

2 Implementación de una formulación  
3 corrotacional en dinámica no lineal y  
4 aplicación al modelado de líneas de  
5 transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural Instituto de Estructuras y

Transporte

Instituto de Ingeniería Mecánica y Producción Industrial

Universidad de la República

Montevideo – Uruguay

Febrero de 2021

# 1 Tabla de contenidos

2	<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
3	1.0.1	Motivación . . . . .	1
4	1.0.2	Enfoque . . . . .	1
5	1.0.3	Estructura . . . . .	1
6	<b>2</b>	<b>Estado del arte</b>	<b>2</b>
7	2.1	Historia de la temática . . . . .	2
8	2.2	Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión	
9		eléctrica . . . . .	5
10	2.3	Tormentas convectivas . . . . .	7
11	2.4	Análisis semi-analíticos de conductores . . . . .	9
12	2.5	Análisis corrotacional de vigas . . . . .	12
13	<b>3</b>	<b>Preliminares</b>	<b>16</b>
14	3.1	Formulación corrotacional . . . . .	16
15	3.1.1	Cinemática corrotacional . . . . .	16
16	3.1.2	Formulación local . . . . .	24
17	3.1.3	Dinámica corrotacional . . . . .	29
18	<b>4</b>	<b>Metodología</b>	<b>34</b>
19	4.1	Aspectos de modelado computacional . . . . .	34
20	4.1.1	Ecuación de equilibrio . . . . .	34
21	4.1.2	Resolución numérica mediante HHT . . . . .	36
22	4.1.3	Implementación numérica en ONSAS . . . . .	40
23	4.2	Aspectos de modelado estructural . . . . .	44
24	4.2.1	Condiciones iniciales y de borde . . . . .	44
25	4.2.2	Modelo de viento . . . . .	45
26	4.2.3	Hipótesis de trabajo . . . . .	50

1	<b>5 Resultados numéricos</b>	<b>52</b>
2	5.1 Vigas en voladizo con ángulo recto . . . . .	52
3	5.2 Modelo simplificado de una linea . . . . .	58
4	5.3 Sistema de transmisión eléctrica . . . . .	64
5	<b>6 Consideraciones finales</b>	<b>72</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.0.1. Motivación

Las líneas eléctricas de transmisión son frecuentemente afectadas por eventos climáticos severos como vientos o nevadas. Estos eventos pueden provocar la desconexión de la línea, con consecuencias potencialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de desconexión por vientos extremos en una de las principales líneas de Uruguay. Esto plantea la necesidad de contar con herramientas que permitan predecir estos eventos, garantizando así un suministro continuo. Dadas las características particulares de los vientos en la región, las soluciones empleadas en otros países no necesariamente son aplicables.

### 1.0.2. Enfoque

### 1.0.3. Estructura

# Capítulo 2

## Estado del arte

1 Este capítulo incluye la revisión de la literatura, de los enfoques, teorías o  
2 conceptos pertinentes en que se fundamenta la investigación. Primeramente en  
3 la Sección 2.1 se presenta un relato cronológico del estudio de los cables desde  
4 el crepúsculo del Siglo XVIII. A continuación en la Sección 2.2 se expone  
5 un recorrido a partir de los años 60's vinculado a simulaciones aplicadas a  
6 conductores de alta tensión. Consecutivamente en la Sección 2.3 se describen  
7 los fenómenos de corrientes descendentes que afectan las líneas a partir de  
8 trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas y otros fenómenos de  
9 viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades aeroelásticas numerosos  
10 trabajos han estudiado dicha temática y un breve recorrido por ellos se presenta  
11 en el apartado 2.4. Por último, en la Sección 2.5 se recorre la metodología  
12 corrotacional y los principales autores que desarrollaron esta formulación.

### 13 2.1. Historia de la temática

14 El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados  
15 por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena  
16 del libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el  
17 1657 revolucionó el conocimiento científico en occidente, tal es así que un siglo  
18 y medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino  
19 en la aplicación de las principales invenciones de la revolución industrial.

20 El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas  
21 de la época, Brook Taylor, d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron  
22 las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al

1 sistema masa resorte en los albores del siglo XVII (**Starossek1991**).

2 Haciendo uso del problema abstracto elemental del oscilador masa resorte  
3 en 1788 Lagrange y otros autores anteriores, hallaron la solución para las vibra-  
4 ciones de un cable inextensible compuesto de un número finito de elementos,  
5 de masa despreciable, sometido a la acción de fuerzas externas. Posteriormente,  
6 Poisson en 1820 presentó la ecuación diferencial que debería de cumplir el  
7 sistema en el continuo, sin embargo las herramientas matemáticas analíticas  
8 desarrolladas hasta la fecha no permitían de hallar la solución general a dicha  
9 ecuación. (**Irvine1974**)

10 No fue hasta 80 años mas tarde que en 1868 Routh presentó una solu-  
11 ción exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva que  
12 describe un punto sobre una esfera girando a velocidad angular constante)  
13 **Routh1955**. En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del  
14 cable, el primero en su época fue Kloppel y Lie (**Kloppel1942**), a partir de  
15 esto Pugsley en 1949 determinó experimentalmente, para una relación entre la  
16 deflexión y el largo de vano entre 4 y 10 metros, desarrolló una fórmula para  
17 las frecuencias naturales de vibración (**Pugsley1949**). En 1953 considerando  
18 un cable inextensible Saxon y Cahn resolvieron la expresión teórica, formulada  
19 por Poisson, de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue vital, ya  
20 que permitía calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos  
21 torres **Saxon1953**.

22 Tal es así que seguridad de las personas e integridad de los distintos ele-  
23 mentos circundantes imprimen criterios de seguridad sobre el descenso de la  
24 línea. Actualmente la tensión del conductor durante el montaje, se ajusta de  
25 manera tal, que la altura mínima respete un valor exigido por norma. Esta  
26 imposición depende principalmente del grado de urbanización, los umbrales de  
27 contaminación magnética y la topografía del terreno.

28 A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles,  
29 las frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los de  
30 un sistema masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. En el año 1974  
31 **Irvine1974** halló el rango transitorio entre ambos estados, para corregir dicha  
32 discontinuidad se requiere una inclusión completa del modelo de elasticidad del  
33 cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables horizontales  
34 (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio deflexión-largo  
35 del vano entre  $1/8$  y 0. El mismo autor Irvine extendió lo postulado para  
36 conductores con extremos desnivelados, aun bajo la hipótesis de que el peso se

1 aplicaba perpendicular al conductor (**Irvine1974**).

2 A posteriori, el mismo investigador profundizó sobre la dinámica con ex-  
3 tremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movimiento  
4 tipo terremoto (**Irvine1976**) y (**Irvine1978**). La teoría postulada por Irvi-  
5 ne fue confirmada por Triafani en 1984 para distintos casos experimentales,  
6 considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando en cuenta las  
7 componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al movimiento  
8 **Triantafyllou1984**.

9 Autores contemporáneos estudiaron en simultaneo condiciones de borde  
10 dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de solicitaciones pueden inducir  
11 vibraciones y respuestas de resonancia. Los pioneros en la materia fueron Da-  
12 venport y Steels ((**Davenport1965**)) en 1965. Resultados más refinados se  
13 obtienen por Velastos ((**Veletsos1983**)) y Starossek (**Starossek1991**) . En  
14 estas se exponen formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los  
15 cables sometidos a la acción del viento, mas estos trabajos no se desarrollan  
16 contemplando grandes desplazamientos ni tampoco se consideró no linealidad  
17 material.

18 Ese tipo de solicitaciones revelaron el fenómeno de “Galloping”, este re-  
19 fiere a una respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del  
20 cable entra en régimen y en consonancia con las fuerzas ejercidas por el viento.  
21 Teóricamente las geometrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de  
22 fenómenos. Sin embargo, debido a la existencia de imperfecciones constrictivas  
23 y durante el montaje, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte  
24 de energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respues-  
25 ta se realizaron por Simu, quienes hallaron condiciones de velocidad crítica  
26 eólica en función de coeficientes experimentales, obtenidos mediante ensayos  
27 consumados en túnel de viento. (**Simiu1986**)

28 Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al pro-  
29 blema de conductores eléctricos. El advenimiento del Método de Elementos  
30 Finitos (MEF) aplicado a armaduras en la década del 40 y 50 constituyó una  
31 herramienta sumamente potente e innovadora. Esto provocó que en los años ve-  
32 nideros se desarrollaran vastas metodologías numéricas incorporando diferentes  
33 elementos y algoritmos de resolución computacional. En particular, en Italia un  
34 grupo de investigadores pertenecientes a La Universidad de Milan, aplicaron  
35 métodos numéricos a la simulación de conductores insoslayables. Un recorrido  
36 cronológico y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos científicos se

1 presenta a continuación en la Sección [2.2](#).

## 2 2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a con- 3 ductores de transmisión eléctrica

4 Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo por  
5 Di Pilatto y Martinelli estaban basados en elementos trinodales isoparamétricos.  
6 En esta metodología se asumió las hipótesis de pequeñas deformaciones  
7 unitarias, considerandose para el desarrollo no linealidades geométricas de-  
8 bido a grandes desplazamientos. No obstante, cuando las rotaciones de los  
9 elementos alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan  
10 limitaciones para la representación y captura de la orientación del sistema.  
11 Además, este tipo de modelos presenta la debilidad de no satisfacer las condi-  
12 ción de equilibrio dinámico para específicos tipos de balanceo. (**Martinelli2001**  
13 y **Martinelli2004**). En consonancia, estudios contemporáneos evidenciaban  
14 que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que des-  
15 preciar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predic-  
16 ciones erróneas sobre las frecuencias naturales de mayor orden. Tal y como se  
17 remarca en **koh2004dynamic**.

18 Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007.  
19 En este trabajo el cable se modelaba utilizando abordajes corrotacionales. Di  
20 Pillato presentó una formulación considerando elementos de viga tridimen-  
21 sionales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e iner-  
22 ciales teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones en coorde-  
23 nadas globales. Sin embargo, esta formulación basada en lo propuesto por  
24 (**oran1973tangent**) tiene como desventaja principal que no es fiable ante  
25 grandes rotaciones locales de los nodos, como también, antes significativos  
26 incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente  
27 para capturar dinámicas complejas resulta necesario e ineludible discretizar  
28 el dominio temporal y especial pequeños intervalos. Lo que conlleva a costos  
29 computacionales desmedidos.

30 El mismo autor y su equipo corrigieron las limitaciones relaciona-  
31 das con los pequeñas rotaciones nodales al año siguiente en su trabajo:  
32 **di2008corotational**. La solución consiste en localizar las coordenadas nodales  
33 en la configuración deformada utilizando el teorema de ángulos de Euler. En



1 este marco el impedimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos  
2 de carga, se resuelve aplicando la metodología propuesta Simo and Vu-Quoc  
3 en **simo1988dynamics**.

4 Conforme las simulaciones numéricas avanzaron sobre la materia, la espe-  
5 cificación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó.  
6 Otro aspecto impulsor en el área se basaba en que los resultados experimen-  
7 tales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para  
8 grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y  
9 geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos so-  
10 bre el comportamiento no holomónico del fenómeno. Esto refiere a un modeló  
11 realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción  
12 entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha  
13 temática fueron Papailiou y Kutterer en sus trabajos de la década del noventa  
14 **Papailiou1997** y **Kutterer1992**.

15 Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos  
16 escenarios, “full slip” donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento  
17 relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas.  
18 El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre  
19 ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre  
20 de “full stick”. En esta situación el conjunto se comporta como un rígido, he  
21 aquí la razón de su nomenclatura. En **Papailiou1997** se establece la tensión  
22 máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones  
23 de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. Estos  
24 resultados fueron contrastados con un análisis experimental.

25 Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones se traducen  
26 en momentos y fuerzas internas a cada cable que conforma al conductor. Estas  
27 se pueden vincular a la curvatura o deformación axial del conjunto. A partir  
28 de esto, se obtiene la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y  
29 momentos internos en función de la deformación y curvatura del conductor.

30 Esta matriz depende del estado en que se encuentre la dinámica del cable.  
31 Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen “full slip.” “full-  
32 sitck” la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso “full-stick” cuando  
33 ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el conductor, la matriz  
34 de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente no se le puede atribuir un  
35 potencial, esto se asocia al comportamiento no holomónico o histéresis del  
36 fenómeno. En dicho estado un modelo de viga uniforme no es aplicable.

1        Con el propósito de desatollar una formulación que sea capaz de representar  
2 el fenómeno computacionalmente se publicó el artículo **Foti2016**. Aquí se im-  
3 plementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuerzas tangenciales  
4 y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter simplificado-  
5 ras son estudiadas en **costello1990average** y **rawlins2005flexure**. Para el  
6 estudio de a los contactos radiales se asume: las superficies de contacto no se  
7 deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de contacto entre  
8 cables se pueden aproximar por una línea continua, la fricción entre los cables  
9 se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último que la presión  
10 externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

11        Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjun-  
12 to con la condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores límites para  
13 la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El  
14 carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado  
15 sobre la pérdida de rigidez súbita que ocurre con el conductor, al producirse  
16 deslizamiento relativo al interior del elemento. Esta disminución abrupta de ri-  
17 gidez puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga,  
18 esto puede intensificar o agudizar la problemática de balanceos excesivos. Es-  
19 tos movimientos son inminentes para determinadas condiciones atmosféricas,  
20 entre ellos las tormentas convectivas. Estas corrientes descendentes han sido  
21 objeto de estudio en los últimos 50 años por expertos en ingeniería del viento.  
22 En la siguiente Sección se presenta una somera descripción de la literatura  
23 investigada.

## 24    2.3.    Tormentas convectivas

25        Las tormentas convectivas son fenómenos atmosféricos que generan inesta-  
26 bilidades en el flujo debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad.  
27 Cuando estas se ocasionan, masas de aire caliente ascienden hasta la parte su-  
28 perior de la nube, quedando depositado como una especie de domo o cúpula  
29 al interior de la misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al  
30 interior de la tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodea-  
31 ba por debajo. Esta corriente desciende a velocidades intensas e impacta con  
32 vehemencia sobre la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de  
33 anillo vorticoso que puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h  
34 **fujita1985downburst**. En este trabajo se establecen escalas espaciales entre

1 40 m y 4 km. No obstante recientes estudios plantean que se exhiban en un  
2 diámetro entre 1 y 5 km **darwish2010dynamic**.

3 Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de transmisión  
4 eléctrica, ciertas normativas se basan en perfiles de vientos clásicos (sinópti-  
5 cos) tipo capa límite atmosférica. Esto se traduce en una subestimación de las  
6 presiones que se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma IEC 60826.  
7 Esto pone en riesgo al sistema es atacado por tornados o corrientes descendien-  
8 tes. La probabilidad de ocurrencia es baja para dominios de corta longitud,  
9 pero cuando las líneas discurren largas distancias estos vientos extremos suelen  
10 suceder esporádicamente **ang1984probability**.

11 La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de  
12 daños vinculado a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores con-  
13 temporáneos el diámetro de desarrollo del anillo se encuentra intrínsecamen-  
14 te relacionadas con dicha altura **holmes2002re**, **abd2013coupled**. Com-  
15 plementando a esto, **stengel2017measurements** en Alemania capturó es-  
16 te fenómenos utilizando anemómetros colocados en líneas de transmisión. Esto  
17 permitió establecer un perfil de velocidades media y la función de coheren-  
18 cia relacionada con la turbulencia a partir de datos experimentales. De este  
19 artículo se extrajo el perfil de vientos implementado en este trabajo.

20 En nuestro país investigadores integrantes del Grupo de Eolo Dinámica  
21 perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante tormentas  
22 conectivas trabajo de campo exhaustivo. El primer informe relevado en el ar-  
23 tículo **duranona2009analysis** se realiza un cálculo del ángulo de balanceo,  
24 simplificando cuasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio  
25 de la fuerza de viento por unidad de peso. En este trabajo se mostró que para  
26 valores de velocidad de viento de 97.9 m/s el conductor alcanza los 85°.

27 Dados los alarmantes resultados de **duranona2009analysis** posteriormen-  
28 te se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha en el  
29 trabajo (**duranona2015significance**). En este estudio se atisba que fenóme-  
30 nos de corrientes descendentes producen mayores velocidades de ráfaga en  
31 10 minutos que los vientos tipo capa límite atmosférica. El valor máximo de  
32 velocidad registrado alcanzó los 40 m/s en promedio de 10 minutos. En el  
33 año 2019, este grupo de investigadores presentó un trabajo relevante donde  
34 se resalta que los vientos extremos afecta principalmente al norte del país  
35 **duranona2019first**. En este se sugiere que la norma (UNIT:50-84, 1984) de-  
36 be ser actualizada incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos no

1 sinópticos. Pero los eventos de vientos extremos no son los únicos que afec-  
2 tan a los conductores, también pueden ocurrir inestabilidades estructurales  
3 inherentes a interacción entre fluido-estructura.

## 4 2.4. Análisis semi-analíticos de conductores

5 Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire  
6 pueden experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran ampli-  
7 tud, principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido amplia-  
8 mente estudiada por distintos autores de la literatura. Como por ejemplo  
9 **blevins1990van, jones1992coupled**. Para vigas de gran esbeltez, o elemen-  
10 tos de cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto li-  
11 neales como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o  
12 dos grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consisten  
13 en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación  
14 intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal y verificar estos resultados  
15 en la práctica. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin  
16 simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática  
17 destaca el trabajo **chabart1998galloping**, en este se propuso una aproxima-  
18 ción innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser:  
19 la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en  
20 la fuerza lift ante la presencia de excentricidades geométricas.

