utilizando una	
25		media móvil y masas sobre el cable	44

¹ Lista de tablas

²	1.1	Caracterización de matrices en términos de los sistemas de re-	
³		ferencia.	4
⁴	1.1	Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826	23
⁵	1.2	Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.	24
⁶	1.3	Tabla de factores para terrenos según referencia Davenport,	
⁷		1960	25

1 Lista de símbolos

- 2 $\ddot{\mathbf{w}}$ Aceleración angular en coordenadas globales.
- 3 $\ddot{\mathbf{u}}$ Aceleración lineal en coordenadas globales.
- 4 x Distancia respecto al nodo 1 de la sección con centroide G.
- 5 \mathbf{x}_1 Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.
- 6 \mathbf{x}_2 Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.
- 7 \mathbf{d}_g Desplazamientos globales del elemento.
- 8 \mathbf{u}^g Desplazamientos lineales globales del elemento.
- 9 \mathbf{w}^g Desplazamientos angulares globales del elemento.
- 10 \mathbf{d}_l Desplazamientos locales del elemento.
- 11 \mathbf{d}_r Desplazamientos lineales locales referenciados a la configuración de defor-
- 12 mación rígida.
- 13 \mathbf{E}_1 Vector 1 de la base isoparamétrica.
- 14 \mathbf{E}_2 Vector 2 de la base isoparamétrica..
- 15 \mathbf{E}_3 Vector 2 de la base isoparamétrica.
- 16 K Energía cinética del elemento.
- 17 fl_1 Fuerza axial del elemento que integra el nodo i.
- 18 $\mathbf{f}_l^{\text{int}}$ Fuerza interna del elemento en coordenadas locales.
- 19 $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$ Fuerza interna del elemento en coordenadas globales.
- 20 \mathbf{I}_ρ Tensor de inercia del elemento en su configuración deformada.
- 21 \mathbf{f}_k Fuerza inercial en coordenadas globales.
- 22 \mathbf{K} Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 23 \mathbf{C}_k Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 24 \mathbf{M} Matriz de masa consistente del elemento en coordenadas globales.
- 25 \mathbf{K}_g Matriz tangente del elemento en coordenadas globales.
- 26 \mathbf{K}_l Matriz tangente local del elemento en coordenadas locales.
- 27 M_1^i Momento flector del nodo i en la dirección local 1.

- 1 M_2^i Momento flector del nodo i en la dirección local 2.
- 2 M_3^i Momento torsor del nodo i.
- 3 \mathbf{R}_0 Matriz de rotación de referencia.
- 4 \mathbf{R}_1^g Matriz de global del nodo 1.
- 5 \mathbf{R}_2^g Matriz de global del nodo 2.
- 6 \mathbf{R}_r Matriz de rotación de configuración rígida.
- 7 $\overline{\mathbf{R}}_1$ Matriz de rotación de configuración local del nodo 1.
- 8 $\overline{\mathbf{R}}_2$ Matriz de rotación de configuración local del nodo 2.
- 9 $\tilde{\mathbf{A}}$ Operador Skew aplicado al variable A.
- 10 $\dot{\mathbf{w}}$ Velocidad angular en coordenadas globales.
- 11 $\dot{\mathbf{u}}$ Velocidad lineal en coordenadas globales.
- 12 \mathbf{e}_1 Vector tangente de la configuración de referencia.
- 13 \mathbf{e}_2 Vector normal de la configuración de referencia.
- 14 \mathbf{e}_3 Vector bi-normal de la configuración de referencia.
- 15 l_n Largo del elemento deformado.
- 16 \mathbf{r}_1 Vector tangente de la configuración de deformación rígida.
- 17 \mathbf{r}_2 Vector normal de la configuración de deformación rígida.
- 18 \mathbf{r}_3 Vector bi-normal de la configuración de deformación rígida.
- 19 \mathbf{t}_1^1 Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 20 \mathbf{t}_1^i Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 21 \mathbf{t}_2^1 Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 22 \mathbf{t}_2^i Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 23 \mathbf{t}_3^i Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 24 \mathbf{t}_3^1 Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 25 $\overline{\boldsymbol{\theta}}_1$ Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 1.
- 26 $\overline{\boldsymbol{\theta}}_2$ Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 2.
- 27 \bar{u} Desplazamiento axial en coordenadas locales del elemento.

¹ **Lista de siglas**

² Lista de siglas

³ **N-R** Newton Raphson.

⁴ **TC** Tormentas Convectivas.

⁵ **UTE** La Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas

1 Tabla de contenidos

2	Lista de figuras	XI
3	Lista de tablas	XII
4	Lista de símbolos	XIV
5	Lista de siglas	XV
6	1 Preliminares	1
7	1.1 Cinemática corrotacional	1
8	1.1.1 Matrices de rotación	2
9	1.1.2 Sistemas de coordenadas	3
10	1.1.3 Desplazamientos lineales y angulares	5
11	1.2 Formulación local	8
12	1.2.1 Variaciones en desplazamientos	10
13	1.3 Dinámica corrotacional	12
14	1.3.1 Velocidades y aceleraciones	12
15	1.3.2 Fuerza interna y matriz tangente	14
16	1.3.3 Fuerza inercial y matrices de masa tangentes	16
17	Bibliografía	19
18	Glosario	20
19	Anexos	21
20	Anexo 1	22
21	1.1 Norma IEC 60826	22
22	1.1.1 Tensión en el conductor	27

1	Anexo 2	29
2	2.1 Modelado dinámico de un conductor de alta tensión utilizando	
3	elementos de barra	29
4	2.1.1 Fundamentos teóricos	29
5	2.1.2 Resultados numéricos 2D	34
6	2.1.3 Resultados numéricos 3D	38
7	2.1.4 Frecuencias naturales	38
8	2.1.5 Respuesta a tormenta convectiva	42
9	Anexo 3	45

Capítulo 1

Preliminares

1 A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de la
2 formulación corrotacional según lo propuesto en Le et al. [2014](#), Battini y Pa-
3 coste, [2002](#). La temática se abordará progresivamente según la naturaleza de
4 las variables. En primera instancia, se describen la caracterización de magnitu-
5 des cinemáticas en las Secciones [1.1](#) y [1.2](#). Una vez presentadas las magnitudes
6 cinemáticas se desarrolla el análisis corrotacional, para las variables estáticas
7 y dinámicas en la Sección [1.3](#).

8 1.1. Cinemática corrotacional

9 El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en
10 escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas
11 representa grandes rotaciones y desplazamientos, dados por el movimiento de
12 la viga considerandola como un elemento rígido. La segunda componente tiene
13 en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material.
14 Este enfoque se suele aplicar en casos estáticos, donde resulta intuitivo imagi-
15 nar inicialmente como se deformaría la estructura de manera rígida para luego
16 aplicarle la componente no rígida. Para poder realizar esta descomposición,
17 hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten repre-
18 sentar los desplazamientos de cada una de las componentes. Para encontrar la
19 curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y trasla-
20 ción de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas magnitudes se
21 obtienen a partir de transformaciones representables matemáticamente con la
22 artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática

1 puede hallarse en la publicación (Kořar y Ibrahimbegović, 1995).

2 1.1.1. Matrices de rotación

3 Las configuraciones utilizadas son dos rotaciones consecutivas ilustradas en
4 la Figura 1.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos,
5 se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa
6 el elemento en su configuración indeformada o de referencia. El color naranja
7 identifica a la componente de deformación no rígida mientras que en gris se
8 ilustra la configuración de deformación rígida del elemento.

9 Para realizar cambios de coordenadas de una componente a otra se definen
10 una serie de rotaciones, la primera de ellas denominada \mathbf{R}_0 lleva al elemento
11 desde su configuración canónica a su configuración de referencia. A partir de
12 esa configuración, se halla la geometría deformada aplicando las transforma-
13 ciones \mathbf{R}_1^g o \mathbf{R}_2^g , dependiendo el nodo de interés. La notación con supraíndice
14 “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a di-
15 cha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cual es la
16 configuración deformada partiendo del sistema de coordenadas canónico.

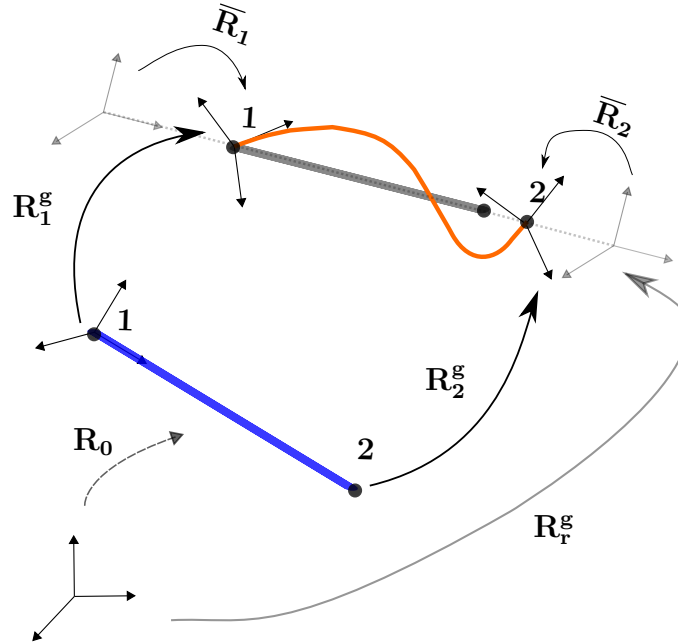


Figura 1.1: Rotaciones a cada configuración.

17 En la Figura 1.1, tanto las rotaciones locales $\bar{\mathbf{R}}_1$, $\bar{\mathbf{R}}_2$ como globales \mathbf{R}_1^g o
18 \mathbf{R}_2^g se utiliza el subíndice 1 o 2, mientras que para la rotación de deformación
19 rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender

la metodología corrotacional. Dado que la componente de deformación rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del subíndice. Para hallar la configuración deformada del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa dado un nodo arbitrario, por ejemplo el 1, consiste en aplicar consecutivamente las transformaciones \mathbf{R}_r y $\bar{\mathbf{R}}_1$ encontrando así la configuración deformada.

1.1.2. Sistemas de coordenadas

Habiendo descrito las rotaciones del elemento, para deducir las matrices asociadas a cada transformación, resulta imprescindible definir un conjunto de sistemas de coordenadas que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de vectores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 1.2.

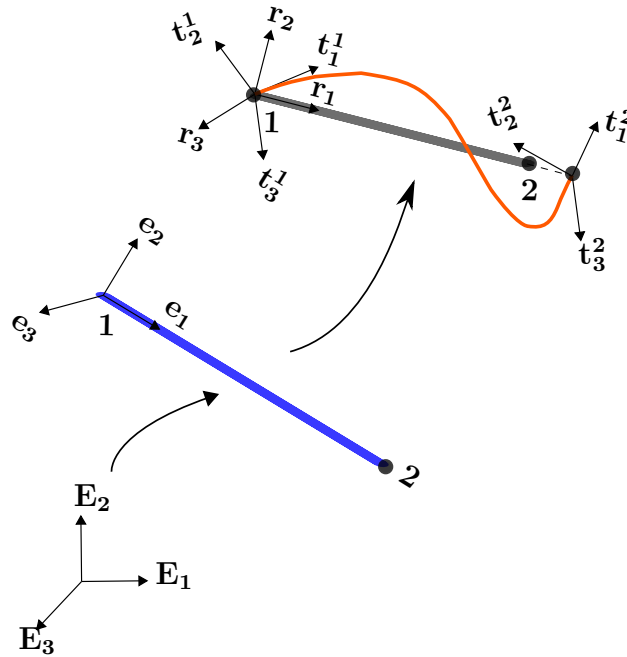


Figura 1.2: Descripción de las sistemas de coordenadas corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia canónico integrado por el sistema de coordenadas ortogonal $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$. Al aplicarle a estos vectores la transformación \mathbf{R}_0 , se obtienen los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Estos permiten ubicar al elemento en su configuración de referencia. Consecuentemente, para definir el sistema de coordenadas $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ solidario a la configuración de deformación rígida, basta con aplicar la transformación \mathbf{R}_1^g . Por último, para los nodos 1 y

2, denominado arbitrariamente con el subíndice i , el sistema de coordenadas $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ permite identificar la orientación y posición del nodo i en su configuración deformada. Esta es posible obtenerla rotando el sistema de coordenados $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ por la matriz \mathbf{R}_i^g .

La definición de los sistemas de coordenadas mencionados en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta, intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los sistemas de coordenadas solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los sistemas de referencia se establece en la Tabla a continuación:

Matriz	Vínculo de sistemas de referencia
\mathbf{R}_0	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
\mathbf{R}_i^g	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\bar{\mathbf{R}}_i$	$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
\mathbf{R}_r	$(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$

Tabla 1.1: Caracterización de matrices en términos de los sistemas de referencia.

Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primera fila se tiene: \mathbf{R}_0 . $(\mathbf{E}_1) = \mathbf{e}_1^T$. Al plantear este tipo de vínculos entre el sistema de coordenadas $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ se puede hallar a partir del sistema de coordenadas canónico $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ de dos formas. La primera consiste aplicar consecutivamente las rotaciones \mathbf{R}_0 y \mathbf{R}_i^g y la segunda en aplicar \mathbf{R}_r y luego $\bar{\mathbf{R}}_i$. Esto se muestra en la ecuación a continuación:

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_i. \quad (1.1)$$

A partir de la Ecuación (1.1) se puede obtener la matriz de rotación $\bar{\mathbf{R}}_i$. Para esto se hace uso de la propiedad de matrices ortonormales $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ y se obtiene la ecuación que prosigue:

$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (1.2)$$

1.1.3. Desplazamientos lineales y angulares

El propósito de la descripción anterior, responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones, ubicando a cada elemento en coordenadas locales y globales. Las coordenadas globales se referencian al sistema de vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mientras que las locales a $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$. El vector de desplazamientos locales del elemento es compuesto por: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra \bar{u} , y sus desplazamientos angulares nodales con el nombre $\bar{\theta}_1$ y $\bar{\theta}_2$. El escalar \bar{u} representa el estiramiento del elemento respecto de su largo inicial (l_0). A su vez, el ángulo $\bar{\theta}_1$ se asocia con la rotación del sistema de coordenadas $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$ respecto de $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ indicados en la Figura 1.2. Estos siete grados de libertad se compactan en el vector $\mathbf{d}_1 = (\bar{u}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$.

El vector de desplazamiento axial \bar{u} se descompone en tres componentes según el sistema de vectores \mathbf{r}_i , solidario a la configuración de deformación rígida. A este vector de desplazamientos se le denomina \mathbf{d}_r . Además, los desplazamientos de la viga se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$. Estas tienen origen en la configuración de referencia y permiten encontrar los desplazamientos en la configuración deformada. Para el nodo 1 los $\delta \mathbf{w}_1^g$ hacen referencia a la rotación de los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ hasta $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$. Además, los desplazamientos globales del nodo 1 $\delta \mathbf{u}_1^g$ se corresponden con los desplazamientos del este nodo desde su configuración de referencia hasta la deformada. Esto se puede observar en la Figura 1.2.

Para resolver el problema mediante métodos numéricos, es necesario definir variaciones. Estas emplearán un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. Las variaciones infinitesimales de los desplazamientos se definen según:

$$\delta \mathbf{d}_1 = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T \quad (1.3)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^{gT}, \delta \mathbf{u}_2^{gT}, \delta \mathbf{w}_1^{gT}, \delta \mathbf{w}_2^{gT}]^T \quad (1.4)$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, los diferenciales asociados a las transformaciones de giro $\mathbf{R}_r^g, \mathbf{R}_i^g, \mathbf{R}_0$ y $\bar{\mathbf{R}}_i$. Para esto, primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla 1.1. Las entradas

1 de \mathbf{R}_r y \mathbf{R}_i^g se hallan siguiendo las ecuaciones:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (1.5)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (1.6)$$

2 Los vectores \mathbf{r}_i se hallan a partir del vector director \mathbf{r}_1 que apunta del nodo
3 1 al 2. El versor \mathbf{r}_1 tiene como dirección la recta que une los puntos 1 y 2 en
4 la configuración deformada, esto es equivalente a $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1^g}{l_n}$, donde l_n
5 es la distancia entre 1 y 2 en la configuración deformada. Dadas las posiciones
6 iniciales de los nodos en coordenadas globales \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , sus desplazamientos \mathbf{u}_1^g
7 y \mathbf{u}_2^g , el largo una vez deformado se calcula $l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\|$.

8 El vector auxiliar \mathbf{p} se define para hallar los vectores \mathbf{r}_i y partir de estos
9 la base \mathbf{t}_i . Estos vectores son solidarios al movimiento ya que se encuentran
10 anidados a la configuración de deformación rígida y local respectivamente.
11 El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la
12 necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen
13 \mathbf{p} , \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0}]^T. \quad (1.7)$$

14 En la expresión anterior la matriz \mathbf{R}_0 se obtiene colgando los vectores \mathbf{e}_i
15 escritos como combinación lineal de la base \mathbf{E}_i . Una vez calculada esta matriz
16 y evaluado las expresiones de las Ecuaciones (1.7) se obtienen los restantes
17 vectores asociados a la componente de deformación rígida según la siguiente
18 ecuación:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1. \quad (1.8)$$

19 Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones
20 de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de
21 variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}_i} = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (1.9)$$

22 En la Ecuación (1.9) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de
23 diferenciales matriciales. Dado que la matriz de rotación \mathbf{R}_0 vincula la con-
24 figuración canónica con la de referencia, como ambas son fijas esta matriz es

1 constante. Por lo tanto, su variación es nula. Definiendo el vector de ángulos
2 de la componente de deformación rígida con el símbolo $\delta \mathbf{w}_r^g$, las matrices de
3 giro $\overline{\mathbf{R}}_i$, \mathbf{R}_i^g y sus variaciones pueden hallarse según las expresiones:

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g \quad (1.10)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r. \quad (1.11)$$

4 En las Ecuaciones (1.10) y (1.11) el término $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$ refiere a la operación
5 skew del vector $\delta \mathbf{w}_r^g$. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma
6 matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a ma-
7 trices de rotación. La función $\tilde{\mathbf{A}}$ aplicada al vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ toma la
8 siguiente forma:

$$(\boldsymbol{\Omega}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

9 Para vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las varia-
10 ciones globales se definen las matrices \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g, \quad (1.13)$$

11 Según los cocientes entre las componentes de los vectores \mathbf{p}_j y \mathbf{p}_{ij} de la Ecuación
12 (1.7), el vector $\mathbf{p}_{ij} = (\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}) \mathbf{p}_{ij}$ y $\mathbf{p}_j = \mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$ se calcula matriz \mathbf{G} de acuerdo
13 con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}_g} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] \\ \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_{12}}{2p_2} & -\frac{p_{11}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_2}{2p_2} & -\frac{p_{21}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

1 Notoese que las matrices \mathbf{R}_r tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas
2 dimensiones, $\mathbf{0}$ es una matriz nula de 3x3 e \mathbf{I} una matriz identidad del mismo
3 número de filas y columnas. La relación entre los diferenciales anteriores, se
4 pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos
5 de ángulos locales en términos globales, según la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{\theta}_1 \\ \delta\bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (1.15)$$

6 Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coorde-
7 nadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar \mathbf{r} que vincula los
8 incrementos del desplazamiento axial $\delta\bar{u}$ con los globales. Esto permite escribir
9 la Ecuación (1.3) en relación a (1.4) haciendo uso de la expresión:

$$\delta\bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3} \mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3}]. \quad (1.16)$$

10 1.2. Formulación local

11 La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su
12 versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento
13 analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este
14 apartado, se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para
15 el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 1.3.

16 Sea una sección transversal de un punto G ubicado a una distancia x del
17 nodo 1 en la configuración rotada, el movimiento local de una sección ubicada
18 a una distancia x de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir
19 de la rotación y traslación de dicha sección. Una ilustración de esto se muestra
20 en la Figura 1.3, donde la configuración de deformación rígida se identifica en
21 punteado y la configuración deformada en color naranja.

22 El movimiento de la base \mathbf{t}_i con respecto al sistema \mathbf{r}_i^G esta dado por los
23 desplazamientos \bar{u}_3 según el versor \mathbf{r}_3^G y análogamente para los vectores \bar{u}_2 y
24 \bar{u}_1 . Esto determina la ubicación del baricentro G. Su orientación se define a
25 partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres
26 ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores \mathbf{t}_3^G y \mathbf{t}_2^G
27 dentro del plano y un versor perpendicular \mathbf{t}_1^G . La transformación $\bar{\mathbf{R}}_G$ permite
28 encontrar los transformados de la base \mathbf{r}_i^G etiquetados con las letras \mathbf{t}_i^G de
29 acuerdo con la Figura 1.4. En esta también se observa el desplazamiento axial

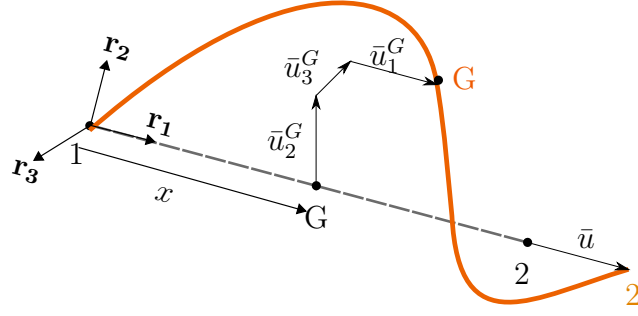


Figura 1.3: Esquema de desplazamientos locales.

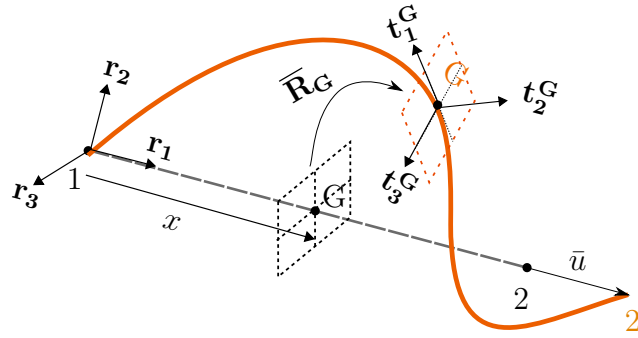


Figura 1.4: Ilustración grados de libertad locales.

1 de la barra \bar{u} correspondiente al del nodo 2 en la dirección \mathbf{r}_1 .

2 Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las
3 hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para
4 los desplazamientos axiales \bar{u}_1 y el ángulo de torsión $\bar{\theta}_1^G$, según las ecuaciones:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0}. \quad (1.17)$$

5 Por la contraria, tanto para los desplazamientos transversales \bar{u}_2 y \bar{u}_3 como
6 para los ángulos de flexión $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$, las interpolaciones se realizan través de
7 los siguientes polinomios cúbicos:

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (1.18)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right). \quad (1.19)$$

8 Para el punto G que se desplazó en el sistemas de coordenadas locales según
9 el vector \mathbf{d}_1^G . Los valores en términos de la componente de deformación rígida
10 \mathbf{r}_i se calculan aplicando la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G. \quad (1.20)$$

Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nulas es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas. De esta forma se construyen las matrices \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 . Estas expresan los desplazamientos transversales \bar{u}_2, \bar{u}_3 como también los ángulos $\bar{\theta}_1^G$ y $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$ según los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales $\bar{\theta}_1$ y $\bar{\theta}_2$ para el nodo 1 y 2 respectivamente. Analíticamente esto es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_1 = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

1.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura 1.3 queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$\text{OG} = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (1.23)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente en las Ecuaciones (1.17), (1.18) y (1.19) es posible escribir los desplazamientos del baricentro según:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (1.24)$$

$$OG = \mathbf{N}_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + \mathbf{N}_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_l \quad (1.25)$$

1 y su diferencial asociado se calcula de la siguiente forma:

$$\delta OG = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_l + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_l. \quad (1.26)$$

2 La Ecuación (1.26) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta
3 el cálculo de su magnitud, ya que dicha variable es solidaria a sistemas de
4 coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones (1.13), (1.14), (1.15) y (1.10) lográndose de este modo, escribir a $\delta \mathbf{u}$ en
5 coordenadas globales según la siguiente ecuación:
6

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r (\mathbf{N} + \mathbf{P}_1 \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_l \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (1.27)$$

7 Además se compacta la notación definiendo la matriz \mathbf{H}_1 según la ecuación
8 a continuación:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (1.28)$$

9 Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares
10 de las componentes locales, definidas en la Ecuación (1.3), son despreciables
11 frente a los de la componente de deformación rígida. Para el autor Le et al.
12 2014, debido a las reducidas variaciones en la geometría de dos iteraciones
13 consecutivas, no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales
14 y rígidos, matemáticamente : $(\delta \overline{\boldsymbol{\theta}}_{ri} = \overline{\delta \mathbf{w}}_i)$.

15 Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magnitudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa
16 se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según:
17

$$\delta \mathbf{w}^g(OG) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r (\mathbf{P}_2 \mathbf{P} + \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (1.29)$$

18 Análogamente a la Ecuación (1.28), se compacta la notación definiendo la
19 matriz \mathbf{H}_2 según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (1.30)$$

1.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (Le et al. 2014) y (Battini y Pacoste, 2002). Acompasando con el desarrollo histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente definir las velocidades y aceleraciones para luego obtener los vectores de fuerza interna e inercial y sus matrices tangentes asociadas.

