FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural
Instituto de Estructuras y Transporte
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Marzo de 2021

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:
Dr. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:
D.Sc. Prof. Gabriel Usera

Montevideo – Uruguay
Marzo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte, 2021.

XX, 131 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

1 Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 88 – 94.

1. Elementos de viga corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Cables de alta tensión, 5. Transmisión electrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

D.Sc. Prof. Gonzalo Cetrángolo

M.Sc. Prof. Bruno Bazzano

D.Sc. Prof. Marcelo Forets

Montevideo – Uruguay
Marzo de 2021

A mi Madre por su apoyo
incondicional,
por enseñarme a aprender y
enseñar,
por impulsarme a hablar, a crear
y amar

1

Agradecimientos

Agradezco al universo por haberme dado hálito de vida a través de ese rió inefable que fluye entre la casualidad y la causalidad. Por haberme maravillado con la lagrima, la risa y el atrapante mundo del conocimiento. Las raices de ese universo son principalmente mi familia, que me nutrieron de valores y vivencias envueltas de un afecto inconmensurable. A mi padre, por haberme enseñado a remar por mis objetivos, pelear por mis proyectos con determinación, sacrificio y sobre todo, por haberme inculcado que no hay que ganarle a nadie, unicamente aprender a levantarse. A mi madre por su incodionalidad eterna, por transferirme la vocación de la enseñanza. Por enseñarme la diversidad de las inteligencias múltiples y sobre todo, la semilla del amor inmenso. A Quique por su sabiduría, su visión biocentrica y su flecha existencial que atraviesa cualquier tormenta.

También agradezco a mis tutores; A Jorge por ser primero un gran ser humano con una visión fascinante, por enseñarme no solo conocimientos técnicos, sino para la vida. Además por su paciencia, constancia y persistencia para guiarme hacia las en salidas en los laberintos. A Gabriel por darme la oportunidad de dedicarme a la investigación e instruirme desde su experiencia insoslayable en aspectos estratégicos profesionales.

A Flor por convidarme de sus dulces pétalos y por perfumar cada parte de mi ser con el mas sincero y sano amor. Por ser un alero cuando llueve y dos alas cuando hay sol. Que este camino hubiese sido árido y desolado sin ella. A Máximiliano por estar siempre latente en mi pensamiento, convertir las palabras en aves y despertarme un sin fin de ideas. Por enseñarme la senda de la filosofía, e iluminar el portal donde un punto es la inmensidad, y un segundo la eternidad.

Agradezco enormemente a mis compañeros del IIMPI y del grupo MISEs por guiarme, apoyarme y cuestionarme en este camino de aprendizaje. Por el ambiente relajado y distendido que hacen del trabajo una instancia de disfrute.

Finalmente, quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrados (CAP) de la Universidad de la República por viabilizar económicamente esta investigación. También a la Agencia Nacional de Investigación (ANII) por financiar el proyecto VioLETa "Modelado del efecto del viento sobre líneas eléctricas de trasmisión y su mitigación"que fue el pilar indispensable en este trabajo.

1

(Epígrafe:) *Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica; la voluntad*

Albert Einsetin

RESUMEN

Los sistemas de trasmisión eléctrica son frecuentemente afectados por eventos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados. Estos eventos pueden provocar su desconexión con consecuencias a la integridad de los componentes potencialmente graves, así como también a la integridad de las personas circundantes. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de salida en servicio. Otro antecedente de este tipo fenómenos, se remonta al 10 de marzo de 2002 cuando una tormenta convectiva afectó un área de alrededor 6500 km^2 en el sur del país ("El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay)", s.f.). La tormenta causó una destrucción masiva para el país colapsando 19 torres de trasmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV pertenecientes a la empresa La Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas (UTE). De igual modo, unos 700 edificios y 1250 techos de hogares fueron destruidos según (Durañona, 2015). El costo de reparación de las torres se estimó en 2 millones de dólares y en simultaneo se gastaron unos 10 millones de dólares destinados a suplir la red con energía geotérmica, proveniente de combustibles fósiles (Duranona et al. 2019). Esta problemática en parte responde a la falencia de las normas internacional como ser *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 para considerar fuerzas debidas a fenómenos de vientos extremos.

Este trabajo apuntala la creación de una herramienta capaz de reproducir el comportamiento de conductores eléctricos, sometidos a perfiles de viento tipo tormenta convectiva. Para esto, se extendió un planteo de la formulación corrotacional de vigas 3D, considerando componentes aerodinámicos y se implementó en la herramienta de software libre *Open Non-linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Con este cometido se desarrollaron tres modelos: el primero de ellos valida la formulación para un ejemplo clásico en el área corrotacional, el segundo es una modificación de un modelo presentado en el trabajo de (Foti y Martinelli, 2016), referente en simulación estructural de conductores eléctricos, donde se observan resultados semejantes. Por último, se construye un ejemplo compuesto por tres torres y seis conductores, integrando elementos de viga con barras, atacados por un perfil de corriente descendente, extraído

de un estudio experimental en el norte de Alemania publicado por Stengel y Thiele, 2017.

Finalmente, se concluye que los resultados generados representan un disparador para seguir profundizando en la temática, generando capacidades del software para emular el fenómeno de manera más precia y poder así, incluirlo como una herramienta complementaria durante el diseño de sistemas de trasmisión. Según los resultados obtenidos, se observa como las tormentas convectivas afectan severamente a las instalaciones, pudiendo causar potenciales prejuicios graves. De esta forma la metodología planteada en esta tesis constituye el puntapié inicial para la publicación de un trabajo donde se extiende la formulación corrotacional de vigas 3D considerando fuerzas aerodinámicas sobre los elementos.

Palabras claves:
Elementos de viga corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica estructural, Cables de alta tensión, Transmisión electrica.

Lista de figuras

Lista de tablas

Lista de símbolos

$\ddot{\mathbf{w}}$ Aceleración angular en coordenadas globales.

$\ddot{\mathbf{u}}$ Aceleración lineal en coordenadas globales.

α_{HHT} Parámetro alpha de HHT característico del método HHT.

α_{NW} Parámetro alpha característico del método de Newmark.

Φ Ángulo de balanceo de la cadena aisladora.

β_{NW} Parámetro beta característico del método de Newmark.

$\mathbf{G}$ Centroide de la sección G.

x Distancia respecto al nodo 1 de la sección con centroide G.

$\mathbf{x_1}$ Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.

$\mathbf{x_2}$ Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.

Δ_T Incremento temporal.

ρ Densidad del aire a presión atmosférica y una temperatura de 20ºC.

d_c Diámetro del conductor considerandolo cilíndrico.

$\mathbf{d_g^P}$ Desplazamientos globales para un punto P.

$\mathbf{u_g^P}$ Desplazamientos lineales globales para un punto P.

$\mathbf{w_g^P}$ Desplazamientos angulares globales para un punto P.

$\mathbf{d_l^P}$ Desplazamientos locales del nodo P.

$\mathbf{d_r^P}$ Desplazamientos lineales locales del nodo P referenciados a la configuración de deformación rígida.

$C_d(Re)$ Coeficiente de drag en función del coeficiente adimensionado de Reynolds.

$\mathbf{E_1}$ Vector 1 de la base isoparamétrica.

$\mathbf{E_2}$ Vector 2 de la base isoparamétrica..

$\mathbf{E_3}$ Vector 2 de la base isoparamétrica.

K Energía cinética del elemento.

fl_1 Fuerza axial del elemento que integra el nodo i.

F_d Fuerza de drag sobre el conductor.

$\mathbf{f_l^{int}}$ Fuerza interna del elemento en coordenadas locales.

$\mathbf{f_g}^{\mathbf{int}}$ Fuerza interna del elemento en coordenadas globales.

F_l Fuerza de lift sobre el conductor.

$\mathbf{f_{vis}}$ Vector de fuerzas viscosas.

$\mathbf{I}_\rho$ Tensor de inercia del elemento en su configuración deformada.

$\mathbf{f_k}$ Fuerza inercial en coordenadas globales.

$\mathbf{u_0}$ Condición inicial en desplazamientos aplicada sobre el conductor.

$\mathbf{K}$ Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.

$\mathbf{C_k}$ Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.

$\mathbf{M}$ Matriz de masa consistente del elemento en coordenadas globales.

$\mathbf{K_g}$ Matriz tangente del elemento en coordenadas globales.

$\mathbf{K_l}$ Matriz tangente local del elemento en coordenadas locales.

$\mathbf{C_{vis}}$ Matriz viscosa.

M_1^i Momento flector del nodo i en la dirección local 1.

M_2^i Momento flector del nodo i en la dirección local 2.

M_3^i Momento torsor del nodo i.

$\mathbf{R_0}$ Matriz de rotación de referencia.

$\mathbf{R_1^g}$ Matriz de global del nodo 1.

$\mathbf{R_2^g}$ Matriz de global del nodo 2.

$\mathbf{r}$ Vector de fuerzas residuales.

$\mathbf{R_r}$ Matriz de rotación de configuración rígida.

$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$ Matriz de rotación de configuración local del nodo i.

$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{1}$ Matriz de rotación de configuración local del nodo 1.

$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{2}$ Matriz de rotación de configuración local del nodo 2.

$\widetilde{\mathbf{A}}$ Operador Skew aplicado al variable A.

$\dot{\mathbf{w}}$ Velcoidad angular en coordenadas globales.

$\dot{\mathbf{u}}$ Velcoidad lineal en coordenadas globales.

q Velocidad de viento en el sentido perpendicular al conductor.

w Velocidad de viento en el sentido transversal al conductor.

$\mathbf{e_1}$ Vector tangente de la configuración de referencia.

$\mathbf{e_2}$ Vector normal de la configuración de referencia.

$\mathbf{e_3}$ Vector bi-normal de la configuración de referencia.

l_n Largo del elemento deformado.

$\mathbf{r_1}$ Vector tangente de la configuración de deformación rígida.

$\mathbf{r_2}$ Vector normal de la configuración de deformación rígida.

$\mathbf{r_3}$ Vector bi-normal de la configuración de deformación rígida.

$\mathbf{t_1^i}$ Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo i.

$\mathbf{t_2^i}$ Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.

$\mathbf{t_3^i}$ Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.

$\overline{\theta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{P}}}$ Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo P.

$\bar{u}$ Desplazamiento axial en coordenadas locales del nodo P.

Lista de siglas

Lista de siglas

CD Corrientes Descendentes.

HHT Hughes, Hilbert y Taylor.

IEC International Electrotechnical Commission.

MEF Método de Elementos Finitos.

N-R Newton Raphson.

TC Tormentas Convectivas.

UNIT Instituto Uruguayo de Normas Técnicas.

UTE La Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas

Tabla de contenidos

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Debido a las condiciones climáticas especificas del territorio uruguayo. Se produce una atmósfera inestable provocada por el choque de masas de aire calientes, originadas en los trópicos, y corrientes de aires fríos que migran desde el polo. Este eminente peligro, produce vientos extremos no sinópticos sumamente violentos y destructivos. Un registro trágico de este tipo de eventos, sucedió el 10 de marzo del 2002, cuando una tormenta convectiva afectó un área de alrededor 6500 km^2 en el sur del país "El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay)", s.f. En el norte de Montevideo los anemómetros capturaron velocidades de ráfaga de 34 m/s y de acuerdo con el nivel daño causado, se estimaron en determinados puntos podría haber superado los 56 m/s. Fue tal el nivel de devastación, que 19 torres de trasmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV colapsaron, además de unos 700 edificios y 1250 techos de hogares que fueron destruidos (Durañona, 2015). No solo afectó a las construcciones, sino también muchos productores rurales y sus estancias productivas, derribando invernaderos, montes y plantaciones. El costo de reparación asociado con las torres es estimo en 2 millones de dólares y en simultaneo se gastaron unos 10 millones de dólares destinados a suplir la red con energía geotérmica, proveniente de combustibles fósiles. El presupuesto estimado a los daños en total asciende a la suma de 27 millones de dólares según Duranona et al. 2019.

Las líneas de trasmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por eventos climáticos severos como Corrientes Descendentes. (CD) o tornados. Estos eventos pueden provocar su desconexión, con consecuencias potencialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de salida en servicio por esta causa en una de las principales líneas de Uruguay (Palmar-Montevideo). Este tipo de fenómenos inducen fuertes movimientos en los cables, provocando un balanceo excesivo de los mismos. Estas amplitudes desmesuradas implican vulneraciones en la aislación del sistema, al aproximar sus cadenas aisladoras a las torres. Produciéndose descargas a tierra e indeseables interrupciones del suministro que han afectado a la capital durante varias horas. Una ilustración del fenómeno se encuentra la Figura 1.1.

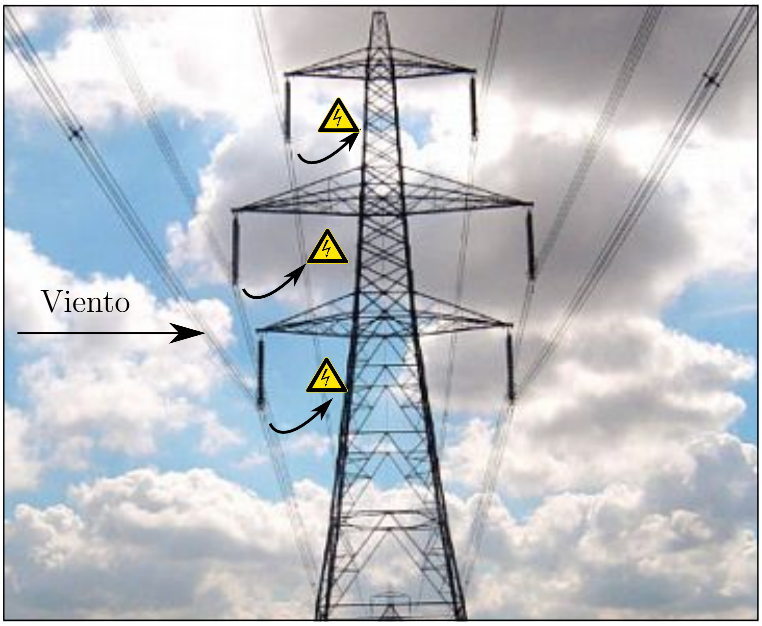


Figura 1.1: Ilustración de balanceos excesivos. Fuente: Noticias24

El modelado estructural de vientos severos sobre líneas de transmisión eléctrica, ha sido abordado por la comunidad científica internacional desde diversas ópticas, principalmente a lo largo de las últimas cuatro décadas. Se han presentado modelos semi-analíticos, análisis experimentales en túneles de viento y de campo, más recientemente utilizando métodos computacionales.

Esto plantea la necesidad de contar con herramientas computacionales que sean capaces de representar la respuesta de estos sistemas ante perfiles de viento no sinópticos. Este es el principal objetivo de este trabajo, profundizar en la bibliografía para el modelado estructural de conductores y crear un modelo robusto, consistente capaz de simular líneas de trasmisión eléctrica atacadas por vientos extremos.

1.2. Enfoque

Numerosos autores de la literatura han acuñado sus investigaciones en elementos multinodales de barras como ser: Desai et al. 1995, Yan et al. 2009, los trabajos de Gani y Légeron, 2010 y Yang y Hong, 2016. No obstante, debido a la inherente rigidez a flexión en el comportamiento estructural del cable, deben considerarse vigas tridimensionales. Por otra parte, los grandes desplazamientos y rotaciones que se presentan durante las trayectorias en tormentas, conducen a implementar un modelo de vigas apto para este tipo de solicitaciones. El abordaje corrotacional es idóneo, pues desde su base matemática, se construye desacoplando la deformación local con deformaciones cinemáticas de cuerpo rígido para grandes amplitudes. Este es el atractivo fundamental de la propuesta corrotacional, su versatilidad ante diferentes formulaciones locales, permitiendo incorporar distintos tipos de elementos fácilmente.

El campo de la metodología corrotacional es muy amplio, pero debido a la claridad y contemporaneidad en el desarrollo de sus publicaciones, se eligió un grupo de investigadores específicos. En (Le et al. 2011) se publicó una formulación para vigas 2D, en conjunción con la parte estática desarrollada por el Dr. Jean Marc Battini en (Battini y Pacoste, 2002). La extensión dinámica de este último devino en el artículo de (Le et al. 2014), que fue el artículo fuente de la implementación central de esta tesis. Lo innovador y atractivo se centra en el desarrollo analítico consistente, no solo para los términos estáticos, sino también dinámicos. Además, según la opinión del autor en comparación con otras formulaciones, se obtienen resultados certeros y confiables con un menor número de elementos, ventaja principal para modelar grandes dominios como las líneas de alta tensión.

Debido a las ventajas mencionas, esta metodología es implementada en diversos campos de aplicación ingenieril. Entre ellas se encuentran: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos. En particular, la formulación de (Le et al. 2014) ha sido aplicado en trabajos recientes en el área de ingeniera marina, robótica y civil en (Albino et al. 2018), Asadi y Johansson, 2019 y Viana et al. 2020. Esto evidencia que la metodología es potente para diversos campos de estudio. No obstante, según el conocimiento del autor, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución de problemas dinámicos. Asimismo, esta no ha sido aplicada conductores sometidos por vientos extremos, donde se desarrollan grandes desplazamientos en distancias de centenas de metros.

Según el exhaustivo análisis realizado en el estado del arte, aun no se observan extensiones de la formulación corrotacional de Le et al. 2014 considerando términos aerodinámicos dependientes del flujo de viento aplicado, incorporando factores viscosos de fuerzas externas dependientes de los desplazamientos. Por otra parte, tampoco hay registros de los detalles de programación para su implementación computacional.

En la temática específica de conductores, la tesis del autor Foti (2013) destaca por su nivel de detalle utilizando elementos corrotacionales de vigas 3D. Sin embargo, sus estudios experimentales mostraban discordancias respecto al modelo, debido a dos factores, las actualizaciones angulares mediante aproximaciones incrementales y el comportamiento de histéresis inmanente al sistema. En trabajos posteriores del mismo autor, se corrigen las limitaciones y modelan los deslizamientos internos de las hebras y cómo influyen sobre el fenómeno Foti y Martinelli (2018). La respuesta de estos modelos sometidos ante Tormentas Convectivas. (TC) aun es una interrogante.

1.3. Estructura de la tesis

Este documento consta de cinco capítulos: Introducción, Estado del arte, Preliminares, Resultados Numéricos y Conclusiones. Inicialmente en el Capítulo 2 se realiza un recorrido histórico en materia de simulaciones aplicadas a conductores eléctricos, con un enfoque computacional y semi analítico. También se narran los diferentes estudios locales e internacionales sobre vientos extremos, para concluir en un tour dentro del abordaje corrotacional. Continuamente en el Capítulo 3, con el objetivo de acercar la metodología corrotacional al lector, se presenta una descripción con foco conceptual, según lo propuesto por la bibliografía principal de Le et al. (2014). Una vez presentada dicha formulación, se despliega la metodología utilizada para esta investigación en el Capítulo 4. Aquí se detallan las hipótesis fundamentales del modelado estructural y de viento, explicándose las condiciones de borde impuestas y un análisis sobre el amortiguamiento aerodinámico. En este mismo capítulo, se desarrolla la implementación del algoritmo numérico utilizado con la extensión de fuerzas viscosas y las estructuras de pseudocódigo referentes a los principales scripts de la implementación computacional en el software ONSAS[1].

Posteriormente, se resuelven tres aplicaciones numéricas en el Capítulo 5. La primera de ellas persigue el objetivo de validar numéricamente la implantación. Este ejemplo es un modelo clásico en la literatura corrotacional donde se observan resultados acordes en contraste con los presentados en Le et al. 2014. De manera subsiguiente, se modela un ejemplo presentado por los autores Foti y Martinelli, 2016. Este consiste en un conductor eléctrico sometido a una carga artificial, extraída de un viento tipo capa límite atmosférica. Por último, se presenta un problema realista de dos vanos consecutivos, compuesto por tres torres de alta tensión modeladas con elementos de barra tipo Green y seis conductores por elementos de viga corrotacional. El sistema de trasmisión eléctrica, con geometrías y propiedades reales, es atacado por un perfil de viento capturado durante una CD en el norte de Alemania por Stengel y Thiele, 2017. Finalmente en el Capítulo 6 se sintetizan los principales resultados enriquecedores de esta investigación, además de plasmarse eventuales trabajos a futuro, con lineamientos para profundizar en la temática y sus posibles aplicaciones en el mercado de distribución eléctrica.

[1]https://github.com/ONSAS/ONSAS/

Capítulo 2

Estado del arte

Este capítulo incluye la revisión de la literatura, de los enfoques, teorías o conceptos pertinentes en que se fundamenta la investigación. Primeramente en la Sección 2.1 se presenta un relato cronológico del estudio de los cables desde el crepúsculo del Siglo XVIII. A continuación en la Sección 2.2 se expone un recorrido a partir de los años 60's vinculado a simulaciones aplicadas a conductores de alta tensión. Consecutivamente en la Sección 2.3 se describen los fenómenos de CD que afectan las líneas a partir de trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas y otros fenómenos de viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades aeroelásticas numerosos trabajos han estudiado dicha temática y un breve recorrido por ellos se presenta en el apartado 2.4. Por último, en la Sección 2.5 se recorre la metodología corrotacional y los principales autores que desarrollaron esta formulación.

2.1. Historia de la temática

El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena del libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el 1657 revolucionó el conocimiento científico en occidente, tal es así que un siglo y medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino en la aplicación de las principales invenciones de la revolución industrial.

El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas de la época, Brook Taylor,d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al sistema masa resorte en los albores del siglo XVII (Starossek, 1991).

Haciendo uso del problema abstracto elemental del oscilador masa resorte en 1788 Lagrange y otros autores anteriores, hallaron la solución para las vibraciones de un cable inextensible compuesto de un número finito de elementos, de masa despreciable, sometido a la acción de fuerzas externas. Posteriormente, Poisson en 1820 presentó la ecuación diferencial que debería de cumplir el sistema en el continuo, sin embargo las herramientas matemáticas analíticas desarrolladas hasta la fecha no permitían de hallar la solución general a dicha ecuación.(H. M. Irvine y Caughey, 1974)

No fue hasta 80 años mas tarde que en 1868 Routh presentó una solución exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva que describe un punto sobre una esfera girando a velocidad angular constante) Routh et al. 1955. En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del cable, el primero en su época fue Kloppel y Lie (Klöppel y H., 1942), a partir de esto Pugsley en 1949 determinó experimentalmente, para una relación entre la deflexión y el largo de vano entre 4 y 10 metros, desarrolló una fórmula para las frecuencias naturales de vibración (Pugsley, 1949). En 1953 considerando un cable inextensible Saxon y Cahn resolvieron la expresión teórica, formulada por Poisson, de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue vital, ya que permitía calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos torres Saxon y Cahn, 1953.

Tal es así que seguridad de las personas e integridad de los distintos elementos circundantes imprimen criterios de seguridad sobre el descenso de la línea. Actualmente la tensión del conductor durante el montaje, se ajusta de manera tal, que la altura mínima respete un valor exigido por norma. Esta imposición depende principalmente del grado de urbanización, los umbrales de contaminación magnética y la topografía del terreno.

A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los de un sistema masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. En el año 1974 H. M. Irvine y Caughey, 1974 halló el rango transitorio entre ambos estados, para corregir dicha discontinuidad se requiere una inclusión completa del modelo de elasticidad del cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables horizontales (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio deflexión-largo del vano entre 1/8 y 0. El mismo autor Irivine extendió lo postulado para conductores con extremos desnivelados, aun bajo la hipótesis de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor (H. M. Irvine y Caughey, 1974).

A posteriori, el mismo investigador profundizó sobre la dinámica con extremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movimiento tipo terremoto (H. M. Irvine y Griffin, 1976) y (M. Irvine, 1978). La teoría postulada por Irvine fue confirmada por Triafani en 1984 para distintos casos experimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando en cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al movimiento Triantafyllou, 1984.

Autores contemporáneos estudiaron en simultaneo condiciones de borde dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de solicitaciones pueden inducir vibraciones y respuestas de resonancia. Los pioneros en la materia fueron Davenport y Steels ((Davenport, 1965)) en 1965. Resultados más refinados se obtienen por Starossek (Starossek, 1991) . En estas se exponen formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los cables sometidos a la acción del viento, mas estos trabajos no se desarrollan contemplando grandes desplazamientos ni tampoco se consideró no linealidad material.

Ese tipo de solicitaciones revelaron el fenómeno de "Galloping", este refiere a una respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del cable entra en régimen y en consonancia con las fuezas ejercidas por el viento. Teoricamente las geometrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de fenómenos. Sin embargo, debido a la existencia de imperfecciones constrictivas y durante el montaje, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte de energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respuesta se realizaron por Simu, quienes hallaron condiciones de velocidad crítica eólica en función de coeficientes experimentales, obtenidos mediante ensayos consumados en túnel de viento. (Simiu y Scanlan, 1986)

Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al problema de conductores eléctricos. El advenimiento del (Método de Elementos Finitos. (MEF)) aplicado a armaduras en la década del 40 y 50 constituyó una herramienta sumamente potente e innovadora. Esto provocó que en los años venideros se desarrollaran vastas metodologías numéricas incorporando diferentes elementos y algorítmos de resolución computacional. En particular, en Italia un grupo de investigadores pertenecientes a La Universidad de Milan, aplicaron métodos numéricos a la simulación de conductores insoslayables. Un recorrido cronológico y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos científicos se presenta a continuación en la Sección 2.2.

2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de trasmisión eléctrica

Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo por Di Pilatto y Martinelli estaban basados en elementos trinodales isoparamétricos. En esta metodología se asumió las hipótesis de pequeñas deformaciones unitarias, considerandose para el desarrollo no linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, este tipo de modelos presenta la debilidad de no satisfacer las condición de equilibrio dinámico para específicos tipos de balanceo.(Martinelli y Perotti, 2001 y Martinelli y Perotti, 2004). En consonancia, estudios contemporáneos evidenciaban que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que despreciar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predicciones erróneas sobre las frecuencias naturales de mayor orden. Tal y como se remarca en Koh y Rong, 2004.

Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007. En este trabajo el cable se modelaba utilizando abordajes corrotacionales. Di Pillato presentó una formulación considerando elementos de viga tridimensionales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e inerciales teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones en coordenadas globales. Sin embargo, esta formulación basada en lo propuesto por (Oran, 1973) tiene como desventaja principal que no es fiable ante grandes rotaciones locales de los nodos, como también, antes significativos incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente para capturar dinámicas complejas resulta necesario e ineludible discretizar el dominio temporal y especial pequeños intervalos. Lo que conlleva a costos computacionales desmedidos.

El mismo autor y su equipo corrigieron las limitaciones relacionadas con los pequeñas rotaciones nodales al año siguiente en su trabajo: Di Pilato et al. 2008.La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la configuración deformada utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco el impedimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga, se resuelve aplicando la metodología propuesta Simo and Vu-Quoc en Simo y Vu-Quoc, 1988.

Conforme las simulaciones numéricas avanzaron sobre la materia, la especificación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó. Otro aspecto impulsor en el área se basaba en que los resultados experimentales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos sobre el comportamiento no holomónico del fenómeno. Esto refiere a un modeló realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha temática fueron Papailou y Kutterer en sus trabajos de la década del noventa Papailiou, 1997 y Kutterer y Starossek, 1992.

Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos escenarios, “full slip”donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas. El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre de ”full stick”. En esta situación el conjunto se comporta como un rígido, he aquí la razón de su nomenclatura. En Papailiou, 1997 se establece la tensión máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. Estos resultados fueron contrastados con un análisis experimental.

Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones se traducen en momentos y fuerzas internas a cada cable que conforma al conductor. Estas se pueden vincular a la curvatura o deformación axial del conjunto. A partir de esto, se obtiene la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y momentos internos en función de la deformación y curvatura del conductor.

Esta matriz depende del estado en que se encuentre la dinámica del cable. Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen “full slip.º “full-sitck”la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso “full-stickçuando ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el conductor, la matriz de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente no se le puede atribuir un potencial, esto se asocia al comportamiento no holomónico o histéresis del fenómeno. En dicho estado un modelo de viga uniforme no es aplicable.

Con el propósito de desatollar una formulación que sea capaz de representar el fenómeno computacionalmente se publicó el articulo Foti y Martinelli, 2016. Aquí se implementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuerzas tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter simplificadoras son estudiadas en Costello, 1990 y Rawlins, 2005. Para el estudio de a los contactos radiales se asume: las superficies de contacto no se deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de contacto entre cables se pueden aproximar por una linea continua, la fricción entre los cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último que la presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjunto con la condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores limites para la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado sobre la pérdida de rigidez súbita que ocurre con el conductor, al producirse deslizamiento relativo al interior del elemento. Esta disminución abrupta de rigidez puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga, esto puede intensificar o agudizar la problemática de balanceos excesivos. Estos movimientos son inminentes para determinadas condiciones atmosféricas, entre ellos las TC. Estas CD han sido objeto de estudio en los últimos 50 años por expertos en ingeniería del viento. En la siguiente Sección se presenta una somera descripción de la literatura investigada.

2.3. Tormentas convectivas

Las TC son fenómenos atmosféricos que generan inestabilidades en el flujo debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad. Cuando estas se ocasionan, masas de aire caliente ascienden hasta la parte superior de la nube, quedando depositado como una especie de domo o cúpula al interior de la misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al interior de la tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodeaba por debajo. Esta corriente desciende a velocidades intensas e impacta con vehemencia sobre la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de anillo vorticoso que puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h Fujita (1985). En este trabajo se establecen escalas espaciales entre 40 m y 4 km. No obstante recientes estudios plantean que se explayan en un diámetro entre 1 y 5 km Darwish et al. (2010).

Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de trasmisión eléctrica, ciertas normativas se estriban en perfiles de vientos clásicos (sinópticos)tipo capa límite atmosférica. Esto se traduce en una subestimación de las presiones que se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma International Electrotechnical Commission. (IEC) 60826. Esto pone en riesgo al sistema es atacado por tornados o CD. La probabilidad de ocurrencia es baja para dominios de corta longitud, pero cuando las lineas discurren largas distancias estos vientos extremos suelen suceder esporádicamente Ang y Tang (1984).

La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de daños vinculado a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores contemporáneos el diámetro de desarrollo del anillo se encuentra intrínsecamente relacionadas con dicha altura Holmes (2002), Abd-Elaal et al. 2013. Complementando a esto, Stengel y Thiele (2017) en Alemania capturó este fenómenos utilizando anemómetros colocados en lineas de trasmisión. Esto permitió establecer un perfil de velocidades media y la función de coherencia relacionada con la turbulencia a partir de datos experimentales. De este artículo se extrajo el perfil de vientos implementado en este trabajo.

En nuestro país investigadores integrantes del Grupo de Eolo Dinámica perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante TC trabajo de campo exhaustivo. El primer informe relevado en el articulo Durañona y Cataldo, 2009 se realiza un calculo del angulo de balanceo, simplificando cauasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio de la fuerza de viento por unidad de peso. En este trabajo se mostró que para valores de velocidad de viento de 97.9 m/s el conductor alcanza los 85º.

