



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería
Estructural
Instituto de Estructuras y Transporte
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay

Marzo de 2021



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

Dr. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

D.Sc. Prof. Gabriel Usera

Montevideo – Uruguay

Marzo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte, 2021.

XV, 93 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 87 – 93.

1. Elementos de viga corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Cables de alta tensión, 5. Transmisión eléctrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural. III. Título.

1 INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

2

3 D.Sc. Prof. Gonzalo Cetrángolo

4

5 M.Sc. Prof. Bruno Bazzano

6

7 D.Sc. Prof. Marcelo Forets

8 Montevideo – Uruguay

9 Marzo de 2021

(Dedicatoria) A alguien cuyo
valor es digno de ella.

¹ Agradecimientos

² Quisiera agradecer a...

(Epígrafe:) *Frase que alude al
tema de trabajo.*

Autor

2 Los sistemas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por even-
3 tos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados. Estos eventos
4 pueden provocar su desconexión, con consecuencias a la integridad de los com-
5 ponentes potencialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más
6 de veinte eventos de salida en servicio. Otro antecedente de este fenómeno
7 se remonta al 10 de marzo de 2002 cuando una tormenta convectiva afectó
8 un área de alrededor 6500 km² en el sur del país (“El tornado de Canelones
9 del año 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#)). Este evento fue una destrucción masiva que
10 causó el colapso de 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV,
11 además de unos 700 edificios y 1250 techos de hogares que fueron destruidos
12 (Durañona, [2015](#)). El costo de reparación de las torres es estimado en 2 millones
13 de dólares y en simultaneo se gastaron unos 10 millones de dólares destinados
14 para suplir la red con energía geotérmica proveniente de combustibles fósiles
15 (Duranona et al. [2019](#)). Esta problemática se superpone a la flaqueza de las
16 normas internacionales como ser *Design criteria of overhead transmission lines*,
17 [2003](#) para considerar fuerzas debidas al impacto de vientos extremos.

18 Este trabajo apunta a la creación de una herramienta capaz de reproducir el
19 comportamiento de conductores eléctricos, sometidos a perfiles de viento tipo
20 tormenta convectiva. Para esto, se extendió el planteo de la formulación co-
21 rrotacional de vigas 3D, considerando componentes aerodinámicos y se imple-
22 mentó en la herramienta de software libre *Open Non-linear Structural Analysis*
23 *Solver* ([ONSAS](#)). Con este cometido se desarrollaron tres modelos: el primero
24 de ellos valida la formulación para un ejemplo clásico en el área corrotacional,
25 la segunda es una modificación de un modelo presentado en un trabajo de re-
26 frentes en simulación estructural de conductores eléctricos, donde se observan
27 resultados semejantes. Por último, se construye un ejemplo compuesto por tres
28 torres y seis conductores, integrando elementos de viga barras, atacados por
29 un perfil de corriente descendente extraído de un estudio experimental en el
30 norte de Alemania.

31 Finalmente, se concluye que los resultados generados representan un dis-
32 parador para seguir profundizando en la temática, generando capacidades del

1 software para emular el fenómeno de manera mas precias y poder así incluirlo
2 como una herramienta complementaria para el diseño de sistemas de trasmisión.
3 Según los resultados se observa como las tormentas convectivas afectan
4 severamente a las instalaciones y que pueden causar potenciales prejuicios graves.
5 De esta forma la metodología planteada en esta tesis constituye el puntapié
6 inicial para la publicación de un trabajo donde se extiende la formulación corrotacional
7 de vigas 3D considerando fuerzas aerodinámicas sobre los elementos.
8 Palabras claves:

9 Elementos de viga corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica
10 estructural, Cables de alta tensión, Transmisión electrica.

ABSTRACT

The overhead transmission lines are frequently affected by severe climate events such as thunderstorms or heavy snowfalls. Such events might cause the disconnection of the line, with potentially severe consequences. In the period of 2000- 2007, more than twenty events of disconnection were registered in one of the main transmission lines in Uruguay. Given the particular features of local winds and temperatures, solutions applied in other countries might not be applicable. This demonstrates the necessity to develop numerical models to enhance the prediction capabilities of these events, guaranteeing in that manner a continuous supply of energy. The Universidad de la Repu'blica (UdelaR) counts with research groups working on this problem. The Computational Fluid Mechanics Group (GMFC) is working, since 2004, in the development of computational models of tridimensional fluxes for various applications. The main code developed is called `caffa.3d.MBRi` and it's based on the Finite Volume Method, using MPI parallelization. The group called Modelling and Identification in Solids and Structures (MISES) is committed, since its creation in 2018, to the development of numerical codes for structural analysis. The main code developed is called Open Non-linear Structural Analysis Solver (ONSAS) and it is publicly available. In this work a reference formulation for consistent non-linear dynamic analysis of beam structures using a co-rotational approach is implemented in the ONSAS code. The authors are not aware of any other open implementation of this formulation available. The implementation is validated using reference problems and also applied to the modelling of high voltage transmission lines considering realistic geometries and loadings.

Keyword:

1 Lista de figuras

2	3.1	Rotaciones a cada configuración.	21
3	3.2	Descripción de las bases corrotacionales.	22
4	3.3	Desplazamientos locales y globales del nodo P	24
5	3.4	Ilustración grados de libertad locales	28
6	4.1	Esquema de condición inicial y de borde.	40
7	4.2	Ilustración del viento y sus efectos.	41
8	4.3	Esquema en sistema de referencias absoluto.	43
9	4.4	Esquema en sistema de referencias relativo.	43
10	5.1	Disposición geométrica de la estructura.	58
11	5.2	Perfil de fuerza transversal en el nodo A.	59
12	5.3	Desplazamientos de control del nodo A	60
13	5.4	Desplazamientos de control del nodo B	61
14	5.5	Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s	62
15	5.6	Desplazamientos en x de los nodos A y B	62
16	5.7	Esquema del conductor ASCR 7/26.	63
17	5.8	Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.	65
18	5.9	Perfil de velocidad progresiva z	66
19	5.10	Perfil de fuerza nodal según el eje z	67
20	5.11	Desplazamientos del nodo A	67
21	5.12	Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.	68
22	5.13	Angulo de balanceo Φ en función de la velocidad media $W(t)$	69
23	5.14	Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo.	70
24	5.15	Esquema geométrico de cotas principales en la torre.	71
25	5.16	Ilustración de magnitudes de balanceo.	73
26	5.17	Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D	74
27	5.18	Desplazamientos de los nodos medios B y C	74

1	5.19 Curva analítica y numérica carga desplazamiento.	76
2	5.20 Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s.	76

¹ Lista de tablas

²	3.1	Caracterización de matrices en términos de la base	23
³	5.1	Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26 . . .	64
⁴	5.2	Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para W_{max} . .	65

1 Tabla de contenidos

2	Lista de figuras	XI
3	Lista de tablas	XIII
4	1 Introducción	1
5	1.0.1 Motivación	1
6	1.0.2 Enfoque	2
7	1.0.3 Estructura	4
8	2 Estado del arte	6
9	2.1 Historia de la temática	6
10	2.2 Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión	
11	eléctrica	9
12	2.3 Tormentas convectivas	11
13	2.4 Análisis semi-analíticos de conductores	13
14	2.5 Análisis corrotacional de vigas	16
15	3 Preliminares	20
16	3.1 Cinemática corrotacional	20
17	3.2 Formulación local	28
18	3.2.1 Variaciones en desplazamientos	30
19	3.2.2 Velocidades y aceleraciones	31
20	3.3 Dinámica corrotacional	33
21	3.3.1 Fuerza interna y matriz tangente	33
22	3.3.2 Fuerza inercial y matrices de masa tangentes	35
23	4 Metodología	38
24	4.1 Aspectos de modelado físico	38
25	4.1.1 Condiciones iniciales y de borde para la estructura	38

1	4.1.2	Modelo de viento	40
2	4.2	Aspectos de modelado computacional	46
3	4.2.1	Ecuación de equilibrio	46
4	4.2.2	Resolución numérica mediante HHT	49
5	4.2.3	Implementación numérica en ONSAS	53
6	5	Resultados numéricos	57
7	5.1	Vigas en voladizo con ángulo recto	57
8	5.2	Modelo simplificado de una linea	63
9	5.3	Sistema de transmisión eléctrica	69
10	6	Conclusiones	77
11	6.1	Conclusiones técnicas	77
12	6.1.1	Sobre el fenómeno	77
13	6.1.2	Sobre la metodología	78
14	6.1.3	Sobre los resultados	79
15	6.2	Conclusiones de formación	82
16	6.3	Trabajos a futuro	83
17	6.4	Reflexión	84
18		Bibliografía	87

Capítulo 1

Introducción

1.0.1. Motivación

Debido a las condiciones climáticas específicas del territorio uruguayo. Se produce una atmósfera inestable provocada por el choque de masas de aire calientes, originadas en los trópicos, y corrientes de aires fríos que migran desde el polo. Esta eminente peligro produce vientos extremos no sinópticos sumamente violentos y destructivos. Un trágico evento se sucedió el 10 de marzo de 2002 cuando una tormenta convectiva afectó un área de alrededor 6500 km² en el sur del país “El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#) En el norte de Montevideo los anemómetros capturaron velocidades de ráfaga de 34 m/s y de acuerdo con el nivel daño causado se, en determinando puntos podría haber superado los 56 m/s. Fue tal el nivel de devastación que causó el colapso de 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV, además de unos 700 edificios y 1250 techos de hogares que fueron destruidos (Durañona, [2015](#)). No solo afectó a las construcciones sino también muchos productores rurales y sus estancias productivas derribando invernaderos, montes y plantaciones. El costo de reparación de las torres es estimado en 2 millones de dólares y en simultáneo se gastaron unos 10 millones de dólares destinados para suplir la red con energía geotérmica proveniente de combustibles fósiles. En total los daños fueron costeados con un presupuesto de unos 27 millones de dólares Duranona et al. [2019](#).

Las líneas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por eventos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados. Estos eventos pueden provocar su desconexión, con consecuencias potencialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de salida en servicio por

1 esta causa en una de las principales líneas de Uruguay (Palmar-Montevideo).
2 Este tipo de fenómenos inducen fuertes movimientos en los cables, provocando
3 un balanceo excesivo de los mismos. Estas amplitudes desmesuradas implican
4 vulneraciones en la aislación del sistema, al aproximar sus cadenas de aislado-
5 res a las torres. Produciéndose descargas a tierra e indeseables interrupciones
6 del suministro que han afectado a la capital durante varias horas. El modela-
7 do estructural de vientos severos sobre líneas de transmisión eléctrica ha sido
8 abordado por la comunidad científica internacional desde diversas ópticas a lo
9 largo de las últimas cuatro décadas. Se han presentado modelos semi-analíti-
10 cos, análisis experimentales en túneles de viento y en campo más recientemente
11 en modelos numéricos.

12 Esto plantea la necesidad de contar con herramientas complementarias que
13 sean capaces de emular la respuesta de estos sistemas ante perfiles de viento
14 no sinópticos. Este es el principal objetivo de este trabajo, profundizar en
15 la bibliografía para el modelado estructural de conductores y crear un modelo
16 robusto, consistente capaz de simular líneas de transmisión eléctrica ante vientos
17 los medidos experimentalmente en Stengel y Thiele, [2017](#).

18 **1.0.2. Enfoque**

19 Numerosos autores de la literatura han acuñado sus investigaciones en ele-
20 mentos multinodales de barras como ser: Desai et al. [1995](#), Yan et al. [2009](#)
21 y los trabajos Gani y Légeron, [2010](#) Yang y Hong, [2016](#). No obstante, debi-
22 do a la inherente rigidez a flexión en el comportamiento estructural del cable
23 deben considerarse vigas tridimensionales. Por otra parte, los grandes despla-
24 zamientos y rotaciones que se presentan durante las trayectorias en tormentas,
25 conducen a implementar un modelo de vigas apto para este tipo de solicitacio-
26 nes. El abordaje corrotacional es propicio para este tipo de aplicaciones, pues
27 desde su base matemática, se construye desacoplando la deformación local con
28 deformaciones cinemáticas de cuerpo rígido para grandes amplitudes. Estas
29 es el atractivo fundamental de la propuesta corrotacional, su versatilidad an-
30 te diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de
31 elementos, fácilmente.

32 El campo de la metodología corrotacional es muy amplio, pero debido a la
33 claridad y contemporaneidad en el desarrollo de sus publicaciones, se eligió un
34 grupo de investigadores específicos. En (Le et al. [2011](#)) se publicó una formu-

lación para vigas 2D, en conjunción con la parte estática desarrollada por el Dr. Jean Marc Battini en (Battini y Pacoste, 2002). La extensión dinámica de este último, devino en el artículo (“A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014) que se implementó en esta tesis. Lo innovador y atractivo se centra en el desarrollo analítico consistente no solo para los términos estáticos sino también dinámicos. Además en comparación con otras formulaciones se obtienen resultados certeros y confiables con un menor numero de elementos, ventaja principal para modelar grandes dominios como en el caso de lineas de alta tensión.

Debido a las ventajas mencionas, esta metodología es implementada en diversos campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo es un atractivo importante que la hace aplicable en vastos campos de la ingeniería entre otras: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos. En particular la formulación (“A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014) ha sido aplicado en trabajos recientes en el área de ingeniera marina, robótica y civil en (Albino et al. 2018), Asadi y Johansson, 2019 y Viana et al. 2020. Esto evidencia que la metodología es potente para diversos campos de estudio. No obstante, según el conocimiento del autor, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución de problemas dinámicos. Asimismo esta no ha sido aplicada conductores sometidos a vientos extremos donde se desarrollan grandes amplitudes en distancias de centenas de metros.

En la temática específica de conductores, la tesis del autor Foti (2013) destaca por su publicación detallada utilizando elementos corrotacionales de vigas 3D. Estudios experimentales mostraban discordancias respecto al modelo, debido a dos factores, las actualizaciones angulares mediante aproximaciones incrementares y el comportamiento inmanente del sistema. En trabajos posteriores del mismo autor, se corrigen las limitaciones y modelan los deslizamientos internos de las hebras y su histéresis sobre el fenómeno Foti y Martinelli (2018). La aplicación de estos modelos sometidos ante tormentas conectivas aun es una interrogante. Y también así el perjuicio de las mismas sobre la continuidad e integridad del servicio.

Según el exhaustivo análisis en el estado del arte aun no se observan extensiones de la formulación corrotacional de “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014 considerando términos aerodinámicos dependientes del flujo de viento aplicado,

1 incorporando terminos viscosos y fuerzas externas dependientes de los des-
2 plazamientos. Asimismo no hay registros de los detalles de programación para
3 su implementación computacional.

4 **1.0.3. Estructura**

5 Este documento consta de cinco capítulos: Introducción, Estado del arte,
6 Preliminares, Resultados Numéricos y Conclusiones. Inicialmente en el Capítu-
7 lo 2 se realiza un recorrido histórico por la bibliografía consultada en materia de
8 simulaciones aplicadas a conductores eléctricos, con un enfoque computacional
9 y semi analítico. También se narran los diferentes estudios locales e interna-
10 cionales sobre vientos extremos para concluir en un tour dentro del abordaje
11 corrotacional. Continuamente en el Capítulo 3, con el objetivo de acercar la
12 metodología corrotacional al lector, se presenta someramente una descripción
13 simplificada, según lo propuesto por la bibliografía principal “A consistent 3D
14 corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structu-
15 res” (2014). Una vez presentada dicha formulación, se despliega la metodología
16 utilizada para esta investigación en el Capítulo 4. Aquí se detallan las hipótesis
17 fundamentales del modelado estructural y de viento, explicándose las condicio-
18 nes de borde impuestas y un análisis sobre el amortiguamiento aerodinámico
19 considerado. En este mismo capítulo, se despliega la implementación del al-
20 goritmo numérico utilizado y las estructuras de pseudocódigo referentes a los
21 principales scripts de la implementación computacional en el software ¹ONSAS.

22 Posteriormente, se resuelven tres aplicaciones numéricas en el Capítulo 5.
23 La primera de ellas persigue el objetivo de validar numericamente la implan-
24 tación. Este ejemplo es un modelo clásico en la literatura corrotacional donde
25 se observan resultados acordes en contraste con los presentados en “A consis-
26 tent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible
27 structures”, 2014. De manera subsiguiente, se modela un ejemplo presentado
28 por el autor Luca Foti en Foti y Martinelli, 2016. Este consiste en un con-
29 ductor eléctrico sometido a una carga artificial, extraída de un viento tipo
30 capa límite atmosférica. Por último, se presenta un problema complejo de dos
31 vanos consecutivos, compuesto por tres torres modeladas con elementos de
32 barra tipo Green y seis conductores por elementos de viga corrotacional. El
33 sistema de transmisión eléctrica, con geometrías y propiedades reales, es ataca-

¹<https://github.com/ONSAS/ONSAS/>

do por un perfil de viento capturado durante una corriente descendente en el
norte de Alemania por Stengel y Thiele, 2017. Finalmente en 6 se sintetizan
los principales resultados enriquecedores de este trabajo, además de plasmarse
eventuales trabajos a futuro, con lineamientos para profundizar en la temática
y sus posibles aplicaciones en el mercado de distribución eléctrica.

1 Capítulo 2

2 Estado del arte

3 Este capítulo incluye la revisión de la literatura, de los enfoques, teorías o
4 conceptos pertinentes en que se fundamenta la investigación. Primeramente en
5 la Sección 2.1 se presenta un relato cronológico del estudio de los cables desde
6 el crepúsculo del Siglo XVIII. A continuación en la Sección 2.2 se expone
7 un recorrido a partir de los años 60's vinculado a simulaciones aplicadas a
8 conductores de alta tensión. Consecutivamente en la Sección 2.3 se describen
9 los fenómenos de corrientes descendentes que afectan las líneas a partir de
10 trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas y otros fenómenos de
11 viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades aeroelásticas numerosos
12 trabajos han estudiado dicha temática y un breve recorrido por ellos se presenta
13 en el apartado 2.4. Por último, en la Sección 2.5 se recorre la metodología
14 corrotacional y los principales autores que desarrollaron esta formulación.

15 2.1. Historia de la temática

16 El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados
17 por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena
18 del libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el
19 1657 revolucionó el conocimiento científico en occidente, tal es así que un siglo
20 y medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino
21 en la aplicación de las principales invenciones de la revolución industrial.

22 El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas
23 de la época, Brook Taylor, d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron
24 las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al

1 sistema masa resorte en los albores del siglo XVII (Starossek, [1991](#)).

2 Haciendo uso del problema abstracto elemental del oscilador masa resorte
3 en 1788 Lagrange y otros autores anteriores, hallaron la solución para las vibra-
4 ciones de un cable inextensible compuesto de un número finito de elementos,
5 de masa despreciable, sometido a la acción de fuerzas externas. Posteriormente,
6 Poisson en 1820 presentó la ecuación diferencial que debería de cumplir el
7 sistema en el continuo, sin embargo las herramientas matemáticas analíticas
8 desarrolladas hasta la fecha no permitían de hallar la solución general a dicha
9 ecuación. (H. M. Irvine y Caughey, [1974](#))

10 No fue hasta 80 años mas tarde que en 1868 Routh presentó una solución
11 exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva que des-
12 cribe un punto sobre una esfera girando a velocidad angular constante) Routh
13 et al. [1955](#). En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del
14 cable, el primero en su época fue Kloppel y Lie (Klöppel y H., [1942](#)), a partir
15 de esto Pugsley en 1949 determinó experimentalmente, para una relación entre
16 la deflexión y el largo de vano entre 4 y 10 metros, desarrolló una fórmula para
17 las frecuencias naturales de vibración (Pugsley, [1949](#)). En 1953 considerando
18 un cable inextensible Saxon y Cahn resolvieron la expresión teórica, formulada
19 por Poisson, de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue vital, ya
20 que permitía calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos
21 torres Saxon y Cahn, [1953](#).

22 Tal es así que seguridad de las personas e integridad de los distintos ele-
23 mentos circundantes imprimen criterios de seguridad sobre el descenso de la
24 línea. Actualmente la tensión del conductor durante el montaje, se ajusta de
25 manera tal, que la altura mínima respete un valor exigido por norma. Esta
26 imposición depende principalmente del grado de urbanización, los umbrales de
27 contaminación magnética y la topografía del terreno.

28 A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las
29 frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los de un
30 sistema masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. En el año 1974
31 H. M. Irvine y Caughey, [1974](#) halló el rango transitorio entre ambos estados,
32 para corregir dicha discontinuidad se requiere una inclusión completa del mo-
33 delo de elasticidad del cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno
34 para cables horizontales (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un
35 ratio deflexión-largo del vano entre $1/8$ y 0. El mismo autor Irvine extendió lo
36 postulado para conductores con extremos desnivelados, aun bajo la hipótesis

1 de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor (H. M. Irvine y Caughey,
2 1974).

3 A posteriori, el mismo investigador profundizó sobre la dinámica con ex-
4 tremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movimiento
5 tipo terremoto (H. M. Irvine y Griffin, 1976) y (M. Irvine, 1978). La teoría
6 postulada por Irvine fue confirmada por Triafani en 1984 para distintos casos
7 experimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando
8 en cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al
9 movimiento Triantafyllou, 1984.

10 Autores contemporáneos estudiaron en simultaneo condiciones de borde
11 dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de solicitaciones pueden inducir
12 vibraciones y respuestas de resonancia. Los pioneros en la materia fueron Da-
13 venport y Steels ((Davenport, 1965)) en 1965. Resultados más refinados se
14 obtienen por Starossek (Starossek, 1991) . En estas se exponen formulaciones
15 dinámicas lineales para el movimiento de los cables sometidos a la acción del
16 viento, mas estos trabajos no se desarrollan contemplando grandes desplaza-
17 mientos ni tampoco se consideró no linealidad material.

18 Ese tipo de solicitaciones revelaron el fenómeno de “Galloping”, este re-
19 fiere a una respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del
20 cable entra en régimen y en consonancia con las fuerzas ejercidas por el viento.
21 Teóricamente las geometrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de
22 fenómenos. Sin embargo, debido a la existencia de imperfecciones constrictivas
23 y durante el montaje, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte
24 de energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respues-
25 ta se realizaron por Simu, quienes hallaron condiciones de velocidad crítica
26 eólica en función de coeficientes experimentales, obtenidos mediante ensayos
27 consumados en túnel de viento. (Simiu y Scanlan, 1986)

28 Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al pro-
29 blema de conductores eléctricos. El advenimiento del Método de Elementos
30 Finitos (MEF) aplicado a armaduras en la década del 40 y 50 constituyó una
31 herramienta sumamente potente e innovadora. Esto provocó que en los años ve-
32 nideros se desarrollaran vastas metodologías numéricas incorporando diferentes
33 elementos y algoritmos de resolución computacional. En particular, en Italia un
34 grupo de investigadores pertenecientes a La Universidad de Milan, aplicaron
35 métodos numéricos a la simulación de conductores insoslayables. Un recorrido
36 cronológico y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos científicos se

1 presenta a continuación en la Sección [2.2](#).