1.3.1. Velocidades y aceleraciones

Las magnitudes dinámicas desempeñan un papel primordial en el análisis implementado y tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en términos globales. Para calcular estas expresiones hace falta expresar las derivadas temporales de las matrices \mathbf{E} y \mathbf{R}_r . Esta operatoria matricial, se traduce en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Dado que variable \mathbf{E} depende de \mathbf{R}_r se calculan inicialmente sus derivadas según La (1.11). Al derivar se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}. \quad (1.31)$$

Al sustituir esta ecuación en $\dot{\mathbf{E}}$ se deduce su según la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{E}_t. \quad (1.32)$$

Derivando respecto al tiempo la Ecuación (1.28) se deduce la siguiente expresión para la velocidad lineal $\dot{\mathbf{u}}$:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (1.33)$$

Aplicando la regla del producto a la Ecuación (1.33) se halla la aceleración lineal $\ddot{\mathbf{u}}$ del baricentro:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{E}}^T) \delta \mathbf{d}_g. \quad (1.34)$$

1 El valor skew de las velocidades angulares sobre la componente de deforma-
2 ción rígida $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r$ se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación (1.12),
3 aplicado al vector $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$. Además para simplificar la notación a fu-
4 turo, se condensa la Expresión (1.34) definiendo la matriz \mathbf{C}_1 como se escribe
5 a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t, \quad (1.35)$$

6 quedando definida la aceleración lineal de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (1.36)$$

7 Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simpli-
8 ficó la nomenclatura para evitar la lectura engorrosa de notación. Derivando
9 la Ecuación (1.29) respecto a la variable temporal, se obtiene la siguiente ex-
10 presión para la velocidad angular $\dot{\mathbf{w}}$:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (1.37)$$

11 Utilizando la regla del producto se deduce la siguiente expresión para la
12 aceleración angular $\ddot{\mathbf{w}}$:

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (1.38)$$

13 A partir de esto, se compacta la expresión de la Ecuación (1.38) definiendo la
14 matriz \mathbf{C}_2 de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (1.39)$$

$$(1.40)$$

15 Una descripción detallada puede encontrarse en Le et al. 2014. Dentro del
16 apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las deri-
17 vadas temporales de las matrices \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 . También es posible escudriñar la
18 deducción de las matrices \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .

1.3.2. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$ para el nodo i se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial fl_1 , dos momentos flectores M_1^i , M_2^i y un momento torsor M_3^i para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección de nomenclatura para el vector $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$ de fuerza interna se presenta a continuación:

$$\mathbf{f}_1^{\text{int}} = [fl_1 \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2] = [fl_1 \ \mathbf{m}]. \quad (1.41)$$

La fuerza interna calculará inicialmente para coordenadas locales denominada $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$, donde su obtención es relativamente sencilla, para luego transcribir estos resultados en términos globales $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$. Con este cometido se define la matriz \mathbf{B} de cambio de base según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{d}_1 = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1^{\text{int}}. \quad (1.42)$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional, el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración de deformación rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Según los sistemas de referencia de la Figura 1.2, los cambios de variables refieren a escribir primeramente los desplazamientos locales en términos de los rígidos ($\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración de deformación rígida a la de referencia ($\delta \mathbf{d}_1 \rightarrow \delta \mathbf{d}_g$). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en función de coordenadas inmóviles y globales.

Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares \mathbf{G} y \mathbf{E} , definidas en las Ecuaciones (1.13) y (1.14) es posible vincular los ángulos diferenciales locales $\delta \bar{\theta}_i$ con los incrementos globales $\delta \mathbf{d}_g$. Esto permite conocer los momentos flectores y torsores de la viga en coordenadas globales. Análogamente el vector auxiliar \mathbf{r} contiene a \mathbf{r}_1 según el sentido axial de la barra, por lo que reescribir este último permite expresar la fuerza de directa $fa1$ en términos de la base

1 \mathbf{E}_i . Estos razonamientos se plasman en las ecuaciones a continuación:

$$\mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1^{\text{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P}\mathbf{E}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (1.43)$$

$$\delta \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_1^{\text{int}} + \delta \mathbf{r}^T f_{a1} + \delta(\mathbf{E}\mathbf{P}^T) \mathbf{m}. \quad (1.44)$$

2 Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés, para la resolución
3 empleando métodos numéricos, obtener sus derivadas respecto de los despla-
4 zamientos. La matriz tangente \mathbf{K}_g representa esta magnitud y su expresión se
5 escribe a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{B} + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{f}_1)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (1.45)$$

6 La matriz \mathbf{B} permite realizar el cambio de coordenadas $\delta \mathbf{d}_a$ a $\delta \mathbf{d}_g$, de acuer-
7 do con lo definido en (1.42). A su vez, se define la variable \mathbf{K}_1 correspondiente
8 al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y
9 rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material
10 implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante
11 diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz \mathbf{K}_1 .

12 Para calcular las matrices tangentes se define la matriz \mathbf{D} anti-simétrica y
13 se calcula en función de los productos internos de los vectores \mathbf{e}_i , esta aporta
14 la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial f_{l1} de la barra. Esta se
15 calcula según la siguiente expresión:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n} (\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (1.46)$$

16 Por otra parte, se define matriz auxiliar \mathbf{Q} a partir del producto de \mathbf{P} y
17 los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, de acuerdo con la
18 ecuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(2)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(3)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

1 Ademias el vector auxiliar **a** se construye de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

2 Operando con la regla del producto al diferencial de fuerza interna de la
3 Ecuación (1.44) y sustituyendo las definiciones postuladas en las Ecuaciones
4 (1.48), (1.46) y (1.47), la matriz tangente resulta:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a}. \quad (1.49)$$

5 Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (1.49) es asimétrica,
6 sin embargo según Nour-Omid y Rankin, 1991 esta puede ser simetrizada sin
7 perder la convergencia cuadrática para el método de Newton Raphson. (N-
8 R), siempre y cuando momentos externos nodales no sean aplicados. En este
9 trabajo se simetrizó la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos
10 serán cargados con fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones
11 en converger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la
12 precisión y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger
13 Rankin y Nour-Omid, 1988.

14 1.3.3. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

15 A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales
16 para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes
17 asociadas. El atractivo principal de la referencia de Le et al. 2014 se fragua en
18 la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de
19 complejidad matemático no permitía desarrollarlas De Borst et al. 2012. Esta
20 consistencia se debe al encare analítico del vector de fuerzas inerciales, según el
21 planteo cinemático de las variables descritas en la Sección 1.3. El abordaje será
22 análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará
23 primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad de que
24 la magnitud primaria será la energía cinética del elemento K . Esta propiedad
25 escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ($\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$)

1 como también angulares ($\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$) según la siguiente ecuación:

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} dl_0 \quad (1.50)$$

2 Dada la Ecuación (1.50) se calcula la variación de energía cinética del ele-
3 mento. Para la obtención de esta expresión se aplicó la regla del producto de
4 diferenciales y el teorema de Leibniz para integrales de extremos fijos, obte-
5 niéndose la siguiente expresión:

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}}] dl_0 \quad (1.51)$$

6 Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subindices "g" para
7 las magnitudes dinámicas (\mathbf{u}, \mathbf{w}) y sus respectivas derivadas. De igual forma,
8 las variables del integrando en las Ecuaciones (1.50) y (1.51) se omitió la no-
9 menclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga, que si el
10 elemento es de densidad uniforme coincide con el centro de masa de la sec-
11 ción. Los elementos serán de área constante siendo A_ρ el producto del área
12 transversal y la densidad del material, análogamente la matriz \mathbf{I}_ρ es el tensor
13 de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configu-
14 ración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones \mathbf{R}^g y \mathbf{R}_o
15 consecutivamente.

16 Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsa-
17 bles del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar
18 el vector de fuerza inercial \mathbf{f}_k se obtienen las matrices tangentes dinámicas
19 según las siguientes ecuaciones:

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}_g \quad (1.52)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K} \delta \mathbf{d}_g. \quad (1.53)$$

20 En la Ecuación 1.53 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de
21 ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los des-
22 plazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa
23 consistente \mathbf{M} se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, conse-
24 cutivamente la matriz \mathbf{C}_k giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo \mathbf{K} , se le
25 llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrífuga.

1 Determinados autores Cardona y Geradin, 1988 y Hsiao et al. 1999 proponen
2 considerar unicamente \mathbf{M} , sin embargo exhaustivos estudios en (Hsiao et al.
3 1999) prueban que agregar la matriz \mathbf{C}_k mejora el desempeño computacional
4 para numerosos casos.

5 Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector
6 de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta
7 idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la
8 energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino
9 también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección
10 1.3.1.

11 Sustituyendo la Ecuación (1.53) en (1.51) se halla una fórmula para la
12 fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al
13 integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (1.34), (1.36),
14 (1.37) y (1.38) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra
15 a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \quad (1.54)$$

16 Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expre-
17 siones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el
18 diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a
19 cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices.
20 Finalmente, esto se expresa de forma matemática en las siguientes expresiones:

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (1.55)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \right\} d_l \right] \mathbf{E}^T \quad (1.56)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) + \dots \right\} \right] \mathbf{E}^T \quad (1.57)$$

$$\dots \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho - \dot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}) d_l \quad (1.58)$$

1 Bibliografía

- 2 Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping
3 effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*
4 *and Engineering*, 191(17-18), 1755-1789. [https://doi.org/10.1016/
5 S0045-7825\(01\)00352-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
- 6 Belloli, M., Collina, a., Resta, F., Milano, P. y Seminar, O. I. T. a. F. (2006).
7 Cables vibrations due to wind action. *O.I.T.A.F SEMINAR*, (April)
8 005.
- 9 Cardona, A. y Geradin, M. (1988). A beam finite element non-linear theory
10 with finite rotations. *International journal for numerical methods in*
11 *engineering*, 26(11), 2403-2438.
- 12 Çengel, Y. A. y Boles, M. A. (2007). *Termodinamica*. MCGRAW HILL. [https:
13 //books.google.com.uy/books?id=1xhpOgAACAAJ](https://books.google.com.uy/books?id=1xhpOgAACAAJ)
- 14 Davenport, A. (1960). *Wind Loads on Structures*, Division of Building Re-
15 search.
- 16 De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. y Verhoosel, C. V. (2012).
17 *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley
18 & Sons.
- 19 Duranona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of
20 high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and
21 their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Ae-*
22 *rodynamics*, 184, 128-138.
- 23 Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme
24 wind climate of Uruguay. *Proceedings of the 14th International Confe-*
25 *rence on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*, 21-26.
- 26 Durañona, V. y Denis, A. (2018). Bluff and body action, Apuntes del curso
27 Elementos Aerodinámica y Aerolaticidad Estrcutrul.
- 28 El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).

- 1 Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic
2 bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*,
3 40(13-14), 6451-6467. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063>
4 001
- 5 Hsiao, K. M., Lin, J. Y. y Lin, W. Y. (1999). A consistent co-rotational finite
6 element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-
7 D beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,
8 169(1-2), 1-18.
- 9 *Design criteria of overhead transmission lines* (Standard). (2003). Internatio-
10 nal Electrotechnical Commission. Geneva, CH.
- 11 Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite
12 rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, 20(2),
13 101-126.
- 14 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiatj, M. (2014). A consistent 3D corotational beam
15 element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. *Computer*
16 *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269, 538-565.
- 17 Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent
18 linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics*
19 *and Engineering*. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90248-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5)
- 20 Oke, D. G. (2000). Estimating.
- 21 Rankin, C. y Nour-Omid, B. (1988). The use of projectors to improve finite
22 element performance. *Computers & Structures*, 30(1-2), 257-267.
- 23 Riera, J. D. y Ponte, J. (2012). Recent Brazilian research on thunderstorm
24 winds and their effects on structural design. *Wind and Structures, An*
25 *International Journal*, 15(2), 111-129. [https://doi.org/10.12989/was.](https://doi.org/10.12989/was.2012.15.2.111)
26 [2012.15.2.111](https://doi.org/10.12989/was.2012.15.2.111)
- 27 Son, O. y Cetiner, O. (2016). Drag prediction in the near wake of a circular
28 cylinder based on DPIV data. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 9(4),
29 1963-1968.
- 30 Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading
31 acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia*
32 *engineering*, 199, 3152-3157.

ANEXOS

1 Anexo 1

2 Se acoplan al tesis una revisión bibliográfica realizada en el marco del curso
3 Elementos de Aerodinámica y Aeroelasticidad de Estructuras en su edición
4 2019 sobre la norma *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003.

5 1.1. Norma IEC 60826

6 En este apartado se exponen las secciones destacadas de la norma inter-
7 nacional IEC 60826: *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003, ex-
8 plicitándose las hipótesis fundamentales y formulaciones para el desarrollo de
9 condiciones de diseño.

10 1.1.0.1. Campo de aplicación

11 En primera medida esta aplica para geometrías del conductor y terreno con
12 las siguientes condiciones:

- 13 ■ La longitud de vano debe pertenecer al intervalo (200m, 800m). Para
14 longitudes fuera de ese rango deben analizarse coeficientes de racha di-
15 ferentes a los presentados, sin embargo para vanos más largos a 800m el
16 análisis de la norma resulta sobrestimado.
- 17 ■ Altura de soportes menores a 60 m. Soportes de mayor altura podrían
18 inducir factores de amplificación dinámicos de la respuesta.
- 19 ■ Altitud del área transversal de la línea no sobrepase los 1300m sobre el
20 nivel de altura medio topográfica del terreno circundante.
- 21 ■ Terrenos sin características topográficas singulares cuyo tamaño y forma
22 puedan afectar las consideraciones del flujo. Se aclara que esta norma

1 textitno permite dimensionar para efectos de vientos extremos como tor-
 2 nados, encause de vientos entre montañas y terrenos de alta pendiente.

3 1.1.0.2. Velocidad de referencia y rugosidad del terreno

4 Como primera instancia se establecen diferentes tipos de terrenos según las
 5 condiciones topográficas del mismo, esto afecta la forma del flujo considerado
 6 para el diseño. Para un perfil tipo ley potencial, terrenos más rugosos acentúan
 7 el gradiente de la velocidad en altura para $z = 0$, aumentan la intensidad de
 8 turbulencia e incrementan el Z_G (valor donde el perfil alcanza las condiciones
 9 de atmósfera libre).