Dados los alarmantes resultados de Durañona y Cataldo, 2009 posteriormente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha en el trabajo (Durañona, 2015). En este estudio se atisba que fenómenos de CD producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minuto que los vientos tipo capa límite atmosférica. El valor máximo de velocidad registrado alcanzó los 40 m/s en promedio de 10 minutos. En el año 2019, este grupo de investigadores presentó un trabajo relevante donde se resalta que los vientos extremos afecta principalmente al norte del país Duranona et al. (2019). En este se sugiere que la norma (Instituto Uruguayo de Normas Técnicas. (UNIT):50-84, 1984) debe ser actualizada incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos no sinópticos. Pero los eventos de vientos extremos no son los únicos que afectan a los conductores, también pueden ocurrir inestabilidades estructurales inherentes a interacción entre fluido-estructura.

2.4. Análisis semi-analíticos de conductores

Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pueden experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud, principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente estudiada por distintos autores de la literatura. Como por ejemplo Blevins y Vibrations, 1990, Jones, 1992. Para vigas de gran esbeltez, o elementos de cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto lineales como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o dos grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consisten en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal y verificar estos resultados en la práctica. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática destaca el trabajo Chabart y Lilien (1998), en este se propuso una aproximación innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser: la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en la fuerza lift ante la presencia de excentricidades geométricas.

El fenómeno Galloping presenta las frecuencias del movimiento excesivo suelen ser bajas y son exuberantes a simple vista. Este fenónmeno devastador tiene consecuencias severas sobre todo en lineas que se encuentran en clímas gélidos, recientemente en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur de Argentina y las imágenes son impactantes (Ver vídeo). La principal causa del fenómeno es el ataque de vientos intensos y constantes. La presencia de irregularidades geométricas en las lineas induce inestabilidades aerodinámicas y cuanto mayor sea la cantidad y discontinuidad de las excentricidades más aguda será la respuesta inducida. Las velocidades requeridas de viento suelen ser mayor a 7 m/s y las frecuencias de respuesta del conductor suelen oscilar entre los 0.15 y 1 Hz.

Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente aproximación de las lineas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separadores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, si los relativos entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elementos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en inglés (Torsional Damper Detuner) gira relativo al conductor anulando las formas irregulares producto de la formación de hielo.

En el artículo Jones, 1992 se halló la solución a la ecuación de movimiento, despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los autovalores que permiten detectar analíticamente bajo que condiciones del sistema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente mayor a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos e indeseables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje vertical. Esto amenaza la seguridad y fiabilidad del sistema ya que esta componente, es limitada durante la instalación a través de cálculos estáticos. Al generarse desplazamiento dinámicos desmedidos, ya no hay garantías de salvaguardar la salud de las personas y los componentes cercanos.

Los estudios de Jones y Blevins, se fraguaban en premisas de linealidad geométrica. Sin embargo, autores han destacado que las efectos no lineales juegan un rol importante en el desarrollo, como ser: las referencias Luongo et al. 1984 y Lee y Perkins, 1992. En el trabajo propuesto por Lee se incluyen componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento del conductor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un modelo lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y tercer orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numericamente la ecuación diferencial del movimiento.

Esta problemática fue abordada unos años mas tarde, por el trabajo publicado Luongo y Piccardo, 1998. En este artículo se hallaron las soluciones no lineales de resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se contrastaron dos soluciones arrojadas por disimiles modelos, uno de pequeños desplazamientos y otro incorporando no linealidades geométricas. En este trabajo se distinguen dos régimes del movimiento, el primero de ellos nominado crítico refiere a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos no presetan gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayectorias se amplifican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se concluye que la solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable para valores de velocidad media de viento correspondiente al estado crítico. Posteriormente al incrementar la velocidad de viento y se desata el fenómeno post-crítico y el incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible para representar cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles simétricos, la velocidad crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis lineal.

Según los autores del trabajo Luongo et al. 2007, hasta la fecha de publicación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos aplicados eran exiguos, en espacial para el régimen post-critico del Galloping. Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de angulo de ataque y velocidad relativa entre el conductor y del fuljo. Además eran despreciadas las rigideces a torsión del los elementos, estos se debe a que la rigidez según el eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez felxional, principalmente por un argumento de esbeltez y disposición geométrica del conductor de estudio.

El propósito de Luongo et al. 2007 fue proponer un elemento de viga orientado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este a torsión. Estos términos representan diferencias notorias para secciones antisimétricas en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados numéricos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el objetivo de hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró, que el ángulo de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones críticas del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuenta los modos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la inclusión del angulo puede influir significativamente en el valor de velocidades críticas aeroelásticas.

A psoterirí, en el trabajo Luongo et al. 2009 se profundizó en los efectos del angulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como destacado resultado, se probo que mientras la rigidez de torsional no afecta significativamente los desplazamientos traslacionales, en cortaste si lo hace a la solución del angulo de giro. En especial para perfiles sin simetría de revolución. La consideración del balanceo en el lift y en el ángulo de ataque, afecta notoriamente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades de la sección aerodinámica y por tanto su velocidades críticas. Por ende, se resalta la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas para el modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

2.5. Análisis corrotacional de vigas

Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplicaciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos y terrestres. A pesar de las formulaciones “ Updated z “Total Lagrangiançlásicas, dentro de estas últimas el abordaje corrotacional es idóneo para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamientos den servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de Nour-Omid y Rankin, 1991 quienes sentaron las bases del método.

Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente considerándolo como un rígido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario que permite localizar al elemento en el espacio.Mientras que 0para la componente deformable se considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo sistema de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente. Además, destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento representa términos de no linealidades geométricas mientras que la deformables incorpora no linealidad materiales.

El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La variación de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a esta propiedad anti-simétrica, esta característica depende principalmente del des-balanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al resolver el sistema mediante métodos numéricos como (Newton Raphson. (N-R)). Los autores Nour-Omid y Rankin, 1991 con el objetivo de optimizar el método, demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de convergencia cuadrático.

Debido a voluble capacidad de la metodología corrotacional, en los años posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de elementos y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron al considerar funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentrada y elementos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener de manera sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inerciales. Como habrá notado el sagaz lector, este cálculo conduce ineludiblemente a la matriz de masa constante de Timoshenko. Por otra parte, interpolaciones lineales asumen que los desplazamientos transversales al eje de la viga son nulos, esta hipótesis reduce el campo de aplicación del modelo, en especial para mallas de bajo numero de elementos, ya que la matriz de masa tangente y el vector de fuerzas inerciales no representan las componentes omitidas.

En la referencia De Borst et al. 2012 se sugiere que el proceso de obtención requerido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado intrincado, debido a su grado de complejidad geométrico. El autor propone utilizar funciones de interpretación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al elemento de Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan controversiales a la hora de derivar el vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consideró un modelo simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones cúbicas para el vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una matriz de masa constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero numéricamente eficiente. Esta forma de proceder también se aplico en Pacoste y Eriksson, 1997.

En paralelo otros autores, desarrollaron eficientes elementos de viga bidimensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar estructuras en grandes desplazamientos bajo cargas estáticas (Battini y Pacoste, 2002 Alsafadie et al. 2010). Estos autores afirman que al seleccionar adecuadamente el largo de elemento, los desplazamientos locales son significativamente menores que los asociados a la componente rígida. Por esta razón, se compararon resultados con diferentes número y tipos de elementos para los mismos ejemplos. Estos estudios, en conjunto con lo publicado por Alsafadie et al. 2010, concluyen que formulaciones cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión analítica hacia las componentes dinámicas.

Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos años. El primero de ellos fue Behdinan et al. 1998 a finales de siglo, pero las funciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no eran consistente con la formulación canónica del método corrotacional propuesta por Simo y Vu-Quoc (1988). De hecho, según el conocimiento del autor, no existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna sino también, las componentes inerciales.

Años mas tarde, Le et al. 2011 publicaron una formulación para vigas 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación independiente ÏIE"de la referencia Reddy, 1997. Estos elementos fueron desarrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basadas en los polinomios de Hermitian, con el propósito de incluir consideraciones adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algunas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la literatura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los desplazamientos locales.

Los mismos autores en conjunto con Lee extendieron la formulación en su trabajo del 2014 Le et al. 2014 agregando una dimensión, este desarrollo se vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmutativiad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensables a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo, se presenta la parte estática desarrollada por Battini en Battini y Pacoste, 2002, además de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuerzas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se seleciono el clásico método (Hughes, Hilbert y Taylor. (HHT)) con los parámetros convencionales (Hilber et al. 1977). Este algoritmo es utilizado por reconocidos software comerciales (Abaqus,Lusas) e implica una disipación sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, mas presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

En Le et al. 2014 se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar la nueva formulación con otros dos enfoques. La primer comparación, se deriva de la nueva formulación reemplazando las intercalaciones cúbicas por lineales. El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por Simo y Vu-Quoc, 1988. En base a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones: todas las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no así con mayados gruesos. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente mas imprecisas en comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el modelo. La formulación corrotacional es ligeramente mas lento (12 %) respecto a lo descrito por Simo and Vu-Quoc . Sin embargo, bajo ciertas condiciones altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo.

Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo es un atractivo para distintos investigadores del área. En Albino et al. 2018 Albino modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por materiales graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta mar. En 2019 Asadi y Johansson, 2019 simularon palas de aerogeneradores utilizando elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas el tren de trasmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala. En el mismo año el autor Barzanooni et al. 2018 atacó la problemática de anillos y interacciones de contacto aplicado a robots industriales también con la formulación propuesta por Le et al. 2014.

Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación central de este trabajo. Donde se desarrollan grandes desplazamientos y términos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando softwares para ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y mecánica. No obstante, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución de problemas dinámicos.

Capítulo 3

Preliminares

A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de la formulación corrotacional según lo propuesto en (Le et al. 2014). La temática se abordara progresivamente según la naturaleza de las variables. En primera instancia se describen la caracterización de magnitudes cinemáticas globales y locales en las Secciones 3.1 y 3.2. Una vez ahondadas las variables asociadas al movimiento se expone como, a partir de estas, se deducen las variables estáticas y dinámicas en la Sección 3.3.

3.1. Cinemática corrotacional

El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas representa grandes rotaciones y desplazamientos dados por la dinámica de un elemento rígido. La segunda componente tiene en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material. Este enfoque suele aplicarse al analizar deformaciones estáticas. Resulta intuitivo imaginar en un inicio como se deformaría la estructura de manera rígida para luego aplicarle la componente no rígida. Ahora bien, en este tipo de formulaciones, hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten representar los desplazamientos de cada una de las componentes.

Para el abordaje de este análisis debe comprenderse una serie de rotaciones consecutivas ilustradas en la Figura 3.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos, se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa el elemento en su estado indeformado o de referencia. El color naranja identifica a la componente de deformación no rígida mientras que en gris se ilustra la configuración de deformación rígida del elemento.

Para realizar traspasos de una componente a otra se definen una serie de transformaciones. La primera de ellas nominada $\mathbf{R_0}$ lleva al elemento desde su estado paramétrico a su estado de referencia. A partir de esa configuración podemos hallar la geometría deformada aplicando las transformaciones $\mathbf{R_1^g}$ o $\mathbf{R_2^g}$, dependiendo el nodo de interés. Esta no es la única forma de hallar el estado deformado del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa consiste dado un nodo i al interior del elemento, aplicar consecutivamente las transformaciones $\mathbf{R_r}$ y $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$ encontrando así el estado deformado partiendo desde su configuración de referencia.

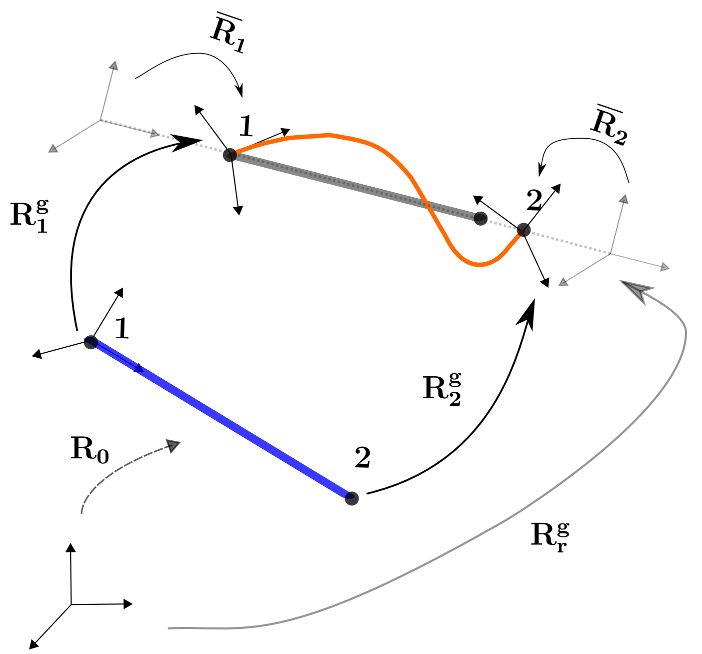


Figura 3.1: Rotaciones a cada configuración.

A partir de las definiciones descritas anteriormente e ilustradas en la Figura 3.1, resulta clarificante destacar los argumentos sobre la nomenclatura seleccionada. En primer lugar, la notación con supra- indice “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a dicha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cuales es la configuración deformada partiendo del sistema de coordenadas isoparamétrico. Asimismo en la Figura 3.1, tanto las rotaciones locales $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{1}$, $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{2}$ como globales $\mathbf{R_i^g}$ se utiliza el sub-indice i mientras que para la rotación de deformación rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender la metodología corrotacional. Dado que componente de deformación rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del sub-indice i.

Naturalmente para encontrar la curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y traslación de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas transformaciones se pueden representar matemáticamente con la artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática puede hallarse en la publicación (Kožar y Ibrahimbegović, 1995).

En los párrafos que prosiguen se desarrollan los sistemas solidarios a los nodos ubicados en los extremos del elemento. El estudio de deformaciones locales para los puntos interiores a la viga se detalla en la Sección 3.2.

Para deducir las matrices asociadas a cada transformación resulta imprescindible definir un conjunto de bases que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de versores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 3.2.

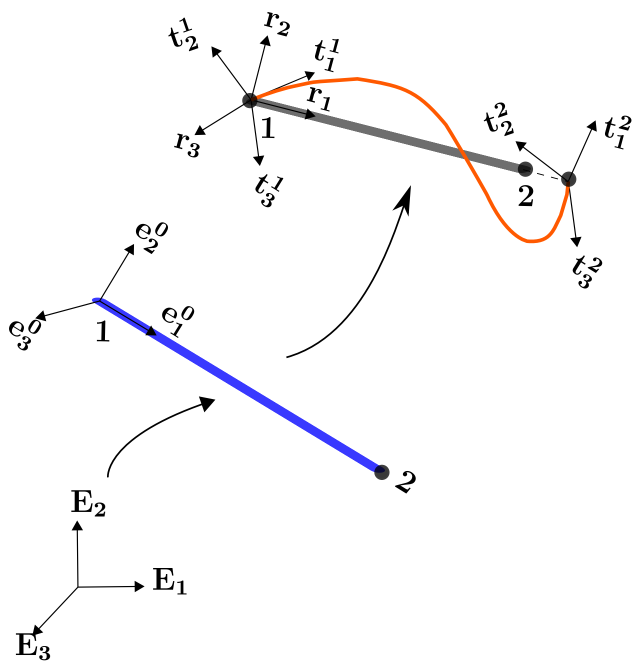


Figura 3.2: Descripción de las bases corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia auxiliar integrado por la base ortogonal ($\mathbf{E_1}$,$\mathbf{E_2}$,$\mathbf{E_3}$). Una vez ubicado el elemento en su estado inicial, las coordenadas se hallan en relación a tres vectores ($\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,$\mathbf{e_3}$). Al aplicarle la traslación y rotación de cuerpo rígido la base ($\mathbf{r_1}$,$\mathbf{r_2}$,$\mathbf{r_3}$) se anida al elemento y funciona como sistema de coordenadas en la configuración de deformación rígida. Por último, la base ($\mathbf{t_1^i}$,$\mathbf{t_2^i}$,$\mathbf{t_3^i}$) permite identificar la orientación y posición del nodo i en la configuración deformada. Se hace énfasis en el hecho de que tanto la configuración inicial como la de deformación rígida requieren un único sistema de coordenadas. Por el contrario, la configuración deformada debido a la flexibilidad del elemento, requiere dos sistemas, denotados con la letra $\mathbf{t_j^i}$ donde el supra-indice i identifica el nodo y el sub-indice j la dirección.

La definición de las bases mencionadas en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los vectores solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los versores se establece en la Tabla 3.1 a continuación:

Matriz	Vínculo de bases
$\mathbf{R_0}$	$(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3}) \rightarrow (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$
$\mathbf{R_i^g}$	$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) \rightarrow (\mathbf{t_1^i}, \mathbf{t_2^i}, \mathbf{t_3^i})$
$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$	$(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}) \rightarrow (\mathbf{t_1^i}, \mathbf{t_2^i}, \mathbf{t_3^i})$
$\mathbf{R_r}$	$(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3}) \rightarrow (\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3})$

Tabla 3.1: Caracterización de matrices en términos de la base.

Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primer fila se tiene: $\mathbf{R_0}$. $(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3})^\mathbf{T} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Al plantear este tipo de vínculos entre vectores y haciendo uso de la propiedad para matrices ortonnormales de la Ecuación 3.1 es posible deducir las Expresiones (3.2) y (3.3).

$$\mathbf{R^T} = \mathbf{R^{-1}} \tag{3.1}$$

$$\bar{\mathbf{R_i}} = (\mathbf{R_r^g})^\mathbf{T}\mathbf{R_i^g}\mathbf{R_o} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{R_i^g}\mathbf{R_o} = \mathbf{R_r^g}\overline{\mathbf{R_i}} \tag{3.3}$$

El propósito de la descripción anterior, algo intrincada y engorrosa responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones. Dado un punto arbitrario P, es posible ubicarlo en coordenadas locales y globales tal cual se muestra en la Figura 3.3. En coordenadas locales sus grados de libertad son: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra $\bar{u}$, y sus desplazamientos angulares con el nombre $\overline{\theta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{P}}}$. Los siete grados de libertad se compactan en el vector $\mathbf{d_l^P}= (\mathbf{u_P}, \overline{\theta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{P}}})$. Ahora bien, es posible desglosar el desplazamiento axial $\bar{u}$ en tres componentes según los vectores $\mathbf{r_i}$. Al vector desplazamientos de P en función de la base $\mathbf{r_i}$ se le denomina $\mathbf{d_r^P}$.

Los desplazamientos de la viga en el punto P también se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas $\mathbf{d_g^P}= (\mathbf{u_g^P}, \mathbf{w_g^P})$. Esta tienen origen en la configuración de referencia o material hasta la deformada como se muestra en la Figura 3.3.

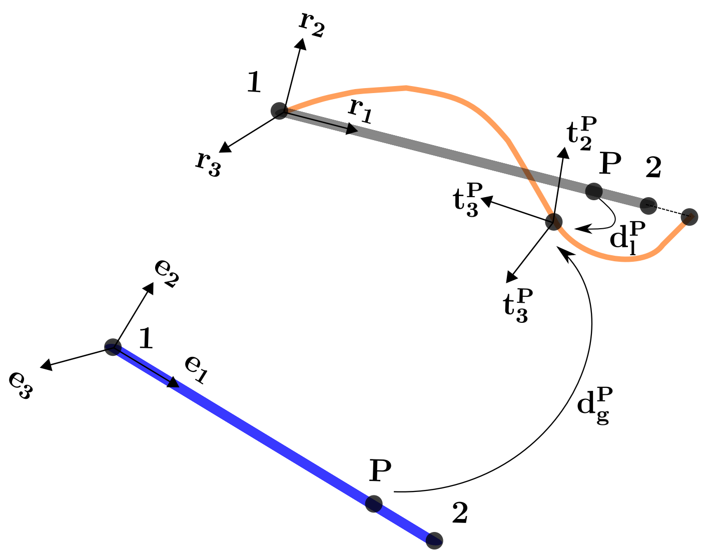


Figura 3.3: Desplazamientos locales y globales del nodo P.

Acorde con los desplazamientos presentados anteriormente, es propicio calcular sus diferenciales asociados. Estos emplearan un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. A continuación las Ecuaciones (3.4) y (3.5) definen las variaciones de los desplazamientos locales y globales respectivamente.

$$\delta \mathbf{d_l} = [\delta \bar{u}, \delta \overline{\theta_{\mathbf{1}}}^{\mathbf{T}}, \delta \overline{\theta_{\mathbf{2}}}^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}} \tag{3.4}$$

$$\delta \mathbf{d_g} = [\delta \mathbf{u_1^{gT}}, \delta \mathbf{u_2^{gT}}, \mathbf{w_1^{gT}}, \mathbf{w_2^{gT}}]^{\mathbf{T}} \tag{3.5}$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, se desarrollan los diferenciales asociados a las transformaciones de giro $\mathbf{R_r^g}$, $\mathbf{R_i^g}$, $\mathbf{R_0}$ y $\overline{\mathbf{R_i}}$. Para esto, primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla

3.1. Las entradas de $\mathbf{R_r}$ y $\mathbf{R_i^g}$ se hallan siguiendo las Ecuaciones (3.6) y (3.7) a continuación:

$$\mathbf{R_r} = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2}\ \mathbf{r_3}] \tag{3.6}$$
$$\mathbf{R_i^g} = [\mathbf{t_1}\ \mathbf{t_2}\ \mathbf{t_3}] \tag{3.7}$$

Los versores $\mathbf{r_i}$ se hallan a partir del vector director $\mathbf{r_1}$ que apunta del nodo 1 al 2. Es por esto que es preciso definirlo en función de las posiciones iniciales de los nodos en coordenadas globales $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, sus desplazamientos $\mathbf{u_1^g}$ y $\mathbf{u_2^g}$ y el largo l_n una vez deformado.

$$l_n = ||\mathbf{X_2} + \mathbf{u_2} - \mathbf{X_1} - \mathbf{u_1}|| \tag{3.8}$$
$$\mathbf{r_1} = \frac{\mathbf{x_2} + \mathbf{u_2} - \mathbf{x_1} - \mathbf{u_1}}{l_n} \tag{3.9}$$

El vector auxiliar $\mathbf{p}$ surge se define para hallar primeramente los vectores $\mathbf{r_i}$ y partir de estos la base $\mathbf{t_i}$. Estos versores son dinámicos y solidarios al movimiento. Están unidas a la configuración de deformación rígida y local respectivamente. El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen $\mathbf{p}$, $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ en la Ecuación (3.10):

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}), \qquad \mathbf{p_i} = \mathbf{R_i^g}\mathbf{R_0}[\mathbf{0\ 1\ 0}]^{\mathbf{T}} \tag{3.10}$$

En la expresión anterior la matriz $\mathbf{R_0}$ se obtiene colgando los vectores $\mathbf{e_i}$ escritos como combinación lineal de la base $\mathbf{E_i}$. Una vez calculada esta matriz y evaluado las expresiones de la Ecuación (3.10) se obtienen los restantes versores directores de la componente de deformación rígida. Esto es:

$$\mathbf{r_3} = \frac{\mathbf{r_1}\ \mathbf{x}\ \mathbf{p}}{||\mathbf{r_1}\ \mathbf{x}\ \mathbf{p}||}, \qquad \mathbf{r_2} = \mathbf{r_3}\ \mathbf{x}\ \mathbf{r_1} \tag{3.11}$$

Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta\overline{\mathbf{R_i}} = \delta\mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\mathbf{R_i^g}\mathbf{R_0} + \mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\delta\mathbf{R_i^g}\mathbf{R_0} \tag{3.12}$$

En la Ecuación (3.12) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de diferenciales matriciales. Dado que transformación $\mathbf{R_0}$ comunica la configuración indeformada y ambas configuraciones son fijas, su matriz es constante. Por lo tanto, su variación es nula. A diferencia de las matrices de giro $\overline{\mathbf{R_i}}$ y $\mathbf{R_i^g}$ sus variaciones pueden hallarse según las Ecuaciones (3.13) y (3.14) respectivamente.

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R_i^g} &= \widetilde{\delta\mathbf{w_i^g}}\ \mathbf{R_i^g} \qquad (3.13) \\ \delta\mathbf{R_r^g} &= \widetilde{\delta\mathbf{w_r^g}}\ \mathbf{R_r} \qquad (3.14) \end{aligned}$$

En la ecuación (3.14) el término $\widetilde{\delta\mathbf{w_r^g}}$ refiere a la operación skew del vector de ángulos de la componente de deformación rígida. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a matrices de rotación. La función $\widetilde{\mathbf{A}}$ aplicada al vector $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega_1}, \boldsymbol{\Omega_2}, \boldsymbol{\Omega_3})$ toma la siguiente forma:

$$\text{Skew}(\boldsymbol{\Omega}) = \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

En función de lo descrito anteriormente resta vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las variaciones globales. Para esto se definen las matrices **E**y **G** según las Ecuaciones (3.16) (3.17).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R_r} \end{bmatrix} \rightarrow \delta\mathbf{d_g} = \mathbf{E^T}\mathbf{d_g} \qquad (3.16)$$

Notoese que las matrices $\mathbf{R_r}$ tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas dimensiones, **0** es una matriz nula de 3x3 e **I** una matriz identidad del mismo número de filas y columnas. De forma subsiguiente **E** posee 12 entrada en filas y columnas asociadas a los 12 grados de libertad por elemento.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \tfrac{\partial \mathbf{w_r^g}}{\partial \mathbf{d^g}} \\
\mathbf{G(1:6)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta/l_n & \eta_{12}/2 & -\eta_{11}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{G(7:12)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta/l_n & \eta_{22}/2 & -\eta_{21}/2 & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

En la columna 1 y 12 de la matriz $\mathbf{G}$ las entradas son nulas ya que los desplazamiento angulares globales no dependen de los estiramientos axiales de los nodos. Además, los parámetros η se calculan realizando los cocientes entre las componentes de los vectores $\mathbf{p_j}$ y $\mathbf{p_{ij}}$ según la Ecuación (3.18). Siendo el vector p_j el producto $\mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}$ y $\mathbf{p_{ij}}$ la multiplicación de $\mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\mathbf{p_i}$.

$$
\eta = \frac{p_1}{p_2}, \quad \eta_{11} = \frac{p_{11}}{p_2}, \quad \eta_{12} = \frac{p_{12}}{p_2}, \quad \eta_{21} = \frac{p_{21}}{p_2}, \quad \eta_{22} = \frac{p_2}{p_2}, \tag{3.18}
$$

La relación entre los diferenciales anteriores, se pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos de ángulos locales en términos globales. Tal cual se expresa en la Ecuaciones (3.19) donde la matriz $\mathbf{P}$ queda definida. Esto es de sumo interés ya que para el cálculo de fuerzas internas las variables causa y efecto de su generación son los desplazamientos locales. Por ende resulta imprescindible calcular su variación en términos globales.

$$
\begin{bmatrix} \delta\overline{\theta_1} \\ \delta\overline{\theta_2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G^T} \\ \mathbf{G^T} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} = \mathbf{P}\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} \tag{3.19}
$$

Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coordenadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar $\mathbf{r}$ que vincula los incrementos del desplazamiento axial $\delta\overline{u}$ con los globales. Esto permite escribir la Ecuación (3.4) en relación a (3.5) haciendo uso de la expresión que prosigue (3.20)

$$
\delta\overline{u} = \mathbf{r}\ \mathbf{d_g} \qquad \mathbf{r} = [-\mathbf{r_1^T}\ \mathbf{0_{1,3}}\ \mathbf{r_1^T}\ \mathbf{0_{1,3}}] \tag{3.20}
$$

3.2. Formulación local

La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este apartado. se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.3.

El movimiento local de una sección ubicada a una distancia x de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir de la rotación y traslación de la sección correspondiente a su centroide G. Una ilustración de esto se muestra en la Figura 3.4, donde la configuración de deformación rígida se identifica en punteado y la deformada en color naranja.

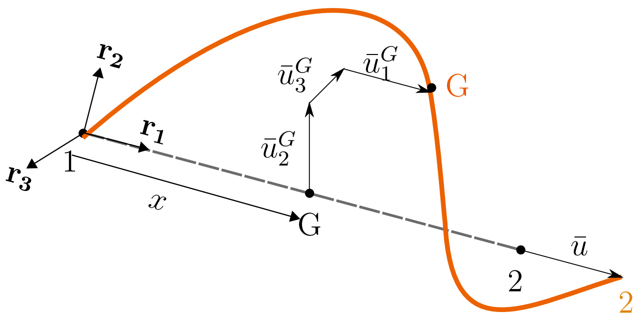


Figura 3.4: Esquema de desplazamientos locales.

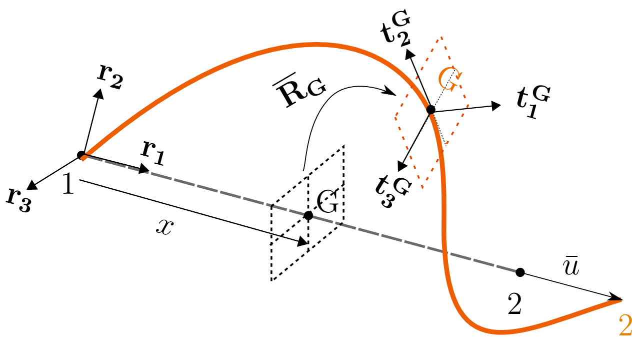


Figura 3.5: Ilustración grados de libertad locales.

El movimiento de la base $\mathbf{t_i}$ en respecto del sistema $\mathbf{r_i^G}$ esta dado por los desplazamientos $\bar{u}_3$ según el versor $\mathbf{r_3^G}$ y análogamente para los vectores $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_1$. Esto determina la ubicación del baricientro G. Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores $\mathbf{t_3^G}$ y $\mathbf{t_2^G}$

dentro del plano y un versor perpendicular $\mathbf{t_1^G}$. La transformación $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{G}}$ permite encontrar los transformados de la base $\mathbf{r_i^G}$ etiquetados con las letras $\mathbf{t_i^G}$. Por último se observa el desplazamiento axial de la barra $\bar{u}$ correspondiente al del nodo 2 en la dirección $\mathbf{r_1}$.

Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para los desplazamientos axiales $\bar{u}_1$ y para los ángulo de torsión $\theta_{\mathbf{1}}$. Por la contraria, tanto para los desplazamientos transversales $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$ como para los ángulos de flexión, las interpolaciones es través de polinomios cúbicos. Estas funciones interpolantes se detallan en las Ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23).

