



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

1

2 Implementación de una formulación  
3 corrotacional en dinámica no lineal y aplicación  
4 al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural

7

Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería

8

Universidad de la República

9

Montevideo – Uruguay

10

Marzo de 2021



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

1

2

3

4

# Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

D.Sc. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

D.Sc. Prof. Gabriel Usera

7

Montevideo – Uruguay

8

Marzo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería, 2021.

XX, 104 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 83 – 89.

1. Formulación corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Transmisión eléctrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural. III. Título.

1 INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

2 

---

3 D.Sc. Prof. Gonzalo Cetrangolo

4 

---

5 M.Sc. Prof. Bruno Bazzano

6 

---

7 D.Sc. Prof. Marcelo Forets

8 Montevideo – Uruguay

9 Marzo de 2021

A mi Madre por su apoyo  
incondicional,  
por enseñarme a aprender y  
enseñar,  
por impulsarme a hablar, a crear  
y amar

# 1 Agradecimientos

2 Agradezco al universo por haberme dado hálito de vida a través de ese río  
3 inefable que fluye entre la casualidad y la causalidad. Por haberme maravilla-  
4 do con la lagrima, la risa y el atrapante mundo del conocimiento. Las raíces  
5 de ese universo son principalmente mi familia, que me nutrieron de valores y  
6 vivencias envueltas de un afecto incommensurable. A mi padre, por haberme  
7 enseñado a remar por mis objetivos, pelear por mis proyectos con determina-  
8 ción, sacrificio y sobre todo, por haberme inculcado que no hay que ganarle a  
9 nadie, únicamente aprender a levantarse. A mi madre por su incondicionalidad  
10 eterna, por transferirme la vocación de la enseñanza. Por enseñarme la diver-  
11 sidad de las inteligencias múltiples y sobre todo, la semilla del amor inmenso.  
12 A Quique por su sabiduría, su visión biocéntrica y su flecha existencial que  
13 atraviesa cualquier tormenta.

14 También agradezco a mis tutores; A Jorge por ser primero un gran ser  
15 humano con una visión fascinante, por enseñarme no solo conocimientos técni-  
16 cos, sino para la vida. Además por su paciencia, constancia y persistencia  
17 para guiarme hacia las salidas en los laberintos. A Gabriel por darme la  
18 oportunidad de dedicarme a la investigación e instruirme desde su experiencia  
19 insoslayable en aspectos estratégicos profesionales.

20 A Flor por convidarme de sus dulces pétalos y por perfumar cada parte  
21 de mi ser con el más sincero y sano amor. Por ser un alero cuando llueve y  
22 dos alas cuando hay sol. Que este camino hubiese sido árido y desolado sin  
23 ella. A Maximiliano por estar siempre latente en mi pensamiento, convertir las  
24 palabras en aves y despertarme un sin fin de ideas. Por enseñarme la senda de  
25 la filosofía, e iluminar el portal donde un punto es la inmensidad, y un segundo  
26 la eternidad.

27 Agradezco enormemente a mis compañeros del IIMPI y del grupo MISEs  
28 por guiarme, apoyarme y cuestionarme en este camino de aprendizaje. Por el  
29 ambiente relajado y distendido que hacen del trabajo una instancia de disfrute.

1 Finalmente, quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrados  
2 (CAP) de la Universidad de la República por viabilizar económicamente es-  
3 ta investigación. También a la Agencia Nacional de Investigación (ANII) por  
4 financiar el proyecto VioLETa "Modelado del efecto del viento sobre líneas  
5 eléctricas de transmisión y su mitigación" que fue el pilar indispensable en este  
6 trabajo.

*Hay una fuerza motriz más  
poderosa que el vapor, la  
electricidad y la energía atómica;  
la voluntad*

Albert Einstein



2        En Uruguay los sistemas de transmisión eléctrica son frecuentemente afec-  
3        tados por eventos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados.  
4        Estos eventos pueden provocar su desconexión con consecuencias a la integri-  
5        dad de los componentes potencialmente graves, así como también a la inte-  
6        gridad de las personas circundantes. En el periodo 2000-2007 se registraron  
7        más de veinte eventos de salida en servicio y 10 de marzo de 2002 una tor-  
8        menta convectiva afectó un área de alrededor 6500 km<sup>2</sup> en el sur del país. La  
9        tormenta causó una destrucción masiva para el país colapsando 19 torres de  
10       transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV pertenecientes a la empresa la  
11       Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas. (UTE). El costo  
12       de reparación de las torres fue millonario. Esta problemática representa un des-  
13       afío, dadas las limitaciones de aplicabilidad de las normativas internacionales  
14       ante este tipo de vientos extremos.

15       Este trabajo está enfocado en desarrollar herramientas capaces de reprodu-  
16       cir el comportamiento de conductores eléctricos, sometidos a perfiles de viento  
17       tipo tormenta convectiva. Para esto, se integró una formulación corrotacional  
18       de vigas 3D, considerando componentes aerodinámicas debido a la acción del  
19       viento. Esta formulación fue implementada en la herramienta de software li-  
20       bre *Open Non-linear Structural Analysis Solver* ([ONSAS](#)). Se resolvieron tres  
21       problemas numéricos aplicando las herramientas desarrolladas: en el primero  
22       de ellos sirve se valida la formulación para un ejemplo clásico en la literatura,  
23       el segundo es una modificación de un modelo de un conductor propuesto por  
24       investigadores referentes en simulación estructural líneas eléctricas, donde se  
25       observan resultados semejantes. Por último, se construye un ejemplo compues-  
26       to por tres torres y seis conductores, integrando elementos de viga con barras,  
27       sometidos por un perfil de corriente descendente, extraído de un estudio expe-  
28       rimental en el norte de Alemania.

29       Finalmente, se concluye que los resultados generados representan un dispa-  
30       rador para seguir profundizando en la temática, generando capacidades nativas  
31       para emular el fenómeno de manera más precisa y poder así, incluirlo como  
32       una herramienta complementaria durante el diseño de sistemas de trasmisión.

1 Respecto a la metodología se realizó un aporte original incorporando términos  
2 aerodinámicos a una formulación corrotacional. Según los resultados obtenidos,  
3 se observa como las tormentas convectivas afectan severamente a las instala-  
4 ciones, pudiendo causar potenciales prejuicios graves.

5 Palabras claves:

6 Formulación corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica  
7 estructural, Transmisión eléctrica.

# 1 Lista de figuras

2	1.1	Ilustración de balanceos excesivos torre Ruta 5. . . . .	2
3	3.1	Rotaciones a cada configuración. . . . .	20
4	3.2	Descripción de las sistemas de coordenadas corrotacionales. . . .	21
5	3.3	Esquema de desplazamientos locales. . . . .	27
6	3.4	Ilustración grados de libertad locales. . . . .	27
7	4.1	Esquema del objeto de estudio. . . . .	38
8	4.2	Esquema simplificado de la acción del viento sobre el cable y	
9		sus fuerzas correspondientes. . . . .	40
10	4.3	Esquema en sistema de referencias absoluto. . . . .	41
11	4.4	Esquema en sistema de referencias relativo. . . . .	42
12	5.1	Disposición geométrica de la estructura. . . . .	56
13	5.2	Perfil de fuerza transversal en el nodo A. . . . .	57
14	5.3	Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s. . . . .	58
15	5.4	Desplazamientos de control del nodo A. . . . .	59
16	5.5	Desplazamientos de control del nodo B. . . . .	59
17	5.6	Desplazamientos en x de los nodos A y B . . . . .	60
18	5.7	Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .	61
19	5.8	Esquema del conductor ASCR 7/26. . . . .	62
20	5.9	Perfil de velocidad progresiva $z$ . . . . .	63
21	5.10	Perfil de fuerza nodal según el eje $z$ . . . . .	64
22	5.11	Desplazamientos del nodo A. . . . .	64
23	5.12	Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .	65
24	5.13	Ángulo de balanceo $\Phi$ en función de la velocidad media $W(t)$ . .	65
25	5.14	Esquema del sistema de transmisión. . . . .	66
26	5.15	Esquema geométrico de cotas principales en la torre. . . . .	67

1	5.16 Ilustración de magnitudes de balanceo. . . . .	69
2	5.17 Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D. . . . .	70
3	5.18 Desplazamientos de los nodos medios B y C. . . . .	70
4	5.19 Curva analítica y numérica carga desplazamiento. . . . .	72
5	5.20 Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s. . . . .	72

# <sup>1</sup> Lista de tablas

<sup>2</sup>	3.1	Caracterización de matrices en términos de los sistemas de re-	
<sup>3</sup>		ferencia. . . . .	<a href="#">22</a>
<sup>4</sup>	5.1	Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26 . . .	<a href="#">61</a>
<sup>5</sup>	5.2	Parámetros del flujo tipo CLA para $W_{max}$ . . . . .	<a href="#">62</a>
<sup>6</sup>	2.1	Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826 . . . . .	<a href="#">103</a>
<sup>7</sup>	2.2	Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826. . . . .	<a href="#">104</a>
<sup>8</sup>	2.3	Tabla de factores para terrenos según referencia Davenport,	
<sup>9</sup>		<a href="#">1960</a> . . . . .	<a href="#">104</a>

# 1 Lista de símbolos

- 2  $\ddot{\mathbf{w}}$  Aceleración angular en coordenadas globales.
- 3  $\ddot{\mathbf{u}}$  Aceleración lineal en coordenadas globales.
- 4  $\alpha_{HHT}$  Parámetro alpha de HHT característico del método HHT.
- 5  $\alpha_{NW}$  Parámetro alpha característico del método de Newmark.
- 6  $\Phi$  Ángulo de balanceo de la cadena aisladora.
- 7  $\beta_{NW}$  Parámetro beta característico del método de Newmark.
- 8  $x$  Distancia respecto al nodo 1 de la sección con centroide G.
- 9  $\mathbf{x}_1$  Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.
- 10  $\mathbf{x}_2$  Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.
- 11  $\Delta T$  Incremento temporal.
- 12  $\rho$  Densidad del aire a presión atmosférica y una temperatura de 20°C.
- 13  $d_c$  Diámetro del conductor considerandolo cilíndrico.
- 14  $\mathbf{d}_g$  Desplazamientos globales del elemento.
- 15  $\mathbf{u}^g$  Desplazamientos lineales globales del elemento.
- 16  $\mathbf{w}^g$  Desplazamientos angulares globales del elemento.
- 17  $\mathbf{d}_l$  Desplazamientos locales del elemento.
- 18  $\mathbf{d}_r$  Desplazamientos lineales locales referenciados a la configuración de defor-
- 19 mación rígida.

- 1  $C_d(Re)$  Coeficiente de drag en función del coeficiente adimensionado de Rey-  
2 nolds.
- 3  $\mathbf{E}_1$  Vector 1 de la base isoparamétrica.
- 4  $\mathbf{E}_2$  Vector 2 de la base isoparamétrica..
- 5  $\mathbf{E}_3$  Vector 2 de la base isoparamétrica.
- 6  $K$  Energía cinética del elemento.
- 7  $fl_1$  Fuerza axial del elemento que integra el nodo i.
- 8  $F_d$  Fuerza de drag sobre el conductor.
- 9  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  Fuerza interna del elemento en coordenadas locales.
- 10  $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$  Fuerza interna del elemento en coordenadas globales.
- 11  $F_l$  Fuerza de lift sobre el conductor.
- 12  $\mathbf{f}_{\text{vis}}$  Vector de fuerzas viscosas.
- 13  $\mathbf{I}_\rho$  Tensor de inercia del elemento en su configuración deformada.
- 14  $\mathbf{f}_k$  Fuerza inercial en coordenadas globales.
- 15  $\mathbf{u}_0$  Condición inicial en desplazamientos aplicada sobre el conductor.
- 16  $\mathbf{K}$  Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 17  $\mathbf{C}_k$  Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 18  $\mathbf{M}$  Matriz de masa consistente del elemento en coordenadas globales.
- 19  $\mathbf{K}_g$  Matriz tangente del elemento en coordenadas globales.
- 20  $\mathbf{K}_1$  Matriz tangente local del elemento en coordenadas locales.
- 21  $\mathbf{C}_{\text{vis}}$  Matriz viscosa.
- 22  $M_1^i$  Momento flector del nodo i en la dirección local 1.
- 23  $M_2^i$  Momento flector del nodo i en la dirección local 2.
- 24  $M_3^i$  Momento torsor del nodo i.

- 1  $\mathbf{R}_0$  Matriz de rotación de referencia.
- 2  $\mathbf{R}_1^g$  Matriz de global del nodo 1.
- 3  $\mathbf{R}_2^g$  Matriz de global del nodo 2.
- 4  $\mathbf{R}_r$  Matriz de rotación de configuración rígida.
- 5  $\overline{\mathbf{R}}_1$  Matriz de rotación de configuración local del nodo 1.
- 6  $\overline{\mathbf{R}}_2$  Matriz de rotación de configuración local del nodo 2.
- 7  $\tilde{\mathbf{A}}$  Operador Skew aplicado al variable A.
- 8  $\dot{\mathbf{w}}$  Velocidad angular en coordenadas globales.
- 9  $\dot{\mathbf{u}}$  Velocidad lineal en coordenadas globales.
- 10  $q$  Velocidad de viento en el sentido perpendicular al conductor.
- 11  $w$  Velocidad de viento en el sentido transversal al conductor.
- 12  $\mathbf{e}_1$  Vector tangente de la configuración de referencia.
- 13  $\mathbf{e}_2$  Vector normal de la configuración de referencia.
- 14  $\mathbf{e}_3$  Vector bi-normal de la configuración de referencia.
- 15  $l_n$  Largo del elemento deformado.
- 16  $\mathbf{r}_1$  Vector tangente de la configuración de deformación rígida.
- 17  $\mathbf{r}_2$  Vector normal de la configuración de deformación rígida.
- 18  $\mathbf{r}_3$  Vector bi-normal de la configuración de deformación rígida.
- 19  $\mathbf{t}_1^1$  Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 20  $\mathbf{t}_1^i$  Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 21  $\mathbf{t}_2^1$  Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 22  $\mathbf{t}_2^i$  Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 23  $\mathbf{t}_3^i$  Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.



- <sub>1</sub>  $\mathbf{t}_3^1$  Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- <sub>2</sub>  $\overline{\boldsymbol{\theta}}_1$  Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 1.
- <sub>3</sub>  $\overline{\boldsymbol{\theta}}_2$  Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 2.
- <sub>4</sub>  $\bar{u}$  Desplazamiento axial en coordenadas locales del elemento.

# <sup>1</sup> Lista de siglas

<sup>2</sup> Lista de siglas

<sup>3</sup> **CD** corrientes descendentes.

<sup>4</sup> **CLA** capa límite atmosférica

<sup>5</sup> **HHT** Hughes, Hilbert y Taylor.

<sup>6</sup> **IEC** International Electrotechnical Commission.

<sup>7</sup> **MEF** Método de Elementos Finitos.

<sup>8</sup> **N-R** Newton Raphson.

<sup>9</sup> **TC** tormentas convectivas.

<sup>10</sup> **UNIT** Instituto Uruguayo de Normas Técnicas.

<sup>11</sup> **UTE** la Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas.

# 1 Tabla de contenidos

2	Lista de figuras	XI
3	Lista de tablas	XIII
4	Lista de símbolos	XVII
5	Lista de siglas	XVIII
6	<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
7	1.1 Motivación . . . . .	1
8	1.2 Enfoque . . . . .	3
9	1.3 Estructura de la tesis . . . . .	3
10	<b>2 Estado del arte</b>	<b>5</b>
11	2.1 Historia de la temática . . . . .	5
12	2.2 Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión	
13	eléctrica . . . . .	8
14	2.3 Tormentas convectivas . . . . .	10
15	2.4 Análisis semi-analíticos de conductores . . . . .	12
16	2.5 Análisis corrotacional de vigas . . . . .	15
17	<b>3 Preliminares</b>	<b>19</b>
18	3.1 Cinemática corrotacional . . . . .	19
19	3.1.1 Matrices de rotación . . . . .	20
20	3.1.2 Sistemas de coordenadas . . . . .	21
21	3.1.3 Desplazamientos lineales y angulares . . . . .	23
22	3.2 Formulación local . . . . .	26
23	3.2.1 Variaciones en desplazamientos . . . . .	28
24	3.3 Dinámica corrotacional . . . . .	30

1	3.3.1	Velocidades y aceleraciones . . . . .	30
2	3.3.2	Fuerza interna y matriz tangente . . . . .	32
3	3.3.3	Fuerza inercial y matrices de masa tangentes . . . . .	34
4	<b>4</b>	<b>Metodología</b>	<b>37</b>
5	4.1	Aspectos de modelado físico . . . . .	37
6	4.1.1	Condiciones iniciales y de borde para la estructura . . .	38
7	4.1.2	Modelo de viento . . . . .	39
8	4.2	Aspectos de modelado computacional . . . . .	44
9	4.2.1	Métodos iterativos para la resolución de problemas	
10		dinámicos . . . . .	44
11	4.2.2	Resolución numérica mediante HHT . . . . .	46
12	4.2.3	Implementación numérica en ONSAS . . . . .	50
13	<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>55</b>
14	5.1	Viga en voladizo con ángulo recto . . . . .	55
15	5.2	Modelo simplificado de una línea . . . . .	60
16	5.3	Sistema de transmisión eléctrica . . . . .	66
17	<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
18	6.1	Conclusiones técnicas . . . . .	73
19	6.2	Trabajos a futuro . . . . .	77
20	6.3	Conclusiones de formación . . . . .	79
21	6.3.1	Reflexión personal . . . . .	80
22		<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>
23		<b>Glosario</b>	<b>89</b>
24		<b>Apéndices</b>	<b>90</b>
25	Apéndice 1	. . . . .	91
26	Apéndice 2	. . . . .	102
27	2.1	Campo de aplicación . . . . .	102
28	2.2	Velocidad de referencia y rugosidad del terreno . . . . .	103