2 **2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a con-** 3 **ductores de transmisión eléctrica**

4 Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo por
5 Di Pilatto y Martinelli estaban basados en elementos trinodales isoparamétricos.
6 En esta metodología se asumió las hipótesis de pequeñas deformaciones
7 unitarias, considerandose para el desarrollo no linealidades geométricas debido
8 a grandes desplazamientos. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos
9 alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones
10 para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, este
11 tipo de modelos presenta la debilidad de no satisfacer las condición de equi-
12 librio dinámico para específicos tipos de balanceo.(Martinelli y Perotti, [2001](#)
13 y Martinelli y Perotti, [2004](#)). En consonancia, estudios contemporáneos evi-
14 denciaban que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por
15 lo que despreciar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas
16 y predicciones erróneas sobre las frecuencias naturales de mayor orden. Tal y
17 como se remarca en Koh y Rong, [2004](#).

18 Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007.
19 En este trabajo el cable se modelaba utilizando abordajes corrotacionales. Di
20 Pillato presentó una formulación considerando elementos de viga tridimensio-
21 nales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e inerciales
22 teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones en coordenadas glo-
23 bales. Sin embargo, esta formulación basada en lo propuesto por (Oran, [1973](#))
24 tiene como desventaja principal que no es fiable ante grandes rotaciones locales
25 de los nodos, como también, antes significativos incrementos angulares entre
26 dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente para capturar dinámicas com-
27 plexas resulta necesario e ineludible discretizar el dominio temporal y especial
28 pequeños intervalos. Lo que conlleva a costos computacionales desmedidos.

29 El mismo autor y su equipo corrigieron las limitaciones relacionadas con
30 los pequeñas rotaciones nodales al año siguiente en su trabajo: Di Pilato et
31 al. [2008](#). La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la confi-
32 guración deformada utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco
33 el impedimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga,

1 se resuelve aplicando la metodología propuesta Simo and Vu-Quoc en Simo y
2 Vu-Quoc, [1988](#).

3 Conforme las simulaciones numéricas avanzaron sobre la materia, la espe-
4 cificación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó.
5 Otro aspecto impulsor en el área se basaba en que los resultados experimen-
6 tales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para
7 grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y
8 geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos so-
9 bre el comportamiento no holomónico del fenómeno. Esto refiere a un modeló
10 realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción
11 entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha
12 temática fueron Papailiou y Kutterer en sus trabajos de la década del noventa
13 Papailiou, [1997](#) y Kutterer y Starossek, [1992](#).

14 Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos
15 escenarios, “full slip” donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento
16 relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas.
17 El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre
18 ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre
19 de “full stick”. En esta situación el conjunto se comporta como un rígido, he
20 aquí la razón de su nomenclatura. En Papailiou, [1997](#) se establece la tensión
21 máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones
22 de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. Estos
23 resultados fueron contrastados con un análisis experimental.

24 Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones se traducen
25 en momentos y fuerzas internas a cada cable que conforma al conductor. Estas
26 se pueden vincular a la curvatura o deformación axial del conjunto. A partir
27 de esto, se obtiene la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y
28 momentos internos en función de la deformación y curvatura del conductor.

29 Esta matriz depende del estado en que se encuentre la dinámica del cable.
30 Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen “full slip.” “full-
31 stick” la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso “full-stick” cuando
32 ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el conductor, la matriz
33 de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente no se le puede atribuir un
34 potencial, esto se asocia al comportamiento no holomónico o histéresis del
35 fenómeno. En dicho estado un modelo de viga uniforme no es aplicable.

36 Con el propósito de desatollar una formulación que sea capaz de representar

1 el fenómeno computacionalmente se publicó el artículo Foti y Martinelli, [2016](#).
2 Aquí se implementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuerzas
3 tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter
4 simplificadoras son estudiadas en Costello, [1990](#) y Rawlins, [2005](#). Para el es-
5 tudio de a los contactos radiales se asume: las superficies de contacto no se
6 deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de contacto en-
7 tre cables se pueden aproximar por una línea continua, la fricción entre los
8 cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último que la
9 presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

10 Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjun-
11 to con la condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores límites para
12 la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El
13 carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado
14 sobre la pérdida de rigidez súbita que ocurre con el conductor, al producirse
15 deslizamiento relativo al interior del elemento. Esta disminución abrupta de ri-
16 gidez puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga,
17 esto puede intensificar o agudizar la problemática de balanceos excesivos. Es-
18 tos movimientos son inminentes para determinadas condiciones atmosféricas,
19 entre ellos las tormentas convectivas. Estas corrientes descendentes han sido
20 objeto de estudio en los últimos 50 años por expertos en ingeniería del viento.
21 En la siguiente Sección se presenta una somera descripción de la literatura
22 investigada.

23 **2.3. Tormentas convectivas**

24 Las tormentas convectivas son fenómenos atmosféricos que generan inesta-
25 bilidades en el flujo debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad.
26 Cuando estas se ocasionan, masas de aire caliente ascienden hasta la parte su-
27 perior de la nube, quedando depositado como una especie de domo o cúpula
28 al interior de la misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al
29 interior de la tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodea-
30 ba por debajo. Esta corriente desciende a velocidades intensas e impacta con
31 vehemencia sobre la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de
32 anillo vorticoso que puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h
33 Fujita ([1985](#)). En este trabajo se establecen escalas espaciales entre 40 m y 4
34 km. No obstante recientes estudios plantean que se explayan en un diámetro

1 entre 1 y 5 km Darwish et al. (2010).

2 Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de transmisión
3 eléctrica, ciertas normativas se estriban en perfiles de vientos clásicos (sinópti-
4 cos) tipo capa límite atmosférica. Esto se traduce en una subestimación de las
5 presiones que se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma IEC 60826.
6 Esto pone en riesgo al sistema es atacado por tornados o corrientes descenden-
7 tes. La probabilidad de ocurrencia es baja para dominios de corta longitud,
8 pero cuando las líneas discurren largas distancias estos vientos extremos suelen
9 suceder esporádicamente Ang y Tang (1984).

10 La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de
11 daños vinculado a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores con-
12 temporáneos el diámetro de desarrollo del anillo se encuentra intrínsecamente
13 relacionadas con dicha altura Holmes (2002), Abd-Elaal et al. 2013. Comple-
14 mentando a esto, Stengel y Thiele (2017) en Alemania capturó este fenómenos
15 utilizando anemómetros colocados en líneas de transmisión. Esto permitió es-
16 tablecer un perfil de velocidades media y la función de coherencia relacionada
17 con la turbulencia a partir de datos experimentales. De este artículo se extrajo
18 el perfil de vientos implementado en este trabajo.

19 En nuestro país investigadores integrantes del Grupo de Eolo Dinámica
20 perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante tormentas
21 conectivas trabajo de campo exhaustivo. El primer informe relevado en el ar-
22 tículo Durañona y Cataldo, 2009 se realiza un calculo del angulo de balanceo,
23 simplificando cauasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio
24 de la fuerza de viento por unidad de peso. En este trabajo se mostró que para
25 valores de velocidad de viento de 97.9 m/s el conductor alcanza los 85°.

26 Dados los alarmantes resultados de Durañona y Cataldo, 2009 posterior-
27 mente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha
28 en el trabajo (Durañona, 2015). En este estudio se atisba que fenómenos de
29 corrientes descendentes producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minuto
30 que los vientos tipo capa límite atmosférica. El valor máximo de velocidad
31 registrado alcanzó los 40 m/s en promedio de 10 minutos. En el año 2019, es-
32 te grupo de investigadores presentó un trabajo relevante donde se resalta que
33 los vientos extremos afecta principalmente al norte del país Duranona et al.
34 (2019). En este se sugiere que la norma (UNIT:50-84, 1984) debe ser actualiza-
35 da incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos no sinópticos. Pero
36 los eventos de vientos extremos no son los únicos que afectan a los conductores,

1 también pueden ocurrir inestabilidades estructurales inherentes a interacción
2 entre fluido-estructura.

3 **2.4. Análisis semi-analíticos de conductores**

4 Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pue-
5 den experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud,
6 principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente
7 estudiada por distintos autores de la literatura. Como por ejemplo Blevins
8 y Vibrations, 1990, Jones, 1992. Para vigas de gran esbeltez, o elementos de
9 cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto lineales
10 como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o dos
11 grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consisten
12 en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación
13 intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal y verificar estos resultados
14 en la práctica. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin
15 simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática
16 destaca el trabajo Chabart y Lilien (1998), en este se propuso una aproxima-
17 ción innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser:
18 la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en
19 la fuerza lift ante la presencia de excentricidades geométricas.

20 El fenómeno Galloping presenta las frecuencias del movimiento excesivo
21 suelen ser bajas y son exuberantes a simple vista. Este fenómeno devastador
22 tiene consecuencias severas sobre todo en líneas que se encuentran en climas
23 gélidos, recientemente en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur
24 de Argentina y las imágenes son impactantes ([Ver vídeo](#)). La principal causa
25 del fenómeno es el ataque de vientos intensos y constantes. La presencia de
26 irregularidades geométricas en las líneas induce inestabilidades aerodinámicas
27 y cuanto mayor sea la cantidad y discontinuidad de las excentricidades más
28 aguda será la respuesta inducida. Las velocidades requeridas de viento suelen
29 ser mayor a 7 m/s y las frecuencias de respuesta del conductor suelen oscilar
30 entre los 0.15 y 1 Hz.

31 Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente apro-
32 ximación de las líneas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separa-
33 dores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, si los relativos
34 entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elemen-

1 tos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la
2 formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en
3 inglés (Torsional Damper Detuner) gira relativo al conductor anulando las
4 formas irregulares producto de la formación de hielo.

5 En el artículo Jones, [1992](#) se halló la solución a la ecuación de movimiento,
6 despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los
7 autovalores que permiten detectar analíticamente bajo que condiciones del sis-
8 tema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el
9 estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose
10 un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente mayor
11 a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos e inde-
12 seables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje vertical.
13 Esto amenaza la seguridad y fiabilidad del sistema ya que esta componente,
14 es limitada durante la instalación a través de cálculos estáticos. Al generarse
15 desplazamiento dinámicos desmedidos, ya no hay garantías de salvaguardar la
16 salud de las personas y los componentes cercanos.

17 Los estudios de Jones y Blevins, se fraguaban en premisas de linealidad
18 geométrica. Sin embargo, autores han destacado que los efectos no lineales
19 juegan un rol importante en el desarrollo, como ser: las referencias Luongo et
20 al. [1984](#) y Lee y Perkins, [1992](#). En el trabajo propuesto por Lee se incluyen
21 componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento del conduc-
22 tor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un modelo
23 lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y tercer
24 orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numericamente la
25 ecuación diferencial del movimiento.

26 Esta problemática fue abordada unos años mas tarde, por el trabajo pu-
27 blicado Luongo y Piccardo, [1998](#). En este artículo se hallaron las soluciones
28 no lineales de resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se
29 contrastaron dos soluciones arrojadas por disimiles modelos, uno de pequeños
30 desplazamientos y otro incorporando no linealidades geométricas. En este tra-
31 bajo se distinguen dos regímenes del movimiento, el primero de ellos nominado
32 crítico refiere a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos
33 no presetan gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayec-
34 torias se amplifican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se
35 concluye que la solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable
36 para valores de velocidad media de viento correspondiente al estado crítico.

1 Posteriormente al incrementar la velocidad de viento y se desata el fenómeno
2 post-crítico y el incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible
3 para representar cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles
4 simétricos, la velocidad crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis
5 lineal.

6 Según los autores del trabajo Luongo et al. [2007](#), hasta la fecha de publi-
7 cación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la
8 dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las
9 fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos
10 aplicados eran exiguos, en especial para el régimen post-crítico del Galloping.
11 Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de ángulo de ata-
12 que y velocidad relativa entre el conductor y del fuljo. Además eran desprecia-
13 das las rigideces a torsión de los elementos, esto se debe a que la rigidez según
14 el eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez flexional, principalmente por
15 un argumento de esbeltez y disposición geométrica del conductor de estudio.

16 El propósito de Luongo et al. [2007](#) fue proponer un elemento de viga orien-
17 tado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este a torsión.
18 Estos términos representan diferencias notorias para secciones antisimétricas
19 en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados numéri-
20 cos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el objetivo de
21 hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró, que el ángulo
22 de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones críticas
23 del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuenta los mo-
24 dos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la inclusión
25 del ángulo puede influir significativamente en el valor de velocidades críticas
26 aeroelásticas.

27 A posteriori, en el trabajo Luongo et al. [2009](#) se profundizó en los efectos
28 del ángulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la
29 formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como
30 destacado resultado, se probó que mientras la rigidez de torsional no afecta
31 significativamente los desplazamientos traslacionales, en cambio sí lo hace a
32 la solución del ángulo de giro. En especial para perfiles sin simetría de revolu-
33 ción. La consideración del balanceo en el lift y en el ángulo de ataque, afecta
34 notoriamente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades
35 de la sección aerodinámica y por tanto sus velocidades críticas. Por ende, se
36 resalta la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas

1 para el modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

2 **2.5. Análisis corrotacional de vigas**

3 Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplica-
4 ciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos
5 y terrestres. A pesar de las formulaciones “ Updated ”(UL) y “Total Lagran-
6 gian”(TL) clásicas, dentro de estas últimas el abordaje corrotacional es idóneo
7 para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir
8 términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamien-
9 tos den servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de
10 esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de
11 Nour-Omid y Rankin, [1991](#) quienes sentaron las bases del método.

12 Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del
13 elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente considerándolo como un
14 rígido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente
15 rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario que permite locali-
16 zar al elemento en el espacio. Mientras que 0para la componente deformable se
17 considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo siste-
18 ma de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la
19 propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones loca-
20 les. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente. Además,
21 destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento
22 representa términos de no linealidades geométricas mientras que la deformables
23 incorpora no linealidad materiales.

24 El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se
25 calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La varia-
26 ción de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz
27 tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a
28 esta propiedad anti-simétrica, esta característica depende principalmente del
29 des-balanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades
30 anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al
31 resolver el sistema mediante métodos numéricos como Newton Raphson(N-R).
32 Los autores Nour-Omid y Rankin, [1991](#) con el objetivo de optimizar el método,
33 demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de
34 convergencia cuadrático.

1 Debido a voluble capacidad de la metodología corrotacional, en los años
2 posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de ele-
3 mentos y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron al
4 considerar funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentra-
5 da y elementos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener
6 de manera sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inercia-
7 les. Como habrá notado el sagaz lector, este cálculo conduce ineludiblemente
8 a la matriz de masa constante de Timoshenko. Por otra parte, interpolaciones
9 lineales asumen que los desplazamientos transversales al eje de la viga son nu-
10 los, esta hipótesis reduce el campo de aplicación del modelo, en especial para
11 mallados de bajo número de elementos, ya que la matriz de masa tangente y el
12 vector de fuerzas inerciales no representan las componentes omitidas.

13 En la referencia De Borst et al. [2012](#) se sugiere que el proceso de obten-
14 ción requerido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado
15 intrincado, debido a su grado de complejidad geométrico. El autor propone
16 utilizar funciones de interpretación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al
17 elemento de Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan controversiales a la hora
18 de derivar el vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consi-
19 deró un modelo simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones
20 cúbicas para el vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una
21 matriz de masa constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero
22 numéricamente eficiente. Esta forma de proceder también se aplicó en Pacoste
23 y Eriksson, [1997](#).

24 En paralelo otros autores, desarrollaron eficientes elementos de viga bidi-
25 imensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar estructuras en
26 grandes desplazamientos bajo cargas estáticas (Battini y Pacoste, [2002](#) Alsafadie et al. [2010](#)). Estos autores afirman que al seleccionar adecuadamente el
27 largo de elemento, los desplazamientos locales son significativamente menores
28 que los asociados a la componente rígida. Por esta razón, se compararon resul-
29 tados con diferentes número y tipos de elementos para los mismos ejemplos.
30 Estos estudios, en conjunto con lo publicado por Alsafadie et al. [2010](#), con-
31 cluyen que formulaciones cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales
32 bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión
33 analítica hacia las componentes dinámicas.

35 Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos
36 años. El primero de ellos fue Behdinan et al. [1998](#) a finales de siglo, pero las fun-

1 ciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no eran
2 consistente con la formulación canónica del método corrotacional propuesta
3 por Simo y Vu-Quoc (1988). De hecho, según el conocimiento del autor, no
4 existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación
5 consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna
6 sino también, las componentes inerciales.

7 Años mas tarde, Le et al. 2011 publicaron una formulación para vigas
8 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación
9 independiente "IIE" de la referencia Reddy, 1997. Estos elementos fueron desa-
10 rrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz
11 tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basa-
12 das en los polinomios de Hermitian, con el propósito de incluir consideraciones
13 adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es
14 una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y
15 su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algu-
16 nas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además
17 se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la li-
18 teratura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta
19 nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir
20 significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor
21 precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los
22 desplazamientos locales.

23 Los mismos autores en conjunto con Lee extendieron la formulación en su
24 trabajo del 2014 "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear
25 dynamic analysis of flexible structures", 2014 agregando una dimensión, este
26 desarrollo se vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditi-
27 vidad y conmutatividad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol
28 indispensables a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En
29 este artículo, se presenta la parte estática desarrollada por Battini en Battini
30 y Pacoste, 2002, además de exponerse detalladamente la obtención del vector
31 de fuerzas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones
32 para las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración tempo-
33 ral se selecciono el clásico método Hughes, Hilbert y Taylor (HHT) con los
34 parámetros convencionales (Hilber et al. 1977). Este algoritmo es utilizado
35 por reconocidos software comerciales (Abaqus, Lusas) e implica una disipación
36 sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, mas

1 presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

2 En “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic
3 analysis of flexible structures”, [2014](#) se consideraron cuatro ejemplos numéri-
4 cos para comparar la nueva formulación con otros dos enfoques. La primer
5 comparación, se deriva de la nueva formulación reemplazando las intercalacio-
6 nes cúbicas por lineales. El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por
7 Simo y Vu-Quoc, [1988](#). En base a estos ejemplos de contraste se concluyen
8 las siguientes afirmaciones: todas las formulaciones conducen a idénticos re-
9 sultados refinando las mallas, no así con mayados gruesos. En este caso tanto
10 la formulación bi-nodal de Simo y Vu-Quoc como la lineal corrotacional son
11 significativamente mas imprecisas en comparación con la formulación cúbica
12 corrotacional. Esto justifica el esfuerzo computacional y analítico en los térmi-
13 nos dinámicos inerciales incluidos en el modelo. La formulación corrotacional
14 es ligeramente mas lento (12 %) respecto a lo descrito por Simo and Vu-Quoc
15 . Sin embargo, bajo ciertas condiciones altamente dinámicas, para un mismo
16 nivel de precisión exigido, la formulación innovadora de este trabajo lo logra
17 en menor tiempo.

18 Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos
19 campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo
20 es un atractivo para distintos investigadores del área. En Albino et al. [2018](#)
21 Albino modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por materiales
22 graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta mar. En
23 2019 Asadi y Johansson, [2019](#) simularon palas de aerogeneradores utilizando
24 elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas
25 el tren de transmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala.
26 En el mismo año el autor Barzanooni et al. [2018](#) atacó la problemática de
27 anillos y interacciones de contacto aplicado a robots industriales también con
28 la formulación propuesta por “A consistent 3D corotational beam element for
29 nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, [2014](#).

30 Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación
31 central de este trabajo. Donde se desarrollan grandes desplazamientos y térmi-
32 nos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando softwares para
33 ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y mecáni-
34 ca. No obstante, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones
35 corrotacionales para la solución de problemas dinámicos.

1 Capítulo 3

2 Preliminares

3 A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de la
4 formulación corrotacional según lo propuesto en (“A consistent 3D corotational
5 beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014). La
6 temática se abordará progresivamente según la naturaleza de las variables. En
7 primera instancia se describen la caracterización de magnitudes cinemáticas
8 globales y locales en las Secciones 3.1 y 3.2. Una vez ahondadas las variables
9 asociadas al movimiento se expone como, a partir de estas, se deducen las
10 variables estáticas y dinámicas en la Sección 3.3.

11 3.1. Cinemática corrotacional

12 El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en
13 escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas
14 representa grandes rotaciones y desplazamientos dados por la dinámica de un
15 elemento rígido. La segunda componente tiene en cuenta los desplazamientos
16 locales asociados a la flexibilidad del material. Este enfoque suele aplicarse
17 al analizar deformaciones estáticas. Resulta intuitivo imaginar en un inicio
18 como se deformaría la estructura de manera rígida para luego aplicarle la
19 componente deformable. Ahora bien, en este tipo de formulaciones, hace falta
20 introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten representar los
21 desplazamientos de cada una de las componentes.

22 Para el abordaje de este análisis debe comprenderse una serie de rotaciones
23 consecutivas ilustradas en la Figura 3.1. Para un elemento formado por los
24 nodos 1 y 2 en sus extremos, se distinguen tres configuraciones. La primera

de ellas en color azul representa el elemento en su estado indeformado o de referencia. El color naranja identifica a la componente deformada mientras que en gris se ilustra la configuración rígida del elemento.

Para realizar trasposos de una componente a otra se definen una serie de transformaciones. La primera de ellas nominada \mathbf{R}_0 lleva al elemento desde su estado de referencia a su estado inicial. A partir de esa configuración podemos hallar la geometría deformada aplicando las transformaciones \mathbf{R}_1^g o \mathbf{R}_2^g , dependiendo el nodo de interés. Esta no es la única forma de hallar el estado deformado del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa consiste dado un nodo i al interior del elemento, aplicar consecutivamente las transformaciones \mathbf{R}_r y $\bar{\mathbf{R}}_i$ encontrando así el estado deformado partiendo desde su configuración de referencia.