21 El fenómeno Galloping presenta las frecuencias del movimiento excesivo  
22 suelen ser bajas y son exuberantes a simple vista. Este fenómeno devastador  
23 tiene consecuencias severas sobre todo en líneas que se encuentran en climas  
24 gélidos, recientemente en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur  
25 de Argentina y las imágenes son impactantes ([Ver vídeo](#)). La principal causa  
26 del fenómeno es el ataque de vientos intensos y constantes. La presencia de  
27 irregularidades geométricas en las líneas induce inestabilidades aerodinámicas  
28 y cuanto mayor sea la cantidad y discontinuidad de las excentricidades más  
29 aguda será la respuesta inducida. Las velocidades requeridas de viento suelen  
30 ser mayor a 7 m/s y las frecuencias de respuesta del conductor suelen oscilar  
31 entre los 0.15 y 1 Hz.

32 Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente apro-  
33 ximación de las líneas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separa-  
34 dores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, si los relativos

1 entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elemen-  
2 tos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la  
3 formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en  
4 inglés (Torsional Damper Detuner) gira relativo al conductor anulando las  
5 formas irregulares producto de la formación de hielo.

6 En el artículo **jones1992coupled** se halló la solución a la ecuación de  
7 movimiento, despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se pre-  
8 sentaron los autovalores que permiten detectar analíticamente bajo que condi-  
9 ciones del sistema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se  
10 desarrolló el estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas,  
11 deduciéndose un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significati-  
12 vamente mayor a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los  
13 excesivos e indeseables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar  
14 en el eje vertical. Esto amenaza la seguridad y fiabilidad del sistema ya que  
15 esta componente, es limitada durante la instalación a través de cálculos estáti-  
16 cos. Al generarse desplazamiento dinámicos desmedidos, ya no hay garantías  
17 de salvaguardar la salud de las personas y los componentes cercanos.

18 Los estudios de Jones y Blevins, se fraguaban en premisas de lineali-  
19 dad geométrica. Sin embargo, autores han destacado que los efectos no li-  
20 neales juegan un rol importante en el desarrollo, como ser: las referencias  
21 **luongo1984planar** y **lee1992nonlinear**. En el trabajo propuesto por Lee  
22 se incluyen componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramien-  
23 to del conductor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de  
24 un modelo lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y  
25 tercer orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numericamente  
26 la ecuación diferencial del movimiento.

27 Esta problemática fue abordada unos años mas tarde, por el trabajo publi-  
28 cado **luongo1998non**. En este artículo se hallaron las soluciones no lineales de  
29 resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se contrastaron  
30 dos soluciones arrojadas por disimiles modelos, uno de pequeños desplazamien-  
31 tos y otro incorporando no linealidades geométricas. En este trabajo se distin-  
32 guen dos regímenes del movimiento, el primero de ellos nominado crítico refiere  
33 a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos no presetan  
34 gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayectorias se ampli-  
35 fican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se concluye que la  
36 solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable para valores de

1 velocidad media de viento correspondiente al estado crítico. Posteriormente al  
2 incrementar la velocidad de viento y se desata el fenómeno post-crítico y el  
3 incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible para representar  
4 cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles simétricos, la velocidad  
5 crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis lineal.

6 Según los autores del trabajo **luongo2007linear**, hasta la fecha de publi-  
7 cación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la  
8 dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las  
9 fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos  
10 aplicados eran exiguos, en especial para el régimen post-crítico del Galloping.  
11 Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de ángulo de ata-  
12 que y velocidad relativa entre el conductor y del fuljo. Además eran desprecia-  
13 das las rigideces a torsión del los elementos, estos se debe a que la rigidez según  
14 el eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez flexional, principalmente por  
15 un argumento de esbeltez y disposición geométrica del conductor de estudio.

16 El propósito de **luongo2007linear** fue proponer un elemento de viga orien-  
17 tado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este a torsión.  
18 Estos términos representan diferencias notorias para secciones antisimétricas  
19 en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados numéri-  
20 cos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el objetivo de  
21 hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró, que el ángulo  
22 de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones críticas  
23 del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuenta los mo-  
24 dos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la inclusión  
25 del ángulo puede influir significativamente en el valor de velocidades críticas  
26 aeroelásticas.

27 A psoterirí, en el trabajo **luongo2009effect** se profundizó en los efectos  
28 del ángulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la  
29 formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como  
30 destacado resultado, se probó que mientras la rigidez de torsional no afecta  
31 significativamente los desplazamientos traslacionales, en cortaste si lo hace a  
32 la solución del ángulo de giro. En especial para perfiles sin simetría de revolu-  
33 ción. La consideración del balanceo en el lift y en el ángulo de ataque, afecta  
34 notoriamente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades  
35 de la sección aerodinámica y por tanto su velocidades críticas. Por ende, se  
36 resalta la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas

1 para el modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

## 2 2.5. Análisis corrotacional de vigas

3 Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplica-  
4 ciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos  
5 y terrestres. A pesar de las formulaciones “ Updated ”(UL) y “Total Lagran-  
6 gian”(TL) clásicas, dentro de estas últimas el abordaje corrotacional es idóneo  
7 para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir  
8 términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamien-  
9 tos den servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de  
10 esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de  
11 **Nour-Omid1991** quienes sentaron las bases del método.

12 Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del  
13 elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente considerándolo como un  
14 rígido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente  
15 rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario que permite locali-  
16 zar al elemento en el espacio. Mientras que 0 para la componente deformable se  
17 considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo siste-  
18 ma de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la  
19 propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones loca-  
20 les. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente. Además,  
21 destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento  
22 representa términos de no linealidades geométricas mientras que la deformables  
23 incorpora no linealidad materiales.

24 El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se  
25 calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La varia-  
26 ción de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz  
27 tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a  
28 esta propiedad anti-simétrica, esta característica depende principalmente del  
29 des-balanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades  
30 anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales  
31 al resolver el sistema mediante métodos numéricos como Newton Raphson(N-  
32 R). Los autores **Nour-Omid1991** con el objetivo de optimizar el método,  
33 demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de  
34 convergencia cuadrático.

1 Debido a voluble capacidad de la metodología corrotacional, en los años  
2 posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de ele-  
3 mentos y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron al  
4 considerar funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentra-  
5 da y elementos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener  
6 de manera sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inercia-  
7 les. Como habrá notado el sagaz lector, este cálculo conduce ineludiblemente  
8 a la matriz de masa constante de Timoshenko. Por otra parte, interpolaciones  
9 lineales asumen que los desplazamientos transversales al eje de la viga son nu-  
10 los, esta hipótesis reduce el campo de aplicación del modelo, en especial para  
11 mallas de bajo numero de elementos, ya que la matriz de masa tangente y el  
12 vector de fuerzas inerciales no representan las componentes omitidas.

13 En la referencia **Crisfield** se sugiere que el proceso de obtención requerido  
14 para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado intrincado, de-  
15 bido a su grado de complejidad geométrico. El autor propone utilizar funciones  
16 de interpretación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al elemento de Ber-  
17 noulli. Este tipo de soluciones resultan controversiales a la hora de derivar el  
18 vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consideró un modelo  
19 simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones cúbicas para el  
20 vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una matriz de masa  
21 constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero numéricamente  
22 eficiente. Esta forma de proceder también se aplico en **pacoste1997beam**.

23 En paralelo otros autores, desarrollaron eficientes elementos de vi-  
24 ga bidimensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar es-  
25 tructuras en grandes desplazamientos bajo cargas estáticas (**Battini2002**  
26 **alsafadie2010corotational**). Estos autores afirman que al seleccionar ade-  
27 cuadamente el largo de elemento, los desplazamientos locales son significati-  
28 vamente menores que los asociados a la componente rígida. Por esta razón,  
29 se compararon resultados con diferentes número y tipos de elementos pa-  
30 ra los mismos ejemplos. Estos estudios, en conjunto con lo publicado por  
31 **alsafadie2010corotational**, concluyen que formulaciones cúbicas son más  
32 eficaces y precisas que las lineales bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos  
33 sentaron las bases para la extensión analítica hacia las componentes dinámicas.

34 Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos  
35 años. El primero de ellos fue **behdinan1998co** a finales de siglo, pero las  
36 funciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no



1 eran consistente con la formulación canónica del método corrotacional pro-  
2 puesta por **simo1988dynamics**. De hecho, según el conocimiento del autor,  
3 no existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación  
4 consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna  
5 sino también, las componentes inerciales.

6 Años mas tarde, **Le2011** publicaron una formulación para vigas 2D imple-  
7 mentando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación indepen-  
8 diente "IE" de la referencia **reddy1997locking**. Estos elementos fueron desa-  
9 rrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz  
10 tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basa-  
11 das en los polinomios de Hermitian, con el propósito de incluir consideraciones  
12 adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es  
13 una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y  
14 su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algu-  
15 nas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además  
16 se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la li-  
17 teratura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta  
18 nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir  
19 significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor  
20 precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los  
21 desplazamientos locales.

22 Los mismos autores en conjunto con Lee extendieron la formulación en  
23 su trabajo del 2014 **Le2014** agregando una dimensión, este desarrollo se vio  
24 dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmuta-  
25 tiviad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensables a  
26 la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo, se  
27 presenta la parte estática desarrollada por Battini en **Battini2002**, además  
28 de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuerzas inerciales y  
29 su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para las deformaciones  
30 angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se selecciono el clásico  
31 método Hughes, Hilbert y Taylor (HHT) con los parámetros convencionales  
32 (**hilber1977improved**). Este algoritmo es utilizado por reconocidos softwa-  
33 re comerciales (Abaqus,Lusas) e implica una disipación sobre la energía total  
34 del sistema para frecuencias de oscilación altas, mas presenta como ventaja la  
35 estabilidad para grandes incrementos temporales.

36 En **Le2014** se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar la

1 nueva formulación con otros dos enfoques. La primer comparación, se deriva de  
2 la nueva formulación reemplazando las intercalaciones cúbicas por lineales. El  
3 segundo enfoque es el TL clásico propuesto por **simo1988dynamics**. En base  
4 a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones: todas  
5 las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no así  
6 con mayados gruesos. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y  
7 Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente mas imprecisas en  
8 comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo  
9 computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el  
10 modelo. La formulación corrotacional es ligeramente mas lento (12 %) respecto  
11 a lo descrito por Simo and Vu-Quoc . Sin embargo, bajo ciertas condiciones  
12 altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación  
13 innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo.

14 Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos  
15 campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo  
16 es un atractivo para distintos investigadores del área. En **albino2018co** Al-  
17 bino modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por materiales  
18 graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta mar. En 2019  
19 **asadi2019multibody** simularon palas de aerogeneradores utilizando elemen-  
20 tos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas el tren de  
21 transmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala. En el mismo año  
22 el autor **barzanooni2018modeling** atacó la problemática de anillos y inter-  
23 acciones de contacto aplicado a robots industriales también con la formulación  
24 propuesta por **Le2014**.

25 Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación  
26 central de este trabajo. Donde se desarrollan grandes desplazamientos y térmi-  
27 nos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando softwares para  
28 ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y mecáni-  
29 ca. No obstante, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones  
30 corrotacionales para la solución de problemas dinámicos.

# 1 Capítulo 3

## 2 Preliminares

### 3 3.1. Formulación corrotacional

4 A continuación se presenta una descripción metodológica de la formula-  
5 ción corrotacional según lo propuesto en (Le2014). La temática se abordara  
6 progresivamente según la naturaleza de las variables. En primera instancia se  
7 describen las caracterización de magnitudes cinemáticas para luego exponer  
8 como, a partir de estas, se deducen las variables dinámicas.

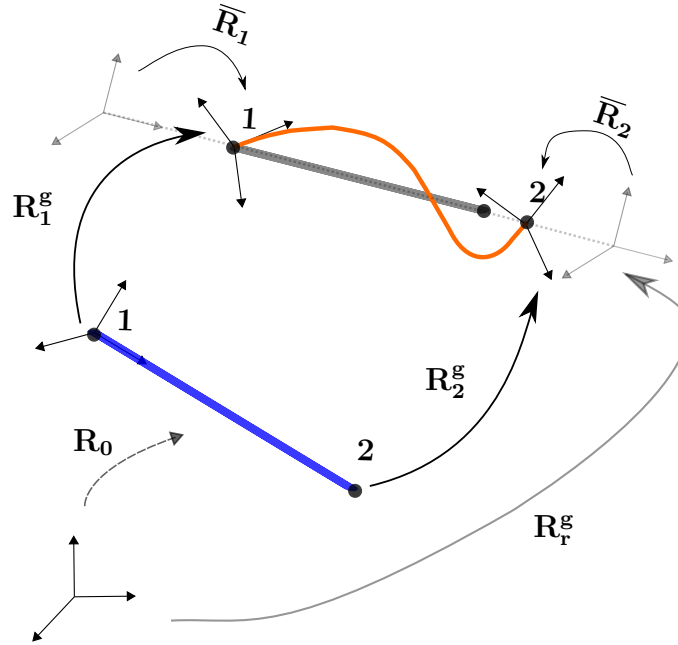
#### 9 3.1.1. Cinemática corrotacional

10 El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en  
11 escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas  
12 representa grandes rotaciones y desplazamientos dados por la dinámica de un  
13 elemento rígido. La segunda componente tiene en cuenta los desplazamientos  
14 locales asociados a la flexibilidad del material. Este enfoque suele aplicarse  
15 al analizar deformaciones estáticas. Resulta intuitivo imaginar en un inicio  
16 como se deformaría la estructura de manera rígida para luego aplicarle la  
17 componente deformable. Ahora bien, en este tipo de formulaciones, hace falta  
18 introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten representar los  
19 desplazamientos de cada una de las componentes.

20 Para el abordaje de este análisis debe comprenderse una serie de rotaciones  
21 consecutivas ilustradas en la Figura 3.1. Para un elemento formado por los  
22 nodos 1 y 2 en sus extremos, se distinguen tres configuraciones. La primera  
23 de ellas en color azul representa el elemento en su estado indeformado o de  
24 referencia. El color naranja identifica a la componente deformada mientras que

1 en gris se ilustra la configuración rígida del elemento.

2 Para realizar traspasos de una componente a otra se definen una serie de  
3 transformaciones. La primera de ellas nominada  $\mathbf{R}_0$  lleva al elemento desde su  
4 estado de referencia a su estado inicial. A partir de esa configuración pode-  
5 mos hallar la geometría deformada aplicando las transformaciones  $\mathbf{R}_1^g$  o  $\mathbf{R}_2^g$ ,  
6 dependiendo el nodo de interés. Esta no es la única forma de hallar el estado  
7 deformado del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alterna-  
8 tiva consiste dado un nodo  $i$  al interior del elemento, aplicar consecutivamente  
9 las transformaciones  $\mathbf{R}_r$  y  $\bar{\mathbf{R}}_i$  encontrando así el estado deformado partiendo  
10 desde su configuración de referencia.



**Figura 3.1:** Rotaciones a cada configuración.

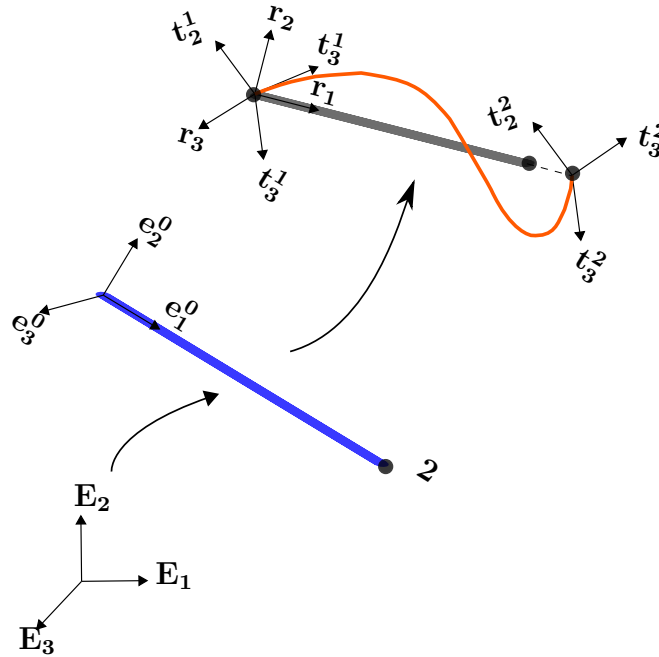
11 A partir de las definiciones descritas anteriormente e ilustradas en la Fi-  
12 gura 3.1, resulta clarificante destacar los argumentos sobre la nomenclatura  
13 seleccionada. En primer lugar, la notación con supra- índice “g” refiere a la  
14 palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a dicha transforma-  
15 ción, ya que permite encontrar de forma “macro” cuales es la configuración  
16 deformada partiendo de la de referencia. Asimismo en la Figura 3.1 tanto las  
17 rotaciones locales  $\bar{\mathbf{R}}_i$  como globales  $\mathbf{R}_i^g$  se utiliza el sub-índice  $i$  mientras que  
18 para la rotación rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta cla-  
19 ve para comprender la metodología corrotacional. Como la componente rígida  
20 es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible

1 prescindir del sub-índice  $i$ .