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \qquad N_2 = \frac{x}{l_0} \tag{3.21}$$

$$N_3 = x\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \qquad N_4 - \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\frac{x^2}{l_0} \tag{3.22}$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right)\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \qquad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right)\left(\frac{x}{l_0}\right) \tag{3.23}$$

Para un punto ubicado a una distancia x del nodo 1 según el vector $\mathbf{r_1}$ es posible calcular los desplazamientos locales en la base $\mathbf{r_i}$. Dado el punto arbitrario G que se desplazo en el sistemas de coordenadas locales según el vector $\mathbf{d_l}^{\mathbf{G}}$. Los valores en términos de la componente de deformación rígida $\mathbf{r_i}$ se calculan aplicando la Ecuación 3.24.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d_l^G} \tag{3.24}$$

Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nulas es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas. De esta forma se construyen las matrices $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$. Estas expresan los desplazamientos transversales $\bar{u}_2, \bar{u}_3$ como también los ángulos $\bar{\theta}_1^G$ y $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$ según los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales $\overline{\theta_{\mathbf{1}}}$ y $\overline{\theta_{\mathbf{2}}}$ para el nodo 1 y 2 respectivamente. Esta artimaña analítica se expresa a continuación en las Ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u_l} = \mathbf{P_1} \begin{bmatrix} \overline{\theta_1} \\ \overline{\theta_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_l = \mathbf{P_2} \begin{bmatrix} \overline{\theta_1} \\ \overline{\theta_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Las hipótesis de Bernoulli desprecian las deformaciones por fuerzas cortantes, esto se refleja en sus polinomios de interpolación. Esta premisa no tiene perjucios sobre la aplicación con la que se modelará el elemento. La estructura de cables es extremadamente esbelta, con relaciones de diámetro respecto a largo ínfimas. Por la tanto, las deformaciones por cortante son efectivamente despreciables respecto a las inducidas por los momentos flectores.

3.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura 3.4 queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa en según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$\mathrm{OG} = \mathbf{x_1^g} + \mathbf{u_1^g} + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r_1} + (\bar{u}_2)\mathbf{r_2} + (\bar{u}_3)\mathbf{r_3} \tag{3.27}$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente definidos en (3.27) y haciendo uso la matriz auxiliar $\mathbf{N}$ es posible escribir los desplazamientos del baricentro y su diferencial asociado.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \;\; \mathbf{I} \;\; \mathbf{0} \;\; N_2 \;\; \mathbf{I} \;\; \mathbf{0}] && (3.28) \\ OG &= N_1(\mathbf{x_1^g} + \mathbf{u_1^g}) + N_2(\mathbf{x_2^g} + \mathbf{u_2^g}) + \mathbf{R_r u_l} && (3.29) \\ \delta OG = \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\delta\mathbf{d_g} + \mathbf{R_r}\delta\mathbf{u_l} + \delta\mathbf{R_r u_l} && (3.30) \end{aligned}$$

La expresión presentada (3.30) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta el cálculo de su magnitud, ya que esos grados de libertad se encuentran solidarios a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones (3.16), (3.17), (3.19) y (3.13) lográndose de este modo, escribir a $\delta \mathbf{u}$ en coordenadas globales. Además se compacta la notación definiendo la matriz $\mathbf{H_1}$ según la Ecuación (3.31).

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R_r}(\mathbf{N} + \mathbf{P_1 P} - \widetilde{\mathbf{u_l}}\mathbf{G^T})\mathbf{E^T}\delta \mathbf{d_g} = \mathbf{R_r H_1 E^T}\delta \mathbf{d_g} \tag{3.31}$$

Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.4), son despreciables frente a los de la componente de deformación rígida. Para el autor Le et al. 2014, degbido a sus cambios de magnitud entre miseraciones, no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales y rígidos. Esto es: $(\delta\overline{\theta_{\mathbf{ri}}} = \overline{\delta \mathbf{w_i}}$).

Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magnitudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según se establece en la Ecuación

$$\delta \mathbf{w^g}(\mathbf{OG}) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R_r}(\mathbf{P_2 P} + \mathbf{G^T})\mathbf{E^T}\delta \mathbf{d_g} = \mathbf{R_r H_2 E^T}\delta \mathbf{d_g} \tag{3.32}$$

3.2.2. Velocidades y aceleraciones

Las magnitudes dinámicas despeñan un papel primordial en el análisis implementado. Tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en términos globales. De igual modo, que en la Sección 3.2.1, se obtienen sus diferenciales asociados. Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.31) se deducen las velocidades lineal $\dot{\mathbf{u}}$ según la Expresión (3.33). Al aplicar la regla del producto en (3.33) se halla la aceleración lineal $\ddot{\mathbf{u}}$ del centro de masa del elemento en (3.34).

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R_r H_1 E^T}\delta \dot{\mathbf{d_g}} \tag{3.33}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R_r H_1 E^T}\delta \dot{\mathbf{d_g}} + (\dot{\mathbf{R_r}}\mathbf{H_1 E^T} + \mathbf{R_r}\dot{\mathbf{H_1}}\mathbf{E^T} + \mathbf{R_r H_1}\dot{\mathbf{E^T}})\delta \dot{\mathbf{d_g}} \tag{3.34}$$

Para calcular las igualdades anteriores hace falta evaluar las derivadas temporales de las matrices $\mathbf{E}$ y $\mathbf{R_r}$. Esta operatoria matricial, se traduce en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Dado que variable $\mathbf{E}$ depende de $\mathbf{R_r}$ se calculan inicialmente sus derivadas, para luego sustituirlas en $\dot{\mathbf{E}}$. Esto se realiza mediante la expresión en variaciones (3.14) y resulta $\mathbf{R_r} = \mathbf{R_r}\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_\mathbf{r}}$. Al sustituir esta expresión en la derivada de $\dot{\mathbf{E}}$ se deduce la ecuación que prosigue:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E_t} \tag{3.35}$$

El valor skew de los desplazamientos globales sobre la componente de deformación rígida $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}$ se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación(3.15), aplicado al vector $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G^T}\mathbf{E^T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g}$. Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la Expresión (3.34) definiendo la matriz $\mathbf{C_1}$ como se enseña a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{C_1} &= \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}\mathbf{H_1} + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{1} - \mathbf{H_1}\mathbf{E_t} && (3.36) \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{R_r}\mathbf{C_1}\mathbf{E^T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} && (3.37) \end{aligned}$$

Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó la nomenclatura para evitar el abuso de notación. Derivando la Ecuación (3.32) respecto a la variable temporal, se deduce la velocidad angular $\dot{\mathbf{w}}$ expresada en la Ecuación (3.38). Utilizando la regla del producto la aceleración angular $\ddot{\mathbf{w}}$ según la Ecuación (3.40):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{R_r}\mathbf{H_2}\mathbf{E^T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} && (3.38) \\ \mathbf{C_2} &= \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_\mathbf{r}}\mathbf{H_2} + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{2} - \mathbf{H_2}\mathbf{E_t} && (3.39) \\ \ddot{\mathbf{w}} &= \mathbf{R_r}\mathbf{H_2}\mathbf{E^T}\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r}\mathbf{C_2}\dot{\mathbf{E}}^\mathbf{T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} && (3.40) \end{aligned}$$

Una descripción detallada puede encontrarse en Le et al. 2014. Dentro del apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las derivadas temporales de las matrices $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$. También es posible escudriñar la deducción de las matrices $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ y $\mathbf{C_4}$.

3.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (Le et al. 2014) y (Battini y Pacoste, 2002). Acompasando con el avance histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente los vectores de fuerza interna y su matriz de rigidez asociada, para luego ahondar en la incorporación de términos dinámicos.

3.3.1. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna $\mathbf{f_l^{int}}$ para el nodo i se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial fl_1, dos momentos flectores M_1^i, M_2^i y un momento torsor M_3^i para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección análoga a los desplazamientos locales para las fuerzas internas, se presenta en la Ecuación (3.41).

$$bff_l^{int} = [\ fl_1\ M_1^1\ M_2^1\ M_3^1\ M_1^2\ M_2^2\ M_3^2\ ] = [\ fl_1\ \boldsymbol{m}] \tag{3.41}$$

Tanto las magnitudes de fuerza interna como inercial se calcularán inicialmente para coordenadas locales $\mathbf{f_l^{int}}$, donde su cálculo es relativamente sencillo, para luego transcribir estos resultados en términos globales $\mathbf{f_g}^{\mathbf{int}}$. Con este cometido se define la matriz $\mathbf{B}$ según se expresa en la Ecuación (3.42).

$$\delta\mathbf{d_l} = \mathbf{B}\ \delta\mathbf{d_g} \qquad \mathbf{f_g^{int}} = \mathbf{B^T}\ \mathbf{f_l^{int}}. \tag{3.42}$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración de deformación rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Esta primer transformación en la Figura 3.3, refiere a escribir los desplazamientos locales en términos de los rígidos ($\mathbf{t_i} \to \mathbf{r_i}$). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración de deformación rígida a la indeformada ($\delta \mathbf{d_l} \rightarrow \delta \mathbf{d_g}$). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en función de coordenadas estáticas y globales.

Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares $\mathbf{G}$ y $\mathbf{E}$, en las Ecuaciones (3.16) y (3.17) es posible vincular los ángulos diferenciales locales $\delta\overline{\theta_\mathbf{i}}$ con los incrementos globales $\delta \mathbf{d_g}$. Esto permite conocer los momentos flectores y torsores de la viga en coordenadas globales.

Análogamente el vector auxiliar $\mathbf{r}$ contiene a $\mathbf{r_1}$ según el sentido axial de la barra, por lo que reescribir este permite expresar la fuerza de directa $fa1$ en términos de la base $\mathbf{E_i}$. Al unir los razonamientos detallados en los párrafos anteriores, se obtienen las Ecuaciones (3.43) y (3.44) para el cálculo de la fuerza interna y su diferencial:

$$\mathbf{f_g^{int}} = \mathbf{B^T f_l^{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{PE^T} \end{bmatrix} \mathbf{f_a} \tag{3.43}$$

$$\mathbf{f_g^{int}} = \mathbf{B^T} \delta \mathbf{f_l^{int}} + \delta \mathbf{r^T} f_{a1} + \delta(\mathbf{EP^T}) \boldsymbol{m} \tag{3.44}$$

Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés obtener sus derivadas recepto de los desplazamientos. La matriz tangente $\mathbf{K_g}$ representa esta magnitud y es un operador indispensable para la resolución mediante métodos numéricos iterativos. Este cálculo de derivadas respecto a desplazamientos globales de la expresión (3.43) concluye en la Ecuación (3.45) a continuación:

$$\mathbf{K_g} = \mathbf{B^T K_l B} + \frac{\partial(\mathbf{B^T f_l})}{\partial \mathbf{d_g}} \tag{3.45}$$

Operando con la regla del producto y sustituyendo la Ecuación (3.44) para el diferencial para la fuerza interna la matriz tangente resulta :

$$\mathbf{K_g} = \mathbf{B^T K_l B} + \mathbf{D f_{a1}} - \mathbf{EQG^T E^T} + \mathbf{EGar} \tag{3.46}$$

La matriz $\mathbf{B}$ permite realizar el cambio de coordenadas $\delta \mathbf{d_a}$ a $\delta \mathbf{d_g}$, de acuerdo con lo definido en (3.42). Esta transformación de cambio de base multiplica la variable $\mathbf{K_l}$ correspondiente al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz $\mathbf{K_l}$.

En la Ecuación (3.46) la matriz $\mathbf{D}$ es anti-simétrica y se calcula en función de los productos internos de los vectores $\mathbf{e_i}$, esta aporta la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial f_l1 de la barra. Por otra parte, la matriz auxiliar $\mathbf{Q}$ se halla a partir del producto de $\mathbf{P}$ y los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, y proviene de la componente no lineal de los momentos. Por último, se define el vector $\mathbf{a}$ agrupando así el resto. Dichas defunciones se encuentran en las siguientes Ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_3} & \mathbf{0} & -\mathbf{D_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D_3} & \mathbf{0} & \mathbf{D_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D_3} = \frac{\mathbf{1}}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r_1}\mathbf{r_1}^{\mathbf{T}}) \tag{3.47}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\ (1) \\ \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\ (2) \\ \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\ (3) \\ \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\ (4) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.46) es asimétrica, sin embargo según Nour-Omid y Rankin, 1991 esta puede ser simetrizada sin perder la convergencia cuadrática para el método de Newton Raphson (N-R), siempre y cuando momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger Rankin y Nour-Omid, 1988.

3.3.2. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes asociadas. El atractivo principal de la referencia Le et al. (2014) se fragua en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas De Borst et al. 2012. Esta coherencia se debe a la cabal derivación analítica del vector de fuerzas inerciales según el planteo cinemático de las variables descritas en 3.3. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad que la magnitud primaria será la energía cinética del elemento K. Esta propiedad escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ($\dot{\mathbf{u}}$,$\ddot{\mathbf{u}}$) como también angulares ($\dot{\mathbf{w}}$,$\ddot{\mathbf{w}}$). En las ecuaciones (3.49) y (3.50) a continuación, se presentan la energía cinética de un elemento y su diferencial. Para la obtención de la Expresión se aplicó (3.50) la regla del producto de diferenciales y el teorema de Leibiniz para integrales de extremos fijos.

$$K = \frac{1}{2}\int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} dl_0 \tag{3.49}$$

$$\delta K = -\int_{l_0} \delta \mathbf{u}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^{\mathbf{T}} [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}}] dl_0 \tag{3.50}$$

Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subindices "g"para las magnitudes dinámicas ($\mathbf{u}$,$\mathbf{w}$) y sus respectivas derivadas. De igual forma, las variables del integrando en las Ecuaciones (3.49) y (3.50) se omitió la nomenclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga. Los elementos serán de área constante siendo A_ρ el producto del área transversal y la densidad del material, análogamente la matriz $\mathbf{I}_\rho$ es el tensor de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones $\mathbf{R^g}$ y $\mathbf{R_o}$ consecutivamente.

Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsables del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar el vector de fuerza inercial $\mathbf{f_k}$ se obtienen las matrices tangentes dinámicas. Esto se expresa en las Ecuaciones (3.51) y (3.52).

$$\delta K = \mathbf{f_k^T} \delta \mathbf{d_g} \tag{3.51}$$

$$\delta \mathbf{f_k} = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{K} \delta \mathbf{d_g} \tag{3.52}$$

En la Ecuación 3.52 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa consistente $\mathbf{M}$ se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, consecutivamente la matriz $\mathbf{C_k}$ giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo $\mathbf{K}$, se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrifuga. Determinados autores Cardona y Geradin, 1988 y Hsiao et al. 1999 proponen considerar unicamente $\mathbf{M}$, sin embargo exhaustivos estudios en (Hsiao et al. 1999) prueban que agregar la matriz $\mathbf{C_k}$ mejora el desempeño computacional para numerosos casos.

Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección 3.2.2.

Sustituyendo la Ecuación (3.52) en (3.50) se halla una fórmula para la fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.34), (3.37), (3.38) y (3.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f_k} = \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T} \mathbf{R_r}^{\mathbf{T}} A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H_2^T} \mathbf{R_r} [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \tag{3.53}$$

Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expresiones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices. Finalmente esto se expresa de forma matemática en las Ecuaciones (3.55) y (3.56).

$$\Delta \mathbf{f_k} = \mathbf{M} \boldsymbol{\Delta} \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{C_k} \boldsymbol{\Delta} \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{K_k} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{d_g} \approx \mathbf{M} \boldsymbol{\Delta} \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{C_k} \boldsymbol{\Delta} \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} \tag{3.54}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T} A_\rho \mathbf{H_1} + \mathbf{H_2^T} \mathbf{I}_\rho \mathbf{H_2} \right\} d_l \right] \mathbf{E^T} \tag{3.55}$$

$$\mathbf{C_k} = \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T} A_\rho (\mathbf{C_1} + \mathbf{C_3}) + \int_{\mathbf{l_0}} \mathbf{H_2^T} \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C_2} + \mathbf{C_4}) + \ldots \right\} \right] \mathbf{E^T} \tag{3.56}$$

$$\ldots \int_{l_0} \mathbf{H_2^T} (\tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho}) d_l \tag{3.57}$$

Capítulo 4

Metodología

En este capitulo se exponen los métodos centrales desarrollados durante este trabajo de tesis. Este desarrollo metodológico es el principal atractivo de esta investigación, ya que constituye un aporte original e innovador respecto a la bibliografía consultada. El problema de modelado computacional de lineas eléctricas afectadas por fenómenos de vientos extremos se construyó sobre dos etapas sucesivas. En primer lugar, se explican cuestiones sobre el modelado físico. Los protagonistas del fenómeno son el viento y la estructura. Respecto al primero se describe en la Sección 4.1.2 el campo de velocidades absoluto, relativo y las fuerzas que el viento genera sobre el conductor. Análogamente se despliegan las condiciones iniciales y de borde consideradas para el modelado estructural en la Sección 4.1.1. Posteriormente, dentro de la Sección 4.2 se describe la deducción del algoritmo de HHT aplicado a la formulación corrotacional para modelado de conductores con fuerzas aerodinámicas. Este desarrollo no se ha registrado en la biografía consultada y tampoco los pseudocódigo que permiten incorporar dicha formulación al software ONSAS. Por último una vez explicada la deducción se postulan las hipótesis del modelado físico y computacional en las Secciones 4.1.2.2 y 4.2.2.1 respectivamente.

4.1. Aspectos de modelado físico

4.1.1. Condiciones iniciales y de borde para la estructura

El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de la realidad, para crear un modelo en el computador, que se comporte de forma análoga. Permitiendo emular y controlar determinadas variables de estudio relevantes al observador. En este acto de representación existen simplificaciones inherentes, que reducen los factores incidentes al sistema como objeto de estudio.

Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determinadas condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema. Estas imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto está siendo desvinculado, se nominan condiciones de borde. En particular, para esta investigación, se consideraron las siguientes hipótesis del modelado estructural respecto a sus condiciones de borde y e iniciales.

1. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura, ignorándose cualquier variación en el perfil tipográfico del terreno. Como consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
2. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a modelarlo con elementos de vigas, las cuales tienen un variación de ángulo continuo. Consecuentemente, al escindir el vano BC de su continuación (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo nulo en x para los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta las condiciones de deformación angulares impostadas por la geometría del sistema.
3. Como el conductor no presenta fuerzas en el sentido axial, los puntos B y C no se deforman según el eje x, ergo sus trayectoria pertenecen al plano z-y. Esto debe forzarse en los nodos B y C.
4. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB, obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se modelaron a partir de barras de Green. Las condiciones de borde dependen

del ejemplo al que se haga referencia. Para el Ejemplo 3 los puntos D y A se encuentran anclados a la torre, acompañando sus movimientos, mientas que para el 2 se encuentran fijos.

5. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada en La Figura 4.1, se aplica una condición inicial de desplazamiento $\mathbf{u_0}$. Esta se corresponde con la solución estática del sistema cargado por el preso propio en la dirección de z de la gravedad.

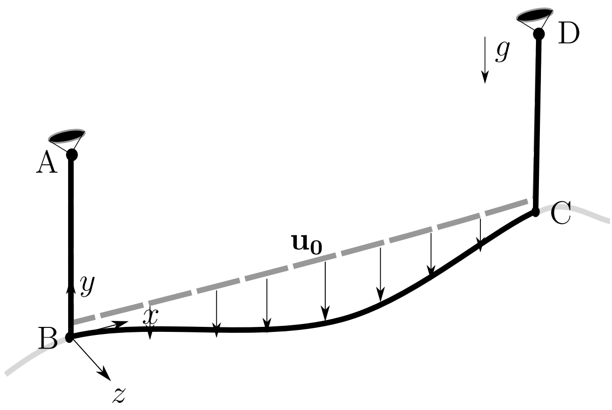


Figura 4.1: Esquema de condición inicial y de borde.

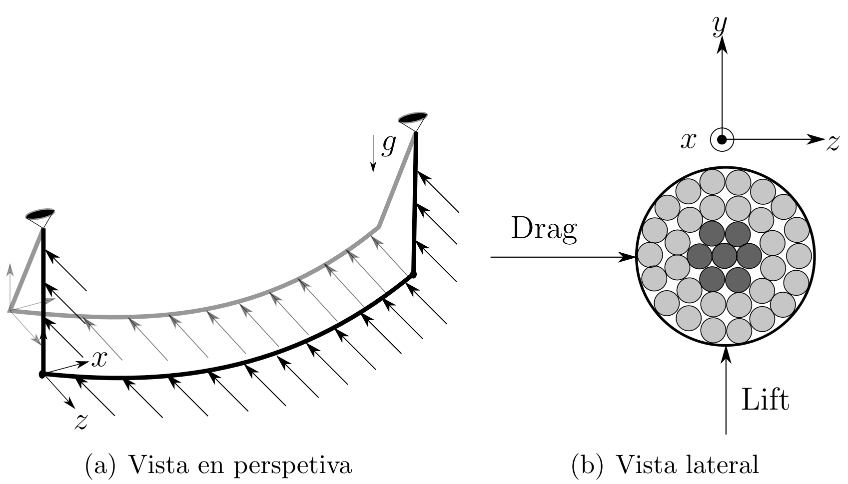
Una vez plasmadas las condiciones de borde cinemáticas (referidas a los desplazamientos) anteriores. Se establecen a continuación las principales condiciones de borde (referidas a las fuerzas, momentos) dinámicas:

1. No se consideran las fuerzas internas trasmitidas por los vanos aledaños.
2. Se supone que no existe deslizamiento relativo entre las hebras que componen al conductor.
3. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea. Vale aclarar que este caso de pretensión refiere a la configuración punteada en la Figura 4.1, en ese estado la tensión es 0 N. No obstante, al aplicarse el peso propio la tensión en el conductor se incrementa hasta que se equilibre las fuerzas externas de la gravedad con las internas.
4. Las simulaciones se realizan en dos etapas sucesivas, primeramente se imponen la condiciones iniciales de desplazamientos y una vez estabilizada la respuesta por el amortiguamiento interno y aerodinámico se ejerce la fuerza del viento sobre el cable.

5. Los vínculos dinámicos entre los elementos de vigas y de barra se implementaron de forma tal, que no se trasmiten los momentos de unos a otros. Por lo tanto, en los nodos de sujeción los elementos de barra CD y AB trasmiten únicamente fuerzas direccionales en C y B.

4.1.2. Modelo de viento

Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuerzas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift). Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes, en la capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo. Y luego proyectarla la fuerza neta en la dirección del flujo medio. A diferencia de estas, las fuerzas lift que aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones entre el intradós (sona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones puntales entre dos superficies contrarias, genera una circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en curva cerrada, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura 4.2(b). Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la competente de lift es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, garantiza que la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas entre las superficies del sólido.



(a) Vista en perspetiva (b) Vista lateral

Figura 4.2: Ilustración del viento y sus efectos.

La componente unidireccional del flujo a una altura dada, puede ser desglosada en un termino medido y otro fluctuante $w_v(t) = w_m(t) + w'(t)$. A partir de esto, la velocidad media para un período T toma la expresión de la Ecuación (4.1):

$$w_m(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} w_v(\tau) d\tau \tag{4.1}$$

El valor del periodo T debe ajustarse minimizando la desviación estándar asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la desviación estándar de la velocidad fluctuante y la media para un instante de tiempo dado. Sin embargo, para este trabajo no se consideran las fluctuaciones debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de $T = 1/30$ s y de velocidad media, se extrajo del artículo (Stengel y Thiele, 2017).

Considerando el aire como un fluido no newtoneano, ρ su densidad asociada a determinada temperatura, $C_d(Re)$ el coeficiente de drag para como función del número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo ("drag") para un elemento cilíndrico de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la Expresión (4.2):

$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{\rho(T) C_d(Re)}{2} d_c w_m(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c w_m(t)^2 l_e \tag{4.2}$$

Para este cálculo se asumió constantes las magnitudes al interior del elemento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto del integrando por el largo del intervalo. Además se para este trabajo la carga del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente a la mitad de F_v. Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales que estas inducen, se cancelan con los elementos aledaños. Por otra parte, los valores de C_d se extrajeron de las referencias (Foti y Martinelli, 2016) y se verificaron con el estudio para estos coeficientes durante TC (Mara, 2007). La densidad ρ del aire se consideró la usual para presión atmosférica y una temperatura de 20 ºC.

4.1.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas asociadas.

En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortiguamiento introducido. Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde el viento tiene determinada componente transversal según z y perpendicular (según y). En la figura 4.3 se indican con el nombre w y q. En esta figura las velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tanto absoluto. Asimismo en esta imagen se representan las velocidades media y fluctuante w_m y w_a, que sumada a la velocidad v, resulta en el vector V_{tot} formando un ángulo β con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce sobre el conductor, este despliega una determinada velocidad rígida en ambas direcciones identificadas con las letras $\mathbf{\dot{u}_{ry}}$ y $\mathbf{\dot{u}_{rz}}$.

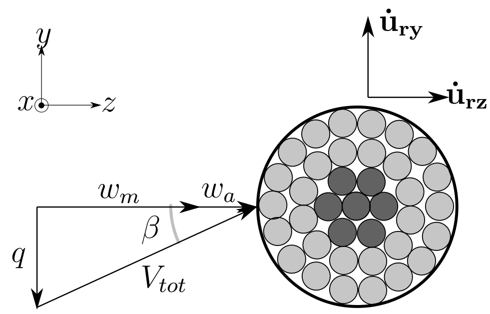


Figura 4.3: Esquema en sistema de referencias absoluto.

Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 4.4. Este campo de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de drag F_d y de lift F_l. Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando dos fuerzas F_z y F_y.

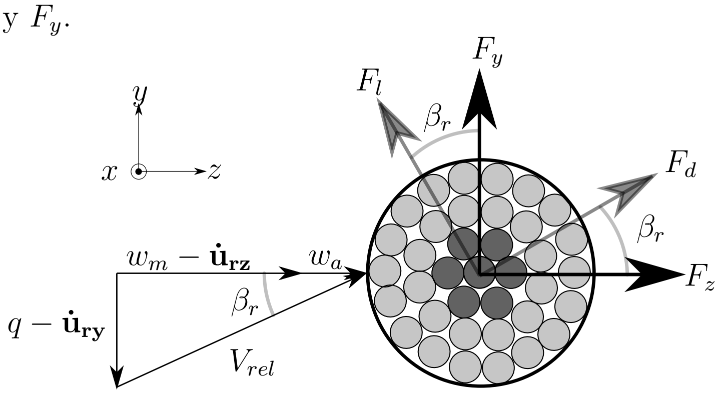


Figura 4.4: Esquema en sistema de referencias relativo.

Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y dinámicas. La velocidad relativa absoluta, es el cuadrado de los catetos, tal y como se expresa en la Ecuación (4.3). Tomando como hipótesis que las velocidades relativas del rígido y la componente vertical v, son mucho menores que las asociada al flujo medio, en el sentido de z se deduce la Ecuación (4.4).

$$
\begin{aligned}
V_{rel}^2 &= (w_m + w_a - \mathbf{\dot{u}_{rx}})^\mathbf{2} + (\mathbf{v} - \mathbf{\dot{u}_{ry}})^\mathbf{2} && (4.3) \\
\frac{V_{rel}^2}{w_m} &= w_m + 2(w_a - \mathbf{\dot{u}_{rz}}) && (4.4)
\end{aligned}
$$

La carga de drag postulada en la Ecuación (4.1) se escribe por unidad de longitud y se reescribe en (4.6). Además, se muestra que para las asunciones de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a 0°. Para formular esto matemáticamente se plantean las Ecuaciones (4.6) y (4.5).

$$
\tan(\beta_r) = \frac{v - \mathbf{\dot{u}_{ry}}}{w_m - \mathbf{\dot{u}_{rz}} + w_a} = \frac{\frac{v - \mathbf{\dot{u}_{ry}}}{w_m}}{1 \frac{-\mathbf{\dot{u}_{rz}} + w_a}{w_m}} \approx 0 \qquad (4.5)
$$

$$
F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_m + 2(w_a - \mathbf{\dot{u}_{rz}}))w_m \qquad (4.6)
$$

Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes z e y. Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de estas se hallan el campo de desplzamientios, velocidad y aceleraciones del sólido. Considerando que el ángulo β es ínfimo y por lo tanto $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$ y $\cos(\beta) = 1$ al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$
\begin{aligned}
F_z &= \frac{\rho d_c C_d}{2}(u_m^2 + w_a^2 - 2w_a\mathbf{\dot{u}_{rz}})\cos(\beta_r) = \bar{F}_x + F_a - F_{vis} && (4.7) \\
F_y &= \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_m^2 + w_a^2 - 2w_a\mathbf{\dot{u}_{rz}})\sin(\beta_r) \approx 0 && (4.8)
\end{aligned}
$$

Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es una promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo, se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un tercer termino surge al desarrollar la Ecuación (4.6). Este factor depende del producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Vinculando al fluido y al sólido, es por esto que recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico. Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sporepresivo el sentido de esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición de fuerzas según z se le llaman $\bar{F_x}$, F_a, $-F_{vis}$ a la componente media, alternante y de amoritguamentio dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan a continuación:

$$\bar{F_x} = \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_m^2) \tag{4.9}$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_a^2) \tag{4.10}$$

$$F_{vis} = \frac{\rho d_c C_d}{2}(2\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}} w_m) \tag{4.11}$$

4.1.2.2. Hipótesis aplicadas al modelado de viento

Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no el eje central de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio. Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

1. No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
2. La velocidad incide en el sentido z de forma perpendicular a la linea.
3. La velocidad relativa transversal $v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}}$ al igual que la componente alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el sentido de z llamada w_m.
4. La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera despreciable frente al drag.
5. Para la fuerza en el sentido de z se desprecia la componente fluctuante F_a.
6. Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico f_{vis} se promedió la velocidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el dominio temporal de simulación.

El primer supuesto parte del modelo figurado en 4.4, para poder realizar este análisis plano, se obvian las fluctuaciones espaciales en el sentido axial del conductor. Esta asunción no es del todo correcta, pues la turbulencia del fenómeno provoca fluctuaciones en las cargas a lo largo dela linea, cambiando así, su orientación. Esto se asocia directamente con la hipótesis 4, donde la fuerza alternante proveniente de la presencia de vórtices se desprecia.

Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje z en la Figura 4.2(a), siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipótesis proviene de diferentes trabajos publicados, donde la componente perpendicular a la superficie terrestre o ascendente (según y) suele ser significativamente menor a la paralela (en el sentido de z) (Durañona y Cataldo, 2009) (Stengel y Thiele, 2017) Yang y Hong, 2016. Si bien simplifica lo hace de forma conservadora. Puesto que supone al sistema de trasmisión, en el tiempo inicial, dispuesto completamente perpendicular al sentido del viento, es así que este descarga su mayor fuerza sobre el sistema (Hipótesis 2).

Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis, se sustenta en la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del peso que se opone a la fuerza de sustentación. De todos modos, esta fuerza en sentido ascendente se despreció frente al drag, consecuencia de la simetría de revolución tangencial del conductor. Esto de establece en la Hipótesis 4.

Otra hipótesis a clarificar refiere al amortiguamiento aerodinámico (Hipótesis 6). Se utilizó una simplificación adicional en la velocidad de viento para su cálculo. Se consideró una velocidad constante, igual al promedio de viento en todo el dominio temporal. Este es el valor que insertó para el cálculo de D según la Ecuación (4.11). Por último se explicitan las premisas 3 y 5 que fueron consideradas para calcular el campo de velocidades relativo y sus fuerzas asociadas.