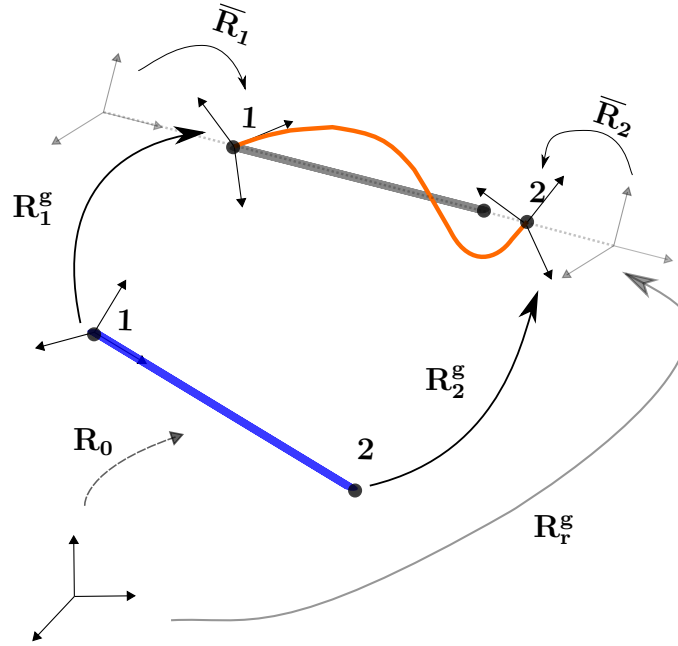


Figura 3.1: Rotaciones a cada configuración.

A partir de las definiciones descritas anteriormente e ilustradas en la Figura 3.1, resulta clarificante destacar los argumentos sobre la nomenclatura seleccionada. En primer lugar, la notación con supra-índice “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a dicha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cuales es la configuración deformada partiendo de la de referencia. Asimismo en la Figura 3.1 tanto las rotaciones locales $\bar{\mathbf{R}}_i$ como globales \mathbf{R}_i^g se utiliza el sub-índice i mientras que para la rotación rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta cla-

1 ve para comprender la metodología corrotacional. Como la componente rígida
2 es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible
3 prescindir del sub-índice i .

4 Naturalmente para encontrar la curva deformada que describe el elemento,
5 hace falta la orientación y traslación de un sistema de coordenadas solidario a
6 cada punto. Estas transformaciones se pueden representar matemáticamente
7 con la artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la
8 temática puede hallarse en la publicación (Kožar y Ibrahimbegović, 1995).

9 En los párrafos que prosiguen se desarrollan los sistemas solidarios a los
10 nodos ubicados en los extremos del elemento. El estudio de deformaciones
11 locales para los puntos interiores a la viga se detalla en la Sección 3.2.

12 Para deducir las matrices asociadas a cada transformación resulta impres-
13 cionable definir un conjunto de bases que permitan seguir al elemento en cada
14 configuración. Estas tríadas de vectores se muestran gráficamente a continua-
15 ción en la Figura 3.2.

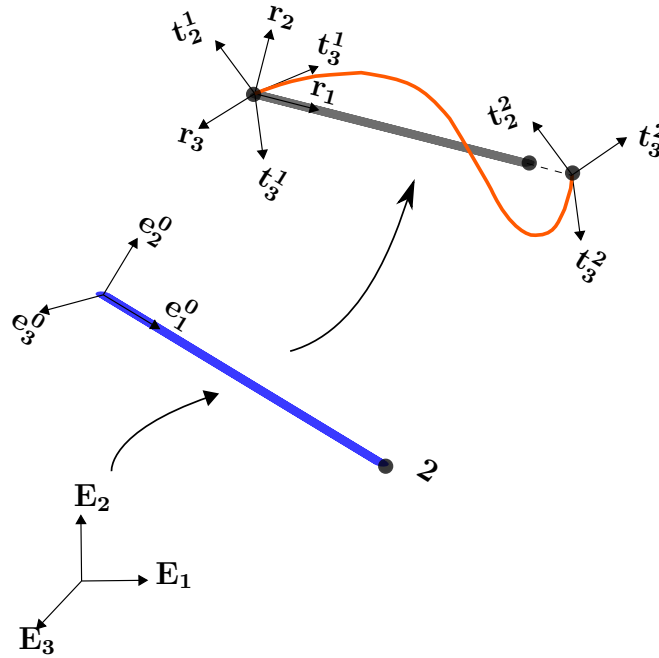


Figura 3.2: Descripción de las bases corrotacionales.

16 Primeramente se define un sistema de referencia auxiliar integrado por la
17 base ortogonal $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$. Una vez ubicado el elemento en su estado inicial,
18 las coordenadas se hallan en relación a tres vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Al aplicarle la
19 traslación y rotación de cuerpo rígido la base $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ se anida al elemento y

funciona como sistema de coordenadas en la configuración rígida. Por último, la base $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ permite identificar la orientación y posición del nodo i en la configuración deformada. Se hace énfasis en el hecho de que tanto la configuración inicial como la rígida requieren un único sistema de coordenadas. Por el contrario, la configuración deformada debido a la flexibilidad del elemento, requiere dos sistemas, denotados con la letra \mathbf{t}_j^i donde el supra-índice i identifica el nodo y el sub-índice j la dirección.

La definición de las bases mencionadas en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los vectores solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los versores se establece en la Tabla 3.1 a continuación:

Matriz	Vínculo de bases
\mathbf{R}_0	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
\mathbf{R}_i^g	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\bar{\mathbf{R}}_i$	$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
\mathbf{R}_r	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$

Tabla 3.1: Caracterización de matrices en términos de la base

Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primer fila se tiene: \mathbf{R}_0 . $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)^T = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Al plantear este tipo de vínculos entre vectores y haciendo uso de la propiedad para matrices ortonormales de la Ecuación 3.1 es posible deducir las Expresiones (3.2) y (3.3).

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (3.1)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r^g)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r^g \bar{\mathbf{R}}_i \quad (3.3)$$

El propósito de la descripción anterior, algo intrincada y engorrosa responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones. Dado un punto arbitrario P, es posible ubicarlo en coordenadas locales y globales tal

1 cual se muestra en la Figura 3.3. En coordenadas locales sus grados de libertad
2 son: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra \mathbf{u}_P , y sus desplazamientos
3 angulares con el nombre $\overline{\theta}_i^P$. Los siete grados de libertad se compactan en el
4 vector $\mathbf{d}_i^P = (\mathbf{u}_P, \overline{\theta}_i^P)$. Ahora bien, es posible desglosar el desplazamiento axial
5 \mathbf{u} en tres componentes según los vectores \mathbf{r}_i . Al vector desplazamientos de P
6 en función de la base \mathbf{r}_i se le denomina \mathbf{d}_r .

7 Los desplazamientos de la viga en el punto P también se pueden expresar
8 en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas $\mathbf{d}_g =$
9 $(\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$. Esta tienen origen en la configuración de referencia o material hasta
10 la deformada como se muestra en la Figura 3.3.

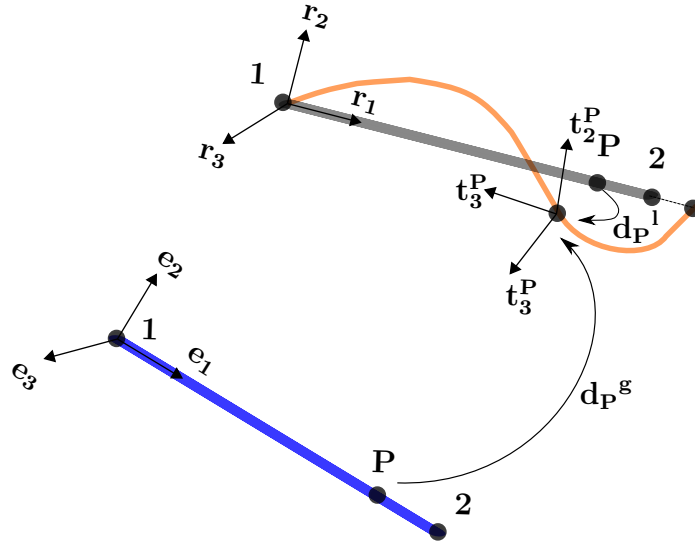


Figura 3.3: Desplazamientos locales y globales del nodo P

11 Acorde con los desplazamientos presentados anteriormente, es propicio cal-
12 cular sus diferenciales asociados. Estos emplearan un rol esencial para el cálculo
13 de matrices tangentes y fuerzas internas. A continuación las Ecuaciones (3.4)
14 y (3.5) definen las variaciones de los desplazamientos locales y globales respec-
15 tivamente.

$$\delta \mathbf{d}_l = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T \quad (3.4)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^g, \delta \mathbf{u}_2^g, \mathbf{w}_1^g, \mathbf{w}_2^g]^T \quad (3.5)$$

16 Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, se desarrollan los dife-
17 renciales asociados a las transformaciones de giro \mathbf{R}_r^g , \mathbf{R}_i^g , \mathbf{R}_0 y $\overline{\mathbf{R}}_i$. Para esto,

1 primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla
2 3.1. Las entradas de \mathbf{R}_r y \mathbf{R}_i^g se hallan siguiendo las Ecuaciones (3.6) y (3.7)
3 a continuación:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (3.7)$$

4 Los versores \mathbf{r}_i se hallan a partir del vector director \mathbf{r}_1 que apunta del nodo
5 1 al 2. Es por esto que es preciso definirlo en función de las posiciones iniciales
6 de los nodos en coordenadas globales \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , sus desplazamientos \mathbf{u}_1^g y \mathbf{u}_2^g y
7 el largo l_n una vez deformado.

$$l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\| \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1}{l_n} \quad (3.9)$$

8 El vector auxiliar \mathbf{p} surge se define para hallar primeramente los vectores
9 \mathbf{r}_i y partir de estos la base \mathbf{t}_i . Estos versores son dinámicos y solidarios al
10 movimiento. Están unidas a la configuración rígida y local respectivamente.
11 El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la
12 necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen
13 \mathbf{p} , \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 en la Ecuación (3.10):

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ 1 \ 0]^T \quad (3.10)$$

14 En la expresión anterior la matriz \mathbf{R}_0 se obtiene colgando los vectores \mathbf{e}_i
15 escritos como combinación lineal de la base \mathbf{E}_i . Una vez calculada esta matriz y
16 evaluado las expresiones de la Ecuación (3.10) se obtienen los restantes versores
17 directores de la componente rígida. Esto es:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 \quad (3.11)$$

18 Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones
19 de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de
20 variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}}_i = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.12)$$

En la Ecuación (3.12) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de diferenciales matriciales. Como la transformación \mathbf{R}_0 comunica la configuración indeformada y ambas configuraciones son fijas, su matriz es constante. Por lo tanto, su variación es nula. A diferencia de las matrices de giro $\overline{\mathbf{R}}_i$ y \mathbf{R}_i^g sus variaciones pueden hallarse según las Ecuaciones (3.13) y (3.14) respectivamente.

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g \quad (3.13)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r \quad (3.14)$$

En la ecuación (3.14) el término $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$ refiere a la operación skew del vector de ángulos de la componente rígida. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a matrices de rotación. La función aplicada al vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ toma la siguiente forma:

$$\text{Skew}(\boldsymbol{\Omega}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

En función de lo descrito anteriormente resta vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las variaciones globales. Para esto se definen las matrices \mathbf{E} y \mathbf{G} según las Ecuaciones (3.16) (3.17).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g \quad (3.16)$$

Notoese que las matrices \mathbf{R}_r tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas dimensiones, $\mathbf{0}$ es una matriz nula de 3x3 e \mathbf{I} una matriz identidad del mismo número de filas y columnas. De forma subsiguiente \mathbf{E} posee 12 entrada en filas y columnas asociadas a los 12 grados de libertad por elemento.

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}^g}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{1} : \mathbf{6}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta/l_n & \eta_{12}/2 & -\eta_{11}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{7} : \mathbf{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta/l_n & \eta_{22}/2 & -\eta_{21}/2 & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la columna 1 y 12 de la matriz \mathbf{G} las entradas son nulas ya que los desplazamiento angulares globales no dependen de los estiramientos axiales de los nodos. Además, los parámetros η se calculan realizando los cocientes entre las componentes de los vectores \mathbf{p}_j y \mathbf{p}_{ij} según la Ecuación (3.18). Siendo el vector p_j el producto $\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}$ y \mathbf{p}_{ij} la multiplicación de $\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$.

$$\eta = \frac{p_1}{p_2}, \quad \eta_{11} = \frac{p_{11}}{p_2}, \quad \eta_{12} = \frac{p_{12}}{p_2}, \quad \eta_{21} = \frac{p_{21}}{p_2}, \quad \eta_{22} = \frac{p_{22}}{p_2}, \quad (3.18)$$

La relación entre los diferenciales anteriores, se pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos de ángulos locales en términos globales. Tal cual se expresa en la Ecuaciones (3.19) donde la matriz \mathbf{P} queda definida. Esto es de sumo interés ya que para el cálculo de fuerzas internas las variables causa y efecto de su generación son los desplazamientos locales. Por ende resulta imprescindible calcular su variación en términos globales.

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.19)$$

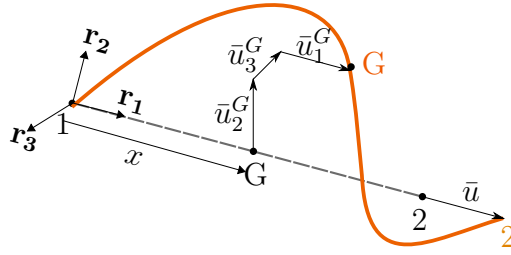
Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coordenadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar \mathbf{r} que vincula los incrementos del desplazamiento axial $\delta \bar{u}$ con los globales. Esto permite escribir la Ecuación (3.4) en relación a (3.5) haciendo uso de la expresión que prosigue (3.20)

$$\delta \bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3} \mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3}] \quad (3.20)$$

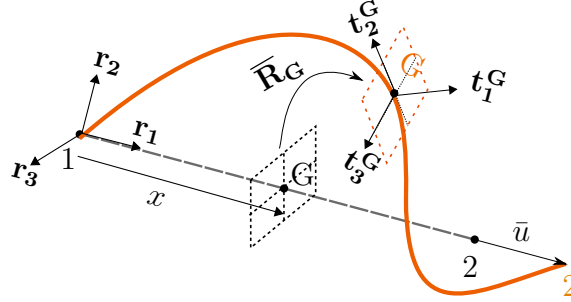
3.2. Formulación local

La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este apartado, se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.3.

El movimiento local de una sección ubicada a una distancia x de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir de la rotación y traslación de la sección correspondiente a su centroide G . Una ilustración de esto se muestra en la Figura 3.4, donde la configuración rígida se identifica en punteado y la deformada en color naranja.



(a) Esquema de desplazamientos locales



(b) Esquema de ángulos locales

Figura 3.4: Ilustración grados de libertad locales

El movimiento de la base \mathbf{t}_i en respecto del sistema \mathbf{r}_i^G está dado por los desplazamientos \bar{u}_3 según el versor \mathbf{r}_3^G y análogamente para los vectores \bar{u}_2 y \bar{u}_1 . Esto determina la ubicación del baricentro G . Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes está dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores \mathbf{t}_3^G y \mathbf{t}_2^G dentro del plano y un versor perpendicular \mathbf{t}_1^G . La transformación $\bar{\mathbf{R}}_G$ permite encontrar los transformados de la base \mathbf{r}_i^G etiquetados con las letras \mathbf{t}_i^G . Por

1 último se observa el desplazamiento axial de la barra \bar{u} correspondiente al del
2 nodo 2 en la dirección \mathbf{r}_1 .

3 Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las
4 hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para
5 los desplazamientos axiales \bar{u}_1 y para los ángulo de torsión θ_1 . Por la contraria,
6 tanto para los desplazamientos transversales \bar{u}_2 y \bar{u}_3 como para los ángulos de
7 flexión, las interpolaciones es través de polinomios cúbicos. Estas funciones
8 interpolantes se detallan en las Ecuaciones (3.21), 3.22 y (3.23).

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0} \quad (3.21)$$

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (3.22)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right) \quad (3.23)$$

9 Para un punto ubicado a una distancia x del nodo 1 según el vector \mathbf{r}_1
10 es posible calcular los desplazamientos locales en la base \mathbf{r}_i . Dado el punto
11 arbitrario G que se desplazo en el sistemas de coordenadas locales según el
12 vector \mathbf{d}_1^G . Los valores en términos de la componente rígida \mathbf{r}_i se calculan
13 aplicando la Ecuación 3.24.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G \quad (3.24)$$

14 Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nu-
15 las es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas.
16 De esta forma se construyen las matrices \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 . Estas expresan los despla-
17 zamientos transversales \bar{u}_2, \bar{u}_3 como también los ángulos $\bar{\theta}_1^G$ y $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$ según
18 los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales $\bar{\theta}_1$ y $\bar{\theta}_2$ para el
19 nodo 1 y 2 respectivamente. Esta artimaña analítica se expresa a continuación
20 en las Ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_1 = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Las hipótesis de Bernoulli desprecian las deformaciones por fuerzas cortantes, esto se refleja en sus polinomios de interpolación. Esta premisa no tiene perjuicios sobre la aplicación con la que se modelará el elemento. La estructura de cables es extremadamente esbelta, con relaciones de diámetro respecto a largo ínfimas. Por la tanto, las deformaciones por cortante son efectivamente despreciables respecto a las inducidas por los momentos flectores.

3.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura ?? queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa en según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$\text{OG} = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (3.27)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente definidos en (3.27) y haciendo uso la matriz auxiliar \mathbf{N} es posible escribir los desplazamientos del baricentro y su diferencial asociado.

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad N_2 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (3.28)$$

$$\text{OG} = N_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + N_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (3.29)$$

$$\delta \text{OG} = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (3.30)$$

La expresión presentada (3.30) depende de los desplazamientos locales. Esto

1 dificulta el cálculo de su magnitud, ya que esos grados de libertad se encuentran
2 solidarios a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema,
3 se sustituyen las Ecuaciones (3.16), (3.17), (3.19) y (3.13) lográndose de este
4 modo, escribir a $\delta \mathbf{u}$ en coordenadas globales. Además se compacta la notación
5 definiendo la matriz \mathbf{H}_1 según la Ecuación (3.31).

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r(\mathbf{N} + \mathbf{P}_1\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_1\mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g \quad (3.31)$$

6 Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares
7 de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.4), son despreciables
8 frente a los de la componente rígida. Para el autor “A consistent 3D corotatio-
9 nal beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014,
10 debido a sus cambios de magnitud entre miseraciones, no hay diferencias aso-
11 ciadas a los incrementos de ángulos locales y rígidos. Esto es: $(\delta \overline{\theta_{\mathbf{r}\mathbf{i}}} = \overline{\delta \mathbf{w}_{\mathbf{i}}}$
12).

13 Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magni-
14 tudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa
15 se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según se
16 establece en la Ecuación

$$\delta \mathbf{w}^g(\mathbf{OG}) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r(\mathbf{P}_2\mathbf{P} + \mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_2\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g \quad (3.32)$$

17 3.2.2. Velocidades y aceleraciones

18 Las magnitudes dinámicas despeñan un papel primordial en el análisis im-
19 plementado. Tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en
20 términos globales. De igual modo, que en la Sección 3.2.1, se obtienen sus
21 diferenciales asociados. Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.31) se de-
22 ducen las velocidades traslacionales según la Expresión (3.33). Al aplicar la
23 regla del producto en (3.33) se halla la aceleración lineal del centro de masa
24 del elemento en (3.34).

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.33)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \dot{\mathbf{d}}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r\dot{\mathbf{H}}_1\mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{E}}^T)\delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.34)$$

1 Para calcular las igualdades anteriores hace falta evaluar las derivadas tem-
2 porales de las matrices \mathbf{E} y \mathbf{R}_r . Esta operatoria matricial, se traduce en derivar
3 cada una de las entradas que integran la matriz. Como la variable \mathbf{E} depende
4 de \mathbf{R}_r se calculan inicialmente sus derivadas, para luego sustituirlas en $\dot{\mathbf{E}}$. Esto
5 se realiza mediante la expresión en variaciones (3.14) y resulta $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r$. Al
6 sustituir esta expresión en la derivada de $\dot{\mathbf{E}}$ se deduce la ecuación que prosigue:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E}_t \quad (3.35)$$

7 El valor skew de los desplazamientos globales sobre la componente rígida $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r$
8 se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación(3.15), aplicado al vector
9 $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$. Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la
10 Expresión (3.34) definiendo la matriz \mathbf{C}_1 como se enseña a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t \quad (3.36)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.37)$$

11 Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó
12 la nomenclatura para evitar el abuso de notación. Derivando la Ecuación (3.32)
13 respecto a la variable temporal. se deduce la velocidad angular a continuación:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.38)$$

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (3.39)$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.40)$$

14 Una descripción detallada puede encontrarse en “A consistent 3D cor-
15 otational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”,
16 2014. Dentro del apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para
17 calcular las derivadas temporales de las matrices \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 . También es posible
18 escudriñar la deducción de las matrices \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .

3.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (“A consistent 3D corrotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014) y (battini2002co). Acompasando con el avance histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente los vectores de fuerza interna y su matriz de rigidez asociada, para luego ahondar en la incorporación de términos dinámicos.

3.3.1. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial fl_1 , dos momentos flectores M_1^1 , M_2^1 y un momento torsor M_3^1 para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección análoga a los desplazamientos locales para las fuerzas internas, se presenta en la Ecuación (3.41).

$$\mathbf{f}_l = [fl_1 \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2] = [fl_1 \ \mathbf{m}] \quad (3.41)$$

Tanto las magnitudes de fuerza interna como inercial se calcularán inicialmente para coordenadas locales, donde su cálculo es relativamente sencillo, para luego transcribir estos resultados en términos globales. Con este cometido se define la matriz \mathbf{B} según se expresa en la Ecuación (3.42).

$$\delta \mathbf{d}_l = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l. \quad (3.42)$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Esta primer transformación en la Figura 3.3, refiere a escribir los desplazamientos locales en términos de los rígidos ($\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, trans-

1 forma los desplazamientos desde la configuración rígida a la indeformada ($\delta \mathbf{d}_l$
2 $\rightarrow \delta \mathbf{d}_g$). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en
3 función de coordenadas estáticas y globales.

4 Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares \mathbf{G} y \mathbf{E} , en las Ecuaciones
5 (3.16) y (3.17) es posible vincular los ángulos diferenciales locales $\delta \bar{\theta}_i$ con
6 los incrementos globales $\delta \mathbf{d}_g$. Esto permite conocer los momentos flectores y
7 torsos de la viga en coordenadas globales.