2 Naturalmente para encontrar la curva deformada que describe el elemento,  
 3 hace falta la orientación y traslación de un sistema de coordenadas solidario a  
 4 cada punto. Estas transformaciones se pueden representar matemáticamente  
 5 con la artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la  
 6 temática puede hallarse en la publicación (**kovzar1995finite**).

7 En los párrafos que prosiguen se desarrollan los sistemas solidarios a los  
 8 nodos ubicados en los extremos del elemento. El estudio de deformaciones  
 9 locales para los puntos interiores a la viga se detalla en la Sección 3.1.2.

10 Para deducir las matrices asociadas a cada transformación resulta impres-  
 11 cionable definir un conjunto de bases que permitan seguir al elemento en cada  
 12 configuración. Estas tríadas de versores se muestran gráficamente a continua-  
 13 ción en la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Descripción de las bases corrotacionales.

14 Primeramente se define un sistema de referencia auxiliar integrado por la  
 15 base ortogonal ( $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ ). Una vez ubicado el elemento en su estado inicial,  
 16 las coordenadas se hallan en relación a tres vectores ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ). Al aplicarle la  
 17 traslación y rotación de cuerpo rígido la base ( $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ) se anida al elemento y  
 18 funciona como sistema de coordenadas en la configuración rígida. Por último,  
 19 la base ( $\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i$ ) permite identificar la orientación y posición del nodo  $i$  en la

1 configuración deformada. Se hace énfasis en el hecho de que tanto la configu-  
2 ración inicial como la rígida requieren un único sistema de coordenadas. Por el  
3 contrario, la configuración deformada debido a la flexibilidad del elemento, re-  
4 quiere dos sistemas, denotados con la letra  $\mathbf{t}_j^i$  donde el supra-índice  $i$  identifica  
5 el nodo y el sub-índice  $j$  la dirección.

6 La definición de las bases mencionadas en el párrafo anterior no es arbi-  
7 traria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta intuitivo y oportuno  
8 escribirlas a partir de los vectores solidarios a cada configuración. Esa relación  
9 intrínseca entre matrices y los versores se establece en la Tabla 3.1 a continua-  
10 ción:

Matriz	Vínculo de bases
$\mathbf{R}_0$	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
$\mathbf{R}_i^g$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\bar{\mathbf{R}}_i$	$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\mathbf{R}_r$	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$

**Tabla 3.1:** Caracterización de matrices en términos de la base

11 Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones  
12 para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la  
13 y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primer fila se tiene:  $\mathbf{R}_0$ .  
14  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)^T = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Al plantear este tipo de vínculos entre vectores y  
15 haciendo uso de la propiedad para matrices ortonormales de la Ecuación 3.1  
16 es posible deducir las Expresiones (3.2) y (3.3).

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (3.1)$$

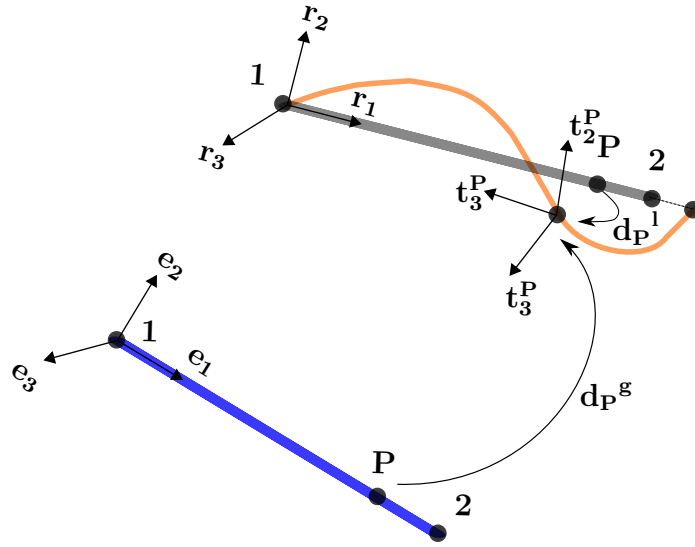
$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r^g)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r^g \bar{\mathbf{R}}_i \quad (3.3)$$

17 El propósito de la descripción anterior, algo intrincada y engorrosa respon-  
18 de a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los  
19 desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones. Dado  
20 un punto arbitrario P, es posible ubicarlo en coordenadas locales y globales tal  
21 cual se muestra en la Figura 3.3. En coordenadas locales sus grados de libertad  
22 son: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra  $\mathbf{u}_P$ , y sus desplazamientos

1 angulares con el nombre  $\overline{\theta_i^P}$ . Los siete grados de libertad se compactan en el  
2 vector  $\mathbf{d}_i^P = (\mathbf{u}_P, \overline{\theta_i^P})$ . Ahora bien, es posible desglosar el desplazamiento axial  
3  $\mathbf{u}$  en tres componentes según los vectores  $\mathbf{r}_i$ . Al vector desplazamientos de P  
4 en función de la base  $\mathbf{r}_i$  se le denomina  $\mathbf{d}_r$ .

5 Los desplazamientos de la viga en el punto P también se pueden expresar  
6 en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas  $\mathbf{d}_g =$   
7  $(\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$ . Esta tienen origen en la configuración de referencia o material hasta  
8 la deformada como se muestra en la Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Desplazamientos locales y globales del nodo P

9 Acorde con los desplazamientos presentados anteriormente, es propicio cal-  
10 cular sus diferenciales asociados. Estos emplearan un rol esencial para el cálculo  
11 de matrices tangentes y fuerzas internas. A continuación las Ecuaciones (3.4)  
12 y (3.5) definen las variaciones de los desplazamientos locales y globales respec-  
13 tivamente.

$$\delta \mathbf{d}_l = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T \quad (3.4)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^g, \delta \mathbf{u}_2^g, \mathbf{w}_1^g, \mathbf{w}_2^g]^T \quad (3.5)$$

14 Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, se desarrollan los dife-  
15 renciales asociados a las transformaciones de giro  $\mathbf{R}_r^g$ ,  $\mathbf{R}_i^g$ ,  $\mathbf{R}_0$  y  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Para esto,  
16 primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla  
17 3.1. Las entradas de  $\mathbf{R}_r$  y  $\mathbf{R}_i^g$  se hallan siguiendo las Ecuaciones (3.6) y (3.7)

1 a continuación:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (3.7)$$

2 Los versores  $\mathbf{r}_i$  se hallan a partir del vector director  $\mathbf{r}_1$  que apunta del nodo  
 3 1 al 2. Es por esto que es preciso definirlo en función de las posiciones iniciales  
 4 de los nodos en coordenadas globales  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , sus desplazamientos  $\mathbf{u}_1^g$  y  $\mathbf{u}_2^g$  y  
 5 el largo  $l_n$  una vez deformado.

$$l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\| \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1}{l_n} \quad (3.9)$$

6 El vector auxiliar  $\mathbf{p}$  surge se define para hallar primeramente los vectores  
 7  $\mathbf{r}_i$  y partir de estos la base  $\mathbf{t}_i$ . Estos versores son dinámicos y solidarios al  
 8 movimiento. Están unidas a la configuración rígida y local respectivamente.  
 9 El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la  
 10 necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen  
 11  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  en la Ecuación (3.10):

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ 1 \ 0]^T \quad (3.10)$$

12 En la expresión anterior la matriz  $\mathbf{R}_0$  se obtiene colgando los vectores  $\mathbf{e}_i$   
 13 escritos como combinación lineal de la base  $\mathbf{E}_i$ . Una vez calculada esta matriz y  
 14 evaluado las expresiones de la Ecuación (3.10) se obtienen los restantes versores  
 15 directores de la componente rígida. Esto es:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 \quad (3.11)$$

16 Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones  
 17 de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de  
 18 variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}}_i = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.12)$$



En la Ecuación (3.12) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de diferenciales matriciales. Como la transformación  $\mathbf{R}_0$  comunica la configuración indeformada y ambas configuraciones son fijas, su matriz es constante. Por lo tanto, su variación es nula. A diferencia de las matrices de giro  $\overline{\mathbf{R}}_i$  y  $\mathbf{R}_i^g$  sus variaciones pueden hallarse según las Ecuaciones (3.13) y (3.14) respectivamente.

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g \quad (3.13)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r \quad (3.14)$$

En la ecuación (3.14) el término  $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$  refiere a la operación skew del vector de ángulos de la componente rígida. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a matrices de rotación. La función aplicada al vector  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  toma la siguiente forma:

$$\text{Skew}(\boldsymbol{\Omega}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

En función de lo descrito anteriormente resta vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las variaciones globales. Para esto se definen las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{G}$  según las Ecuaciones (3.16) (3.17).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g \quad (3.16)$$

Notoese que las matrices  $\mathbf{R}_r$  tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas dimensiones,  $\mathbf{0}$  es una matriz nula de 3x3 e  $\mathbf{I}$  una matriz identidad del mismo número de filas y columnas. De forma subsiguiente  $\mathbf{E}$  posee 12 entrada en filas y columnas asociadas a los 12 grados de libertad por elemento.

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}^g}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{1} : \mathbf{6}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta/l_n & \eta_{12}/2 & -\eta_{11}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{7} : \mathbf{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta/l_n & \eta_{22}/2 & -\eta_{21}/2 & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la columna 1 y 12 de la matriz  $\mathbf{G}$  las entradas son nulas ya que los desplazamiento angulares globales no dependen de los estiramientos axiales de los nodos. Además, los parámetros  $\eta$  se calculan realizando los cocientes entre las componentes de los vectores  $\mathbf{p}_j$  y  $\mathbf{p}_{ij}$  según la Ecuación (3.18). Siendo el vector  $p_j$  el producto  $\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}_{ij}$  la multiplicación de  $\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$ .

$$\eta = \frac{p_1}{p_2}, \quad \eta_{11} = \frac{p_{11}}{p_2}, \quad \eta_{12} = \frac{p_{12}}{p_2}, \quad \eta_{21} = \frac{p_{21}}{p_2}, \quad \eta_{22} = \frac{p_{22}}{p_2}, \quad (3.18)$$

La relación entre los diferenciales anteriores, se pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos de ángulos locales en términos globales. Tal cual se expresa en la Ecuaciones (3.19) donde la matriz  $\mathbf{P}$  queda definida. Esto es de sumo interés ya que para el cálculo de fuerzas internas las variables causa y efecto de su generación son los desplazamientos locales. Por ende resulta imprescindible calcular su variación en términos globales.

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.19)$$

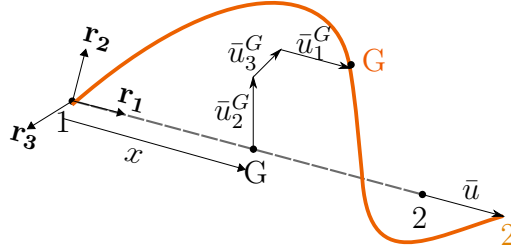
Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coordenadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar  $\mathbf{r}$  que vincula los incrementos del desplazamiento axial  $\delta \bar{u}$  con los globales. Esto permite escribir la Ecuación (3.4) en relación a (3.5) haciendo uso de la expresión que prosigue (3.20)

$$\delta \bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3} \mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3}] \quad (3.20)$$

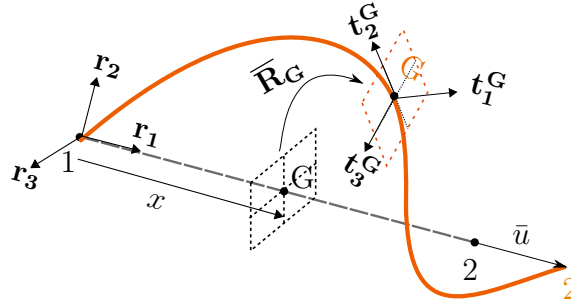
### 3.1.2. Formulación local

La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este apartado, se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.1.3.

El movimiento local de una sección ubicada a una distancia  $x$  de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir de la rotación y traslación de la sección correspondiente a su centroide  $G$ . Una ilustración de esto se muestra en la Figura 3.4, donde la configuración rígida se identifica en punteado y la deformada en color naranja.



(a) Esquema de desplazamientos locales



(b) Esquema de ángulos locales

**Figura 3.4:** Ilustración grados de libertad locales

El movimiento de la base  $\mathbf{t}_i$  en respecto del sistema  $\mathbf{r}_i^G$  esta dado por los desplazamientos  $\bar{u}_3$  según el versor  $\mathbf{r}_3^G$  y análogamente para los vectores  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_1$ . Esto determina la ubicación del baricentro  $G$ . Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores  $\mathbf{t}_3^G$  y  $\mathbf{t}_2^G$  dentro del plano y un versor perpendicular  $\mathbf{t}_1^G$ . La transformación  $\bar{\mathbf{R}}_G$  permite encontrar los transformados de la base  $\mathbf{r}_i^G$  etiquetados con las letras  $\mathbf{t}_i^G$ . Por último se observa el desplazamiento axial de la barra  $\bar{u}$  correspondiente al del

1 nodo 2 en la dirección  $\mathbf{r}_1$ .

2 Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las  
3 hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para  
4 los desplazamientos axiales  $\bar{u}_1$  y para los ángulo de torsión  $\theta_1$ . Por la contraria,  
5 tanto para los desplazamientos transversales  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_3$  como para los ángulos de  
6 flexión, las interpolaciones es través de polinomios cúbicos. Estas funciones  
7 interpolantes se detallan en las Ecuaciones (3.21), 3.22 y (3.23).

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0} \quad (3.21)$$

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (3.22)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right) \quad (3.23)$$

8 Para un punto ubicado a una distancia  $x$  del nodo 1 según el vector  $\mathbf{r}_1$   
9 es posible calcular los desplazamientos locales en la base  $\mathbf{r}_i$ . Dado el punto  
10 arbitrario G que se desplace en el sistemas de coordenadas locales según el  
11 vector  $\mathbf{d}_1^G$ . Los valores en términos de la componente rígida  $\mathbf{r}_i$  se calculan  
12 aplicando la Ecuación 3.24.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G \quad (3.24)$$

13 Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nu-  
14 las es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas.  
15 De esta forma se construyen las matrices  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ . Estas expresan los despla-  
16 zamientos transversales  $\bar{u}_2, \bar{u}_3$  como también los ángulos  $\bar{\theta}_1^G$  y  $\bar{\theta}_2^G$  y  $\bar{\theta}_3^G$  según  
17 los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$  para el  
18 nodo 1 y 2 respectivamente. Esta artimaña analítica se expresa a continuación  
19 en las Ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_1 = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Las hipótesis de Bernoulli desprecian las deformaciones por fuerzas cortantes, esto se refleja en sus polinomios de interpolación. Esta premisa no tiene perjuicios sobre la aplicación con la que se modelará el elemento. La estructura de cables es extremadamente esbelta, con relaciones de diámetro respecto a largo ínfimas. Por la tanto, las deformaciones por cortante son efectivamente despreciables respecto a las inducidas por los momentos flectores.

### 3.1.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura ?? queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa en según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$OG = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (3.27)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente definidos en (3.27) y haciendo uso la matriz auxiliar  $\mathbf{N}$  es posible escribir los desplazamientos del baricentro y su diferencial asociado.

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad N_2 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (3.28)$$

$$OG = N_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + N_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (3.29)$$

$$\delta OG = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (3.30)$$

La expresión presentada (3.30) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta el cálculo de su magnitud, ya que esos grados de libertad se encuentran

1 solidarios a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema,  
2 se sustituyen las Ecuaciones (3.16), (3.17), (3.19) y (3.13) lográndose de este  
3 modo, escribir a  $\delta \mathbf{u}$  en coordenadas globales. Además se compacta la notación  
4 definiendo la matriz  $\mathbf{H}_1$  según la Ecuación (3.31).

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r(\mathbf{N} + \mathbf{P}_1\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_1\mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g \quad (3.31)$$

5 Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares  
6 de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.4), son despreciables  
7 frente a los de la componente rígida. Para el autor **Le2014**, debido a sus  
8 cambios de magnitud entre miseraciones, no hay diferencias asociadas a los  
9 incrementos de ángulos locales y rígidos. Esto es:  $(\delta \overline{\theta_{ri}} = \overline{\delta \mathbf{w}_i})$ .

10 Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magni-  
11 tudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa  
12 se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según se  
13 establece en la Ecuación

$$\delta \mathbf{w}^g(\mathbf{OG}) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r(\mathbf{P}_2\mathbf{P} + \mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_2\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g \quad (3.32)$$

### 14 3.1.2.2. Velocidades y aceleraciones

15

16

17 Las magnitudes dinámicas desempeñan un papel primordial en el análisis im-  
18 plementado. Tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en  
19 términos globales. De igual modo, que en la Sección 3.1.2.1, se obtienen sus  
20 diferenciales asociados. Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.31) se de-  
21 ducen las velocidades traslacionales según la Expresión (3.33). Al aplicar la  
22 regla del producto en (3.33) se halla la aceleración lineal del centro de masa  
23 del elemento en (3.34).