Categoría de terrenos	Características del terreno
A	Largos y estrechos viento de ultramar, área costera llana, llanura desértica.
B	Campo abierto con escasa densidad de obstáculos. áreas cultivadas con pocos árboles y edificios
C	Terreno con numerosos obstáculos pequeños de baja altura (matorrales, árboles y edificios)
D	Áreas sub-urbanas con pequeños arboles

Tabla 1.1: Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826

10 Considerando un flujo medio plano tipo capa límite potencial, que se de-
 11 sarrolla en una atmósfera neutra, la velocidad media $v(z)$ en función de la
 12 altura para diferentes constantes de terreno α puede calcularse de la siguiente
 13 manera:

$$V(z) = V_G \left(\frac{z}{z_G} \right)^\alpha \quad (1.1)$$

14 Medidas de la velocidad a través de equipos como pueden ser anemómetros
 15 o sensores de ultra sonido permiten obtener, para determinado periodo de
 16 adquisición de datos, valores de velocidad media e intensidad de turbulencia
 17 entre otras. Es por esto que es clave relacionar la velocidad a diferentes alturas
 18 y para cambios de terreno a lo largo del sentido del flujo, nombrando dos
 19 puntos 1 y 2 podemos relacionar la velocidad media entre estos operando con
 20 la Ecuación (1.1).

$$V(z) = V_{ref1} \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \quad (1.2)$$

En la Ecuación (1.2) anterior la velocidad de referencia V_{ref} es definida, en general como la velocidad media del viento a una altura de $z = 10m$ para un tipo de terreno categoría B. En la norma se presenta la siguiente tabla para calcular las variaciones de velocidad V_{ref} , se introduce un factor K_R el cual permite obtener la relación entre las velocidades de referencia para distintos terrenos $V_{rX} = K_R V_{rB}$. Se presentan las diferentes alturas de rugosidad media de obstáculos z_0 .

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_0(m)$	0.01	0.05	0.30	1.00
α	0.1 a 0.12	0.16	0.22	0.28
K_R	1.08	1.00	0.85	0.67

Tabla 1.2: Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.

Los datos presentados en la Tabla 1.2 se corresponden con los conocimientos dictados en el curso, en primera parte los valores de α se asemejan con lo presentado por Davenport, 1960, para la categoría A y B el numero de α considerado por la norma es menor, esto se relaciona con que valores más chicos de α , es decir terrenos menos rugosos inducen una velocidad mayor para la misma cota. En el caso de la categoría C y D el valor es exactamente idéntico a Davenport, 1960. El termino z_0 se coincide con la tabla publicada en Oke, 2000.

Desglosando el factor K_R para dos puntos de referencia, colocados a una cota de $z_{ref1} = z_{ref2} = 10m$ en función de la Ecuación (1.2) y combinándola con la definición de K_r se obtiene la siguiente expresión:

$$V_{ref2}(10m) = V_{ref1} \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \rightarrow K_r = \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \quad (1.3)$$

Utilizando la Ecuación 1.3 y considerando los valores de Z_G según la referencia Oke, 2000 se expresan los resultados obtenidos los cuales coinciden con un error menor al 8 % con los estipulados por la norma en la Tabla 1.2.

1.1.0.3. Acción del viento sobre los elementos

El valor significativo del problema es la fuerza por unidad de área (Pa) se denota con la letra a además se define, al igual que lo visto en el curso en

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_G(m)$	250	305	365	410
α	0.12	0.15	0.22	0.28
K_R	1.13	1.00	0.77	0.61

Tabla 1.3: Tabla de factores para terrenos según referencia Davenport, 1960

la sección 2.1 del repartido "Bluff-Body aero dynamics" q_0 , el coeficiente de presión dinámica de referencia (N/m^2). Para elementos conductores, cadenas y gran cantidad de elementos de soportes se calcula:

$$a = q_0 C_x G \quad (1.4)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \rho_{ref} \tau (K_r V_{rB})^2 \quad (1.5)$$

En las Ecuaciones 1.4 y 1.5 ρ es la densidad del aire en kg/m^3 y se toma en $1.225 kg/m^3$ para una temperatura de $15^\circ C$ y una presión atmosférica de $101.3 kPa$. La constante τ es un factor que permite corregir las variaciones de densidad del fluido con la presión medida en altura y la temperatura a la que operará el sistema. Los valores de densidad se corroboraron con la referencia Çengel y Boles, 2007, como también el factor de corrección $\tau = \frac{\rho_{P,T}}{\rho_{ref}}$.

El parámetro C_x es el coeficiente de drag dependiendo de la figura transversal al flujo, se desprecian por las grandes longitudes de vanos las condiciones de borde no homogéneas del flujo en los extremos. Por último el factor restante G toma en consideración la altura y el tipo de terreno, el incremento en la velocidad de acuerdo a ráfagas de viento y la respuesta dinámica, para elementos de cable debe separarse en G_L y G_c . Estos últimos factores se vincularán en la siguiente sección con los conocimientos presentados en el curso.

1.1.0.4. Elementos de cable

Los efectos dinámicos que afectan a los conductores específicamente se asocian: al arrastre producido por el viento y la tensión mecánica incrementada durante la instalación. Considerando la hipótesis de baja turbulencia, la fuerza media en Newton de arrastre (A_c) sobre un elemento de largo L y diámetro d , formando un ángulo de balanceo Ω es dada por la expresión:

$$A_c = q_0 C_{xc} G_c G_L dL \sin(\Omega)^2 \quad (1.6)$$

En la Ecuación 1.6 el factor de presión de referencia (q_0) se calcula según la Ecuación 1.4. El valor de C_{xc} es el coeficiente de drag del conductor, su utiliza a menos de obtenerse datos experimentales, un valor unitario para conductores y velocidades de viento estándar. Esto se corresponde con lo presentado en el curso en la figura 19 de Durañona y Denis, 2018 a velocidades equivalentes de $5m/s$ para un conductor usual de alta tensión. Según Son y Cetiner, 2016 se hallan valores medios del coeficiente de drag para Reynolds de aproximadamente igual $350 C_{xc}$ y resulta ser 1. Es por esto que considerar un valor unitario para valores los valores Reynolds de trabajo induciendo una fuerza de mayor magnitud sobre el cable, lo cual es conservador.

Existe un efecto en la dirección perpendicular al flujo llamado ".Aeolian". En dicha dirección se generan desprendimientos de vórtices asociados con la frecuencia de Strouhal $f_s = 0.0925 \frac{v_m}{d_c}$, cuando estos vórtices se acercan a la frecuencias naturales del cable podrían producirse resonancias, magnificándose las amplitudes del movimiento. Según Belloli et al. 2006 estos efectos deben ser considerados para velocidades medias de viento menores $6 \frac{m}{s}$, para el estudio de Tormentas Convectivas. (TC) las velocidades alcanzan valores de hasta $30 \frac{m}{s}$ estando el efecto antes mencionado fuera de rango.

El coeficiente G_c es el factor de viento combinado, el cual se halla con la Figura 3 de la Sección 6.2.6.1, este depende de la altura y el tipo de terreno. Según de lo visto en el curso este debe contener el factor de ráfaga el cual relaciona la presión media con la máxima puntual. Por último G_l es el factor de separación según el largo de vano, este tiene en cuenta la distribución de presiones para distintos largos de vano, para vanos largos la presión máxima se da simultáneamente en pocos puntos por tanto decrece, tal como se ve en la Figura 4 de la Sección 6.2.6.1 y se corresponde con lo visto en el curso para el valor de B.

Para cadenas aisladoras múltiples que transporten más de un cable, estos deben tratarse por separado, las solicitaciones totales sobre los soportes deben considerarse la suma de cada una de las partes. La altura considerada para el cálculo de los factores debe ser el centro de gravedad de los conductores cuando este se encuentra a $2/3$ de la deflexión máxima. También puede considerarse la altura como la cota del punto de anclaje entre la cadena y el cable, esto

1 inducirá velocidades mayores y por tanto el diseño estará sobredimensionado.

2 **1.1.0.5. Cargas del viento sobre la cadena aisladora**

3 Las cargas actuando en el elemento aislador cerámico se originan sobre el
4 área proyectada de la cadena en el sentido del flujo, la cual se nombra A_c . Esta
5 carga se corresponde a la suma de las cargas debido al campo de presiones
6 sobre el cable y la fuerza distribuida directamente sobre la cadena aisladora.
7 La carga aplicada sobre el soporte A_l en N se expresa:

$$A_l = q_0 C_{xl} G_t S_i \quad (1.7)$$

8 En la Ecuación 1.7 el factor q_0 es la presión dinámica de referencia calculada
9 según 1.4, C_{xl} se asocia con el Coeficiente de Drag y se suele considerar 1, 2,
10 valor mayor que para el cilindro. Se aclara que en general el peso relativo de la
11 fuerza sobre los soportes debido a las cadenas aisladoras es significativamente
12 menor respecto a las cargas del viento ejercidas sobre el conductor.

13 El termino G_t es el factor de viento correlativo que se corresponde con la
14 Figura 5 de la norma de la sección 6.2.6.3, este se ve afectado por el tipo de
15 terreno y la altura del centro del gravedad de la cadena, este al igual que en la
16 Sección 1.1.0.4 el combinado de los factores vistos en el curso. Esta presión es
17 multiplicada por el valor S_i del área de la cadena proyectada horizontalmente
18 en un plano paralelo al eje de la torre en m^2 .

19 **1.1.1. Tensión en el conductor**

20 La tensión que debe ser aplicada sobre los conductores se determina a partir
21 del método de deflexión, considérese el caso donde las cadenas aisladoras se
22 encuentra a la misma cota, el conductor tiene un largo L y un peso W por
23 unidad de longitud en N/m, se ilustra un esquema en la siguiente figura:

24 Considerando el cable como un elemento extensible que no posee rigidez
25 a flexión, entonces la tensión interna a para cualquier punto de este debe ser
26 tangente a la curva. Sea P un punto cualquiera con coordenadas (x,y) en el
27 cable, tomando equilibrio estático sobre la mitad del conductor y planteado la
28 segunda cardinal o el principio de los trabajos virtuales para un giro arbitrario,
29 desde P, se obtiene la catenaria, y de esta la deflexión máxima en función de
30 la tensión:

$$Ty = W \frac{x^2}{2} \rightarrow \delta = \frac{WL^2}{8T} \quad (1.8)$$

1

1 Anexo 2

2 Se presenta a continuación resultados extraídos de un modelo generado en
3 el marco de la unidad curricular Dinámica de Estructuras. Este consiste en un
4 análisis dinámico 2D y 3D de elementos de biela no lineales con un análisis
5 modal complementario.

6 2.1. Modelado dinámico de un conductor de 7 alta tensión utilizando elementos de barra

8 2.1.1. Fundamentos teóricos

9 2.1.1.1. Ecuación de movimiento

10 En este trabajo se utilizará el principio de D’Alambert para establecer las
11 ecuaciones de movimiento de un elemento de barra axial, este es el equivalente
12 dinámico al Principio de los Trabajos Virtuales para el caso estático. A conti-
13 nuación se notará las variables posición, desplazamiento, deformación unitaria
14 y tensión como $(x, u_t, \epsilon_t, \sigma_t)$ y las derivadas parciales, velocidad y aceleración
15 con (\dot{u}_t, \ddot{u}_t) .

16 Dicho lo anterior el principio de D’Alambert afirma que $\forall t$ y $\forall \delta u$ se cumple:

$$\int_{V_t} \sigma_t \delta \epsilon dV_t = \int_{V_t} \delta u^T b_{ext,t} dV_t - \int_{V_t} \rho \delta u^T \ddot{u} dV_t \quad (2.1)$$

17 En la ecuación (2.1) $b_{ext,t}$ corresponde a la fuerzas externas por unidad de
18 volumen. El primer termino que aparece restando es el de a las fuerzas iner-
19 ciales siendo ρ la densidad del material. El segundo corresponde a disipaciones
20 viscosas donde $c > 0$. Esta disipación se corresponde con fenómenos de disipa-
21 ción estructural y rozamiento en juntas, su valor se ajustará de acuerdo con

1 resultados experimentales publicados, no se determinará mediante un resul-
2 tado teórico. Aplicando una discretización en elementos finitos obtenemos la
3 ecuación de movimiento de la estructura:

$$M\ddot{u}_t + C\dot{u}_t + K_T(u_t)u_t = f_{ext,t} \quad (2.2)$$

4 Las cargas externas dinámicas se encuentran asociadas con el vector $f_{ext,t}$.
5 La matriz de rigidez $K(u_t)$ se hallará considerando no linealidad geométrica
6 por ende tiene la siguiente forma:

$$K_T = K_{T1} + K_{T2} + K_\sigma \quad (2.3)$$

$$K_{T1} = EA_o l_o b_1^T b_1 \quad (2.4)$$

$$K_{T2} = EA_o l_o (b_1^T b_2 + b_2^T b_1 + b_2^T b_2) \quad (2.5)$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma A_o}{l_o} G \quad (2.6)$$

10 En las ecuaciones anteriores b_1 y b_2 contienen a las derivadas de las fun-
11 ciones de ponderación de u_t mientras que G es la matriz de Green. La matriz
12 K_{T1} es la matriz de rigidez lineal, esta no depende del desplazamiento, K_{T2}
13 es la llamada matriz de desplazamiento inicial y K_σ la matriz geométrica o de
14 tensión inicial.

