

2 Implementación de una formulación
3 corrotacional en dinámica no lineal y
4 aplicación al modelado de líneas de
5 transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural Instituto de Estructuras y

Transporte

Instituto de Ingeniería Mecánica y Producción Industrial

Universidad de la República

Montevideo – Uruguay

Febrero de 2021

1 Tabla de contenidos

2	1 Metodología	1
3	1.1 Aspectos de modelado computacional	1
4	1.1.1 Ecuación de equilibrio	1
5	1.1.2 Resolución numérica mediante HHT	3
6	1.1.3 Implementación numérica en ONSAS	7
7	1.2 Aspectos de modelado estructural	11
8	1.2.1 Condiciones iniciales y de borde	11
9	1.2.2 Modelo de viento	11
10	1.2.3 Hipótesis de trabajo	15

Capítulo 1

Metodología

1.1. Aspectos de modelado computacional

1.1.1. Ecuación de equilibrio

En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámico con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta imprescindible formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis que subyacen a las expresiones postuladas en (Le2014). Por añadidura, se construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas \mathbf{f}_{int} , inerciales \mathbf{f}_{ine} y externas \mathbf{f}_{ext} . Este equilibrio es equivalente al postulado de PTV donde el incremento diferencial en la energía interna y cinética se debe a un trabajo externo. La Ecuación de balance (1.1) debe satisfacerse para todo instante temporal, en particular para $t + \Delta_t$. Dadas determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: el desplazamientos $\mathbf{d}(t + \Delta_t)$, las velocidades $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$. Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente de manera exacta en la Ecuación (1.1).

$$\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t)) - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)) = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

1 Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables constru-
 2 yen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta.
 3 El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecua-
 4 ción a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como
 5 consecuencia que la Ecuación (1.1) ya no será nula sino igual a un resto \mathbf{r} . A su
 6 vez, tal y como se detalla en las Ecuaciones (1.2) y (1.3), los métodos numéricos
 7 para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de aceleración
 8 y velocidad en función de los desplazamientos. Por lo tanto indirectamente,
 9 el vector resto depende unicamente de dicha magnitud. Para diferenciar las
 10 variables aproximadas de las exactas, se introduce la siguiente nomenclatura:
 11 $(\mathbf{d}(t + \Delta_t) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_t})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ y $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$.

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_v(\mathbf{d}_t) \quad (1.2)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_a(\mathbf{d}_t) \quad (1.3)$$

12 Según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, se buscan las apro-
 13 ximaciones cinemáticas tal que el residuo para un instante $t + \Delta_t$ sea próximo
 14 al vector nulo. Esto se expresa matemáticamente en Ecuación (1.4).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) = & (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) + \dots \\
 & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

15 Por otro lado, según el método
 16 de N-R presentado en **quarteroni2010numerical** es posible construir una
 17 sucesión iterativa en k , de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se
 18 acerque al nulo. Para aplicar esto se utiliza el teorema de Taylor aplicado a la
 19 función resto, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}|_k \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

20 Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena apli-
 21 cada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas
 22 en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se

1 presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}\end{aligned}\quad (1.6)$$

2 En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar
3 las derivadas de la función residuo respecto de: desplazamientos, velocidades
4 y aceleraciones. Estas son las matrices tangentes \mathbf{K}_g \mathbf{M} y \mathbf{C}_k descritas en la
5 Sección ???. Incorporándolas se llega a:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \right|_k = \left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k \quad (1.7)$$

6 Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (1.7) de N-R se halla el
7 paso en desplazamientos en $k + 1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}$.
8 Matemáticamente:

$$\left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k)) = \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (1.8)$$

9 Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de reso-
10 lución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones F_a y F_v . Para
11 esto se implementó el Método de HHT presentado a continuación en La sección
12 1.1.2.

13 1.1.2. Resolución numérica mediante HHT

14 Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algorit-
15 mo de Newmark presentado en **newmark1959method**. Según el artículo
16 **hilber1977improved** el método de HHT, es incondicionalmente estable pa-
17 ra la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica
18 que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la
19 convergencia numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan
20 representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la
21 energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Comple-
22 mentario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas,
23 sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (**hilber1977improved**) se compara el método de HHT con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser: el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark:. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en **Le2014**, resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

Para este abordaje inicialmente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Se presentan entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark α y β para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones de actualización para el instante $t + \Delta_T$ se escriben:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{y}}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) (\ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t)\end{aligned}$$

Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros α_{NW} y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT} . Esto se realiza mediante las Ecuaciones (1.11) y (1.12). En estas funciones, es posible notar las equivalencias, parentescos y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$ se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (1.11)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (1.12)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro α_{HHT} y el incremento Δ_T ente dos tiempos consecutivos t y $t + \Delta_t$.