8 Análogamente el vector auxiliar \mathbf{r} contiene a \mathbf{r}_1 según el sentido axial de la
9 barra, por lo que reescribir este permite expresar la fuerza de directa f_{a1} en
10 términos de la base \mathbf{E}_i . Al unir los razonamientos detallados en los párrafos
11 anteriores, se obtienen las Ecuaciones (3.43) y (3.44) para el cálculo de la fuerza
12 interna y su diferencial:

$$\mathbf{F}^g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \mathbf{E}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (3.43)$$

$$\delta \mathbf{F}^g = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_l + \delta \mathbf{r}^T f_{a1} + \delta (\mathbf{E} \mathbf{P}^T) \mathbf{m} \quad (3.44)$$

13 Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés obtener sus de-
14 rivadas respecto de los desplazamientos. La matriz tangente representa esta
15 magnitud y es un operador indispensable para la resolución mediante méto-
16 dos numéricos iterativos. Este cálculo de derivadas respecto a desplazamientos
17 globales de la expresión (3.43) concluye en la Ecuación (3.45) a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{f}_l)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (3.45)$$

18 Operando con la regla del producto y sustituyendo la Ecuación (3.44) para
19 el diferencial para la fuerza interna la matriz tangente resulta :

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a} \mathbf{r} \quad (3.46)$$

20 La matriz \mathbf{B} permite realizar el cambio de coordenadas $\delta \mathbf{d}_a$ a $\delta \mathbf{d}_g$, de acuer-
21 do con lo definido en (3.42). Esta transformación de cambio de base multiplica
22 la variable \mathbf{K}_l correspondiente al aporte de rigidez local del elemento. Esta
23 depende de los estiramientos y rotaciones de la viga en su configuración local
24 y también de la ley material implementada. Esto evidencia la versatilidad del
25 planteo corrotacional ante diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta

1 modificar la matriz \mathbf{K}_1 .

2 En la Ecuación (3.46) la matriz \mathbf{D} es anti-simétrica y se calcula en función
3 de los productos internos de los vectores \mathbf{e}_i , esta aporta la rigidez no lineal
4 correspondiente al a fuerza axial f_l de la barra. Por otra parte, la matriz
5 auxiliar \mathbf{Q} se halla a partir del producto de \mathbf{P} y los momentos nodales respecto
6 de las coordenadas globales, y proviene de la componente no lineal de los
7 momentos. Por último, se define el vector \mathbf{a} agrupando así el resto. Dichas
8 defunciones se encuentran en las siguientes Ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(2)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(3)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(4)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

9 Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.46) es asimétrica, sin
10 embargo según **Rankin1986** esta puede ser simetrizada sin perder la conver-
11 gencia cuadrática para el método de Newton Raphson (N-R), siempre y cuando
12 momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó la
13 matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con fuer-
14 zas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un
15 determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia
16 del vector de fuerza interna el método debe converger **Rankin1986**.

17 3.3.2. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

18 A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales
19 para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes
20 asociadas. El atractivo principal de la referencia “A consistent 3D corotational
21 beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures” (2014) se
22 fragua en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros
23 el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas De Borst et
24 al. 2012. Esta coherencia se debe a la cabal derivación analítica del vector

1 de fuerzas inerciales según el planteo cinemático de las variables descritas en
2 3.3. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz
3 tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas,
4 con la salvedad que la magnitud primaria será la energía cinética del elemento.
5 Esta propiedad escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación
6 globales ($\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$) como también angulares ($\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$). En las ecuaciones (3.49) y (3.50)
7 a continuación, se presentan la energía cinética de un elemento y su diferencial.
8 Para la obtención de la Expresión se aplicó (3.50) la regla del producto de
9 diferenciales y el teorema de Leibniz para integrales de extremos fijos.

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} \quad (3.49)$$

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] d\mathbf{l} \quad (3.50)$$

10 Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subíndices "g" para las
11 magnitudes dinámicas (\mathbf{u}, \mathbf{w}) y sus respectivas derivadas. De igual forma, las
12 variables del integrando en las Ecuaciones (3.49) y (3.50) se omitió la nomen-
13 clatura OG referida al centroide del área transversal a la viga. Los elementos
14 serán de área constante siendo A_ρ el producto del área transversal y la densidad
15 del material, análogamente la matriz \mathbf{I}_ρ es el tensor de inercia en la configura-
16 ción deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se
17 puede obtener al aplicarle las rotaciones \mathbf{R}^g y \mathbf{R}_0 consecutivamente.

18 Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsa-
19 bles del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar
20 el vector de fuerza inercial se obtienen las matrices tangentes dinámicas. Esto
21 se expresa en las Ecuaciones (3.51) y (3.52).

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}^g \quad (3.51)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K} \delta \mathbf{d}_g \quad (3.52)$$

22 En la Ecuación 3.52 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de
23 ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los des-
24 plazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa
25 consistente \mathbf{M} se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, con-

secutivamente la matriz \mathbf{C}_k giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo \mathbf{K} , se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrífuga. Determinados autores **cardona1988beam** y **hsiao1999consistent** proponen considerar unicamente \mathbf{M} , sin embargo exhaustivos estudios en (**hsiao1999consistent**) prueban que agregar la matriz \mathbf{C}_k mejora el desempeño computacional para numerosos casos.

Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección 3.2.2.

Sustituyendo la Ecuación (3.52) en (3.50) se halla una fórmula para la fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.34), (3.37), (3.38) y (3.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \quad (3.53)$$

Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expresiones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices. Finalmente esto se expresa de forma matemática en las Ecuaciones (3.55) y (3.56).

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.54)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \right\} d_l \right] \mathbf{E}^T \quad (3.55)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) + \dots \right\} d_l \right] \mathbf{E}^T \quad (3.56)$$

$$\dots \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho) d_l \quad (3.57)$$

1 Capítulo 4

2 Metodología

3 En este capítulo se exponen los fundamentos para la obtención de resul-
4 tados numéricos. El problema de modelado computacional de líneas eléctricas
5 afectadas por fenómenos de vientos extremos se construyó sobre dos etapas
6 sucesivas. En primer lugar, se explican cuestiones sobre el modelado físico. Los
7 protagonistas del fenómeno son el viento y la estructura. Respecto al primero
8 se describe en la Sección [4.1.2](#) el campo de velocidades absoluto, relativo y las
9 fuerzas que el viento genera sobre el conductor. Análogamente se despliegan
10 las condiciones iniciales y de borde consideradas para el modelado estructural
11 en la Sección [4.1.1](#). Posteriormente, dentro de la Sección [4.2](#) se describe la
12 deducción del algoritmo de HHT aplicado a la formulación corrotacional para
13 modelado de conductores con fuerzas aerodinámicas. Este desarrollo no se ha
14 registrado en la biografía consultada y tampoco los pseudocódigo que permiten
15 incorporar dicha formulación al software [ONSAS](#). Por último una vez explica-
16 da la deducción se postulan las hipótesis del modelado físico y computacional
17 en las Secciones [4.1.2.2](#) y [4.2.2.1](#) respectivamente.

18 4.1. Aspectos de modelado físico

19 4.1.1. Condiciones iniciales y de borde para la estruc- 20 tura

21 El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de
22 la realidad, para crear un modelo en el computador, que se comporte de for-
23 ma análoga. Permitiendo emular y controlar determinadas variables de estudio

1 relevantes al observador. En este acto de representación existen simplificaciones inherentes, que reducen los factores incidentes al sistema como objeto de estudio.

4 Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determinadas condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema. Estas imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto está siendo desvinculado, se nominan condiciones de borde o contorno. En particular, para esta investigación, se consideraron las siguientes hipótesis del modelado estructural respecto a sus condiciones de contorno y de borde.

10 4.1.1.1. Hipótesis de modelado estructural

- 11 1. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura, ignorándose cualquier variación en el perfil topográfico del terreno. Como consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
- 15 2. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a modelarlo con elementos de vigas, las cuales tienen una variación de ángulo continuo. Consecuentemente, al escindir el vano BC de su continuación (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo nulo en x para los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta las condiciones de deformación angulares impostadas por la geometría del sistema.
- 24 3. Como el conductor no presenta fuerzas en el sentido axial, los puntos B y C no se deforman según el eje x , ergo sus trayectoria pertenecen al plano z - y . Esto debe forzarse en los nodos B y C.
- 27 4. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB, obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se modelaron a partir de barras de Green. Las condiciones de borde dependen del ejemplo al que se haga referencia. Para el Ejemplo 3 los puntos D y A se encuentran anclados a la torre, acompañando sus movimientos, mientras que para el 2 se encuentran fijos.
- 33 5. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada en La Figura 4.1, se aplica una condición inicial de desplazamiento \mathbf{u}_0 .

1 Esta se corresponde con la solución estática del sistema sometido por el
 2 preso propio en la dirección de z de la gravedad.

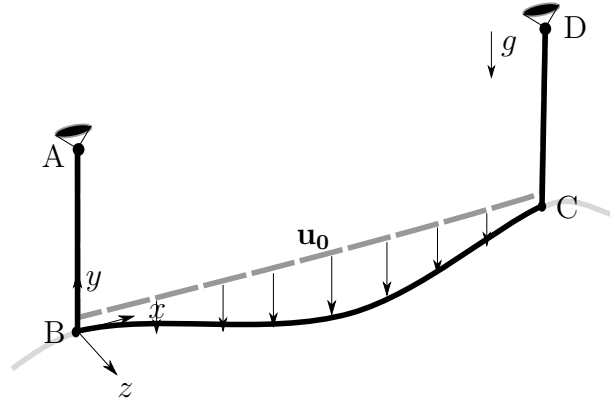


Figura 4.1: Esquema de condición inicial y de borde.

3 Una vez plasmadas las condiciones de borde cinemáticas anteriores. Se es-
 4 tablecen a continuación las principales condiciones de borde dinámicas:

- 5 1. No se consideran las fuerzas internas transmitidas por los vanos aledaños.
- 6 2. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento
 7 no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea.
- 8 3. Las simulaciones se realizan en dos etapas sucesivas, primeramente se
 9 imponen la condiciones iniciales de desplazamientos y una vez estabiliza-
 10 da la respuesta por el amortiguamiento interno y aerodinámico se ejerce
 11 la fuerza del viento sobre el cable.
- 12 4. Los vínculos dinámicos entre los elementos de vigas y de barra se im-
 13 plementaron de forma tal, que no se transmiten los momentos de unos a
 14 otros. Por lo tanto, en los nodos de sujeción los elementos de barra CD
 15 y AB transmiten únicamente fuerzas direccionales en C y B .

16 4.1.2. Modelo de viento

17 Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas
 18 debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuer-
 19 zas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift).
 20 Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes, en la
 21 capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo. Y luego proyectarla la fuerza
 22 neta en la dirección del flujo medio. A diferencia de estas, las fuerzas lift que

1 aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones en-
2 tre el intradós (sona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta
3 diferencia de presiones puntuales entre dos superficies contrarias, genera una
4 circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese
5 campo en curva cerrada, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una
6 fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura ?? . Para
7 cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la competente de
8 lift es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, garantiza que
9 la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas
10 entre las superficies del sólido.

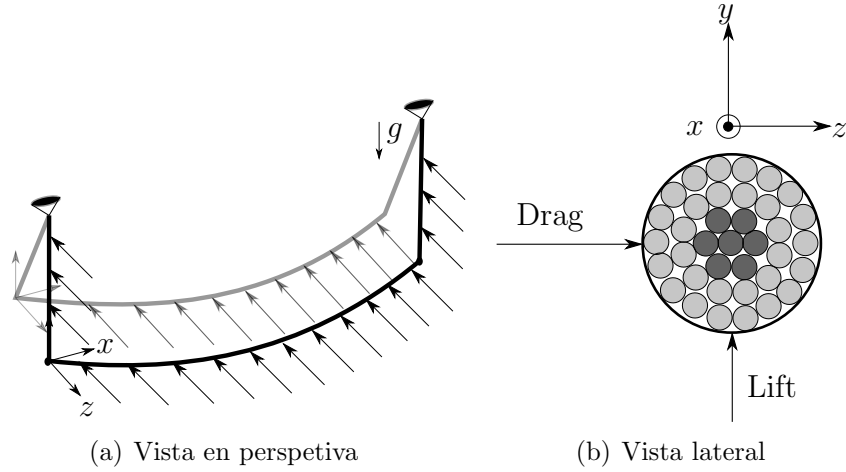


Figura 4.2: Ilustración del viento y sus efectos.

11 La componente unidireccional del flujo a una altura dada, puede ser desglo-
12 sada en un termino medido y otro fluctuante $w_v(t) = w_m(t) + w'(t)$. A partir de
13 esto, la velocidad media para un período T toma la expresión de la Ecuación
14 (4.1):

$$w_m(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} w_v(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

15 El valor del periodo T debe ajustarse minimizando la desviación estándar
16 asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la
17 desviación estándar de la velocidad fluctuante y la media para un instante de
18 tiempo dado. Sin embargo, para este trabajo no se consideran las fluctuaciones
19 debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de $T = 1/30$ s
20 y de velocidad media, se extrajo del artículo (Stengel y Thiele, 2017).

1 Considerando el aire como un fluido no newtoneano, ρ su densidad asociada
2 a determinada temperatura, C_d el coeficiente de drag para como función del
3 número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo (“drag”)
4 para un elemento cilíndrico de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la Ex-
5 presión (4.2):

$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{\rho(T)C_d(Re)}{2} d_c w_m(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c w_m(t)^2 l_e \quad (4.2)$$

6 Para este cálculo se asumió constantes las magnitudes al interior del ele-
7 mento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto del
8 integrando por el largo del intervalo. Además se para este trabajo la carga del
9 viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente a la
10 mitad de F_v . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales
11 que estas inducen, se cancelan con los elementos aledaños. Por otra parte, los
12 valores de C_d se extrajeron de las referencias (Foti y Martinelli, 2016) y se
13 verificaron con el estudio para estos coeficientes durante tormentas conecti-
14 vas (Mara, 2007). La densidad ρ del aire se consideró la usual para presión
15 atmosférica y una temperatura de 20 °C.

16 4.1.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas aso- 17 ciadas.

18 En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No
19 obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortigua-
20 miento introducido. Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde
21 el viento tiene determinada componente transversal según z y perpendicular
22 (según y). En la figura 4.3 se indican con el nombre w y q . En esta figura las
23 velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tan-
24 to absoluto. Asimismo en esta imagen se representan las velocidades media
25 y fluctuante w_m y w_a , que sumada a la velocidad v , resulta en el vector V_{tot}
26 formando un ángulo β con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce
27 sobre el conductor, este despliega una determinada velocidad rígida en ambas
28 direcciones identificadas con las letras $\dot{\mathbf{u}}_{ry}$ y $\dot{\mathbf{u}}_{rz}$.

29 Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia
30 anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las
31 velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 4.4. Este campo
32 de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de drag F_d y de lift F_l .

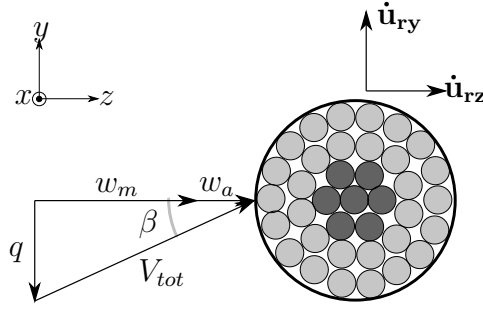


Figura 4.3: Esquema en sistema de referencias absoluto.

- 1 Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando dos
- 2 fuerzas F_z y F_y .

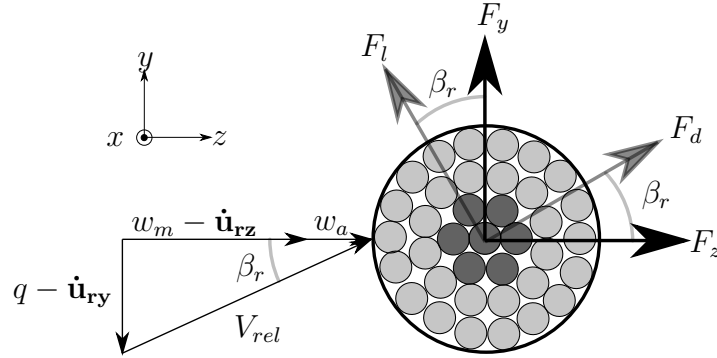


Figura 4.4: Esquema en sistema de referencias relativo.

3 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde
4 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta
5 natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas
6 y dinámicas. La velocidad relativa absoluta, es el cuadrado de los catetos,
7 tal y como se expresa en la Ecuación (4.3). Tomando como hipótesis que las
8 velocidades relativas del rígido y la componente vertical v , son mucho menores
9 que las asociada al flujo medio, en el sentido de z se deduce la Ecuación (4.4).

$$V_{rel}^2 = (w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_{rx})^2 + (v - \dot{\mathbf{u}}_{ry})^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_{rz}) \quad (4.4)$$

10 La carga de drag postulada en la Ecuación (4.1) se escribe por unidad de
11 longitud y se reescribe en (4.6). Además, se muestra que para las asunciones
12 de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a 0° . Para
13 formular esto matemáticamente se plantean las Ecuaciones (4.6) y (4.5).

$$\tan(\beta_r) = \frac{v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{y}}}{w_m - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{z}} + w_a} = \frac{\frac{v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{y}}}{w_m}}{1 - \frac{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{z}} + w_a}{w_m}} \approx 0 \quad (4.5)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{z}})) w_m \quad (4.6)$$

1 Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes
2 z e y . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas
3 absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de estas
4 se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido.
5 Considerando que el ángulo β es ínfimo y por lo tanto $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$ y
6 $\cos(\beta) = 1$ al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + w_a^2 - 2w_a \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{z}}) \cos(\beta_r) = \bar{F}_x + F_a - F_{vis} \quad (4.7)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2 + w_a^2 - 2w_a \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{z}}) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (4.8)$$

7 Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en
8 componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es una
9 promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo,
10 se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes
11 tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un
12 tercer termino surge al desarrollar la Ecuación (4.6). Este factor depende del
13 producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Vinculando al fluido
14 y al sólido, es por esto que recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico.
15 Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sporepresivo el sentido de
16 esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición
17 de fuerzas según z se le llaman \bar{F}_x , F_a , $-F_{vis}$ a la componente media, alternante
18 y de amoritguamentio dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan
19 a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2) \quad (4.9)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_a^2) \quad (4.10)$$

$$F_{vis} = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{z}} w_m) \quad (4.11)$$

1 4.1.2.2. Hipótesis aplicadas al modelado de viento

2 Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan
3 las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones
4 de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no el eje central
5 de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio.
6 Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

- 7 1. No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
- 8 2. La velocidad incide en el sentido z de forma perpendicular a la linea.
- 9 3. La velocidad relativa transversal $v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}\mathbf{y}}$ al igual que la componente
10 alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el
11 sentido de z llamada w_m .
- 12 4. La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera
13 despreciable frente al drag.
- 14 5. Para la fuerza en el sentido de z se desprecia la componente fluctuante
15 F_a .
- 16 6. Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico f_{vis} se promedió la ve-
17 locidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el
18 dominio temporal de simulación.

19 El primer supuesto parte del modelo figurado en 4.4, para poder realizar
20 este análisis plano, se obvian las fluctuaciones espaciales en el sentido axial
21 del conductor. Esta asunción no es del todo correcta, pues la turbulencia del
22 fenómeno provoca fluctuaciones en las cargas a lo largo dela linea, cambiando
23 así, su orientación. Esto se asocia directamente con la hipótesis 4, donde la
24 fuerza alternante proveniente de la presencia de vórtices se desprecia.

25 Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje z en la Fi-
26 gura ??, siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipótesis
27 proviene de diferentes trabajos publicados, donde la componente perpendicu-
28 lar a la superficie terrestre o ascendente (según y) suele ser significativamente
29 menor a la paralela (en el sentido de z) (Durañona y Cataldo, 2009) (Stengel
30 y Thiele, 2017) Yang y Hong, 2016. Si bien simplifica lo hace de forma con-
31 servadora. Puesto que supone al sistema de transmisión, en el tiempo inicial,
32 dispuesto completamente perpendicular al sentido del viento, es así que este
33 descarga su mayor fuerza sobre el sistema (Hipótesis 2).

1 Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad
2 de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis, se sustenta en
3 la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del
4 peso que se opone a la fuerza de sustentación. De todos modos, esta fuerza en
5 sentido ascendente se despreció frente al drag, consecuencia de la simetría de
6 revolución tangencial del conductor. Esto se establece en la Hipótesis 4.

7 Otra hipótesis a clarificar refiere al amortiguamiento aerodinámico (Hipóte-
8 sis 6). Se utilizó una simplificación adicional en la velocidad de viento para su
9 cálculo. Se consideró una velocidad constante, igual al promedio de viento en
10 todo el dominio temporal. Este es el valor que insertó para el cálculo de D
11 según la Ecuación (4.11). Por último se explicitan las premisas 3 y 5 que fue-
12 ron consideradas para calcular el campo de velocidades relativo y sus fuerzas
13 asociadas.

14 4.2. Aspectos de modelado computacional

15 4.2.1. Ecuación de equilibrio

16 En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámi-
17 co con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado
18 registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta impres-
19 cionante formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis
20 que subyacen a las expresiones postuladas en (“A consistent 3D corotational
21 beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014). Por
22 añadidura, se construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de
23 movimiento no lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

24 Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuer-
25 zas internas \mathbf{f}_{int} , inerciales \mathbf{f}_{ine} y externas \mathbf{f}_{ext} . Además según la Ecuación
26 (4.11) dentro de las fuerzas externas aparece un término aerodinámico f_{vis} que
27 depende de la velocidad lineal del rígido. Este término debe tratarse aparte ya
28 que su naturaleza función de el estado cinemático del problema, lo que es la
29 incógnita a resolver.

30 El equilibrio de fuerzas es equivalente al postulado de PTV donde el incre-
31 mento diferencial en la energía interna y cinética se debe a un trabajo externo.
32 La Ecuación de balance (4.12) debe satisfacerse para todo instante tempo-
33 ral, en particular para $t + \Delta t$. Dadas determinadas propiedades materiales y

1 geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las mag-
 2 nitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: el desplazamientos \mathbf{d}
 3 $(t + \Delta_t)$, las velocidades $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$. Es plausible
 4 entonces plasmarlo matemáticamente de manera exacta en la Ecuación (4.12).

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{\text{vis},(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t))} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t)) \dots \\ & \dots - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

5 Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables constru-
 6 yen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta.
 7 El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecua-
 8 ción a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como
 9 consecuencia que la Ecuación (4.12) ya no será nula sino igual a un resto \mathbf{r} .
 10 A su vez, tal y como se detalla en las Ecuaciones (4.13) y (4.14), los métodos
 11 numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de
 12 aceleración y velocidad, en el instante $t + \Delta_t$, en función de los desplazamientos
 13 para ese tiempo y las magnitudes cinemáticas en el paso anterior. Como los
 14 vectores desplazamiento, velocidad y aceleración para el paso anterior se en-
 15 cuentran dados, el vector resto depende indirectamente de los desplazamientos.
 16 Para diferenciar las variables aproximadas de las exactas, se introduce la si-
 17 guiente nomenclatura: $(\mathbf{d}(t + \Delta_t) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_t})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ y $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$
 18 $\rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$.