15 La matriz de masa M puede ser del tipo consistente o concentrada, la
16 primera de ellas se deduce a partir de las funciones de interpolación de u_t (N_i),
17 mientras que la segunda se obtiene a partir de concentrar la masa de cada
18 elemento sobre sus nodos, este último será el utilizado para este trabajo. En
19 el caso de una barra bidimensional tiene la siguiente forma:

$$M^e = \frac{\rho A_o l_o}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

20 Por último la matriz C se considero de forma diagonal, para un elemento

1 de barra:

$$C^e = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2 Como se dijo anteriormente el valor de c se ajustará empíricamente de acuerdo
3 a resultados experimentales de Stengel y Thiele, [2017](#).

4 **2.1.1.2. Método de diferencias centradas**

5 En este apartado se presenta el método por el cual se resuelve la ecuación
6 de movimiento, se eligió este método debido a su simplicidad y su bajo coste
7 computacional. Es de tipo explícito por ende se debe conocer la solución a la
8 ecuación de movimiento en el tiempo t para hallarse luego $t + \Delta t$, de acuerdo
9 con esto último la velocidad y aceleración se escriben de la siguiente manera:

$$\dot{u}_t = \frac{u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (2.9)$$

$$\ddot{u}_t = \frac{u_{t+\Delta t} + u_{t-\Delta t} - 2u_t}{\Delta t^2} \quad (2.10)$$

10 Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación de movimiento y agru-
11 pando según los desplazamientos en los diferentes espacios temporales:

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right] u_{t+\Delta t} = f_{ext,t} - \left[K_T - \frac{2}{\Delta t^2} M \right] u_t - \left[\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right] u_{t-\Delta t} \quad (2.11)$$

12 Notar que la aproximación de la velocidad y la aceleración en el instante t
13 induce un error de truncamiento, en segunda medida se induce un error adi-
14 cional ya que $u_{t+\Delta t}$ no verifica la ecuación dinámica de equilibrio en el instante
15 $t + \Delta t$ sino la del instante t . Mencionados errores pueden ser disminuidos al
16 reducirse el incremento temporal Δt , además condiciones de estabilidad del
17 método para el caso lineal, donde K_T no es función del desplazamiento, impo-
18 ne que $\Delta t < T_{min}/\pi$ donde T_{min} es el mínimo periodo de vibración natural del
19 modelo de elementos finitos.

20 La matriz tangente de desplazamiento y esfuerzo inicial son función del
21 desplazamiento, como consecuencia deben tenerse en cuenta que un incremen-
22 to en la rigidez del sistema, conforme avanza el tiempo, conllevará a modos
23 normales con mayor frecuencia y por tanto a un paso temporal crítico menor.

1 El valor Δt debe elegirse de acuerdo a este compromiso entre disminuir el
 2 error, permaneciendo dentro de la zona de estabilidad del método y el costo
 3 computacional.

4 ■ Se presenta un algoritmo del código utilizado:

- 5 1. Ensamblar: M y C a nivel de estructura.
- 6 2. Definir tiempo final del análisis dinámico t_f .
- 7 3. Definir condiciones iniciales u_o y \dot{u}_o
- 8 4. Calcular: $\ddot{u}_o \leftarrow M^{-1}(f_{ext,t} - C\dot{u}_o - f_{int}(u_o))$
- 9 5. Definir δt , considerando el compromiso mencionado anteriormente
- 10 6. Calcular $a_o \leftarrow 1/\Delta t^2, a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t), a_2 \leftarrow 2a_o, a_3 \leftarrow 1/a_2$
- 11 7. Calcular $a_o \leftarrow 1/\Delta t^2, a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t), a_2 \leftarrow 2a_o, a_3 \leftarrow 1/a_2$
- 12 8. Calcular $u_{-\Delta t} \leftarrow u_o - \Delta \dot{u}_{o_o} + a_3 \ddot{u}_o$
- 13 9. Calcular y factorizar $\hat{M} = a_o M + a_1 C$
- 14 10. **while** $t < t_f$
- 15 11. Calcular $\tilde{f}_t \leftarrow f_{ext,t} - f_{int}(u_t) + a_2 M u_t - (a_o M - a_1 C) u_{t-\Delta t}$
- 16 12. Resolver: $u_{t+\Delta t} \leftarrow \tilde{M}^{-1} \tilde{f}_t$
- 17 13. Calcular la aceleración $\ddot{u}_t \leftarrow a_o(u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t} - 2u_t)$
- 18 14. Calcular la velocidad $\dot{u}_t \leftarrow a_1(u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t})$
- 19 15. $t \leftarrow t + \Delta t$
- 20 16. **end while**

21 2.1.1.3. Modos normales

22 El análisis dinámico de los modos se vuelve fundamental, este busca las
 23 soluciones a la oscilación libre no forzada, de forma que estas sean sinusoida-
 24 les con determinada frecuencia natural ω_n , por ende las soluciones toman la
 25 siguiente expresión $\sin(\omega_n t)\phi$. El vector ϕ representa un vector de escala entre
 26 las amplitudes de los desplazamientos nodales de los grados de libertad de la
 27 estructura.

28 La ecuación de movimiento, en complejos, de la estructura suponiendo mo-
 29 vimientos de la forma $U(t) = \phi \exp i\omega_n(t - t_o)$

$$\omega_n^2 M \phi = K \phi \quad (2.12)$$

30 La ecuación (2.12) (sin amortiguamiento ni fuerzas extremas) se responde

1 con un sistema de valores propios para una matriz simétrica y definida positiva.
 2 De forma matricial los modos normales de la estructura verifican:

$$M\Phi\Omega = K\Phi \quad (2.13)$$

3 Donde Φ es una matriz que tiene como columnas los vectores propios aso-
 4 ciados a las amplitudes de los modos ϕ y Ω es una matriz diagonal con las
 5 frecuencias angulares de los modos ω_n^2 .

6 **2.1.1.4. Modelo de viento**

7 El flujo del viento se asume que solo tiene componente en la dirección z ,
 8 este flujo se puede desglosar en una parte media en el tiempo y una componente
 9 fluctuante, por ende la velocidad toma la siguiente forma: $u_v(z, t) = u_m(z, t) +$
 10 $u'(z, t)$ donde

$$u_m = \frac{1}{T} \int_0^T u_v(z, t) dt \quad (2.14)$$

11 El valor del periodo T debe elegirse de forma de minimizar la desviación
 12 estándar de la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre
 13 la desviación estándar de la velocidad y la velocidad media para un instante
 14 de tiempo dado.

15 El aire se modelará como un fluido incompresible newtoneano cuya fuerza
 16 de drag se puede escribir como:

$$F_v = \int_{dl} \frac{1}{2} \rho(T) C_d(Re) d_c u_m^2(z, t) dx \quad (2.15)$$

17 La fuerza de lift, en dirección perpendicular al flujo se considera desprecia-
 18 ble frente a la fuerza de arrastre. Esta simplificación también se acompasa con
 19 la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo y el peso que
 20 se opone a la fuerza de sustentación.

21 Existe un efecto en la dirección perpendicular al flujo llamado "Aeolian".
 22 En dicha dirección se generan desprendimientos de vórtices asociados con la
 23 frecuencia de Strouhal $f_s = 0.0925 \frac{v_m}{d_c}$, cuando estos vórtices se acercan a la
 24 frecuencias naturales del cable podrían producirse resonancias, magnificándose
 25 las amplitudes del movimiento. Según Belloli et al. 2006 estos efectos deben ser
 26 considerados para velocidades medias de viento menores $6 \frac{m}{s}$, para el estudio
 27 de este trabajo las velocidades alcanzan valores de hasta $30 \frac{m}{s}$ siendo el efecto

1 antes mencionado de menor importancia.

2 2.1.2. Resultados numéricos 2D

3 A continuación se presenta un modelo simplificado en dos dimensiones el
 4 cual pretende modelar la cadena de aisladores, se toma como hipótesis que
 5 los desplazamientos de la torre son mucho menores a los desplazamientos de
 6 la cadena bajo la acción del viento. Un esquema del problema se presenta a
 7 continuación:

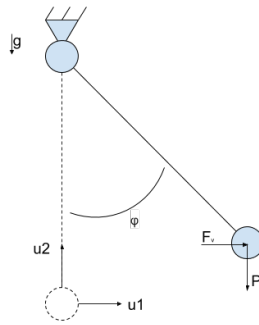


Figura 2.1: Esquema simplificado del problema

8 En la figura 2.1, u_1 corresponde al desplazamiento horizontal de la unión
 9 entre el aislador y el cable, u_2 al desplazamiento vertical y $P_c = 2\frac{m_c g}{2}$ el peso
 10 del cable que debe soportar el aislador. Los perfiles de velocidad en Stengel
 11 y Thiele, 2017, correspondientes a ráfagas descendentes alemanas experimen-
 12 talmente se corroboran como planos. Estos muestran una pequeña variación a
 13 medida que se avanza en la coordenada axial del conductor, como consecuencia
 14 $F_v = \frac{1}{2}\rho(T)C_d(Re)d_c u_m^2(z, t)L_c$ donde los valores de c_d y ρ se adjuntan en el
 15 código.

16 2.1.2.1. Perfil de velocidad de viento

17 El perfil de velocidad media de viento se obtuvo de Stengel y Thiele, 2017
 18 y presenta la siguiente forma:

19 El perfil de velocidades anterior presenta una clara característica de tormen-
 20 ta convectiva descendente, la velocidad aumenta fuertemente en los primeros
 21 500 segundos para luego ir descendiendo de forma gradual. Otra evidencia de
 22 este fenómeno es el descenso abrupto de temperatura en cualquiera de las fa-
 23 ses, al producirse un régimen de mayor velocidad, aumenta el coeficiente de

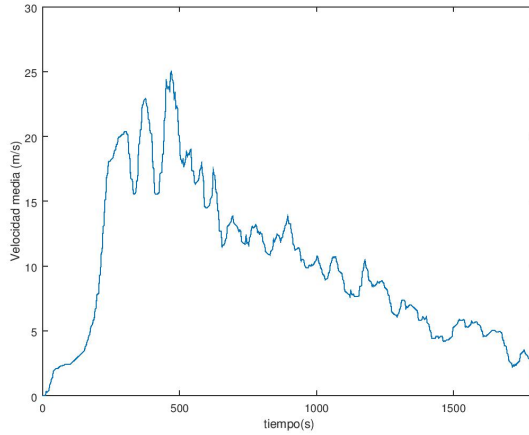


Figura 2.2: Perfil de velocidad media a lo largo del cable según Stengel y Thiele, 2017

1 convención forzada reduciéndose la temperatura de la fase. En Uruguay estos
 2 eventos de interrupción eléctrica de las líneas se debe principalmente a tor-
 3 mentas conectivas. El mismo fenómeno se ha reconocido en Brasil desde hace
 4 cierto tiempo, este pone en exigencia estructural a los cables como a las torres
 5 Riera y Ponte, 2012.

6 2.1.2.2. Resultados del modelo

7 Las ecuaciones de movimiento para los dos grados de libertad del problema
 8 son :

$$\frac{m}{2}\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + K_{11}u_1 + K_{12}u_2 = F_v(t) \quad (2.16)$$

$$\frac{m}{2}\ddot{u}_2 + c\dot{u}_2 + K_{21}u_1 + K_{22}u_2 = P_c \quad (2.17)$$

9 El problema reducido anterior presenta condiciones de borde cinemáticas
 10 impuestas por la unión entre la torre y la cadena, se agregan el reposo $u_{t0} = 0$,
 11 $\dot{u}_{t0} = 0$ y la aceleración inicial del movimiento espejo ficticio en $t = -\Delta t$.
 12 La resolución se realizó mediante el método presentado en la sección 2.2, se
 13 ajustó el valor de c para reproducir de forma aceptable la curva del angulo
 14 superpuesta con Stengel y Thiele, 2017, la expresión de este es:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{u_1}{u_2}\right) \cong \arctan\left(\frac{F_v}{P_c}\right) \quad (2.18)$$

La aproximación de que el ángulo va en el sentido de la fuerza externa se basa en el hechos de ser un elemento de biela y que las aceleraciones son nulas, esta hipótesis puede ser considerada en instantes donde el movimiento posee fuerzas no inerciales pequeñas. Para tiempos donde varíe fuertemente la acción externa del viento esta hipótesis no se verifica y se pueden presentar desviaciones en el ángulo. A continuación se muestra la curva del ángulo medio contrastada con Stengel y Thiele, 2017, donde, mediante ensayo y error se ajusto el valor de c que mejor aproxima dicha curva:

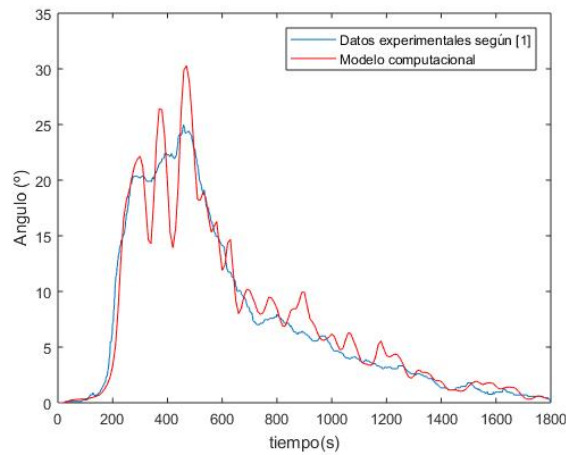


Figura 2.3: Ángulo medio del modelo en contraste con Stengel y Thiele, 2017

Como se dijo anteriormente el modelo presentado en Stengel y Thiele, 2017 supone hipótesis de un análisis estático, entre los 230 y 500 segundos se producen fuertes variaciones y las mayores velocidades de viento esto puede dar lugar a las desviaciones mostradas en la figura anterior. Estas últimas, en contra partida, reproducen correctamente el ángulo máximo de balanceo, sin aplicar la media móvil, medido en Stengel y Thiele, 2017, valor que permite predecir la aproximación de la cadena a la torre y por tanto cuando se produciría la salida en servicio de la línea.