# Capítulo 1

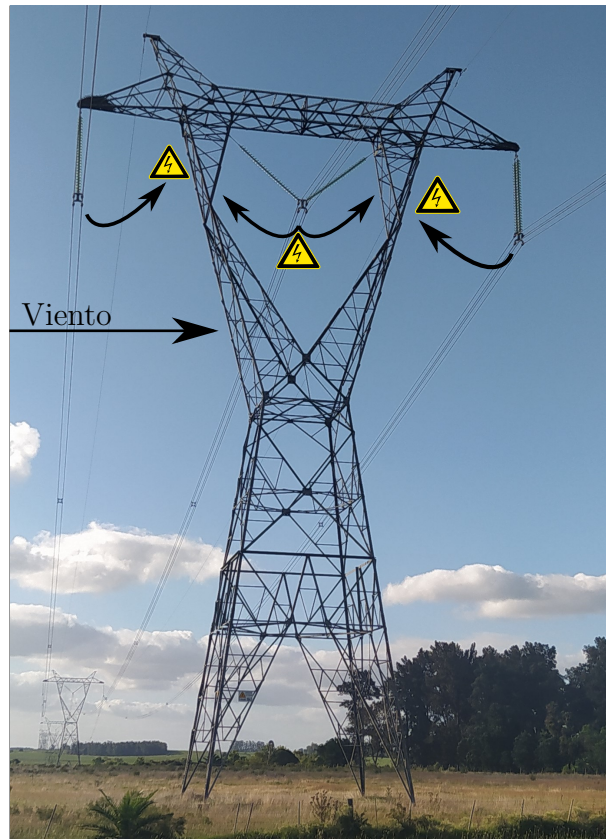
## Introducción

### 1.1. Motivación

1 Los eventos climáticos extremos representan un desafío para el diseño de  
2 todo tipo de estructuras en todo el mundo. En Uruguay el choque de masas  
3 de aire caliente, originado en el trópico con corrientes de aires fríos que migran  
4 desde el polo produce una atmósfera inestable. Estos fenómenos atmosféricos  
5 son peligrosos, ya que producen vientos extremos no sinópticos sumamente  
6 violentos y destructivos. Un registro trágico de este tipo de eventos, sucedió  
7 el 10 de marzo del 2002, cuando una tormenta convectiva afectó un área de  
8 alrededor de 6500 km<sup>2</sup> en el sur del país “El tornado de Canelones del año  
9 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#) En el norte de Montevideo los anemómetros capturaron  
10 velocidades de ráfaga de 34 m/s y de acuerdo con el nivel de daño causado, se  
11 estimaron que en ciertos puntos podría haber superado los 56 m/s. Fue tal el  
12 nivel de devastación, que 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de  
13 150 kV colapsaron, además de unos 700 edificios y 1250 techos de hogares que  
14 fueron destruidos (Durañona, [2015](#)). Este tornado no solo afectó a las construc-  
15 ciones, sino también muchos productores rurales y sus estancias productivas,  
16 derribando invernaderos, montes y plantaciones. El costo de reparación aso-  
17 ciado con las torres se estimó en 2 millones de dólares y en simultaneo se  
18 destinaron unos 10 millones de dólares a suplir la red con energía geotérmica,  
19 proveniente de combustibles fósiles. El presupuesto estimado de los daños en  
20 total asciende a la suma de 27 millones de dólares según Durañona et al. [2019](#).

21 Las líneas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por even-  
22 tos climáticos severos como corrientes descendentes. (CD) o tornados. Estos

1 eventos pueden provocar la desconexión de las líneas, con consecuencias poten-  
2 cialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos  
3 de salida en servicio por esta causa en una de las principales líneas de Uruguay  
4 (Palmar-Montevideo). Este tipo de fenómenos inducen fuertes movimientos en  
5 los cables, provocando un balanceo excesivo de los mismos. Estas amplitudes  
6 desmesuradas implican vulneraciones en la aislación del sistema, al aproximar  
7 sus cadenas aisladoras a las torres. Produciéndose descargas a tierra e indesea-  
8 bles interrupciones del suministro que han afectado a la capital durante varias  
9 horas. Una ilustración del fenómeno se encuentra la ilustra en la Figura 1.1 de  
10 una torre de alta tensión ubicada en la ruta 5 del departamento de Canelones,  
11 Uruguay.



**Figura 1.1:** Ilustración de balanceos excesivos torre Ruta 5.

12 Esto plantea la necesidad de desarrollar más conocimiento a nivel local  
13 para el modelado computacional de este tipo de problemas de gran escala y  
14 complejidad. Este es el principal objetivo de este trabajo, profundizar en la  
15 bibliografía para el modelado estructural de conductores y crear un modelo  
16 robusto, consistente capaz de simular líneas de transmisión eléctrica sometidas

1 por la acción de vientos extremos.

## 2 1.2. Enfoque

3 Los autores de la literatura han acuñado sus investigaciones en diversos  
4 tipos de elementos. Utilizando elementos de barras se destacan los autores:  
5 Desai et al. 1995, Yan et al. 2009, Gani y Légeron, 2010 y Yang y Hong, 2016.  
6 A pesar de la gran esbeltez de las líneas de transmisión eléctrica, las mismas  
7 cuentan con rigidez a flexión. Los elementos de barra no son capaces de repre-  
8 sentarla, por ende, es necesario incorporar elementos de vigas tridimensionales.  
9 Debido a los grandes desplazamientos y rotaciones que se presentan durante  
10 las trayectorias en tormentas, se implementó una formulación corrotacional  
11 considerando la dinámica del problema.

12 El campo de la metodología corrotacional es muy amplio, pero debido a  
13 la claridad y contemporaneidad en el desarrollo de sus publicaciones, se tomo  
14 como principal referencia de la formulación (Le et al. 2014). A esta se le agrega-  
15 ron componentes no lineales debido a la interacción del sólido en un fluido que  
16 ejerce determinadas fuerzas. Esta formulación se implementó computacional-  
17 mente a la herramienta ONSAS presentado inicialmente en (Bruno Bazzano y  
18 Pérez Zerpa, 2017) <sup>1</sup>. Este software de código abierto se desarrolló por el grupo  
19 de investigación MISE's <sup>2</sup> integrado por decentes del Instituto de Mecánica y  
20 Producción Industrial (IIMPI), docentes del Instituto de Ensayos y Transporte  
21 (IET) de la Facultad de Ingeniería UdelaR e investigadores internacionales. Se  
22 desarrollaron tres modelos computacionales con grado de complejidad progre-  
23 sivo. El primero de ellos permitió validar los códigos implementados, el segundo  
24 acercar el modelo a la aplicación central de esta tesis y el último generar resul-  
25 tados sobre la respuesta de sistemas de transmisión eléctrica ante las fuerzas  
26 de vientos extremos.

## 27 1.3. Estructura de la tesis

28 Este documento consta de cinco capítulos: Introducción, Estado del arte,  
29 Preliminares, Resultados Numéricos y Conclusiones. Inicialmente en el Capítu-

---

<sup>1</sup><https://github.com/ONSAS/ONSAS.m>

<sup>2</sup><https://www.fing.edu.uy/es/instituto-de-estructuras-y-transporte/investigaci%C3%B3n/finalizados/modo-e-identificacion-en-solidos>

lo 2 se realiza un recorrido histórico en materia de simulaciones aplicadas a conductores eléctricos, con un enfoque computacional y semi analítico. También se narran los diferentes estudios locales e internacionales sobre vientos extremos, para concluir en un recorrido dentro del abordaje corrotacional. Continuamente en el Capítulo 3, con el objetivo de acercar la metodología corrotacional al lector, se presenta una descripción con foco conceptual, según lo propuesto por la bibliografía principal de Le et al. (2014). Una vez presentada dicha formulación, se despliega la metodología utilizada para esta investigación en el Capítulo 4. Aquí se detallan las hipótesis fundamentales del modelado estructural y de viento, explicándose las condiciones de borde impuestas y un análisis sobre el amortiguamiento aerodinámico. En este mismo capítulo, se desarrolla la implementación del algoritmo numérico utilizado con la extensión de fuerzas viscosas y las estructuras de pseudocódigo referentes a los principales scripts de la implementación computacional en el software [ONSAS](#).

Posteriormente, se resuelven tres aplicaciones numéricas en el Capítulo 5. La primera de ellas persigue el objetivo de validar numéricamente la implantación. De manera subsiguiente, se modela un ejemplo de un conductor eléctrico sometido a una carga artificial, extraída de un viento tipo capa límite atmosférica (CLA). Por último, se presenta un problema realista de un sistema de transmisión eléctrica, con geometrías y propiedades reales, sometido por un perfil de viento capturado durante una CD en el norte de Alemania. Finalmente en el Capítulo 6 se sintetizan los principales resultados enriquecedores de esta investigación, además de plasmarse eventuales trabajos a futuro, con lineamientos para profundizar en la temática y sus posibles aplicaciones en el mercado de distribución eléctrica.



# 1 Capítulo 2

## 2 Estado del arte

3 Este capítulo incluye la revisión de la literatura, desde diversas aristas y  
4 focos, explicándose los conceptos y teorías en los cuales se fundamenta esta in-  
5 vestigación. Primeramente en la Sección 2.1, se presenta un relato cronológico  
6 en el estudio de conductores desde el crepúsculo del Siglo XVIII. A continua-  
7 ción en la Sección 2.2, se expone un recorrido a partir de los años 60's en  
8 simulaciones computacionales aplicadas a conductores de alta tensión. Conse-  
9 cutivamente en la Sección 2.3 se describen los fenómenos de CD que afectan  
10 a las líneas a partir de trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas  
11 y otros fenómenos de viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades  
12 aeroelásticas, este fenómeno ha sido abordado por la literatura y un breve  
13 recorrido de estos estudios se presenta en la Sección 2.4. Por último, en la Sec-  
14 ción 2.5 se recorre la metodología corrotacional y los principales autores que  
15 desarrollaron esta formulación.

### 16 2.1. Historia de la temática

17 El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados  
18 por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena del  
19 libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el 1657  
20 revolucionó el conocimiento científico en occidente. Tal es así que un siglo y  
21 medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino en  
22 la aplicación de las principales invenciones que arrojó la Revolución Industrial.

23 El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas  
24 de la época, Brook Taylor, d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron

1 las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al  
2 sistema masa resorte en los albores del siglo XVII según Starossek, [1991](#).

3 Partiendo del problema elemental del oscilador simple masa resorte, en 1788  
4 Lagrange et al, hallaron la solución para las vibraciones de un cable inextensible  
5 compuesto por un número finito de elementos, de masa despreciable, sometido  
6 a la acción de fuerzas externas. Posteriormente, Poisson en 1820 presentó la  
7 ecuación diferencial que debería cumplir el sistema en el continuo, sin embargo  
8 según H. M. Irvine y Caughey, [1974](#), las herramientas matemáticas analíticas  
9 desarrolladas hasta la fecha, no permitían hallar la solución general a dicha  
10 ecuación.

11 Debió pasar más de un siglo para que Routh et al. [1955](#) presentara una  
12 solución exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva  
13 que describe un punto sobre una esfera girando a velocidad angular constante).  
14 En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del cable, el primero  
15 en su época fue Klöppel y H., [1942](#), a partir de esto en (Pugsley, [1949](#)) se  
16 determinó experimentalmente una fórmula para las frecuencias naturales de  
17 vibración, considerando un ratio entre la deflexión y el largo de vano entre, 4 y  
18 10 metros. En 1953 considerando un cable inextensible en (Saxon y Cahn, [1953](#))  
19 resolvieron la expresión teórica, formulada por Poisson, de la curva catenaria  
20 para grandes deflexiones. Esto fue un resultado de suma importancia para la  
21 ingeniería de distribución eléctrica, ya que permitía calcular analíticamente los  
22 descensos máximos del vano entre dos torres.

23 La seguridad de las personas e integridad de los distintos elementos cir-  
24 cundantes son factores que imprimen criterios de seguridad sobre el descenso  
25 máximo de la línea. Actualmente la tensión del conductor durante el monta-  
26 je, se ajusta de manera tal que la altura mínima respete un valor exigido por  
27 norma. Esta imposición depende principalmente del grado de urbanización, los  
28 umbrales de contaminación magnética y la topografía del terreno.

29 A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las  
30 frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los mode-  
31 los masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. En (H. M. Irvine y  
32 Caughey, [1974](#)) se halló el rango transitorio entre ambos estados, corrigiendo  
33 dicha discontinuidad al incluir una descripción completa del modelo de elas-  
34 ticidad del cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables  
35 horizontales (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio de-  
36 flexión-largo del vano entre  $1/8$  y 0. El mismo autor H. M. Irvine y Caughey,

1 1974, extendió lo postulado para conductores con extremos desnivelados, aun  
2 bajo la hipótesis de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor.

3 El mismo investigador profundizó sobre la dinámica con extremos acelera-  
4 dos, obteniendo resultados experimentales para un movimiento tipo terremoto  
5 en (H. M. Irvine y Griffin, 1976) y (M. Irvine, 1978). La teoría postulada  
6 por Irvine fue confirmada por Triantafyllou, 1984 para distintos casos expe-  
7 rimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando en  
8 cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al  
9 movimiento.

10 Autores contemporáneos estudiaron en simultaneo condiciones de borde  
11 dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de fuerzas pueden inducir vibra-  
12 ciones y respuestas de resonancia. El pionero en la materia fue Davenport, 1965.  
13 Resultados más refinados se obtienen en (Starossek, 1991). En estas se exponen  
14 formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los cables sometidos a  
15 la acción del viento, obviando no linealidades geométricas y materiales.

16 Estos estudios revelaron el fenómeno de “Gallopig”, el cual refiere a una  
17 respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del cable entra en  
18 resonancia con las fuerzas ejercidas por el viento. Teóricamente, las geometrías  
19 perfectamente simétricas no inducen este tipo de fenómenos. Sin embargo,  
20 debido a la existencia de imperfecciones constrictivas y durante la instalación,  
21 el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte de energía neto  
22 hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respuesta se presentaron  
23 en (Simiu y Scanlan, 1986), quienes hallaron condiciones de velocidad crítica  
24 eólica en función de coeficientes experimentales, obtenidos mediante ensayos  
25 consumados en túnel de viento.

26 Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al pro-  
27 blema de conductores eléctricos. El advenimiento del (Método de Elementos  
28 Finitos. (MEF)) presentado por Zienkiewicz y Cheung, 1970 y aplicado a arma-  
29 duras constituyó una herramienta sumamente potente e innovadora. Esto pro-  
30 vocó que, en los años venideros, se desarrollasen vastas metodologías numéricas  
31 incorporando diferentes elementos y algoritmos de resolución computacional.  
32 En particular, en Italia un grupo de investigadores insoslayables, pertenecien-  
33 tes a la Universidad de Milan, aplicaron métodos numéricos a la simulación  
34 de conductores. Un recorrido cronológico y descriptivo de los emblemáticos  
35 aportes de estos científicos se presenta a continuación en la Sección 2.2.

## 2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión eléctrica

Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo, por Di Pilatto y Martinelli, estaban basados en elementos trinodales isoparamétricos. En estos estudios se asumió pequeñas deformaciones unitarias, considerándose para el desarrollo no linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos lineales. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, este tipo de modelos poseen la debilidad de no satisfacer las condiciones de equilibrio dinámico para específicos tipos de balanceo. Esto se justifica en (Martinelli y Perotti, 2001) y (Martinelli y Perotti, 2004). En consonancia, estudios contemporáneos evidencian que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que despreciar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predicciones erróneas sobre las frecuencias naturales de mayor orden, tal y como se remarca en (Koh y Rong, 2004).

Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pillato y otros en 2007 utilizando abordajes corrotacionales. Di Pillato presentó una formulación considerando elementos de viga tridimensionales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e inerciales teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones, en coordenadas globales. No obstante, esta formulación basada en lo propuesto por Oran, 1973 tiene como desventaja principal que no es fiable ante grandes rotaciones locales de los nodos, como también, ante significativos incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente para capturar dinámicas complejas resulta necesario e ineludible discretizar el dominio temporal y espacial en pequeños intervalos, lo que conlleva a costos computacionales desmedidos.

El mismo autor y su equipo, corrigieron las limitaciones relacionadas con las pequeñas rotaciones nodales al año siguiente en (Di Pilato et al. 2008). La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la configuración deformada, utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco, el impedimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga, se resuelve aplicando la metodología propuesta en (Simo y Vu-Quoc, 1988).

Conforme las simulaciones numéricas en el problema avanzaron, la especificación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó. Otro

1 foco de investigación en el área, se basaba en que los resultados experimen-  
2 tales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para  
3 grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y  
4 geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos so-  
5 bre el comportamiento no holonómico del fenómeno. Esto refiere a un modeló  
6 realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción  
7 entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha  
8 temática fueron Papailiou, 1997 y Kutterer y Starossek, 1992.

9 Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos  
10 escenarios, “full slip” donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento  
11 relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas.  
12 El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre  
13 ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre  
14 de “full-sitck”. En esta situación, el conjunto se comporta como un rígido, he  
15 aquí la razón de su nomenclatura. En Papailiou, 1997 se establece la tensión  
16 máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones  
17 de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. En dicho  
18 trabajo se contrastaron resultados analíticos con ensayos experimentales donde  
19 se concluyó que el modelo lograba reproducir adecuadamente el deslizamiento  
20 interno.

21 Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones del conjunto  
22 se traducen en momentos y fuerzas internas a cada hebra que conforma al  
23 conductor. Debido a esto, es posible vincular la curvatura con la deformación  
24 axial de cada hebra y también con la del conjunto. A partir de esto, se obtiene  
25 la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y momentos internos, en  
26 función de la deformación y curvatura del conductor.