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_v(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t) \quad (4.13)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_a(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t) \quad (4.14)$$

19 Según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, se buscan las apro-
 20 ximaciones cinemáticas tal que el residuo para un instante $t + \Delta_t$ sea próximo
 21 al vector nulo. Esto se expresa matemáticamente en Ecuación (4.15).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) = & (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}) \dots \\ & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.15)$$

22 Por otro lado, según el método de N-R presentado en Quarteroni et al.

2010 es posible construir una sucesión iterativa en k , de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se acerque al nulo. Para aplicar esto se utiliza el teorema de Taylor aplicado a la función resto, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t}^k) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \right|_k \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena aplicada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar las derivadas de la función residuo respecto de: desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Estas son las matrices tangentes \mathbf{K}_g , \mathbf{M} y \mathbf{C}_k descritas en el Capítulo 3. Asimismo, al derivar la función de fuerza residual aparece un término \mathbf{C}_{vis} correspondiente la derivada de la fuerza viscosa respecto de la velocidad del viento. Esto resulta una matriz diagonal esparsa con valores nulas salvo las entradas correspondientes a la dirección del viento, con valor $\rho d_c C_d w_m$. Incorporando estas matrices se obtiene a la Ecuación (4.18).

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \right|_k = \left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{vis}) \right) \Big|_k \quad (4.18)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.18) de N-R se halla el paso en desplazamientos en $k+1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t}^{k+1}$. Matemáticamente:

$$\left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{vis}) \right) \Big|_k^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t}^k)) = \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t}^{k+1} \quad (4.19)$$

Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de reso-

lución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones F_a y F_v . Para esto se implementó el Método de HHT presentado a continuación en La sección 4.2.2.

4.2.2. Resolución numérica mediante HHT

Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo de Newmark presentado en Newmark, 1959. Según el artículo Hilber et al. 1977 el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (Hilber et al. 1977) se compara el método de HHT con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser: el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark:. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014, resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

Para este abordaje inicialmente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Se presentan entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark α y β para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones de actualización para el instante $t + \Delta_T$ se escriben:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \dots \quad (4.20)$$

$$\dots - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \dots \quad (4.21)$$

$$+ \dots \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t$$

Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros α_{NW} y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT} . Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.22) y (4.23). En estas funciones, es posible notar las equivalencias, parentescos y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$ se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (4.22)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (4.23)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro α_{HHT} y el incremento Δ_T ente dos tiempos consecutivos t y $t + \Delta_t$.

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta_T}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta_T}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \quad (4.25)$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. Es por esto, que los vector de velocidades y aceleraciones angulares para el paso $k+1$, en el instante $t + \Delta_t$, deben calcularse según las Ecuaciones (4.26) y (4.27) presentadas en la referencias (Ibrahimbegović y Mikdad, 1998) y (Ibrahimbegovic y Mamouri, 2002).

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{t+\Delta t}^g \left[\frac{\alpha}{\beta \Delta_t} \theta_{t+\Delta t} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_t + \frac{(\beta - 0.5\alpha) \Delta_t}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_t \right] \quad (4.26)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{t+\Delta t}^g \left[\frac{1}{\beta \Delta_t^2} \theta_{t+\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta_t} \dot{\mathbf{w}}_t - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} \right] \quad (4.27)$$

En las Ecuaciones (4.26) y (4.27) la transformación $\Lambda_{t+\Delta t}^g$ es la composición de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\Lambda_{t+\Delta t}^g = \exp(\widetilde{\theta_{t+\Delta t}^g}) = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^g (\mathbf{R}_t^g)^T \quad (4.28)$$

Un procedimiento análogo al de las funciones angulares se aplican a las lineales. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones expresadas en (4.26) y (4.27).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta t}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta t}^g) \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta t}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta t}^g) \quad (4.30)$$

Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones (4.29), (4.30), (4.24) y (4.25) al definir convenientemente la matriz \mathbf{B}_t . En función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclaraciones globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta t}^g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{2,t+\Delta t}^g) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta t} \quad (4.32)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta t} \quad (4.33)$$

Al escindir las Ecuaciones (4.32) y (4.33) se identifican las funciones F_a y F_v de la sección 4.2.1. Estas relaciones matemáticas deben de integrarse a la

1 Ecuación linealizada de equilibrio (4.19) para obtener el incremento en k que
 2 permita conocer el vector desplazamientos en el paso $k + 1$ para el instante
 3 $t + \Delta_T$. Finalmente, eso se plantea en la Ecuación (4.34).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) = \\ - \left(\mathbf{K}_g + \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \right) \mathbf{M} \mathbf{B}_t + \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \right) (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{vis}) \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4 Se aclara que para despejar la Ecuación (4.34) anterior, la matriz entre
 5 paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario,
 6 el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas
 7 soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las
 8 matrices que la integran (de masa, centrífuga y tangente). Las matrices tan-
 9 gentes fueron simetrizadas .artificialmentegomo se aclaró anteriormente, man-
 10 teniendo el orden de convergencia de N-R. Las matrices centrífugas y de masa
 11 devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros
 12 α_{HHT} son menores a uno, en general en el intervalo $[-0.1; 0.1]$, la suma de esta
 13 matrices suele ser definidas positivas. Por lo que \mathbf{K}_{tot} será invertible.

14 4.2.2.1. Hipótesis de modelado numérico

15 Se esclarecen las premisas y simplificaciones durante la implementación
 16 numérica de los códigos creados:

- 17 1. Los incrementos angulares no se calcularon componiendo dos rotaciones
 18 consecutivas sino de forma aditiva, es decir: $\theta_{t+\Delta_t}^{k+1} = \theta_{t+\Delta_t}^k + \Delta \theta_{t+\Delta_t}^{k+1}$.
- 19 2. La matriz de amortiguamiento viscoso \mathbf{C}_{vis} se considero una diagonal con
 20 elementos no nulos en las componentes asociadas a los desplazamientos
 21 transaccionales. Se copió el valor del amortiguamiento aerodinámico con
 22 el valor correspondiente a la coordenada lineal $\rho d_c C_d w_m$ para el resto
 23 de los desplazamientos. Esto garantiza la estabilidad y atenuación de la
 24 respuesta en la primer etapa asociada al peso.
- 25 3. La simulación se separó en dos etapas consecutivas, en primer lugar se
 26 carga con la fuerza de la gravedad (a partir de la condición inicial) y una
 27 vez que la respuesta es constante se aplica la carga del viento.

1 4.2.3. Implementación numérica en ONSAS

2 En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el soft-
3 ware: *An Open Non Linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Este código
4 de carácter abierto y se desarrolló de forma general integrando distintos ele-
5 mentos, materiales y geometrías dentro del mismo modelo. Además permite
6 resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente sus
7 salida en 3D a través del programa de código abierto *Paraview* difundido en
8 (Ahrens et al. 2005).

9 Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones
10 matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fue-
11 ron aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno
12 de los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por
13 ser pionero de la formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas
14 en los trabajos (Battini y Pacoste, 2002) (“A consistent 3D corotational beam
15 element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014), sino tam-
16 bién por su predisposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor
17 es invaluable. A continuación en ?? se detalla un pseudo-código panorámico
18 sobre el esqueleto ejecutado en ONSAS.

19 En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo.
20 Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite
21 incrementar la variable temporal en pasos de Δt . Además debe evaluar
22 los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de \mathbf{f}_{ext} .
23 Para resolver el estado del sistema en el tiempo $t + \Delta t$, hace falta resolver la
24 ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (4.15). Con este cometido,
25 se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese
26 paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos.
27 Para este bucle en el pseudocódigo ?? se omitió la notación en $t + \Delta t$ para
28 simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

29 Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramente
30 el cálculo del incremento que determina el paso $k + 1$, a partir de los despla-
31 zamientos en el paso actual k . Luego se actualizan las variables cinemáticas de
32 desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza
33 mientras que la variable booleana `finDisp` sea nula. La alteración de estado, se
34 encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la
35 operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos tol_u , en

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta_T, \alpha_{HHT}$

Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$

Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$

while $t < t_f$ **do**

 finDisp = 0

 Definir: $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$.

 Evaluar $\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t}$

while FinDisp = 0 **do**

 Calcular fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$ y $\mathbf{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$.

 Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K}_g^k, \mathbf{M}^k, \mathbf{C}_k^k$.

 Despejar $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$

 Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$

 Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$.

 Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$.

 Ensamblar velocidades: $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$

 Ensamblar aceleraciones: $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$

 Actualizar fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$ y $\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})$.

 Calcular:

if $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\| \vee \|\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\| \vee k \geq \max_{iter}$
 then

 finDisp = 1

end if

end while

 Actualizar $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}$.

$t = t + \Delta_T$

end while

1 vector de fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter} . Las
2 primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese
3 tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas
4 desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la
5 variable $finDisp$ alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor
6 del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

7 Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante
8 profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices
9 dinámicas tangentes. Este código se agregó a [ONSAS](#) procurando su versatili-
10 dad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden
11 al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo
12 pseudocódigo de la función [elementbeamforces.m](#) implementada.

13 El diagrama presentado en el Pseudocódigo [??](#), puede dividirse en tres divi-
14 siones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo
15 constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matri-
16 ces de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y defor-
17 mada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las
18 fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de
19 la función [beamLocalStaticForces](#). Desafortunadamente, tanto entradas como
20 salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas loca-
21 les. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos
22 locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego
23 integrarlas al código general expuesto en [??](#).

24 De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de
25 fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las
26 expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas
27 están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia x en la configuración
28 de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie
29 de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

30 Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector
31 de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadra-
32 tura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último,
33 los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas,
34 como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices
35 de todo el sistema en coordenadas globales.

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$ E ν G \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{d}_g^e
for 1 **to** N_{elem} **do**
 Separar vector desplazamientos $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$
 —————Cálculo de matrices de rotación—————
 Computar matrices de rotación global \mathbf{R}_g^1 y \mathbf{R}_g^2
 Evaluar matriz de rotación de referencia \mathbf{R}_o
 Hallar \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q} y calcular \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 .
 Evaluar matriz de rotación rígida \mathbf{R}_r
 Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$
 ————— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente —————
 Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$
 Invertir \mathbf{R}_i y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_i$.
 Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$ y matriz tangente local $\mathbf{K}_T^{\text{loc}}$.
 Construir matrices auxiliares: \mathbf{H} \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{r}
 Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K}_T^g \leftarrow \mathbf{K}_T^{\text{loc}}$ y $\mathbf{f}_{int}^g \leftarrow \mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$.
 ————— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas —————
 Todas las variables dependen de la coordenada (\mathbf{x})
 Definir funciones de interpolación N_i
 Calcular matrices: $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$, \mathbf{P}_2 , \mathbf{N} y \mathbf{H}_1 .
 Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$
 Calcular matrices auxiliares: \mathbf{H}_1 , $\dot{\mathbf{H}}_1$, \mathbf{H}_2 , $\dot{\mathbf{H}}_2$, \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .
 Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.
 Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$
 Hallar expresiones e integrar en el elemento: \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} y \mathbf{C}_k
 Ensamblar : \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} , \mathbf{C}_k \mathbf{K}_T^g \mathbf{f}_{int}^g
end for

1 Capítulo 5

2 Resultados numéricos

3 En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante el
4 desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementación
5 corrotacional detallada en ??, para luego aplicarse a modelos específicos de
6 conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando un compu-
7 tador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de 8 Gb. La
8 formulación se implementó en el software de código abierto ONSAS ¹ el cual
9 se ejecutó en GNU-Octave Eaton et al. (2007) y visualizándose los resultados
10 haciendo uso de la herramienta Paraview Ahrens et al. (2014). Vale notar que
11 el hilo conductual de este capítulo fue ideado con un aumento progresivo de
12 complejidad. Capturando en modelos simples y académicos los movimientos
13 fundamentales de los elementos, para garantizar así una representación cabal
14 del fenómeno de oscilación del conductor en servicio.

15 5.1. Vigas en voladizo con ángulo recto

16 Este ejemplo fue publicado por primera vez en Simo y Vu-Quoc, 1988 y
17 es usualmente considerado en la literatura para validar formulaciones de ele-
18 mentos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales (Albino et
19 al. 2018 “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic
20 analysis of flexible structures”, 2014). El mismo consta de dos barra idénticas
21 en ángulo recto formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide
22 un largo $L = 10$ m tal y como se ilustra en las Figuras 5.1.

23 Las propiedades del rigideces de torsión, flexión y directa del ejemplo se se-

¹<https://github.com/ONSAS/ONSAS/>

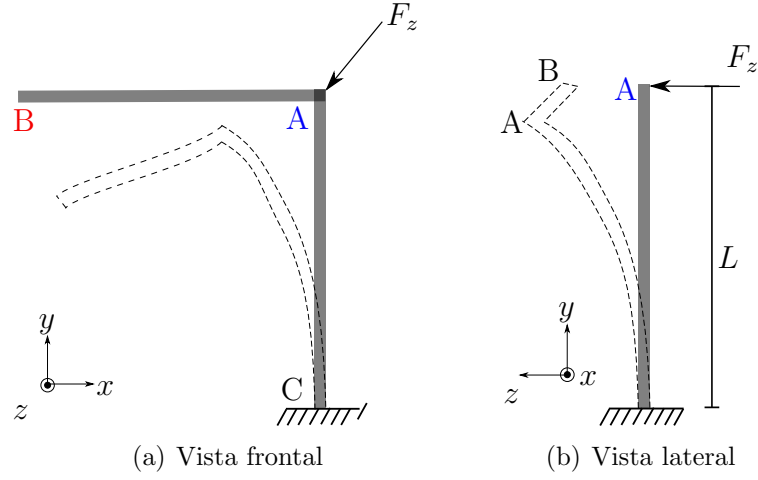


Figura 5.1: Disposición geométrica de la estructura.

leccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales, garantizan movimientos de gran amplitud y para esto deben cumplir determinadas igualdades. Por esta razón la elección de dichas magnitudes se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado de Las Ecuaciones (5.1) y (5.2) descritas en la bibliografía. Para este trabajo los segundos momentos de inercia según el eje z e y además de los valores del módulo de elasticidad lineal y transversal valen: $E = G = 10^6$, $A = 1$, $I = J = 10^{-3}$ y $\nu = 0.3$. Se hace notar que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan de sentido.

$$GA = EA = 10^6 \quad (5.1)$$

$$GJ = EI = 10^3 \quad (5.2)$$

La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplazamientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que permiten aplicar una fuerza en el sentido del eje z tal y como se muestra en la Figura 5.2. Este forzante flexa y trossiona al sistema en un plano saliente al xy , produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento, son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la carga. Esta fuerza actúa linealmente en los dos segundos iniciales, crece hasta

1 un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y luego decrece
2 hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual en un corto
3 intervalo de tiempo. Para reproducir este comportamiento altamente dinámico
4 se eligieron 10 elementos por miembro y un incremento de tiempo $\Delta T = 0.25$
5 s.

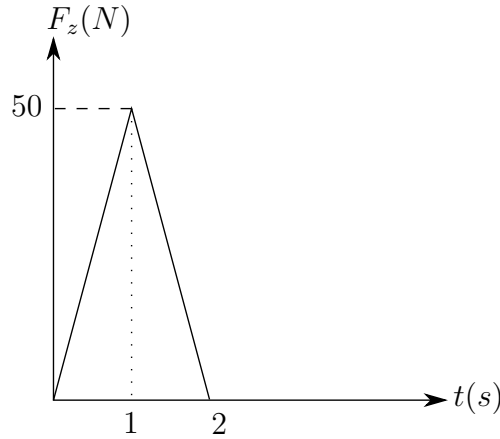


Figura 5.2: Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

6 El objetivo principal del ejemplo es el validar la librería de códigos corro-
7 tacional incorporados en el software ONSAS ¹, por ende, tanto el método de
8 resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en
9 el artículo “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic
10 analysis of flexible structures”, 2014, comparando así resultados semejantes.
11 Consecuentemente se implementó un algoritmo que lleva el nombre de sus crea-
12 dores (HHT) y se selecciono un valor característico $\alpha = -0.05$ y un valor de
13 parada en desplazamientos de 10^{-7} m. Se fraccionaron 20 s de simulación en
14 intervalos de $\Delta T = 0.25$ s.

15 Para comparar con el paper de referencia se plasmaron gráficamente de-
16 terminados grados de libertad correspondientes al nodo A. Estos son: el des-
17 plazamiento lineal vertical (según el eje y) y el transversales (según z). Los
18 resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras ?? y ?? en fun-
19 ción de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa
20 magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la es-
21 tructura. En particular, la Figura ?? denota oscilaciones que alcanzan varios
22 metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exigente en térmi-
23 nos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no armónico de

¹<https://github.com/ONSAS/ONSAS/>

1 vaivén en el eje z , se puede notar la presencia no conservativa de la formulación
2 corrotacional, ya que las amplitudes prestan una tendencia atenuante con el
3 tiempo.

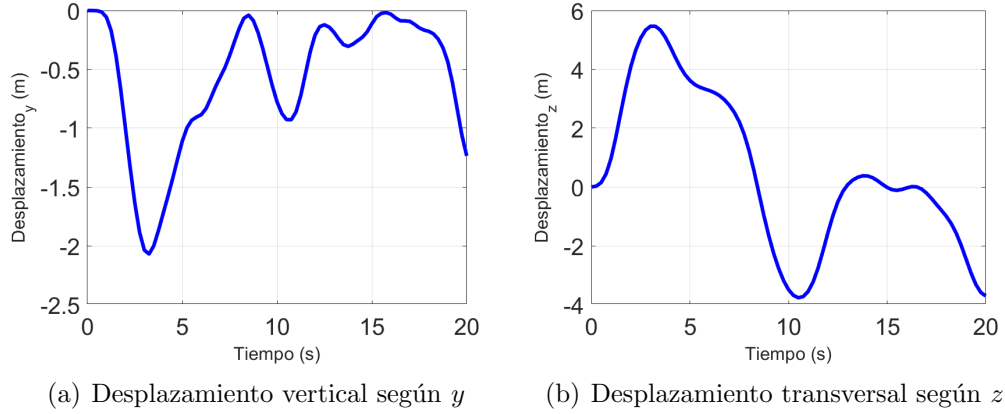


Figura 5.3: Desplazamientos de control del nodo A

4 Por otra parte al analizar en la Figura ?? se observa que los desplazamientos
5 en y , son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido de la
6 fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano yz con el versor x
7 saliente, el movimiento del nodo A es análogo al de una viga empotrada con
8 una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de A es
9 siempre en el sentido de $-y$, lo que se refleja en La Figura ?? y se condice con
10 la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación con
11 los presentados en la bibliografía de referencia “A consistent 3D corotational
12 beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures” (2014),
13 observamos similares valores de máximos y mínimos alcanzados durante el
14 movimiento respecto a las Figuras 5.3 y 5.4. También así los valles y las crestas
15 de la curvas se suceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible
16 afirmar que el software implementado reproduce correctamente el ejemplo y es
17 capaz de capturar movimientos de flexo-torsión cabalmente.

18 Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B. En la Figura ??
19 se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente, y una
20 forma que se asemeja a una senoide. Esto podría vincularse al modo flector
21 en el plano xz de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la dirección
22 z . Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de AC super-
23 puestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento. El autor
24 del trabajo “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic

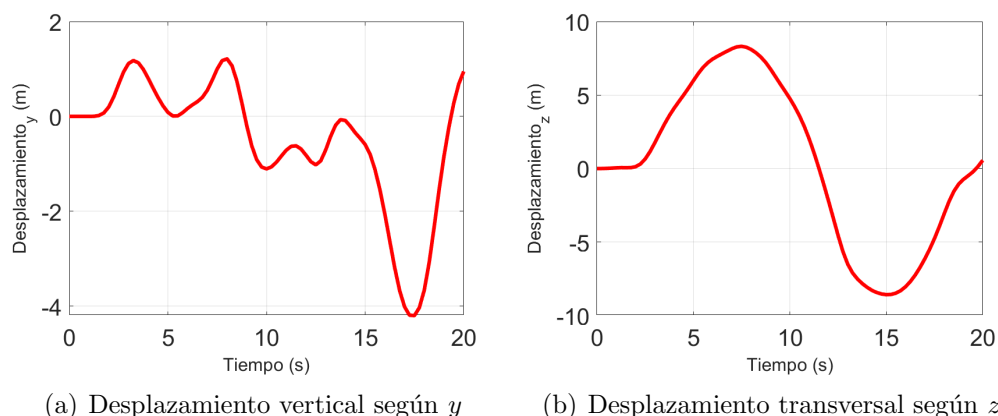


Figura 5.4: Desplazamientos de control del nodo B

1 analysis of flexible structures” (2014) publicó el desplazamiento en z de B y
2 los resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva. Comple-
3 mentando este análisis podemos comparar los desplazamientos del nodos A y
4 B concluyendo que los movimientos inerciales de la barra A-B afectan noto-
5 riamente a los desplazamientos del nodo B respecto de A, tanto en frecuencia
6 como en magnitud.

7 Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se visualizaron me-
8 diante el software *Paraview* las deformadas para diferentes instantes de tiempo:
9 $t_1 = 4$ s, $t_2 = 11$ s y $t_3 = 19$ s. En la Figura 5.5 se observan las oscilaciones
10 flexionales para distintos planos yx e yz . Estos movimientos son originados por
11 diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante F_z mientras que en el
12 miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a
13 su unión rígida con el resto de la estructura.

14 Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las
15 magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inma-
16 nentes a cada elemento en La Figura 5.5. En esta se identifica que el esfuerzo
17 alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando
18 considerables fluctuaciones temporales. En simultaneo, la viga horizontal A-B
19 desarrolla fuerzas normales en todo su largo. Se suceden tanto positivas como
20 negativas, es oportuno notar que un modelo lineal para pequeños desplaza-
21 mientos concluiría que los esfuerzos en esa viga serían nulos. Además este
22 modelo lineal arrojaría desplazamientos triviales en x para ambos nodos, in-
23 duciéndose significativos errores para este tipo de cargas de alto impacto en
24 estructuras de exigua rigidez. El modelo implementado desarrolla magnitudes

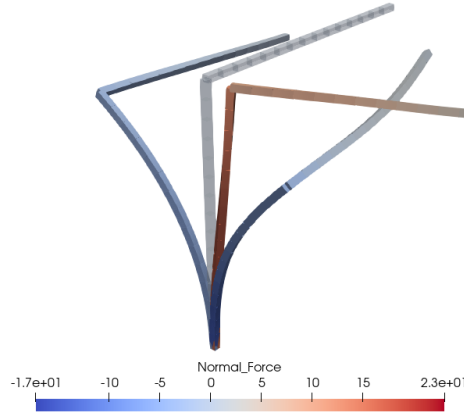


Figura 5.5: Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s

1 no despreciables de desplazamientos en x tal y como se constata en las Figu-
 2 ras 5.6. He aquí las principales diferencias y la importancia de implementar
 3 un modelo considerando no linealidad geométrica, estas consideraciones son
 4 esenciales para la aplicación principal de este trabajo.