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.33)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \dot{\mathbf{d}}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r\dot{\mathbf{H}}_1\mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{E}}^T)\delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.34)$$

24 Para calcular las igualdades anteriores hace falta evaluar las derivadas tem-

1 porales de las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{R}_r$ . Esta operatoria matricial, se traduce en derivar  
2 cada una de las entradas que integran la matriz. Como la variable  $\mathbf{E}$  depende  
3 de  $\mathbf{R}_r$  se calculan inicialmente sus derivadas, para luego sustituirlas en  $\dot{\mathbf{E}}$ . Esto  
4 se realiza mediante la expresión en variaciones (3.14) y resulta  $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}$ . Al  
5 sustituir esta expresión en la derivada de  $\dot{\mathbf{E}}$  se deduce la ecuación que prosigue:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E}_t \quad (3.35)$$

6 El valor skew de los desplazamientos globales sobre la componente rígida  $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}$   
7 se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación(3.15), aplicado al vector  
8  $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$ . Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la  
9 Expresión (3.34) definiendo la matriz  $\mathbf{C}_1$  como se enseña a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t \quad (3.36)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.37)$$

10 Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó  
11 la nomenclatura para evitar el abuso de notación. Derivando la Ecuación (3.32)  
12 respecto a la variable temporal. se deduce la velocidad angular a continuación:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.38)$$

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (3.39)$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.40)$$

13 Una descripción detallada puede encontrarse en **Le2014**. Dentro del  
14 apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las deri-  
15 vadas temporales de las matrices  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{H}_2$ . También es posible escudriñar la  
16 deducción de las matrices  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .

### 3.1.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (**Le2014**) y (**battini2002co**). Acompasando con el avance histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente los vectores de fuerza interna y su matriz de rigidez asociada, para luego ahondar en la incorporación de términos dinámicos.

#### 3.1.3.1. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial  $fl_1$ , dos momentos flectores  $M_1^1$ ,  $M_2^1$  y un momento torsor  $M_3^1$  para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección análoga a los desplazamientos locales para las fuerzas internas, se presenta en la Ecuación (3.41).

$$\mathbf{f}_i = [ fl_1 \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2 ] = [ fl_1 \ \mathbf{m} ] \quad (3.41)$$

Tanto las magnitudes de fuerza interna como inercial se calcularán inicialmente para coordenadas locales, donde su cálculo es relativamente sencillo, para luego transcribir estos resultados en términos globales. Con este cometido se define la matriz  $\mathbf{B}$  según se expresa en la Ecuación (3.42).

$$\delta \mathbf{d}_i = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_i. \quad (3.42)$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Esta primer transformación en la Figura 3.3, refiere a escribir los desplazamientos locales en términos de los rígidos ( $\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$ ). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración rígida a la indeformada ( $\delta \mathbf{d}_i \rightarrow \delta \mathbf{d}_g$ ). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en



1 función de coordenadas estáticas y globales.

2 Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{E}$ , en las Ecuaciones  
 3 (3.16) y (3.17) es posible vincular los ángulos diferenciales locales  $\delta\bar{\theta}_i$  con  
 4 los incrementos globales  $\delta\mathbf{d}_g$ . Esto permite conocer los momentos flectores y  
 5 torsores de la viga en coordenadas globales.

6 Análogamente el vector auxiliar  $\mathbf{r}$  contiene a  $\mathbf{r}_1$  según el sentido axial de la  
 7 barra, por lo que reescribir este permite expresar la fuerza de directa  $f_{a1}$  en  
 8 términos de la base  $\mathbf{E}_i$ . Al unir los razonamientos detallados en los párrafos  
 9 anteriores, se obtienen las Ecuaciones (3.43) y (3.44) para el cálculo de la fuerza  
 10 interna y su diferencial:

$$\mathbf{F}^g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P}\mathbf{E}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (3.43)$$

$$\delta\mathbf{F}^g = \mathbf{B}^T \delta\mathbf{f}_1 + \delta\mathbf{r}^T f_{a1} + \delta(\mathbf{E}\mathbf{P}^T) \mathbf{m} \quad (3.44)$$

11 Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés obtener sus de-  
 12 rivadas respecto de los desplazamientos. La matriz tangente representa esta  
 13 magnitud y es un operador indispensable para la resolución mediante méto-  
 14 dos numéricos iterativos. Este cálculo de derivadas respecto a desplazamientos  
 15 globales de la expresión (3.43) concluye en la Ecuación (3.45) a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{B} + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{f}_1)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (3.45)$$

16 Operando con la regla del producto y sustituyendo la Ecuación (3.44) para  
 17 el diferencial para la fuerza interna la matriz tangente resulta :

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a} \mathbf{r} \quad (3.46)$$

18 La matriz  $\mathbf{B}$  permite realizar el cambio de coordenadas  $\delta\mathbf{d}_a$  a  $\delta\mathbf{d}_g$ , de acuer-  
 19 do con lo definido en (3.42). Esta transformación de cambio de base multiplica  
 20 la variable  $\mathbf{K}_1$  correspondiente al aporte de rigidez local del elemento. Esta  
 21 depende de los estiramientos y rotaciones de la viga en su configuración local  
 22 y también de la ley material implementada. Esto evidencia la versatilidad del  
 23 planteo corrotacional ante diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta  
 24 modificar la matriz  $\mathbf{K}_1$ .

25 En la Ecuación (3.46) la matriz  $\mathbf{D}$  es anti-simétrica y se calcula en función

de los productos internos de los vectores  $\mathbf{e}_i$ , esta aporta la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial  $f_{l1}$  de la barra. Por otra parte, la matriz auxiliar  $\mathbf{Q}$  se halla a partir del producto de  $\mathbf{P}$  y los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, y proviene de la componente no lineal de los momentos. Por último, se define el vector  $\mathbf{a}$  agrupando así el resto. Dichas defunciones se encuentran en las siguientes Ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (1) \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (2) \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (3) \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (4) \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.46) es asimétrica, sin embargo según **Rankin1986** esta puede ser simetrizada sin perder la convergencia cuadrática para el método de Newton Raphson (N-R), siempre y cuando momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger **Rankin1986**.

### 3.1.3.2. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes asociadas. El atractivo principal de la referencia **Le2014** se fragua en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas **Crisfield**. Esta coherencia se debe a la cabal derivación analítica del vector de fuerzas inerciales según el planteo cinemático de las variables descritas en 3.1.3. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad que la magnitud pri-

1 maría será la energía cinética del elemento. Esta propiedad escalar depende  
2 de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ( $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ ) como también  
3 angulares ( $\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$ ). En las ecuaciones (3.49) y (3.50) a continuación, se presen-  
4 tan la energía cinética de un elemento y su diferencial. Para la obtención de la  
5 Expresión se aplicó (3.50) la regla del producto de diferenciales y el teorema  
6 de Leibniz para integrales de extremos fijos.

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} \quad (3.49)$$

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] d\mathbf{l} \quad (3.50)$$

7 Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subíndices "g" para las  
8 magnitudes dinámicas ( $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ ) y sus respectivas derivadas. De igual forma, las  
9 variables del integrando en las Ecuaciones (3.49) y (3.50) se omitió la nomen-  
10 clatura OG referida al centroide del área transversal a la viga. Los elementos  
11 serán de área constante siendo  $A_\rho$  el producto del área transversal y la densidad  
12 del material, análogamente la matriz  $\mathbf{I}_\rho$  es el tensor de inercia en la configura-  
13 ción deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se  
14 puede obtener al aplicarle las rotaciones  $\mathbf{R}^g$  y  $\mathbf{R}_o$  consecutivamente.

15 Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsa-  
16 bles del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar  
17 el vector de fuerza inercial se obtienen las matrices tangentes dinámicas. Esto  
18 se expresa en las Ecuaciones (3.51) y (3.52).

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}^g \quad (3.51)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K} \delta \mathbf{d}_g \quad (3.52)$$

19 En la Ecuación 3.52 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de  
20 ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los des-  
21 plazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa  
22 consistente  $\mathbf{M}$  se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, con-  
23 secutivamente la matriz  $\mathbf{C}_k$  giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo  $\mathbf{K}$ ,  
24 se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz cen-  
25 trifuga. Determinados autores **cardona1988beam** y **hsiao1999consistent**

1 proponen considerar unicamente  $\mathbf{M}$ , sin embargo exhaustivos estudios en  
2 (**hsiao1999consistent**) prueban que agregar la matriz  $\mathbf{C}_k$  mejora el desem-  
3 peño computacional para numerosos casos.

4 Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector  
5 de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta  
6 idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la  
7 energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino  
8 también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección  
9 3.1.2.2.

10 Sustituyendo la Ecuación (3.52) en (3.50) se halla una fórmula para la  
11 fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al  
12 integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.34), (3.37),  
13 (3.38) y (3.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra  
14 a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \quad (3.53)$$

15 Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expre-  
16 siones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el  
17 diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a  
18 cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices.  
19 Finalmente esto se expresa de forma matemática en las Ecuaciones (3.55) y  
20 (3.56).

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.54)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \right\} d_l \right] \mathbf{E}^T \quad (3.55)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) + \dots \right\} \right] \mathbf{E}^T \quad (3.56)$$

$$\dots \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho}) d_l \quad (3.57)$$

# 1 Capítulo 4

## 2 Metodología

### 3 4.1. Aspectos de modelado computacional

#### 4 4.1.1. Ecuación de equilibrio

5 En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámi-  
6 co con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado  
7 registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta impres-  
8 cionable formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis  
9 que subyacen a las expresiones postuladas en (Le2014). Por añadidura, se  
10 construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no  
11 lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

12 Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuer-  
13 zas internas  $\mathbf{f}_{\text{int}}$ , inerciales  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$  y externas  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Este equilibrio es equivalente  
14 al postulado de PTV donde el incremento diferencial en la energía interna  
15 y cinética se debe a un trabajo externo. La Ecuación de balance (4.1) debe  
16 satisfacerse para todo instante temporal, en particular para  $t + \Delta_t$ . Dadas  
17 determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de re-  
18 ferencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese  
19 instante. Estas son: el desplazamientos  $\mathbf{d}(t + \Delta_t)$ , las velocidades  $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$   
20 y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$ . Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente  
21 de manera exacta en la Ecuación (4.1).

$$\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t)) - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

1 Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables constru-  
 2 yen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta.  
 3 El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecua-  
 4 ción a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como  
 5 consecuencia que la Ecuación (4.1) ya no será nula sino igual a un resto  $\mathbf{r}$ . A su  
 6 vez, tal y como se detalla en las Ecuaciones (4.2) y (4.3), los métodos numéricos  
 7 para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de aceleración  
 8 y velocidad en función de los desplazamientos. Por lo tanto indirectamente,  
 9 el vector resto depende unicamente de dicha magnitud. Para diferenciar las  
 10 variables aproximadas de las exactas, se introduce la siguiente nomenclatura:  
 11  $(\mathbf{d}(t + \Delta_t) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_t})$ ,  $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$  y  $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ .

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_v(\mathbf{d}_t) \quad (4.2)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_a(\mathbf{d}_t) \quad (4.3)$$

12 Según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, se buscan las apro-  
 13 ximaciones cinemáticas tal que el residuo para un instante  $t + \Delta_t$  sea próximo  
 14 al vector nulo. Esto se expresa matemáticamente en Ecuación (4.4).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) = & (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) + \dots \\
 & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

15 Por otro lado, según el método  
 16 de N-R presentado en **quarteroni2010numerical** es posible construir una  
 17 sucesión iterativa en  $k$ , de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se  
 18 acerque al nulo. Para aplicar esto se utiliza el teorema de Taylor aplicado a la  
 19 función resto, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}|_k \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

20 Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena apli-  
 21 cada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas  
 22 en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se

1 presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}\end{aligned}\quad (4.6)$$

2 En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar  
3 las derivadas de la función residuo respecto de: desplazamientos, velocidades  
4 y aceleraciones. Estas son las matrices tangentes  $\mathbf{K}_g$   $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}_k$  descritas en la  
5 Sección 3.1.3. Incorporándolas se llega a:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \right|_k = \left( \mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k \quad (4.7)$$

6 Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.7) de N-R se halla el  
7 paso en desplazamientos en  $k + 1$  a partir de las magnitudes en  $k$   $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}$ .  
8 Matemáticamente:

$$\left( \mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k)) = \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (4.8)$$

9 Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de reso-  
10 lución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones  $F_a$  y  $F_v$ . Para  
11 esto se implementó el Método de HHT presentado a continuación en La sección  
12 4.1.2.

### 13 4.1.2. Resolución numérica mediante HHT

14 Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algorit-  
15 mo de Newmark presentado en **newmark1959method**. Según el artículo  
16 **hilber1977improved** el método de HHT, es incondicionalmente estable pa-  
17 ra la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica  
18 que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la  
19 convergencia numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan  
20 representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la  
21 energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Comple-  
22 mentario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas,  
23 sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (**hilber1977improved**) se compara el método de HHT con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser: el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark:. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en **Le2014**, resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

Para este abordaje inicialmente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura  $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$ . Se presentan entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark  $\alpha$  y  $\beta$  para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones de actualización para el instante  $t + \Delta_T$  se escriben:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{y}}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t\end{aligned}$$

Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros  $\alpha_{NW}$  y  $\beta_{NW}$  en términos del valor de  $\alpha_{HHT}$ . Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.11) y (4.12). En estas funciones, es posible notar las equivalencias, parentescos y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con  $\beta_{NW} = 1/2$  y  $\alpha_{NW} = 1/4$  se logra ajustando el parámetro  $\alpha_{HHT} = 0$ .

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (4.11)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (4.12)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro  $\alpha_{HHT}$  y el incremento  $\Delta_T$  ente dos tiempos consecutivos  $t$  y  $t + \Delta_t$ .



$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \quad (4.14)$$

1 A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales,  
2 las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este  
3 tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. Es por esto, que los  
4 vector de velocidades y aceleraciones angulares para el paso  $k+1$ , en el instante  
5  $t + \Delta_t$ , deben calcularse según las Ecuaciones (4.15) y (4.16) presentadas en la  
6 referencias (ibrahimbegovic1998finite) y (ibrahimbegovic2002energy).

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} \left[ \frac{\alpha}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}} \theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} + \frac{(\beta - 0.5\alpha) \Delta_{\mathbf{t}}}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} \right] \quad (4.15)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} \left[ \frac{1}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}^2} \theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} - \frac{1}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} \right] \quad (4.16)$$

7 En las Ecuaciones (4.15) y (4.16) la transformación  $\Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}$  es la composición  
8 de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} = \exp(\widetilde{\theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}}) = \mathbf{R}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} (\mathbf{R}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{g}})^{\mathbf{T}} \quad (4.17)$$

9 Un procedimiento análogo al de las funciones angulares se aplican a las  
10 lineales. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones  
11 expresadas en (4.15) y (4.16).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (4.19)$$

12 Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones  
13 (4.18), (4.19), (4.13) y (4.14) al definir convenientemente la matriz  $\mathbf{B}_{\mathbf{t}}$ . En  
14 función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclaracio-  
15 nes globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas  
16 relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta_t}^g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{2,t+\Delta_t}^g) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_g = \left( \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (4.21)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_g = \left( \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (4.22)$$

Al escindir las Ecuaciones (4.21) y (4.22) se identifican las funciones  $F_a$  y  $F_v$  de la sección 4.1.1. Estas relaciones matemáticas deben de integrarse a la Ecuación linealizada de equilibrio (4.8) para obtener el incremento en  $k$  que permita conocer el vector desplazamientos en el paso  $k + 1$  para el instante  $t + \Delta_T$ . Finalmente, eso se plantea en la Ecuación (4.23).

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) = - \left( \mathbf{K}_g + \left( \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \right) \mathbf{M} \mathbf{B}_t + \left( \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \right) \mathbf{C}_k \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (4.23)$$

Se aclara que para despejar la Ecuación (4.23) anterior, la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las matrices que la integran (de masa, centrifuga y tangente). Las matrices tangentes fueron simetrizadas .artificialmentecomose aclaró anteriormente, manteniendo el orden de convergencia de N-R. Las matrices centrifugas y de masa devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros  $\alpha_{HHT}$  son menores a uno, en general en el intervalo  $[-0.1; 0.1]$ , la suma de esta matrices suele ser definidas positivas. Por lo que  $\mathbf{K}_{tot}$  será invertible. Por último es importante esclarecer que para este trabajo, si bien se consideraron las funciones de actualización angulares para los incrementos, el angulo se sumo de forma aditiva. Lo cual es una hipótesis inconsciente que diverge de lo postulado en la bibliografía consultada.

### 1 4.1.3. Implementación numérica en ONSAS

2 En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el soft-  
3 ware: *An Open Non Linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Este código  
4 de carácter abierto y se desarrolló de forma general integrando distintos ele-  
5 mentos, materiales y geometrías dentro del mismo modelo. Además permite  
6 resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente sus  
7 salida en 3D a través del programa de código abierto *Paraview* difundido en  
8 (ahrens2005paraview).

9 Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones  
10 matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron  
11 aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de los  
12 pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser pio-  
13 nero de la formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en los  
14 trabajos (Battini2002) (Le2014), sino también por su predisposición a di-  
15 fundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable. A continuación  
16 en ?? se detalla un pseudo-código panorámico sobre el esqueleto ejecutado en  
17 ONSAS.