27 Esta matriz de rigidez depende del estado en que se encuentre la dinámica  
28 del cable. Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen “full  
29 slip” o “full-sitck” la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso  
30 “full-sitck” cuando ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el con-  
31 ductor, la matriz de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente, no se le  
32 puede atribuir un potencial, lo que se asocia al comportamiento no holomóni-  
33 co o de histéresis inherente al fenómeno. En dicho estado un modelo de viga  
34 uniforme no es aplicable.

35 Con el propósito de desarrollar una formulación que sea capaz de represen-  
36 tar el fenómeno computacionalmente se publicó el artículo de Foti y Martinelli,

1 2016. En dicho artículo se implementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuerzas tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter simplificadoras son estudiadas en (Costello, 1990) y (Rawlins, 2005). Para el estudio de los contactos radiales se asumió que: las superficies de contacto no se deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de contacto entre cables se pueden aproximar por una línea continua, la fricción entre los cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último que la presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

10 Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjunto con las condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores límites para la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado sobre la pérdida de rigidez súbita que ocurre en el conductor, al producirse deslizamiento relativo al interior del mismo. Esta disminución abrupta de rigidez, puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga, lo que agudiza la problemática de balanceos excesivos. Estos movimientos son inminentes para determinadas condiciones atmosféricas, entre ellos las TC. Las CD originadas por TC han sido objeto de estudio en los últimos 50 años por expertos en ingeniería del viento. En la siguiente Sección se presenta una somera descripción de la literatura investigada.

## 22 2.3. Tormentas convectivas

23 Las TC son fenómenos atmosféricos que generan inestabilidades en el flujo debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad. Cuando estas se ocasionan, masas de aire caliente ascienden hasta la parte superior de la nube, quedando depositado como una especie de domo o cúpula al interior de la misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al interior de la tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodeaba por debajo. Esta corriente desciende a velocidades intensas e impacta con vehemencia sobre la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de anillo vorticoso que puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h (Fujita, 1985). En dicho trabajo se establecen escalas espaciales entre 40 m y 4 km. No obstante, estudios publicados por Darwish et al. 2010 plantean que se desplazan en un diámetro entre 1 y 5 km .

1        Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de transmisión  
2 eléctrica, ciertas normativas se estriban en perfiles de vientos clásicos (sinópti-  
3 cos) tipo CLA. Esto se traduce en una subestimación de las presiones que se  
4 ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma International Electrotech-  
5 nical Commission. (IEC) 60826. Esto pone en riesgo al sistema es afectado  
6 por tornados o CD. La probabilidad de ocurrencia es baja para dominios de  
7 corta longitud, pero cuando las líneas discurren largas distancias estos vientos  
8 extremos suelen suceder esporádicamente según lo publicado en (Ang y Tang,  
9 1984).

10       La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de  
11 daños vinculados a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores  
12 contemporáneos el diámetro de desarrollo del anillo se encuentra intrínseca-  
13 mente relacionado con dicha altura (Holmes, 2002), (Abd-Elaal et al. 2013).  
14 Complementando a esto, el autor Stengel y Thiele, 2017 en Alemania captura-  
15 ron este fenómeno utilizando anemómetros colocados en líneas de transmisión.  
16 Esto permitió establecer un perfil de velocidades media y la función de cohe-  
17 rencia relacionada con la turbulencia a partir de datos experimentales. De este  
18 artículo se extrajo el perfil de vientos implementado en dicho trabajo.

19       En nuestro país investigadores integrantes del Grupo de Eolo Dinámica  
20 perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante TC trabajo  
21 de campo exhaustivo. El primer informe relevado en el artículo (Durañona  
22 y Cataldo, 2009) se realiza un cálculo del ángulo de balanceo, simplificando  
23 cauasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio de la fuerza  
24 de viento por unidad de peso. En dicho trabajo se mostró que para valores de  
25 velocidad de viento de 97.9 m/s la cadena aisladora conductor alcanza los 85  
26 ° medidos desde su posición vertical normal.

27       Dados los alarmantes resultados de (Durañona y Cataldo, 2009) posterior-  
28 mente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha  
29 en el trabajo de (Durañona, 2015). En este estudio se atisba que fenómenos de  
30 CD producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minutos que los vientos tipo  
31 capa límite atmosférica. El valor máximo de velocidad registrado alcanzó los 40  
32 m/s en promedio de 10 minutos. En el año 2019, este grupo de investigadores  
33 presentó un trabajo relevante donde se resalta que los vientos extremos afecta  
34 principalmente al norte del país en (Durañona et al. 2019). En este se sugiere  
35 que la norma (Instituto Uruguayo de Normas Técnicas. (UNIT):50-84, 1984)  
36 debe ser actualizada incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos

1 no sinópticos. Pero los eventos de vientos extremos no son los únicos que afec-  
2 tan a los conductores, también pueden ocurrir inestabilidades estructurales  
3 inherentes a interacción entre fluido-estructura.

## 4 **2.4. Análisis semi-analíticos de conductores**

5 Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pue-  
6 den experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud,  
7 principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente  
8 estudiada por distintos autores de la literatura. Como por ejemplo Blevins  
9 y Vibrations, 1990, Jones, 1992. Para vigas de gran esbeltez, o elementos de  
10 cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto lineales  
11 como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o dos  
12 grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consistieron  
13 en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación  
14 intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal y verificar estos resultados  
15 en la práctica. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin  
16 simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática  
17 destaca el trabajo de Chabart y Lilien, 1998, en este se propuso una aproxi-  
18 mación innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como  
19 ser: la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias  
20 en la fuerza lift ante la presencia de excentricidades geométricas.

21 El fenómeno Galloping presenta frecuencias del movimiento excesivo suelen  
22 ser bajas y son exuberantes a simple vista. Este fenómeno tiene consecuencias  
23 severas sobre todo en líneas que se encuentran en climas gélidos, recientemente  
24 en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur de Argentina y las imágenes  
25 son impactantes ([Ver vídeo](#)). La principal causa del fenómeno es el ataque de  
26 vientos intensos y constantes. La presencia de irregularidades geométricas en  
27 las líneas induce inestabilidades aerodinámicas y cuanto mayor sea la cantidad  
28 y discontinuidad de las excentricidades más aguda será la respuesta inducida.  
29 Las velocidades requeridas de viento suelen ser mayores a 7 m/s y las frecuen-  
30 cias de respuesta del conductor suelen oscilar entre los 0.15 y 1 Hz.

31 Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente apro-  
32 ximación de las líneas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separa-  
33 dores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, sí los relativos  
34 entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elemen-



1    tos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la  
2    formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en  
3    inglés (Torsional Damper Detuner) gira relativo al conductor anulando las  
4    formas irregulares producto de la formación de hielo.

5        En el artículo (Jones, [1992](#)) se halló la solución a la ecuación de movimien-  
6    to, despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los  
7    autovalores que permiten detectar analíticamente bajo qué condiciones del sis-  
8    tema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el  
9    estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose  
10   un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente ma-  
11   yor a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos  
12   e indeseables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje  
13   vertical.

14       Los estudios de Jones y Blevins, se fraguaban en premisas de linealidad  
15   geométrica. Sin embargo, autores han destacado que los efectos no lineales  
16   juegan un rol importante en el desarrollo, como ser: las referencias de Luongo  
17   et al. [1984](#) y Lee y Perkins, [1992](#). En el trabajo propuesto por Lee se inclu-  
18   yen componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento del  
19   conductor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un  
20   modelo lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y  
21   tercer orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numericamente  
22   la ecuación diferencial del movimiento.

23       Esta problemática fue abordada unos años más tarde, por el trabajo de  
24   Luongo y Piccardo, [1998](#). En este artículo se hallaron las soluciones no lineales  
25   de resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se contrasta-  
26   ron dos soluciones arrojadas por disímiles modelos, uno de pequeños desplaza-  
27   mientos y otro incorporando no linealidades geométricas. En dicho trabajo se  
28   distinguen dos regímenes del movimiento, el primero de ellos nominado críti-  
29   co refiere a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos no  
30   presetan gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayectorias se  
31   amplifican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se concluye que  
32   la solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable para valores  
33   de velocidad media de viento correspondiente al estado crítico. Posteriormente  
34   al incrementar la velocidad de viento se desata el fenómeno post-crítico y el  
35   incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible para representar  
36   cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles simétricos, la velocidad

1 crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis lineal.

2 Según los autores del trabajo (Luongo et al. [2007](#)), hasta la fecha de pu-  
3 blicación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la  
4 dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las  
5 fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos  
6 aplicados eran exigüos, en especial para el régimen post-crítico del Galloping.  
7 Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de ángulo de ata-  
8 que y velocidad relativa entre el conductor y del flujo. Además se despreció  
9 la rigidez a torsión de los elementos, esto se debe a que la rigidez según el  
10 eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez flexional, debido a la esbeltez  
11 geométrica del conductor de estudio.

12 El propósito del autor Luongo et al. [2007](#) fue proponer un elemento de  
13 viga orientado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este  
14 a torsión. Estos términos representan diferencias notorias para secciones anti-  
15 simétricas en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados  
16 numéricos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el obje-  
17 tivo de hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró, que el  
18 ángulo de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones  
19 críticas del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuen-  
20 ta los modos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la  
21 inclusión del ángulo puede influir significativamente en el valor de velocidades  
22 críticas aeroelásticas.

23 En el trabajo (Luongo et al. [2009](#)) se profundizó en los efectos del ángulo  
24 de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la formulación  
25 de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como destacado  
26 resultado, se probó que mientras la rigidez torsional no afecta significativa-  
27 mente los desplazamientos traslacionales, a diferencia de la solución del ángulo  
28 de giro que sí lo hace. En especial para perfiles sin simetría de revolución. La  
29 consideración del balanceo en el lift y en el ángulo de ataque, afecta notoria-  
30 mente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades de la  
31 sección aerodinámica y por tanto sus velocidades críticas. Por ende, se resalta  
32 la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas para el  
33 modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

## 2.5. Análisis corrotacional de vigas

Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplicaciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos y terrestres. Además de las formulaciones clásicas de vigas, el abordaje corrotacional es idóneo para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamientos en servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de Nour-Omid y Rankin, 1991 quienes sentaron las bases del método.

Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente considerándolo como un rígido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario que permite localizar al elemento en el espacio. Mientras que para la componente deformable se considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo sistema de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente. Además, destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento representa términos de no linealidades geométricas mientras que la deformables incorpora no linealidad materiales.

El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La variación de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a esta propiedad anti-simétrica, esta característica depende principalmente del des-balanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al resolver el sistema mediante métodos numéricos como (Newton Raphson. (N-R)). Los autores Nour-Omid y Rankin, 1991 con el objetivo de optimizar el método, demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de convergencia cuadrático.

Debido a la versatilidad de la metodología corrotacional, en los años posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de elementos

1 y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron al considerar  
2 funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentrada y elemen-  
3 tos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener de manera  
4 sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inerciales. Este  
5 cálculo conduce ineludiblemente a la matriz de masa constante de Timoshenko.  
6 Por otra parte, interpolaciones lineales asumen que los desplazamientos trans-  
7 versales al eje de la viga son nulos, esta hipótesis reduce el campo de aplicación  
8 del modelo, en especial para mallas de bajo número de elementos, ya que la  
9 matriz de masa tangente y el vector de fuerzas inerciales no representan las  
10 componentes omitidas.

11 En la referencia Crisfield, [1997](#) se sugiere que el proceso de obtención reque-  
12 rido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado intrincado,  
13 debido a su grado de complejidad geométrica. El autor propone utilizar fun-  
14 ciones de interpretación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al elemento  
15 de Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan complejas a la hora de derivar el  
16 vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consideró un modelo  
17 simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones cúbicas para el  
18 vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una matriz de masa  
19 constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero numéricamen-  
20 te eficiente. Esta forma de proceder también se aplicó en Pacoste y Eriksson,  
21 [1997](#).

22 En paralelo otros autores, desarrollaron eficientes elementos de viga bidi-  
23 dimensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar estructuras en  
24 grandes desplazamientos bajo cargas estáticas (Battini y Pacoste, [2002](#) Alsafadie et al. [2010](#)). Estos autores afirman que al seleccionar adecuadamente el  
25 largo de elemento, los desplazamientos locales son significativamente menores  
26 que los asociados a la componente rígida. Por esta razón, se compararon re-  
27 sultados con diferente número y tipos de elementos para los mismos ejemplos.  
28 Estos estudios, en conjunto con lo publicado por Alsafadie et al. [2010](#), con-  
29 cluyen que formulaciones cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales  
30 bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión  
31 analítica hacia las componentes dinámicas.

32 Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos  
33 años. El primero de ellos fue Behdinan et al. [1998](#) a finales de siglo, pero las fun-  
34 ciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no eran  
35 consistente con la formulación canónica del método corrotacional propuesta  
36

1 por Simo y Vu-Quoc (1988). De hecho, según el conocimiento del autor, no  
2 existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación  
3 consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna  
4 sino también, las componentes inerciales.

5 Años mas tarde, Le et al. 2011 publicaron una formulación para vigas  
6 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación  
7 independiente “IIE” de la referencia Reddy, 1997. Estos elementos fueron de-  
8 sarrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz  
9 tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basa-  
10 das en los polinomios de Hermite, con el propósito de incluir consideraciones  
11 adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es  
12 una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y  
13 su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algu-  
14 nas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además  
15 se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la li-  
16 teratura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta  
17 nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir  
18 significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor  
19 precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los  
20 desplazamientos locales.

21 Los mismos autores en conjunto con Lee extendieron la formulación en su  
22 trabajo del 2014 Le et al. 2014 agregando una dimensión, este desarrollo se  
23 vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmutatividad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensable a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo, se presenta la parte estática desarrollada por Battini en Battini y Pacoste, 2002, además de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuerzas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se seleccionó el clásico método (Hughes, Hilbert y Taylor. (HHT)) con los parámetros convencionales (Hilber et al. 1977). Este algoritmo es utilizado por reconocidos software comerciales (Abaqus, Lusas) e implica una disipación sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, mas presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

35 En Le et al. 2014 se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar  
36 la nueva formulación con otros dos enfoques. La primer comparación, se deriva

1 de la nueva formulación reemplazando las intercalaciones cúbicas por lineales.  
2 El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por Simo y Vu-Quoc, [1988](#).  
3 En base a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones:  
4 todas las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no  
5 así con mayados gruesos. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y  
6 Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente mas imprecisas en  
7 comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo  
8 computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el  
9 modelo. La formulación corrotacional es ligeramente más lenta (12 %) respecto  
10 a lo descrito por Simo y Vu-Quoc, [1988](#). Sin embargo, bajo ciertas condiciones  
11 altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación  
12 innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo.

13 Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos  
14 campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo  
15 es un atractivo para distintos investigadores del área. En Albino et al. [2018](#)  
16 Albino modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por materiales  
17 graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta mar. En  
18 2019 Asadi y Johansson, [2019](#) simularon palas de aerogeneradores utilizando  
19 elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas  
20 el tren de transmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala.  
21 En el mismo año el autor Barzanooni et al. [2018](#) abordó la problemática de  
22 anillos e interacciones de contacto aplicado a robots industriales también con  
23 la formulación propuesta por Le et al. [2014](#).

24 Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación  
25 central de este trabajo. Donde se desarrollan grandes desplazamientos y térmi-  
26 nos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando softwares para  
27 ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y mecáni-  
28 ca. No obstante, de acuerdo con el conocimiento del autor, ningún software  
29 comercial hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución  
30 de problemas dinámicos.

# 1 Capítulo 3

## 2 Preliminares

3 A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de la  
4 formulación corrotacional según lo propuesto en (Le et al. 2014), (Battini y Pa-  
5 coste, 2002). La temática se abordará progresivamente según la naturaleza de  
6 las variables. En primera instancia, se describen la caracterización de magnitu-  
7 des cinemáticas en las Secciones 3.1 y 3.2. Una vez presentadas las magnitudes  
8 cinemáticas se desarrolla el análisis corrotacional, para las variables estáticas  
9 y dinámicas en la Sección 3.3.

### 10 3.1. Cinemática corrotacional

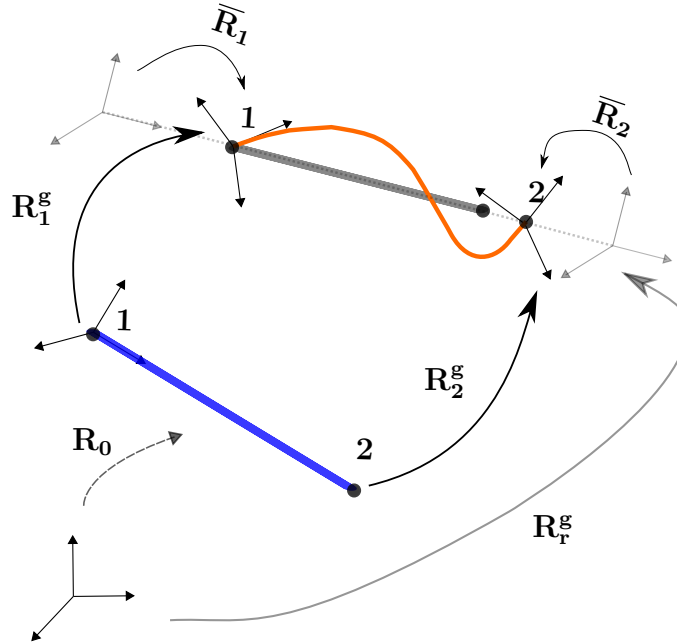
11 El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en  
12 escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas  
13 representa grandes rotaciones y desplazamientos, dados por el movimiento de  
14 la viga considerandola como un elemento rígido. La segunda componente tiene  
15 en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material.  
16 Este enfoque se suele aplicar en casos estáticos, donde resulta intuitivo imagi-  
17 nar inicialmente como se deformaría la estructura de manera rígida para luego  
18 aplicarle la componente no rígida. Para poder realizar esta descomposición,  
19 hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten repre-  
20 sentar los desplazamientos de cada una de las componentes. Para encontrar la  
21 curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y trasla-  
22 ción de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas magnitudes se  
23 obtienen a partir de transformaciones representables matemáticamente con la  
24 artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática

1 puede hallarse en la publicación (Kořar y Ibrahimbegović, 1995).