Con el objetivo de reducir el ruido en el ángulo y velocidad se escogió una media móvil de acuerdo con Stengel y Thiele, 2017. Este periodo debe ser tal que se produzca una velocidad media relativamente suave, sin perder la forma de la señal ni eliminar completamente la característica de aleatoriedad en la componente fluctuante de la velocidad. Para este caso se eligió una media móvil de 30 segundos.

Otro resultado el cual vale analizar es el defasaje que presenta la fuerza

1 del viento con el ángulo debido a la inercia del sistema. Si definimos una
2 función compleja $H(\omega)$ tal que $H(\omega)F = X$ donde F representa el módulo
3 de la fuerza y X el vector complejo de desplazamiento solución a la oscilación
4 forzada, proyectándolo en el eje real se obtiene el valor de $X(t)$. El vector
5 complejo $H(\omega)$ presenta cierto ángulo, esto es consecuencia del desfase entre
6 la respuesta del sistema y su forzante F . En la siguiente figura se evidencia
7 dicho retraso en el tiempo de la respuesta del sistema (φ) en naranja y en azul
8 el valor de F .

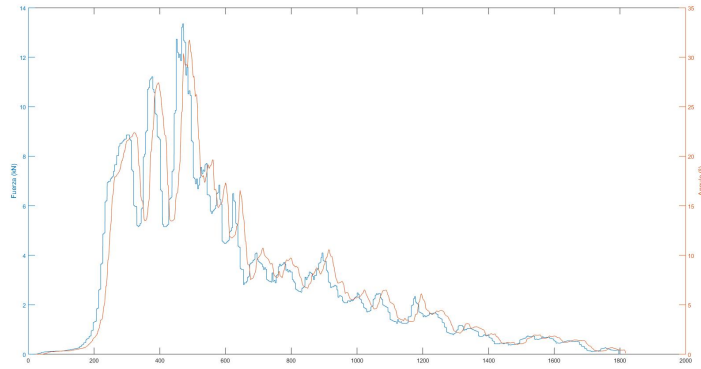


Figura 2.4: Curva desfase ángulo fuerza

9 Se realizó un análisis modal como fue presentado en la sección 2.3, las
10 frecuencias naturales asociadas al aislador son de:

$$f_1 = 0.03Hz \quad (2.19)$$

$$f_2 = 83Hz \quad (2.20)$$

11 La primer frecuencia presenta un vector propio $(\varphi_1) = (1, 0)$ siendo la
12 primer componente del vector la asociada con u_1 y la segunda entrada u_2 .
13 Claramente $(\varphi_2) = (0, 1)$, esto se debe a que los vectores son lineal mente
14 independientes y que es el movimiento restante dinámicamente posible. Se
15 hace notar el hecho de que que las componentes estén desacopladas, es decir
16 que $(\varphi_2) \cdot (\varphi_1) = 0$, es consecuencia de que los modos se hallaron en un entorno
17 de la posición $\varphi = 0$, solo con la acción de la gravedad donde $K_T = K_{T1}$.

2.1.3. Resultados numéricos 3D

Se procede a resolver el problema en tres dimensiones. El sistema se compone de dos cadenas de aisladores y un cable. Las cadenas de aisladores serán modeladas como una biela, el nodo superior de esta permanece fijo mientras que al otro se le asignan dos grados de libertad (desplazamientos en y , z), esto se debe a que hacia ambos lados del cable continuarían cables idénticos haciendo que este punto no tenga desplazamientos en el sentido de x . El cable será representado como un conjunto de barras articuladas en sus extremos como se muestra en la figura 2.5, con tres grados de libertad en sus nodos, exceptuando la unión con el aislador (nodos 2 y $n-1$).

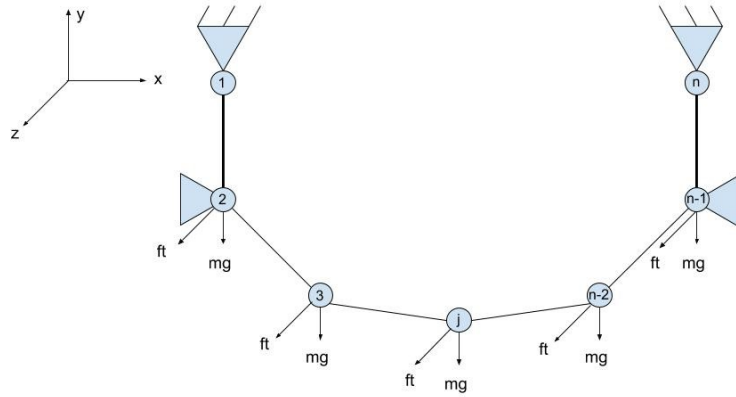


Figura 2.5: Esquema simplificado del problema 3D

Para esta parte se deberá contar con matrices cuadradas de $(n \times 3)$, siendo n el numero de barras. Esto genera un compromiso a la hora de elegir n , dado que simular el cable con un número pequeño de barras no representa al mismo y un numero extenso de estas hará que la simulación sea de gran costo computacional logrando un modelo más realista, incluso existen casos donde no es posible lograr una simulación. El método de resolución seguirá siendo por diferencias centradas donde la matriz de masa quedará diagonal repartiendo la mitad de la masa en cada uno de sus nodos.

2.1.4. Frecuencias naturales

En una primera instancia son calculados los modos para este sistema. Los mismos son calculados en la posición natural del cable, por lo que se debe realizar una simulación donde la única fuerza que actúa es la gravedad, aplicada

1 sobre los nodos, y se logre alcanzar el equilibrio. La particularidad está dada
2 en que la matriz de rigidez es calculada como la matriz tangente no lineal, por
3 lo que se debe conocer los desplazamientos una vez cargado el cable.

$$K_T = K_{T1} + K_{T2} + K_\sigma \quad (2.21)$$

4 Una vez hallada esta matriz se procede a calcular las frecuencias naturales y
5 los modos del sistema a partir de la ecuación ya mencionada $(K - \lambda.M).\phi = 0$.
6 Se puede observar que los modos revelados por este estudio son en diferentes
7 planos y con frecuencias pequeñas asociadas, en comparación con modelos de
8 estructuras. Se presentan a continuación las primeras 5 frecuencias naturales
9 del sistema e imágenes ilustrando los modos asociados a ellas en el anexo.
10 Además se adjuntan vídeos del movimiento asociados con los mismos.

- 11 ■ $1^a - 0.0908Hz$
- 12 ■ $2^a - 0.1815Hz$
- 13 ■ $3^a - 0.1818Hz$
- 14 ■ $4^a - 0.2658Hz$
- 15 ■ $5^a - 0.2721Hz$

16 El estudio se centra en la primera de las frecuencias, 0.091 Hz, ya que su
17 modo asociado es el que genera mayor desplazamiento horizontal en la cadena
18 de aisladores. A continuación se presenta el primer modo con el mayor de los
19 desplazamientos a 15 metros de la posición original para mejor visualización.
20 En azul se esboza el cable en su posición natural y en rojo el primer modo
21 asociado.

22 El planteo consta en excitar el cable con una fuerza sinusoidal con frecuen-
23 cia igual a la menor de las frecuencias naturales, pretendiendo disminuir los
24 desplazamientos de la cadena de aisladores colocando masas concentradas de
25 80 kg en determinados puntos del cable. Es por esto que se simula el cable en
26 4 instancias diferentes aumentando la masa de determinados nodos. Los nodos
27 seleccionados para colocar las masas son:

- 28 ■ Los dos que se encuentran vinculados a la cadena de aisladores.
- 29 ■ Los dos ubicados a $\frac{1}{6}$ de la distancia horizontal de entre aisladores.
- 30 ■ Los dos ubicados a $\frac{2}{6}$ de la distancia horizontal de entre aisladores.
- 31 ■ En el nodo central con dos masas.

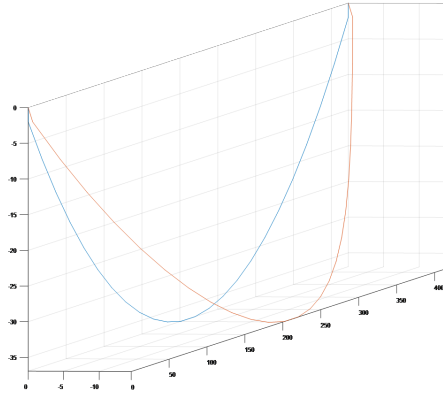


Figura 2.6: Configuración adoptada por el primer modo.

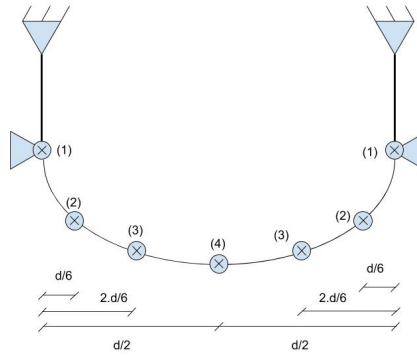


Figura 2.7: Distribución de masas colocadas.

1 Mediante estas cuatro simulaciones se constató que la mejor solución para
2 este problema es colocar las dos masas concentradas en el medio del cable.
3 Con esto se logra una reducción en el desplazamiento horizontal de la cadena
4 de aisladores de aproximadamente un 85 % para un transitorio de 1500 segun-
5 dos. A continuación se presenta el desplazamiento del nodo estudiado antes y
6 después de colocar las masas.

7 La respuestas en el tiempo para la fuerza sinusoidal de frecuencia igual al
8 primer modo se presenta en las Figuras: 2.8, 2.9.

9 Por un lado, la opción de colocar masas en el cable puede parecer muy fácil
10 de implementar y ayudaría a que los desplazamientos del cable disminuyan de
11 forma considerable para fuerzas de este tipo en particular, pero no hay que
12 dejar de evaluar otros cambios que se pueden generar a partir de este método.
13 Se debe considerar que tanto las torres como la cadena de aisladores quedaran
14 sometidas a un peso mayor, en este caso se trata de un aumento de 160 Kg, en

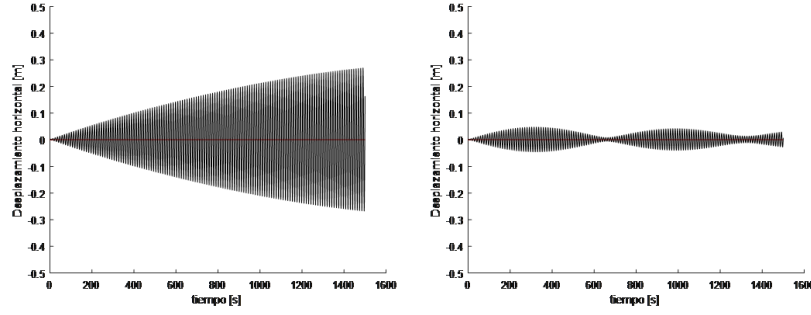


Figura 2.8: Desplazamiento horizontal de la cadena de aisladora en función del tiempo con y sin masas.

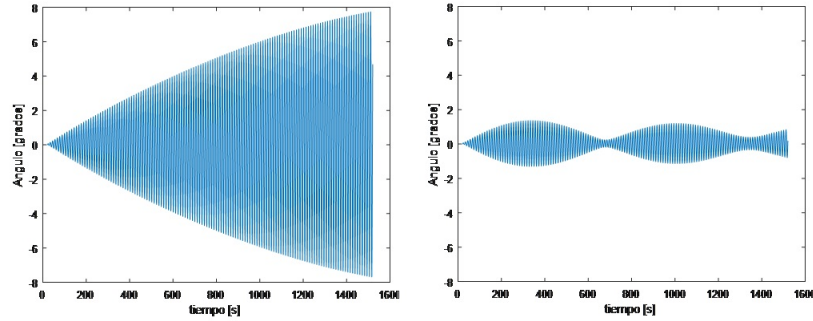


Figura 2.9: Ángulo de la cadena de aisladora en función del tiempo con y sin masas.