18 En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo.  
19 Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite  
20 incrementar la variable temporal en pasos de  $\Delta t$ . Además debe evaluar  
21 los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de  $\mathbf{f}_{ext}$ .  
22 Para resolver el estado del sistema en el tiempo  $t + \Delta T$ , hace falta resolver la  
23 ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (4.4). Con este cometido,  
24 se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese  
25 paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos.  
26 Para este bucle en el pseudocódigo ?? se omitió la notación en  $t + \Delta T$  para  
27 simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

28 Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramente  
29 el cálculo del incremento que determina el paso  $k + 1$ , a partir de los despla-  
30 zamientos en el paso actual  $k$ . Luego se actualizan las variables cinemáticas de  
31 desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza  
32 mientras que la variable booleana `finDisp` sea nula. La alteración de estado, se  
33 encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la  
34 operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos  $tol_u$ , en  
35 vector de fueras residuales  $tol_{res}$  y número máximo de iteraciones  $max_{Iter}$ . Las

---

**Algorithm 1** Pseudocódigo de iteración general.

---

**Require:** :  $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta_T, \alpha_{HHT}$

Iniciar cinemáticas:  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$

Iniciar tiempo:  $t \leftarrow t_0$

**while**  $t < t_f$  **do**

    finDisp = 0

    Definir:  $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$ .

    Evaluar  $\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t}$

**while** FinDisp = 0 **do**

        Calcular fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$  y  $\mathbf{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$ .

        Calcular y ensamblar matrices Tangentes:  $\mathbf{K}_g^k, \mathbf{M}^k, \mathbf{C}_k^k$ .

        Despejar  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$

        Actualizar desplazamientos globales:  $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$

        Recalcular velocidades y aceleraciones lineales:  $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$ .

        Recalcular velocidades y aceleraciones angulares:  $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$ .

        Ensamblar velocidades:  $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$

        Ensamblar aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$

        Actualizar fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$  y  $\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})$ .

        Calcular:

**if**  $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\| \vee \|\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\| \vee k \geq \max_{iter}$   
        **then**

            finDisp = 1

**end if**

**end while**

    Actualizar  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}$ .

$t = t + \Delta_T$

**end while**

---

1 primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese  
2 tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas  
3 desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la  
4 variable `finDisp` alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor  
5 del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

6       Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante  
7 profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices  
8 dinámicas tangentes. Este código se agregó a [ONSAS](#) procurando su versatili-  
9 dad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden  
10 al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo  
11 pseudocódigo de la función [elementbeamforces.m](#) implementada.

12       El diagrama presentado en el Pseudocódigo [??](#), puede dividirse en tres divi-  
13 siones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo  
14 constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matri-  
15 ces de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y defor-  
16 mada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las  
17 fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de  
18 la función [beamLocalStaticForces](#). Desafortunadamente, tanto entradas como  
19 salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas loca-  
20 les. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos  
21 locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego  
22 integrarlas al código general expuesto en [??](#).

23       De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de  
24 fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las  
25 expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas  
26 están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia  $x$  en la configuración  
27 de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie  
28 de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

29       Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector  
30 de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadra-  
31 tura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último,  
32 los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas,  
33 como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices  
34 de todo el sistema en coordenadas globales.

---

**Algorithm 2** Pseudocódigo elementBeamForces.

---

**Require:**  $A_\rho$   $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$   $E$   $\nu$   $G$   $\mathbf{X}_1$   $\mathbf{X}_2$   $\mathbf{d}_g^e$   
**for** 1 **to**  $N_{elem}$  **do**  
    Separar vector desplazamientos  $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$   
    ————Cálculo de matrices de rotación————  
    Computar matrices de rotación global  $\mathbf{R}_g^1$  y  $\mathbf{R}_g^2$   
    Evaluar matriz de rotación de referencia  $\mathbf{R}_o$   
    Hallar  $\mathbf{q}_1$   $\mathbf{q}_2$   $\mathbf{q}$  y calcular  $\mathbf{e}_1$   $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .  
    Evaluar matriz de rotación rígida  $\mathbf{R}_r$   
    Calcular matrices de rotación locales  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$   
    ———— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente ————  
    Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento  $l_0$  y  $l$   $u = l - l_0$   
    Invertir  $\mathbf{R}_i$  y hallar ángulos locales  $\bar{\theta}_i$ .  
    Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna  $\mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$  y matriz tangente local  $\mathbf{K}_T^{\text{loc}}$ .  
    Construir matrices auxiliares:  $\mathbf{H}$   $\mathbf{G}$   $\mathbf{P}$   $\mathbf{B}$   $\mathbf{r}$   
    Transformar a coordenadas globales:  $\mathbf{K}_T^g \leftarrow \mathbf{K}_T^{\text{loc}}$  y  $\mathbf{f}_{int}^g \leftarrow \mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$ .  
    ———— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas ————  
    Todas las variables dependen de la coordenada ( $\mathbf{x}$ )  
    Definir funciones de interpolación  $N_i$   
    Calcular matrices:  $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{H}_1$ .  
    Hallar velocidades  $\dot{\mathbf{w}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\dot{\mathbf{w}}_r$   
    Calcular matrices auxiliares:  $\mathbf{H}_1$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .  
    Hallar las aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{w}}$   $\ddot{\mathbf{u}}$ .  
    Girar el tensor de inercia a la configuración deformada:  $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$   
    Hallar expresiones e integrar en el elemento:  $\mathbf{f}_{ine}$   $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}_k$   
    Ensamblar :  $\mathbf{f}_{ine}$   $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_k$   $\mathbf{K}_T^g$   $\mathbf{f}_{int}^g$   
**end for**

---

## 1 4.2. Aspectos de modelado estructural

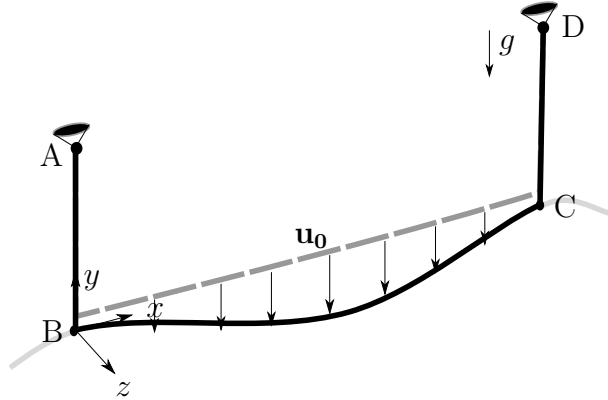
### 2 4.2.1. Condiciones iniciales y de borde

3 El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de  
4 la realidad, para crear un modelo en el computador, que se comporte de for-  
5 ma análoga. Permitiendo emular y controlar determinadas variables de estudio  
6 relevantes al observador. En este acto de representación existen simplificacio-  
7 nes inherentes, que reducen los factores incidentes al sistema como objeto de  
8 estudio.

9 Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determinadas  
10 condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema. Estas  
11 imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto esta siendo desvin-  
12 culado, se nominan condiciones de borde o contorno. En particular, para esta  
13 investigación, se consideraron las siguientes condiciones de borde cinemáticas:

- 14 1. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura,  
15 ignorándose cualquier variación en el perfil topográfico del terreno. Como  
16 consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D  
17 y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
- 18 2. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre  
19 el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación  
20 es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una  
21 significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a mo-  
22 delarlo con elementos de vigas, las cuales tienen un variación de ángulo  
23 continuo. Consecuentemente, al escindir el vano BC de su continuación  
24 (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo nulo en  $x$  para  
25 los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta las condiciones  
26 de deformación angulares impostadas por la geometría del sistema.
- 27 3. Como el conductor no presenta fuerzas en el sentido axial, los puntos B y  
28 C no se deforman según el eje  $x$ , ergo sus trayectoria pertenecen al plano  
29  $z-y$ . Esto debe forzarse en los nodos B y C.
- 30 4. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB,  
31 obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se mo-  
32 delaron a partir de barras de Green. Las condiciones de borde dependen  
33 del ejemplo al que se haga referencia. Para el Ejemplo 3 los puntos D  
34 y A se encuentran anclados a la torre, acompañando sus movimientos,

- 1 mientas que para el 2 se encuentran fijos.
- 2 5. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada
- 3 en La Figura 4.1, se aplica una condición inicial de desplazamiento  $\mathbf{u}_0$ .
- 4 Esta se corresponde con la solución estática del sistema sometido por el
- 5 peso propio en la dirección de  $z$  de la gravedad.



**Figura 4.1:** Esquema de condición inicial y de borde.

6 Una vez plasmadas las condiciones de borde cinemáticas anteriores. Se es-

7 tablecen a continuación las principales condiciones de borde dinámicas:

- 8 1. No se consideran las fuerzas internas transmitidas por los vanos aledaños.
- 9 2. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento
- 10 no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea.
- 11 3. Las simulaciones se realizan en dos etapas sucesivas, primeramente se
- 12 imponen la condiciones iniciales de desplazamientos y una vez estabiliza-
- 13 da la respuesta por el amortiguamiento interno y aerodinámico se ejerce
- 14 la fuerza del viento sobre el cable.
- 15 4. Los vínculos dinámicos entre los elementos de vigas y de barra se im-
- 16 plementaron de forma tal, que no se transmiten los momentos de unos a
- 17 otros. Por lo tanto, en los nodos de sujeción los elementos de barra CD
- 18 y AB transmiten únicamente fuerzas direccionales en C y B .

### 19 4.2.2. Modelo de viento

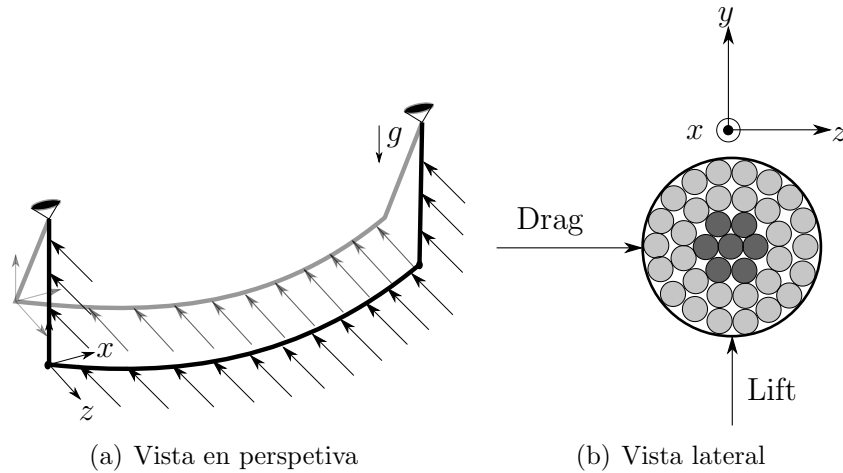
20 Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas

21 debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuer-

22 zas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift).



1 Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes, en la  
 2 capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo. Y luego proyectarla la fuerza  
 3 neta en la dirección del flujo medio. A diferencia de estas, las fuerzas lift que  
 4 aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones en-  
 5 tre el intradós (sona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta  
 6 diferencia de presiones puntuales entre dos superficies contrarias, genera una  
 7 circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese  
 8 campo en curva cerrada, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una  
 9 fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura ?? . Para  
 10 cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la competente de  
 11 lift es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, garantiza que  
 12 la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas  
 13 entre las superficies del sólido.



**Figura 4.2:** Ilustración del viento y sus efectos.

14 La componente unidireccional del flujo, puede ser desglosada en un termino  
 15 medido y otro fluctuante  $u_v(z, t) = u_m(z, t) + u'(z, t)$ . A partir de esto, la  
 16 velocidad media para un período  $T$  toma la expresión de la Ecuación (4.24):

$$u_m(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u_v(t) dt \quad (4.24)$$

17 El valor del periodo  $T$  debe ajustarse minimizando la desviación estándar  
 18 asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la  
 19 desviación estándar de la velocidad fluctuante y la media para un instante de  
 20 tiempo dado. Sin embargo, para este trabajo no se consideran las fluctuaciones

1 debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de  $T = 1/30$  s  
2 y de velocidad media, se extrajo del artículo (**stengel2017measurements**).

3 Considerando el aire como un fluido no newtoneano,  $\rho$  su densidad asociada  
4 a determinada temperatura,  $C_d$  el coeficiente de drag para como función del  
5 número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo (“drag”)  
6 para un elemento cilíndrico de diámetro  $d_c$  y largo  $l_e$  se calcula según la Ex-  
7 presión (4.25):

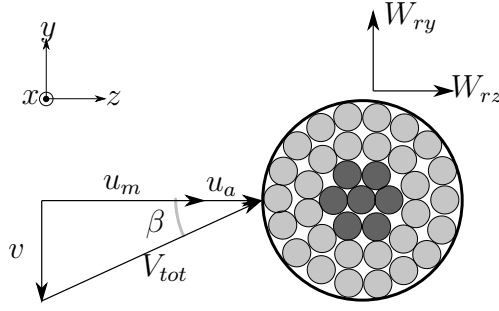
$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{\rho(T)C_d(Re)}{2} d_c u_m(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c u_m(t)^2 l_e \quad (4.25)$$

8 Para este cálculo se asumió constantes las magnitudes al interior del ele-  
9 mento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto  
10 del integrando por el largo del intervalo. Además se para este trabajo la car-  
11 ga del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente  
12 a la mitad de  $F_v$ . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos  
13 nodales que estas inducen, se cancelan con los elementos aledaños. Por otra  
14 parte, los valores de  $C_d$  se extrajeron de las referencias (**Foti2016**) y se ve-  
15 rificaron con el estudio para estos coeficientes durante tormentas conectivas  
16 (**mara2007effects**). La densidad  $\rho$  del aire se consideró la usual para presión  
17 atmosférica y una temperatura de 20 °C.

#### 18 4.2.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas aso- 19 ciadas.

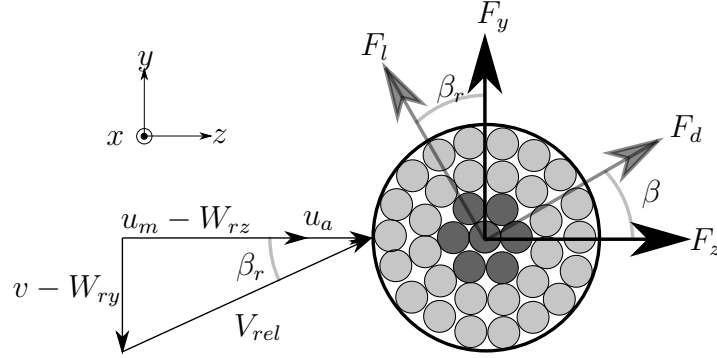
20 En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No  
21 obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortigua-  
22 miento introducido. Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde  
23 el viento tiene determinada componente transversal según  $z$  y perpendicular  
24 (según  $y$ ). En la figura 4.3 se indican con el nombre  $u$  y  $v$ . En esta figura las  
25 velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tan-  
26 to absoluto. Asimismo en esta imagen se representan las velocidades media  
27 y fluctuante  $u_m$  y  $u_a$ , que sumada a la velocidad  $v$ , resulta en el vector  $V_{tot}$   
28 formando un ángulo  $\beta$  con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce  
29 sobre el conductor, este despliega una determinada velocidad rígida en ambas  
30 direcciones identificadas con las letras  $W_{ry}$  y  $W_{rz}$ .

31 Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia  
32 anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las



**Figura 4.3:** Esquema en sistema de referencias absoluto.

- 1 velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 4.4. Este campo  
2 de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de drag  $F_d$  y de lift  $F_l$ .  
3 Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando dos  
4 fuerzas  $F_z$  y  $F_y$ .



**Figura 4.4:** Esquema en sistema de referencias relativo.

- 5 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde  
6 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta  
7 natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y  
8 dinámicas. La velocidad relativa absoluta, es el cuadrado de los catetos, tal  
9 y como se expresa en la Ecuación (4.26). Tomando como hipótesis que las  
10 velocidades relativas del rígido y la componente vertical  $v$ , son mucho menores  
11 que las asociada al flujo medio, en el sentido de  $z$  se deduce la Ecuación (4.27).

$$V_{rel}^2 = (u_m + u_a - W_{rx})^2 + (v - W_{ry})^2 \quad (4.26)$$

$$\frac{V_{rel}^2}{u_m} = u_m + 2(u_a - W_{rz}) \quad (4.27)$$

- 12 La carga de drag postulada en la Ecuación (4.24) se escribe por unidad de  
13 longitud y se reescribe en (4.29). Además, se muestra que para las asunciones

1 de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a  $0^\circ$ . Para  
 2 formular esto matemáticamente se plantean las Ecuaciones (4.29) y (4.28).

$$\tan(\beta) = \frac{v - W_{ry}}{u_m - W_{rz} + u_a} = \frac{\frac{v - W_{ry}}{u_m}}{1 - \frac{W_{rz} + u_a}{u_m}} \approx 0 \quad (4.28)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m + 2(u_a - W_{rz})) u_m \quad (4.29)$$

3 Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes  
 4  $z$  e  $y$ . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas  
 5 absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de estas  
 6 se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido.  
 7 Considerando que el ángulo  $\beta$  es ínfimo y por lo tanto  $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$  y  
 8  $\cos(\beta) = 1$  al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + u_a^2 - 2u_a u_m) \cos(\beta_r) \quad (4.30)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + u_a^2 + 2u_a u_m) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (4.31)$$

9 Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en  
 10 componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es una  
 11 promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo,  
 12 se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes  
 13 tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un  
 14 tercer termino surge al desarrollar la Ecuación (4.29). Este factor depende del  
 15 producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Vinculando al fluido  
 16 y al sólido, es por esto que recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico.  
 17 Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sporepresivo el sentido de  
 18 esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición  
 19 de fuerzas según  $z$  se le llaman  $\bar{F}_x$ ,  $F_a$ ,  $-D$  a la componente media, alternante  
 20 y de amoritguamiento dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan  
 21 a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2) \quad (4.32)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_a^2) \quad (4.33)$$

$$D = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2u_a u_m) \quad (4.34)$$

### 4.2.3. Hipótesis de trabajo

Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no el eje central de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio. Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

1. No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
2. La velocidad incide en el sentido  $z$  de forma perpendicular a la linea.
3. La velocidad relativa transversal  $v - W_r y$  al igual que la componente alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el sentido de  $z$  llamada  $u_m$ .
4. La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera despreciable frente al drag.
5. Para la fuerza en el sentido de  $z$  se desprecia la componente fluctuante  $F_a$ .
6. Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico se promedió la velocidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el dominio temporal de simulación.