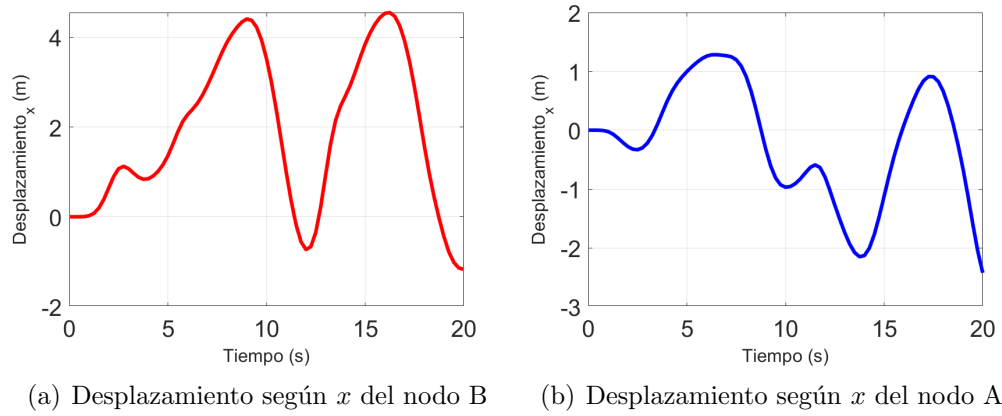


Figura 5.6: Desplazamientos en x de los nodos A y B

5.2. Modelo simplificado de una linea

En este apartado se presenta un primer modelo simplificado del enfoque central de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de Foti y Martinelli, 2018 mas ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado, como ser el caso de: Luongo y Piccardo, 1998 y Martinelli y Perotti, 2001. El ejemplo consiste en un conductor de transmisión eléctrica reforzado con núcleo de acero. La raíz de acero forjado tiene como propósito aportar rigidez mecánica al componente, disminuyendo la deflexión y flexibilidad del conjunto. Esto suele ser ventajoso para largos vanos donde la rigidez del conductor es una variable decisiva. Además su construcción no afecta significativamente la resistividad eléctrica debido al efecto de reluctancia radial variable. que obliga a la corriente a fluir principalmente en la superficie.

El modelo del conductor esta estandarizado bajo la norma IEC europea *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 y se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la cantidad de cables en el núcleo y en la periferia respectivamente. El diámetro se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos de aluminio (color gris en la Figura 5.7) y los 7 de acero (color azul). Además asumiremos despreciables, sobre las propiedades del flujo y la geometría, las irregularidades de su perfil en la silueta.

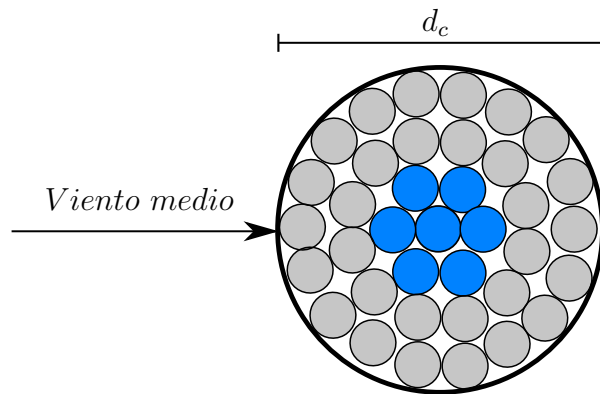


Figura 5.7: Esquema del conductor ASCR 7/26.

El vano tiene un largo $L_c=267$ m mientras que el cable en su configuración deformada mide 269 m. Esta diferencia de longitudes del conductor en su eje axial, responde a un tensado que se realiza durante su instalación. En la etapa de montaje del conductor, se ajusta la pre-tensión de manera tal

que la altura ratifique los requerimientos de seguridad según la urbanización, contaminación magnética y tipografía del terreno. Para esta simulación no se tendrá en cuenta la tensión previa al momento de la colocación pero si la tensión debida a la carga del peso. Vale notar que el valor de los esfuerzos iniciales generados durante la instalación es menor a un 2% respecto a los esfuerzos axiales desarrollados durante su movimiento. De igual manera se resalta que para este ejemplo no se consideró amortiguamiento aerodinámico de fuerzas viscosas.

El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad E , módulo de poisson ν , una densidad similar ρ y una rigidez flexional y torsional EI y GJ respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de la norma *ISO:9001* y se presentan en La Tabla ??.

$d_c(\text{cm})$	$m(\text{kg/m})$	$EA \text{ kN}$	$EI \text{ N m}^2$	$GJ \text{ Nm}^2$
2.81	1.8	29700	2100	159

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo $L_a = 3 \text{ m}$ cada una de ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas, para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en las tres direcciones en x , z e y en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan correctamente las presentadas por Foti y Martinelli (2018), donde los extremos se encuentran sujetos. Habiendo detallado someramente los componentes que integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría en la Figura 5.8.

Existen una diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postulados por Luongo y Piccardo (1998) y Martinelli y Perotti (2001), en donde se resolvió mediante elementos de barra trinodal y de viga corrtaional respectivamente. Para amibos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generadas artificialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se despreciaran las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flujo medio W en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico y alcanza la velocidad media máxima W_{max} en 20 segundos. Este

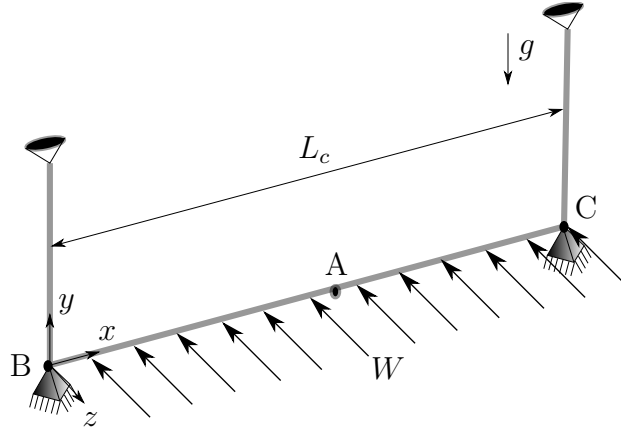


Figura 5.8: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

1 valor de velocidad se calculó según *Design criteria of overhead transmission*
2 *lines*, 2003 considerando un flujo tipo capa límite atmosférica con las propie-
3 dades indicadas en La Tabla ?? asociadas a un tipo de terreno sub-urbano o
4 industrial.

k_r	z_0	z_{min}
0.22	0.3 m	8 m

Tabla 5.2: Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para W_{max}

5 La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gra-
6 vitatoria según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.8. No se muestran
7 los resultados de esta etapa debido a que carecen de relevancia y en el trabajo
8 de referencia se toma la catenaria como condición inicial. La fuerza peso es re-
9 levante desde un punto de vista dinámico pues mitiga posibles inestabilidades
10 cuando las normales de los elementos son próximas a cero. Una vez estabili-
11 zada la respuesta del sistema por el amortiguamiento interno, se aplica una
12 fuerza lineal de media positiva según el eje $-z$ desde cero hasta W_{max} . Esta
13 forma del perfil podría emular el aumento modulado de un presiones en un
14 túnel de viento entre las bocas de entrada y descarga. La forma se muestra en
15 La Figura 5.9.

16 Para este estudio no se considerará la fuerza perpendicular al sentido de
17 flujo: lift. Esta es despreciada por diferentes autores (Lee y Perkins, 1992) (Foti

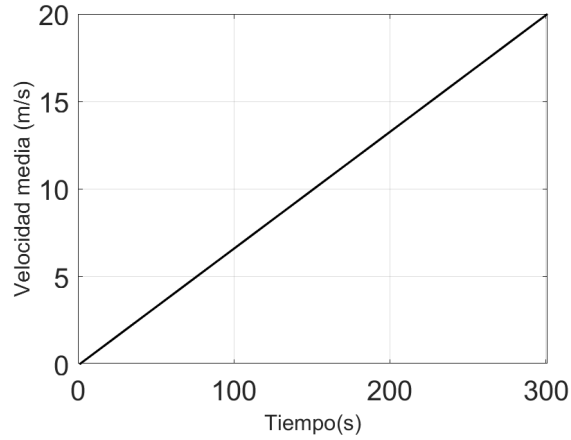


Figura 5.9: Perfil de velocidad progresiva z .

y Martinelli, 2016) (Papailiou, 1997) principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares a los flujos esta relacionada posibles asimetrías tangenciales en el perfil. Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce en una fuerza de lift nula. Esta es la principal diferencia de este caso en comparación por lo propuesto en la literatura fuente (Luongo et al. 1984) y (Foti y Martinelli, 2018) donde si son considerados perfiles con formaciones de hielo.

El perfil de velocidades en la Figura 5.9 genera fuerzas sobre la estructura. La orientación del cable es tal que el flujo en todo punto es transversal a el. Los valores de $C_d = 1.5$ se extrajeron la referencia (Foti y Martinelli, 2018). Se aclara que el angulo de ataque varía durante la trayectoria del cable, no obstante el coeficiente C_d permanece constate debido a la simetría de revolución del perfil. Se gráfica entonces las fuerzas sobre cada nodo del conductor en La Figura 5.10.

A continuación se exponen los desplazamientos verticales y horizontales del nodo A. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Esta homología entre los perfiles de ambas magnitudes es explicable mediante un análisis de Fourier del sistema. Haciendo referencia a la función de transferencia que relaciona a ambas variables, la misma produce unicamente en desfazaje en estado estacionario. Como la curva de carga es de manera gradual y no presenta exabruptos en el tiempo, podemos suponer que la respuesta es cuasi-estática. Se presentan entonces en las Figuras 5.11 los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente del nodo A

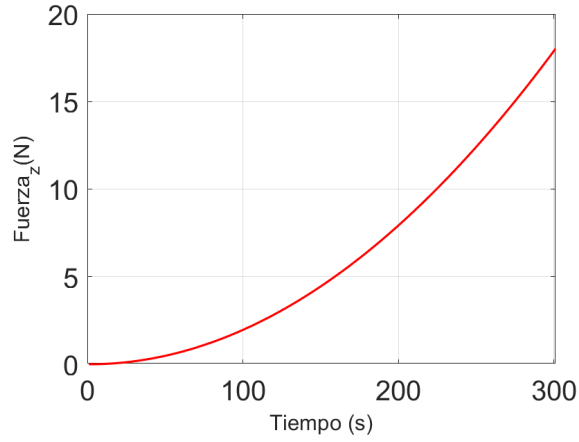


Figura 5.10: Perfil de fuerza nodal según el eje z .

1 situado en el punto medio del vano.

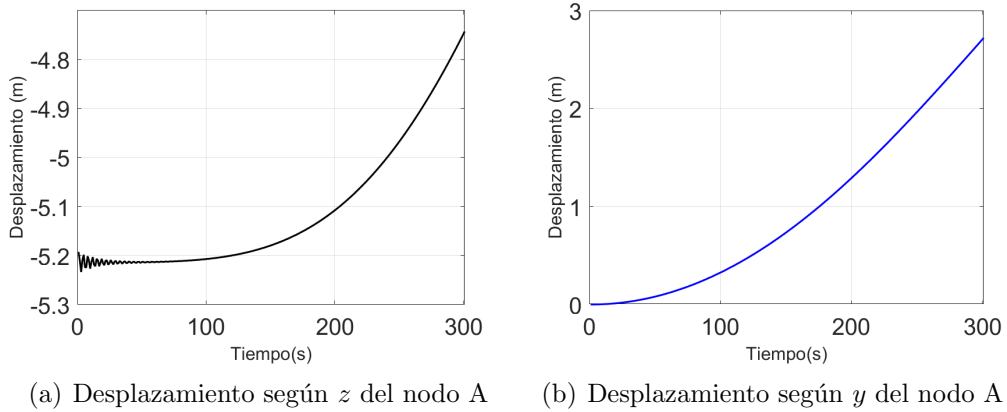


Figura 5.11: Desplazamientos del nodo A

2 Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la
3 literatura fuente (Foti y Martinelli (2018)), se capturo el ángulo de balanceo
4 del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función
5 tangente que vincuula el ángulo respecto da la deformada en el eje x con los
6 desplazamiento en z e y . Para ilustrar al lector se realizó el esquema mostrado
7 en la Figura 5.12 del ángulo Φ en cuestión.

8 Se graficaron las trayectorias del angulo para diferentes valores de velocidad
9 media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica.
10 Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante
11 al de que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras
12 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el

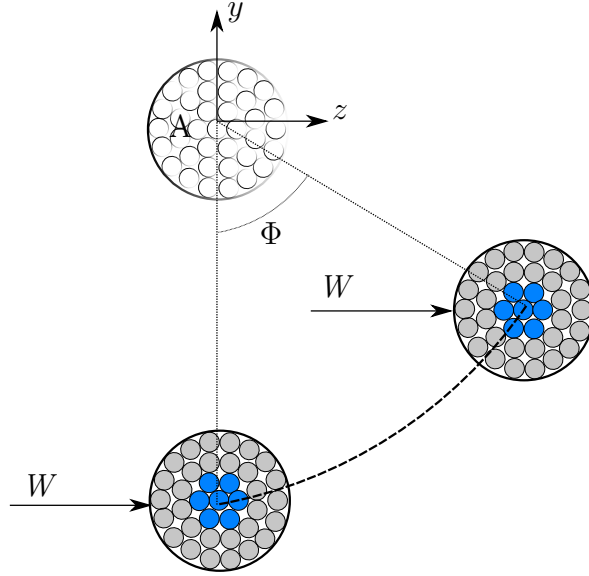


Figura 5.12: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

1 tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte,
 2 en comparación con los resultados presentados por Foti y Martinelli, [2018](#) se
 3 observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo
 4 la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el
 5 valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamen-
 6 te, lo que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la
 7 turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a
 8 que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincorni-
 9 zadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan
 10 produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia
 11 del lift y la variación del angulo de ataque con el ángulo. Como en la referencia
 12 Foti y Martinelli, [2018](#) se toman en cuenta un perfil con formaciones de hielo, y
 13 por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de diferente
 14 forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.

15 El ejemplo permite inferir que la respuesta numéricas del modelo represen-
 16 tan de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores
 17 de transmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejada en los resulta-
 18 dos arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible
 19 aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

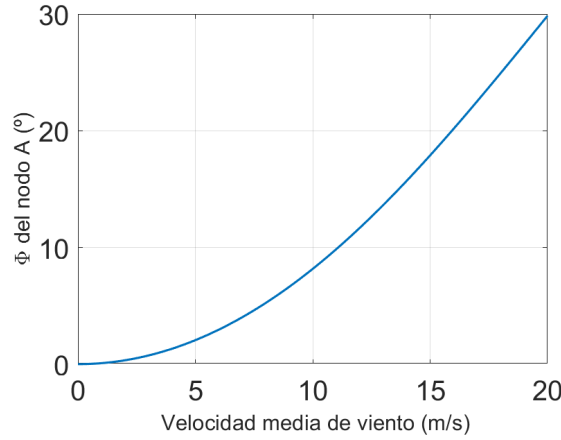


Figura 5.13: Ángulo de balanceo Φ en función de la velocidad media $W(t)$.

5.3. Sistema de transmisión eléctrica

Este apartado ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de transmisión eléctrica afectados por vientos extremos no sinópticos, en particular, tormentas conectivas. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizando un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos vanos de idéntico largo $D_v = 206.5 \text{ m}$ tal cual se indica el Esquema 5.14. Para el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1 y 2 respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del primer y segundo vano con los literales C y B respectivamente. Con el objetivo de representar una geometría real de una línea de alta tensión y no aborrecer al lector con descripciones de propiedades, los conductores de la simulación se corresponden con el Ejemplo 5.2 y cuyas propiedades mecánicas se explicitan en la Tabla ??.

En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que transportan un voltaje mayor a 72.5 kV . Este valor de tensión es eminentemente peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elementos aisladores. Estas cadenas aisladoras tradicionalmente de vidrio y cerámicas han ido mutando a poliméricas con un núcleo sólido, aumentando así su tenacidad y flexibilidad. Según la normativa Norma IEC 60815, para alta tensión, deben medir un largo de 10 in. Para el modelo las cadenas se modelaron como barras de Green, debido a su exigua rigidez a flexión y su articulación de

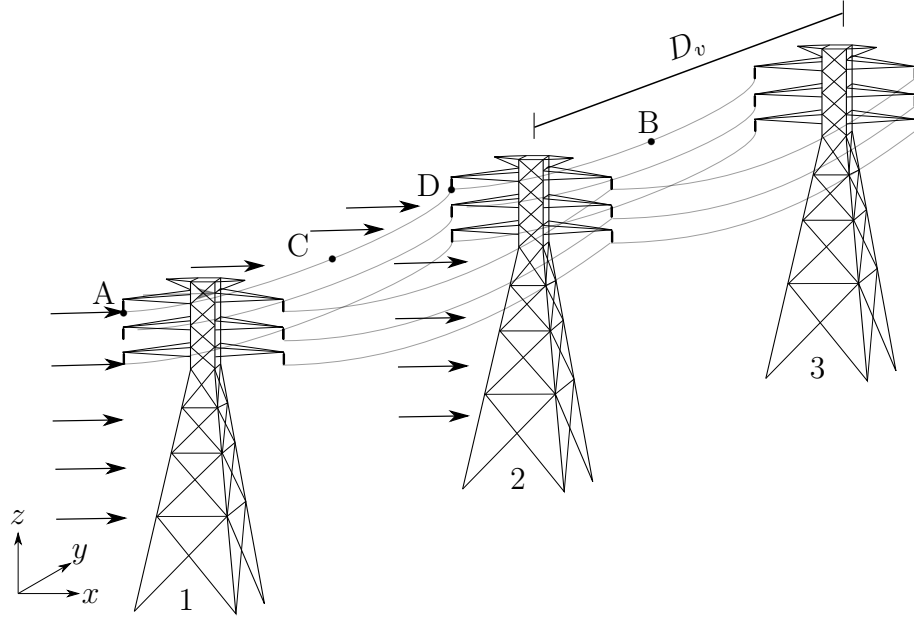


Figura 5.14: Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo.

1 anclaje en ambos extremos. Además se consideró un modulo de elasticidad
2 aproximado $E = 70 \text{ GPa}$ según los estudios experimentales realizados por la
3 referencia Crespo, 2019.

4 Al igual que los aisladores, las barras de la estructura metálica se modelaron
5 con elementos de tipo green, con una ley material Saint-Venant-Kirchhoff con
6 $E = 300 \text{ GPa}$ y $\nu = 0.3$. Estos valores se corresponden con un acero ASTM
7 A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y
8 ASTM 965. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre
9 los opuestos de la cercha 14.8 m . Además son capaces de sostener 6 líneas,
10 estas se corresponden a cada altura, con cada una de las fases eléctricas. Las
11 líneas se encuentran colocadas a tres cotas distintas $L_1 = 31.75 \text{ m}$, $L_2 = 26.03$
12 m , $L_3 = 39.76 \text{ m}$, tal y como se muestra en 5.15.

13 La simulación consta de dos etapas, primeramente partiendo de la confi-
14 guración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad
15 según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.15. Nuevamente, al igual que
16 en el Ejemplo 5.2 , esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones
17 son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el
18 amortiguamiento aerodinámico en desplazamientos. Este se calculó como una
19 aproximación a partir de la literatura Matheson y Holmes, 1981 promediando
20 la velocidad media de viento, resultando $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \bar{v} = 0.15 \text{ Ns/m}$.

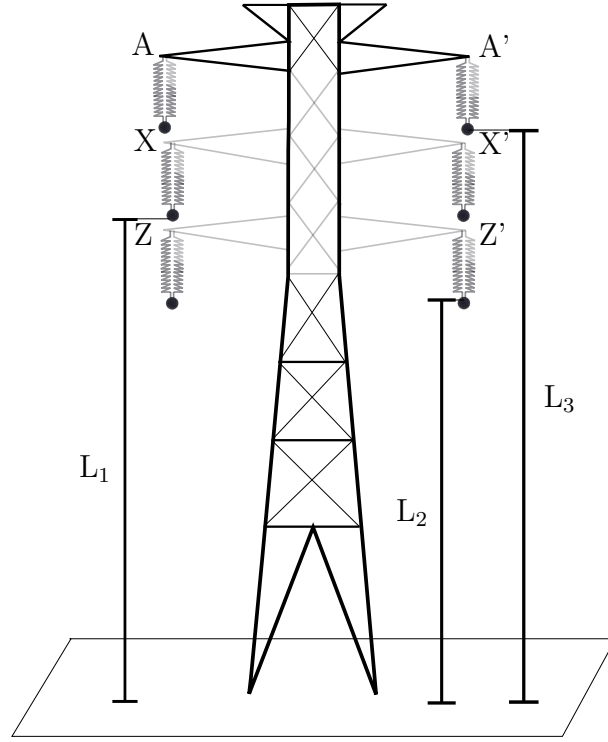
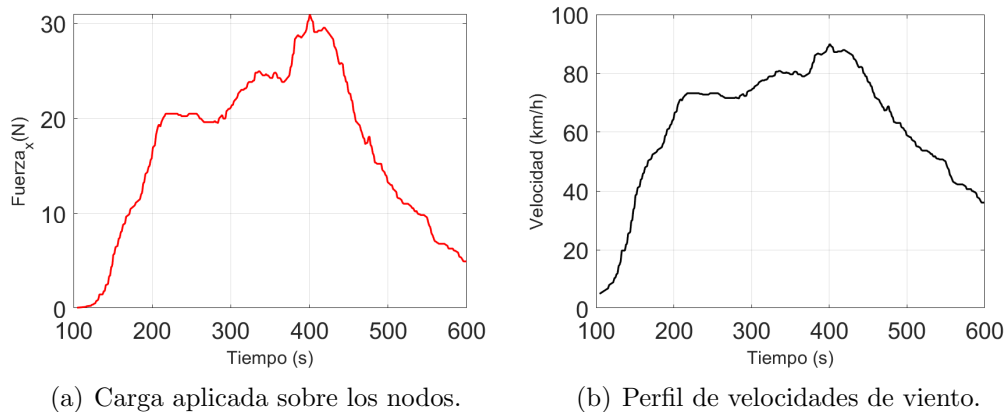


Figura 5.15: Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

1 Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta
2 convectiva capturado en la referencia Stengel y Thiele, 2017, positiva según el
3 eje x . No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales en la coordenada axial
4 del cable, asociada a una función de coherencia de correlación espacial debida
5 a la turbulencia. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó
6 únicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer
7 resultados respecto al comportamiento flexional en el plano yz , lo que se evi-
8 denciará a continuación en disímil desarrollo de las trayectorias entre los nodos
9 A, C, D y B. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa
10 en que estos fenómenos tiene dimensiones espaciales del orden de 40 metros
11 a 40 kilómetros Fujita (1985), consecuentemente es factible que la tormenta
12 afecte a una fracción del tendido. Se muestra continuación en las Figuras ??
13 los valores de fuerza y velocidad aplicados en la coordenada x entre los nodos
14 A y D para cada instante.