### 2 3.1.1. Matrices de rotación

3 Las configuraciones utilizadas son dos rotaciones consecutivas ilustradas en  
 4 la Figura 3.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos,  
 5 se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa  
 6 el elemento en su configuración indeformada o de referencia. El color naranja  
 7 identifica a la componente de deformación no rígida mientras que en gris se  
 8 ilustra la configuración de deformación rígida del elemento.

9 Para realizar cambios de coordenadas de una componente a otra se definen  
 10 una serie de rotaciones, la primera de ellas denominada  $\mathbf{R}_0$  lleva al elemento  
 11 desde su configuración canónica a su configuración de referencia. A partir de  
 12 esa configuración, se halla la geometría deformada aplicando las transforma-  
 13 ciones  $\mathbf{R}_1^g$  o  $\mathbf{R}_2^g$ , dependiendo el nodo de interés. La notación con supraíndice  
 14 “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a di-  
 15 cha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cual es la  
 16 configuración deformada partiendo del sistema de coordenadas canónico.



**Figura 3.1:** Rotaciones a cada configuración.

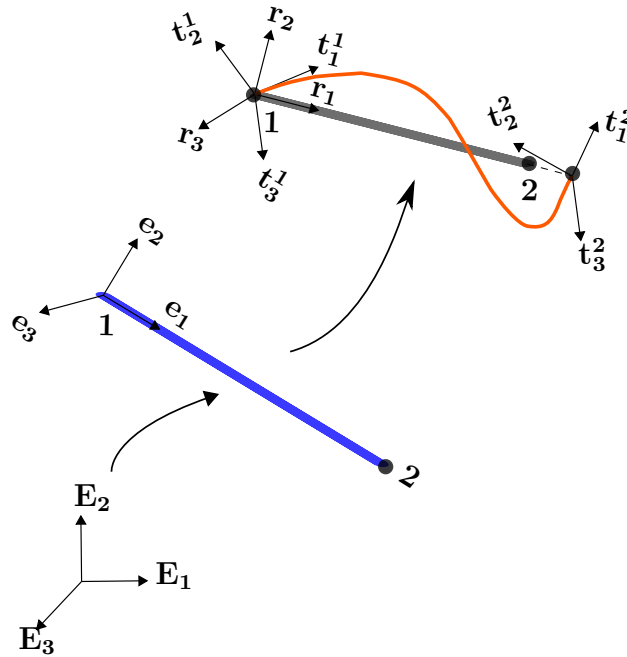
17 En la Figura 3.1, tanto las rotaciones locales  $\bar{\mathbf{R}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{R}}_2$  como globales  $\mathbf{R}_1^g$  o  
 18  $\mathbf{R}_2^g$  se utiliza el subíndice 1 o 2, mientras que para la rotación de deformación  
 19 rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender



la metodología corrotacional. Dado que la componente de deformación rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del subíndice. Para hallar la configuración deformada del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa dado un nodo arbitrario, por ejemplo el 1, consiste en aplicar consecutivamente las transformaciones  $\mathbf{R}_r$  y  $\bar{\mathbf{R}}_1$  encontrando así la configuración deformada.

### 3.1.2. Sistemas de coordenadas

Habiendo descrito las rotaciones del elemento, para deducir las matrices asociadas a cada transformación, resulta imprescindible definir un conjunto de sistemas de coordenadas que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de vectores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Descripción de las sistemas de coordenadas corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia canónico integrado por el sistema de coordenadas ortogonal  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ . Al aplicarle a estos vectores la transformación  $\mathbf{R}_0$ , se obtienen los vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Estos permiten ubicar al elemento en su configuración de referencia. Consecuentemente, para definir el sistema de coordenadas  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  solidario a la configuración de deformación rígida, basta con aplicar la transformación  $\mathbf{R}_1^g$ . Por último, para los nodos 1 y

2, denominado arbitrariamente con el subíndice  $i$ , el sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$  permite identificar la orientación y posición del nodo  $i$  en su configuración deformada. Esta es posible obtenerla rotando el sistema de coordenados  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  por la matriz  $\mathbf{R}_i^g$ .

La definición de los sistemas de coordenadas mencionados en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta, intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los sistemas de coordenadas solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los sistemas de referencia se establece en la Tabla a continuación:

Matriz	Vínculo de sistemas de referencia
$\mathbf{R}_0$	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
$\mathbf{R}_i^g$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\bar{\mathbf{R}}_i$	$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\mathbf{R}_r$	$(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$

**Tabla 3.1:** Caracterización de matrices en términos de los sistemas de referencia.

Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primera fila se tiene:  $\mathbf{R}_0$ .  $(\mathbf{E}_1) = \mathbf{e}_1^T$ . Al plantear este tipo de vínculos entre el sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$  se puede hallar a partir del sistema de coordenadas canónico  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  de dos formas. La primera consiste aplicar consecutivamente las rotaciones  $\mathbf{R}_0$  y  $\mathbf{R}_i^g$  y la segunda en aplicar  $\mathbf{R}_r$  y luego  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Esto se muestra en la ecuación a continuación:

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_i. \quad (3.1)$$

A partir de la Ecuación (3.1) se puede obtener la matriz de rotación  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Para esto se hace uso de la propiedad de matrices ortonormales  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$  y se obtiene la ecuación que prosigue:

$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.2)$$

### 3.1.3. Desplazamientos lineales y angulares

El propósito de la descripción anterior, responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones, ubicando a cada elemento en coordenadas locales y globales. Las coordenadas globales se referencian al sistema de vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mientras que las locales a  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ . El vector de desplazamientos locales del elemento es compuesto por: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra  $\bar{u}$ , y sus desplazamientos angulares nodales con el nombre  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$ . El escalar  $\bar{u}$  representa el estiramiento del elemento respecto de su largo inicial  $(l_0)$ . A su vez, el ángulo  $\bar{\theta}_1$  se asocia con la rotación del sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$  respecto de  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  indicados en la Figura 3.2. Estos siete grados de libertad se compactan en el vector  $\mathbf{d}_1 = (\bar{u}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ .

El vector de desplazamiento axial  $\bar{u}$  se descompone en tres componentes según el sistema de vectores  $\mathbf{r}_i$ , solidario a la configuración de deformación rígida. A este vector de desplazamientos se le denomina  $\mathbf{d}_r$ . Además, los desplazamientos de la viga se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas  $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$ . Estas tienen origen en la configuración de referencia y permiten encontrar los desplazamientos en la configuración deformada. Para el nodo 1 los  $\delta \mathbf{w}_1^g$  hacen referencia a la rotación de los vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  hasta  $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$ . Además, los desplazamientos globales del nodo 1  $\delta \mathbf{u}_1^g$  se corresponden con los desplazamientos del este nodo desde su configuración de referencia hasta la deformada. Esto se puede observar en la Figura 3.2.

Para resolver el problema mediante métodos numéricos, es necesario definir variaciones. Estas emplearán un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. Las variaciones infinitesimales de los desplazamientos se definen según:

$$\delta \mathbf{d}_1 = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T \quad (3.3)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^g, \delta \mathbf{u}_2^g, \delta \mathbf{w}_1^g, \delta \mathbf{w}_2^g]^T \quad (3.4)$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, los diferenciales asociados a las transformaciones de giro  $\mathbf{R}_r^g, \mathbf{R}_i^g, \mathbf{R}_0$  y  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Para esto, primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla 3.1. Las entradas

1 de  $\mathbf{R}_r$  y  $\mathbf{R}_i^g$  se hallan siguiendo las ecuaciones:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (3.6)$$

2 Los vectores  $\mathbf{r}_i$  se hallan a partir del vector director  $\mathbf{r}_1$  que apunta del nodo  
3 1 al 2. El versor  $\mathbf{r}_1$  tiene como dirección la recta que une los puntos 1 y 2 en  
4 la configuración deformada, esto es equivalente a  $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1^g}{l_n}$ , donde  $l_n$   
5 es la distancia entre 1 y 2 en la configuración deformada. Dadas las posiciones  
6 iniciales de los nodos en coordenadas globales  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , sus desplazamientos  $\mathbf{u}_1^g$   
7 y  $\mathbf{u}_2^g$ , el largo una vez deformado se calcula  $l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\|$ .

8 El vector auxiliar  $\mathbf{p}$  se define para hallar los vectores  $\mathbf{r}_i$  y partir de estos  
9 la base  $\mathbf{t}_i$ . Estos vectores son solidarios al movimiento ya que se encuentran  
10 anidados a la configuración de deformación rígida y local respectivamente.  
11 El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la  
12 necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen  
13  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0}]^T. \quad (3.7)$$

14 En la expresión anterior la matriz  $\mathbf{R}_0$  se obtiene colgando los vectores  $\mathbf{e}_i$   
15 escritos como combinación lineal de la base  $\mathbf{E}_i$ . Una vez calculada esta matriz  
16 y evaluado las expresiones de las Ecuaciones (3.7) se obtienen los restantes  
17 vectores asociados a la componente de deformación rígida según la siguiente  
18 ecuación:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1. \quad (3.8)$$

19 Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones  
20 de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de  
21 variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}_i} = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.9)$$

22 En la Ecuación (3.9) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de  
23 diferenciales matriciales. Dado que la matriz de rotación  $\mathbf{R}_0$  vincula la con-  
24 figuración canónica con la de referencia, como ambas son fijas esta matriz es

1 constante. Por lo tanto, su variación es nula. Definiendo el vector de ángulos  
2 de la componente de deformación rígida con el símbolo  $\delta \mathbf{w}_r^g$ , las matrices de  
3 giro  $\overline{\mathbf{R}}_i$ ,  $\mathbf{R}_i^g$  y sus variaciones pueden hallarse según las expresiones:

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g \quad (3.10)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r. \quad (3.11)$$

4 En las Ecuaciones (3.10) y (3.11) el término  $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$  refiere a la operación  
5 skew del vector  $\delta \mathbf{w}_r^g$ . Esta operación simplifica el producto vectorial de forma  
6 matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a ma-  
7 trices de rotación. La función  $\tilde{\mathbf{A}}$  aplicada al vector  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  toma la  
8 siguiente forma:

$$(\boldsymbol{\Omega}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

9 Para vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las varia-  
10 ciones globales se definen las matrices  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g, \quad (3.13)$$

11 Según los cocientes entre las componentes de los vectores  $\mathbf{p}_j$  y  $\mathbf{p}_{ij}$  de la Ecuación  
12 (3.7), el vector  $\mathbf{p}_{ij} = (\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}) \mathbf{p}_{ij}$  y  $\mathbf{p}_j = \mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$  se calcula matriz  $\mathbf{G}$  de acuerdo  
13 con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}^g} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] \\ \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_{12}}{2p_2} & -\frac{p_{11}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_2}{2p_2} & -\frac{p_{21}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

1 Notoese que las matrices  $\mathbf{R}_r$  tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas  
2 dimensiones,  $\mathbf{0}$  es una matriz nula de 3x3 e  $\mathbf{I}$  una matriz identidad del mismo  
3 número de filas y columnas. La relación entre los diferenciales anteriores, se  
4 pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos  
5 de ángulos locales en términos globales, según la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{\theta}_1 \\ \delta\bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.15)$$

6 Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coorde-  
7 nadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar  $\mathbf{r}$  que vincula los  
8 incrementos del desplazamiento axial  $\delta\bar{u}$  con los globales. Esto permite escribir  
9 la Ecuación (3.3) en relación a (3.4) haciendo uso de la expresión:

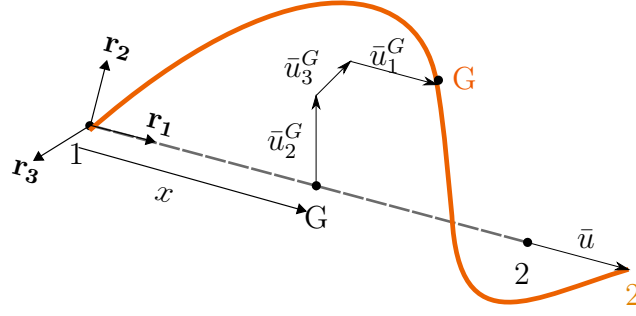
$$\delta\bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3} \mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3}]. \quad (3.16)$$

## 10 3.2. Formulación local

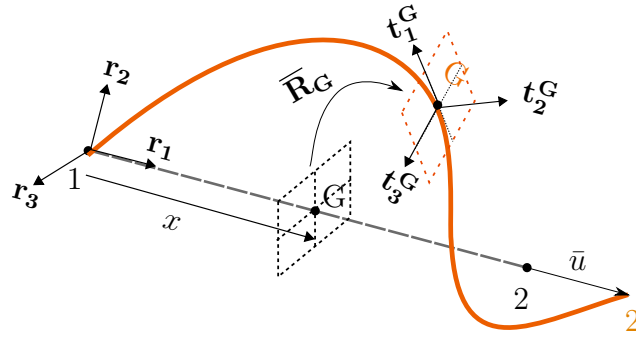
11 La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su  
12 versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento  
13 analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En esta  
14 sección se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para  
15 el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.3.

16 Sea una sección transversal de un punto G ubicado a una distancia  $x$  del  
17 nodo 1 en la configuración rotada, el movimiento local de una sección ubicada  
18 a una distancia  $x$  de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir  
19 de la rotación y traslación de dicha sección. Una ilustración de esto se muestra  
20 en la Figura 3.3, donde la configuración de deformación rígida se identifica en  
21 punteado y la configuración deformada en color naranja.

22 El movimiento de la base  $\mathbf{t}_i$  con respecto al sistema  $\mathbf{r}_i^G$  esta dado por los  
23 desplazamientos  $\bar{u}_3$  según el versor  $\mathbf{r}_3^G$  y análogamente para los vectores  $\bar{u}_2$  y  
24  $\bar{u}_1$ . Esto determina la ubicación del baricentro G. Su orientación se define a  
25 partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres  
26 ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores  $\mathbf{t}_3^G$  y  $\mathbf{t}_2^G$   
27 dentro del plano y un versor perpendicular  $\mathbf{t}_1^G$ . La transformación  $\bar{\mathbf{R}}_G$  permite  
28 encontrar los transformados de la base  $\mathbf{r}_i^G$  etiquetados con las letras  $\mathbf{t}_i^G$  de  
29 acuerdo con la Figura 3.4. En esta también se observa el desplazamiento axial



**Figura 3.3:** Esquema de desplazamientos locales.



**Figura 3.4:** Ilustración grados de libertad locales.

1 de la barra  $\bar{u}$  correspondiente al del nodo 2 en la dirección  $\mathbf{r}_1$ .

2 Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las  
3 hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para  
4 los desplazamientos axiales  $\bar{u}_1$  y el ángulo de torsión  $\bar{\theta}_1^G$ , según las ecuaciones:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0}. \quad (3.17)$$

5 Por la contraria, tanto para los desplazamientos transversales  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_3$  como  
6 para los ángulos de flexión  $\bar{\theta}_2^G$  y  $\bar{\theta}_3^G$ , las interpolaciones se realizan través de  
7 los siguientes polinomios cúbicos:

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (3.18)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right). \quad (3.19)$$

8 Para el punto G que se desplazó en el sistemas de coordenadas locales según  
9 el vector  $\mathbf{d}_1^G$ . Los valores en términos de la componente de deformación rígida  
10  $\mathbf{r}_i$  se calculan aplicando la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G. \quad (3.20)$$

Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nulas es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas. De esta forma se construyen las matrices  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ . Estas expresan los desplazamientos transversales  $\bar{u}_2, \bar{u}_3$  como también los ángulos  $\bar{\theta}_1^G$  y  $\bar{\theta}_2^G$  y  $\bar{\theta}_3^G$  según los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$  para el nodo 1 y 2 respectivamente. Analíticamente esto es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_1 = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura 3.3 queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$\text{OG} = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (3.23)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente en las Ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) es posible escribir los desplazamientos del baricentro según:



$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{I} \ \mathbf{0}] \quad (3.24)$$

$$OG = \mathbf{N}_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + \mathbf{N}_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_l \quad (3.25)$$

1 y su diferencial asociado se calcula de la siguiente forma:

$$\delta OG = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_l + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_l. \quad (3.26)$$

2 La Ecuación (3.26) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta  
3 el cálculo de su magnitud, ya que dicha variable es solidaria a sistemas de  
4 coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones  
5 (3.13), (3.14), (3.15) y (3.10) lográndose de este modo, escribir a  $\delta \mathbf{u}$  en  
6 coordenadas globales según la siguiente ecuación:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r (\mathbf{N} + \mathbf{P}_1 \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_l \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.27)$$

7 Además se compacta la notación definiendo la matriz  $\mathbf{H}_1$  según la ecuación  
8 a continuación:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.28)$$

9 Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares  
10 de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.3), son despreciables  
11 frente a los de la componente de deformación rígida. Para el autor Le et al.  
12 2014, debido a las reducidas variaciones en la geometría de dos iteraciones  
13 consecutivas, no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales  
14 y rígidos, matemáticamente :  $(\delta \overline{\boldsymbol{\theta}}_{ri} = \overline{\delta \mathbf{w}}_i)$ .