El primer supuesto parte del modelo figurado en 4.4, para poder realizar este análisis plano, se obvian las fluctuaciones espaciales en el sentido axial del conductor. Esta asunción no es del todo correcta, pues la turbulencia del fenómeno provoca fluctuaciones en las cargas a lo largo dela linea, cambiando así, su orientación. Esto se asocia directamente con la hipótesis 4, donde la fuerza alternante proveniente de la presencia de vórtices se desprecia.

Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje  $z$  en la Figura ??, siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipótesis

1 proviene de diferentes trabajos publicados, donde la componente perpendi-  
2 cular a la superficie terrestre o ascendente (según  $y$  ) suele ser significati-  
3 vamente menor a la paralela (en el sentido de  $z$ ) (**duranona2009analysis**)  
4 (**stengel2017measurements**) **yang2016nonlinear**. Si bien simplifica lo ha-  
5 ce de forma conservadora. Puesto que supone al sistema de transmisión, en el  
6 tiempo inicial, dispuesto completamente perpendicular al sentido del viento,  
7 es así que este descarga su mayor fuerza sobre el sistema (Hipótesis 2).

8 Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad  
9 de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis, se sustenta en  
10 la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del  
11 peso que se opone a la fuerza de sustentación. De todos modos, esta fuerza en  
12 sentido ascendente se despreció frente al drag, consecuencia de la simetría de  
13 revolución tangencial del conductor. Esto se establece en la Hipótesis 4.

14 Otra hipótesis a clarificar refiere al amortiguamiento aerodinámico (Hipóte-  
15 sis 6). Se utilizó una simplificación adicional en la velocidad de viento para su  
16 cálculo. Se consideró una velocidad constante, igual al promedio de viento en  
17 todo el dominio temporal. Este es el valor que insertó para el cálculo de  $D$   
18 según la Ecuación (4.34). Por último se explicitan las premisas 3 y 5 que fue-  
19 ron consideradas para calcular el campo de velocidades relativo y sus fuerzas  
20 asociadas.

# 1 Capítulo 5

## 2 Resultados numéricos

3 En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante el  
4 desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementación  
5 corrotacional detallada en 3.1, para luego aplicarse a modelos específicos de  
6 conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando un compu-  
7 tador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de 8 Gb. La  
8 formulación se implementó en el software de código abierto ONSAS <sup>1</sup> el cual  
9 se ejecutó en GNU-Octave **Octave** visualizándose los resultados haciendo  
10 uso de la herramienta Paraview **squillacote2007paraview**. Vale notar que  
11 el hilo conductual de este capítulo fue ideado con un aumento progresivo de  
12 complejidad. Capturando en modelos simples y académicos los movimientos  
13 fundamentales de los elementos, para garantizar así una representación cabal  
14 del fenómeno de oscilación del conductor en servicio.

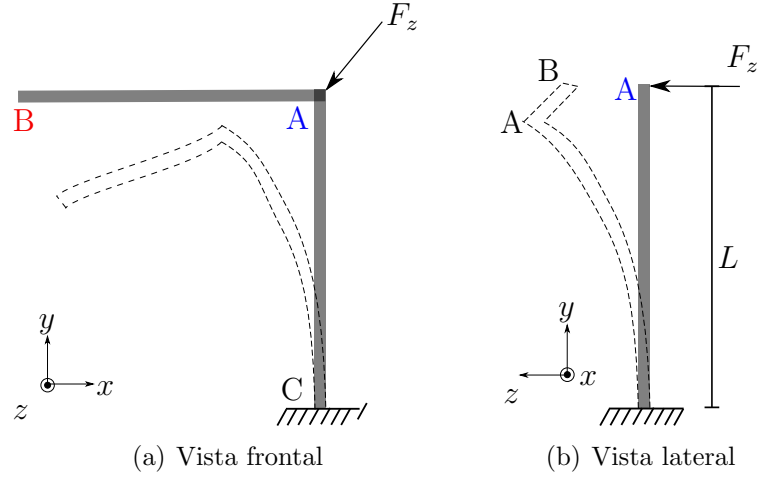
### 15 5.1. Vigas en voladizo con ángulo recto

16 Este ejemplo fue publicado por primera vez en **simo1988dynamics** y es  
17 usualmente considerado en la literatura para validar formulaciones de elemen-  
18 tos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales (**albino2018co**  
19 **Le2014**). El mismo consta de dos barra idénticas en ángulo recto formando  
20 una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo  $L = 10$  m tal y  
21 como se ilustra en las Figuras 5.1.

22 Las propiedades del rigideces de torsión, flexión y directa del ejemplo se se-  
23 leccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales,

---

<sup>1</sup><https://github.com/ONSAS/ONSAS/>



**Figura 5.1:** Disposición geométrica de la estructura.

1 garantizan movimientos de gran amplitud y para esto deben cumplir determi-  
2 nadas igualdades Por esta razón la elección de dichas magnitudes se obtiene  
3 resolviendo el sistema compatible indeterminado de Las Ecuaciones (5.1) y  
4 (5.2) descritas en la bibliografía. Para este trabajo los segundos momentos de  
5 inercia según el eje  $z$  e  $y$  además de los valores del módulo de elasticidad lineal  
6 y transversal valen:  $E = G = 10^6$   $A = 1$   $I = J = 10^{-3}$  y  $\nu = 0.3$ . Se hace notar  
7 que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan  
8 de sentido.

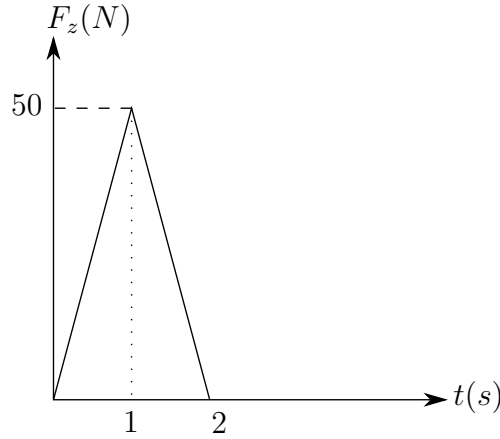
$$GA = EA = 10^6 \quad (5.1)$$

$$GJ = EI = 10^3 \quad (5.2)$$

9 La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplaza-  
10 mientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que per-  
11 miten aplicar una fuerza en el sentido del eje  $z$  tal y como se muestra en la  
12 Figura 5.2. Este forzante flecta y trosiona al sistema en un plano saliente al  $xy$ ,  
13 produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo  
14 gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento,  
15 son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos  
16 desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la  
17 carga. Esta fuerza actúa linealmente en los dos segundos iniciales, crece hasta  
18 un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y luego decrece



1 hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual en un corto  
2 intervalo de tiempo. Para reproducir este comportamiento altamente dinámico  
3 se eligieron 10 elementos por miembro y un incremento de tiempo  $\Delta T = 0.25$   
4 s.



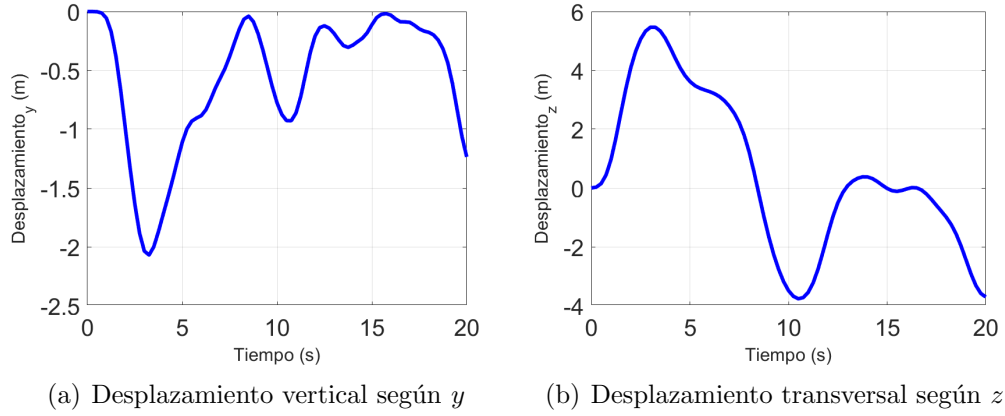
**Figura 5.2:** Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

5 El objetivo principal del ejemplo es el validar la librería de códigos corro-  
6 tacional incorporados en el software ONSAS <sup>1</sup>, por ende, tanto el método de  
7 resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en  
8 el artículo **Le2014**, comparando así resultados semejantes. Consecuentemente  
9 se implementó un algoritmo que lleva el nombre de sus creadores (HHT) y  
10 se selecciono un valor característico  $\alpha = -0.05$  y un valor de parada en des-  
11 plazamientos de  $10^{-7}$  m. Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de  
12  $\Delta T = 0.25$  s.

13 Para comparar con el paper de referencia se plasmaron gráficamente de-  
14 terminados grados de libertad correspondientes al nodo A. Estos son: el des-  
15 plazamiento lineal vertical (según el eje  $y$ ) y el transversales (según  $z$ ). Los  
16 resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras ?? y ?? en función  
17 de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa  
18 magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la  
19 estructura. En particular, la Figura ?? denota oscilaciones que alcanzan las  
20 decenas de metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exi-  
21 gente en términos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no  
22 armónico de vaivén en el eje  $z$ , se puede notar la presencia no conservativa

<sup>1</sup><https://github.com/ONSAS/ONSAS/>

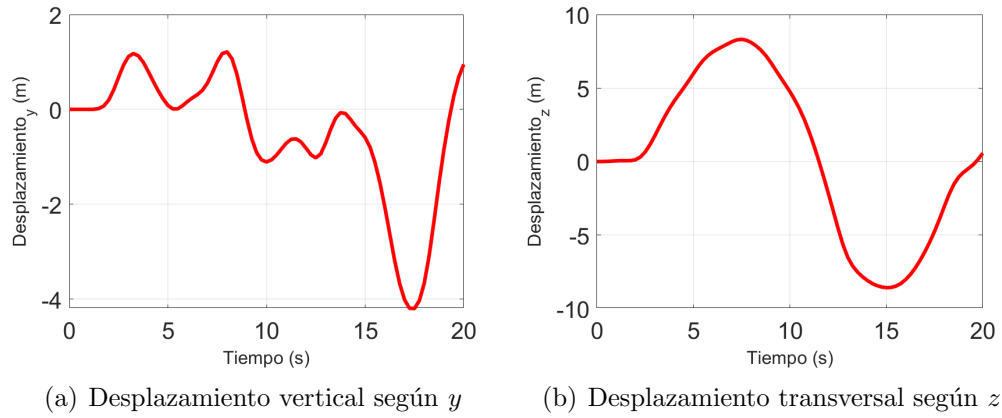
1 de la formulación corrotacional, ya que las amplitudes prestan una tendencia  
2 atenuante con el tiempo.



**Figura 5.3:** Desplazamientos de control del nodo A

3 Por otra parte al analizar en la Figura ?? se observa que los desplazamientos  
4 en  $y$ , son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido de la  
5 fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano  $yz$  con el versor  $x$   
6 saliente, el movimiento del nodo  $A$  es análogo al de una viga empotrada con  
7 una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de  $A$  es  
8 siempre en el sentido de  $-y$ , lo que se refleja en La Figura ?? y se condice con  
9 la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación con  
10 los presentados en la bibliografía de referencia **Le2014**, observamos similares  
11 valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento respecto  
12 a las Figuras 5.3 y 5.4. También así los valles y las crestas de la curvas se  
13 suceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que  
14 el software implementado reproduce correctamente el ejemplo y es capaz de  
15 capturar movimientos de flexo-torsión cabalmente.

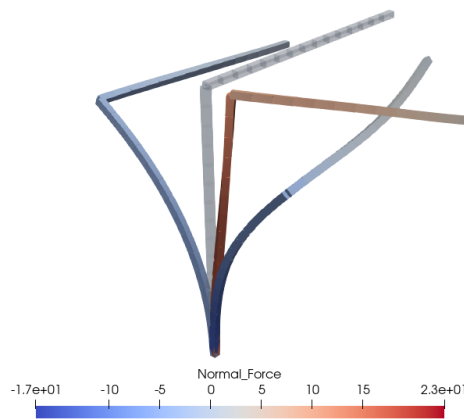
16 Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B. En la Figura ??  
17 se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente, y una  
18 forma que se asemeja a una senoide. Esto podría vincularse al modo flector en  
19 el plano  $xz$  de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la dirección  $z$ . Una  
20 vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de AC superpuestos  
21 con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento. El autor del trabajo  
22 **Le2014** publicó el desplazamiento en  $z$  de B y los resultados de este trabajo  
23 ajustan con exactitud a dicha curva. Complementando este análisis podemos  
24 comparar los desplazamientos de los nodos A y B concluyendo que los movimientos



**Figura 5.4:** Desplazamientos de control del nodo B

1 inerciales de la barra A-B afectan notoriamente a los desplazamientos del nodo  
 2 B respecto de A, tanto en frecuencia como en magnitud.

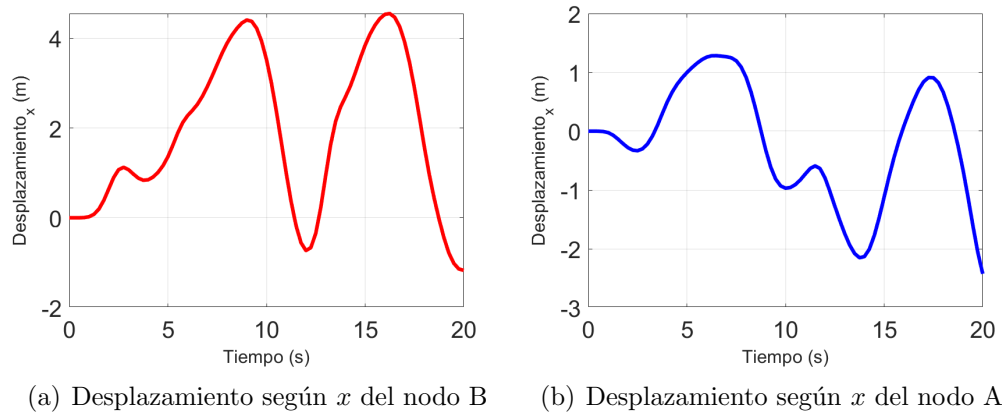
3 Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se visualizaron me-  
 4 diante el software *Paraview* las deformadas para diferentes instantes de tiempo:  
 5  $t_1 = 4$  s,  $t_2 = 11$  s y  $t_3 = 19$  s. En la Figura 5.5 se observan las oscilaciones  
 6 flexionales para distintos planos  $yx$  e  $yz$ . Estos movimientos son originados por  
 7 diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante  $F_z$  mientras que en el  
 8 miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a  
 9 su unión rígida con el resto de la estructura.



**Figura 5.5:** Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s

10 Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las  
 11 magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inma-

1 nentes a cada elemento en La Figura 5.5. En esta se identifica que el esfuerzo  
 2 alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando  
 3 considerables fluctuaciones temporales. En simultaneo, la viga horizontal A-B  
 4 desarrolla fuerzas normales en todo su largo. Se suceden tanto positivas como  
 5 negativas, es oportuno notar que un modelo lineal para pequeños despla-  
 6 zamientos concluiría que los esfuerzos en esa viga serían nulos. Además este  
 7 modelo lineal arrojaría desplazamientos triviales en  $x$  para ambos nodos, in-  
 8 duciéndose significativos errores para este tipo de cargas de alto impacto en  
 9 estructuras de exigua rigidez. El modelo implementado desarrolla magnitudes  
 10 no despreciables de desplazamientos en  $x$  tal y como se constata en las Figu-  
 11 ras 5.6. He aquí las principales diferencias y la importancia de implementar  
 12 un modelo considerando no linealidad geométricas, estas consideraciones son  
 13 esenciales para la aplicación principal de este trabajo.