4.2. Aspectos de modelado computacional

4.2.1. Ecuación de equilibrio

En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámico con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta imprescindible formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis que subyacen a las expresiones postuladas en (Le et al. 2014). Por añadidura, se construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

El postulado de PTV presentado en De Borst et al. 2012 establece que el incremento diferencial de la energía interna y cinética se origina a partir de un incremento en el trabajo externo. Esto junto con los incrementos asociados a cada una de las energías definidas en el Capítulo 3 se presenta a continuación:

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} + \delta K \tag{4.12}$$

La fuerza externa es la responsable del cambio de trabajo aportando al sistema por lo que $\delta W_{ext} = (\delta \mathbf{d^g})^{\mathbf{T}} \mathbf{f_{ext}}$, análogamente $\delta W_{int} = (\delta \mathbf{d^g})^{\mathbf{T}} \mathbf{f_{int}}$ y también así para la fuerza inercial definidas en la Ecuación (3.51). Sustituyendo estas expresiones para el instante $t + \Delta_t$ y partiendo que debe satisfacerse para todo desplazamiento $\delta \mathbf{d^g}$, se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} \mathbf{f_{ext,t+\Delta_t}} + \mathbf{f_{vis,}}(\dot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t)) - \mathbf{f_{int}}(\mathbf{d}(t+\Delta_t))... \\ ... \quad - \mathbf{f_{ine}}(\mathbf{d}(t+\Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t)) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas $\mathbf{f_{int}}$, inerciales $\mathbf{f_{ine}}$ y externas $\mathbf{f_{ext}}$. Además según la Ecuación (4.11) dentro de las fuerzas externas aparece un término aerodinámico $\mathbf{f_{vis}}$ que depende de la velocidad lineal del rígido. Este termino debe tratarse aparte ya que su naturaleza función de el estado cinemático del problema, lo que es la incógnita a resolver.

La Ecuación de balance (4.13) debe satisfacerse para todo instante temporal, en particular para $t + \Delta_t$. Dadas determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: el desplazamientos $\mathbf{d}$ $(t + \Delta_t)$, las velocidades $\dot{\mathbf{d}}$ $(t + \Delta_t)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}$ $(t + \Delta_t)$. Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente de manera exacta en la Ecuación (4.13).

Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables construyen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta. El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecuación a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como consecuencia que la Ecuación (4.13) ya no será nula sino igual a un resto $\mathbf{r}$. A su vez, tal y como se detalla en las Ecuaciones (4.14) y (4.15), los métodos numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de aceleración y velocidad, en el instante $t + \Delta_t$, en función de los desplazamientos para ese tiempo y las magnitudes cinemáticas en el paso anterior. Como los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración para el paso anterior se encuentran dados, el vector resto depende indirectamente de los desplazamientos. Para diferenciar las variables aproximadas de las exactas, se introduce la siguiente nomenclatura: $(\mathbf{d}(t + \Delta_t) \rightarrow \mathbf{d_{t+\Delta_t}})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ y $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} &= F_v(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}) && (4.14) \\ \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} &= F_a(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}) && (4.15) \end{aligned}$$

Según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, se buscan las aproximaciones cinemáticas tal que el residuo $\mathbf{r}$ para un instante $t+\Delta_t$ sea próximo al vector nulo. Esto se expresa matemáticamente en Ecuación (4.16).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}) = (-\mathbf{f_{ext,t+\Delta_t}} + \mathbf{f_{int}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}) + \mathbf{f_{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t+\Delta_t})... \\ ... + \mathbf{f_{ine}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t+\Delta_t}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}), \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t+\Delta_t}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t})) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por otro lado, según el método de N-R presentado en Quarteroni et al. 2010 es posible construir una sucesión iterativa en k, de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se acerque al nulo. Para aplicar esto se utiliza el teorema de Taylor aplicado a la función resto, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}}) = \mathbf{r}(\mathbf{d^{k}_{t+\Delta_t}}) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}|_\mathbf{k}\ \mathbf{\Delta d^{k+1}_{t+\Delta_t}} = \mathbf{0} \tag{4.17}$$

Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena aplicada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\end{aligned} \tag{4.18}$$

En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar las derivadas de la función residuo respecto de: desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Estas son las matrices tangentes $\mathbf{K_g}$ $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C_k}$ descritas en el Capítulo 3. Asimismo, al derivar la función de fuerza residual aparece un termino $\mathbf{C_{vis}}$ correspondiente la derivada de la fuerza viscosa respecto de la velocidad del viento. Esto resulta una matriz diagonal esparsa con valores nulas salvo las entradas correspondientes a la dirección del viento, con valor $\rho d_c C_d w_m$. Incorporando estas matrices se obtiene a la Ecuación (4.19).

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\right|_k = \left.\left(\mathbf{K_g} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}(\mathbf{C_k} + \mathbf{C_{vis}})\right)\right|_k \tag{4.19}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.19) de N-R se halla el paso en desplazamientos en $k+1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta \mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}}$. Matemáticamente:

$$\left.\left(\mathbf{K_g} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}(\mathbf{C_k} + \mathbf{C_{vis}})\right)\right|_k^{-1} \left(-\mathbf{r}(\mathbf{d^k_{t+\Delta_t}})\right) = \Delta \mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}} \tag{4.20}$$

Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de resolución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones F_a y F_v. Para esto se implementó el Método de HHT presentado a continuación en La sección 4.2.2.

4.2.2. Resolución numérica mediante HHT

Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo de Newmark presentado en Newmark, 1959. Según el articulo Hilber et al. 1977 el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (Hilber et al. 1977) se compara el método de HHT con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser: el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en Le et al. 2014, resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

Para este abordaje inicialmente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Se presentan entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark α_{NW} y β_{NW} para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones de actualización para el instante $t + \Delta_T$ se escriben:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2}\mathbf{u_{t+\Delta t}} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\mathbf{\Delta t})^{\mathbf{2}}}\mathbf{u_t} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\mathbf{\Delta t})}\dot{\mathbf{u}}_t - ... \\ ... - \frac{1}{2\alpha_{NW}}(1 - 2\alpha_{NW})\ddot{\mathbf{u}}_t\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)}\mathbf{u_{t+\Delta t}} - \frac{\beta_{\mathbf{NW}}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\mathbf{\Delta t})}\mathbf{u_t} + \left(\mathbf{1} - \frac{\beta_{\mathbf{NW}}}{\alpha_{\mathbf{NW}}}\right)\dot{\mathbf{u}}_t + ... \\ + ... \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right)\ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t\end{aligned} \tag{4.22}$$

Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros α_{NW} y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT}. Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.23) y (4.24). En estas funciones, es posible notar las equivalencias, parentescos y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$ se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\beta_{NW} &= \frac{1-2\alpha_{HHT}}{2} && (4.23)\\
\alpha_{NW} &= \frac{(1-\alpha_{HHT})^2}{4} && (4.24)
\end{aligned}
$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro α_{HHT} y el incremento Δ_T ente dos tiempos consecutivos t y $t+\Delta_t$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t+\Delta t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t+\Delta_T}}} &= \frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2} && (4.25)\\
\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t+\Delta_T}}} &= \frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T} && (4.26)
\end{aligned}
$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la propiedad de conmutativiad. Es por esto, que los vector de velocidades y aceleraciones angulares para el paso $k+1$, en el instante $t+\Delta_t$, deben calcularse según las Ecuaciones (4.27) y (4.28) presentadas en la referencias (Ibrahimbegović y Mikdad, 1998) y (Ibrahimbegovic y Mamouri, 2002).

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} &= \mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}}\left[\frac{\alpha}{\beta\mathbf{\Delta_t}}\theta_{\mathbf{t+\Delta_t}} + \frac{\beta-\alpha}{\beta}\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} + \frac{(\beta-\mathbf{0.5}\alpha)\mathbf{\Delta_t}}{\beta}\ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}}\right] && (4.27)\\
\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} &= \mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}}\left[\frac{\mathbf{1}}{\beta\mathbf{\Delta_t^2}}\theta_{\mathbf{t+\Delta_t}} - \frac{\mathbf{1}}{\beta\mathbf{\Delta_t}}\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} - \frac{(\mathbf{0.5}-\beta)}{\beta}\ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta t}}\right] && (4.28)
\end{aligned}
$$

En las Ecuaciones (4.27) y (4.28) la transformación $\mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}}$ es la composición de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$
\mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}} = \exp(\widetilde{\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}) = \mathbf{R^g_{t+\Delta_t}}(\mathbf{R^g_t})^{\mathbf{T}} \qquad (4.29)
$$

Un procedimiento análogo al de las funciones angulares se aplican a las lineales. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones expresadas en (4.27) y (4.28).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t+\Delta_t}}} = \tfrac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2} \quad \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta_T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t+\Delta t}}} = \tfrac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \quad \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) \tag{4.31}$$

Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones (4.30), (4.31), (4.25) y (4.26) al definir convenientemente la matriz $\mathbf{B_t}$. En función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclaraciones globales en términos del vector de desplazamientos inceremental. Estas relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B_t} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{2,t+\Delta_t}}) \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

$$\Delta\dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left(\frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T}\mathbf{B_t}\right)\Delta\mathbf{d}_{\mathbf{g,t+\Delta_t}} \tag{4.33}$$

$$\Delta\ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left(\frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2}\mathbf{B_t}\right)\Delta\mathbf{d}_{\mathbf{g,t+\Delta_t}} \tag{4.34}$$

Al escindir las Ecuaciones (4.33) y (4.34) se identifican las funciones F_a y F_v de la sección 4.2.1. Estas relaciones matemáticas deben de integrarse a la Ecuación linealizada de equilibrio (4.20) para obtener el incremento en k que permita conocer el vector desplazamientos en el paso $k+1$ para el instante $t+\Delta_T$. Finalmente, eso se plantea en la Ecuación (4.35).

$$\mathbf{r}(\mathbf{d^k_{t+\Delta_t}}) = -\left(\mathbf{K_g} + \left(\frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2}\right)\mathbf{MB_t} + \left(\frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T}\right)(\mathbf{C_k}+\mathbf{C_{vis}})\mathbf{B_t}\right)\Delta\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}} \tag{4.35}$$

Se aclara que para despejar la Ecuación (4.35) anterior, la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las matrices que la integran (de masa, centrifuga y tangente). Las matrices tangentes fueron simetrizadas .ªrtificialmenteçomo se aclaró anteriormente, manteniendo el orden de convergencia de N-R. Las matrices centrifugas y de masa devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros α_{HHT} son menores a uno, en general en el intervalo $[-0.1; 0.1]$, la suma de esta matrices suele ser definidas positivas. Por lo que $\mathbf{K_{tot}}$ será invertible.

4.2.2.1. Hipótesis de modelado numérico

Se esclarecen las premisas y simplificaciones durante la implementación numérica de los códigos creados:

1. Los incrementos angulares no se calcularon componiendo dos rotaciones consecutivas sino de forma aditiva, es decir: $\theta^{\mathbf{k+1}}_{\mathbf{t+\Delta_t}} = \theta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{t+\Delta_t}} + \boldsymbol{\Delta}\theta^{\mathbf{k+1}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}$.
2. La matriz de amortiguamiento viscoso $\mathbf{C_{vis}}$ se considero una diagonal con elementos no nulos en las componentes asociadas a los desplazamientos transaccionales. Se copió el valor del amortiguamiento aerodinámico con el valor correspondiente a la coordenada lineal $\rho d_c C_d w_m$ para el resto de los desplazamientos. Esto garantiza la estabilidad y atenuación de la respuesta en la primer etapa asociada al peso.
3. La simulación se separó en dos etapas consecutivas, en primer lugar se carga con la fuerza de la gravedad (a partir de la condición inicial) y una vez que la respuesta es constante se aplica la carga del viento.

4.2.3. Implementación numérica en ONSAS

En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el software (ONSAS). Este código de carácter abierto y se desarrolló de forma general integrando distintos elementos, materiales y geometrías dentro del mismo modelo. Además permite resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código abierto *Paraview* difundido en (Ahrens et al. 2005).

Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser pionero dela formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en los trabajos (Battini y Pacoste, 2002) (Le et al. 2014), sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable. A continuación en el Algoritmo 1 se detalla un pseudo-código panorámico sobre el esqueleto ejecutado en ONSAS.

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : tol_r, tol_u, maxIter, Δ_T, α_{HHT}
  Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d_t} \leftarrow \mathbf{d_0}$ $\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{0}$ $\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{0}$
  Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$
  while $t < t_f$ **do**
    finDisp $= 0$
    Definir: $\mathbf{d^k} \leftarrow \mathbf{d_t}$, $\dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k} \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}$, $\ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k} \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}$.
    Evaluar $\mathbf{f_{ext,t+\Delta t}}$
    while FinDisp $= 0$ **do**
      Calcular fuerzas: $\mathbf{f^k_{ine}}(\mathbf{d^k}, \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k}, \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k})$, $\mathbf{f^k_{int}}(\mathbf{d^k})$ y $\mathbf{res^k}(\mathbf{d^k}, \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k}, \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k})$.
      Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K^k_g}$ $\mathbf{M^k}$ $\mathbf{C^k_k}$, $\mathbf{C_{vis}}$.
      Despejar $\Delta\mathbf{d^{k+1}}$
      Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d^{k+1}} = \mathbf{d^k} + \mathbf{\Delta d^{k+1}}$
      Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\dot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1})$, $(\ddot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1})$.
      Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\dot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$, $(\ddot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$.
      Ensamblar velocidades: $\dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$
      Ensamblar aceleraciones: $\ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$ ´
      Actualizar fuerzas: $\mathbf{f^{k+1}_{ine}}(\mathbf{d^{k+1}}, \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1})$, $\mathbf{f^{k+1}_{int}}(\mathbf{u^{k+1}})$ y $\mathbf{res}(\mathbf{d^{k+1}})$.
      Calcular:
      if $\left\|\Delta\mathbf{d^{k+1}}\right\| < tol_d \left\|\mathbf{d^{k+1}}\right\|$ V $\left\|\mathbf{res}(\mathbf{d^{k+1}})\right\| < tol_r \left\|\mathbf{f_{ext}}\right\|$ V $\mathrm{k} \geq \max_{iter}$ **then**
        finDisp $= 1$
      end if
    end while
    Actualizar $\mathbf{d_t} \leftarrow \mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_T}}$, $\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1}_\mathbf{t+\Delta_T}$, $\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1}_\mathbf{t+\Delta_T}$.
    $t = t + \Delta_T$
  end while

En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo. Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite incrementar la variable temporal en pasos de $Delta_T$. Además debe evaluar los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de $\mathbf{f_{ext}}$. Para resolver el estado del sistema en el tiempo $t + \Delta T$, hace falta resolver la ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (4.16). Con este cometido, se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo 1 se omitió la notación en $t + \Delta T$ para simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

Esta parte del código se pudría subdividir en dos estructuras, primeramente el cálculo del incremento que determina el paso $k+1$, a partir de los desplazamientos en el paso actual k. Luego se actualizan las variables cinemáticas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza mientras que la variable boolena finDisp sea nula. La alteración de estado, se encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos tol_u, en vector de fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter}. Las primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la variable finDisp alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices dinámicas tangentes. Este código se agregó a ONSAS procurando su versatilidad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo pseudocódigo de la función elementbeamforces.m implementada.

El diagrama presentado en el Pseudocódigo 2, puede dividirse en tres divisiones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matrices de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y deformada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de la función beamLocalStaticForces. Desafortunadamente, tanto entradas como salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas locales. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego integrarlas al código general expuesto en 1.

De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia x en la configuración de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I_\rho^{ref}}$ E ν G $\mathbf{X_1}$ $\mathbf{X_2}$ $\mathbf{d_g^e}$

for 1 **to** N_{elem} **do**

Separar vector desplazamientos $\mathbf{d_g} = (\mathbf{u^g}, \mathbf{w^g})$

————-Cálculo de matrices de rotación ————-

Computar matrices de rotación global $\mathbf{R_g^1}$ y $\mathbf{R_g^2}$

Evaluar matriz de rotación de referencia $\mathbf{R_o}$

Hallar $\mathbf{q_1}$ $\mathbf{q_2}$ $\mathbf{q}$ y calcular $\mathbf{e_1}$ $\mathbf{e_2}$ y $\mathbf{e_3}$.

Evaluar maitrz de rotación rígida $\mathbf{R_r}$

Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R_i} = \mathbf{R_r^T R_g^i R_o}$

———————————————————

——— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente ———

Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$

Invertir $\mathbf{R_i}$ y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_\mathbf{i}$.

Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f_{int}^{loc}}$ y matriz tangente local $\mathbf{K_T^{loc}}$.

Construir matrices auxiliares: $\mathbf{H}$ $\mathbf{G}$ $\mathbf{P}$ $\mathbf{B}$ $\mathbf{r}$

Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K_T^g} \leftarrow \mathbf{K_T^{loc}}$ y $\mathbf{f_{int}^g} \leftarrow \mathbf{f_{int}^{loc}}$.

———————————————————

—— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámcias——

Todas las variables dependen de la coordenada (x)

Definir funciones de interpolación N_i

Calcular matrices: $\mathbf{P_1(x)}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{H_1}$.

Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$

Calcular matrices auxiliares: $\mathbf{H_1}$, $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\mathbf{H_2}$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ y $\mathbf{C_4}$.

Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.

Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I_\rho^{ref}}$

Hallar expresiones e integrar en el elemento: $\mathbf{f_{ine}}$ $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C_k}$

Ensamblar : $\mathbf{f_{ine}}$ $\mathbf{M}$, $\mathbf{C_k}$ $\mathbf{K_T^g}$ $\mathbf{f_{int}^g}$

———————————————————

end for

de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadratura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último, los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas, como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices de todo el sistema en coordenadas globales.

Capítulo 5

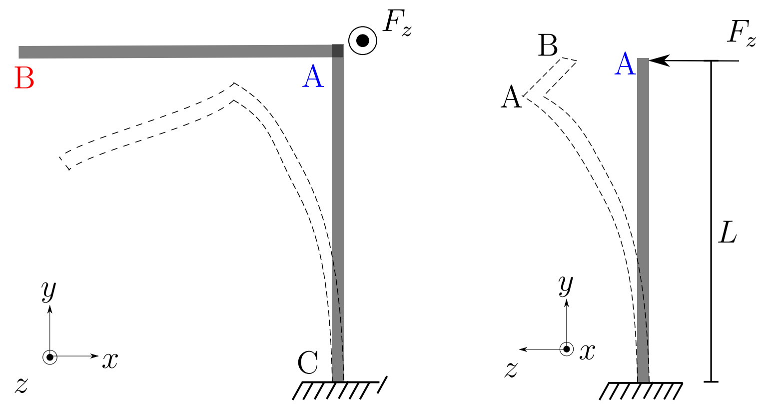
Resultados numéricos

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementación corrotacional detallada en el Capítulo 3, para luego aplicarse a modelos específicos de conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando un computador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de 8 Gb. La formulación se implementó en el software de código abierto ONSAS el cual se ejecutó en GNU-Octave Eaton et al. (2007)y visualizándose los resultados haciendo uso del la herramienta Paraview Ahrens et al. (2014). Vale notar que el hilo conductual de este capítulo fue ideado con un aumento progresivo de complejidad. Capturando en modelos simples y académicos los movimientos fundamentales de los elementos, para garantizar así una representación cabal del fenómeno de oscilación del conductor en servicio.

5.1. Viga en voladizo con ángulo recto

Este ejemplo fue publicado por primera vez en Simo y Vu-Quoc, 1988 y es usualmente considerado en la literatura para validar formulaciones de elementos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales (Albino et al. 2018 Le et al. 2014). El mismo consta de dos barra idénticas en ángulo recto formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo $L = 10$ m tal y como se ilustra en las Figuras 5.1.

Las propiedades del rigideces de torsión, flexión y directa del ejemplo se seleccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales, garantizan movimientos de gran amplitud y para esto deben cumplir determi-



(a) Vista frontal (b) Vista lateral

Figura 5.1: Disposición geométrica de la estructura.

nadas igualdades Por esta razón la elección de dichas magnitudes se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado de Las Ecuaciones (5.1) y (5.2) descritas en la bibliografía. Para este trabajo los segundos momentos de inercia según el eje z e y además de los valores del módulo de elasticidad lineal y transversal valen: $E = G = 10^6$ $A = 1$ $I = J = 10^{-3}$ y $\nu = 0.3$. Se hace notar que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan de sentido.

$$GA = EA = 10^6 \tag{5.1}$$

$$GJ = EI = 10^3 \tag{5.2}$$

La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplazamientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que permiten aplicar una fuerza en el sentido del eje z tal y como se muestra en la Figura 5.2. Este forzante flecta y trosiona al sistema en un plano saliente al xy, produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento, son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la carga. Esta fuerza actúa linealmente en los dos segundos iniciales, crece hasta un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y luego decrece hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual en un corto intervalo de tiempo. Para reproducir este comportamiento altamente dinámico se eligieron 10 elementos por miembro y un incremento de tiempo $\Delta T = 0.25$ s.

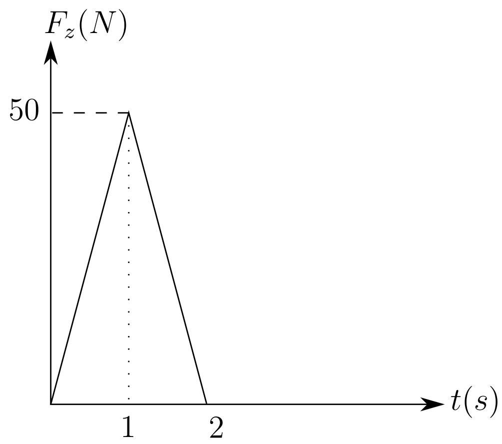
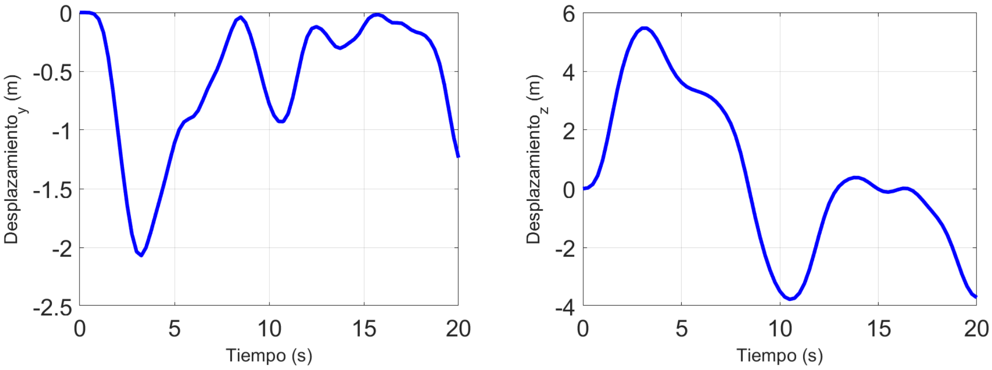


Figura 5.2: Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

El objetivo principal del ejemplo es el validar la librería de códigos corrotacional incorporados en el software ONSAS, por ende, tanto el método de resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en el artículo Le et al. 2014, comparando así resultados semejantes. Consecuentemente se implementó un algoritmo que lleva el nombre de sus creadores (HHT) y se selecciono un valor característico $\alpha = -0.05$ y un valor de parada en desplazamientos de 10^{-7} m. Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de $\Delta T = 0.25$ s.

Para comparar con el paper de referencia se plasmaron gráficamente determinados grados de libertad correspondientes al nodo A. Estos son: el desplazamiento lineal vertical (según el eje y) y el transversales (según z). Los resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras 5.3 en función de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la estructura. En particular, la Figura 5.3(b) denota oscilaciones que alcanzan varios metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exigente en términos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no armónico de vaivén en el eje z, se puede notar la presencia no conservativa de la formulación corrotacional, ya que las amplitudes prestan una tendencia atenuante con el tiempo.

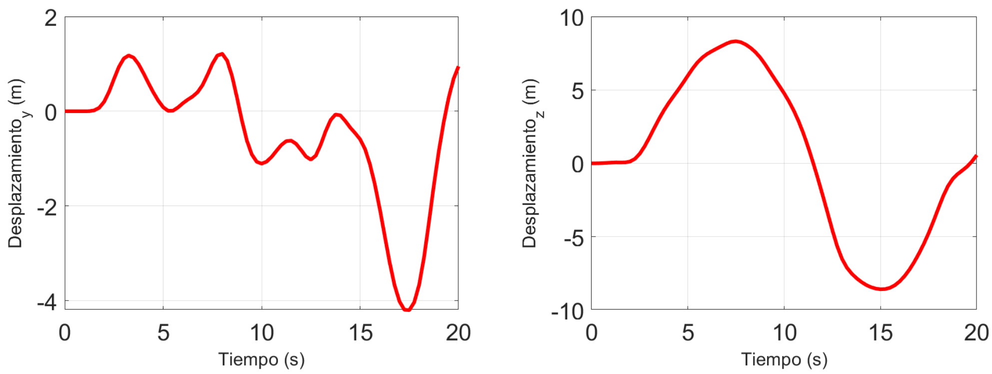
Por otra parte al analizar en la Figura 5.3(a) se observa que los desplazamientos en y, son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido



(a) Desplazamiento vertical según y (b) Desplazamiento transversal según z

Figura 5.3: Desplazamientos de control del nodo A.

de la fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano yz con el versor x saliente, el movimiento del nodo A es análogo al de una viga empotrada con una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de A es siempre en el sentido de $-y$, lo que se refleja en La Figura 5.3(a) y se condice con la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación con los presentados en la bibliografía de referencia Le et al. (2014), observamos similares valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento respecto a las Figuras 5.3 y 5.4. También así los valles y las crestas de la curvas se suceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que el software implementado reproduce correctamente el ejemplo y es capaz de capturar movimientos de flexo-torsión cabalmente.



(a) Desplazamiento vertical según y (b) Desplazamiento transversal según z

Figura 5.4: Desplazamientos de control del nodo B.

Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B. En la Figura

5.4(b) se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente, y una forma que se asemeja a una sinusoide. Esto podría vincularse al modo flector en el plano xz de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la dirección z. Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de AC superpuestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento. El autor del trabajo Le et al. (2014) publicó el desplazamiento en z de B y los resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva. Complementando este análisis podemos comparar los despeamientos del nodos A y B concluyendo que los movimientos inerciales de la barra A-B afectan notoriamente a los desplazamientos del nodo B respecto de A, tanto en frecuencia como en magnitud.

Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se visualizaron mediante el software *Paraview* las deformadas para diferentes instantes de tiempo: $t_1 = 4$ s, $t_2 = 11$ s y $t_1 = 19$ s. En la Figura 5.5 se observan las oscilaciones flexionales para distintos planos yx e yz. Estos movimientos son originados por diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante F_z mientras que en el miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a su unión rígida con el resto de la estructura.

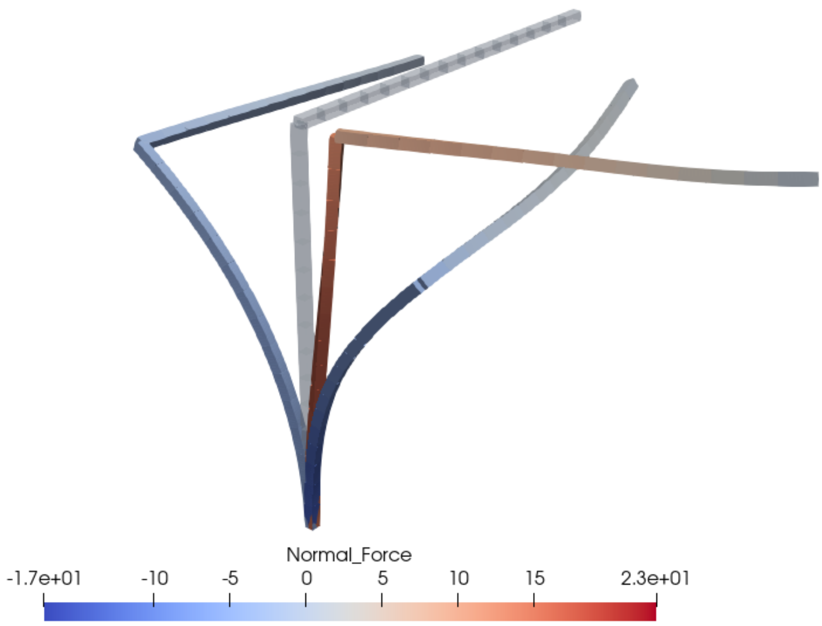
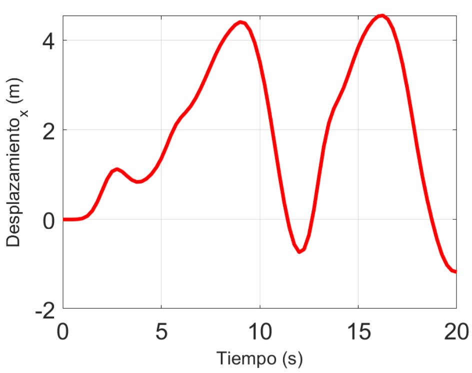
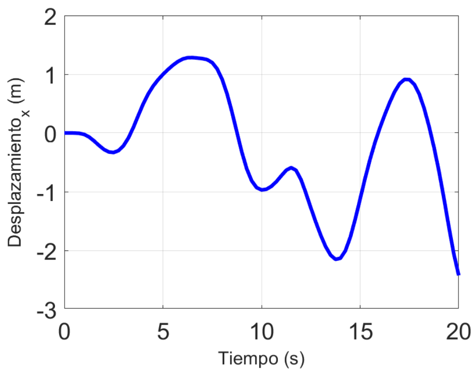


Figura 5.5: Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s.

Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inmanentes a cada elemento en La Figura 5.5. En esta se identifica que el esfuerzo alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando considerables fluctuaciones temporales. En simultaneo, la viga horizontal A-B desarrolla fuerzas normales en todo su largo. Se suceden tanto positivas como negativas, es oportuno notar que un modelo lineal para pequeños desplazamientos concluiría que los esfuerzos en esa viga serían nulos. Además este modelo lineal arrojaría desplazamientos triviales en x para ambos nodos, induciéndose significativos errores para este tipo de cargas de alto impacto en estructuras de exigua rigidez. El modelo implementado desarrolla magnitudes no despreciables de desplazamientos en x tal y como se constata en las Figuras 5.6. He aquí las principales diferencias y la importancia de implementar un modelo considerando no linealidad geométricas, estas consideraciones son esenciales para la aplicación principal de este trabajo.



(a) Desplazamiento según x del nodo B



(b) Desplazamiento según x del nodo A

Figura 5.6: Desplazamientos en x de los nodos A y B

5.2. Modelo simplificado de una linea

En este apartado se presenta un primer modelo simplificado del enfoque central de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de Foti y Martinelli, 2018 mas ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado, como ser el caso de: Luongo y Piccardo, 1998 y Martinelli y Perotti, 2001. El ejemplo consiste en un conductor de trasmisión eléctrica reforzado con núcleo de acero. La raíz de acero forjado tiene como propósito aportar rigidez mecánica al componente, disminuyendo la deflexión y flexibilidad del conjunto. Esto suele ser ventajoso para largos vanos donde la rigidez del conductor es una variable decisiva. Además su construcción no afecta significativamente la resistividad eléctrica debido al efecto de reluctancia radial variable. que obliga a la corriente a fluir principalmente en la superficie.

El modelo del conductor esta estandarizado bajo la norma IEC europea *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 y se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la cantidad de cables en el núcleo y en la periferia respectivamente. El diámetro se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos de aluminio (color gris en la Figura 5.7) y los 7 de acero (color azul). Además asumiremos despreciables, sobre las propiedades del flujo y la geometría, las irregularidades de su perfil en la silueta.