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \quad (1.14)$$

1 A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales,
 2 las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este
 3 tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. Es por esto, que los
 4 vector de velocidades y aceleraciones angulares para el paso $k+1$, en el instante
 5 $t + \Delta_t$, deben calcularse según las Ecuaciones (1.15) y (1.16) presentadas en la
 6 referencias (ibrahimbegovic1998finite) y (ibrahimbegovic2002energy).

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} \left[\frac{\alpha}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}} \theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} + \frac{(\beta - 0.5\alpha) \Delta_{\mathbf{t}}}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} \right] \quad (1.15)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} \left[\frac{1}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}^2} \theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} - \frac{1}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} \right] \quad (1.16)$$

7 En las Ecuaciones (1.15) y (1.16) la transformación $\Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}$ es la composición
 8 de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} = \exp(\widetilde{\theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}}) = \mathbf{R}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} (\mathbf{R}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{g}})^{\mathbf{T}} \quad (1.17)$$

9 Un procedimiento análogo al de las funciones angulares se aplican a las
 10 lineales. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones
 11 expresadas en (1.15) y (1.16).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (1.19)$$

12 Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones
 13 (1.18), (1.19), (1.13) y (1.14) al definir convenientemente la matriz $\mathbf{B}_{\mathbf{t}}$. En
 14 función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclaracio-
 15 nes globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas
 16 relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta_t}^g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{2,t+\Delta_t}^g) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (1.21)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (1.22)$$

Al escindir las Ecuaciones (1.21) y (1.22) se identifican las funciones F_a y F_v de la sección 1.1.1. Estas relaciones matemáticas deben de integrarse a la Ecuación linealizada de equilibrio (1.8) para obtener el incremento en k que permita conocer el vector desplazamientos en el paso $k + 1$ para el instante $t + \Delta_T$. Finalmente, eso se plantea en la Ecuación (1.23).

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) = - \left(\mathbf{K}_g + \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \right) \mathbf{M} \mathbf{B}_t + \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \right) \mathbf{C}_k \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (1.23)$$

Se aclara que para despejar la Ecuación (1.23) anterior, la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las matrices que la integran (de masa, centrifuga y tangente). Las matrices tangentes fueron simetrizadas .artificialmentecomose aclaró anteriormente, manteniendo el orden de convergencia de N-R. Las matrices centrifugas y de masa devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros α_{HHT} son menores a uno, en general en el intervalo $[-0.1; 0.1]$, la suma de esta matrices suele ser definidas positivas. Por lo que \mathbf{K}_{tot} será invertible. Por último es importante esclarecer que para este trabajo, si bien se consideraron las funciones de actualización angulares para los incrementos, el angulo se sumo de forma aditiva. Lo cual es una hipótesis inconsciente que diverge de lo postulado en la bibliografía consultada.

1.1.3. Implementación numérica en ONSAS

En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el software: *An Open Non Linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Este código de carácter abierto y se desarrolló de forma general integrando distintos elementos, materiales y geometrías dentro del mismo modelo. Además permite resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código abierto *Paraview* difundido en (ahrens2005paraview).

Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser pionero de la formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en los trabajos (Battini2002) (Le2014), sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable. A continuación en ?? se detalla un pseudo-código panorámico sobre el esqueleto ejecutado en ONSAS.

En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo. Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite incrementar la variable temporal en pasos de Δt . Además debe evaluar los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de \mathbf{f}_{ext} . Para resolver el estado del sistema en el tiempo $t + \Delta T$, hace falta resolver la ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (1.4). Con este cometido, se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo ?? se omitió la notación en $t + \Delta T$ para simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramente el cálculo del incremento que determina el paso $k + 1$, a partir de los desplazamientos en el paso actual k . Luego se actualizan las variables cinemáticas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza mientras que la variable booleana `finDisp` sea nula. La alteración de estado, se encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos tol_u , en vector de fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter} . Las

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta_T, \alpha_{HHT}$

Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$

Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$

while $t < t_f$ **do**

finDisp = 0

Definir: $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$.

Evaluar $\mathbf{f}_{\text{ext}, t+\Delta t}$

while FinDisp = 0 **do**

Calcular fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$ y $\text{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$.

Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K}_g^k, \mathbf{M}^k, \mathbf{C}_k^k$.

Despejar $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$

Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$

Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$.

Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$.