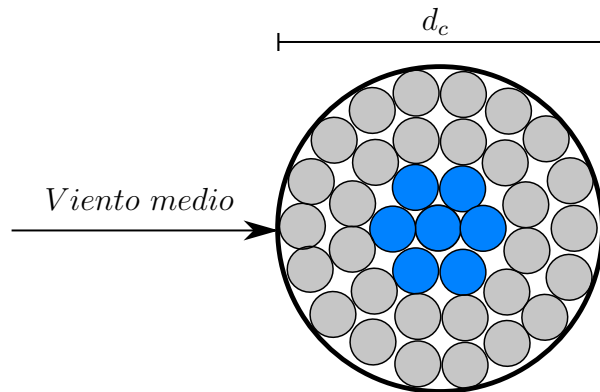


**Figura 5.6:** Desplazamientos en  $x$  de los nodos A y B

## 5.2. Modelo simplificado de una linea

En este apartado se presenta un primer modelo simplificado del enfoque central de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de **foti2018finite** mas ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado, como ser el caso de: **luongo1998non** y **martinelli2001numerical**. El ejemplo consiste en un conductor de transmisión eléctrica reforzado con núcleo de acero. La raíz de acero forjado tiene como propósito aportar rigidez mecánica al componente, disminuyendo la deflexión y flexibilidad del conjunto. Esto suele ser ventajoso para largos vanos donde la rigidez del conductor es una variable decisiva. Además su construcción no afecta significativamente la resistividad eléctrica debido al efecto de reluctancia radial variable. que obliga a la corriente a fluir principalmente en la superficie.

El modelo del conductor esta estandarizado bajo la norma IEC europea **IEC6081** y se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la cantidad de cables en el núcleo y en la periferia respectivamente. El diámetro se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos de aluminio (color gris en la Figura 5.7) y los 7 de acero (color azul). Además asumiremos despreciables, sobre las propiedades del flujo y la geometría, las irregularidades de su perfil en la silueta.



**Figura 5.7:** Esquema del conductor ASCR 7/26.

El vano tiene un largo  $L_c=267$  m mientras que el cable en su configuración deformada mide 269 m. Esta diferencia de longitudes del conductor en su eje axial, responde a un tensado que se realiza durante su instalación. En la etapa de montaje del conductor, se ajusta la pre-tensión de manera tal que la altura ratifique los requerimientos de seguridad según la urbanización, contaminación

1 magnética y tipografía del terreno. Para esta simulación no se tendrá en cuenta  
2 la tensión previa al momento de la colocación pero si la tensión debida a la  
3 carga del peso. Vale notar que el valor de los esfuerzos generados durante la  
4 instalación es menor a un 2 % respecto a los esfuerzos axiales desarrollados  
5 durante su movimiento.

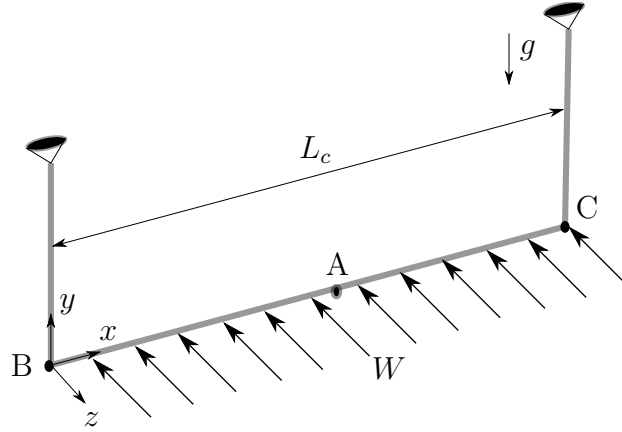
6 El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad  $E$ , módu-  
7 lo de poisson  $\nu$ , una densidad similar  $\rho$  y una rigidez flexional y torsional  $EI$   
8 y  $GJ$  respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de la norma  
9 *ISO:9001* y se presentan en La Tabla ??.

$d_c(\text{cm})$	$m(\text{kg/m})$	$EA \text{ kN}$	$EI \text{ N m}^2$	$GJ \text{ Nm}^2$
2.81	1.8	29700	2100	159

**Tabla 5.1:** Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

10 Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto  
11 en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos ca-  
12 denas aisladoras en posición vertical, de un largo  $L_a = 3 \text{ m}$  cada una de ellas.  
13 Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni es-  
14 fuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas,  
15 para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en  
16 las tres direcciones en  $x$ ,  $z$  e  $y$  en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas solo  
17 toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan correc-  
18 tamente las presentadas por **foti2018finite**, donde los extremos se encuentran  
19 sujetos. Habiendo detallado someramente los componentes que integran al  
20 ejemplo se presenta un esquema de la geometría en la Figura 5.8.

21 Existen una diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postula-  
22 dos por **luongo1998non** y **martinelli2001numerical**, en donde se resolvió  
23 mediante elementos de barra trinodal y de viga corrtacional respectivamente.  
24 Para amibos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generadas arti-  
25 ficialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se  
26 despreciaran las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flu-  
27 jo medio  $W$  en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico  
28 y alcanza la velocidad media máxima  $W_{max}$  en 20 segundos. Este valor de  
29 velocidad se calculó según **euroCode** considerando un flujo tipo capa límite  
30 atmosférica con las propiedades indicadas en La Tabla ?? asociadas a un tipo  
31 de terreno sub-urbano o industrial.



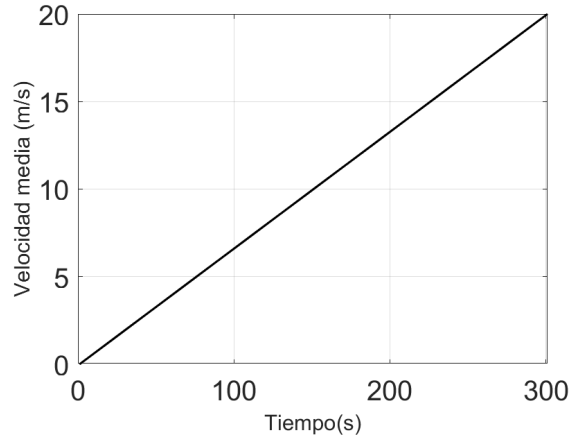
**Figura 5.8:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

$k_r$	$z_0$	$z_{min}$
0.22	0.3 m	8 m

**Tabla 5.2:** Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para  $W_{max}$

La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gravitatoria según el eje  $-z$  tal cual se muestra en la Figura 5.8. No se muestran los resultados de esta etapa debido a que carecen de relevancia y en el trabajo de referencia se toma la catenaria como condición inicial. La fuerza peso es relevante desde un punto de vista dinámico pues mitiga posibles inestabilidades cuando las normales de los elementos son próximas a cero. Una vez estabilizada la respuesta del sistema por el amortiguamiento interno, se aplica una fuerza lineal de media positiva según el eje  $-z$  desde cero hasta  $W_{max}$ . Esta forma del perfil podría emular el aumento modulado de un presiones en un túnel de viento entre las bocas de entrada y descarga. La forma se muestra en La Figura 5.9.

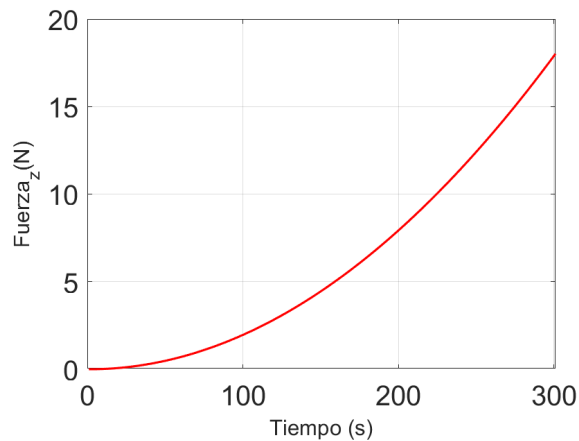
Para este estudio no se considerará la fuerza perpendicular al sentido de flujo: lift. Esta es despreciada por diferentes autores ([lee1992nonlinear](#)) ([Foti2016](#)) ([Papailiou1997](#)) principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares a los flujos esta relacionada posibles asimetrías tangenciales en el perfil. Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce en una fuerza de lift nula. Esta es la principal di-



**Figura 5.9:** Perfil de velocidad progresiva  $z$ .

1 referencia de este caso en comparación por lo propuesto en la literatura fuente  
2 (**luongo1984planar**) y (**foti2018finite**) donde si son considerados perfiles  
3 con formaciones de hielo.

4 El perfil de velocidades en la Figura 5.9 genera fuerzas sobre la estructura.  
5 La orientación del cable es tal que el flujo en todo punto es transversal a el.  
6 Los valores de  $C_d = 1.5$  se extrajeron la referencia (**foti2018finite**). Se aclara  
7 que el angulo de ataque varía durante la trayectoria del cable, no obstante el  
8 coeficiente  $C_d$  permanece constate debido a la simetría de revolución del perfil.  
9 Se gráfica entonces las fuerzas sobre cada nodo del conductor en La Figura  
10 5.10.

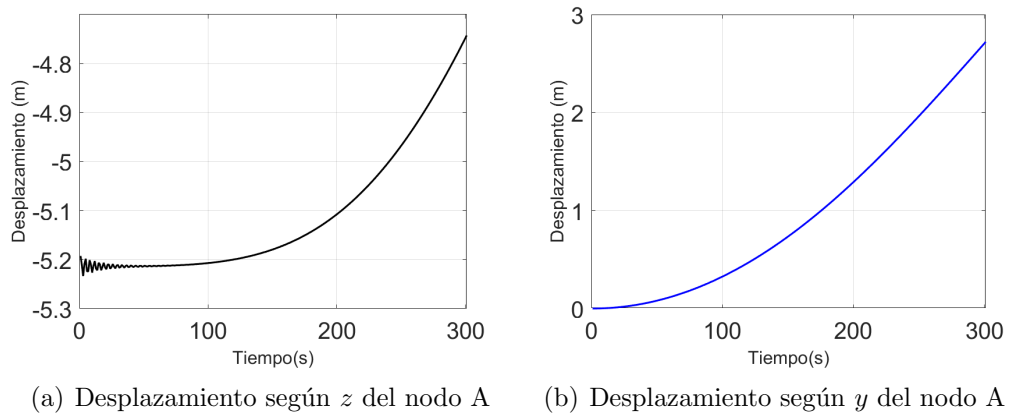


**Figura 5.10:** Perfil de fuerza nodal según el eje  $z$ .

11 A continuación se exponen los desplazamientos verticales y horizontales del  
12 nodo A. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el



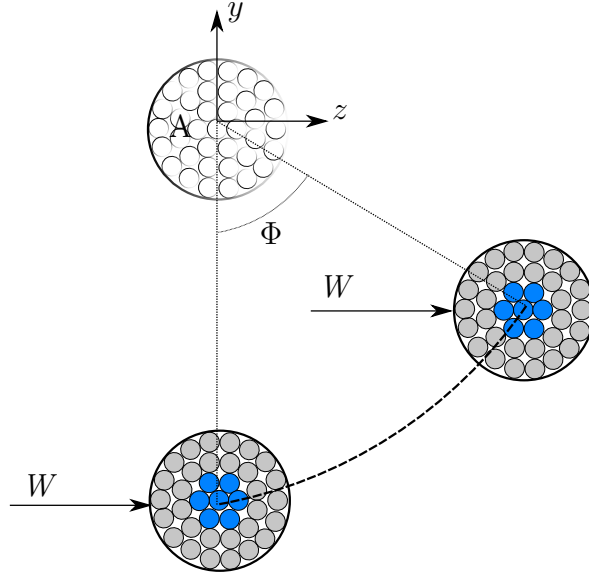
1 perfil de fuerza y desplazamientos. Esta homología entre los perfiles de ambas  
2 magnitudes es explicable mediante un análisis de Fourier del sistema. Haciendo  
3 referencia a la función de transferencia que relaciona a ambas variables, la  
4 misma produce unicamente en desfazaje en estado estacionario. Como la curva  
5 de carga es de manera gradual y no presenta exabruptos en el tiempo, podemos  
6 suponer que la respuesta es cuasi-estática. Se presentan entonces en las Figuras  
7 5.11 los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente del nodo A  
8 situado en el punto medio del vano.



**Figura 5.11:** Desplazamientos del nodo A

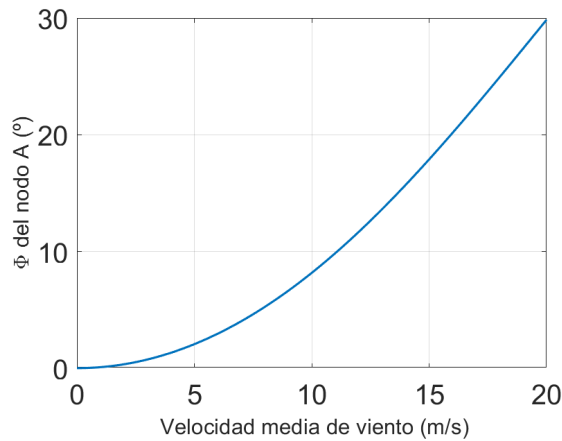
9 Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la  
10 literatura fuente (**foti2018finite**), se capturo el ángulo de balanceo del punto  
11 A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función tangente que  
12 vincula el ángulo respecto da la deformada en el eje  $x$  con los desplazamiento  
13 en  $z$  e  $y$ . Para ilustrar al lector se realizó el esquema mostrado en la Figura  
14 5.12 del ángulo  $\Phi$  en cuestión.

15 Se graficaron las trayectorias del ángulo para diferentes valores de velocidad  
16 media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica.  
17 Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante  
18 al de que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras  
19 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el  
20 tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte,  
21 en comparación con los resultados presentados por **foti2018finite** se observan  
22 valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo la for-  
23 ma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el valor  
24 máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamente, lo



**Figura 5.12:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincronizadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompañan produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia del lift y la variación del ángulo de ataque con el ángulo. Como en la referencia **foti2018finite** se toman en cuenta un perfil con formaciones de hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.



**Figura 5.13:** Ángulo de balanceo  $\Phi$  en función de la velocidad media  $W(t)$ .

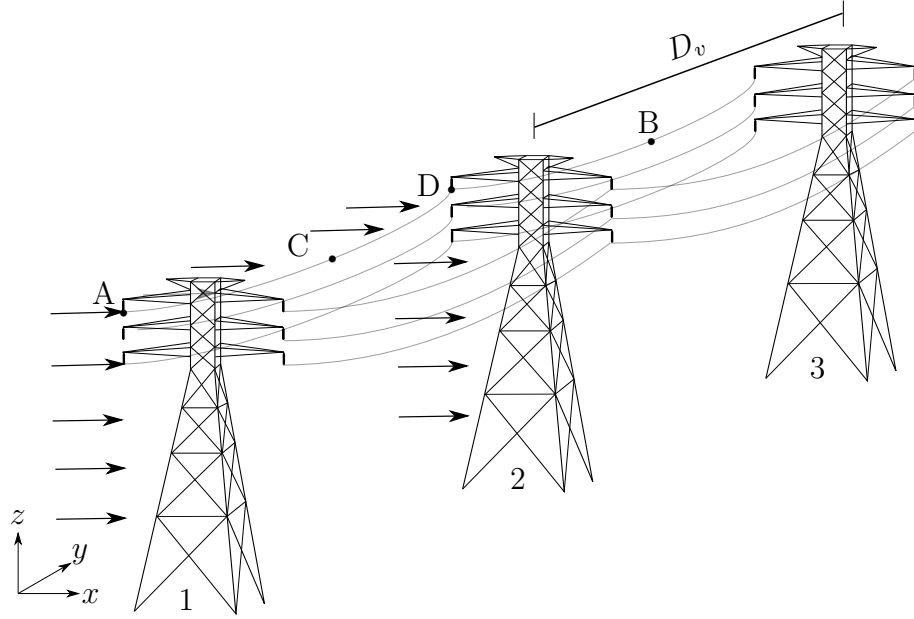
1 El ejemplo permite conjeturar que la respuesta numéricas del modelo re-  
2 presentan de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para con-  
3 ductores de transmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejada en los  
4 resultados arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada,  
5 es posible aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

### 6 5.3. Sistema de transmisión eléctrica

7 Este apartado ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas  
8 de transmisión eléctricas afectados por vientos extremos no sinópticos, en par-  
9 ticular, tormentas conectivas. Las estructuras de suministro en alta tensión  
10 constan de un tendido eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el  
11 conductor garantizando un traslado de la corriente de manera segura y con-  
12 fiable. El dominio del ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas  
13 consecutivamente y dos vanos de idéntico largo  $D_v = 206.5 \text{ m}$  tal cual se índi-  
14 ca el Esquema 5.14. Para el conductor de control se etiquetan los puntos de  
15 fijación A y D a la torre 1 y 2 respectivamente. También, se identifican los  
16 nodos en el punto medio del primer y segundo vano con los literales C y B  
17 respectivamente. Con el objetivo de representar una geometría real de una  
18 línea de alta tensión y no aborrecer al lector con descripciones de propiedades,  
19 los conductores de la simulación se corresponden con el Ejemplo 5.2 y cuyas  
20 propiedades mecánicas se explicitan en la Tabla ??.

21 En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que trans-  
22 portan un voltaje mayor a  $72.5 \text{ kV}$ . Este valor de tensión es eminentemente  
23 peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elemen-  
24 tos aisladores. Estas cadenas aisladoras tradicionalmente de vidrio y cerámicas  
25 han ido mutando a poliméricas con un núcleo sólido, aumentando así su tena-  
26 cidad y flexibilidad. Según la normativa Norma IEC 60815, para alta tensión,  
27 deben medir un largo de 10 in. Para el modelo las cadenas se modelaron co-  
28 mo barras de Green, debido a su exigua rigidez a flexión y su articulación de  
29 anclaje en ambos extremos. Además se consideró un modulo de elasticidad  
30 aproximado  $E = 70 \text{ GPa}$  según los estudios experimentales realizados por la  
31 referencia **TesisMexicano**.