15 Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magnitudes  
16 angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa  
17 se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según:

$$\delta \mathbf{w}^g(OG) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r (\mathbf{P}_2 \mathbf{P} + \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.29)$$

18 Análogamente a la Ecuación (3.28), se compacta la notación definiendo la  
19 matriz  $\mathbf{H}_2$  según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.30)$$

### 3.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (Le et al. 2014) y (Battini y Pacoste, 2002). Acompasando con el desarrollo histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente definir las velocidades y aceleraciones para luego obtener los vectores de fuerza interna e inercial y sus matrices tangentes asociadas.

#### 3.3.1. Velocidades y aceleraciones

Las magnitudes dinámicas desempeñan un papel primordial en el análisis implementado y tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en términos globales. Para calcular estas expresiones hace falta expresar las derivadas temporales de las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{R}_r$ . Esta operatoria matricial, se traduce en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Dado que variable  $\mathbf{E}$  depende de  $\mathbf{R}_r$  se calculan inicialmente sus derivadas según La (3.11). Al derivar se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}. \quad (3.31)$$

Al sustituir esta ecuación en  $\dot{\mathbf{E}}$  se deduce su según la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{E}_t. \quad (3.32)$$

Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.28) se deduce la siguiente expresión para la velocidad lineal  $\dot{\mathbf{u}}$ :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.33)$$

Aplicando la regla del producto a la Ecuación (3.33) se halla la aceleración lineal  $\ddot{\mathbf{u}}$  del baricentro:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{E}}^T) \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.34)$$

1 El valor skew de las velocidades angulares sobre la componente de deforma-  
 2 ción rígida  $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r$  se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación (3.12),  
 3 aplicado al vector  $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$ . Además para simplificar la notación a fu-  
 4 turo, se condensa la Expresión (3.34) definiendo la matriz  $\mathbf{C}_1$  como se escribe  
 5 a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t, \quad (3.35)$$

6 quedando definida la aceleración lineal de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.36)$$

7 Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simpli-  
 8 ficó la nomenclatura para evitar la lectura engorrosa de notación. Derivando  
 9 la Ecuación (3.29) respecto a la variable temporal, se obtiene la siguiente ex-  
 10 presión para la velocidad angular  $\dot{\mathbf{w}}$ :

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.37)$$

11 Utilizando la regla del producto se deduce la siguiente expresión para la  
 12 aceleración angular  $\ddot{\mathbf{w}}$ :

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.38)$$

13 A partir de esto, se compacta la expresión de la Ecuación (3.38) definiendo la  
 14 matriz  $\mathbf{C}_2$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

15 Una descripción detallada puede encontrarse en (Le et al. 2014). Dentro  
 16 del apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las de-  
 17 rivadas temporales de las matrices  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{H}_2$ . También es posible escudriñar la  
 18 deducción de las matrices  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .

### 3.3.2. Fuerza interna y matriz tangente

En esta sección se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  para el nodo  $i$  se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial  $fl_1$ , dos momentos flectores  $M_1^i$ ,  $M_2^i$  y un momento torsor  $M_3^i$  para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección de nomenclatura para el vector  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  de fuerza interna se presenta a continuación:

$$\mathbf{f}_1^{\text{int}} = [ fl_1 \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2 ] = [ fl_1 \ \mathbf{m} ]. \quad (3.41)$$

La fuerza interna calculará inicialmente para coordenadas locales denominada  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$ , donde su obtención es relativamente sencilla, para luego transcribir estos resultados en términos globales  $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$ . Con este cometido se define la matriz  $\mathbf{B}$  de cambio de base según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{d}_1 = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1^{\text{int}}. \quad (3.42)$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional, el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración de deformación rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Según los sistemas de referencia de la Figura 3.2, los cambios de variables refieren a escribir primeramente los desplazamientos locales en términos de los rígidos ( $\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$ ). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración de deformación rígida a la de referencia ( $\delta \mathbf{d}_1 \rightarrow \delta \mathbf{d}_g$ ). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en función de coordenadas inmóviles y globales.

Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{E}$ , definidas en las Ecuaciones (3.13) y (3.14) es posible vincular los ángulos diferenciales locales  $\delta \bar{\theta}_i$  con los incrementos globales  $\delta \mathbf{d}_g$ . Esto permite conocer los momentos flectores y torsores de la viga en coordenadas globales. Análogamente el vector auxiliar  $\mathbf{r}$  contiene a  $\mathbf{r}_1$  según el sentido axial de la barra, por lo que reescribir este último permite expresar la fuerza de directa  $fa1$  en términos de la base

1  $\mathbf{E}_i$ . Estos razonamientos se plasman en las ecuaciones a continuación:

$$\mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1^{\text{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P}\mathbf{E}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (3.43)$$

$$\delta \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_1^{\text{int}} + \delta \mathbf{r}^T f_{a1} + \delta(\mathbf{E}\mathbf{P}^T) \mathbf{m}. \quad (3.44)$$

2 Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés, para la resolución  
3 empleando métodos numéricos, obtener sus derivadas respecto de los despla-  
4 zamientos. La matriz tangente  $\mathbf{K}_g$  representa esta magnitud y su expresión se  
5 escribe a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{B} + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{f}_1)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (3.45)$$

6 La matriz  $\mathbf{B}$  permite realizar el cambio de coordenadas  $\delta \mathbf{d}_a$  a  $\delta \mathbf{d}_g$ , de acuer-  
7 do con lo definido en (3.42). A su vez, se define la variable  $\mathbf{K}_1$  correspondiente  
8 al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y  
9 rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material  
10 implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante  
11 diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz  $\mathbf{K}_1$ .

12 Para calcular las matrices tangentes se define la matriz  $\mathbf{D}$  anti-simétrica y  
13 se calcula en función de los productos internos de los vectores  $\mathbf{e}_i$ , esta aporta  
14 la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial  $f_{l1}$  de la barra. Esta se  
15 calcula según la siguiente expresión:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n} (\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (3.46)$$

16 Por otra parte, se define matriz auxiliar  $\mathbf{Q}$  a partir del producto de  $\mathbf{P}$  y  
17 los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, de acuerdo con la  
18 ecuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(2)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(3)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

1 Ademias el vector auxiliar **a** se construye de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

2 Operando con la regla del producto al diferencial de fuerza interna de la  
3 Ecuación (3.44) y sustituyendo las definiciones postuladas en las Ecuaciones  
4 (3.48), (3.46) y (3.47), la matriz tangente resulta:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a}. \quad (3.49)$$

5 Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.49) es asimétrica,  
6 sin embargo según Nour-Omid y Rankin, 1991 esta puede ser simetrizada sin  
7 perder la convergencia cuadrática para el método de N-R, siempre y cuando  
8 momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó  
9 la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con  
10 fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un  
11 determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia  
12 del vector de fuerza interna el método debe converger según lo publicado en  
13 (Rankin y Nour-Omid, 1988).

### 14 3.3.3. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

15 A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales  
16 para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes  
17 asociadas. El atractivo principal de la referencia de Le et al. 2014 se fragua  
18 en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado  
19 de complejidad matemático no permitía desarrollarlas (Crisfield, 1997). Esta  
20 consistencia se debe al encare analítico del vector de fuerzas inerciales, según el  
21 planteo cinemático de las variables descritas en la Sección 3.3. El abordaje será  
22 análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará  
23 primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad de que  
24 la magnitud primaria será la energía cinética del elemento  $K$ . Esta propiedad  
25 escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ( $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ )

1 como también angulares ( $\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$ ) según la siguiente ecuación:

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} dl_0 \quad (3.50)$$

2 Dada la Ecuación (3.50) se calcula la variación de energía cinética del ele-  
3 mento. Para la obtención de esta expresión se aplicó la regla del producto de  
4 diferenciales y el teorema de Leibniz para integrales de extremos fijos, obte-  
5 niéndose la siguiente expresión:

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}}] dl_0 \quad (3.51)$$

6 Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subindices "g" para  
7 las magnitudes dinámicas ( $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ ) y sus respectivas derivadas. De igual forma,  
8 las variables del integrando en las Ecuaciones (3.50) y (3.51) se omitió la no-  
9 menclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga, que si el  
10 elemento es de densidad uniforme coincide con el centro de masa de la sec-  
11 ción. Los elementos serán de área constante siendo  $A_\rho$  el producto del área  
12 transversal y la densidad del material, análogamente la matriz  $\mathbf{I}_\rho$  es el tensor  
13 de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configu-  
14 ración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones  $\mathbf{R}^g$  y  $\mathbf{R}_o$   
15 consecutivamente.

16 Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsa-  
17 bles del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar  
18 el vector de fuerza inercial  $\mathbf{f}_k$  se obtienen las matrices tangentes dinámicas  
19 según las siguientes ecuaciones:

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.52)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K} \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.53)$$

20 En la Ecuación 3.53 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de  
21 ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los des-  
22 plazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa  
23 consistente  $\mathbf{M}$  se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, conse-  
24 cutivamente la matriz  $\mathbf{C}_k$  giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo  $\mathbf{K}$ , se le  
25 llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrífuga.

1 Determinados autores Cardona y Geradin, 1988 y Hsiao et al. 1999 proponen  
 2 considerar unicamente  $\mathbf{M}$ , sin embargo exhaustivos estudios en (Hsiao et al.  
 3 1999) prueban que agregar la matriz  $\mathbf{C}_k$  mejora el desempeño computacional  
 4 para numerosos casos.

5 Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector  
 6 de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta  
 7 idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la  
 8 energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino  
 9 también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección  
 10 3.3.1.

11 Sustituyendo la Ecuación (3.53) en (3.51) se halla una fórmula para la  
 12 fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al  
 13 integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.34), (3.36),  
 14 (3.37) y (3.38) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra  
 15 a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \quad (3.54)$$

16 Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expre-  
 17 siones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el  
 18 diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a  
 19 cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices.  
 20 Finalmente, esto se expresa de forma matemática en las siguientes expresiones:

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.55)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \right\} d_l \right] \mathbf{E}^T \quad (3.56)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) + \dots \right\} \right] \mathbf{E}^T \quad (3.57)$$

$$\dots \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho}) d_l \quad (3.58)$$



# 1 **Capítulo 4**

## 2 **Metodología**

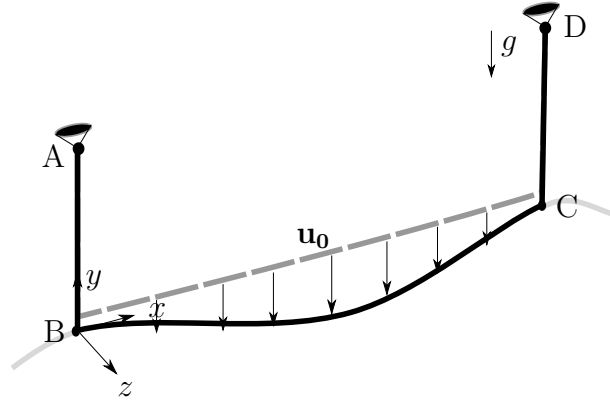
3        En este capítulo se exponen los métodos centrales desarrollados durante  
4 este trabajo de tesis. Este desarrollo, representa, según la revisión de literatura  
5 realizada, una contribución original al conocimiento sobre la aplicación de la  
6 formulación corrotacional de vigas a problemas de interacción con el viento.  
7 El problema de modelado computacional de líneas eléctricas afectadas por  
8 fenómenos de vientos extremos se construyó sobre dos etapas sucesivas. En  
9 primer lugar, se explican cuestiones sobre el modelado físico y en segundo  
10 lugar sobre el modelado computacional.

11        En la Sección 4.1.2 se presenta el campo de velocidades absoluto, relativo y  
12 las fuerzas que el viento genera sobre el conductor. Análogamente se describen  
13 las condiciones iniciales y de borde consideradas para el modelado estructural  
14 en la Sección 4.1.1. Posteriormente, dentro de la Sección 4.2 se explica la  
15 deducción del algoritmo de HHT aplicado a la formulación corrotacional para  
16 modelado de conductores con fuerzas aerodinámicas. Por último, se postulan  
17 las hipótesis del modelado físico y computacional en las Secciones 4.1.2.2 y  
18 4.2.2.1 respectivamente.

### 19 **4.1. Aspectos de modelado físico**

20        El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de  
21 la realidad, para crear un modelo en el computador, que se comporte de for-  
22 ma análoga, permitiendo emular y controlar determinadas variables de estudio  
23 relevantes para el observador. En este acto de representación existen simplifi-  
24 caciones inherentes, que reducen los factores incidentes al sistema como objeto

1 de estudio. En este caso el objeto de estudio es el conductor presentado en la  
 2 Figura 4.1, sujetado mediante los elementos aisladores CD y AB solidarios a  
 3 las torres.



**Figura 4.1:** Esquema del objeto de estudio.

4 Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determina-  
 5 das condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema.  
 6 Estas imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto está siendo  
 7 desvinculado, se nominan condiciones de borde. En particular, para esta in-  
 8 vestigación, se consideraron las siguientes hipótesis del modelado estructural  
 9 respecto a sus condiciones de borde y e iniciales.

#### 10 4.1.1. Condiciones iniciales y de borde para la estruc- 11 tura

- 12 1. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento  
 13 no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea. Vale aclarar  
 14 que este caso de pretensión refiere a la configuración punteada en la  
 15 Figura 4.1, en ese estado la tensión es 0  $N$ . No obstante, al aplicarse  
 16 el peso propio la tensión en el conductor se incrementa hasta que se  
 17 equilibre las fuerzas externas de la gravedad con las internas.
- 18 2. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura,  
 19 ignorándose cualquier variación en el perfil topográfico del terreno. Como  
 20 consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D  
 21 y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
- 22 3. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre

1 el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación  
2 es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una  
3 significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a mo-  
4 delarlo con elementos de vigas, las cuales tienen un variación de ángulo  
5 continuo.

6 4. Se supone que no existe deslizamiento relativo entre las hebras que com-  
7 ponen al conductor.

8 5. Consecuente con el inciso anterior, al escindir el vano BC de su con-  
9 tinuación (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo  
10 nulo en  $x$  para los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta  
11 las condiciones de deformación angulares impuestas por la simetría del  
12 sistema.

13 6. Dado que los puntos B y C no se deforman según el eje  $x$ , ergo sus  
14 trayectoria pertenecen al plano  $z$ - $y$ , lo que se impone en los nodos B y  
15 C.

16 7. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB,  
17 obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se  
18 modelaron a partir de barras de Green según (Crisfield, 1997).

19 8. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada  
20 en La Figura 4.1, se aplica una condición inicial de desplazamiento  $\mathbf{u}_0$ .  
21 Esta se corresponde con la solución estática del sistema cargado por el  
22 preso propio en la dirección de  $-y$  de la gravedad.

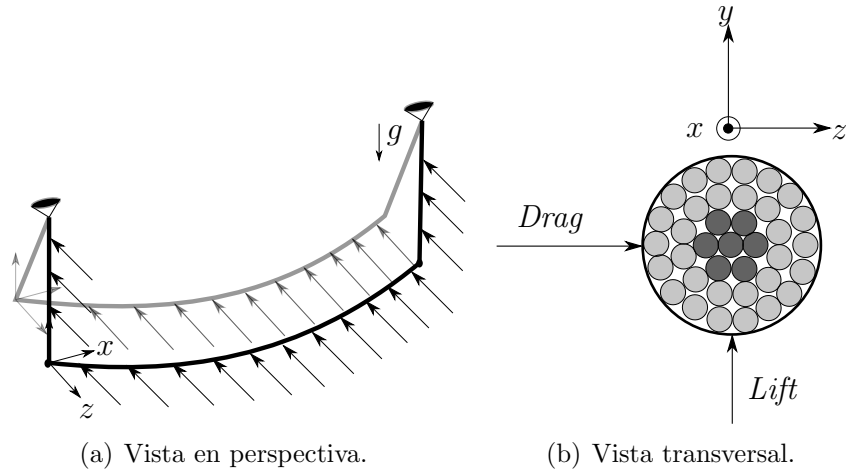
23 9. No se consideran formaciones de hielo depositadas sobre las líneas, por  
24 las evidentes condiciones climáticas del territorio uruguayo.

#### 25 4.1.2. Modelo de viento

26 Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas  
27 debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuer-  
28 zas de arrastre (*drag*), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares de  
29 (*lift*). Las cargas de *drag* son el resultado de integrar las tensiones rasantes,  
30 en la capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo para luego proyectarla  
31 la fuerza neta en la dirección del flujo medio. Las fuerzas de *lift* que aparecen

sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones entre el intradós (zona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones puntuales entre dos superficies contrarias, genera una circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en la curva cerrada que delimita el cuerpo, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura 4.2(b).

Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la componente de *lift* es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, garantiza que la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas entre las superficies del sólido.



**Figura 4.2:** Esquema simplificado de la acción del viento sobre el cable y sus fuerzas correspondientes.

La componente unidireccional del flujo a una altura dada, puede ser desglosada en un término medido y otro fluctuante  $w_v(t) = w_m(t) + w'(t)$ . A su vez, la fuerza de “*drag*” que ejerce el aire como un fluido No Newtoniano, con determinada densidad  $\rho$ , coeficiente de drag en función del Reynolds  $C_d(Re)$ , sobre un elemento cilíndrico en reposo de diámetro  $d_c$  y largo  $l_e$  se calcula según la expresión:

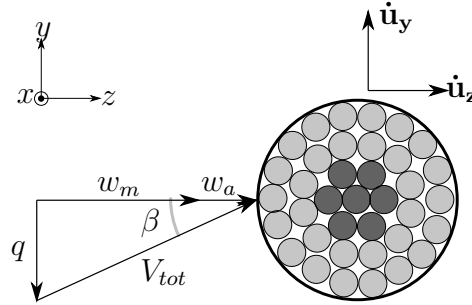
$$F_d(t) = \int_{l_e} \frac{\rho C_d(Re)}{2} d_c w_v(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c w_v(t)^2 l_e. \quad (4.1)$$

Para este cálculo se asumió uniformes las magnitudes al interior del elemento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto de la fuerza

1 por unidad de longitud por el largo del intervalo. Por otra parte, la carga del  
2 viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente a la  
3 mitad de  $F_v$ . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales  
4 que estas cargas inducen en los nodos, se cancelan en los elementos interiores.  
5 Por otra parte, los valores de  $C_d$  se extrajeron de (Foti y Martinelli, 2016) y se  
6 verificaron con el estudio para estos coeficientes durante TC de (Mara, 2007).