Ensamblar velocidades: $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$

Ensamblar aceleraciones: $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$

Actualizar fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$ y $\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})$.

Calcular:

if $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\| \vee \|\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\| \vee k \geq \max_{iter}$
then

finDisp = 1

end if

end while

Actualizar $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}$.

$t = t + \Delta_T$

end while

1 primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese
2 tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas
3 desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la
4 variable `finDisp` alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor
5 del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

6 Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante
7 profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices
8 dinámicas tangentes. Este código se agregó a [ONSAS](#) procurando su versatili-
9 dad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden
10 al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo
11 pseudocódigo de la función [elementbeamforces.m](#) implementada.

12 El diagrama presentado en el Pseudocódigo [??](#), puede dividirse en tres divi-
13 siones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo
14 constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matri-
15 ces de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y defor-
16 mada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las
17 fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de
18 la función [beamLocalStaticForces](#). Desafortunadamente, tanto entradas como
19 salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas loca-
20 les. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos
21 locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego
22 integrarlas al código general expuesto en [??](#).

23 De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de
24 fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las
25 expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas
26 están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia x en la configuración
27 de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie
28 de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

29 Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector
30 de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadra-
31 tura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último,
32 los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas,
33 como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices
34 de todo el sistema en coordenadas globales.

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$ E ν G \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{d}_g^e
for 1 **to** N_{elem} **do**
 Separar vector desplazamientos $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$
 —————Cálculo de matrices de rotación—————
 Computar matrices de rotación global \mathbf{R}_g^1 y \mathbf{R}_g^2
 Evaluar matriz de rotación de referencia \mathbf{R}_o
 Hallar \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q} y calcular \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 .
 Evaluar matriz de rotación rígida \mathbf{R}_r
 Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$
 ————— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente —————
 Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$
 Invertir \mathbf{R}_i y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_i$.
 Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$ y matriz tangente local $\mathbf{K}_T^{\text{loc}}$.
 Construir matrices auxiliares: \mathbf{H} \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{r}
 Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K}_T^g \leftarrow \mathbf{K}_T^{\text{loc}}$ y $\mathbf{f}_{int}^g \leftarrow \mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$.
 ————— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas —————
 Todas las variables dependen de la coordenada (\mathbf{x})
 Definir funciones de interpolación N_i
 Calcular matrices: $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$, \mathbf{P}_2 , \mathbf{N} y \mathbf{H}_1 .
 Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$
 Calcular matrices auxiliares: \mathbf{H}_1 , $\dot{\mathbf{H}}_1$, \mathbf{H}_2 , $\dot{\mathbf{H}}_2$, \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .
 Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.
 Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$
 Hallar expresiones e integrar en el elemento: \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} y \mathbf{C}_k
 Ensamblar : \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} , \mathbf{C}_k \mathbf{K}_T^g \mathbf{f}_{int}^g
end for

1.2. Aspectos de modelado estructural

1.2.1. Condiciones iniciales y de borde

1.2.2. Modelo de viento

Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuerzas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift). Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes, en la capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo. Y luego proyectarla la fuerza neta en la dirección del flujo medio. A diferencia de estas, las fuerzas lift que aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones entre el intradós (sona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones puntales entre dos superficies contrarias, genera una circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en curva cerrada, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura ?? . Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la competente de lift es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, garantiza que la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas entre las superficies del sólido.

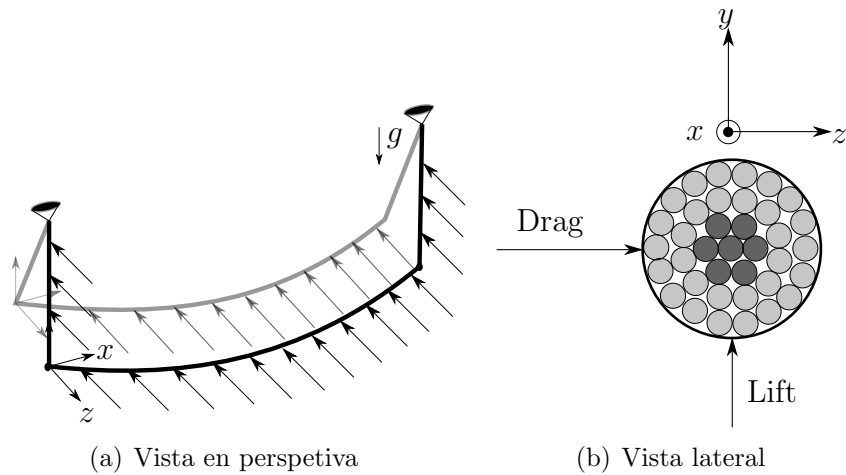


Figura 1.1: Ilustración del viento y sus efectos.