15 Las tormentas severas generan corrientes descendentes donde las veloci-
16 dades aumentan vertiginosamente en pequeños intervalos de tiempo, alcanzando
17 umbrales de hasta 270 km/h Fujita, 1985. Para este modelo, el perfil represen-
18 tado es menor tenor, mas no el aumento súbito del fenómeno. La velocidad se



1 eleva del valor nulo a 80 km/h en menos de 3 minutos, tal y como se observa
 2 en la Figura ???. Debido al impacto de del viento sobre el conductor se generan
 3 fuerzas, estas se calcularon con los valores de coeficiente drag y fórmula deta-
 4 lladas en el Ejemplo 5.2 anterior extraídos de la referencia Foti y Martinelli
 5 (2016).

6 Ya se ha resaltado en retiradas ocasiones los posibles daños severos que
 7 puede ocasionar un excesivo balanceo del conductor. Volores desmedidos de
 8 esta variable deben controlarse en todos los aisladores rotulados en el Esque-
 9 ma 5.15. Consecuentemente, se compararon cuantitativamente las oscilaciones
 10 entre fases (A-A', X-X', Z-Z'), no apreciándose sensibles diferencias, tanto en
 11 desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen aprecia-
 12 bles variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A').
 13 Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho
 14 de omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe
 15 antes el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando
 16 que los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A
 17 como variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en
 18 los ejes x y z como también el ángulo de oscilación Φ tal y cual se observa en
 19 la Figura 5.16.

20 El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos
 21 de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de $\Delta T = 0.5$
 22 s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico
 23 $\alpha = -0.05$, luego de un arduo y tedioso procedimiento iterativo de ajuste de
 24 parámetros se realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con
 25 tolerancias en desplazamientos y en fuerzas residuales de 10^{-5} m y 10^{-5} N

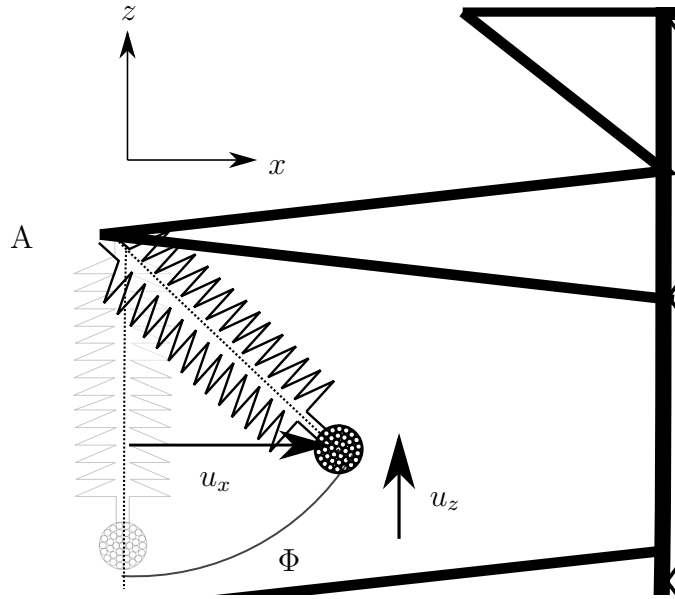
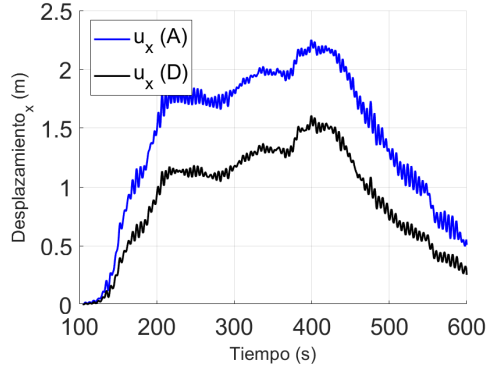


Figura 5.16: Ilustración de magnitudes de balanceo.

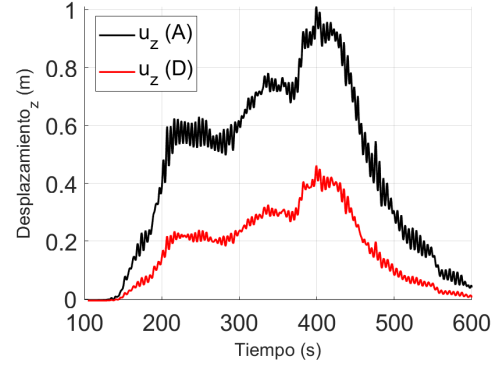
1 respectivamente.

2 A continuación se figuran los desplazamientos verticales y horizontales de
3 los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En
4 estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de
5 fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magni-
6 tudes externas, responden a un argumento basado en el análisis en frecuencia
7 del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en
8 estado estacionario. En ?? y ?? se observan los desplazamientos en vertical y
9 transversal respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a
10 la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A
11 desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el
12 carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo
13 no representa los cargas inerciales de los vanos contiguos a este.

14 Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del con-
15 ductor también despliegan grandes desplazamientos, este fenómeno resulta
16 indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de segu-
17 ridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan
18 generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proxi-
19 midad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los compo-
20 nentes. Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos
21 para los nodos B y C.

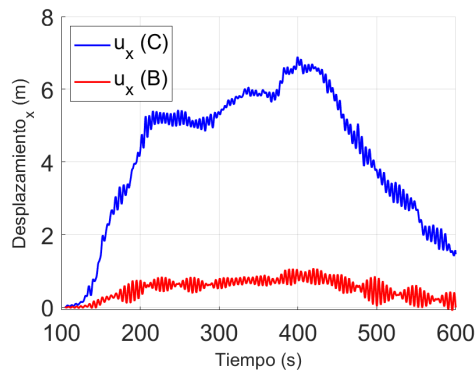


(a) Desplazamientos en x nodos A, D.

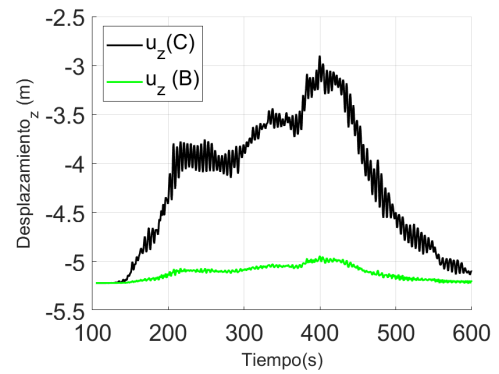


(b) Desplazamientos en z nodo A, D.

Figura 5.17: Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D



(a) Desplazamientos en x nodos B,C.



(b) Desplazamientos en z nodo B, C.

Figura 5.18: Desplazamientos de los nodos medios B y C

En la Figura ?? se aprecia que el orden de los movimientos, para ambos nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación entre estos es de unos 14 metros podremos garantizar que no habrá impactos entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas líneas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central, para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe considerarse a la hora del diseño. En la Figura ?? se muestra que el descenso máximo de la línea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en puntos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctuación temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Gráficas 5.17.

En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables cinemáticas se elaboró la Figura ?? carga desplazamiento para el nodo A. En abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos se graficó un calculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo en el área de ingeniería del viento (Stengel y Thiele, 2017), (Durañona y Cataldo, 2009) (Yang y Hong, 2016).

El cálculo analítico resulta de análisis estático plano, donde se iguala la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones pueden afectar las fuerzas internas transmitidas al elemento aislador. Asimismo, ese calculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial, proveniente de las distintas orientación de la línea respecto al ángulo de incidencia del flujo. En la Figura ?? se evidencian las diferencias entre los modelos y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales mencionadas, se muestran la con-

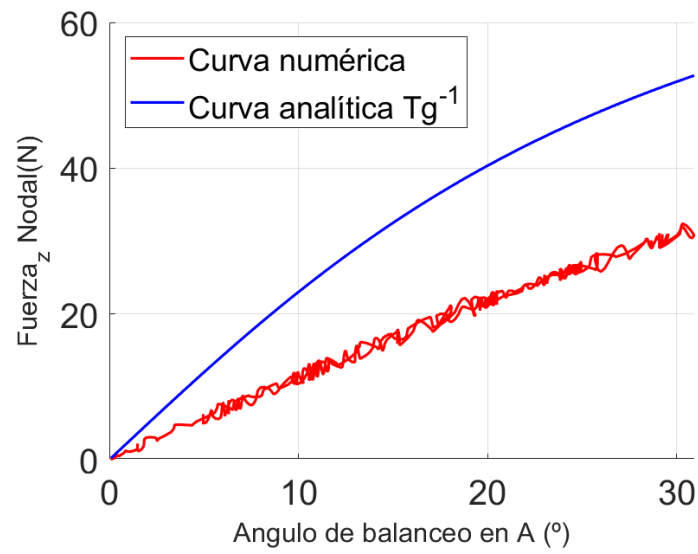


Figura 5.19: Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

- 1 figuración indefomradas en gris y las deformadas con una barra de colores en
- 2 desplazamientos para el instante $t = 400s$ en la Figura ??.

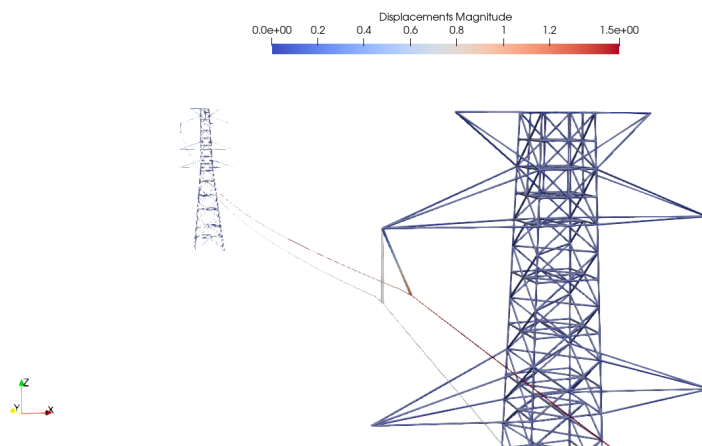


Figura 5.20: Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s.

1 Capítulo 6

2 Conclusiones

3 El presente capítulo puede separarse en tres secciones que se relacionan
4 con diferentes aristas o perspectivas del trabajo llevado a cabo. En primera
5 instancia, se detallan las consideraciones finales y de síntesis, desde un punto
6 de vista técnico sobre los resultados obtenidos. Posteriormente, se narran los
7 aspectos del desarrollo académico de esta tesis como trabajo culmine dentro de
8 una etapa formativa fundamental para quien escribe. Luego de esto, se realizan
9 recomendaciones y posibles trabajos a futuro para finalizar con una reflexión
10 sobre las limitaciones críticas de este trabajo y el método científico en general.

11 6.1. Conclusiones técnicas

12 6.1.1. Sobre el fenómeno

13 Según la bibliografía consultada hay vasta evidencia de que el fenómeno
14 de tormentas convectivas ha afectado severamente la calidad e integridad de
15 vida a lo largo y ancho del globo terráqueo. En particular, debido condiciones
16 climáticas singulares de la región, y el progresivo calentamiento global, han
17 intensificado los daño devastadores en los sistemas de transmisión y distribu-
18 ción eléctrica nacionales. Induciendo inevitablemente en costos millonarios de
19 reparación sobre las instalaciones y mas las perdidas de ganancias durante in-
20 terrupción del suministro. Además, estos eventos extremos se manifiestan en
21 corrientes descendentes o tornados extra-tropicales que han puesto en peligro
22 la salud y condiciones de vida de las personas.

23 A partir de las bibliografías consultadas y los resultados del ejemplo 5.3 po-
24 sible teorizar que la mayoría de las incidencias ocurridas en las líneas Palmar-

1 Montevideo de 500kV pueden deberse al pasaje de tormentas severas sobre
2 la zona. Estas tormentas producen corrientes descendentes que ejercen cargas
3 desmesuradas sobre el conductor, en el orden de minutos, imponiendo ángulos
4 de balanceo excesivos que acercarían los conductores a las torres a una distan-
5 cia tal que inminentes descarga a tierra pueden sacar del servicio a la línea.
6 Además según los estudios, el diseño de sistemas de transmisión considerando
7 flujos tipo capa límite atmosférica poliandria estar subdimensionando ya que
8 los periodos de retorno para velocidades de hasta 100 km/h es menor para
9 corrientes descendentes respecto de vientos capa límite atmosférica.

10 Dada la problemática esta investigación la atacó generando herramientas
11 de simulación computacional, capaces de emular los desmedidos desplazamien-
12 tos y esfuerzos que estos eventos producen sobre los sistemas de transmisión
13 eléctrica de alta tensión. Para esto, inicialmente se consultó el estado del arte
14 desde un foco de ingeniería del viento y estructural. Se analizaron bibliografías
15 en materia de simulaciones numéricas aplicadas a conductores eléctricos, con
16 abordajes semi analíticos y computacionales. También, se estudiaron trabajos
17 nacionales e internacionales, desde un punto de vista cualitativo y experimen-
18 tal de corrientes descendentes y sus posibles perjuicios en líneas de transmisión
19 eléctrica. Asimismo, el autor se interiorizó y eligió la formulación corrotacional
20 de vigas 3D. Una vez ahondado en la temática, se implementó y validó un
21 modelo corrotacional consistente robusto y eficaz capaz de captar y reproducir
22 desplazamientos de gran amplitud con número reducido de elementos.

23 6.1.2. Sobre la metodología

24 En la Sección 4.1.2 se desarrolló un estudio general sobre los campos de
25 velocidades absolutos y relativos, vinculados al efecto del movimiento del con-
26 ductor respecto al viento. Este enfoque no se encontró en la bibliografía con-
27 sultada, esclareciéndose la dinámica del fenómeno. A su vez, según la Figura
28 4.4, se develó que desprestigiar la velocidad perpendicular frente a la componente
29 media, en el sentido transversal z , es equivalente a que ángulos de ataque sean
30 nulos y también así, la componente del drag según el sentido de y . Por otra
31 parte, se concluyó que al considerar los campos relativos aparece un término
32 aeroelástico, que emerge de la diferencia de velocidades, vista desde un refren-
33 cial solidario al conductor. A este término se lo identifica en la materia con el
34 nombre de amortiguamiento aerodinámico o fuerza viscosas.

1 Una vez descritas las hipótesis en este mismo capítulo, en la Sección 4.2.2
2 se generó un análisis analítico no explicado en la bibliografía de referencia (“A
3 consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of fle-
4 xible structures”, 2014). En este apartado se aplicó el método de resolución
5 para problemas dinámicos de HHT, incondicionalmente estable, para la for-
6 mulación corrotacional. Explicando con detenimiento la deducción y premisas
7 utilizadas. Posteriormente al despliegue teórico, se establecieron los principales
8 pseudocódigo subyacentes a la implementación numérica en el Software ON-
9 SAS. Esta sección 4.2.3 se desarrolló con el objetivo de esquematizar y explicar
10 la implementación de la formulación, además de sentar las bases para posibles
11 implementaciones y estudios futuros.

12 En función de los avances originales de esta investigación mencionados en
13 los párrafos anteriores. Esta tesis constituye un desarrollo complementario a
14 la formulación propuesta, en (“A consistent 3D corotational beam element for
15 nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014), incluyendo fuerzas
16 aerodinámicas en el estudio analítico. Las estructuras representables por ele-
17 mentos de viga, con grandes desplazamientos y rotaciones, atacadas por el
18 viento es enorme. Dado este diverso habanico de aplicaciones, el interés de la
19 comunidad científica puede ser un impulso catalizador para ciertas publicacio-
20 nes a futuro.

21 6.1.3. Sobre los resultados

22 Esta formulación se valida con el ejemplo 5.1 benchmark del folclore corro-
23 tacional presentado por Simo y Vu-Quoc, 1988. Este es cargado con una fuerza
24 abrupta y de severa magnitud, respecto al rigidez de la estructura alcanzando
25 un valor de 50 N en apenas 2 segundos de simulación, tal y como se muestra en
26 la Figura 5.2. Esta fuerza posee una esencia análoga al fenómeno de tormentas
27 convectivas per se. Esta fuerza aumenta estrepitosamente en un corto lapso de
28 tiempo, por ende la capacidad del modelo de reproducir este tipo de impac-
29 tos es fundamental para poder emular el fenómeno central de este trabajo en
30 simulaciones de sistemas eléctricos.

31 En la Figura ?? se observan amplitudes que alcanzan las 8 metros cuando
32 la estructura mide 10. Esto evidencia, la fuerte presencia de grandes despla-
33 zamientos y rotaciones. Asimismo, en la dirección z , se puede observar el carácter
34 no conservativo de la formulación corrotacional, ya que los valles y crestas de

1 las respuesta prestan una tendencia decreciente con el tiempo. En relación con
2 los desplazamientos en el sentido de y del nodo A, presentados en la Figura
3 ??, se observa el signo negativo de este, concordando con lo esperado intuiti-
4 vamente según el sentido de la fuerza aplicada. Por último, el resultado mas
5 importante de este ejemplo se destila al cotejar las respuestas del as Figuras
6 ??, ?? y ?? con lo publicado por el artículo de referencia (“A consistent 3D
7 corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structu-
8 res”, 2014). Al comparar estas figuras se concluye que el modelo implementado
9 es capaz de representar cabalmente movimientos de gran amplitud, con ape-
10 nas 10 elementos por miembro y un paso temporal de 0.25 s. Esto permitió
11 validar la formulación para este ejemplo y aplicarla a dominios mas complejos
12 específicamente con el foco en el modelado de conductores eléctricos.

13 Como primer ejemplo aplicado al modelado de conductores se eligió un
14 problema postulado en la publicación (Foti y Martinelli, 2016). Para esto,
15 se investigó la normativa IEC 60815 que detalla propiedades geométricas y
16 constructivas de conductores para alta y media tensión. Con el fin de cote-
17 jar fielmente los resultados obtenidos, se extrajeron, tanto los parámetros del
18 flujo, como las propiedades geométricas y materiales, del trabajo de referen-
19 cia correspondientes con un conductor DRAKE ASCR 7/26. No obstante, con
20 el objetivo acercar la representación a la real, se incorporaron dos elementos
21 aisladores ilustrativos, que por sus condiciones de borde, no afectan el com-
22 portamiento dinámico y cinemático del problema. (Ver Figura 5.8)

23 Para este ejemplo de la Sección 5.2, se aplicó un viento progresivo desde
24 un valor nulo hasta una velocidad de un perfil Capa límite atmosférica en 20
25 segundos, según la Figura 5.9. Este cálculo se realizó considerando las pro-
26 piedades extraídas del (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003),
27 explicitadas en la Tabla ?. Al espejar los perfiles de velocidad presentados en
28 las Figuras ? y ? con las fuerzas aplicadas de la Figura 5.10 se observa una
29 homología. Esto se fundamenta con un análisis de Fourier donde las salidas y
30 entradas son los desplazamientos y fuerzas respectivamente.

31 Las contribuciones principales del Ejemplo 5.2 se desprenden al contrastar
32 los resultados del ángulo Φ , graficado en la Figura 5.12 con los presentados
33 por L. Foti. De este análisis se extraen ciertos paralelismos y discordancias.
34 En primer lugar las perfiles arrojados son semejantes, presentando una relación
35 cuadrática con la velocidad. Esto se atribuye a la relación de dependencia
36 cuadrática de la fuerza con la velocidad media de viento. Sin embargo, para el

1 caso implementado en esta tesis se alcanzan mayores valores de ángulo. Esto
2 puede deberse las múltiples diferencias entre los modelos: la omisión de las
3 componentes turbulentas del flujo, el estado inicial de tensado y la presencia
4 de hielo en las líneas. Los últimos dos factores parecen intuitivamente atenuar
5 el ángulo máximo alcanzado por la línea durante el transcurso del movimiento,
6 por su mayor rigidez inicial e inercial. Dado estos resultados, se decidió llevarlas
7 simulaciones a un grado mayor de complejidad, e implementar un modelo con
8 múltiples elementos simulando un sistema de transmisión eléctrica.

9 El ejemplo descrito en la sección 5.3 es el resultado principal de este trabajo.
10 Se acoplaron diferentes componentes de un sistema de alta tensión conductores,
11 aisladores y torres. Para esto se validaron ejemplos intermedios integrando
12 resultados lineales e inerciales conocidos con elementos de biela tipo Green y de
13 viga corrotacional. Las geometrías y propiedades que integraron el modelo son
14 extraídas de bibliografías experimentales y normativas buscando representar y
15 emular el fenómeno de forma realista.

16 De igual modo, el perfil de viento se extrajo de estudios experimentales en
17 el Norte de Alemania durante el transcurso de una tormenta convectiva tipo
18 corriente descendente publicado en (Stengel y Thiele, 2017). Esta es de una
19 magnitud intensa, aunque no en comparación con los resultados capturados
20 en diferentes estudios de campo nacionales como (Durañona y Cataldo, 2009)
21 y el trabajo de Duranona et al. 2019, donde se alcanzan umbrales de 88.2 a
22 162 km/h a 45 m de altura. Otra diferencia al respecto, refiere al gradiente
23 de velocidad, el flujo introducido numéricamente de Stangel posee una menor
24 aceleración en comparación con tormentas en el territorio uruguayo.

25 La carga del viento se distribuyó en el primer vano provocando un perfil
26 que ataque diferente a la línea en su coordenada axial. Esto genera un efecto
27 de desfase entre los desplazamientos en los vanos. Esta variabilidad del flujo,
28 busca representar un fenómeno de oscilación axial, relacionado con la presencia
29 de vórtices a lo largo del espacio. Las diferencias en desplazamientos de los
30 puntos A B C Y D de la cadena aisladora, se evidencia en las Figuras 5.18 y
31 5.17. Por mas que los movimientos posean diferentes amplitudes de banda, los
32 perfiles obtenidos se encuentran gráficamente emparentados con el perfil de la
33 tormenta en la Figura ??.

34 Finalmente se creó un análisis de contraste con un modelo ampliamente
35 utilizados en el área de Ingeniería del Viento. Esta se utiliza para calcular
36 de forma cuasiestática, utilizando una fórmula de arco tangente, basado en un

1 péndulo sin términos dinámicos e inerciales. Los trabajos de Stengel y Thiele,
2 [2017](#), Durañona y Cataldo, [2009](#) y Yan et al. [2009](#) se aplica esta aproximación
3 simplificadora. Si bien en los resultados del Ejemplo [5.3](#) no son comprobables, la
4 aproximación plana no funciona. Para este caso en particular, la curva numéri-
5 ca parece reflejar una linealidad, evaluar el ángulo de la cadena mediante el
6 modelo estático, arrojaría un resultado de sobrestimado. Esto se detalla en la
7 Figura [??](#).