#### 7 4.1.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas aso- 8 ciadas.

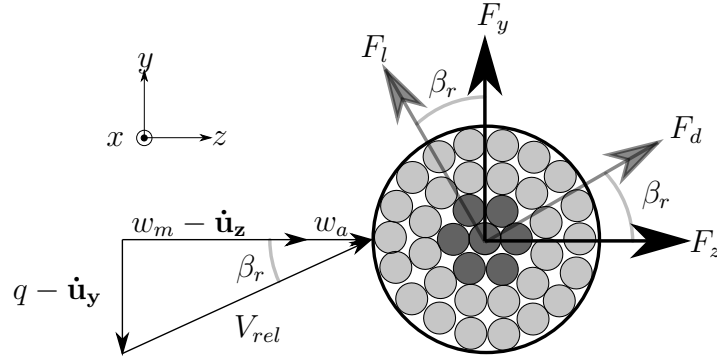
9 Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde el viento tiene de-  
10 terminada componente transversal según  $z$  y perpendicular (según  $y$ ). En la  
11 figura 4.3 se indican con el nombre  $w$  y  $q$ . En esta figura las velocidades se  
12 referencian a un observador solidario con la tierra y por tanto en un sistema  
13 de coordenadas absoluto. Asimismo, en esta imagen se representan las veloci-  
14 dades media y fluctuante  $w_m$  y  $w_a$ , que sumada a la velocidad  $v$ , resulta en el  
15 vector  $V_{tot}$  formando un ángulo  $\beta$  con la horizontal. Las velocidades globales  
16 del baricentro de la sección según  $z$  e  $y$  se identifican con las letras  $\dot{u}_y$  y  $\dot{u}_z$   
17 respectivamente y se corresponden con las descritas en la Sección 3.3.1. Las  
18 magnitudes identificadas anteriormente se ilustran en la siguiente figura:



**Figura 4.3:** Esquema en sistema de referencias absoluto.

19 Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia  
20 anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las  
21 velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la Figura 4.4. Este  
22 campo de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de *drag*  $F_d$  y de  
23 *lift*  $F_l$ . Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando  
24 dos fuerzas  $F_z$  y  $F_y$ .

25 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde  
26 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, se



**Figura 4.4:** Esquema en sistema de referencias relativo.

- 1 hallan las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y dinámicas. La
- 2 velocidad relativa absoluta se calcula de la siguiente forma:

$$V_{rel}^2 = (w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)^2 + (\mathbf{q} - \dot{\mathbf{u}}_y)^2. \quad (4.2)$$

- 3 Tomando como hipótesis que tanto las velocidades del rígido como la
- 4 componente vertical, son mucho menores que las asociadas al flujo medio
- 5  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{u}}_y, \dot{\mathbf{u}}_z \ll \mathbf{w}_m$ , y desarrollando los binomios se deduce la siguiente ecua-
- 6 ción:

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z). \quad (4.3)$$

- 7 La hipótesis formulada anteriormente tiene consecuencias sobre el ángulo de
- 8 ataque y la fuerza por unidad de longitud según las ecuaciones a continuación:

$$\tan(\beta_r) = \frac{v - \dot{\mathbf{u}}_y}{w_m - \dot{\mathbf{u}}_z + w_a} = \frac{\frac{v - \dot{\mathbf{u}}_y}{w_m}}{1 - \frac{\dot{\mathbf{u}}_z + w_a}{w_m}} \approx 0 \quad (4.4)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)) w_m \quad (4.5)$$

- 9 Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes
- 10  $z$  e  $y$ . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas
- 11 absoluto, calcular la fuerza que se ejerce sobre el conductor. A partir de estas
- 12 se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido.
- 13 Considerando que el ángulo  $\beta$  es ínfimo y por lo tanto  $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$  y
- 14  $\cos(\beta) = 1$  al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + w_a^2 - 2w_m \dot{\mathbf{u}}_z) \cos(\beta_r) = \bar{F}_x + F_a - F_{vis} \quad (4.6)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2 + w_a^2 - 2w_m \dot{\mathbf{u}}_z) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (4.7)$$

Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es un promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo, se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un tercer término surge al desarrollar la Ecuación (4.5). Este factor depende del producto entre la velocidad media de viento y la velocidad media del rígido en la dirección del flujo medio ( $z$ ). Como este término depende de la dinámica del rígido y del viento, recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico. Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sorpresivo el sentido de esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición de fuerzas según  $z$  se le llaman  $\bar{F}_x$ ,  $F_a$ ,  $-F_{vis}$  a la componente media, alternante y de amortiguamiento dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2) \quad (4.8)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_a^2) \quad (4.9)$$

$$F_{vis} = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2\dot{\mathbf{u}}_z w_m) \quad (4.10)$$

#### 4.1.2.2. Hipótesis de modelado del viento

Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no es el eje central de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio. Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

1. La viento incide con velocidad en el sentido  $z$  de forma perpendicular a la línea. Esta hipótesis proviene de diferentes trabajos publicados como

1 (Durañona y Cataldo, 2009), (Yang y Hong, 2016) y (Stengel y Thiele,  
2 2017).

3 2. La velocidad relativa transversal  $v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}$  al igual que la componente alter-  
4 nante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el sentido  
5 de  $z$  llamada  $w_m$ .

6 3. Considerando la simetría de revolución del conductor y el flujo alrededor  
7 del mismo, se desprecia la fuerza de *lift* frente al *drag*.

8 4. Se desprecia la fuerza alternante en el sentido de  $z$  dada por la Ecuación  
9 (4.10). Esto es equivalente a despreciar la componente alternante del flujo  
10  $w_a$ .

11 5. Para el cálculo del amortiguamiento aerodinámico  $F_{vis}$  se promedió la  
12 velocidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el  
13 dominio temporal de simulación.

## 14 4.2. Aspectos de modelado computacional

### 15 4.2.1. Métodos iterativos para la resolución de proble- 16 mas dinámicos

17 Discretizando el cuerpo mediante el MEF, para cada nodo y en cada ins-  
18 tante, debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas  $\mathbf{f}_{\text{int}}$ , inerciales  
19  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$  y externas  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Además según la Ecuación (4.10) dentro de las fuerzas ex-  
20 ternas aparece un término aerodinámico  $\mathbf{f}_{\text{vis}}$  que depende de la velocidad lineal  
21 del rígido. Este término debe tratarse aparte ya que su naturaleza, a pesar de  
22 ser externa, es una función de el estado cinemático del sólido. La ecuación de  
23 equilibrio de fuerzas en el instante  $t + \Delta T$  resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta T} + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)) - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t + \Delta T)) \dots \\ \dots - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t + \Delta T), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.11)$$

24 La Ecuación de balance (4.11) debe satisfacerse para todo instante tem-  
25 poral, en particular para  $t + \Delta T$ . Dadas determinadas propiedades materiales  
26 y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las



1 magnitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: el desplazamientos  
2  $\mathbf{d}(t + \Delta T)$ , las velocidades  $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)$ .

3 Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables cons-  
4 truyen una sucesión que al iterar infinitamente deben converge a la solución  
5 exacta. Al realizar una aproximación de Taylor de primer orden en la Ecuación  
6 (4.11) esta ya no será nula sino igual a un resto  $\mathbf{r}$ . Para diferenciar las  
7 variables aproximadas de las exactas, se distingue con la siguiente nomenclatura:  
8  $(\mathbf{d}(t + \Delta T) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta T})$ ,  $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})$  y  $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})$ .  
9 Rescribiendo acorde a esto la Ecuación (4.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) = & (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta T} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}) \dots \\ & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

10 Los métodos numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las  
11 variables de aceleración y velocidad, en el instante  $t + \Delta T$ , en función de  
12 los desplazamientos para ese tiempo y las magnitudes cinemáticas del paso  
13 anterior. Para esto, se definen las funciones  $F_a$  y  $F_v$  según se establece en las  
14 siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T} = F_v(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t) \quad (4.13)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T} = F_a(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t). \quad (4.14)$$

15 Dadas las funciones de las Ecuaciones (4.13) y (4.14), como los vectores des-  
16 plazamiento, velocidad y aceleración para el instante  $t$  se encuentran dados, la  
17 única incógnita en el vector resto para el instante  $t + \Delta T$  es el vector despla-  
18 zamientos para ese mismo tiempo. Por lo tanto, al aplicar el método iterativo  
19 de Newton en  $k$ , para ecuaciones no lineales, al vector residuo definido en la  
20 Ecuación (4.12) se obtiene:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}}|_k \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta T}^{k+1} = \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

21 Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena apli-  
22 cada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas  
23 en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se

1 presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}}\end{aligned}\quad (4.16)$$

2 En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar  
3 las derivadas de la función residuo respecto de las magnitudes globales: despla-  
4 zamientos, velocidades y aceleraciones. Según el vector residuo de la Ecuación  
5 (4.15), estas derivadas son las matrices tangentes  $\mathbf{K}_g$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}_k$  descritas en el  
6 Capítulo 3. Asimismo, al derivar la función de fuerza residual presentada en  
7 la Ecuación (4.15) aparece un termino  $\mathbf{C}_{vis}$  correspondiente la derivada de la  
8 fuerza viscosa respecto de la velocidad del sólido. Esto resulta una matriz dia-  
9 gonal con valores principalmente nulos, salvo en las entradas correspondientes  
10 a la dirección del viento, con valor  $\rho d_c C_d w_m$ .

11 Incorporando estas matrices se obtiene a la siguiente ecuación:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} \right|_k = \left( \mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{vis}) \right) \Big|_k \quad (4.17)$$

12 Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.15) se halla el paso en  
13 desplazamientos en  $k+1$  a partir de las magnitudes en  $k$   $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta T}^{k+1}$ . Matemáti-  
14 camente:

$$\left( \mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta T}} (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{vis}) \right) \Big|_k^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}^k)) = \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta T}^{k+1} \quad (4.18)$$

15 Esta sección se desarrolló para determinada función de residuo, sin embargo  
16 el Método de HHT implementado considera una expresión diferente. Además,  
17 propone determinadas funciones de aproximación para las velocidades y ace-  
18 leraciones que se describen en la sección a continuación.

### 19 4.2.2. Resolución numérica mediante HHT

20 Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo  
21 de Newmark presentado en (Newmark, 1959). Según el artículo (Hilber et al.

1 1977) el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de  
2 ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo  
3 puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica  
4 del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de  
5 baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no  
6 depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la  
7 aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de  
8 baja frecuencia endógenos a la estructura.

9 En la publicación (Hilber et al. 1977) se compara el método de HHT con  
10 otros métodos clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser:  
11 el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark.  
12 El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es más  
13 preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la  
14 aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en (Le et al.  
15 2014), resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

16 El parámetro característico del método se lo identifica con el nombre  $\alpha_{HHT}$ .  
17 Este permite expresar el vector de fuerzas residuales de HHT al ponderar el  
18 vector residuo definido en la Ecuación (4.15) en  $t + \Delta T$  y  $t$  según la siguiente  
19 expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{HHT}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) = & (1 + \alpha_{HHT})(-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta T} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})) \dots \\ & \dots + \alpha_{HHT}(-\mathbf{f}_{\text{ext},t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_t) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_t)) \dots \\ & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

20 Se presentan las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades  
21 lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escri-  
22 birán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark  $\alpha_{NW}$  y  $\beta_{NW}$   
23 para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente  
24 uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones  
25 de actualización para el instante  $t + \Delta T$  se escriben:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \dots \quad (4.20)$$

$$\dots - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \dots \quad (4.21)$$

$$+ \dots \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t$$

Para implementar HHT basta con definir los parámetros  $\alpha_{NW}$  y  $\beta_{NW}$  en términos del valor de  $\alpha_{HHT}$  y calcular las matrices tangentes del según el vector de fuerzas residuales definidas en 4.19. Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.22) y (4.23). En estas funciones, es posible notar las similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con  $\beta_{NW} = 1/2$  y  $\alpha_{NW} = 1/4$  se logra ajustando el parámetro  $\alpha_{HHT} = 0$ .

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (4.22)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (4.23)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro  $\alpha_{HHT}$  y el incremento  $\Delta T$  ente dos tiempos consecutivos  $t$  y  $t + \Delta T$ .

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta T}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta T}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta T} \quad (4.25)$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. De acuerdo con los artículos publicados por Ibrahimbegović y Mikdad, 1998 y Ibrahimbegovic y Mamouri, 2002, los vectores de velocidades y aceleraciones angulares para el paso  $k + 1$ , en el instante  $t + \Delta T$ , deben calcularse según las siguientes

1 Ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{\mathbf{t}+\Delta T}^{\mathbf{g}}(\mathbf{R}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{g}})^{\mathbf{T}} \left[ \frac{\alpha}{\beta \Delta T} \theta_{\mathbf{t}+\Delta T} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} + \frac{(\beta - 0.5\alpha)\Delta T}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} \right] \quad (4.26)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{\mathbf{t}+\Delta T}^{\mathbf{g}}(\mathbf{R}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{g}})^{\mathbf{T}} \left[ \frac{1}{\beta \Delta T^2} \theta_{\mathbf{t}+\Delta T} - \frac{1}{\beta \Delta T} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta T} \right] \quad (4.27)$$

2 Un procedimiento análogo al de las funciones lineales se aplican a las an-  
 3 gulares de las Ecuaciones expresadas en (4.26) y (4.27). Sus derivadas se pre-  
 4 sentan en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}^{\mathbf{g}}) \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta T} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}^{\mathbf{g}}) \quad (4.29)$$

5 Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones  
 6 (4.28), (4.29), (4.24) y (4.25) al definir convenientemente la matriz  $\mathbf{B}_{\mathbf{t}}$ . En  
 7 función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclara-  
 8 ciones globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas  
 9 relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}^{\mathbf{g}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{2},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}^{\mathbf{g}}) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left( \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta T} \mathbf{B}_{\mathbf{t}} \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{g},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}} \quad (4.31)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left( \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \mathbf{B}_{\mathbf{t}} \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{g},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}} \quad (4.32)$$

10 Al escindir las Ecuaciones (4.31) y (4.32) se identifican las funciones  $F_a$   
 11 y  $F_v$  de la sección 4.2.1. Estas relaciones matemáticas deben integrarse a la  
 12 Ecuación linealizada de equilibrio, con el vector de residuos para HHT definido  
 13 en (4.19). De esta manera se deduce el incremento en  $k+1$  que permite conocer  
 14 el vector desplazamientos en el paso  $k+1$ , a partir del vector en  $k$ , para el  
 15 instante  $t + \Delta T$  según la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}}) = \\
& \left( (1 + \alpha_{HHT})\mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \left( \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT}^2)\Delta T^2} \right) \mathbf{M}\mathbf{B}_{\mathbf{t}} + \left( \frac{1^2 + \alpha_{HHT}^2}{2\Delta T} \right) (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\mathbf{vis}})\mathbf{B}_{\mathbf{t}} \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

1 Se aclara que para despejar la Ecuación (4.33) anterior, la matriz entre  
 2 paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario,  
 3 el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas  
 4 soluciones o ninguna. Para esto las matrices tangentes fueron simetrizadas  
 5 “artificialmente” como se aclaró anteriormente, manteniendo el orden de con-  
 6 vergencia cuadrático.

#### 7 **4.2.2.1. Hipótesis de modelado numérico**

8 Se esclarecen las premisas y simplificaciones durante la implementación  
 9 numérica de los códigos creados:

- 10 1. Los incrementos angulares no se calcularon componiendo dos rotaciones  
 11 consecutivas sino de forma aditiva, es decir:  $\theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1} = \theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}} + \Delta\theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}$ .
- 12 2. La matriz de amortiguamiento viscoso  $\mathbf{C}_{\mathbf{vis}}$  se considero una diagonal con  
 13 elementos no nulos en las componentes asociadas a los desplazamientos  
 14 transaccionales. Se copió el valor del amortiguamiento aerodinámico con  
 15 el valor correspondiente a la coordenada lineal  $\rho d_c C_d w_m$  para el resto  
 16 de los desplazamientos. Esto garantiza la estabilidad y atenuación de la  
 17 respuesta en la primera etapa asociada al peso.
- 18 3. La simulación se separó en dos etapas consecutivas, en primer lugar se  
 19 carga con la fuerza de la gravedad (a partir de la condición inicial) y una  
 20 vez que la respuesta es constante se aplica la carga del viento.

#### 21 **4.2.3. Implementación numérica en ONSAS**

22 En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el  
 23 software (ONSAS). Este código de carácter abierto y se desarrolló de forma  
 24 general integrando distintos elementos, materiales y geometrías dentro del mis-  
 25 mo modelo. Además permite resolver mediante diversos algoritmos numéricos

1 y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código  
2 abierto *Paraview* difundido en (Ahrens et al. 2005).

3 Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones  
4 matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron  
5 aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de  
6 los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser  
7 pionero dela formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en  
8 los trabajos (Battini y Pacoste, 2002) (Le et al. 2014), sino también por su pre-  
9 disposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable.  
10 A continuación en el pseudocódigo 1 se detalla un pseudocódigo panorámico  
11 sobre el esqueleto ejecutado en [ONSAS](#).