32 Al igual que los aisladores, las barras de la estructura metálica se modelaron  
33 con elementos de tipo green, con una ley materialsaint venant kirchhoff con  
34  $E = 300 \text{ GPa}$  y  $\nu = 0.3$ . Estos valores se corresponden con un acero ASTM

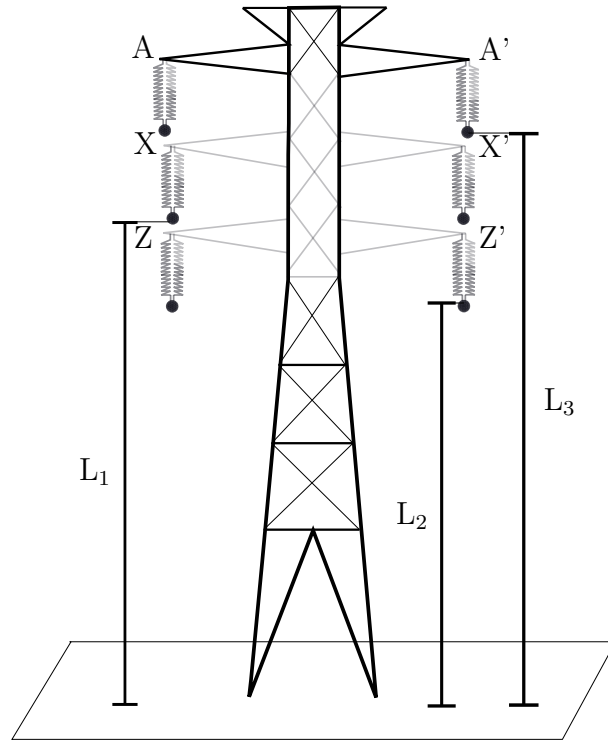


**Figura 5.14:** Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo.

1 A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y  
2 ASTM <sup>o</sup>65. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre  
3 los opuestos de la cercha 14.8 m. Además son capaces de sostener 6 líneas,  
4 estas se corresponden a cada altura, con cada una de las fases eléctricas. Las  
5 líneas se encuentran colocadas a tres cotas distintas  $L_1 = 31.75$  m,  $L_2 = 26.03$   
6 m,  $L_3 = 39.76$  m, tal y como se muestra en 5.15.

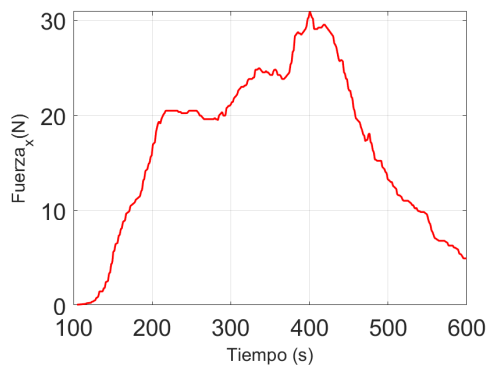
7 La simulación consta de dos etapas, primeramente partiendo de la confi-  
8 guración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad  
9 según el eje  $-z$  tal cual se muestra en la Figura 5.15. Nuevamente, al igual que  
10 en el Ejemplo 5.2 , esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones  
11 son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el  
12 amortiguamiento aerodinámico en desplazamientos. Este se calculó como una  
13 aproximación a partir de la literatura **matheson1981simulation** promedian-  
14 do la velocidad media de viento, resultando  $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \bar{v} = 0.15$  Ns/m.

15 Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormen-  
16 ta convectiva capturado en la referencia **Stengel2017a**, positiva según el eje  
17  $x$ . No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales en la coordenada axial del  
18 cable, asociada a una función de coherencia de correlación espacial debida  
19 a la turbulencia. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó  
20 únicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer

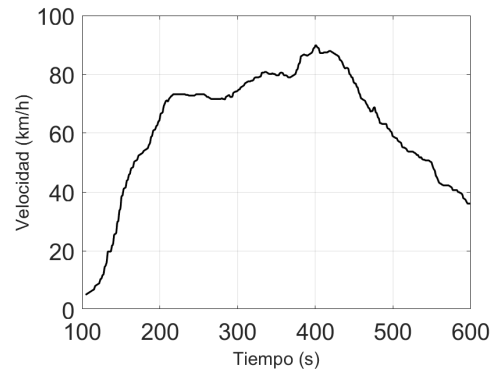


**Figura 5.15:** Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

1 resultados respecto al comportamiento flexional en el plano  $yz$ , lo que se evi-  
2 denciará a continuación en disímil desarrollo de las trayectorias entre los nodos  
3 A, C, D y B. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa  
4 en que estos fenómenos tienen dimensiones espaciales del orden de 40 metros  
5 a 40 kilómetros **fujita1985downburst**, consecuentemente es factible que la  
6 tormenta afecte a una fracción del tendido. Se muestra continuación en las  
7 Figuras ?? los valores de fuerza y velocidad aplicados en la coordenada  $x$  entre  
8 los nodos A y D para cada instante.



(a) Carga aplicada sobre los nodos.



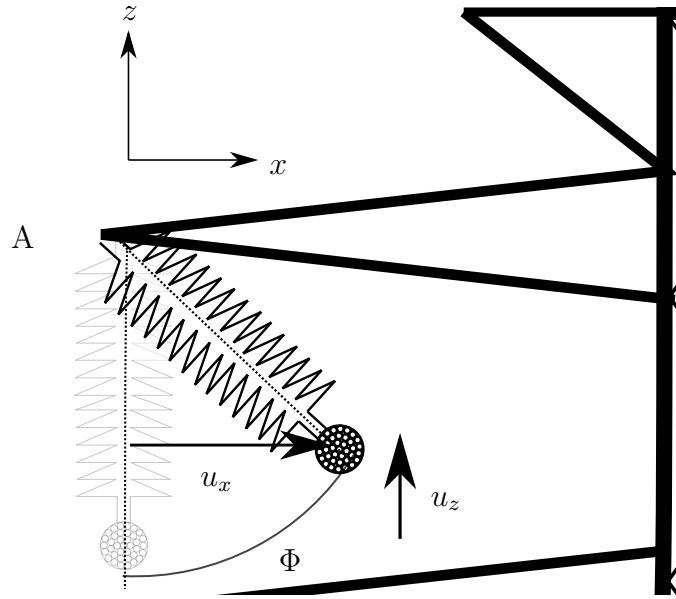
(b) Perfil de velocidades de viento.

1 Las tormentas severas generan corrientes descendentes donde las veloci-  
2 des aumentan vertiginosamente en pequeños intervalos de tiempo, alcanzando  
3 umbrales de hasta 270 km/h **fujita1985downburst**. Para este modelo, el  
4 perfil representado es menor tenor, mas no el aumento súbito del fenómeno.  
5 La velocidad se eleva del valor nulo a 80 km/h en menos de 3 minutos, tal  
6 y como se observa en la Figura ?? . Debido al impacto de del viento sobre el  
7 conductor se generan fuerzas, estas se calcularon con los valores de coeficiente  
8 drag y fórmula detalladas en el Ejemplo 5.2 anterior extraídos de la referencia  
9 **Foti2016**.

10 Ya se ha resaltado en retiradas ocasiones los posibles daños severos que  
11 puede ocasionar un excesivo balanceo del conductor. Volores desmedidos de  
12 esta variable deben controlarse en todos los aisladores rotulados en el Esque-  
13 ma 5.15. Consecuentemente, se compararon cuantitativamente las oscilaciones  
14 entre fases (A-A', X-X', Z-Z'), no apreciándose sensibles diferencias, tanto en  
15 desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen aprecia-  
16 bles variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A').  
17 Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho  
18 de omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe  
19 antes el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando  
20 que los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A  
21 como variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en  
22 los ejes  $x$  y  $z$  como también el ángulo de oscilación  $\Phi$  tal y cual se observa en  
23 la Figura 5.16.

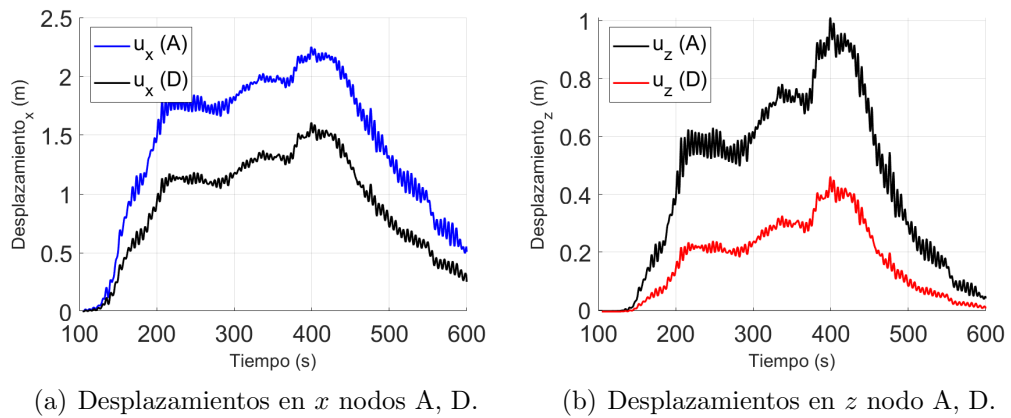
24 El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos  
25 de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de  $\Delta T = 0.5$   
26 s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico  
27  $\alpha = -0.05$ , luego de un arduo y tedioso procedimiento iterativo de ajuste de  
28 parámetros se realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con  
29 tolerancias en desplazamientos y en fuerzas residuales de  $10^{-5}$  m y  $10^{-5}$  N  
30 respectivamente.

31 A continuación se figuran los desplazamientos verticales y horizontales de  
32 los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En  
33 estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de  
34 fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magni-  
35 tudes externas, responden a un argumento basado en el análisis en frecuencia  
36 del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en



**Figura 5.16:** Ilustración de magnitudes de balanceo.

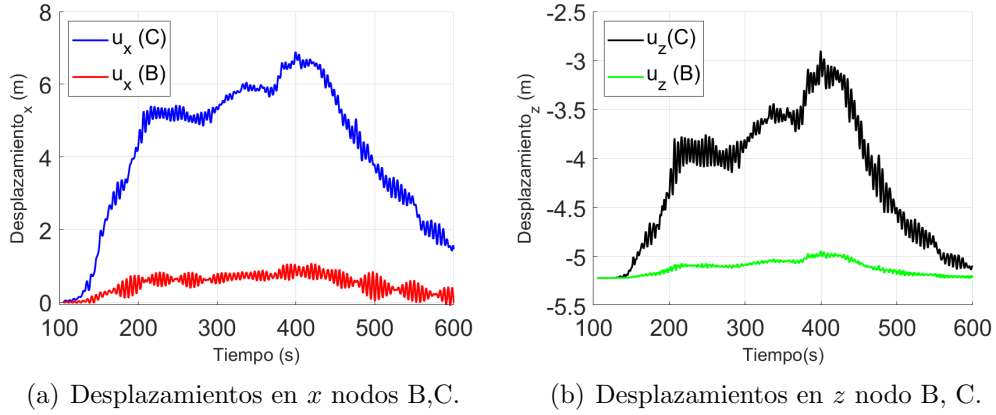
1 estado estacionario. En ?? y ?? se observan los desplazamientos en vertical y  
2 transversal respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a  
3 la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A  
4 desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el  
5 carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo  
6 no representa los cargas inerciales de los vanos contiguos a este.



**Figura 5.17:** Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D

7 Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del con-  
8 ductor también despliegan grandes desplazamientos, este fenómeno resulta  
9 indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de segu-

1 ridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan  
2 generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proxi-  
3 midad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los compo-  
4 nentes. Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos  
5 para los nodos B y C.



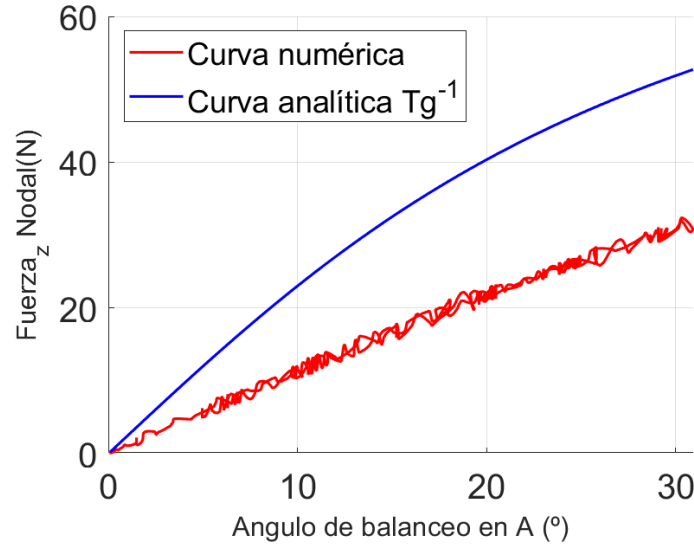
**Figura 5.18:** Desplazamientos de los nodos medios B y C

6 En la Figura ?? se aprecia que el orden de los movimientos, para ambos  
7 nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación entre  
8 estos es de unos 14 metros podremos garantizar que no habrá impactos en-  
9 tre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas  
10 líneas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central,  
11 para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe  
12 considerarse a la hora del diseño. En la Figura ?? se muestra que el descenso  
13 máximo de la línea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando  
14 un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza  
15 ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento  
16 de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par  
17 de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes  
18 en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de  
19 que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en  
20 puntos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctua-  
21 ción temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Gráficas  
22 5.17.

23 En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables  
24 cinemáticas se elaboró la Figura ?? carga desplazamiento para el nodo A. En

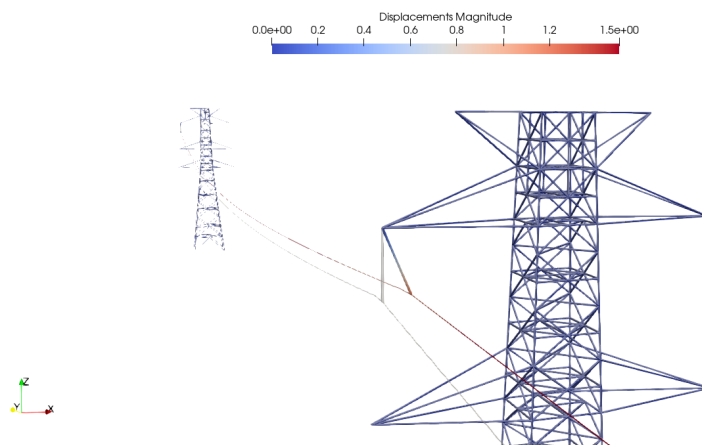


1 abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza no-  
2 dal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos se  
3 graficó un calculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo  
4 en el área de ingeniería del viento (Stengel2017a), (duranona2009analysis)  
5 (yang2016nonlinear).



**Figura 5.19:** Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

6 El cálculo analítico resulta de análisis estático plano, donde se iguala la tan-  
7 gente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor  
8 y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales,  
9 tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones  
10 pueden afectar las fuerzas internas transmitidas al elemento aislador. Asimismo,  
11 ese calculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial,  
12 proveniente de las distintas orientación de la linea respecto al ángulo de inci-  
13 dencia del flujo. En la Figura ?? se evidencian las diferencias entre los modelos  
14 y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al um-  
15 bral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo  
16 implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones  
17 de la estructura y las fluctuaciones axiales mencionadas, se muestran la con-  
18 figuración indefomradas en gris y las deformadas con una barra de colores en  
19 desplazamientos para el instante  $t = 400s$  en la Figura ??.



**Figura 5.20:** Estructura indeformada y deformada para  $t = 400$  s.

# 1 Capítulo 6

## 2 Consideraciones finales

3       Se implementó y validó un modelo corrotacional consistente robusto y efi-  
4 caz que es capaz de captar y reproducir desplazamientos de gran amplitud con  
5 numero reducido de elementos. Esta formulación se aplico específicamente a  
6 conductores de alta tensión sometidos perfiles de viento extraídos de artículos  
7 recientes aplicados a tormentas convectivas. Las respuestas del sistema evi-  
8 dencian el balanceo excesivo del conductor ??, ante este tipo de solicitaciones,  
9 los códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complemen-  
10 tario para el diseño de sistemas de transmisión eléctrica. Al vincular ?? y ??  
11 se evidencian la idéntica forma que desarrollan ambo perfiles colmando las ex-  
12 pectativas sobre dicha salida. Como trabajos a futuro se debería verificar el  
13 no deslizamiento de las hebras internas según lo publicado en **foti2018finite**.  
14 Este comportamiento de histéresis depende principalmente de las fuerzas nor-  
15 males al interior del cable, esto es imprescindible para asegurarse del correcto  
16 modelado del conductor como un solido circular. Como eventuales trabajos a  
17 futuros se propone la implantación de un modelo acoplado con la torre donde  
18 no se desprecien lo desplazamientos del punto de anclaje y las frecuencias de  
19 resonancia que este cambio pueda implicar. Por ultimo es oportuno mencionar  
20 la potencialidad de este trabajo para desarrollar un solver integrado entre los  
21 softwares ONSAS-CAFFA **usera2008parallel**.