La componente unidireccional del flujo, puede ser desglosada en un termino medido y otro fluctuante $u_v(z, t) = u_m(z, t) + u'(z, t)$. A partir de esto, la

1 velocidad media para un período T toma la expresión de la Ecuación (1.24):

$$u_m(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u_v(t) dt \quad (1.24)$$

2 El valor del periodo T debe ajustarse minimizando la desviación estándar
3 asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la
4 desviación estándar de la velocidad fluctuante y la media para un instante de
5 tiempo dado. Sin embargo, para este trabajo no se consideran las fluctuaciones
6 debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de $T = 1/30$ s
7 y de velocidad media, se extrajo del artículo (**stengel2017measurements**).

8 Considerando el aire como un fluido no newtoneano, ρ su densidad asociada
9 a determinada temperatura, C_d el coeficiente de drag para como función del
10 número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo (“drag”)
11 para un elemento cilíndrico de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la Ex-
12 presión (1.25):

$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{\rho(T)C_d(Re)}{2} d_c u_m(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c u_m(t)^2 l_e \quad (1.25)$$

13 Para este cálculo se asumió constantes las magnitudes al interior del ele-
14 mento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto
15 del integrando por el largo del intervalo. Además se para este trabajo la car-
16 ga del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente
17 a la mitad de F_v . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos
18 nodales que estas inducen, se cancelan con los elementos aledaños. Por otra
19 parte, los valores de C_d se extrajeron de las referencias (**Foti2016**) y se ve-
20 rificaron con el estudio para estos coeficientes durante tormentas conectivas
21 (**mara2007effects**). La densidad ρ del aire se consideró la usual para presión
22 atmosférica y una temperatura de 20 °C.

23 1.2.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas aso- 24 ciadas.

25 En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No
26 obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortigua-
27 miento introducido. Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde
28 el viento tiene determinada componente transversal según z y perpendicular
29 (según y). En la figura 1.2 se indican con el nombre u y v . En esta figura las

1 velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tan-
2 to absoluto. Asimismo en esta imagen se representan las velocidades media
3 y fluctuante u_m y u_a , que sumada a la velocidad v , resulta en el vector V_{tot}
4 formando un ángulo β con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce
5 sobre el conductor, este despliega una determinada velocidad rígida en ambas
6 direcciones identificadas con las letras W_{ry} y W_{rz} .

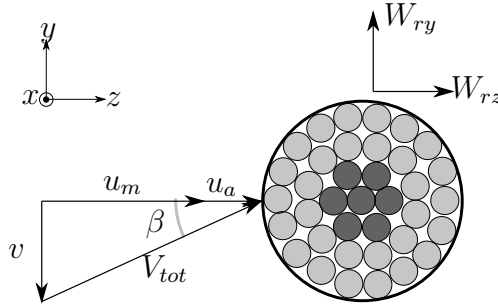


Figura 1.2: Esquema en sistema de referencias absoluto.

7 Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia
8 anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las
9 velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 1.3. Este campo
10 de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de drag F_d y de lift F_l .
11 Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando dos
12 fuerzas F_z y F_y .

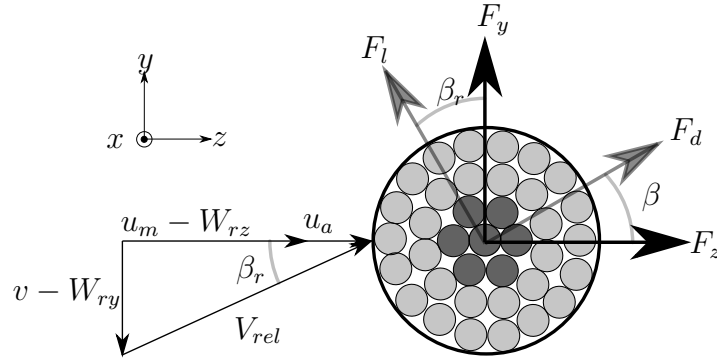


Figura 1.3: Esquema en sistema de referencias relativo.