---

**Algorithm 1** Pseudocódigo de iteración general.

---

**Require:** :  $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta T, \alpha_{HHT}$   
 Iniciar cinemáticas:  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$   
 Iniciar tiempo:  $t \leftarrow t_0$   
**while**  $t < t_f$  **do**  
   finDisp = 0  
   Definir:  $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$ .  
   Evaluar  $\mathbf{f}_{\text{ext}, t+\Delta t}$   
   **while** FinDisp = 0 **do**  
   Calcular fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$  y  $\mathbf{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$ .  
   Calcular y ensamblar matrices Tangentes:  $\mathbf{K}_g^k, \mathbf{M}^k, \mathbf{C}_k^k, \mathbf{C}_{\text{vis}}^k$ .  
   Despejar  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$   
   Actualizar desplazamientos globales:  $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$   
   Recalcular velocidades y aceleraciones lineales:  $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$ .  
   Recalcular velocidades y aceleraciones angulares:  $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$ .  
   Ensamblar velocidades:  $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$   
   Ensamblar aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$   
   Actualizar fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$  y  $\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})$ .  
   Calcular:  
   **if**  $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\| \vee \|\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\| \vee k \geq \max_{iter}$   
   **then**  
     finDisp = 1  
   **end if**  
   **end while**  
   Actualizar  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta T}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}^{k+1}$ .  
    $t = t + \Delta T$   
**end while**

---

12 En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo.  
13 Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite

1 incrementar la variable temporal en pasos de  $\Delta T$ . Además, debe evaluar los  
2 valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Para  
3 resolver el estado del sistema en el tiempo  $t + \Delta T$ , hace falta resolver la ecuación  
4 no lineal del resto descrita en la Expresión (4.33). Con este cometido se utiliza  
5 el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo 1 se  
6 omitió la notación en  $t + \Delta T$  para simplificar la notación.

7 Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramen-  
8 te, el cálculo del incremento que determina el paso  $k + 1$ , a partir de los despla-  
9 zamientos en el paso actual  $k$ . Luego se actualizan las variables cinemáticas de  
10 desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza  
11 mientras que la variable booleana `finDisp` sea nula. La alteración de estado, se  
12 encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la  
13 operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos  $tol_u$ , en  
14 vector de fueras residuales  $tol_{res}$  y número máximo de iteraciones  $max_{Iter}$ . Las  
15 primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese  
16 tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas  
17 desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la  
18 variable `finDisp` alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor  
19 del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

20 Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante  
21 profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices  
22 dinámicas tangentes. Este código se agregó a **ONSAS** procurando su versatili-  
23 dad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden  
24 al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo  
25 pseudocódigo de la función `elementbeamforces.m` implementada y presentada  
26 en el Apéndice 1.

27 El diagrama presentado en el Pseudocódigo 2, puede dividirse en tres divi-  
28 siones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo  
29 constructivo de las variables intervinientes. Primeramente, se hallan las matri-  
30 ces de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y defor-  
31 mada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las  
32 fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de  
33 la función `beamLocalStaticForces`. Desafortunadamente, tanto entradas como  
34 salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas loca-  
35 les. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos  
36 locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego



---

**Algorithm 2** Pseudocódigo elementBeamForces.

---

**Require:**  $A_\rho$   $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$   $E$   $\nu$   $G$   $\mathbf{X}_1$   $\mathbf{X}_2$   $\mathbf{d}_g^e$

**for** 1 **to**  $N_{\text{elem}}$  **do**

Separar vector desplazamientos  $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$

—————Cálculo de matrices de rotación —————

Computar matrices de rotación global  $\mathbf{R}_g^1$  y  $\mathbf{R}_g^2$

Evaluar matriz de rotación de referencia  $\mathbf{R}_o$

Hallar  $\mathbf{q}_1$   $\mathbf{q}_2$   $\mathbf{q}$  y calcular  $\mathbf{e}_1$   $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .

Evaluar matriz de rotación rígida  $\mathbf{R}_r$

Calcular matrices de rotación locales  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$

————— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente —————

Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento  $l_0$  y  $l$   $u = l - l_0$

Invertir  $\mathbf{R}_i$  y hallar ángulos locales  $\bar{\theta}_i$ .

Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna  $\mathbf{f}_{\text{int}}^{\text{loc}}$  y matriz tangente local  $\mathbf{K}_T^{\text{loc}}$ .

Construir matrices auxiliares:  $\mathbf{H}$   $\mathbf{G}$   $\mathbf{P}$   $\mathbf{B}$   $\mathbf{r}$

Transformar a coordenadas globales:  $\mathbf{K}_T^g \leftarrow \mathbf{K}_T^{\text{loc}}$  y  $\mathbf{f}_{\text{int}}^g \leftarrow \mathbf{f}_{\text{int}}^{\text{loc}}$ .

————— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas —————

Todas las variables dependen de la coordenada ( $\mathbf{x}$ )

Definir funciones de interpolación  $N_i$

Calcular matrices:  $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{H}_1$ .

Hallar velocidades  $\dot{\mathbf{w}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\dot{\mathbf{w}}_r$

Calcular matrices auxiliares:  $\mathbf{H}_1$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .

Hallar las aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{w}}$   $\ddot{\mathbf{u}}$ .

Girar el tensor de inercia a la configuración deformada:  $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$

Hallar expresiones e integrar en el elemento:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$   $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}_k$

Ensamblar :  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$   $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_k$   $\mathbf{K}_T^g$   $\mathbf{f}_{\text{int}}^g$

**end for**

---

1 integrarlas al código general expuesto en [1](#).

2 De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de  
3 fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las  
4 expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas  
5 están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia  $x$  en la configuración  
6 de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie  
7 de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

8 Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector  
9 de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadra-  
10 tura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último,  
11 los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas,  
12 como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices  
13 de todo el sistema en coordenadas globales.

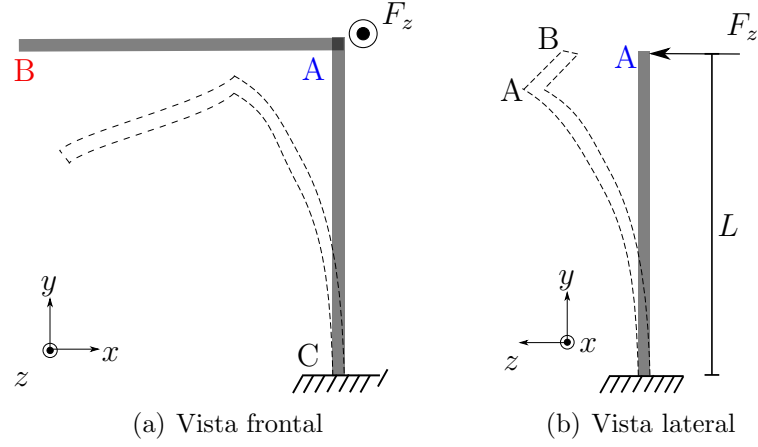
# 1 Capítulo 5

## 2 Resultados numéricos

3 En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante  
4 el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementa-  
5 ción corrotacional detallada en el Capítulo 3, para luego aplicarse a modelos  
6 específicos de conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando  
7 un computador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de  
8 8 Gb. La formulación se implementó en el software de código abierto [ONSAS](#)  
9 el cual se ejecutó en GNU-Octave presentado por Eaton et al. [2007](#) y visua-  
10 lizándose los resultados haciendo uso de la herramienta Paraview publicada  
11 en (Ahrens et al. [2014](#)). Vale notar que el hilo conductual de este capítulo fue  
12 ideado con un aumento progresivo de complejidad. En el ejemplo de la Sección  
13 [5.2](#) valida las funciones implementadas, luego en el ejemplo de la Sección [5.2](#)  
14 se obtienen resultados para un primer modelo de cables y finalmente en el  
15 ejemplo de la Sección [5.3](#) se aplica la implementación validada a la simulación  
16 del comportamiento de sistemas de transmisión eléctrica sometidas a la acción  
17 de CC.

### 18 5.1. Viga en voladizo con ángulo recto

19 Este ejemplo fue publicado por primera vez en (Simo y Vu-Quoc, [1988](#)) y  
20 es usualmente considerado en la literatura para validar implementaciones de  
21 elementos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales ((Albino  
22 et al. [2018](#)) (Le et al. [2014](#))). El mismo consta de dos barras idénticas en ángulo  
23 recto formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo  
24  $L = 10$  m tal y como se ilustra en la Figura [5.1](#).



**Figura 5.1:** Disposición geométrica de la estructura.

Las rigideces de torsión, flexión y directa del ejemplo se seleccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales, garantizan movimientos de gran amplitud y para esto deben cumplir determinadas igualdades a continuación:

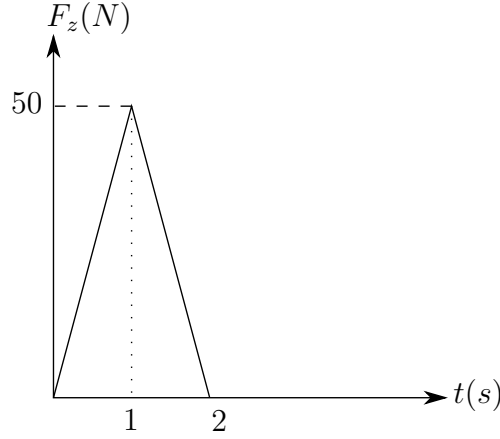
$$GA = EA = 10^6 \quad (5.1)$$

$$GJ = EI = 10^3. \quad (5.2)$$

Dado esto la elección de dichas magnitudes se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado de Las Ecuaciones (5.1) y (5.2). Para este trabajo el autor escogió los siguientes valores:  $E = G = 10^6$ ,  $A = 1$ ,  $I = J = 10^{-3}$  y  $\nu = 0.3$ . Se hace notar que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan de sentido.

La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplazamientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que permiten aplicar una fuerza en el sentido del eje  $z$  tal y como se muestra en la Figura 5.1. Este forzante flecta y torsiona al sistema en un plano saliente al  $xy$ , produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento, los cuales son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la carga. Esta fuerza crece linealmente en los dos segundos iniciales, crece hasta un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y

1 luego decrece hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual  
 2 en un corto intervalo de tiempo como se muestra en la figura a continuación:

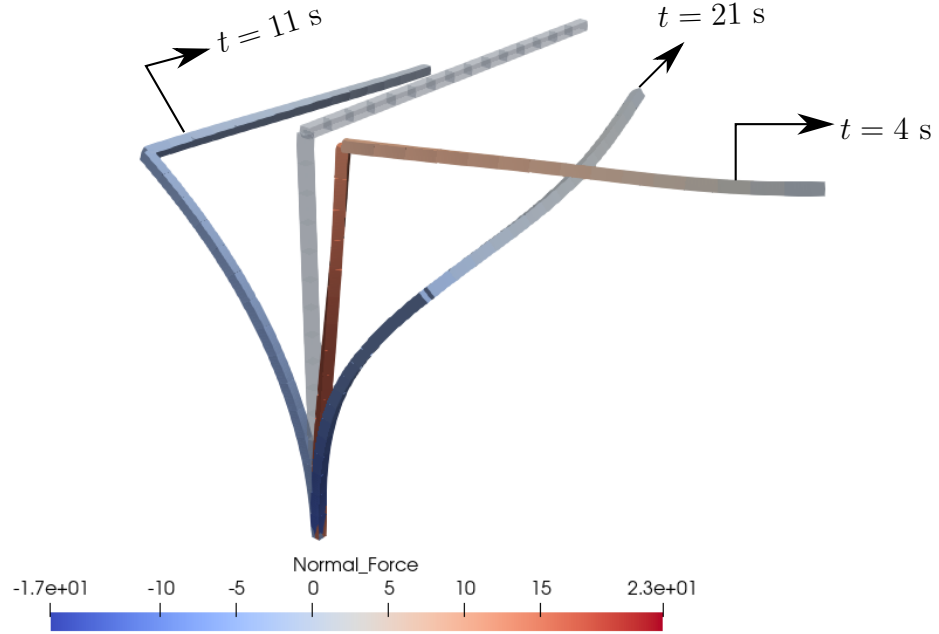


**Figura 5.2:** Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

3 El objetivo principal del ejemplo es validar los códigos incorporados al soft-  
 4 ware [ONSAS](#), por ende, tanto el método de resolución, como los parámetros,  
 5 se ajustaron idénticos a los explicitados en el artículo (Le et al. [2014](#)), com-  
 6 parando así resultados semejantes. Consecuentemente se seleccionó un valor  
 7 característico  $\alpha = -0.05$  y un valor de parada en desplazamientos de  $10^{-7}$  m.  
 8 Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de  $\Delta T = 0.25$  s y se discretizó  
 9 la geometría con 10 elementos por barra.

10 Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se graficaron las  
 11 deformadas para diferentes instantes de tiempo:  $t_1 = 4$  s,  $t_2 = 11$  s y  $t_3 = 19$  s.  
 12 En la Figura [5.3](#) se observan las oscilaciones flexionales para distintos planos  
 13  $yx$  e  $yz$ . Estos movimientos son originados por diferentes razones, en la barra  
 14 CA se asocia al forzante  $F_z$  mientras que en el miembro AB son generados por  
 15 los vínculos cinemáticos e inerciales debido a su unión rígida con el resto de la  
 16 estructura.

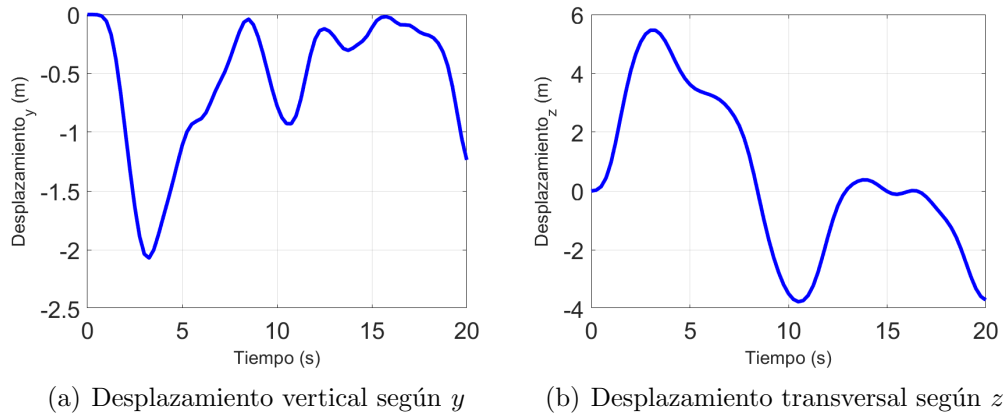
17 Con el objetivo de comparar los resultados del artículo de referencia se gra-  
 18 ficaron ciertos desplazamientos del nodo A. Estos son: el desplazamiento lineal  
 19 vertical (según el eje  $y$ ) y el transversal (según  $z$ ). Los resultados extraídos  
 20 del modelo se muestran en las Figuras [5.4](#) en función de la variable temporal.  
 21 En estas se constata efectivamente la significativa magnitud de los despla-  
 22 zamientos en comparación con las dimensiones de la estructura. En particular, la  
 23 Figura [5.4\(b\)](#) denota oscilaciones que alcanzan varios metros en menos de 30  
 24 segundos, esto muestra el carácter exigente en términos dinámicos del ejemplo.



**Figura 5.3:** Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s.

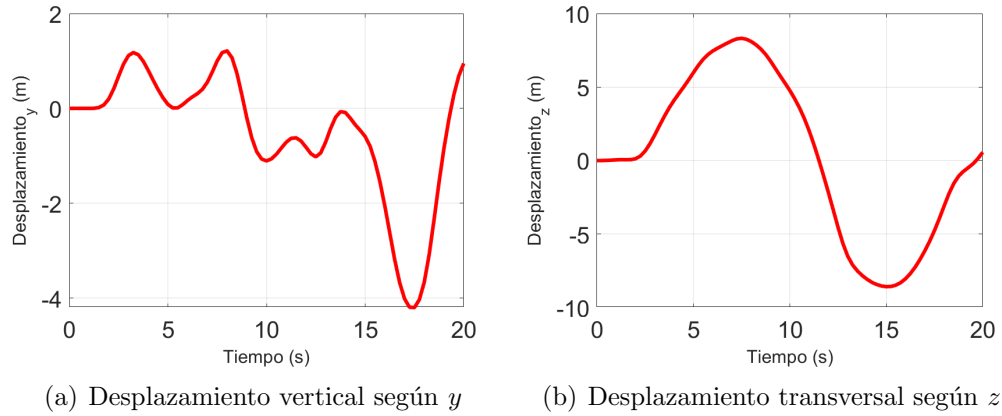
1 Con respecto a este movimiento no armónico de vaivén en el eje  $z$ , se puede  
2 notar la presencia del amortiguamiento artificial introducido por el método de  
3 resolución numérica, ya que las amplitudes prestan una tendencia atenuante  
4 con el tiempo.

5 Por otra parte al analizar en la Figura 5.4(a) se observa que los desplaza-  
6 mientos en  $y$ , son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido  
7 de la fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano  $yz$  con el versor  
8  $x$  saliente, el movimiento del nodo  $A$  es análogo al de una viga empotrada con  
9 una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de  $A$   
10 es siempre en el sentido de  $-y$ , lo que se refleja en La Figura 5.4(a) y condice  
11 con la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación  
12 con los presentados en la bibliografía de Le et al. 2014, se observan similares  
13 valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento respecto a  
14 las Figuras 5.4 y 5.5. También así los valles y las crestas de la curvas se su-  
15 ceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que las  
16 funciones implementadas en ONSAS reproducen correctamente el ejemplo y es  
17 capaz de capturar movimientos de flexo-torsión para grandes desplazamientos



**Figura 5.4:** Desplazamientos de control del nodo A.

1 y rotaciones cabalmente.