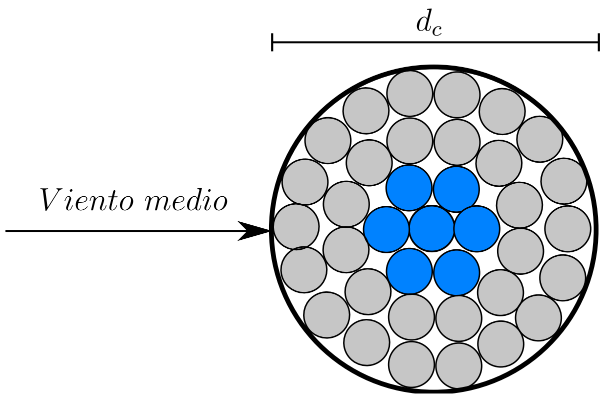


Figura 5.7: Esquema del conductor ASCR 7/26.

El vano tiene un largo Lc=267 m mientras que el cable en su configuración deformada mide 269 m. Esta diferencia de longitudes del conductor en su eje axial, responde a un tensado que se realiza durante su instalación. En la etapa de montaje del conductor, se ajusta la pre-tensión de manera tal que la altura ratifique los requerimientos de seguridad según la urbanización, contaminación magnética y tipografía del terreno. Para esta simulación no se tendrá en cuenta la tensión previa al momento de la colocación pero si la tensión debida a la carga del peso. Vale notar que el valor de los esfuerzos iniciales generados durante la instalación es menor a un 2 % respecto a los esfuerzos axiales desarrollados durante su movimiento. De igual manera se resalta que para este ejemplo no se consideró amortiguamiento aerodinámico de fuerzas viscosas.

El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad E, módulo de poisson ν, una densidad similar ρ y una rigidez flexional y torsional EI y GJ respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de la norma *ISO:9001* y se presentan en La Tabla 5.1.

d_c(cm)	m(kg/m)	EA kN	EI N m^2	GJ Nm^2
2.81	1.8	29700	2100	159

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo $L_a = 3$ m cada una de ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas, para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en las tres direcciones en x, z e y en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan correctamente las presentadas por Foti y Martinelli (2018), donde los extremos se encuentran sujetados. Habiendo detallado someramente los componentes que integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría en la Figura 5.8.

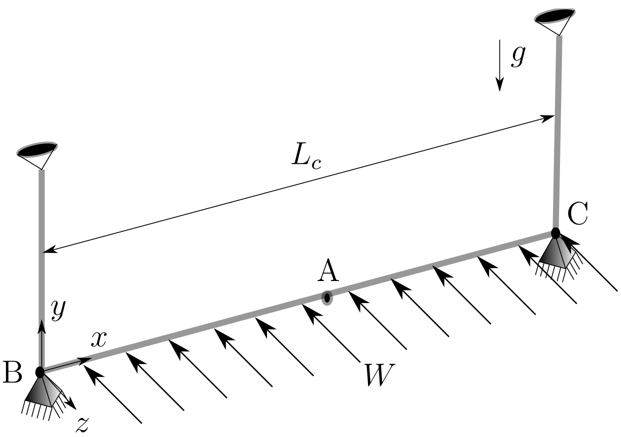


Figura 5.8: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

Existen una diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postulados por Luongo y Piccardo (1998) y Martinelli y Perotti (2001), en donde se resolvió mediante elementos de barra trinodal y de viga corrtacional respectivamente. Para amibos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generadas artificialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se despreciaran las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flujo medio W en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico y alcanza la velocidad media máxima W_{max} en 20 segundos. Este valor de velocidad se calculó según *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 considerando un flujo tipo capa límite atmosférica con las propiedades indicadas en La Tabla 5.2 asociadas a un tipo de terreno sub-urbano o industrial.

k_r	z_0	z_{min}
0.22	0.3 m	8 m

Tabla 5.2: Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para W_{max}

La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gravitatoria según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.8. No se muestran los resultados de esta etapa debido a que carecen de relevancia y en el trabajo de referencia se toma la catenaria como condición inicial. La fuerza peso es relevante desde un punto de vista dinámico pues mitiga posibles inestabilidades cuando las normales de los elementos son próximas a cero. Una vez estabilizada la respuesta del sistema por el amortiguamiento interno, se aplica una fuerza lineal de media positiva según el eje $-z$ desde cero hasta W_{max}. Esta forma del perfil podría emular el aumento modulado de un presiones en un túnel de viento entre las bocas de entrada y descarga. La forma se muestra en La Figura 5.9.

Para este estudio no se considerará la fuerza perpendicular al sentido de flujo: lift. Esta es despreciada por diferentes autores (Lee y Perkins, 1992) (Foti y Martinelli, 2016) (Papailiou, 1997) principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares a los flujos esta relacionada posibles asimetrías tangenciales en el perfil. Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce en una fuerza de lift nula. Esta es la principal diferencia de este caso en comparación por lo propuesto en la literatura fuente (Luongo et al. 1984) y (Foti y Martinelli, 2018) donde si son considerados

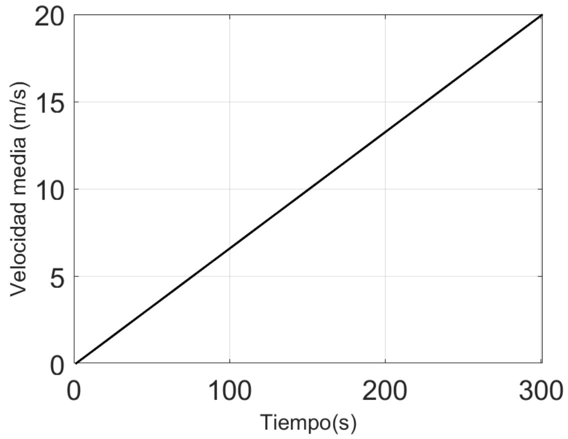


Figura 5.9: Perfil de velocidad progresiva z.

perfiles con formaciones de hielo.

El perfil de velocidades en la Figura 5.9 genera fuerzas sobre la estructura. La orientación del cable es tal que el flujo en todo punto es transversal a el. Los valores de $C_d = 1.5$ se extrajeron la referencia (Foti y Martinelli, 2018). Se aclara que el angulo de ataque varía durante la trayectoria del cable, no obstante el coeficiente C_d permanece constate debido a la simetría de revolución del perfil. Se gráfica entonces las fuerzas sobre cada nodo del conductor en La Figura 5.10.

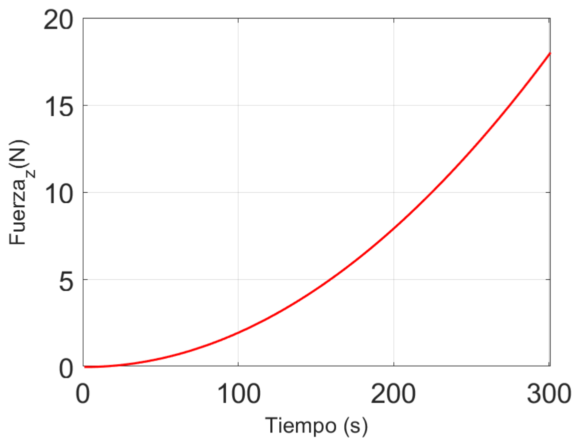
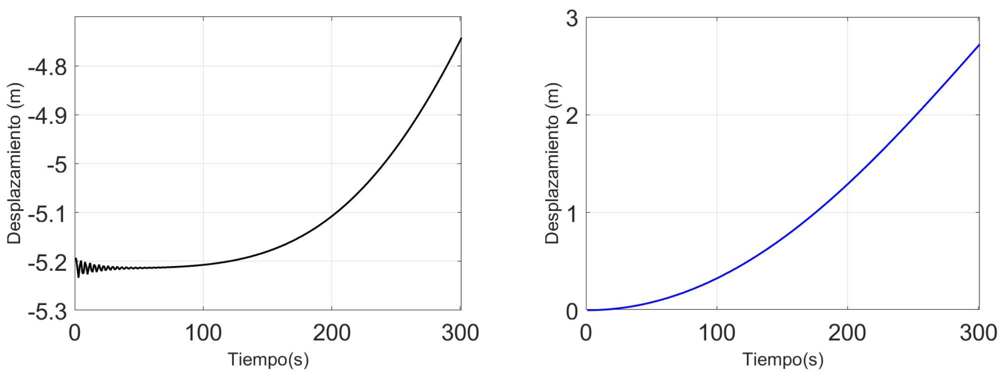


Figura 5.10: Perfil de fuerza nodal según el eje z.

A continuación se exponen los desplazamientos verticales y horizontales del nodo A. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Esta homología entre los perfiles de ambas magnitudes es explicable mediante un análisis de Fourier del sistema. Haciendo referencia a la función de transferencia que relaciona a ambas variables, la misma produce unicamente en desfazaje en estado estacionario. Como la curva de carga es de manera gradual y no presenta exabruptos en el tiempo, podemos suponer que la respuesta es cuasi-estática. Se presentan entonces en las Figuras 5.11 los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente del nodo A situado en el punto medio del vano.



(a) Desplazamiento según z del nodo A (b) Desplazamiento según y del nodo A

Figura 5.11: Desplazamientos del nodo A.

Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la literatura fuente (Foti y Martinelli (2018)), se capturo el ángulo de balanceo del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función tangente que vincuula el ángulo respecto da la deformada en el eje x con los desplazamiento en z e y. Para ilustrar al lector se realizó el esquema mostrado en la Figura 5.12 del ángulo Φ en cuestión.

Se graficaron las trayectorias del angulo para diferentes valores de velocidad media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica. Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante al de que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte, en comparación con los resultados presentados por Foti y Martinelli, 2018 se observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamente, lo que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a

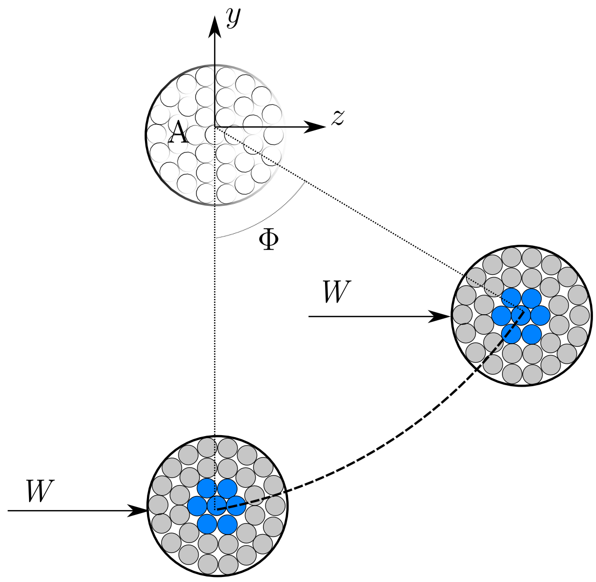


Figura 5.12: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincornizadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia del lift y la variación del angulo de ataque con el ángulo. Como en la referencia Foti y Martinelli, 2018 se toman en cuenta un perfil con formaciones de hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.

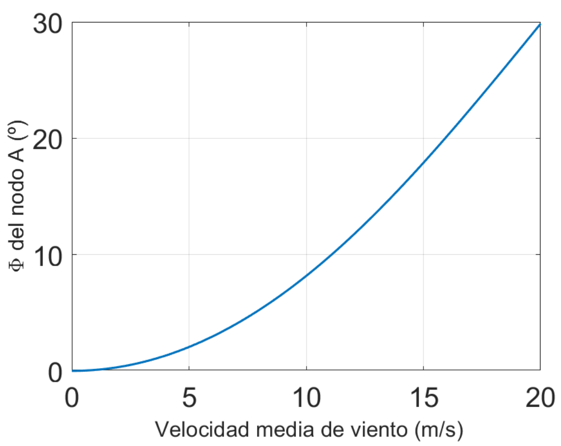


Figura 5.13: Angulo de balanceo Φ en función de la velocidad media $W(t)$.

El ejemplo permite inferir que la respuesta numéricas del modelo representan de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores de trasmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejada en los resultados arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

5.3. Sistema de transmisión eléctrica

Este apartado ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de transmisión eléctricas afectados por vientos extremos no sinópticos, en particular, TC. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizando un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos vanos de idéntico largo D_v= 206.5 m tal cual se índica el Esquema 5.14. Para el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1 y 2 respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del primer y segundo vano con los literales C y B respectivamente. Con el objetivo de representar una geometría real de una línea de alta tensión y no aborrcer al lector con descripciones de propiedades, los conductores de la simulación se corresponden con el Ejemplo 5.2 y cuyas propiedades mecánicas se explicitan en la Tabla 5.1.

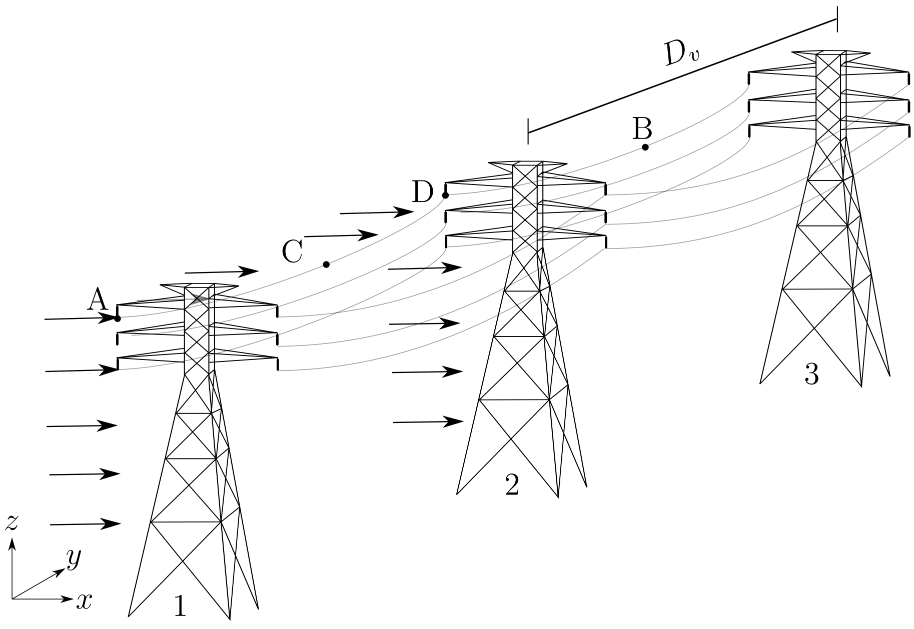


Figura 5.14: Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo.

En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que transportan un voltaje mayor a 72.5 kV. Este valor de tensión es eminentemente peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elementos aisladores. Estas cadenas aisladoras tradicionalmente de vidrio y cerámicas han ido mutando a poliméricas con un núcleo sólido, aumentando así su tenacidad y flexibilidad. Según la normativa Norma IEC 60815, para alta tensión, deben medir un largo de 10 in. Para el modelo las cadenas se modelaron como barras de Green, debido a su exigua rigidez a flexión y su articulación de anclaje en ambos extremos. Además se consideró un modulo de elasticidad aproximado E = 70 GPa según los estudios experimentales realizados por la referencia Crespo, 2019.

Al igual que los aisladores, las barras de la estructura metálica se modelaron con elementos de tipo green, con una ley material Saint-Venant-Kirchhoff con $E = 300$ GPa y $\nu = 0.3$. Estos valores se corresponden con un acero ASTM A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y ASTM º65. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre los opuestos de la cercha 14.8 m. Además son capaces de sostener 6 lineas, estas se corresponden a cada altura, con cada una de las fases eléctricas. Las lineas se encuentran colocadas a tres cotas distintas $L_1 = 31.75$ m, $L_2 = 26.03$ m,$L_3 = 39.76$ m, tal y como se muestra en 5.15.

La simulación consta de dos etapas, primeramente partiendo de la configuración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.15. Nuevamente, al igual que en el Ejemplo 5.2 , esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el amortiguamiento aerodinámico en desplazamientos. Este se calculó como una aproximación a partir de la literatura Matheson y Holmes, 1981 promediando la velocidad media de viento, resultando $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \overline{v} = 0.15$ Ns/m.

Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta convectiva capturado en la referencia Stengel y Thiele, 2017, positiva según el eje x. No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales en la coordenada axial del cable, asociada a una función de coherencia de correlación espacial debida a la turbulencia. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó unicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer resultados respecto al comportamiento felxional en el plano yz, lo que se evidenciará a continuación en disimil desarrollo de las trayectorias entre los nodos

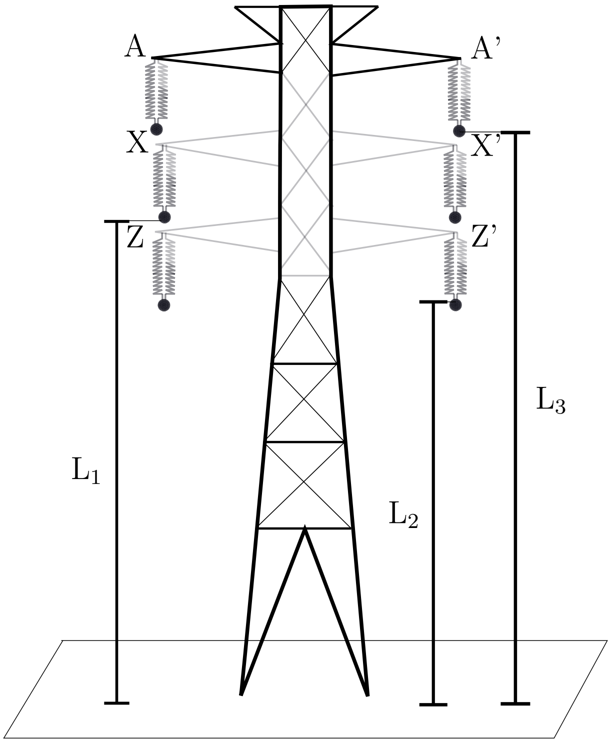
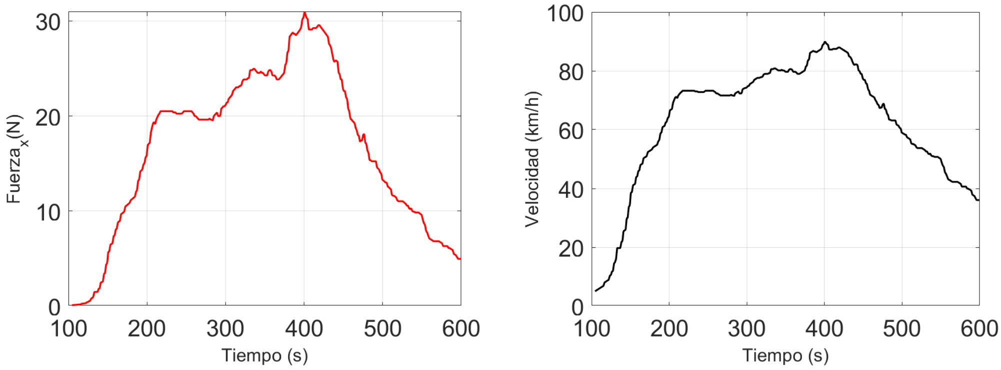


Figura 5.15: Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

A, C, D yB. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa en que estos fenómenos tiene dimensiones espaciales del orden de 40 metros a 40 kilómetros Fujita (1985), consecuentemente es factible que la tormenta afecte a una fracción del tendido. Se muestra continuación en las Figuras 5.16(b) y 5.16(a) los valores de fuerza y velocidad aplicados en la coordenada x entre los nodos A y D para cada instante.



(a) Carga aplicada sobre los nodos.

(b) Perfil de velocidades de viento.

Las tormentas severas generan CD donde las velocidades aumentan vertiginosamente en pequeños intervalos de tiempo, alcanzando umbrales de hasta 270 km/h Fujita, 1985. Para este modelo, el perfil representado es menor tenor, mas no el aumento súbito del fenómeno. La velocidad se eleva del valor nulo a 80 km/h en menos de 3 minutos, tal y como se observa en la Figura 5.16(b). Debido al impacto de del viento sobre el conductor se generan fuerzas, estas se calcularon con los valores de coeficiente drag y fórmula detalladas en el Ejemplo 5.2 anterior extraídos de la referencia Foti y Martinelli (2016).

Ya se ha resaltado en retiradas ocasiones los posibles daños severos que puede ocasionar un excesivo balanceo del conductor. Volores desmedidios de esta variable deben controlarse en todos los aisladores rotulados en el Esquema 5.15. Consecuentemente, se compararon cuantitativamente las oscilaciones entre fases (A-A', X-X', Z-Z'), no apreciándose sensibles diferencias, tanto en desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen apreciables variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A'). Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho de omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe antes el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando que los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A como variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en los ejes x y z como también el ángulo de oscilación Φ tal y cual se observa en la Figura 5.16.

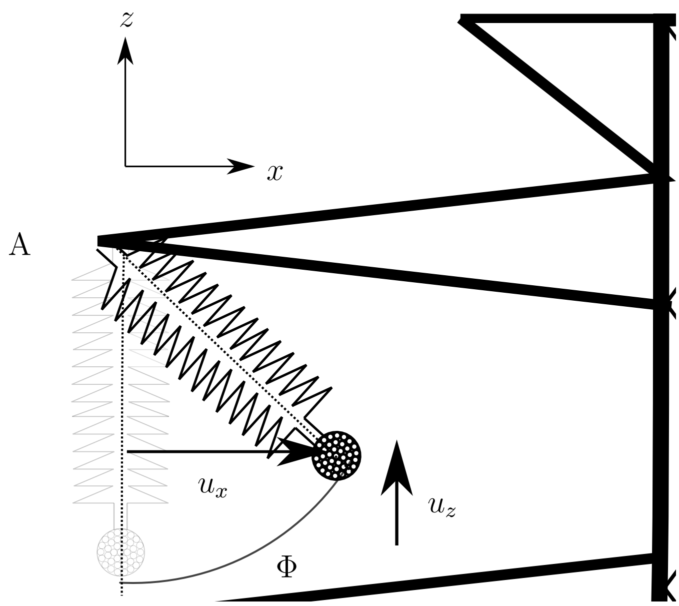
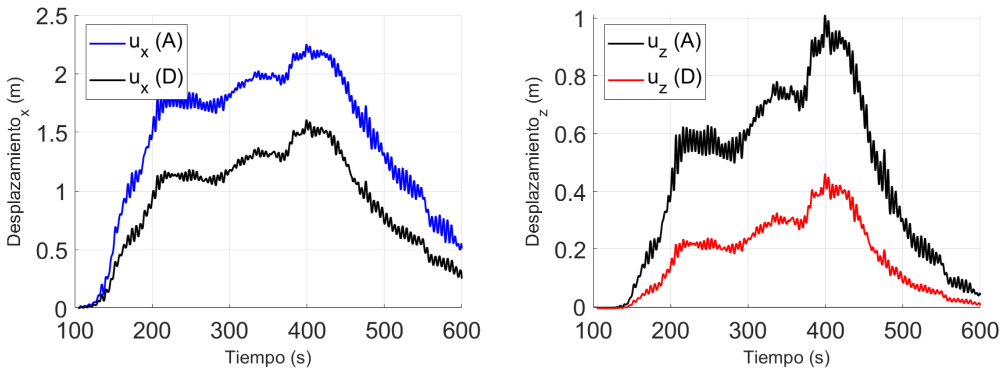


Figura 5.16: Ilustración de magnitudes de balanceo.

El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de $\Delta T = 0.5$ s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico $\alpha = -0.05$, luego de un arduo y tedioso procedimiento iterativo de ajuste de parámetros se realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con tolerancias en desplazamientos y en fuerzas residuales de 10^{-5} m y 10^{-5} N respectivamente.

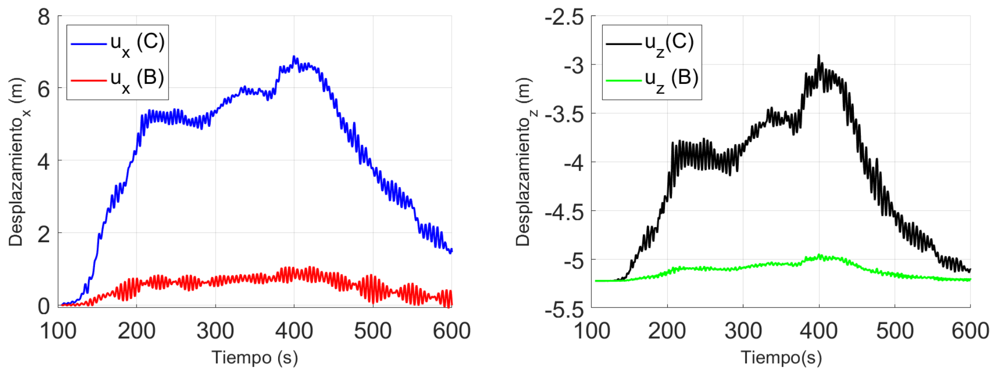
A continuación se figuran los desplazamientos verticales y horizontales de los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magnitudes externas, responden a un argumento basado en el análisis en frecuencia del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en estado estacionario. En 5.17(a) y 5.17(b) se observan los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo no representa los cargas inerciales de los vanos contiguos a este.



(a) Desplazamientos en x nodos A, D.
(b) Desplazamientos en z nodo A, D.

Figura 5.17: Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D.

Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del conductor también despliguean grandes desplazamientos, este fenómeno resulta indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de seguridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proximidad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los componentes. Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos para los nodos B y C.



(a) Desplazamientos en x nodos B,C.

(b) Desplazamientos en z nodo B, C.

Figura 5.18: Desplazamientos de los nodos medios B y C.

En la Figura 5.18(a) se aprecia que el orden de los movimientos, para ambos nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación entre estos es de unos 14 metros podremos garantizar que no habrá impactos entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas lineas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central, para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe considerarse a la hora del diseño. En la Figura 5.18(b) se muestra que el descenso máximo de la linea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en puntos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctuación temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Gráficas 5.17.

En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables cinemáticas se elaboró la Figura 5.19 carga desplazamiento para el nodo A. En abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos se graficó un calculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo en el área de ingeniería del viento (Stengel y Thiele, 2017), (Durañona y Cataldo, 2009) (Yang y Hong, 2016).

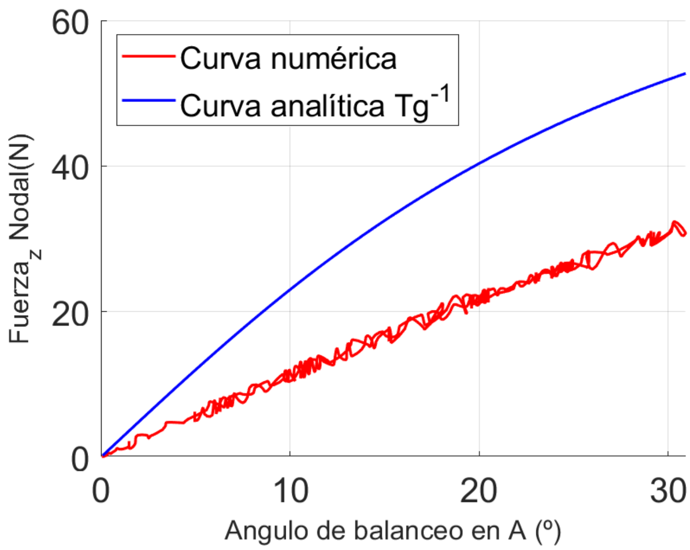


Figura 5.19: Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

El cálculo analítico resulta de análisis estático plano, donde se iguala la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones pueden afectar las fuerzas internas trasmitidas al elemento aislador. Asimismo, ese calculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial, proveniente de las distintas orientación de la linea respecto al ángulo de incidencia del flujo. En la Figura 5.19 se evidencian las diferencias entre los modelos y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales mencionadas, se muestran la configuración indefomradas en gris y las deformadas con una barra de colores en desplazamientos para el instante $t = 400s$ en la Figura 5.20.

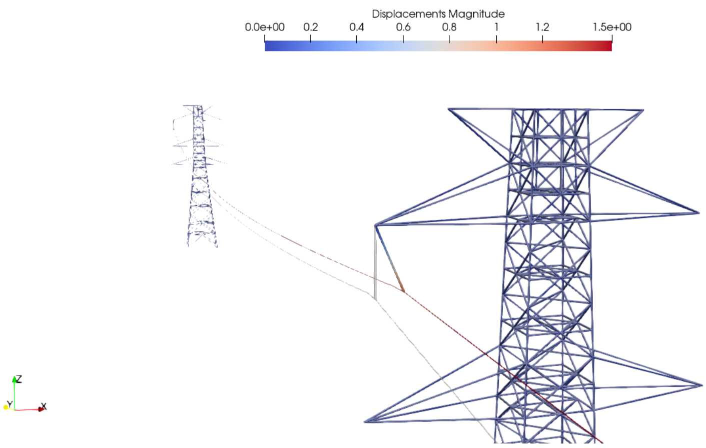


Figura 5.20: Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s.

Capítulo 6

Conclusiones

El presente capítulo puede separarse en tres secciones que se relacionan con diferentes aristas o perspectivas del trabajo llevado a cabo. En primera instancia, se detallan las consideraciones finales y de síntesis, desde un punto de vista técnico sobre los resultados obtenidos. Posteriormente, se narran los aspectos del desarrollo académico de esta tesis, como trabajo culmine de una etapa formativa fundamental para quien escribe. Luego de esto, se analizan limitaciones que deberían mejorase posibles trabajos a futuro, para finalizar con una reflexión crítica sobre el sujeto y el método científico.

6.1. Conclusiones técnicas

6.1.1. Sobre el fenómeno

Inicialmente se consultó el estado del arte en el área de ingeniería del viento y estructural. Se analizaron bibliografías en materia de simulaciones numéricas aplicadas a conducentes eléctricos, con abordajes semi-analíticos y computacionales. También, se estudiaron trabajos nacionales e internacionales, desde un punto de vista cualitativo y experimental de CD y sus posibles perjuicios sobre lineas de trasmisión eléctrica. Asimismo, debido a numerosas ventajas se interiorizó y eligió la formulación corrotacional de vigas 3D para grandes desplazamientos y rotaciones. Una vez ahondado en la temática, se implementó y validó un modelo corrotacional consistente robusto y eficaz, capaz de captar y reproducir desplazamientos de gran amplitud con numero reducido de elementos.

Según la bibliografía estudiada, hay vasta evidencia de que el fenómeno de TC ha afectado severamente la calidad e integridad de la vida humana a lo largo y ancho del globo terráqueo. En particular, debido a las condiciones climáticas singulares de la región, y el progresivo calentamiento global, se han intensificado los daños devastadores en los sistemas de trasmisión y distribución eléctrica nacionales. Induciendo inevitablemente, en costos millonarios de reparación sobre las instalaciones, y perdidas durante la interrupción del suministro. Esta investigación construye una herramienta de simulación computacional, capaz de emular los desmedidos desplazamientos y esfuerzos que estos eventos producen sobre los sistemas de trasmisión eléctrica.

Uniendo resultados de diferentes trabajos internacionales con los resultados del ejemplo 5.3, es posible teorizar que la mayoría de las incidencias ocurridas en las líneas Palmar-Montevideo de 500kV, pueden deberse al pasaje de tormentas severas sobre la zona. Estas tormentas producen CD, que ejercen cargas desmesuradas sobre el conductor, en el orden de minutos, imponiendo ángulos de balanceo excesivos,acercando los conductores a las torres, a una distancia tal, que inminentes descarga a tierra pueden sacar del serivcio a la linea. Además según los estudios, las normativas en el diseño de sistemas eléctricos de trasmisión, considerando flujos tipo capa límite atmosférica, se encuentra subdimensionando. Esto se debe a que los periodos de retorno para velocidades de hasta 100 km/h es menor para CD en comparación con vientos tipo capa límite atmosférica.