13 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde
14 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta
15 natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y
16 dinámicas. La velocidad relativa absoluta, es el cuadrado de los catetos, tal
17 y como se expresa en la Ecuación (1.26). Tomando como hipótesis que las

1 velocidades relativas del rígido y la componente vertical v , son mucho menores
2 que las asociada al flujo medio, en el sentido de z se deduce la Ecuación (1.27).

$$V_{rel}^2 = (u_m + u_a - W_{rx})^2 + (v - W_{ry})^2 \quad (1.26)$$

$$\frac{V_{rel}^2}{u_m} = u_m + 2(u_a - W_{rz}) \quad (1.27)$$

3 La carga de drag postulada en la Ecuación (1.24) se escribe por unidad de
4 longitud y se reescribe en (1.29). Además, se muestra que para las asunciones
5 de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a 0° . Para
6 formular esto matemáticamente se plantean las Ecuaciones (1.29) y (1.28).

$$\tan(\beta) = \frac{v - W_{ry}}{u_m - W_{rz} + u_a} = \frac{\frac{v - W_{ry}}{u_m}}{1 - \frac{W_{rz} + u_a}{u_m}} \approx 0 \quad (1.28)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m + 2(u_a - W_{rz})) u_m \quad (1.29)$$

7 Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes
8 z e y . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas
9 absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de estas
10 se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido.
11 Considerando que el ángulo β es ínfimo y por lo tanto $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$ y
12 $\cos(\beta) = 1$ al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + u_a^2 - 2u_a u_m) \cos(\beta_r) \quad (1.30)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + u_a^2 + 2u_a u_m) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (1.31)$$

13 Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en
14 componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es una
15 promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo,
16 se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes
17 tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un
18 tercer termino surge al desarrollar la Ecuación (1.29). Este factor depende del
19 producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Vinculando al fluido
20 y al sólido, es por esto que recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico.

1 Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sporepresivo el sentido de
2 esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición
3 de fuerzas según z se le llaman \bar{F}_x , F_a , $-D$ a la componente media, alternante
4 y de amortiguamiento dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan
5 a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2) \quad (1.32)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_a^2) \quad (1.33)$$

$$D = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2u_a u_m) \quad (1.34)$$

6 1.2.3. Hipótesis de trabajo

7 Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos se postulan las
8 premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones
9 de la metodología sobre el modelado de viento. Este no es eje central de la
10 investigación, sino la implementación estructural y su modelado. Dicho esto se
11 establecen las hipótesis del modelo y sus implicancias:

- 12 1. No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
- 13 2. La velocidad incide en el sentido z de forma perpendicular a la linea.
- 14 3. La velocidad relativa transversal $v - W_r y$ al igual que la componente
15 alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el
16 sentido de z llamada u_m .
- 17 4. La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera
18 despreciable frente al drag.
- 19 5. Para la fuerza en el sentido de z se desprecia la componente fluctuante
20 F_a .
- 21 6. Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico se promedió la velocidad
22 media en un valor constante igual al valor medio para todo el dominio
23 temporal de simulación.

24 El primer supuesto parte del modelo figurado en 1.3, para poder realizar
25 este análisis plano se obvian las fluctuaciones espaciales en el sentido axial
26 del conductor. Esta asunción no es del todo correcta, pues la turbulencia del

1 fenómeno hace fluctuar las cargas a lo largo del cable, también así su orienta-
2 ción. Esto se asocia directamente con la hipótesis 4, donde la fuerza alternante,
3 que proviene de la presencia de vórtices, se desprecia.

4 Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje z en la
5 Figura ??, siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipóte-
6 sis proviene de diferentes trabajos publicados donde la componente perpen-
7 dicular a la superficie terrestre o ascendente suele ser significativamente me-
8 nor a la paralela (**duranona2009analysis**) (**stengel2017measurements**)
9 **yang2016nonlinear**. Si bien simplifica, es conservadora ya que supone al
10 sistema de transmisión, en el tiempo inicial, dispuesto completamente perpen-
11 dicular al sentido del viento, es así que el viento descarga su mayor fuerza sobre
12 el sistema (Hipótesis 2).

13 Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad
14 de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis se sustenta en la
15 mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del el
16 peso que se opone a la fuerza de sustentación. De todos modos, esta fuerza en
17 sentido ascendente se despreció frente al drag, consecuencia de la simetría de
18 revolución tangencial del conductor. Esto se describe en la Hipótesis 4.

19 Otra hipótesis a clarificar refiere al amortiguamiento aerodinámico (Hipóte-
20 sis 6) se utilizó una simplificación adicional en la velocidad de viento para su
21 cálculo. Se utilizó una velocidad promedio de viento en todo el dominio tem-
22 poral para el cálculo de D en ecuación (1.34).

23 Por último se explicitan las premisas 3 y 5 que fueron consideradas para
24 calcular el campo de velocidades relativo y sus fuerzas asociadas.