8 Estos resultados presentan indicios que para enfrentar la problemática, los
9 códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complementario
10 para el diseño de sistemas de transmisión de alta tensión. Según contactos es-
11 tablecidos con la empresa de transmisión eléctrica (UTE), las torres de alta
12 y media tensión suelen encargarse a empresas privadas que obtienen la obra
13 por licitación y entregan las instalaciones con llave en mano. Estos proyectos
14 suelen importar soluciones del extranjero, que pueden ser no aplicables a las
15 condiciones nacionales. Esto se explica por la carencia de las normas inter-
16 nacionales en materia de fenómenos de viento no sinópticos como corrientes
17 descendentes y ciclones extratropicales. Esto se intensifica en el territorio para
18 sistemas montados hace 30 años en superposición con la asiduidad y frecuencia
19 en los periodos de retorno.

20 **6.2. Conclusiones de formación**

21 El desarrollo de este trabajo constituyó una instancia de formación fun-
22 damental y enriquecedora para el autor enmarcada dentro del programa de
23 Magister en Ingeniería Estructural. Este documento es la síntesis y aplicación
24 de un conjunto de conocimientos profundizados durante la actividad programa-
25 da, aplicada al modelado numérico de estructuras. Desde la óptica del autor, la
26 creación de herramientas endógenas con foco en atacar problemáticas a nivel
27 nacional constituye un pilar fundamental en el desarrollo autónomo y origi-
28 nal de la ingeniería uruguaya. Este trabajo es una muestra de la convicción
29 y determinación, que el conocimiento académico, debe desarrollarse de forma
30 transparente, comunitaria y democrática. Es por esto, que todos los códigos
31 utilizados en esta investigación se implementaron en el software libre [ONSAS](#).
32 Esto abre la posibilidad a cualquier tercero ya sea una organización o persona
33 de estudiar, modificar y difundir los códigos creados como también aplicarlos
34 a sus propias necesidades.

1 6.3. Trabajos a futuro

2 Actualmente este trabajo presenta algunas limitaciones o falencias que de-
3 berían mejorarse de continuar esta línea de investigación. Como guías de futu-
4 ras se proponen los siguientes lineamientos que buscan ampliar las potencias
5 y capacidades del modelo:

- 6 1. Incluir en el análisis teórico de la formulación corrotacional condiciones
7 de Dirichlet no homogenas en desplazamientos que sean capaces de re-
8 presentar el tensado del conductor durante la instalación. La hipótesis
9 reduccionista sobre la tensión inicial es imprecisa y disminuye la exacti-
10 tud en la representación del fenómeno. Según el punto de vista del autor,
11 esta implementación en [ONSAS](#) es el punto de partida en la continuación
12 de este trabajo.
- 13 2. Implementar un módulo modal dentro del [ONSAS](#) capaz de calcular los
14 modos estructurales, insumo fundamental para realizar un análisis en
15 frecuencia de posibles resonancias viento-conductor.
- 16 3. Agregar al Software [ONSAS](#) la posibilidad de incluir relaciones de fuerza
17 viscosas no lineal con diferentes coeficientes de drag y lift de acuerdo al
18 perfil geométrico de la sección. Incluir a partir de esto fuerzas viscosas
19 no lineales, al desarrollo analítico de la formulación corrotacional y su
20 implementación numérica.
- 21 4. Agregar al modelo los elementos separadores con mas de un conduc-
22 tor por aislador. En las instalaciones visitadas de forma presencial, se
23 observaron una serie de separadores que mantienen distanciadas los con-
24 ductores evitando el cortocircuito. Además, unen a cuatro conductores
25 aportando una mayor rigidez e inercia en los tendidos. Este análisis de-
26 berá incluir diferentes valores de coeficientes de drag dada la proximidad
27 entre conductores y sus efectos sobre las líneas de flujo.
- 28 5. Incorporar diferentes geometrías de torres presentes en los distintos ten-
29 didos de distribución del país. Según los datos recolectados en las líneas
30 de distribución a partir de la década del 2000, las modelos de torres cam-
31 biaron respecto a los que se representaron el Ejemplo [5.3](#). Es importante
32 este análisis para lograr emular la influencia de arquitectura de las torres
33 en la aproximación excesiva del conductor las barras. De igual manera,
34 adquirir datos reales aportados por UTE.

- 1 6. Incorporar al modelo el agarre doble, que en determinadas ocasiones,
2 se dispone en las lineas centrales de la torre. En algunos casos, una so-
3 lución ante la aproximación inminente del aislador, consiste en instalar
4 una cadena aisladora extra que oficia de sujetador adicional para los con-
5 ductores. Rigidizando y evitando de este modo el balanceo desmesurado.
6 Otro tipo de soluciones implantadas, consiste en agregar pesos sobre pun-
7 tos estratégicos en las lineas, aumentando la inercia del sistema. En este
8 caso, la elección del peso consiste en un compromiso entre los esfuerzos
9 generados en el cable sin alcanzar la fluencia y la masa que disminuye el
10 balanceo. Este tipo de soluciones paliativas resultan interesantes como
11 objeto de simulación.
- 12 7. Generar un análisis de malla y sensibilidad respecto a las condiciones
13 de borde establecidas y el numero de elementos por unidad de largo
14 del conductor. Esto permitiría estudiar que grado de discretización sería
15 el óptimo para minimizar el error numérico sin incurrir en un tiempo
16 excesivo de simulación.
- 17 8. Integrar la herramienta [ONSAS](#) con un solver de fluidos como por ejem-
18 plo el `caffa.3d.MBRi` basado en volúmenes finitos con paralelización mul-
19 titorial Mendina et al. [2014](#). Esta ardua integración permitiría generar
20 una herramienta sumamente potente para atacar problemas de interac-
21 ción fluido-estructura.

22 6.4. Reflexión

23 Toda disciplina e investigación debería conocer sus propias fugas, fronteras
24 y puntos ciegos. De lo contrario, cualquier pretensión hermética podría ser un
25 síntoma de arrogancia y altanería. A lo largo de este trabajo he canonizado una
26 redacción en tercera persona, como si hubiese una determinada imparcialidad
27 y transparencia en dicho escritor. Este sujeto, apuntado y enfocado en los
28 párrafos siguientes, merece ensimismarse y cuestionarse a si mismo, según el
29 proverbio del Oráculo de Delfos *gnóthi sautón* o en castellano *Conócete a ti*
30 *mismo*.

31 Durante el transcurso de este trabajó me surgieron las siguientes inquietu-
32 des ¿Es la realidad un conjunto de fenómenos externos o es siempre un acto
33 de interpretación inmanente al sujeto? Además, ¿Ese sujeto accede la reali-

1 dad (el objeto) a través de la razón para conocer y explicarla, o simplemente
2 la experiencia es quien valida ese conjunto de fenómenos?. A partir de esta
3 pregunta, emana una interrogante natural, ¿Es posible entonces, desligar al
4 sujeto del objeto, o mas bien es ente, (ex-siste) en el mundo, y esta siempre
5 arrojado, eyectado y lanzado hacia el? Y de ser así, ¿No se encuentra entonces
6 yá sugestionado por el paradigma actual, su cultura nativa y sus experiencias
7 personales?

8 Antes que nada, es necesario develar que sujeto en latín *sub-iectum* signi-
9 fica lo que esta debajo, según una interpretación posmoderna. Es entonces el
10 sustrato de esos entes que este dota de sustancia, colores, palabras y formas.
11 Esas preguntas han sido abordadas por eminencias de la filosofía y la ciencia,
12 desde la modernidad hasta hoy. Por un lado, el realismo científico concibe que
13 es posible constatar la realidad a través de la experiencia experimental o a
14 través del pensamiento. Para Descartes ese sujeto duda, piensa y por tanto
15 **ya** en ese acto analítico, existe (*Cogito ergo sum*)Descartes, 1637, osea el ente
16 en tanto ente. El padre del racionalismo nos plantea que el es yo del sujeto, a
17 través de la duda metódica puede acceder la verdad. Contrapuesto a este, el
18 empirismo valida cualquier conocimiento sólo por la experiencia. Esta se define
19 por lo que es captado por nuestros sentidos, es decir que la experiencia es sen-
20 sorial. Estas dos posturas, la del racionalismo de Descartes y la del empirismo
21 de Hume, pueden ser pensadas como una forma de abordaje a la relación reali-
22 dad - conocimiento. Para Descartes: conozco en tanto analizo y pienso, y los
23 objetos existen cuando yo realizo la abstracción. Para el empirismo: conozco
24 en la medida en que incorporo la realidad “objetiva”, la de los objetos que
25 puedo percibir por la experiencia sensorial.

26 A mediados del sg XX surgió un pensador disruptivo viró absolutamente a
27 la cuestión. Frederick Nietzsche plantea en su libro Voluntad de Poder Nietz-
28 sche, 2018.^{EI} pensar no es para nosotros un medio para “conocer” sino para
29 designar el acontecer, para ordenarlo, para volverlo manejable para nuestro
30 uso: así pensamos hoy acerca del pensar: mañana quizá de otro modo ”. Esta
31 frase alude, desde mi perspectiva, a un nihilismo que niega la posibilidad de
32 conocer algo absoluto verdadero pues no es más que un desarrollo pragmático
33 de poder. Sino mas bien es una cuestión de voluntad de voluntad, un dispositi-
34 vo ordenatorio de la realidad según categorías y características en nuestro acto
35 de querer/poder conocer. Antípoda a esta teoría nihilista aparece el relativis-
36 mo. Este se estriba en el principio de incertidumbre Heisenberg, si existe ese

1 conocimiento, es entonces indisoluble de cierta estructura. Thomas Khun en
2 su libro *La estructuras de las revoluciones científicas* Kuhn, 2019 plantea que
3 el método científico revoluciona, cuando se produce un cambio de paradigma,
4 no a partir de la observación de nuevos hechos o fenómenos. Junto con otros
5 destacados sociólogos, acuñan la idea del concepto de “cargado de teoría”, un
6 cierto conjunto de preconceptos anteriores a la observación, descripción y de-
7 sarrollo de la cualquier investigación, que llevarán al científico demostrar lo
8 que realmente quiere demostrar... deunuevo demostración de poder.

9 ¿Como se demuestran los resultados de esta investigación?, construyendo
10 un conjunto de artefactos experimentales/computacionales que constatan una
11 supuesta realidad casi como por espejo o correspondencia. En ese proceso de
12 creación o utilización de instrumentos como ser: un programa, un nanemómetro
13 o código computacional existe una omnipresente intervención humana. ¿Vale
14 entonces seguir redactando en tercera persona desde un racionalismo positivis-
15 ta heredado de hace dos siglos? ¿Es coherente no ser categórico en la descrip-
16 ción de un resultado, cuando **ya** todo el dispositivo ordenadorio que subyace es
17 una construcción humana? ¿Debemos seguir defendiendo un cadáver **ya** ase-
18 sinado por las ciencias humanas desde un sujeto que no es mas que un efecto
19 cultural, histórico y económico?. Por una ciencia en primera persona!

1 Bibliografía

- 2 A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of
3 flexible structures. (2014). *Computer Methods in Applied Mechanics and*
4 *Engineering*, 269, 538-565. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.11.007>
- 5 Abd-Elaal, E.-S., Mills, J. E. y Ma, X. (2013). A coupled parametric-CFD
6 study for determining ages of downbursts through investigation of dif-
7 ferent field parameters. *Journal of Wind Engineering and Industrial*
8 *Aerodynamics*, 123, 30-42.
- 9 Ahrens, J., Geveci, B. y Law, C. (2005). Paraview: An end-user tool for large
10 data visualization. *The visualization handbook*, 717(8).
- 11 Ahrens, J., Jourdain, S., OLeary, P., Patchett, J., Rogers, D. H. y Petersen,
12 M. (2014). An image-based approach to extreme scale in situ visualiza-
13 tion and analysis. *SC'14: Proceedings of the International Conference*
14 *for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*,
15 424-434.
- 16 Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M. y Paulino, G. H. (2018).
17 Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers
18 manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering*
19 *Structures*, 173, 283-299.
- 20 Alsafadie, R., Hjiar, M. y Battini, J.-M. (2010). Corotational mixed finite
21 element formulation for thin-walled beams with generic cross-section.
22 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52),
23 3197-3212.
- 24 Ang, A. H.-S. y Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering plan-*
25 *ning and design*.
- 26 Asadi, S. y Johansson, H. (2019). Multibody dynamic modelling of a direct
27 wind turbine drive train. *Wind Engineering*, 0309524X19849827.

- 1 Barzanooni, R., Bog, I. T. y Elhaddad, M. (2018). Modeling of Flexible Wirings
2 and Contact Interactions in Industrial Robots Using Geometrically
3 Exact Beam Formulation.
- 4 Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping
5 effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*
6 *and Engineering*, 191(17-18), 1755-1789. [https://doi.org/10.1016/](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
7 [S0045-7825\(01\)00352-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
- 8 Behdinan, K., Stylianou, M. y Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic
9 analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and*
10 *engineering*, 154(3-4), 151-161.
- 11 Blevins, R. D. y Vibrations, F.-I. (1990). Van Nostrand Reinhold. *New York*,
12 104-110.
- 13 Chabart, O. y Lilien, J.-L. (1998). Galloping of electrical lines in wind tunnel
14 facilities. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*,
15 74, 967-976.
- 16 Costello, G. A. (1990). Average Voting Members and Other Benign Fictions:
17 The Relative Reliability of Committee Reports, Floor Debates, and
18 Other Sources of Legislative History. *Duke LJ*, 39.
- 19 Crespo, C. A. M. (2019). *Análisis en la selección de aisladores para una línea de*
20 *transmisión*. Facultad de ingeniería/ Universidad Autonoma de Mexico.
- 21 Darwish, M. M., El Damatty, A. A. y Hangan, H. (2010). Dynamic characte-
22 ristics of transmission line conductors and behaviour under turbulent
23 downburst loading. *Wind and Structures*, 13(4), 327.
- 24 Davenport, A. G. (1965). *Dynamic Behaviour of Massive Guy Cables*.
- 25 De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. y Verhoosel, C. V. (2012).
26 *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley
27 & Sons.
- 28 Desai, Y., Yu, P., Popplewell, N. y Shah, A. (1995). Finite element modelling
29 of transmission line galloping. *Computers & structures*, 57(3), 407-420.
- 30 Descartes, R. (1637). *Discours de la methode*. Leyde.
- 31 Di Pilato, M., Martelli, F. y Martinelli, L. (2008). Corotational Cable Elements
32 to Simulate the Behaviour of Suspended Cables under Wind Loading.
33 *not yet published*.
- 34 Duranona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of
35 high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and

1 their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Ae-*
2 *rodynamics*, 184, 128-138.

3 Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme
4 wind climate of Uruguay. *Proceedings of the 14th International Confe-*
5 *rence on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*, 21-26.

6 Durañona, V. y Cataldo, J. (2009). Analysis of severe storms in Uruguay and
7 their effect on high voltage transmission lines. *Proceedings of the 11th*
8 *Americas Conference on Wind Engineering*.

9 Eaton, J. W., Bateman, D. y Hauberg, S. (2007). *GNU Octave version 3.0. 1*
10 *manual: a high-level interactive language for numerical computations*.
11 SoHo Books.

12 El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).

13 Foti, F. (2013). *A corotational beam element and a refined mechanical model*
14 *for the nonlinear dynamic analysis of cables* (Tesis doctoral). Doctoral
15 Dissertation, Politecnico di Milano, Milan (Italy).

16 Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic
17 bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*,
18 40(13-14), 6451-6467. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063>
19 001

20 Foti, F. y Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping
21 vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal
22 resonance. *Journal of Vibration and Control*, 24(7), 1322-1340.

23 Fujita, T. (1985). The downburst: Microburst and macroburst, SMRP Res.

24 Gani, F. y Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines gu-
25 yed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*,
26 37(3), 450-465.

27 Hilber, H. M., Hughes, T. J. y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipa-
28 tion for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake*
29 *Engineering & Structural Dynamics*, 5(3), 283-292.

30 Holmes, J. D. (2002). A re-analysis of recorded extreme wind speeds in region
31 A. *Australian Journal of Structural Engineering*, 4(1), 29-40.

32 Ibrahimbegovic, A. y Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying impli-
33 cit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional
34 beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Me-*
35 *chanics and Engineering*, 191(37-38), 4241-4258.

- 1 Ibrahimbegović, A. y Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of
2 beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for*
3 *Numerical Methods in Engineering*, 41(5), 781-814.
- 4 *Design criteria of overhead transmission lines* (Standard). (2003). Internatio-
5 nal Electrotechnical Commission. Geneva, CH.
- 6 Irvine, H. M. y Caughey, T. K. (1974). The Linear Theory of Free Vibrations of
7 a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical,*
8 *Physical and Engineering Sciences*, 341(1626), 299-315. [https://doi.](https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189)
9 [org/10.1098/rspa.1974.0189](https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189)
- 10 Irvine, H. M. y Griffin, J. H. (1976). *On the dynamic response of a suspended*
11 *cable* (Vol. 4). <https://doi.org/10.1002/eqe.4290040406>
- 12 Irvine, M. (1978). Free Vibrations of Inclined Cables. *Journal of the Structural*
13 *Division*, Vol. 104, 343-347.
- 14 Jones, K. F. (1992). Coupled vertical and horizontal galloping. *Journal of*
15 *engineering mechanics*, 118(1), 92-107.
- 16 Klöppel, K. y H., L. K. (1942). *Die lotrechten Eigenschwingungen der*
17 *Hängerbrücken* (23.^a ed., Vol. 23).
- 18 Koh, C. G. y Rong, Y. (2004). Dynamic analysis of large displacement cable
19 motion with experimental verification. *Journal of sound and vibration*,
20 272(1-2), 187-206.
- 21 Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite
22 rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, 20(2),
23 101-126.
- 24 Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de
25 cultura economica.
- 26 Kutterer, M. y Starossek, U. (1992). *Dynamic cable stiffness and dynamic*
27 *interaction between cable and beam* (Tesis doctoral).
- 28 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiaj, M. (2011). Efficient formulation for dynamics
29 of corotational 2D beams. *Computational Mechanics*, 48(2), 153-161.
30 <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6>
31 007
- 32 Lee, C. L. y Perkins, N. C. (1992). Nonlinear oscillations of suspended cables
33 containing a two-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 3(6),
34 465-490.
- 35 Luongo, A. y Piccardo, G. (1998). Non-linear galloping of sagged cables in 1:
36 2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5), 915-940.

- 1 Luongo, A., Rega, G. y Vestroni, F. (1984). Planar non-linear free vibrations of
2 an elastic cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19(1),
3 39-52.
- 4 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2007). A linear curved-beam model for
5 the analysis of galloping in suspended cables. *Journal of Mechanics of*
6 *Materials and Structures*, 2(4), 675-694.
- 7 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2009). On the effect of twist angle on non-
8 linear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, 87(15-
9 16), 1003-1014.
- 10 Mara, T. G. (2007). *The effects of multi-directional winds on lattice sections*
11 (Tesis doctoral). Faculty of Graduate Studies, University of Western
12 Ontario.
- 13 Martinelli, L. y Perotti, F. (2004). Numerical analysis of the dynamic behavior
14 of cables under turbulent wind. *Struct. Eng. Mech. & Comput. (SEMC*
15 *2004)*.
- 16 Martinelli, L. y Perotti, F. (2001). Numerical analysis of the non-linear dy-
17 namic behaviour of suspended cables under turbulent wind excita-
18 tion. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1(02),
19 207-233.
- 20 Matheson, M. y Holmes, J. (1981). Simulation of the dynamic response
21 of transmission lines in strong winds. *Engineering Structures*, 3(2),
22 105-110.
- 23 Mendina, M., Draper, M., Soares, A. P. K., Narancio, G. y Usera, G. (2014).
24 A general purpose parallel block structured open source incompressible
25 flow solver. *Cluster Computing*, 17(2), 231-241.
- 26 Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics.
27 *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67-94.
- 28 Nietzsche, F. (2018). *La voluntad de poder*. Edaf.
- 29 Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent
30 linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics*
31 *and Engineering*. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90248-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5)
- 32 Oran, C. (1973). Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural*
33 *Division*, 99(6), 987-1001.
- 34 Pacoste, C. y Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Com-*
35 *puter methods in applied mechanics and engineering*, 144(1-2), 163-197.

- 1 Papailiou, K. O. (1997). On the bending stiffness of transmission line conduc-
2 tors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(4), 1576-1583. <https://doi.org/10.1109/61.634178>
3
4 003
- 5 Pugsley, A. G. (1949). On the natural frequencies of suspension chains. *Quar-*
6 *terly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2(4), 412-418.
7 <https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.412>
- 8 Quarteroni, A., Sacco, R. y Saleri, F. (2010). *Numerical mathematics* (Vol. 37).
9 Springer Science & Business Media.
- 10 Rawlins, C. (2005). Flexure of a single-layer tensioned cable at a rigid support.
11 Proc. 6th International Symposium on Cable Dynamics. Charleston
12 (USA). 19-22 Sept.
- 13 Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements.
14 *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 149(1-4),
15 113-132.
- 16 Routh, E. J. et al. (1955). *Dynamics of a system of rigid bodies*. Dover New
17 York.
- 18 Saxon, D. S. y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended
19 chain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6(3),
20 273-285. <https://doi.org/10.1093/qjmam/6.3.273>
- 21 Simiu, E. y Scanlan, R. H. (1986). *Wind Effects on Structures*, 3. ed. (second
22 edi). Jhon Wiley; Sons.
- 23 Simo, J. C. y Vu-Quoc, L. (1988). On the dynamics in space of rods undergoing
24 large motions—a geometrically exact approach. *Computer methods in*
25 *applied mechanics and engineering*, 66(2), 125-161.
- 26 Starossek, U. (1991). Boundary induced vibration and dynamic stiffness of a
27 sagging cable. [http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/
28 Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%
29 7DStiffness.pdf](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)
- 30 Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading
31 acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia*
32 *engineering*, 199, 3152-3157.
- 33 Triantafyllou, M. S. (1984). The dynamics of taut inclined cables. *Quarterly*
34 *Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 37(3), 421-440. <https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421>
35

- 1 Viana, H. F., da Silva, R. G. L., Costa, R. S. y Lavall, A. C. C. (2020).
2 Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering
3 the plastic zone method. *Engineering Structures*, 223, 111197.
- 4 Yan, B., Lin, X., Luo, W., Chen, Z. y Liu, Z. (2009). Numerical study on
5 dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission
6 line under wind load. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 25(1),
7 248-259.
- 8 Yang, S. y Hong, H. (2016). Nonlinear inelastic responses of transmission
9 tower-line system under downburst wind. *Engineering Structures*, 123,
10 490-500.