6.1.2. Sobre la metodología

En la Sección 4.1.2 se desarrolló un estudio general sobre los campos de velocidades absolutos y relativos, vinculados al efecto relativo del movimiento del conductor respecto al viento. Este enfoque no se encontró en la bibliografía consultada, esclareciéndose la dinámica del fenómeno. A su vez, según la Figura 4.4, se develó que despreciar la velocidad perpendicular frente a la componente media, en el sentido transversal z, es equivalente a el ángulo de ataque sea nulo y también así, la componente del drag según el sentido de y. Por otra parte, se concluyó que al considerar los campos relativos aparece un término aeroelástico, que emerge de la diferencia de velocidades, vista desde un refrencial solidario al conductor. A este termino se lo identifica en la materia con el nombre de amortiguaneinto aerodinámico y, según lo estudiado, no había sido incluido en la metodología corrotacional.

Una vez descritas las hipótesis en este mismo capítulo, en la Sección 4.2.2 se generó un análisis analítico no explicado en la bibliografía de referencia (Le et al. 2014). En este apartado se aplicó el método de resolución para problemas dinámicos de HHT, incondicionalmente estable, explicando con detenimiento la deducción y premisas utilizadas. Complementario, al desarrollo teórico, se establecieron los principales pseudocódigos subyacentes a la implementación numérica en el Software ONSAS. Esta sección 4.2.3 se desarrolló con el objetivo de esquematizar y explicar la implementación de la formulación, ademas de sentar las bases para posibles estudios e investigaciones posteriores.

En función de los avances originales de esta investigación mencionados en los párrafos anteriores. Esta tesis constituye un desarrollo complementario a la formulación propuesta, por Le et al. 2014, incluyendo fuerzas aerodinámicas linealizadas o fuerzas viscosas en el estudio analítico. Esto puede aplicarse a un espectro enorme de estructuras representables por elementos de viga, con grandes desplazamientos y rotaciones, atacadas por el viento. Dado este diverso habaníco de aplicaciones, el interés de la comunidad científica puede ser un impulso catalizador para ciertas publicaciones a futuro.

6.1.3. Sobre los resultados

Esta formulación se validó con el ejemplo 5.1 benchmark del folclore corrotacional presentado por Simo y Vu-Quoc, 1988. Este es cargado con una fuerza abrupta y de severa magnitud, en relación a al rigidez de la estructura alcanzando un valor de 50 N en apenas 2 segundos de simulación, tal y como se muestra en la Figura 5.2. Esta fuerza posee una esencia análoga al fenómeno de TC per se. Esa semejanza radia en la fuerza aumenta estrepitosamente, en un corto lapso de tiempo, por ende la capacidad del modelo de reproducir este tipo de impactos es fundamental para poder representar el fenómeno central de este trabajo.

En la Figura 5.3(b) se observan amplitudes que alcanzan los 8 metros cuando la estructura mide 10. Esto evidencia, la fuerte presencia de grandes desplazamientos y rotaciones. Asimismo, en la dirección z, se puede observar el carácter no conservativo de la formulación corrotacional, ya que los valles y crestas de las respuesta, prestan una tendencia decreciente con el tiempo. En relación a los desplazamientos en el sentido de y del nodo A, presentados en la Figura 5.3(a), se observa el singo negativo de este, concordando con lo esperado intuitivamente según la fuerza aplicada. Por último, el resultado mas importante de este ejemplo, se destila al cotejar las respuestas del as Figuras 5.3(a), 5.3(b) y 5.4(b) con lo publicado por le articulo de referencia (Le et al. 2014). Al comparar estas figuras se concluye que el modelo implementado es capaz de representar cabalmente movimientos de gran amplitud, con apenas 10 elementos por miembro y unas paso temporal de 0.25 s. Esto permitió validar la formulación para este caso y aplicarla a dominios mas complejos específicamente con el foco en conductores eléctricos.

Como primer ejemplo aplicado al modelado de conductores se eligió un problema postulado en la publicación (Foti y Martinelli, 2016). Para esto, se investigó la normativa *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 que detalla propiedades geométricas y constructivas de conductores para alta y media tensión. Con el fin de cotejar fielmente los resultados obtenidos, se extrajeron, tanto los parámetros del flujo, como las propiedades geométricas y materiales, del trabajo de referencia correspondientes con un conductor DRAKE ASCR 7/26. No obstante, con el objetivo acercar la representación al fenómeno, se incorporaron dos elementos aisladores ilustrativos, que por sus condiciones de borde, no afectan el comportamiento dinámico y cinemático del problema. (Ver Figura 5.8)

Para este ejemplo de la Sección 5.2, se aplicó un viento progresivo desde un valor nulo hasta una velocidad de un perfil Capa límite atmosférica en 20 segundos, según la Figura 5.9. Este cálculo se realizó considerando las propiedades extraídas de la norma (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003), explicitadas en la Tabla 5.1. Al espejar los perfiles de velocidad presentados en las Figuras 5.11(b) y 5.11(a), con las fuerzas aplicadas de la Ilustración 5.10 se observa una homología. Esto se fundamenta con un análisis de Foruier donde los desplazamientos ofician de salida y las fuerzas de entrada.

Las contribuciones principales del Ejemplo 5.2 se desprenden al contrastar los resultados del ángulo Φ, gratificado en la Figura 5.12 con los presentados por Foti y Martinelli. De este análisis se extraen ciertos paralelismos y discordancias. En primer lugar, los perfiles arrojados son semejantes, presentando un relación cuadrática con la velocidad. Esto se atribuye a la función de dependencia cuadrática entre la fuerza y la velocidad media de viento. Sin embargo, para el caso implementado en esta tesis se alcanzan mayores valores de ángulo. Esto puede deberse a múltiples diferencias entre los modelos: la omisión de las componentes turbulentas del flujo, el estado inicial de tensado y la presencia de hielo en las lineas. Los últimos dos factores intuitivamente tienden a disminuir el angulo máximo alcanzado por la linea, durante el transcurso del movimiento, por su mayor rigidez inicial e inercial. Dado estos resultados, se decidió llevar las simulaciones a un grado mayor de complejidad, e implementar un modelo con múltiples elementos simulando un sistema de trasmisión eléctrica.

Este es el ejemplo descrito en la sección 5.3, y es el resultado principal de este trabajo. Se acoplaron diferentes componentes de un sistema de alta tensión conductores, aisladores y torres. Con este objetivo, se validaron ejemplos intermedios integrando elementos de biela tipo Green y de viga corrotacional con resultados lineales y dinámicos conocidos. Las geometrías y propiedades que integraron el modelo son extraídas de bibliografías experimentales y normativas buscando representar y emular el fenómeno de forma realista.

Con el mismo cometido, el perfil de viento se extrajo de estudios experimentales en el Norte de Alemania durante el transcurso de una tormenta convectiva, tipo corriente descendente, publicado en (Stengel y Thiele, 2017). Esta es de una magnitud intensa, aunque no en comparación con los resultados capturados en diferentes estudios de campo nacionales, en (Durañona y Cataldo, 2009) y (Duranona et al. 2019). En estos artículos se presentan medidas que alcanzan umbrales de 88.2 a 162 km/h a 45 m de altura. Otra diferencia al respecto, refiere al gradiente de velocidad, el flujo introducido numéricamente del autor Stengel y Thiele posee una menor aceleración en comparación con tormentas en el territorio uruguayo.

La carga del viento se distribuyo en el primer vano, provocando un perfil que ataque diferente a la linea en su coordenada axial. Esto genera un efecto de desfazaje entre los conductores de los vanos entre la torres 1-2 y 2-3 de la Figura 5.20. Esta variabilidad del flujo, busca representar un fenómeno de oscilación axial, relacionado con la presencia de vórtices a lo largo del espacio. Las diferencias en desplazamientos de los puntos A B C Y D de la cadena aisladora, se evidencia en las Figuras 5.18 y 5.17. Por mas que los movimientos posean diferentes amplitudes de banda, los perfiles obtenidos se encuentran gráficamente emparentados con el perfil de la tormenta en la Figura 5.16(b), al igual que en el Ejemplo 5.2 se podría fundamentar mediante un análisis en frecuencia de Fourier.

Finalmente, se creó un análisis de contraste con un modelo ampliamente urilizado en el área de Ingeniería del Viento. Esta se utiliza para calcular de forma cuasiestaitca, utilizando una fórmula de arctoangente. Esta se basa en un péndulo cuasiestático plano, omitiendo términos inerciales. Los trabajos de Stengel y Thiele, 2017, Durañona y Cataldo, 2009 y Yan et al. 2009 aplican esta aproximación simplificadora. Si bien en los resultados del Ejemplo 5.3 no son comprables, la aproximación plana no funciona. Para este caso en particular, la curva numérica parece reflejar una linealidad, evaluar el ángulo de la cadena mediante el modelo estático, arrojaría un resultado de sobrestimado. Esto se detalla en la Figura 5.19.

Estos resultados presentan indicios que para enfrentar la problemática, los códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complementario para el diseño de sistemas de trasmisión y distribución. Según contactos establecidos con la empresa de transmisión eléctrica (UTE), las torres de alta y media tensión suelen encargarse a empresas privadas que obtienen la obra por licitación y entregan las instalaciones con llave en mano. Estos proyectos suelen importar soluciones del extranjero, que pueden ser no aplicables a las condiciones nacionales. Esto se explica por la carencia de las normas internacionales en materia de fenómenos de viento no sinópticos como CD y ciclones extratropicales. Esto se intensifica en el territorio para sistemas montados hace 30 años en superposición con la asiduidad, intensidad y frecuencia de TC.

6.2. Conclusiones de formación

El desarrollo de este trabajo constituyó una instancia de formación fundamental y enriquecedora para el autor enmarcada dentro del programa de Maestría en Ingeniería Estructural. Este documento es la síntesis y aplicación de un conjunto de conocimientos profundizados durante la actividad programada, aplicada al modelado numérico de estructuras. Desde la óptica del autor, la creación de herramientas endógenas con foco en atacar problemáticas a nivel nacional constituye un pilar fundamental en el desarrollo autónomo y original de la ingeniería uruguaya. Este trabajo es una muestra de la convicción y determinación, que el conocimiento académico, debe desarrollarse de forma transparente, comunitaria y democrática. Es por esto, que todos los códigos utilizados en esta investigación se implementaron en la herramienta de software libre ONSAS. Esto abre la posibilidad a cualquier tercero, ya sea una organización o persona, de estudiar, modificar y difundir los códigos creados como también aplicarlos a sus propias necesidades.

6.3. Trabajos a futuro

Actualmente este trabajo abre claras líneas de investigación y desarrollo para continuar la mejora de los modelos que se aproximen a la realidad con mayor precisión. Como trabajo a futuro para continuar la linea de investigación con un encare general se proponen los siguientes lineamientos:

1. Incluir en el análisis teórico de la formulación corrotacional condiciones de Dirichlet no homogéneas en desplazamientos, que sean capaces de representar el tensado del conductor durante la instalación. La hipótesis reduccionista sobre la tensión inicial, aparenta ser imprecisa respecto a la rigidez del sistema y tiende a reducir la exactitud en la representación del fenómeno. Según el punto de vista del autor, esta implementación en ONSAS es el punto de partida en la continuación de este trabajo.
2. Implementar un módulo modal dentro del ONSAS capaz de calcular los modos estructurales, insumo fundamental para realizar un análisis en frecuencia de posibles resonancias viento-conductor.
3. Agregar al desarrollo analítico de la formulación corrotacional la posibilidad de incluir relaciones de fuerza viscosas, no lineales con diferentes coeficientes de drag y lift de acuerdo al perfil geométrico de la sección e implementarlo en el Software ONSAS.
4. Agregar al modelo del Ejemplo 5.3 los elementos separadores con mas de un conductor por aislador. En las instalaciones visitadas de forma presencial, se observaron una serie de separadores que mantienen distanciados los conductores evitando el cortocircuito. Además, al unir cuatro cables generan una mayor rigidez e inercia en los tendidos. Este análisis deberá incluir diferentes valores de coeficientes de drag dada la proximidad entre conductores y sus efectos sobre las líneas de flujo.
5. Verificar el no deslizamiento interno entre las lingas que conforman el conductor, según los estudios propuestos por Foti y Martinelli, 2016. Esto permitiría verificar la hipótesis asumida respecto al comportamiento de unión que mantiene el conductor durante sus trayectorias. Asu vez generar un aporte original estudiando como las TC afectan al fenómeno de deslizamiento interno de Papailiou, 1997.
6. Generar un análisis de malla en el numero de elementos por unidad de largo del conductor y sensibilidad respecto a las condiciones de borde establecidas. Esto permitiría estudiar el grado de discretización óptimo,

para minimizar el error numérico sin incurrir en un tiempo excesivo de simulación.

7. Integrar la herramienta ONSAS con un solver de fluidos como por ejemplo el caffa.3d.MBRi basado en volúmenes finitos con paralelización multiforntal Mendina et al. 2014. Esta ardua integración permitiría generar una herramienta sumamente potente para atacar problemas de interacción fluido-estructura.

Con el objetivo de generar una herramienta de diseño complementario para UTE se proponen los siguientes trabajos a futuro:

1. Incorporar diferentes geometrías de torres presentes en los distintos tendidos de distribución del país. Según los intercambios con el personal de trasmisión de UTE, las lineas de distribución, a partir de la década del 2000, respecto a los que se representaron el Ejemplo 5.3 cambiaron las geometrías de torres. Es importante este análisis para lograr emular la influencia de la arquitectura de las torres, en la aproximación excesiva del conductor a las barras. De igual manera, adquirir datos reales aportados por UTE podría aportar un valor significativo a esta investigación.
2. Incorporar al modelo el agarre doble, que en determinadas ocasiones, se dispone en las lineas centrales de la torre. Esta es una solución ante la aproximación inminente del aislador, consiste en instalar una cadena aisladora extra que oficia de sujetador adicional para los conductores. Rigidizando y evitando de este modo el balanceo desmesurado. Otro tipo de soluciones implantadas, consiste en agregar pesos sobre puntos estratégicos en las lineas, aumentando la inercia del sistema. En este caso, la elección del peso consiste en un compromiso entre los esfuerzos generados en el cable sin alcanzar la fluencia y la masa que atenúa el balanceo. Este tipo de soluciones paliativas resultan interesantes como objeto de simulación.

6.4. Reflexión

Antes que nada, es necesario realizar una arqueología de las palabras sujeto y fenómeno en castellano. Sujeto en latín *sub*-iectum significa lo que esta debajo, según una interpretación posmoderna. Desde esta perspectiva, es el sujeto el sustrato de cualquier ente, que lo dota de sustancia, colores, palabras y formas. Por otra parte, fenómeno tiene una raíz etimológica en la palabra *phainomenon* al igual que la palabra fantasía. Esto alude a lo que se muestra, lo que se deja ver, lo que brilla. Ahora bien, en el acto de percibir cognitivamente existe una dirección previa (inconsciente o consciente) de apuntar el foco hacia algo, entonces ¿Quién y como se dirige ese foco?

Toda disciplina e investigación debería conocer sus propias fugas, fronteras y puntos ciegos. De lo contrario, cualquier pretensión hermética podría ser un síntoma de arrogancia y altanería. A lo largo de este trabajo, he canonizado una redacción en tercera persona, como si existiese una determinada imparcialidad y transparencia en dicho escritor. O quizás una búsqueda con necedad de la verdad absoluta. Este sujeto, apuntado y enfocado en los párrafos siguientes, merece ensimismarse y cuestionarse a si mismo, según el proverbio en templo de Apolo del Oráculo de Delfos, *gnóthi sautón* o en castellano *Conócete a ti mismo*.

Durante el transcurso de este trabajó me surgieron las siguientes inquietudes ¿Es la realidad un conjunto de fenómenos externos o es siempre un acto de interpretación inmanente al sujeto? Ademas, ¿Ese sujeto accede la realidad (el objeto) a través de la razón para conocer y explicarla, o simplemente la experiencia es quien valida ese conjunto de fenómenos?. A partir de esta pregunta, emana una interrogante natural, ¿Es posible entonces, desligar al sujeto del objeto, o mas bien este ente (ex-siste) en el mundo, y esta siempre arrojado, lanzado y en relación con el? Y de ser así, ¿No se encuentra entonces **ya** sugestionado por el paradigma actual, su cultura nativa y sus experiencias personales cuando describe?

Esas preguntas han sido abordadas por eminencias de la filosofía y la ciencia, desde la modernidad hasta hoy. Por un lado, el realismo científico concibe que es posible constatar la realidad a través de la experiencia o a través del pensamiento. Para Descartes ese sujeto duda, piensa y por tanto **ya** en ese acto analítico, existe (*Cogito ergo sum*) Descartes, 1637, osea el ente en tanto ente. El padre del racionalismo nos plantea que el es yo del sujeto, a través de la duda metódica puede acceder la verdad. Contrapuesto a este, el empirismo valida cualquier conocimiento sólo por la experiencia. Esta se define por lo que es captado por nuestros sentidos, es decir que la experiencia es sensorial. Estas dos posturas, la del racionalismo de Descartes y la del empirismo de Hume, pueden ser pensadas como una forma de abordaje a la relación realidad

- conocimiento. Para Descartes: conozco en tanto analizo y pienso, y los objetos existen cuando yo realizo la abstracción. Para el empirismo: conozco en la medida en que incorporo la realidad "objetiva", la de los objetos que puedo percibir a través de los sentidos.

En el útlimo tercio del sg XIX surgió un pensador disruptivo que viró absolutamente a la cuestión. Frederick Niezstche plantea en su libro Voluntad de Poder Nietzsche, 2018 " El pensar no es para nosotros un medio para "conocer"sino para designar el acontecer, para ordenarlo, para volverlo manejable para nuestro uso: así pensamos hoy acerca del pensar: mañana quizá de otro modo ". Esta frase alude, desde mi voz de hoy, a un nihilismo que niega la posibilidad de conocer algo absoluto verdadero pues no es más que un desarrollo pragmático de poder. Es una cuestión de voluntad de voluntad, un dispositivo ordenatorio de la realidad según categorías y características en nuestro acto de querer/poder conocer. Antípoda a esta teoría nihilista aparece el relativismo. Este se estriba en el principio de incertidumbre Heisenberg, si existe ese conocimiento, es entonces indisoluble de cierta estructura. Thomas Khun en su libro *La estructuras de las revoluciones científicas* Kuhn, 2019 plantea que el método científico revoluciona, cuando se produce un cambio de paradigma, no a partir de la observación de nuevos hechos o fenómenos. Junto con otros destacados sociólogos, acuñan la idea del concepto de "cargado de teoría", un cierto conjunto de preconceptos anteriores a la observación, descripción y desarrollo de la cualquier investigación, que llevarán al científico demostrar lo que realmente quiere demostrar... deunuevo demostración de poder.

¿Como se demuestran los resultados de esta investigación?, construyendo un conjunto de artefactos experimentales/computacionales que constatan una supuesta realidad casí como un espejo, por correspondencia. En ese proceso de creación o utilización de instrumentos como ser: un programa, un nanemómetro o un código computacional existe una omnipresente intervención humana. ¿Vale entonces seguir redactando en tercera persona desde un racionalismo positivista heredado de hace dos siglos? ¿Es coherente no ser categórico en la descripción de un resultado, cuando **ya** todo el dispositivo ordenatorio que subyace es una construcción humana? ¿Debemos seguir defendiendo un cadáver **ya** asesinado por las ciencias humanas, desde un **sujeto que no es mas que un efecto** cultural, histórico y económico?. Por una ciencia que tenga conciencia de sus puntos ciegos, Por una ciencia con con-ciencia de que la verdad absoluta ha muerto, Por una ciencia para las personas y en primera persona!

Bibliografía

Abd-Elaal, E.-S., Mills, J. E. y Ma, X. (2013). A coupled parametric-CFD study for determining ages of downbursts through investigation of different field parameters. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *123*, 30-42.

Ahrens, J., Geveci, B. y Law, C. (2005). Paraview: An end-user tool for large data visualization. *The visualization handbook*, *717*(8).

Ahrens, J., Jourdain, S., OLeary, P., Patchett, J., Rogers, D. H. y Petersen, M. (2014). An image-based approach to extreme scale in situ visualization and analysis. *SC'14: Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, 424-434.

Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M. y Paulino, G. H. (2018). Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering Structures*, *173*, 283-299.

Alsafadie, R., Hjiaj, M. y Battini, J.-M. (2010). Corotational mixed finite element formulation for thin-walled beams with generic cross-section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *199*(49-52), 3197-3212.

Ang, A. H.-S. y Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering planning and design.*

Asadi, S. y Johansson, H. (2019). Multibody dynamic modelling of a direct wind turbine drive train. *Wind Engineering*, 0309524X19849827.

Barzanooni, R., Bog, I. T. y Elhaddad, M. (2018). Modeling of Flexible Wirings and Contact Interactions in In-dustrial Robots Using Geometrically Exact Beam Formulation.

Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics* *and Engineering*, *191*(17-18), 1755-1789. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8

Behdinan, K., Stylianou, M. y Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *154*(3-4), 151-161.

Belloli, M., Collina, a., Resta, F., Milano, P. y Seminar, O. I. T. a. F. (2006). Cables vibrations due to wind action. *O.I.T.A.F SEMINAR*, (April) 005.

Blevins, R. D. y Vibrations, F.-I. (1990). Van Nostrand Reinhold. *New York*, 104-110.

Cardona, A. y Geradin, M. (1988). A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International journal for numerical methods in engineering*, *26*(11), 2403-2438.

Çengel, Y. A. y Boles, M. A. (2007). *Termodinamica*. MCGRAW HILL. https://books.google.com.uy/books?id=1xhpOgAACAAJ

Chabart, O. y Lilien, J.-L. (1998). Galloping of electrical lines in wind tunnel facilities. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *74*, 967-976.

Costello, G. A. (1990). Average Voting Members and Other Benign Fictions: The Relative Reliability of Committee Reports, Floor Debates, and Other Sources of Legislative History. *Duke LJ*, 39.

Crespo, C. A. M. (2019). *Análisis en la selección de aisladores para una línea de transmisión*. Facultad de ingeniería/ Universidad Autonma de Mexico.

Darwish, M. M., El Damatty, A. A. y Hangan, H. (2010). Dynamic characteristics of transmission line conductors and behaviour under turbulent downburst loading. *Wind and Structures*, *13*(4), 327.

Davenport, A. G. (1965). *Dynamic Behaviour of Massive Guy Cables*.

Davenport, A. (1960). *Wind Loads on Structures*, Division of Building Research.

De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. y Verhoosel, C. V. (2012). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons.

Desai, Y., Yu, P., Popplewell, N. y Shah, A. (1995). Finite element modelling of transmission line galloping. *Computers & structures*, *57*(3), 407-420.

Descartes, R. (1637). *Discours de la methode*. Leyde.

Di Pilato, M., Martelli, F. y Martinelli, L. (2008). Corotational Cable Elements to Simulate the Behaviour of Suspended Cables under Wind Loading. *not yet published*.

Duranona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *184*, 128-138.

Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme wind climate of Uruguay. *Proceedings of the 14th International Conference on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*, 21-26.

Durañona, V. y Cataldo, J. (2009). Analysis of severe storms in Uruguay and their effect on high voltage transmission lines. *Proceedings of the 11th Americas Conference on Wind Engineering*.

Durañona, V. y Denis, A. (2018). Bluff and body action,Apuntes del curso Elementos Aerodinámica y Aerolatsicdad Estrcutrul.

Eaton, J. W., Bateman, D. y Hauberg, S. (2007). *GNU Octave version 3.0. 1 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. SoHo Books.

El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).

Foti, F. (2013). *A corotational beam element and a refined mechanical model for the nonlinear dynamic analysis of cables* (Tesis doctoral). Doctoral Dissertation, Politecnico di Milano, Milan (Italy).

Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*, *40*(13-14), 6451-6467. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063 001

Foti, F. y Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal resonance. *Journal of Vibration and Control*, *24*(7), 1322-1340.

Fujita, T. (1985). The downburst: Microburst and macroburst, SMRP Res.

Gani, F. y Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines guyed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*, *37*(3), 450-465.

Hilber, H. M., Hughes, T. J. y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, *5*(3), 283-292.

Holmes, J. D. (2002). A re-analysis of recorded extreme wind speeds in region A. *Australian Journal of Structural Engineering*, *4*(1), 29-40.

Hsiao, K. M., Lin, J. Y. y Lin, W. Y. (1999). A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *169*(1-2), 1-18.

Ibrahimbegovic, A. y Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *191*(37-38), 4241-4258.

Ibrahimbegović, A. y Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *41*(5), 781-814.

Design criteria of overhead transmission lines (Standard). (2003). International Electrotechnical Commission. Geneva, CH.

Irvine, H. M. y Caughey, T. K. (1974). The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *341*(1626), 299-315. https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189

Irvine, H. M. y Griffin, J. H. (1976). *On the dynamic response of a suspended cable* (Vol. 4). https://doi.org/10.1002/eqe.4290040406

Irvine, M. (1978). Free Vibrations of Inclined Cables. *Journal of the Structural Division*, *Vol. 104*, 343-347.

Jones, K. F. (1992). Coupled vertical and horizontal galloping. *Journal of engineering mechanics*, *118*(1), 92-107.

Klöppel, K. y H., L. K. (1942). *Die lotrecheten Eigenschwingungen der Hängerbrücken* (23.ª ed., Vol. 23).

Koh, C. G. y Rong, Y. (2004). Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification. *Journal of sound and vibration*, *272*(1-2), 187-206.

Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, *20*(2), 101-126.

Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones cientificas*. Fondo de cultura economica.

Kutterer, M. y Starossek, U. (1992). *Dynamic cable stiffness and dynamic interaction between cable and beam* (Tesis doctoral).

Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiaj, M. (2011). Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. *Computational Mechanics*, *48*(2), 153-161. https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6 007

Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiaj, M. (2014). A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *269*, 538-565.

Lee, C. L. y Perkins, N. C. (1992). Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, *3*(6), 465-490.

Luongo, A. y Piccardo, G. (1998). Non-linear galloping of sagged cables in 1: 2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, *214*(5), 915-940.

Luongo, A., Rega, G. y Vestroni, F. (1984). Planar non-linear free vibrations of an elastic cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, *19*(1), 39-52.

Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2007). A linear curved-beam model for the analysis of galloping in suspended cables. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, *2*(4), 675-694.

Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2009). On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, *87*(15-16), 1003-1014.

Mara, T. G. (2007). *The effects of multi-directional winds on lattice sections* (Tesis doctoral). Faculty of Graduate Studies, University of Western Ontario.

Martinelli, L. y Perotti, F. (2004). Numerical analysis of the dynamic behavior of cables under turbulent wind. *Struct. Eng. Mech. & Comput. (SEMC 2004)*.

Martinelli, L. y Perotti, F. (2001). Numerical analysis of the non-linear dynamic behaviour of suspended cables under turbulent wind excitation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, *1*(02), 207-233.

Matheson, M. y Holmes, J. (1981). Simulation of the dynamic response of transmission lines in strong winds. *Engineering Structures*, *3*(2), 105-110.

Mendina, M., Draper, M., Soares, A. P. K., Narancio, G. y Usera, G. (2014). A general purpose parallel block structured open source incompressible flow solver. *Cluster Computing*, *17*(2), 231-241.

Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, *85*(3), 67-94.

Nietzsche, F. (2018). *La voluntad de poder*. Edaf.

Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5

Oke, D. G. (2000). Estimating.

Oran, C. (1973). Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural Division*, *99*(6), 987-1001.

Pacoste, C. y Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *144*(1-2), 163-197.

Papailiou, K. O. (1997). On the bending stiffness of transmission line conductors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, *12*(4), 1576-1583. https://doi.org/10.1109/61.634178
003

Pugsley, A. G. (1949). On the natural frequencies of suspension chains. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, *2*(4), 412-418. https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.412

Quarteroni, A., Sacco, R. y Saleri, F. (2010). *Numerical mathematics* (Vol. 37). Springer Science & Business Media.

Rankin, C. y Nour-Omid, B. (1988). The use of projectors to improve finite element performance. *Computers & Structures*, *30*(1-2), 257-267.

Rawlins, C. (2005). Flexure of a single-layer tensioned cable at a rigid support. Proc. 6th International Symposium on Cable Dynamics. Charleston (USA). 19-22 Sept.

Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *149*(1-4), 113-132.

Riera, J. D. y Ponte, J. (2012). Recent Brazilian research on thunderstorm winds and their effects on structural design. *Wind and Structures, An International Journal*, *15*(2), 111-129. https://doi.org/10.12989/was.2012.15.2.111

Routh, E. J. et al. (1955). *Dynamics of a system of rigid bodies.* Dover New York.

Saxon, D. S. y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended chain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, *6*(3), 273-285. https://doi.org/10.1093/qjmam/6.3.273

Simiu, E. y Scanlan, R. H. (1986). *Wind Effects on Structures, 3. ed.* (second edi). Jhon Wiley; Sons.

Simo, J. C. y Vu-Quoc, L. (1988). On the dynamics in space of rods undergoing large motions—a geometrically exact approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *66*(2), 125-161.

Son, O. y Cetiner, O. (2016). Drag prediction in the near wake of a circular cylinder based on DPIV data. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, *9*(4), 1963-1968.

Starossek, U. (1991). Boundary induced vibration and dynamic stiffness of a sagging cable. http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf

Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia engineering*, *199*, 3152-3157.

Triantafyllou, M. S. (1984). The dynamics of taut inclined cables. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, *37*(3), 421-440. https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421

Viana, H. F., da Silva, R. G. L., Costa, R. S. y Lavall, A. C. C. (2020). Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering the plastic zone method. *Engineering Structures*, *223*, 111197.

Yan, B., Lin, X., Luo, W., Chen, Z. y Liu, Z. (2009). Numerical study on dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission line under wind load. *IEEE Transactions on Power Delivery*, *25*(1), 248-259.

Yang, S. y Hong, H. (2016). Nonlinear inelastic responses of transmission tower-line system under downburst wind. *Engineering Structures*, *123*, 490-500.

ANEXOS

Anexo 1

Se acoplan al tesis una revisión bibliográfica realizada en el marco del curso Elementos de Aerodinámica y Aeroelasticidad de Estructuras en su edición 2019 sobre la norma *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003.

1.1. Norma IEC 60826

En este apartado se exponen las secciones destacadas de la norma internacional IEC 60826: *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003, explicitándose las hipótesis fundamentales y formulaciones para el desarrollo de condiciones de diseño.

1.1.0.1. Campo de aplicación

En primera medida esta aplica para geometrías del conductor y terreno con las siguientes condiciones:

- La longitud de vano debe pertenecer al intervalo (200m, 800m). Para longitudes fuera de ese rango deben analizarse coeficientes de racha diferentes a los presentados, sin embargo para vanos más largos a 800m el análisis de la norma resulta sobrestimado.
- Altura de soportes menores a 60 m. Soportes de mayor altura podrían inducir factores de amplificación dinámicos de la respuesta.
- Altitud del área transversal de la línea no sobrepase los 1300m sobre el nivel de altura medio topográfica del terreno circundante.
- Terrenos sin características topográficas singulares cuyo tamaño y forma puedan afectar las consideraciones del flujo. Se aclara que esta norma

textitno permite dimensionar para efectos de vientos extremos como tornados, encause de vientos entre montañas y terrenos de alta pendiente.