1 cada uno de los cables, donde se deberá tener en cuenta las normas aplicadas
2 por UTE si es factible este tipo de soluciones. Por otra parte, se debe considerar
3 que cambian las frecuencias naturales del nuevo sistema. Se presentan las cinco
4 primeras frecuencias naturales sin masas agregadas y con masas aplicadas en
5 el nodo central:

- 6 ■ $1^a - 0.0908Hz \rightarrow 1^a - 0.0893Hz$
- 7 ■ $2^a - 0.1815Hz \rightarrow 2^a - 0.1908Hz$
- 8 ■ $3^a - 0.1818Hz \rightarrow 3^a - 0.1913Hz$
- 9 ■ $4^a - 0.2658Hz \rightarrow 4^a - 0.2622Hz$
- 10 ■ $5^a - 0.2721Hz \rightarrow 5^a - 0.2685Hz$

11 Se observa que la primera frecuencia natural disminuye un 2%, esto hace
12 que la frecuencia con la que se aplica la fuerza en el estudio anterior es próxima
13 a la frecuencia natural del nuevo sistema, de igual manera los desplazamientos
14 se atenúan de forma considerable.

2.1.5. Respuesta a tormenta convectiva

En esta instancia se somete al cable a fuerzas ejercidas por el viento. Al igual que en el caso del péndulo, las velocidades y fuerzas ejercidas por el viento son obtenidas a partir de Stengel y Thiele, 2017. Dadas estas condiciones, se compara el movimiento del nodo móvil de la cadena de aisladores contra lo documentado en el artículo antes mencionado, y los resultados arrojados de la simulación Péndulo. Para esto se consideraron los mismos parámetros que en el modelo 2D. A continuación se presenta el ángulo respecto de la vertical que forma la cadena de aisladores en función del tiempo al aplicarle la fuerza ejercida por el viento:

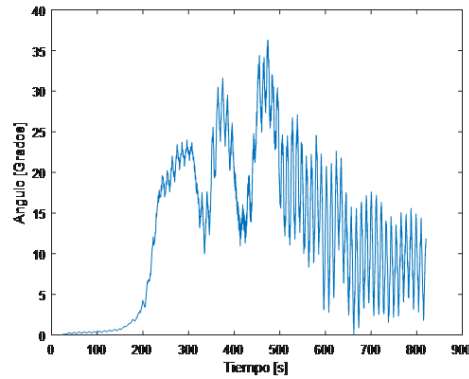


Figura 2.10: Respuesta del ángulo de la cadena de aisladora en función del tiempo.

En la siguiente figura se comparan los resultados arrojados del ángulo con los datos de Stengel y Thiele, 2017. Para luego a través de una media móvil filtrar los datos obtenidos.

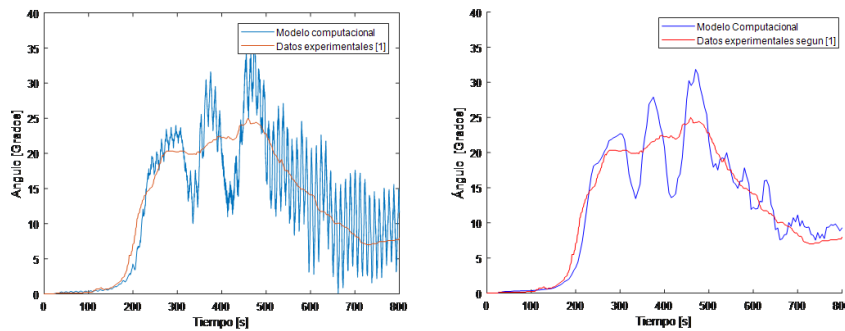


Figura 2.11: Datos del ángulo sin procesar y luego de aplicarle una media móvil

Cuando se compara con los datos arrojados por Stengel y Thiele, 2017,

se puede apreciar la misma distorsión que ocurría en la simulación 2D. Este cambio significativo se puede deber a no tener precisamente los mismos datos que se utilizaron en Stengel y Thiele, 2017. De todas formas el programa tiene la misma tendencia a comportarse como los datos de referencia al aplicarle el viento.

Comparando los resultados con el modelo 2D se puede observar que las curvas descritas por ambos modelos reflejan el mismo comportamiento:

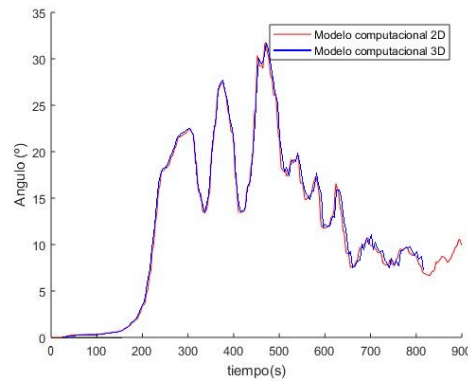


Figura 2.12: Contraste de los modelos 2D/3D

Los datos arrojados por el modelo Péndulo y 3D difieren en menos de un 5 % para cada posición en el tiempo. La gran diferencia que existen entre estas dos simulaciones es que en el para el caso 2D se debe asumir que las fuerzas son homogéneas en todo el cable y se puede ver que representa bien esta situación. Las tormentas conectivas son homogéneas en toda la extensión del cable por lo que el programa puede servir para simulaciones futuras.

Por último, se procede a aplicarle al sistema una masa de 160 Kg en el medio del cable, como en la primera simulación 3D, excitándolo con la fuerza del viento para conocer los desplazamientos del nodo móvil de la cadena de aisladores.(Figura 2.13).

A partir de los datos anteriores se puede ver que no existen grandes cambios en el movimiento del nodo libre en la cadena de aisladores cuando se aplica una fuerza proveniente de una tormenta conectiva al añadirle una masa de 160 kg en el centro del cable. Para este tipo de problemas no sería de gran ayuda la solución que se había encontrado en el la primera parte de esta sección.

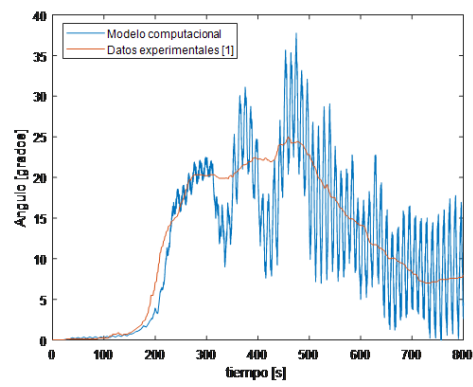


Figura 2.13: Respuesta del ángulo para tormenta convectiva utilizando una media móvil y masas sobre el cable

1 Anexo 3

2 Se presenta a continuación los códigos implementados durante el transcurso
3 de este trabajo:

```
41 % Copyright (C) 2020, Jorge M. Perez Zerpa, J. Bruno Bazzano,  
5     Joaquin Viera,  
62 %     Mauricio Vanzulli, Marcelo Forets, Jean-Marc Battini,  
7     Sebastian Toro  
83 %  
94 % This file is part of ONSAS.  
105 %  
116 % ONSAS is free software: you can redistribute it and/or modify  
127 % it under the terms of the GNU General Public License as  
13     published by  
148 % the Free Software Foundation, either version 3 of the License  
15     , or  
169 % (at your option) any later version.  
170 %  
181 % ONSAS is distributed in the hope that it will be useful,  
192 % but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty  
20     of  
213 % MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the  
224 % GNU General Public License for more details.  
235 %  
246 % You should have received a copy of the GNU General Public  
25     License  
267 % along with ONSAS. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.  
27     />.  
288  
299 function [ fs, ks, stress, rotData ]= elementBeamForces( ...  
300     elemCoords, elemCrossSecParams, elemConstitutiveParams,  
31     solutionMethod, Ue, Udote, Udotdote, elemrho ) ;  
321
```

```

12 elemCoords = elemCoords(:) ;
23 xs          = elemCoords(1:2:end) ;
34
45 booleanCSTangs = 0 ;
56
67 % --- material constit params ---
78 rho = elemrho ;
89 E   = elemConstitutiveParams(2) ;
90 nu  = elemConstitutiveParams(3) ;
101 G   = E/(2*(1+nu)) ;
112 % -----
123
134 % --- cross section ---
145 if elemCrossSecParams(1) == 1 %general section
156     Area = elemCrossSecParams( 2 ) ;
167     J     = elemCrossSecParams( 3 ) ;
178     Iyy   = elemCrossSecParams( 4 ) ;
189     Izz   = elemCrossSecParams( 5 ) ;
190     %
201     if length( elemCrossSecParams ) > 5
212         Jrho = diag( elemCrossSecParams( 6:8 ) ) ;
223     else
234         Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
245     end
256 elseif elemCrossSecParams(1) == 2
267     Area = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3) ;
278     Iyy  = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)^3/12 ;
289     Izz  = elemCrossSecParams(3)*elemCrossSecParams(2)^3/12 ;
290     if elemCrossSecParams(2)==elemCrossSecParams(3)
301         J      = 1/3*0.40147*elemCrossSecParams(2)^4 ;
312     else
323         error('rectangular section type not implemented yet,
33         please create an issue')
344     end
355     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
366 elseif elemCrossSecParams(1) == 3
377     diameter = elemCrossSecParams(2) ;
388     Area = pi*diameter^2/4 ;
399     Iyy  = pi*diameter^4/64 ;
400     Izz  = Iyy ;
411     J    = Iyy + Izz ;
422     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
433 else

```

```

144     error(' section type not implemented yet, please create an
2       issue')
355 end
466 % -----
577
688 % auxiliar matrices
799 I3 = eye(3)      ;
800 O3 = zeros(3)    ;
911 O1 = zeros(1,3)  ;
1022
1133 permutIndxs = [1:2:5 2:2:6 ([1:2:5]+6) ([2:2:6]+6) ] ;
1244
1355 dg          = Ue          ( permutIndxs ) ;
1466 if solutionMethod > 2
1577     ddotg      = Udot     ( permutIndxs ) ;
1688     ddotdotg   = Udotdote( permutIndxs ) ;
1799 end
1800
1911 % global thetas
2022 tg1 = dg (4:6);
2133 tg2 = dg (10:12);
2244
2355 % rotation matrices
2466 Rg1 = expon( tg1 ) ;
2577 Rg2 = expon( tg2 ) ;
2688
2799 x21 = xs(4:6) - xs(1:3) ;
2800 d21 = dg(7:9) - dg(1:3) ;
2911
3022 lo = sqrt( ( x21          )' * ( x21          ) ) ; %
3133 l  = sqrt( ( x21 + d21 )' * ( x21 + d21 ) ) ; %
3244
3355 %~ lo = sqrt(x21' * x21);
3466 %~ l = sqrt( sum( ( x21+d21).^2 ) ) ;
3577 %~ l  = sqrt( (x21+d21)' * (x21+d21) ) ;
3688 %~ l  = norm( x21 + d21 ) ;
3799
3800
3911 %~ if norm(imag(dg))>0
4022     %~ u, d21, l, lo, imag(d21), dg
4133     %~ uimprov = ( l^2 - lo^2 ) / (lo + l)
4244 %~ end
4355

```



```

116 % rotation matrix to reference configuration
127 Ro = beamRefConfRotMat( x21 ) ;
138
149 % --- rigid rotation ---
150
161 % deformed x axis
172 e1 = ( x21 + d21 ) / l ;
183
194 q1 = Rg1 * Ro * [0 1 0]' ;
105 q2 = Rg2 * Ro * [0 1 0]' ;
116 q = ( q1 + q2 ) / 2 ;
127
138 % deformed z local axis
149 e3 = cross (e1, q) ;
150 e3 = e3 / norm(e3) ; % normalization
161
172 % deformed y local axis
183 e2 = cross (e3, e1);
194
205 % rotation matrix
216 Rr = [ e1 e2 e3 ] ;
227 % -----
238
249
250 % --- local displacements ---
261
272 % axial displacement
283 u = l - lo;
294
305 % local rotations
316 Re1 = Rr' * Rg1 * Ro;
327 Re2 = Rr' * Rg2 * Ro;
338
349 t11 = logar( Re1 ) ;
350 t12 = logar( Re2 ) ;
361
372 locDisp = [ u t11' t12' ] ;
383 % -----
394
405
416 % --- local force vector and tangent stiffness matrix ---
427 [f1, k1, strain, stress] = beamLocalStaticForces (u, t11, t12,
43 lo, E, G, Area, Iyy, Izz, J ) ;

```

```

118 % -----
129
130
141 q = Rr' * q ;
152 q1 = Rr' * q1 ;
163
174 nu = q(1)/q(2);
185 nu11 = q1(1)/q(2);
196 nu12 = q1(2)/q(2);
207 nu21 = 2*nu-nu11;
218 nu22 = 2-nu12;
229
230
241 % transformation to the new local coordinates
252
263 De1 = invTs( tl1 ) ;
274 De2 = invTs( tl2 ) ;
285
296 % matrix for transformation between global and relative
307 rotations/moments
318
329 H = [ 1 01 01 ; ...
340       01' De1 03 ; ...
351       01' 03 De2 ] ;
362
373 fe = H' * fl ;
384 %~ [ fl( 1)
395     %~ De1'*fl(2:4)
406     %~ De2'*fl(5:7)] ;
417
428 Dh1 = dinvTs( tl1, fl(2:4) ) * De1 ;
439 Dh2 = dinvTs( tl2, fl(5:7) ) * De2 ;
440
451 Kh = [ 0 01 01
462       01' Dh1 03
473       01' 03 Dh2 ] ;
484
495 ke = H' * kl * H + Kh ;
506
517 % transformation to the global coordinates
528 r = [ -e1' 01 e1' 01 ]' ;
539
540 B = [ r'