1.1.0.2. Velocidad de referencia y rugosidad del terreno

Como primera instancia se establecen diferentes tipos de terrenos según las condiciones topográficas del mismo, esto afecta la forma del flujo considerado para el diseño. Para un perfil tipo ley potencial, terrenos más rugosos acentúan el gradiente de la velocidad en altura para $z = 0$, aumentan la intensidad de turbulencia e incrementan el Z_G (valor donde el perfil alcanza las condiciones de atmósfera libre).

Categoría de terrenos	**Características del terreno**
A	Largos y estrechos viento de ultramar, área costera llana, llanura desértica.
B	Campo abierto con escasa densidad de obstáculos. áreas cultivadas con pocos árboles y edificios
C	Terreno con numerosos obstáculos pequeños de baja altura (matorrales, árboles y edificios)
D	Áreas sub-urbanas con pequeños arboles

Tabla 1.1: Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826

Considerando un flujo medio plano tipo capa límite potencial, que se desarrolla en una atmósfera neutra, la velocidad media $v(z)$ en función de la altura para diferentes constantes de terreno α puede calcularse de la siguiente manera:

$$V(z) = V_G \left(\frac{z}{z_G} \right)^{\alpha} \tag{1.1}$$

Medidas de la velocidad a través de equipos como pueden ser anemómetros o sensores de ultra sonido permiten obtener, para determinado periodo de adquisición de datos, valores de velocidad media e intensidad de turbulencia entre otras. Es por esto que es clave relacionar la velocidad a diferentes alturas y para cambios de terreno a lo largo del sentido del flujo, nombrando dos puntos 1 y 2 podemos relacionar la velocidad media entre estos operando con la Ecuación (1.1).

$$V(z) = V_{ref1} \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \tag{1.2}$$

En la Ecuación (1.2) anterior la velocidad de referencia V_{ref} es definida, en general como la velocidad media del viento a una altura de $z = 10m$ para un tipo de terreno categoría B. En la norma se presenta la siguiente tabla para calcular las variaciones de velocidad V_{ref}, se introduce un factor K_R el cual permite obtener la relación entre las velocidades de referencia para distintos terrenos $V_{rX} = K_R V_{rB}$. Se presentan las diferentes alturas de rugosidad media de obstáculos z_0.

Factor	**Categoría de terreno**			
	A	**B**	**C**	**D**
$z_0(m)$	0.01	0.05	0.30	1.00
α	0.1 a 0.12	0.16	0.22	0.28
K_R	1.08	1.00	0.85	0.67

Tabla 1.2: Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.

Los datos presentados en la Tabla 1.2 se corresponden con los conocimientos dictados en el curso, en primera parte los valores de α se asemejan con lo presentado por Davenport, 1960, para la categoría A y B el numero de α considerado por la norma es menor, esto se relaciona con que valores más chicos de α, es decir terrenos menos rugosos inducen una velocidad mayor para la misma cota. En el caso de la categoría C y D el valor es exactamente idéntico a Davenport, 1960 . El termino z_0 se coincide con la tabla publicada en Oke, 2000.

Desglosando el factor K_R para dos puntos de referencia, colocados a una cota de $z_{ref1} = z_{ref2} = 10m$ en función de la Ecuación (1.2) y combinándola con la definición de K_r se obtiene la siguiente expresión:

$$V_{ref2}(10m) = V_{ref1}\left(\frac{z_{G1}}{z_{ref1}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{z_{ref2}}{z_{G2}}\right)^{\alpha_2} \rightarrow K_r = \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref1}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{z_{ref2}}{z_{G2}}\right)^{\alpha_2} \tag{1.3}$$

Utilizando la Ecuación 1.3 y considerando los valores de Z_G según la referencia Oke, 2000 se expresan los resultados obtenidos los cuales coinciden con un error menor al 8 % con los estipulados por la norma en la Tabla 1.2.

1.1.0.3. Acción del viento sobre los elementos

El valor significativo del problema es la fuerza por unidad de área (Pa) se denota con la letra a además se define, al igual que lo visto en el curso en

Factor	Categoría de terreno			
	A	**B**	**C**	**D**
$z_G(m)$	250	305	365	410
α	0.12	0.15	0.22	0.28
K_R	1.13	1.00	0.77	0.61

Tabla 1.3: Tabla de factores para terrenos según referencia Davenport, 1960

la sección 2.1 del repartido "Bluff-Body aero dynamics" $q0$, el coeficiente de presión dinámica de referencia (N/m^3). Para elementos conductores, cadenas y gran cantidad de elementos de soportes se calcula:

$$a = q_0 C_x G \tag{1.4}$$
$$q_0 = \frac{1}{2}\rho_{ref}\tau\left(K_r V_{rB}\right)^2 \tag{1.5}$$

En las Ecuaciones 1.4 y 1.5 ρ es la densidad del aire en kg/m^3 y se toma en $1.225kg/m^3$ para una temperatura de $15°C$ y una presión atmosférica de $101.3kPa$. La constante τ es un factor que permite corregir las variaciones de densidad del fluido con la presión medida en altura y la temperatura a la que operará el sistema. Los valores de densidad se corroboraron con la referencia Çengel y Boles, 2007, como también el factor de corrección $\tau = \frac{\rho_{P,T}}{\rho_{ref}}$.

El parámetro C_x es el coeficiente de drag dependiendo de la figura transversal al flujo, se desprecian por las grandes longitudes de vanos las condiciones de borde no homogéneas del flujo en los extremos. Por último el factor restante G toma en consideración la altura y el tipo de terreno, el incremento en la velocidad de acuerdo a ráfagas de viento y la respuesta dinámica, para elementos de cable debe separarse en G_L y G_c. Estos últimos factores se vincularán en la siguiente sección con los conocimientos presentados en el curso.

1.1.0.4. Elementos de cable

Los efectos dinámicos que afectan a los conductores específicamente se asocian: al arrastre producido por el viento y la tensión mecánica incrementada durante la instalación. Considerando la hipótesis de baja turbulencia, la fuerza media en Newton de arrastre (A_c) sobre un elemento de largo L y diámetro d, formando un ángulo de balanceo Ω es dada por la expresión:

$$A_c = q_0 C_{xc} G_c G_L dL \sin(\Omega)^2 \tag{1.6}$$

En la Ecuación 1.6 el factor de presión de referencia (q_0) se calcula según la Ecuación 1.4. El valor de C_{xc} es el coeficiente de drag del conductor, su utiliza a menos de obtenerse datos experimentales, un valor unitario para conductores y velocidades de viento estándar. Esto se corresponde con lo presentado en el curso en la figura 19 de Durañona y Denis, 2018 a velocidades equivalentes de $5m/s$ para un conductor usual de alta tensión. Según Son y Cetiner, 2016 se hallan valores medios del coeficiente de drag para Reynolds de aproximadamente igual 350 C_{xc} y resulta ser 1. Es por esto que considerar un valor unitario para valores los valores Reynolds de trabajo induciendo una fuerza de mayor magnitud sobre el cable, lo cual es conservador.

Existe un efecto en la dirección perpendicular al flujo llamado .Aeolian". En dicha dirección se generan desprendimientos de vórtices asociados con la frecuencia de Strouhal $f_s = 0.0925 \frac{v_m}{d_c}$, cuando estos vórtices se acercan a la frecuencias naturales del cable podrían producirse resonancias, magnificándose las amplitudes del movimiento. Según Belloli et al. 2006 estos efectos deben ser considerados para velocidades medias de viento menores $6\frac{m}{s}$, para el estudio de TC las velocidades alcanzan valores de hasta $30\frac{m}{s}$ estando el efecto antes mencionado fuera de rango.

El coeficiente G_c es el factor de viento combinado, el cual se halla con la Figura 3 de la Sección 6.2.6.1, este depende de la altura y el tipo de terreno. Según de lo visto en el curso este debe contener el factor de ráfaga el cual relaciona la presión media con la máxima puntual. Por último G_l es el factor de separación según el largo de vano, este tiene en cuenta la distribución de presiones para distintos largos de vano, para vanos largos la presión máxima se da simultáneamente en pocos puntos por tanto decrece, tal como se ve en la Figura 4 de la Sección 6.2.6.1 y se corresponde con lo visto en el curso para el valor de B.

Para cadenas aisladoras múltiples que transporten más de un cable, estos deben tratarse por separado, las solicitaciones totales sobre los soportes deben considerarse la suma de cada una de las partes. La altura considerada para el cálculo de los factores debe ser el centro de gravedad de los conductores cuando este se encuentra a 2/3 de la deflexión máxima. También puede considerarse la altura como la cota del punto de anclaje entre la cadena y el cable, esto inducirá velocidades mayores y por tanto el diseño estará sobredimensionado.

1.1.0.5. Cargas del viento sobre la cadena aisladora

Las cargas actuando en el elemento aislador cerámico se originan sobre el área proyectada de la cadena en el sentido del flujo, la cual se nombra A_c. Esta carga se corresponde a la suma de las cargas debido al campo de presiones sobre el cable y la fuerza distribuida directamente sobre la cadena aisladora. La carga aplicada sobre el soporte A_l en N se expresa:

$$A_l = q_0 C_{xl} G_t S_i \tag{1.7}$$

En la Ecuación 1.7 el factor q_0 es la presión dinámica de referencia calculada según 1.4, C_{xl} se asocia con el Coeficiente de Drag y se suele considerar $1,2$, valor mayor que para el cilindro. Se aclara que en general el peso relativo de la fuerza sobre los soportes debido a las cadenas aisladoras es significativamente menor respecto a las cargas del viento ejercidas sobre el conductor.

El termino G_t es el factor de viento correlativo que se corresponde con la Figura 5 de la norma de la sección 6.2.6.3, este se ve afectado por el tipo de terreno y la altura del centro del gravedad de la cadena, este al igual que en la Sección 1.1.0.4 el combinado de los factores vistos en el curso. Esta presión es multiplicada por el valor S_i del área de la cadena proyectada horizontalmente en un plano paralelo al eje de la torre en m^2.

1.1.1. Tensión en el conductor

La tensión que debe ser aplicada sobre los conductores se determina a partir del método de deflexión, considérese el caso donde las cadenas aisladoras se encuentra a la misma cota, el conductor tiene un largo L y un peso W por unidad de longitud en N/m, se ilustra un esquema en la siguiente figura:

Considerando el cable como un elemento extensible que no posee rigidez a flexión, entonces la tensión interna a para cualquier punto de este debe ser tangente a la curva. Sea P un punto cualquiera con coordenadas (x,y) en el cable, tomando equilibrio estático sobre la mitad del conductor y planteado la segunda cardinal o el principio de los trabajos virtuales para un giro arbitrario, desde P, se obtiene la catenaria, y de esta la deflexión máxima en función de la tensión:

$$Ty = W\frac{x^2}{2} \rightarrow \delta = \frac{WL^2}{8T} \tag{1.8}$$

1

Anexo 2

Se presenta a continuación resultados extraídos de un modelo generado en el marco de la unidad curricular Dinámica de Estructuras. Este consiste en un análisis dinámico 2D y 3D de elementos de biela no lineales con un análisis modal complementario.

2.1. Modelado dinámico de un conductor de alta tensión utilizando elementos de barra

2.1.1. Fundamentos teóricos

2.1.1.1. Ecuación de movimiento

En este trabajo se utilizará el principio de D'Alambert para establecer las ecuaciones de movimiento de un elemento de barra axial, este es el equivalente dinámico al Principio de los Trabajos Virtuales para el caso estático. A continuación se notará las variables posición, desplazamiento, deformación unitaria y tensión como $(x, u_t, \epsilon_t, \sigma_t)$ y las derivadas parciales, velocidad y aceleración con $(\dot{u}_t, \ddot{u}_t)$.

Dicho lo anterior el principio de D'Alambert afirma que $\forall t$ y $\forall \delta u$ se cumple:

$$\int_{V_t} \sigma_t \delta\varepsilon dV_t = \int_{V_t} \delta u^T b_{ext,t} dV_t - \int_{V_t} \rho \delta u^T \ddot{u} dV_t \qquad (2.1)$$

En la ecuación (2.1) $b_{ext,t}$ corresponde a la fuerzas externas por unidad de volumen. El primer termino que aparece restando es el de a las fuerzas inerciales siendo ρ la densidad del material. El segundo corresponde a disipaciones viscosas donde $c > 0$. Esta disipación se corresponde con fenómenos de disipación estructural y rozamiento en juntas, su valor se ajustará de acuerdo con resultados experimentales publicados, no se determinará mediante un resultado teórico. Aplicando una discretización en elementos finitos obtenemos la ecuación de movimiento de la estructura:

$$M\ddot{u}_t + C\dot{u}_t + K_T(u_t)u_t = f_{ext,t} \tag{2.2}$$

Las cargas externas dinámicas se encuentran asociadas con el vector $f_{ext,t}$. La matriz de rigidez $K(u_t)$ se hallará considerando no linealidad geométrica por ende tiene la siguiente forma:

$$K_T = K_{T1} + K_{T2} + K_\sigma \tag{2.3}$$

$$K_{T1} = EA_o l_o b_1^T b_1 \tag{2.4}$$

$$K_{T2} = EA_o l_o (b_1^T b_2 + b_2^T b_1 + b_2^T b_2) \tag{2.5}$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma A_o}{l_o} G \tag{2.6}$$

En las ecuaciones anteriores b_1 y b_2 contienen a las derivadas de las funciones de ponderación de u_t mientras que G es la matriz de Green. La matriz K_{T1} es la matriz de rigidez lineal, esta no depende del desplazamiento, K_{T2} es la llamada matriz de desplazamiento inicial y K_σ la matriz geométrica o de tensión inicial.

La matriz de masa M puede ser del tipo consistente o concentrada, la primera de ellas se deduce a partir de las funciones de interplación de u_t (N_i), mientras que la segunda se obtiene a partir de concentrar la masa de cada elemento sobre sus nodos, este último sera el utilizado para este trabajo. En el caso de una barra bidimensional tiene la siguiente forma:

$$M^e = \frac{\rho A_o l_o}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Por último la matriz C se considero de forma diagonal, para un elemento de barra:

$$C^e = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Como se dijo anteriormente el valor de c se ajustará empíricamente de acuerdo a resultados experimentales de Stengel y Thiele, 2017.

2.1.1.2. Método de diferencias centradas

En este apartado se presenta el método por el cual se resuelve la ecuación de movimiento, se eligió este método debido a su simplicidad y su bajo coste computacional. Es de tipo explicito por ende se debe conocer la solución a la ecuación de movimiento en el tiempo t para hallarse luego $t + \Delta t$, de acuerdo con esto último la velocidad y aceleración se escriben de la siguiente manera:

$$\dot{u}_t = \frac{u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \tag{2.9}$$

$$\ddot{u}_t = \frac{u_{t+\Delta t} + u_{t-\Delta t} - 2u_t}{\Delta t^2} \tag{2.10}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación de movimiento y agrupando según los desplazamientos en los diferentes espacios temporales:

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right] u_{t+\Delta t} = f_{ext,t} - \left[K_T - \frac{2}{\Delta t^2}M\right] u_t - \left[\frac{1}{\Delta t^2}M - \frac{1}{2\Delta t}C\right] u_{t-\Delta t} \tag{2.11}$$

Notar que la aproximación de la velocidad y la aceleración en el instante t induce un error de truncamiento, en segunda medida se induce un error adicional ya que $u_{t+\Delta t}$ no verifica la ecuación dinámica de equilibrio en el instante $t + \Delta t$ sino la del instante t. Mencionados errores pueden ser disminuidos al reducirse el incremento temporal Δt, además condiciones de estabilidad del método para el caso lineal, donde K_T no es función del desplazamiento, impone que $\Delta t < T_{min}/\pi$ donde T_{min} es el mínimo periodo de vibración natural del modelo de elementos finitos.

La matriz tangente de desplazamiento y esfuerzo inicial son función del desplazamiento, como consecuencia deben tenerse en cuenta que un incremento en la rigidez del sistema, conforme avanza el tiempo, conllevará a modos normales con mayor frecuencia y por tanto a un paso temporal crítico menor.

El valor Δt debe elegirse de acuerdo a este compromiso entre disminuir el error, permaneciendo dentro de la zona de estabilidad del método y el costo computacional.

- Se presenta un algoritmo del código utilizado:

  1. Ensamblar: M y C a nivel de estructura.
  2. Definir tiempo final del análisis dinámico t_f.
  3. Definir condiciones iniciales u_o y $\dot{u}_o$
  4. Calcular: $\ddot{u}_o \leftarrow M^{-1}(f_{ext,t} - C\dot{u}_o - f_{int}(u_o))$
  5. Definir δt, considerando el compromiso mencionado anteriormente
  6. Calcular $a_o \leftarrow 1/\Delta t^2, a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t), a_2 \leftarrow 2a_o, a3 \leftarrow 1/a_2$
  7. Calcular $a_o \leftarrow 1/\Delta t^2, a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t), a_2 \leftarrow 2a_o, a3 \leftarrow 1/a_2$
  8. Calcular $u_{-\Delta t} \leftarrow u_o - \Delta\dot{u}_{oo} + a_3\ddot{u}_o$
  9. Calcular y factorizar $\hat{M} = a_oM + a_1C$
  10. **while** $t < t_f$
  11. Calcular $\check{f}_t \leftarrow f_{ext,t} - f_{int}(u_t) + a_2Mu_t - (a_oM - a_1C)u_{t-\Delta t}$
  12. Resolver: $u_{t+\Delta t} \leftarrow \tilde{M}^{-1}\hat{f}_t$
  13. Calcular la aceleración $\ddot{u}_t \leftarrow a_o(u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t} - 2u_t)$
  14. Calcular la velocidad $\dot{u}_t \leftarrow a_1(u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t})$
  15. $t \leftarrow t + \Delta t$
  16. **end while**

2.1.1.3. Modos normales

El análisis dinámico de los modos se vuelve fundamental, este busca las soluciones a la oscilación libre no forzada, de forma que estas sean sinusoidales con determinada frecuencia natural ω_n, por ende las soluciones toman la siguiente expresión $\sin(\omega_n t)\phi$. El vector ϕ representa un vector de escala entre las amplitudes de los desplazamientos nodales de los grados de libertad de la estructura.

La ecuación de movimiento, en complejos, de la estructura suponiendo movimientos de la forma $U(t) = \phi \exp i\omega_n(t - t_o)$

$$\omega_n^2 M\phi = K\phi \tag{2.12}$$

La ecuación (2.12) (sin amortiguamiento ni fuerzas extremas) se responde con un sistema de valores propios para una matriz simétrica y definida positiva. De forma matricial los modos normales de la estructura verifican:

$$M\Phi\Omega = K\Phi \tag{2.13}$$

Donde Φ es una matriz que tiene como columnas los vectores propios asociados a las amplitudes de los modos ϕ y Ω es una matriz diagonal con las frecuencias angulares de los modos ω_n^2.

2.1.1.4. Modelo de viento

El flujo del viento se asume que solo tiene componente en la dirección z, este flujo se puede desglosar en una parte media en el tiempo y una componente fluctuante, por ende la velocidad toma la siguiente forma: $u_v(z,t) = u_m(z,t) + u'(z,t)$ donde

$$u_m = \frac{1}{T}\int_0^T u_v(z,t)dt \tag{2.14}$$

El valor del periodo T debe elegirse de forma de minimizar la desviación estándar de la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la desviación estándar de la velocidad y la velocidad media para un instante de tiempo dado.

El aire se modelará como un fluido incompresible newtoneano cuya fuerza de drag se puede escribir como:

$$F_v = \int_{dl} \frac{1}{2}\rho(T)C_d(Re)d_c u_m^2(z,t)dx \tag{2.15}$$

La fuerza de lift, en dirección perpendicular al flujo se considera despreciable frente a la fuerza de arrastre. Esta simplificación también se acompasa con la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo y el peso que se opone a la fuerza de sustentación.

Existe un efecto en la dirección perpendicular al flujo llamado .Aeolian”. En dicha dirección se generan desprendimientos de vórtices asociados con la frecuencia de Strouhal $f_s = 0.0925\frac{v_m}{d_c}$, cuando estos vórtices se acercan a la frecuencias naturales del cable podrían producirse resonancias, magnificándose las amplitudes del movimiento. Según Belloli et al. 2006 estos efectos deben ser considerados para velocidades medias de viento menores $6\frac{m}{s}$, para el estudio de este trabajo las velocidades alcanzan valores de hasta $30\frac{m}{s}$ siendo el efecto antes mencionado de menor importancia.

2.1.2. Resultados numéricos 2D

A continuación se presenta un modelo simplificado en dos dimensiones el cual pretende modelar la cadena de aisladores, se toma como hipótesis que los desplazamientos de la torre son mucho menores a los desplazamientos de la cadena bajo la acción del viento. Un esquema del problema se presenta a continuación:

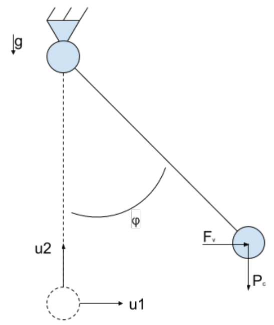


Figura 2.1: Esquema simplificado del problema

En la figura 2.1, u_1 corresponde al desplazamiento horizontal de la unión entre el aislador y el cable, u_2 al desplazamiento vertical y $P_c = 2\frac{m_c g}{2}$ el peso del cable que debe soportar el aislador. Los perfiles de velocidad en Stengel y Thiele, 2017, correspondientes a ráfagas descendentes alemanas experimentalmente se corroboran como planos. Estos muestran una pequeña variación a medida que se avanza en la coordenada axial del conductor, como consecuencia $F_v = \frac{1}{2}\rho(T)C_d(Re)d_c u_m^2(z,t)L_c$ donde los valores de c_d y ρ se adjuntan en el código.

2.1.2.1. Perfil de velocidad de viento

El perfil de velocidad media de viento se obtuvo de Stengel y Thiele, 2017 y presenta la siguiente forma:

El perfil de velocidades anterior presenta una clara característica de tormenta convectiva descendente, la velocidad aumenta fuertemente en los primeros 500 segundos para luego ir descendiendo de forma gradual. Otra evidencia de este fenómeno es el descenso abrupto de temperatura en cualquiera de las fases, al producirse un régimen de mayor velocidad, aumenta el coeficiente de

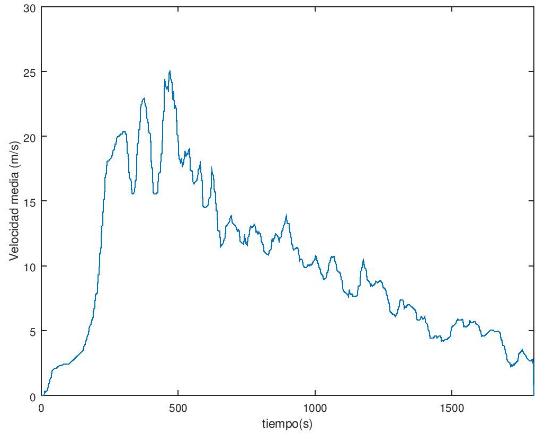


Figura 2.2: Perfil de velocidad media a lo largo del cable según Stengel y Thiele, 2017

convención forzada reduciéndose la temperatura de la fase. En Uruguay estos eventos de interrupción eléctrica de las lineas se debe principalmente a tormentas conectivas. El mismo fenómeno se ha reconocido en Brasil desde hace cierto tiempo, este pone en exigencia estructural a los cables como a las torres Riera y Ponte, 2012.

2.1.2.2. Resultados del modelo

Las ecuaciones de movimiento para los dos grados de libertad del problema son :

$$\frac{m}{2}\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + K_{11}u_1 + K_{12}u_2 = F_v(t) \tag{2.16}$$

$$\frac{m}{2}\ddot{u}_2 + c\dot{u}_2 + K_{21}u_1 + K_{22}u_2 = P_c \tag{2.17}$$

El problema reducido anterior presenta condiciones de borde cinemáticas impuestas por la unión entre la torre y la cadena, se agregan el reposo $u_{t0} = 0$, $\dot{u_{t0}} = 0$ y la aceleración inicial del movimiento espejo ficticio en $t = -\Delta t$. La resolución se realizó mediante el método presentado en la sección 2.2, se ajustó el valor de c para reproducir de forma aceptable la curva del angulo superpuesta con Stengel y Thiele, 2017, la expresión de este es:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{u_1}{u_2}\right) \cong \arctan\left(\frac{F_v}{P_c}\right) \tag{2.18}$$

La aproximación de que el ángulo va en el sentido de la fuerza externa se basa en el hechos de ser un elemento de biela y que las aceleraciones son nulas, esta hipótesis puede ser considerada en instantes donde el movimiento posee fuerzas no inerciales pequeñas. Para tiempos donde varíe fuertemente la acción externa del viento esta hipótesis no se verifica y se pueden presentar desviaciones en el ángulo. A continuación se muestra la curva del ángulo medio contrastada con Stengel y Thiele, 2017, donde, mediante ensayo y error se ajusto el valor de c que mejor aproxima dicha curva:

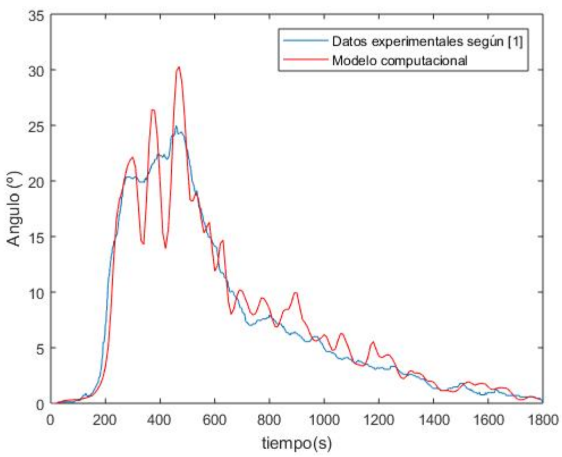


Figura 2.3: Angulo medio del modelo en contraste con Stengel y Thiele, 2017

Como se dijo anteriormente el modelo presentado en Stengel y Thiele, 2017 supone hipótesis de un análisis estático, entre los 230 y 500 segundos se producen fuertes variaciones y las mayores velocidades de viento esto puede dar lugar a las desviaciones mostradas en la figura anterior. Estas últimas, en contra partida, reproducen correctamente el ángulo máximo de balanceo, sin aplicar la media móvil, medido en Stengel y Thiele, 2017, valor que permite predecir la aproximación de la cadena a la torre y por tanto cuando se produciría la salida en servicio de la linea.

Con el objetivo de reducir el ruido en el ángulo y velocidad se escogió una media móvil de acuerdo con Stengel y Thiele, 2017. Este periodo debe ser tal que se produzca una velocidad media relativamente suave, sin perder la forma de la señal ni eliminar completamente la característica de aleatoriedad en la componente fluctuante de la velocidad. Para este caso se eligió una media móvil de 30 segundos.

Otro resultado el cual vale analizar es el defasaje que presenta la fuerza del viento con el ángulo debido a la inercia del sistema. Si definimos una función compleja $H(\omega)$ tal que $H(\omega)F = X$ donde F representa el módulo de la fuerza y X el vector complejo de desplazamiento solución a la oscilación forzada, proyectándolo en el eje real se obtiene el valor de $X(t)$. El vector complejo $H(\omega)$ presenta cierto ángulo, esto es consecuencia del defasaje entre la respuesta del sistema y su forzante F. En la siguiente figura se evidencia dicho retraso en el tiempo de la respuesta del sistema (φ) en naranja y en azul el valor de F .

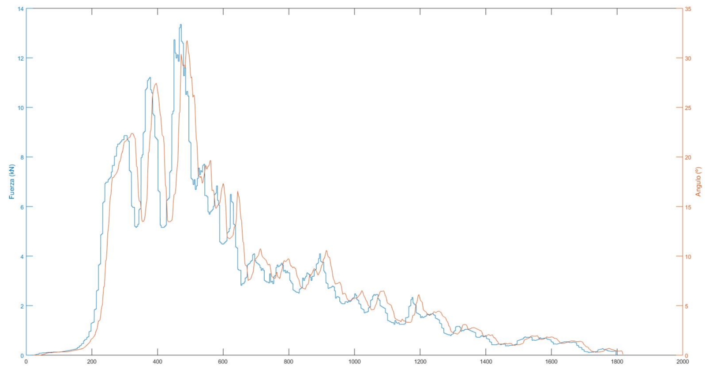


Figura 2.4: Curva desfajase ángulo fuerza

Se realizó un análisis modal como fue presentado en la sección 2.3, las frecuencias naturales asociadas al aislador son de:

$$f_1 = 0.03Hz \tag{2.19}$$

$$f_2 = 83Hz \tag{2.20}$$

La primer frecuencia presenta un vector propio $(\varphi_1) = (1,0)$ siendo la primer componente del vector la asociada con u_1 y la segunda entrada u_2. Claramente $(\varphi_2) = (0,1)$, esto se debe a que los vectores son lineal mente independientes y que es el movimiento restante dinámicamente posible. Se hace notar el hecho de que que las componentes estén desacopladas, es decir que $(\varphi_2).(\varphi_1) = 0$, es consecuencia de que los modos se hallaron en un entorno de la posición $\varphi = 0$, solo con la acción de la gravedad donde $K_T = K_{T1}$.

2.1.3. Resultados numéricos 3D

Se procede a resolver el problema en tres dimensiones. El sistema se compone de dos cadenas de aisladores y un cable. Las cadenas de aisladores serán modeladas como una biela, el nodo superior de esta permanece fijo mientras que al otro se le asignan dos grados de libertad (desplazamientos en y, z), esto se debe a que hacia ambos lados del cable continuarían cables idénticos haciendo que este punto no tenga desplazamientos en el sentido de x. El cable será representado como un conjunto de barras articuladas en sus extremos como se muestra en la figura 2.5, con tres grados de libertad en sus nodos, exceptuando la unión con el aislador (nodos 2 y n-1).

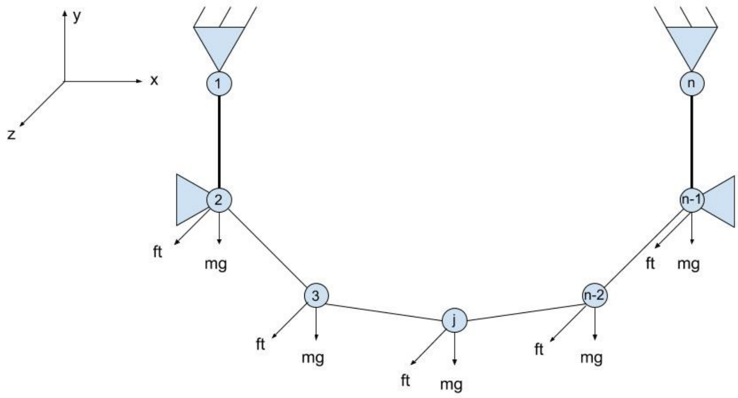


Figura 2.5: Esquema simplificado del problema 3D

Para esta parte se deberá contar con matrices cuadradas de (nx3), siendo n el numero de barras. Esto genera un compromiso a la hora de elegir n, dado que simular el cable con un número pequeño de barras no representa al mismo y un numero extenso de estas hará que la simulación sea de gran costo computacional logrando un modelo más realista, incluso existen casos donde no es posible lograr una simulación. El método de resolución seguirá siendo por diferencias centradas donde la matriz de masa quedará diagonal repartiendo la mitad de la masa en cada uno de sus nodos.

2.1.4. Frecuencias naturales

En una primera instancia son calculados los modos para este sistema. Los mismos son calculados en la posición natural del cable, por lo que se debe realizar una simulación donde la única fuerza que actúa es la gravedad, aplicada sobre los nodos, y se logre alcanzar el equilibrio. La particularidad está dada en que la matriz de rigidez es calculada como la matriz tangente no lineal, por lo que se debe conocer los desplazamientos una vez cargado el cable.

$$K_T = K_{T1} + K_{T2} + K_\sigma \tag{2.21}$$

Una vez hallada esta matriz se procede a calcular las frecuencias naturales y los modos del sistema a partir de la ecuación ya mencionada $(K - \lambda.M).\phi = 0$. Se puede observar que los modos revelados por este estudio son en diferentes planos y con frecuencias pequeñas asociadas, en comparación con modelos de estructuras. Se presentan a continuación las primeras 5 frecuencias naturales del sistema e imágenes ilustrando los modos asociados a ellas en el anexo. Además se adjuntan vídeos del movimiento asociados con los mismos.

- $1^a - 0.0908Hz$
- $2^a - 0.1815Hz$
- $3^a - 0.1818Hz$
- $4^a - 0.2658Hz$
- $5^a - 0.2721Hz$

El estudio se centra en la primera de las frecuencias, 0.091 Hz, ya que su modo asociado es el que genera mayor desplazamiento horizontal en la cadena de aisladores. A continuación se presenta el primer modo con el mayor de los desplazamientos a 15 metros de la posición original para mejor visualización. En azul se esboza el cable en su posición natural y en rojo el primer modo asociado.

El planteo consta en excitar el cable con una fuerza sinusoidal con frecuencia igual a la menor de las frecuencias naturales, pretendiendo disminuir los desplazamientos de la cadena de aisladores colocando masas concentradas de 80 kg en determinados puntos del cable. Es por esto que se simula el cable en 4 instancias diferentes aumentando la masa de determinados nodos. Los nodos seleccionados para colocar las masas son:

- Los dos que se encuentran vinculados a la cadena de aisladores.
- Los dos ubicados a $\frac{1}{6}$ de la distancia horizontal de entre aisladores.
- Los dos ubicados a $\frac{2}{6}$ de la distancia horizontal de entre aisladores.
- En el nodo central con dos masas.

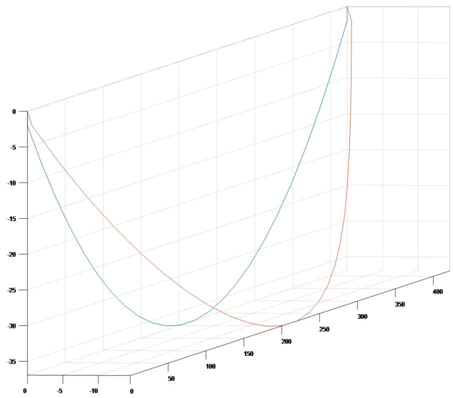


Figura 2.6: Configuración adoptada por el primer modo.

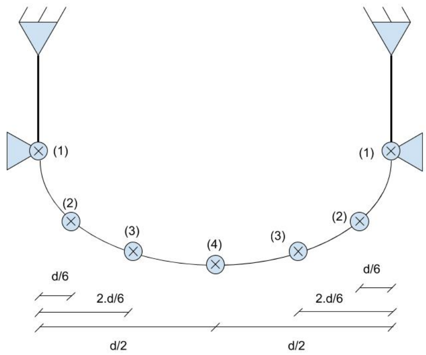


Figura 2.7: Distribución de masas colocadas.

Mediante estas cuatro simulaciones se constató que la mejor solución para este problema es colocar las dos masas concentradas en el medio del cable. Con esto se logra una reducción en el desplazamiento horizontal de la cadena de aisladores de aproximadamente un 85 % para un transitorio de 1500 segundos. A continuación se presenta el desplazamiento del nodo estudiado antes y después de colocar las masas.

La respuestas en el tiempo para la fuerza sinusoidal de frecuencia igual al primer modo se presenta en las Figuras: 2.8, 2.9.

Por un lado, la opción de colocar masas en el cable puede parecer muy fácil de implementar y ayudaría a que los desplazamientos del cable disminuyan de forma considerable para fuerzas de este tipo en particular, pero no hay que dejar de evaluar otros cambios que se pueden generar a partir de este método. Se debe considerar que tanto las torres como la cadena de aisladores quedaran sometidas a un peso mayor, en este caso se trata de un aumento de 160 Kg, en

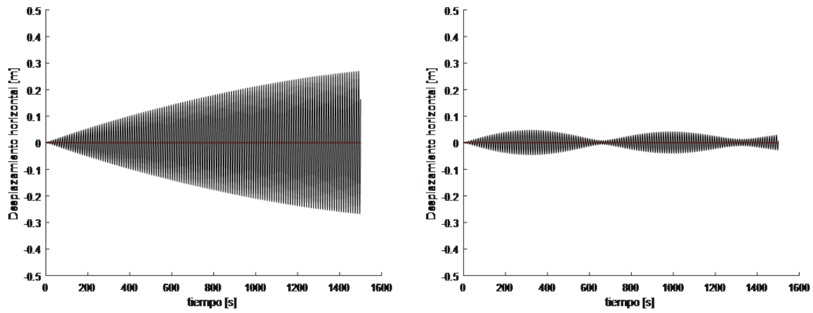


Figura 2.8: Desplazamiento horizontal de la cadena de aisladora en función del tiempo con y sin masas.

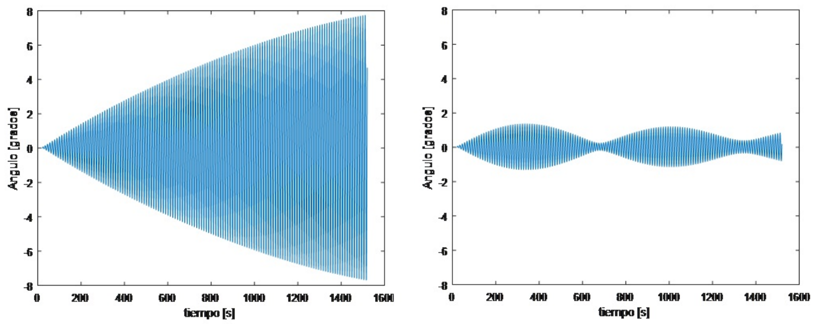


Figura 2.9: Ángulo de la cadena de aisladora en función del tiempo con y sin masas.

cada uno de los cables, donde se deberá tener en cuenta las normas aplicadas por UTE si es factible este tipo de soluciones. Por otra parte, se debe considerar que cambian las frecuencias naturales del nuevo sistema. Se presentan las cinco primeras frecuencias naturales sin masas agregadas y con masas aplicadas en el nodo central:

- $1^a - 0.0908Hz \rightarrow 1^a - 0.0893Hz$
- $2^a - 0.1815Hz \rightarrow 2^a - 0.1908Hz$
- $3^a - 0.1818Hz \rightarrow 3^a - 0.1913Hz$
- $4^a - 0.2658Hz \rightarrow 4^a - 0.2622Hz$
- $5^a - 0.2721Hz \rightarrow 5^a - 0.2685Hz$

Se observa que la primera frecuencia natural disminuye un 2 %, esto hace que la frecuencia con la que se aplica la fuerza en el estudio anterior es próxima a la frecuencia natural del nuevo sistema, de igual manera los desplazamientos se atenúan de forma considerable.

2.1.5. Respuesta a tormenta convectiva

En esta instancia se somete al cable a fuerzas ejercidas por el viento. Al igual que en el caso del péndulo, las velocidades y fuerzas ejercidas por el viento son obtenidas a partir de Stengel y Thiele, 2017. Dadas estas condiciones, se compara el movimiento del nodo móvil de la cadena de aisladores contra lo documentado en el artículo antes mencionado, y los resultados arrojados de la simulación Péndulo. Para esto se consideraron los mismos parámetros que en el modelo 2D.A continuación se presenta el ángulo respecto de la vertical que forma la cadena de aisladores en función del tiempo al aplicarle la fuerza ejercida por el viento:

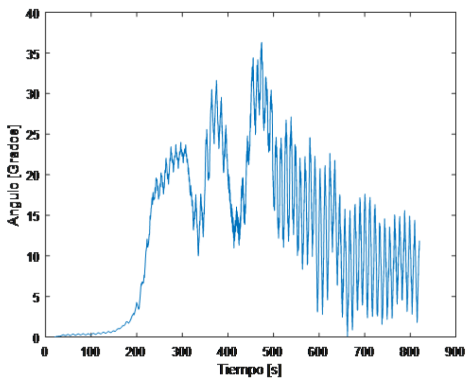


Figura 2.10: Respuesta del angulo de la cadena de aisladora en función del tiempo.

En la siguiente figura se comparan los resultados arrojados del angulo con los datos de Stengel y Thiele, 2017. Para luego a través de una media móvil filtrar los datos obtenidos.

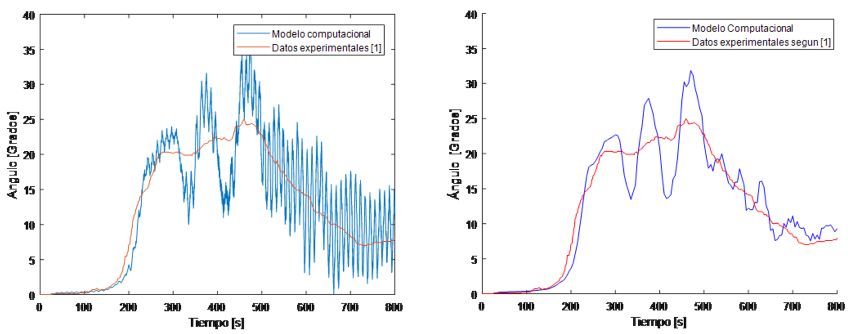


Figura 2.11: Datos del ángulo sin procesar y luego de aplicarle una media móvil

Cuando se compara con los datos arrojados por Stengel y Thiele, 2017, se pude apreciar la misma distorsión que ocurría en la simulación 2D. Esta cambio significativo se puede deber a no tener precisamente los mismos datos que se utilizaron en Stengel y Thiele, 2017. De todas formas el programa tiene la misma tendencia a comportarse como los datos de referencia al aplicarle el viento.

Comparando los resultados con el modelo 2D se puede observar que las curvas descritas por ambos modelos reflejan el mismo comportamiento:

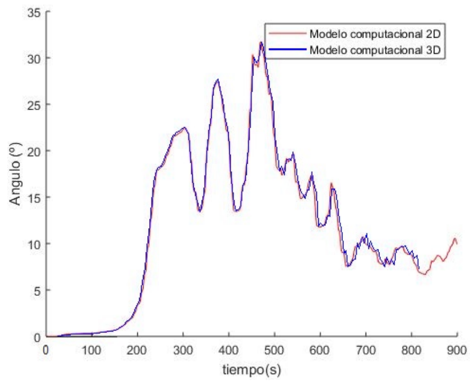


Figura 2.12: Contraste de los modelos 2D/3D

Los datos arrojados por el modelo Péndulo y 3D difieren en menos de un 5 % para cada posición en el tiempo. La gran diferencia que existen entre estas dos simulaciones es que en el para el caso 2D se debe asumir que las fuerzas son homogéneas en todo el cable y se puede ver que representa bien esta situación. Las tormentas conectivas son homogéneas en toda la extensión del cable por lo que el programa puede servir para simulaciones futuras.

Por último, se procede a aplicarle al sistema una masa de 160 Kg en el medio del cable, como en la primera simulación 3D, excitándolo con la fuerza del viento para conocer los desplazamientos del nodo móvil de la cadena de aisladores.(Figura 2.13).

A partir de los datos anteriores se puede ver que no existen grandes cambios en el movimiento del nodo libre en la cadena de aisladores cuando se aplica una fuerza proveniente de una tormenta conectiva al añadirle una masa de 160 kg en el centro del cable. Para este tipo de problemas no sería de gran ayuda la solución que se había encontrado en el la primera parte de esta sección.

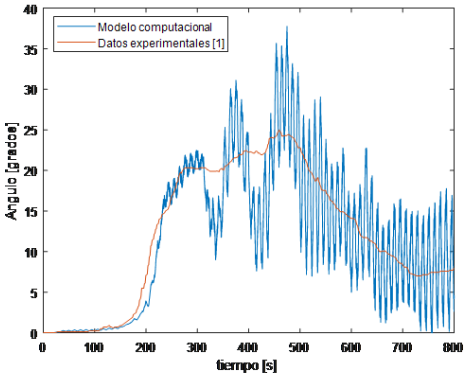


Figura 2.13: Respuesta del ángulo para tormenta convectiva utilizando una media móvil y masas sobre el cable

Anexo 3

Se presenta a continuación los códigos implementados durante el transcurso de este trabajo:

```
% Copyright (C) 2020, Jorge M. Perez Zerpa, J. Bruno Bazzano, Joaquin Viera,
%   Mauricio Vanzulli, Marcelo Forets, Jean-Marc Battini, Sebastian Toro
%
% This file is part of ONSAS.
%
% ONSAS is free software: you can redistribute it and/or modify
% it under the terms of the GNU General Public License as published by
% the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
% (at your option) any later version.
%
% ONSAS is distributed in the hope that it will be useful,
% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
% GNU General Public License for more details.
%
% You should have received a copy of the GNU General Public License
% along with ONSAS.  If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.

function  [ fs, ks, stress, rotData ]= elementBeamForces( ...
  elemCoords, elemCrossSecParams, elemConstitutiveParams, solutionMethod, Ue, Udote, Udotdote, elemrho ) ;

```

```
elemCoords = elemCoords(:)        ;
xs         = elemCoords(1:2:end) ;

booleanCSTangs = 0 ;

% --- material constit params ---
rho = elemrho ;
E   = elemConstitutiveParams(2) ;
nu  = elemConstitutiveParams(3) ;
G   = E/(2*(1+nu)) ;
% -------------------------------

% --- cross section ---
if elemCrossSecParams(1) == 1 %general section
    Area = elemCrossSecParams( 2 ) ;
    J    = elemCrossSecParams( 3 ) ;
    Iyy  = elemCrossSecParams( 4 ) ;
    Izz  = elemCrossSecParams( 5 ) ;
    %
    if length( elemCrossSecParams ) > 5
        Jrho =  diag( elemCrossSecParams( 6:8 ) ) ;
    else
        Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
    end
elseif elemCrossSecParams(1) == 2
    Area = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)       ;
    Iyy  = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)^3/12 ;
    Izz  = elemCrossSecParams(3)*elemCrossSecParams(2)^3/12 ;
    if elemCrossSecParams(2)==elemCrossSecParams(3)
        J    = 1/3*0.40147*elemCrossSecParams(2)^4 ;
    else
        error('rectangular section type not implemented yet,
   please create an issue')
    end
    Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
elseif elemCrossSecParams(1) == 3
    diameter = elemCrossSecParams(2) ;
    Area = pi*diameter^2/4           ;
    Iyy  = pi*diameter^4/64          ;
    Izz  = Iyy                       ;
    J    = Iyy + Izz ;
    Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
else
```

```
  error(' section type not implemented yet, please create an issue')
end
% ------------------------------

% auxiliar matrices
I3 = eye(3)     ;
O3 = zeros(3)   ;
O1 = zeros(1,3) ;

permutIndxs = [1:2:5 2:2:6 ([1:2:5]+6) ([2:2:6]+6) ] ;

dg        = Ue      ( permutIndxs ) ;
if solutionMethod > 2
  ddotg    = Udote   ( permutIndxs ) ;
  ddotdotg = Udotdote( permutIndxs ) ;
end

% global thetas
tg1 = dg (4:6);
tg2 = dg (10:12);

% rotation matrices
Rg1 = expon( tg1 ) ;
Rg2 = expon( tg2 ) ;

x21 = xs(4:6) - xs(1:3) ;
d21 = dg(7:9) - dg(1:3) ;

lo = sqrt( ( x21       )' * ( x21       ) ) ; %
l  = sqrt( ( x21 + d21 )' * ( x21 + d21 ) ) ; %

%~ lo = sqrt(x21'   *   x21);
%~ l = sqrt( sum( ( x21+d21).^2 ) ) ;
%~ l  = sqrt( (x21+d21)' * (x21+d21) ) ;
%~ l  = norm( x21 + d21 ) ;


%~ if norm(imag(dg))>0
  %~ u, d21, l, lo, imag(d21), dg
  %~ uimprov = ( l^2 - lo^2 ) / (lo + l)
%~ end

```

```
% rotation matrix to reference configuration
Ro = beamRefConfRotMat( x21 ) ;

% --- rigid rotation ---

% deformed x axis
e1 = ( x21 + d21 ) / l    ;

q1 = Rg1 * Ro * [0 1 0]' ;
q2 = Rg2 * Ro * [0 1 0]' ;
q  = ( q1 + q2 ) / 2      ;

% deformed z local axis
e3 = cross (e1, q) ;
e3 = e3 / norm(e3) ; % normalization

% deformed y local axis
e2 = cross (e3, e1);

% rotation matrix
Rr = [ e1 e2 e3 ] ;
% -------------------


% --- local displacements ---

% axial displacement
u  = l - lo;

% local rotations
Re1 = Rr' * Rg1 * Ro;
Re2 = Rr' * Rg2 * Ro;

tl1 = logar( Re1 ) ;
tl2 = logar( Re2 ) ;

locDisp = [ u tl1' tl2' ] ;
% -----------------------


% --- local force vector and tangent stiffness matrix ---
[fl, kl, strain, stress] = beamLocalStaticForces (u, tl1, tl2,
    lo, E, G, Area, Iyy, Izz, J ) ;
```

```
% -----------------------------------------------------------


q   = Rr' *  q ;
q1 = Rr' * q1 ;

nu = q(1)/q(2);
nu11 = q1(1)/q(2);
nu12 = q1(2)/q(2);
nu21 = 2*nu-nu11;
nu22 = 2-nu12;


% transformation to the new local coordinates

De1 = invTs( tl1 ) ;
De2 = invTs( tl2 ) ;

% matrix for transformation between global and relative
    rotations/moments
H   = [  1    01    01  ; ...
        01' De1    03  ; ...
        01'  03   De2 ]  ;

fe = H' * fl ;
 %~ [      fl(  1)
        %~ De1'*fl(2:4)
        %~ De2'*fl(5:7)] ;

Dh1 = dinvTs( tl1, fl(2:4) ) * De1 ;
Dh2 = dinvTs( tl2, fl(5:7) ) * De2 ;

Kh = [ 0    01    01
       01' Dh1    03
       01'  03   Dh2 ] ;

ke = H' * kl * H + Kh ;

% transformation to the global coordinates
r = [ -e1' 01  e1' 01 ]' ;

B = [ r'
```

```
   -nu/l*e3' (1-nu12/2)*e1'+nu11/2*e2'  nu/l*e3' 1/2*(-nu22*e1'+nu21*e2')
   -e3'/l e2' e3'/l 0 0 0
    e2'/l e3' -e2'/l 0 0 0
   -nu/l*e3' 1/2*(-nu12*e1'+nu11*e2')  nu/l*e3' (1-nu22/2)*e1'+nu21/2*e2'
   -e3'/l 0 0 0 e3'/l e2'
    e2'/l 0 0 0 -e2'/l e3'];

fg = B' * fe ;

A  = (I3-e1*e1')/l;

Dr=[A  O3 -A  O3
    O3 O3  O3 O3
   -A  O3  A  O3
    O3 O3  O3 O3];

G=[0   0    nu/l  nu12/2  -nu11/2  0  0  0    -nu/l  nu22/2  -nu21/2  0
   0   0    1/l     0        0     0  0  0    -1/l     0       0     0
   0  -1/l  0       0        0     0  0  1/l   0       0       0     0]';

II=[O3 I3 O3 O3
    O3 O3 O3 I3];

P = II - [G'; G'] ;

F = P' * fe(2:7);

sF=[skew(F(1:3))
    skew(F(4:6))
    skew(F(7:9))
    skew(F(10:12))];

EE=[Rr O3 O3 O3
    O3 Rr O3 O3
    O3 O3 Rr O3
    O3 O3 O3 Rr];

nab=[0
```

```
    (nu*(fe(2)+fe(5))+fe(3)+fe(6))/l
    (fe(4)+fe(7))/l];

Kg = B' * ke * B + Dr * fe(1) - EE*sF*G'*EE' + EE*G*nab*r' ;


% --- transformation to the new global coordinates ---

Dg1 = Ts( tg1 ) ;
Dg2 = Ts( tg2 ) ;

q=[fg(1:3)
   Dg1'*fg(4:6)
   fg(7:9)
   Dg2'*fg(10:12)];

Dk1=dTs(tg1,fg(4:6));
Dk2=dTs(tg2,fg(10:12));

H=[I3 O3  O3 O3
   O3 Dg1 O3 O3
   O3 O3  I3 O3
   O3 O3  O3 Dg2];

Kt = H' * Kg * H ;

Kt( 4:6 , 4:6 ) = Kt( 4:6 , 4:6 ) + Dk1 ;
Kt(10:12,10:12) = Kt(10:12,10:12) + Dk2 ;

%~ Kt = (Kt+Kt')/2;

Finte    = zeros(size(q)) ;
dofscomb = [ 1:2:5 2:2:6 7:2:11 8:2:12 ] ;

Finte( dofscomb ) = q ;
KTe = zeros( size(Kt));

if booleanCSTangs == 1

  step = 1e-4 * norm(x) ;

  for i=1:12
    ei = zeros(12,1);   ei(i) = j ;
```

```

    FinteComp = elementBeamInternLoads( x, dg + ei*step, params
   , 0 ) ;

    KTe(:,i) = imag( FinteComp ) / step;

    %~ if i==1
      %~ holaaafintecomp = FinteComp(1) ;
    %~ ei
%~ FinteComp
%~ stop
    %~ end
  end
  %~ KTeCS = KTe ;
%~ KTe = zeros( size(Kt));
  %~ KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
  %~ normareldif = norm( KTeCS - KTe ) / norm( KTe )
  %~ dife = KTeCS - KTe
  %~ normareldif11 = norm( KTeCS(1,1) - KTe(1,1) ) / norm( KTe
   (1,1) )
  %~ entridif = [ KTeCS(1,1) KTe(1,1) holaaafintecomp ]
  %~ holacomplejos = [ KTeCS(1,1) holaaafintecomp ]

  %~ full(dife)

  %~ stop
else

  KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
end

fs = {Finte} ;
ks = {KTe};

rotData = {locDisp, Rr} ;



if solutionMethod > 2

  % ------- interpolation functions ------
  % linear
  N1 = @(x) 1 -x/lo      ;
```

```
N2 = @(x) x/lo          ;

% cubic
N3 = @(x) x*(1-x/lo)^2      ;
N4 = @(x) -(1-x/lo)*(x^2)/lo ;
N5 = @(x) (1-3*x/lo)*(1-x/lo);
N6 = @(x) (3*x/lo-2)*(x/lo)  ;

N7 = @(x) N3(x)+N4(x)     ;
N8 = @(x) N5(x)+N6(x)-1     ;
% ------------------------------------

P1     = @(x) [ 0      0       0  0      0      0 ; ...
                0      0   N3(x)  0      0  N4(x) ; ...
                0 -N3(x)       0  0 -N4(x)      0 ] ; % Eq. 38

ul     = @(x) P1(x) * [ tl1; tl2 ] ; % Eq. 38

P2     = @(x) [ N1(x)      0      0  N2(x)      0      0 ; ...
                    0  N5(x)      0      0  N6(x)      0 ; ...
                    0      0  N5(x)      0      0  N6(x) ] ; % Eq. 39

N      = @(x) [ N1(x)*I3   O3   N2(x)*I3    O3 ];

H1     = @(x) N(x) + P1( x ) * P - 1*skew( ul(x) ) * G' ; % Eq 59

wdoter= G' * EE' * ddotg ;% Eq. 65

A1     = [   O1           O1   O1        O1 ;
            0  -1      0  O1   0  1  0   O1 ;
            0   0     -1  O1   0  0  1   O1 ] ; %Eq. A.4

udotl = @(x)  P1(x) * P * EE' * ddotg ; %Ec A.9

% ------------------
% r is defined as column vector!!
H1dot = @(x)  N7(x)/(l^2)*A1*(r' * ddotg) - skew( udotl(x) ) * G' ; %Ec A.8
% ------------------

ET = [skew(wdoter)      O3           O3       O3      ;
```

```
        03    skew(wdoter)     03       03      ;
        03      03      skew(wdoter)    03      ;
        03      03         03       skew(wdoter)   ];

C1 = @(x)  skew(wdoter)*H1(x) + H1dot(x) -H1(x)*ET; % Ec  66

udot    = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotg; %Ec 61
udotdot = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotdotg+Rr*C1(x)*EE'*ddotg; % Ec 67

%Matrix to compute wdot y wdtotdot

H2 = @(x) P2(x)*P+G'; %Ec 72 se puede usar para comprobar con ec A.10

wdot  = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotg;%Ec74


A2    = [   01    01    01     01;
        0 0  1  01  0 0 -1   01;
        0 -1 0  01  0 1  0   01];%Ec A.12

H2dot    = @(x) N8(x)/l^2*A2*(r'*ddotg) ;%Ec A.14

C2       = @(x) skew(wdoter)*H2(x) + H2dot(x) - H2(x)*ET ;%Ec 76

wdotdot  = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotdotg  + Rr*C2(x)*EE'*ddotg ; %Ec 77

%---------Tensor dyadc of Intertia ---------
%compute Rg(x)
thethaRoof  = @(x) P2(x)*[tl1;tl2];% Ec 39
Rex         = @(x) expon(thethaRoof(x)); %Ec 19 elevado en ambos lados
Rgx         = @(x) Rr*Rex(x)*Ro';

Irho        = @(x) Rgx(x)*Ro*(Jrho)*(Rgx(x)*Ro)'; %Ec 45
Irhoe       = @(x) Rr'*Irho(x)*Rr;        %Ec 80

% ---------Compute interial force by quadrature ---------
xIntPoints = [ -sqrt(3/5)     0  sqrt(3/5)  ] ;
wIntPoints = [        5/9   8/9        5/9  ] ;
```

```

IntegrandoForce  = @(x)  H1(x)'*Rr'*Area*rho*udotdot(x) ...
                       + H2(x)'*Rr'*( ...
                         Irho(x)*wdotdot(x)...
                         + skew(wdot(x)) * Irho(x) * wdot(x)
 ...
                       ) ;  %Eq 78

%~ IntegrandoForce  = @(x) H1(x)'*Rr'*Area*rho*udotdot(x)+H2(
 x)'*Rr'*(Irho(x)*wdotdot(x)...
                  %~ +skew(wdot(x))*Irho(x)*wdot(x));  %Ec 78
%~ irho=Irho(sqrt(3/5))
%~ termino=H2(1)'*Rr'*(Irho(1)*wdotdot(1)+skew(wdot(1))*Irho
 (1)*wdot(1))


IntegrandoMassMatrix  = @(x) 1*H1(x)'*Area*rho*H1(x)+1*H2(x)
 '*Irhoe(x)*H2(x);





%~ %Compute C3 and C4

h1 = @(x) H1(x) * ddotg ; %Eq B6
h2 = @(x) H2(x) * ddotg ;

rElem = [ [-1 0 0]   01  [1 0 0] 01]; %Ec B10

F1    = [skew(udot(0))' skew(wdot(0))' skew(udot(lo))' skew(
 wdot(lo))']'; %Chequear con los nodales
%~ F1aux    = [skew(ddotg(1:3))' skew(ddotg(4:6))' skew(ddotg
 (7:9))' skew(ddotg(10:12))']' %Chequear con los nodales

C3  = @(x) -skew(h1(x))*G'  + (N7(x)/l^2)*A1*(ddotg*rElem)...

              +skew(wdoter)*P1(x)*P + H1(x)*F1*G'; % B13

C4  = @(x) -skew(h2(x))*G' + (N8(x)/l^2)*A2*ddotg*rElem + H2(
 x)*F1*G'; %B14

%~ Irhoe(l)
```

```
%~ c1prueba = C1(l/2)
%~ c3prueba =C3(l/2)

% -------------------------------
% Compute Gyroscopic Matrix
IntegrandoGyroMatrix  = @(x)  H2(x)' * ( ( skew(wdoter) * Irhoe(x) ) - skew( Irhoe(x) * wdoter) ) * H2(x) ...
                        + H1(x)' * Area*rho*(C1(x) + C3(x))  + H2(x)'*Irhoe(x)*(C2(x)+C4(x)) ; %Ec88

sumForce = zeros (12, 1 ) ;
sumGyro  = zeros (12    ) ;
sumMass  = zeros (12    ) ;


for ind = 1 : length( xIntPoints )
  sumForce = sumForce ...
    + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoForce     ( lo/2 * (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
  %
  sumGyro = sumGyro ...
    + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoGyroMatrix( lo/2 * (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
  %
  sumMass = sumMass ...
    + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoMassMatrix( lo/2 * (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
end

Fine       = EE * sumForce      ;
GyroMatrix = EE * sumGyro * EE' ;
MassMatrix = EE * sumMass * EE' ;

%Add Bt Matrix

Bt=[I3   O3        O3       O3
    O3 inv(Dg1)'    O3       O3
    O3     O3       I3       O3
    O3     O3       O3       inv(Dg2)' ];
MassMatrix =MassMatrix*Bt ;
GyroMatrix =GyroMatrix*Bt ;
%~ MassMatrix
Fine       = Cambio_Base(Fine); % En formato [f1 m1 ...];
```

```
  GyroMatrix = Cambio_Base(GyroMatrix); % En formato [u1 theta1
    u2 theta2 u3 theta3];
  MassMatrix = Cambio_Base(MassMatrix); % En formato [u1 theta1
    u2 theta2 u3 theta3];

%~ GyroMatrix
  %~ MassCambiada = MassMatrix
  %~ stop
  %~ invPermutIndxs           = zeros(12,1) ;
  %~ invPermutIndxs(1:2:end) = [ 1:3  7:9  ] ;
  %~ invPermutIndxs(2:2:end) = [ 4:6 10:12 ] ;

  %~ Fine       = Fine      ( invPermutIndxs                 )
   ;
  %~ GyroMatrix = GyroMatrix( invPermutIndxs, invPermutIndxs )
   ;
  %~ MassMatrix = MassMatrix( invPermutIndxs, invPermutIndxs )
   ;

  %~ Fine(permutIndxs)       = Fine ;
  %~ GyroMatrix( permutIndxs, permutIndxs) = GyroMatrix ;
  %~ MassMatrix( permutIndxs, permutIndxs) = MassMatrix ;

  %~ function quadSum = integr( hola )

%~ Fine

  fs{3} = Fine ;

  ks{2} = GyroMatrix ;
  ks{3} = MassMatrix ;

end
```