```

```

1189 -nu/l*e3' (1-nu12/2)*e1'+nu11/2*e2' nu/l*e3' 1/2*(-nu22*e1
2 '+nu21*e2')
1300 -e3'/l e2' e3'/l 0 0 0
1401 e2'/l e3' -e2'/l 0 0 0
1502 -nu/l*e3' 1/2*(-nu12*e1'+nu11*e2') nu/l*e3' (1-nu22/2)*e1'+
6 nu21/2*e2'
1703 -e3'/l 0 0 0 e3'/l e2'
1804 e2'/l 0 0 0 -e2'/l e3'];
1905
1006 fg = B' * fe ;
1107
1208 A = (I3-e1*e1')/l;
1309
1400 Dr=[A 03 -A 03
1501 03 03 03 03
1602 -A 03 A 03
1703 03 03 03 03];
1804
1905 G=[0 0 nu/l nu12/2 -nu11/2 0 0 0 -nu/l nu22/2 -
20 nu21/2 0
2106 0 0 1/l 0 0 0 0 0 -1/l 0
22 0 0
2307 0 -1/l 0 0 0 0 0 1/l 0 0
24 0 0]';
2508
2609 II=[03 I3 03 03
270 03 03 03 I3];
2801
2902 P = II - [G'; G'] ;
3003
3104 F = P' * fe(2:7);
3205
3306 sF=[skew(F(1:3))
3407 skew(F(4:6))
3508 skew(F(7:9))
3609 skew(F(10:12))];
3700
3801 EE=[Rr 03 03 03
3902 03 Rr 03 03
4003 03 03 Rr 03
4104 03 03 03 Rr];
4205
4306 nab=[0

```

```

217      (nu*(fe(2)+fe(5))+fe(3)+fe(6))/1
228      (fe(4)+fe(7))/1];
239
240 Kg = B' * ke * B + Dr * fe(1) - EE*sF*G'*EE' + EE*G*nab*r' ;
251
262
273 % --- transformation to the new global coordinates ---
284
295 Dg1 = Ts( tg1 ) ;
306 Dg2 = Ts( tg2 ) ;
317
328 q=[fg(1:3)
339     Dg1'*fg(4:6)
340     fg(7:9)
351     Dg2'*fg(10:12)];
362
373 Dk1=dTs(tg1,fg(4:6));
384 Dk2=dTs(tg2,fg(10:12));
395
406 H=[I3 03 03 03
417     03 Dg1 03 03
428     03 03 I3 03
439     03 03 03 Dg2];
440
451 Kt = H' * Kg * H ;
462
473 Kt( 4:6 , 4:6 ) = Kt( 4:6 , 4:6 ) + Dk1 ;
484 Kt(10:12,10:12) = Kt(10:12,10:12) + Dk2 ;
495
506 %~ Kt = (Kt+Kt')/2;
517
528 Finte = zeros(size(q)) ;
539 dofscomb = [ 1:2:5 2:2:6 7:2:11 8:2:12 ] ;
540
551 Finte( dofscomb ) = q ;
562 KTe = zeros( size(Kt));
573
584 if booleanCSTangs == 1
595
606     step = 1e-4 * norm(x) ;
617
628     for i=1:12
639         ei = zeros(12,1);    ei(i) = j ;

```

```

210
221     FinteComp = elementBeamInternLoads( x, dg + ei*step, params
3       , 0 ) ;
242
253     KTe(:,i) = imag( FinteComp ) / step;
264
275     %~ if i==1
286         %~ holaaafintecomp = FinteComp(1) ;
297         %~ ei
308 %~ FinteComp
319 %~ stop
320     %~ end
331 end
342 %~ KTeCS = KTe ;
353 %~ KTe = zeros( size(Kt));
364 %~ KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
375 %~ normareldif = norm( KTeCS - KTe ) / norm( KTe )
386 %~ dife = KTeCS - KTe
397 %~ normareldif11 = norm( KTeCS(1,1) - KTe(1,1) ) / norm( KTe
400     (1,1) )
418 %~ entridif = [ KTeCS(1,1) KTe(1,1) holaaafintecomp ]
429 %~ holacomplejos = [ KTeCS(1,1) holaaafintecomp ]
430
441 %~ full(dife)
452
463 %~ stop
474 else
485
496     KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
507 end
518
529 fs = {Finte} ;
530 ks = {KTe};
541
552 rotData = {locDisp, Rr} ;
563
574
585
596 if solutionMethod > 2
607
618     % ----- interpolation functions -----
629     % linear
630     N1 = @(x) 1 -x/lo ;

```

```

311 N2 = @(x) x/lo ;
322
333 % cubic
344 N3 = @(x) x*(1-x/lo)^2 ;
355 N4 = @(x) -(1-x/lo)*(x^2)/lo ;
366 N5 = @(x) (1-3*x/lo)*(1-x/lo);
377 N6 = @(x) (3*x/lo-2)*(x/lo) ;
388
399 N7 = @(x) N3(x)+N4(x) ;
400 N8 = @(x) N5(x)+N6(x)-1 ;
411 % -----
422
433 P1 = @(x) [ 0 0 0 0 0 0 ; ...
444             0 0 N3(x) 0 0 N4(x) ; ...
455             0 -N3(x) 0 0 -N4(x) 0 ] ; % Eq. 38
466
477 ul = @(x) P1(x) * [ t11; t12 ] ; % Eq. 38
488
499 P2 = @(x) [ N1(x) 0 0 N2(x) 0 0 ; ...
500             0 N5(x) 0 0 N6(x) 0 ; ...
511             0 0 N5(x) 0 0 N6(x) ] ; %
522 Eq. 39
533
544 N = @(x) [ N1(x)*I3 03 N2(x)*I3 03 ];
555
566 H1 = @(x) N(x) + P1( x ) * P - 1*skew( ul(x) ) * G' ; % Eq
577 59
588
599 wdoter= G' * EE' * ddotg ; % Eq. 65
600
611 A1 = [ 01 01 01 01 ;
622        0 -1 0 01 0 1 0 01 ;
633        0 0 -1 01 0 0 1 01 ] ; %Eq. A.4
644
655 udot1 = @(x) P1(x) * P * EE' * ddotg ; %Ec A.9
666
677 % -----
688 % r is defined as column vector!!
699 H1dot = @(x) N7(x)/(1^2)*A1*(r' * ddotg) - skew( udot1(x) )
700 * G' ; %Ec A.8
711 % -----
722
733 ET = [skew(wdoter) 03 03 03 ;

```

```

311      03      skew(wdoter)      03      03      ;
322      03      03      skew(wdoter)      03      ;
333      03      03      03      skew(wdoter)      ];
344
355      C1 = @(x)      skew(wdoter)*H1(x) + H1dot(x) -H1(x)*ET; % Ec 66
366
377      udot      = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotg; %Ec 61
388      udotdot = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotdotg+Rr*C1(x)*EE'*ddotg; % Ec
9      67
109
110      %Matrix to compute wdot y wdtotdot
121
132      H2 = @(x) P2(x)*P+G'; %Ec 72 se puede usar para comprobar con
14      ec A.10
153
164      wdot      = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotg;%Ec74
175
186
197      A2      = [      01      01      01      01;
208      0 0 1 01 0 0 -1 01;
219      0 -1 0 01 0 1 0 01];%Ec A.12
220
231      H2dot      = @(x) N8(x)/l^2*A2*(r'*ddotg) ;%Ec A.14
242
253      C2      = @(x) skew(wdoter)*H2(x) + H2dot(x) - H2(x)*ET ;%Ec
26      76
274
285      wdotdot      = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotdotg + Rr*C2(x)*EE'*ddotg ;
29      %Ec 77
306
317      %-----Tensor dyadc of Intertia -----
328      %compute Rg(x)
339      thethaRoof      = @(x) P2(x)*[tl1;tl2];% Ec 39
340      Rex      = @(x) expon(thethaRoof(x)); %Ec 19 elevado en
35      ambos lados
361      Rgx      = @(x) Rr*Rex(x)*Ro';
372
383      Irho      = @(x) Rgx(x)*Ro*(Jrho)*(Rgx(x)*Ro)'; %Ec 45
394      Irhoe      = @(x) Rr'*Irho(x)*Rr; %Ec 80
405
416      % -----Compute interial force by quadrature -----
427      xIntPoints = [ -sqrt(3/5)      0      sqrt(3/5) ] ;
438      wIntPoints = [      5/9      8/9      5/9 ] ;

```

```

319
320 IntegrandoForce = @(x) H1(x)'*Rr'*Area*rho*udotdot(x) ...
331                  + H2(x)'*Rr'*( ...
342                  Irho(x)*wdotdot(x)...
353                  + skew(wdot(x)) * Irho(x) * wdot(x)
6      ...
374                  ) ; %Eq 78
385
396 %~ IntegrandoForce = @(x) H1(x)'*Rr'*Area*rho*udotdot(x)+H2(
10      x)'*Rr'*(Irho(x)*wdotdot(x)...
117          %~ +skew(wdot(x))*Irho(x)*wdot(x)); %Ec 78
128 %~ irho=Irho(sqrt(3/5))
139 %~ termino=H2(1)'*Rr'*(Irho(1)*wdotdot(1)+skew(wdot(1))*Irho
14      (1)*wdot(1))
150
161
172 IntegrandoMassMatrix = @(x) 1*H1(x)'*Area*rho*H1(x)+1*H2(x)
18      '*Irhoe(x)*H2(x);
193
204
215
226
237
248 %~ %Compute C3 and C4
259
260 h1 = @(x) H1(x) * ddotg ; %Eq B6
271 h2 = @(x) H2(x) * ddotg ;
282
293 rElem = [ [-1 0 0]    01  [1 0 0] 01]; %Ec B10
304
315 F1      = [skew(udot(0))' skew(wdot(0))' skew(udot(lo))' skew(
32      wdot(lo))']'; %Chequear con los nodales
336 %~ Fiaux      = [skew(ddotg(1:3))' skew(ddotg(4:6))' skew(ddotg
34      (7:9))' skew(ddotg(10:12))']' %Chequear con los nodales
357
368 C3      = @(x) -skew(h1(x))*G' + (N7(x)/l^2)*A1*(ddotg*rElem)...
37
389          +skew(wdoter)*P1(x)*P + H1(x)*F1*G'; % B13
390
401 C4      = @(x) -skew(h2(x))*G' + (N8(x)/l^2)*A2*ddotg*rElem + H2(
41      x)*F1*G'; %B14
422
433 %~ Irhoe(1)

```



```

414   ~ c1prueba = C1(1/2)
425   ~ c3prueba =C3(1/2)
436
447   % -----
458   % Compute Gyroscopic Matrix
469   IntegrandoGyroMatrix = @(x) H2(x)' * ( ( skew(wdoter) *
7       Irhoe(x) ) - skew( Irhoe(x) * wdoter) ) * H2(x) ...
480                               + H1(x)' * Area*rho*(C1(x) + C3(x)
9       ) ) + H2(x)'*Irhoe(x)*(C2(x)+C4(x)) ; %Ec88
101
112   sumForce = zeros (12, 1 ) ;
123   sumGyro  = zeros (12      ) ;
134   sumMass  = zeros (12      ) ;
145
156
167   for ind = 1 : length( xIntPoints )
178       sumForce = sumForce ...
189           + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoForce      ( lo/2 *
19       (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
200       %
211       sumGyro = sumGyro ...
222           + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoGyroMatrix( lo/2 *
23       (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
243       %
254       sumMass = sumMass ...
265           + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoMassMatrix( lo/2 *
27       (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
286   end
297
308   Fine          = EE * sumForce          ;
319   GyroMatrix    = EE * sumGyro * EE' ;
320   MassMatrix    = EE * sumMass * EE' ;
331
342   %Add Bt Matrix
353
364   Bt=[I3      03      03      03
375       03 inv(Dg1)',    03      03
386       03      03      I3      03
397       03      03      03      inv(Dg2)'] ;
408   MassMatrix =MassMatrix*Bt ;
419   GyroMatrix =GyroMatrix*Bt ;
420   ~ MassMatrix
431   Fine          = Cambio_Base(Fine); % En formato [f1 m1 ...];

```

```

412 GyroMatrix = Cambio_Base(GyroMatrix); % En formato [u1 theta1
2     u2 theta2 u3 theta3];
433 MassMatrix = Cambio_Base(MassMatrix); % En formato [u1 theta1
4     u2 theta2 u3 theta3];
454
465 %~ GyroMatrix
476 %~ MassCambiada = MassMatrix
487 %~ stop
498 %~ invPermutIndxs = zeros(12,1) ;
1009 %~ invPermutIndxs(1:2:end) = [ 1:3  7:9  ] ;
110 %~ invPermutIndxs(2:2:end) = [ 4:6 10:12 ] ;
121
132 %~ Fine = Fine ( invPermutIndxs )
14     ;
153 %~ GyroMatrix = GyroMatrix( invPermutIndxs, invPermutIndxs )
16     ;
174 %~ MassMatrix = MassMatrix( invPermutIndxs, invPermutIndxs )
18     ;
195
206 %~ Fine(permutIndxs) = Fine ;
217 %~ GyroMatrix( permutIndxs, permutIndxs) = GyroMatrix ;
228 %~ MassMatrix( permutIndxs, permutIndxs) = MassMatrix ;
239
240 %~ function quadSum = integr( hola )
251
262 %~ Fine
273
284 fs{3} = Fine ;
295
306 ks{2} = GyroMatrix ;
317 ks{3} = MassMatrix ;
328
339 end

```