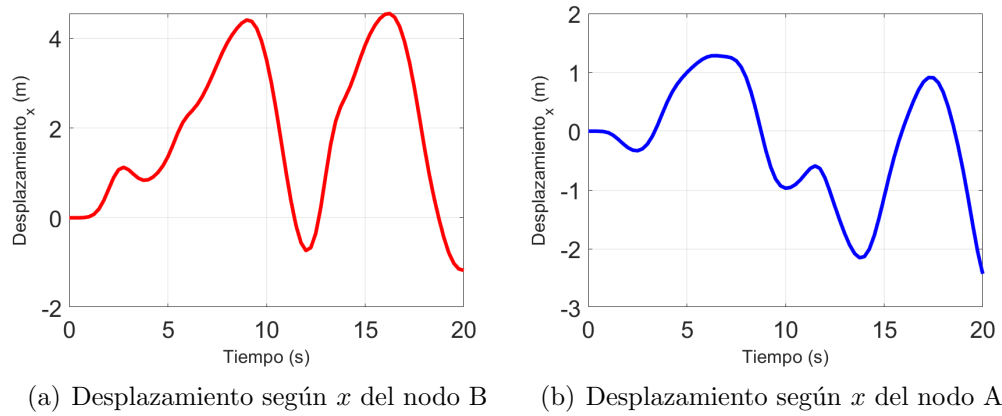
**Figura 5.5:** Desplazamientos de control del nodo B.

2 Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B. En la Figura  
3 5.5(b) se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente,  
4 y una forma que se asemeja a una senoide. Esto podría vincularse al modo  
5 flector en el plano  $xz$  de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la  
6 dirección  $z$ . Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de  
7 AC superpuestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento.  
8 El autor del trabajo Le et al. (2014) publicó el desplazamiento en  $z$  de B y los  
9 resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva.

10 Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las  
11 magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inma-  
12 nentes a cada elemento en La Figura 5.3. En esta se identifica que el esfuerzo

1 alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando  
2 considerables fluctuaciones temporales. En simultaneo, la viga horizontal A-B  
3 desarrolla fuerzas normales en todo su largo.

4 El modelo implementado desarrolla magnitudes no despreciables de despla-  
5 zamientos en  $x$  tal y como se constata en las Figuras 5.6. He aquí la impor-  
6 tancia de implementar un modelo considerando no linealidad geométrica, estas  
7 consideraciones son esenciales para la aplicación principal de este trabajo.



**Figura 5.6:** Desplazamientos en  $x$  de los nodos A y B

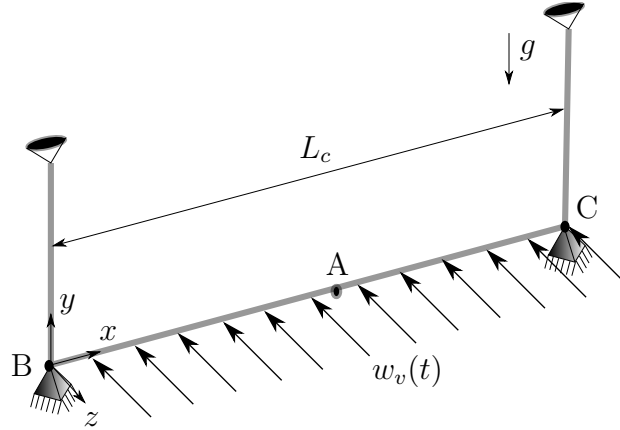
## 8 5.2. Modelo simplificado de una línea

9 En esta sección se presenta un primer modelo simplificado del enfoque cen-  
10 tral de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de Foti y Martinelli,  
11 2018 aunque ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado,  
12 como ser el caso de: Luongo y Piccardo, 1998, Martinelli y Perotti, 2001. El  
13 ejemplo consiste en un conductor de transmisión eléctrica reforzado con núcleo  
14 de acero sometido a un perfil de viento artificial.

15 Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto  
16 en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos  
17 cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo  $L_a = 3$  m cada una de  
18 ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni  
19 esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas,  
20 para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en  
21 las tres direcciones en  $x$ ,  $z$  e  $y$  en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas  
22 solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan



1 correctamente las presentadas por Foti y Martinelli, 2018, donde los extremos  
 2 se encuentran sujetos. Habiendo detallado someramente los componentes que  
 3 integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría a continuación:



**Figura 5.7:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

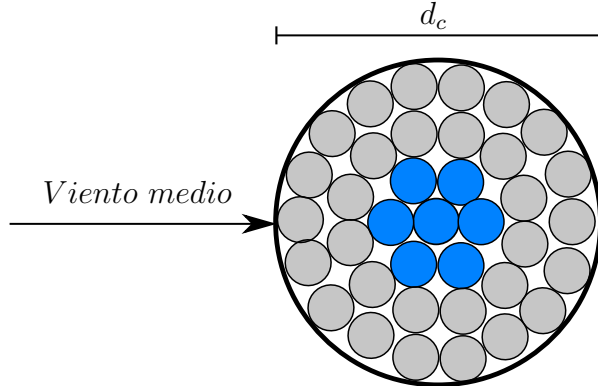
4 El vano tiene un largo  $L_c=267$  m y para esta simulación no se tendrá en  
 5 cuenta la tensión previa al momento de la colocación, pero sí la tensión debida  
 6 a la carga del peso. Por otra parte, el modelo del conductor esta estandarizado  
 7 bajo la norma europea (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003) y  
 8 se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la  
 9 cantidad de cables en el núcleo y en la periferia, respectivamente. El diámetro  
 10 se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos  
 11 de aluminio (color gris) y los 7 de acero (color azul). El perfil del conductor se  
 12 ilustra en la siguiente figura:

13 El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad  $E$ , co-  
 14 eficiente de Poisson  $\nu$ , una densidad  $\rho$  y una rigidez flexional y torsional  $EI$   
 15 y  $GJ$ , respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de (Foti y  
 16 Martinelli, 2016) y se presentan en La Tabla a continuación:

$d_c$ (cm)	m (kg/m)	$EA$ (kN)	$EI$ (N.m <sup>2</sup> )	$GJ$ (N.m <sup>2</sup> )
2.81	1.8	29700	2100	159

**Tabla 5.1:** Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

17 Existen diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postulados por



**Figura 5.8:** Esquema del conductor ASCR 7/26.

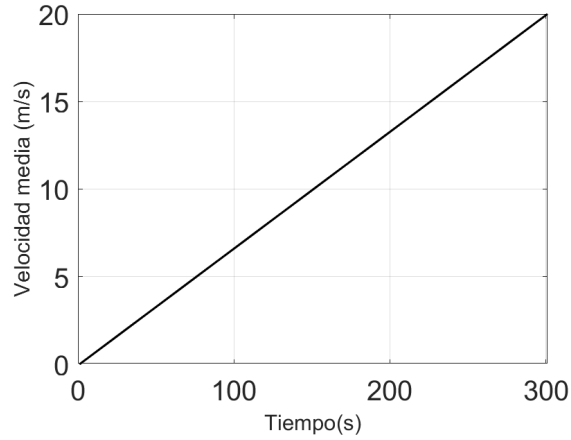
1 Luongo y Piccardo, 1998 y Martinelli y Perotti, 2001, en donde se resolvió me-  
2 diante elementos de barra trinodal y de viga corrotacional, respectivamente.  
3 Para ambos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generada artifi-  
4 cialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se  
5 desprecia las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flujo me-  
6 dio  $W$  en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico y alcanza  
7 la velocidad media máxima  $W_{max}$  en 20 segundos. Este valor de velocidad se  
8 calculó según (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003) conside-  
9 rando un flujo tipo CLA con las propiedades indicadas en la siguiente Tabla  
10 considerando a un tipo de terreno sub-urbano o industrial:

$k_r$	$z_0$	$z_{min}$
0.22	0.3 m	8 m

**Tabla 5.2:** Parámetros del flujo tipo CLA para  $W_{max}$

11 La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gra-  
12 vitatoria según el eje  $-z$  y luego las fuerzas del viento tal e las direcciones  
13 que se muestra en la Figura 5.7. No se muestran los resultados de esta etapa  
14 debido a que carecen de relevancia y en el trabajo de referencia se toma la  
15 catenaria como condición inicial. Una vez estabilizada la respuesta del sistema  
16 por el amortiguamiento interno, se aplica una fuerza lineal de media positiva  
17 según el eje  $-z$  desde cero hasta  $W_{max}$ . Esta forma del perfil podría emular  
18 el aumento modulado de presiones en un túnel de viento entre las bocas de  
19 entrada y descarga. La forma del perfil se muestra en la siguiente figura:

20 Para este estudio no se considerará la fuerza de *lift*. Esta es despreciada por



**Figura 5.9:** Perfil de velocidad progresiva  $z$ .

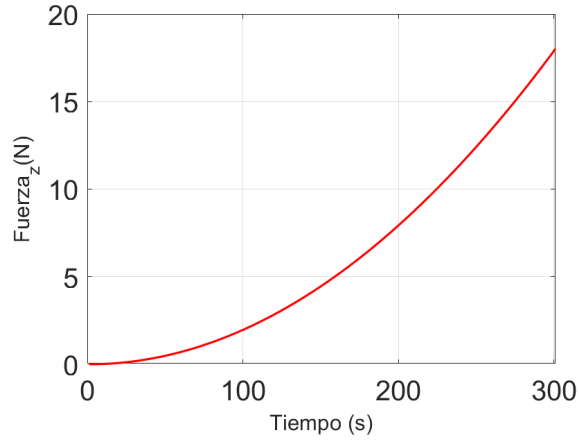
1 diferentes autores Lee y Perkins, 1992, Foti y Martinelli, 2016 y Papailiou, 1997  
2 principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares  
3 a los flujos está relacionada con posibles asimetrías tangenciales en el perfil.  
4 Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del  
5 campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce  
6 en una fuerza de *lift*. nula. Esta es la principal diferencia de este caso en  
7 comparación por lo propuesto en la literatura por Luongo et al. 1984 y Foti y  
8 Martinelli, 2018 donde los perfiles presentan formaciones de hielo.

9 Se considera un flujo transversal al eje del cable, con una historia de velo-  
10 cidad media mostrada en la Figura 5.9. Los valores de  $C_d = 1.5$  se extrajeron  
11 la referencia de (Foti y Martinelli, 2018). Se aclara que el ángulo de ataque  
12 varía durante la trayectoria del cable, no obstante, el coeficiente  $C_d$  permanece  
13 constante debido a la simetría de revolución del perfil. Se muestran entonces las  
14 fuerzas sobre cada nodo del conductor en la figura a continuación:

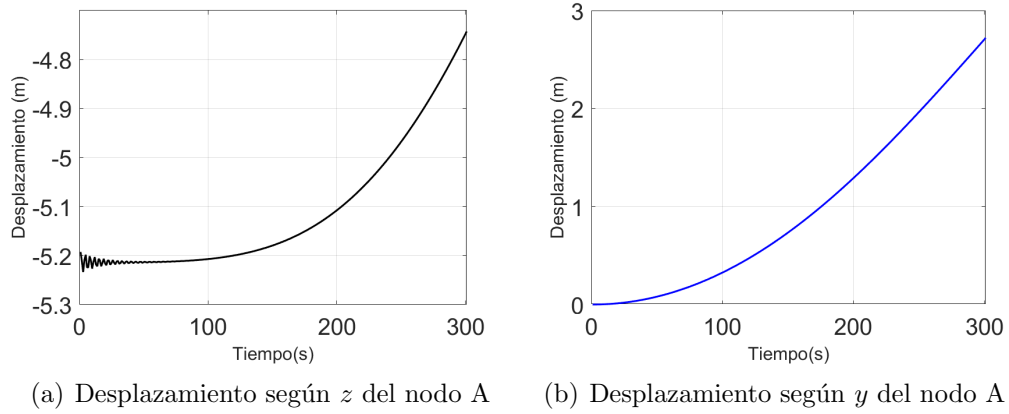
15 Se presentan a continuación los desplazamientos en vertical y transversal  
16 del nodo A, respectivamente, situado en el punto medio del vano :

17 Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la  
18 literatura fuente (Foti y Martinelli (2018)), se capturo el ángulo de balanceo  
19 del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función  
20 tangente que vincula el ángulo respecto da la deformada en el eje  $x$  con los  
21 desplazamientos en  $z$  e  $y$ . Para ilustrar al lector se realizó el siguiente esquema  
22 del ángulo  $\Phi$ :

23 Se graficaron las trayectorias del ángulo para diferentes valores de velocidad  
24 media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica.

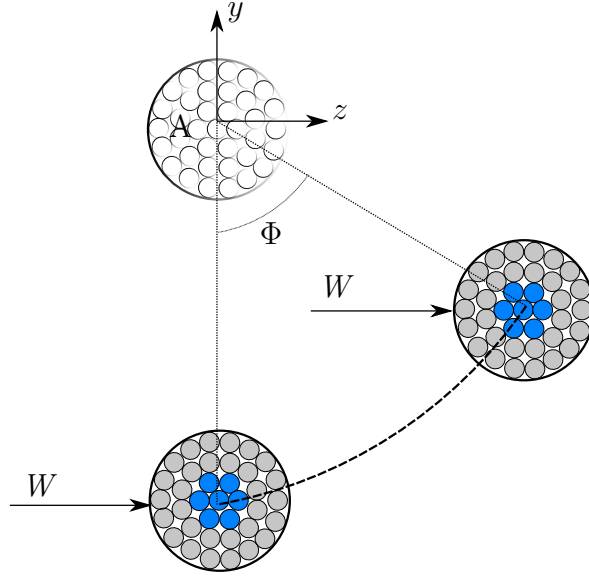


**Figura 5.10:** Perfil de fuerza nodal según el eje  $z$ .



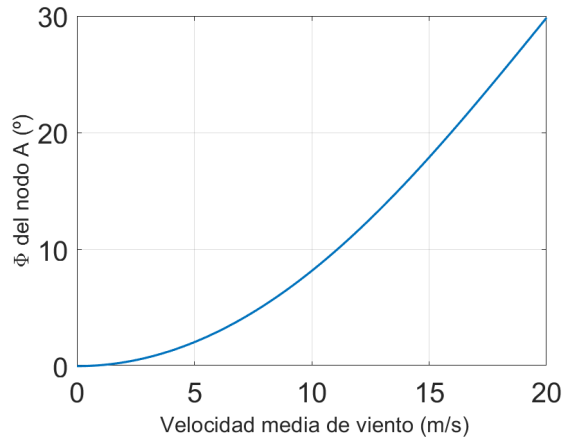
**Figura 5.11:** Desplazamientos del nodo A.

1 Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante  
 2 al que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras  
 3 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el  
 4 tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte,  
 5 en comparación con los resultados presentados por Foti y Martinelli, 2018 se  
 6 observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo,  
 7 la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el  
 8 valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamen-  
 9 te, lo que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la  
 10 turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a  
 11 que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincroni-  
 12 zadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan



**Figura 5.12:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

1 produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia  
2 del y la variación del ángulo de ataque con el ángulo. Como en la referen-  
3 cia (Foti y Martinelli, 2018) se toman en cuenta un perfil con formaciones de  
4 hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de  
5 diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.



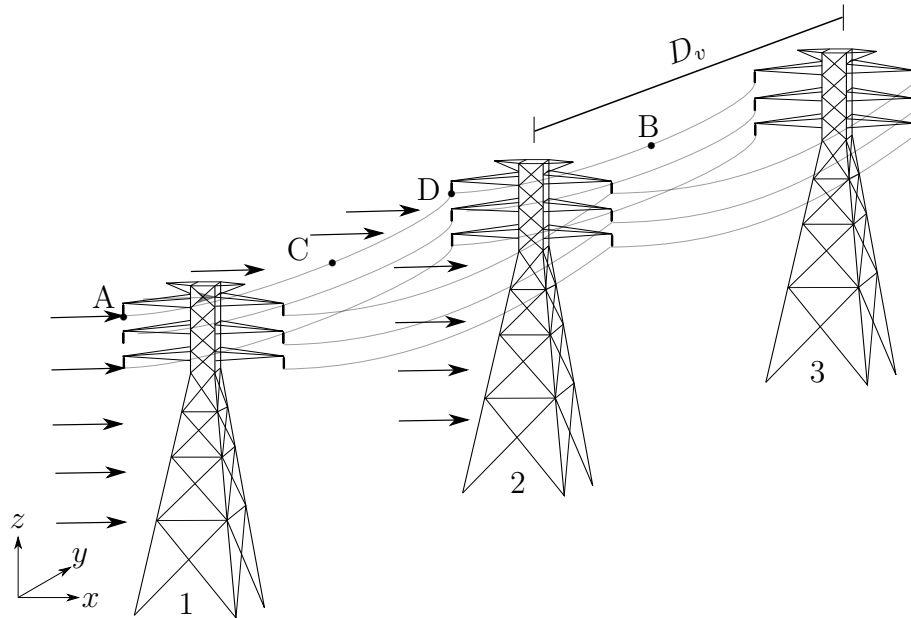
**Figura 5.13:** Ángulo de balanceo  $\Phi$  en función de la velocidad media  $W(t)$ .

6 El ejemplo permite inferir que la respuesta numérica del modelo representa  
7 de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores de  
8 transmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejanza en los resultados  
9 arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible

1 aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

## 2 5.3. Sistema de transmisión eléctrica

3 Este ejemplo ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de  
4 transmisión eléctricas afectados por vientos extremos no sinópticos, en parti-  
5 cular, TC. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido  
6 eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizan-  
7 do un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del  
8 ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos  
9 vanos de idéntico largo  $D_v = 206.5$  m tal cual se indica el Esquema 5.14. Para  
10 el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1  
11 y 2, respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del  
12 primer y segundo vano con los literales C y B, respectivamente. Con el objetivo  
13 de representar una geometría real de una línea de alta tensión y no aborrecer  
14 al lector con descripciones de propiedades, los conductores de la simulación  
15 se corresponden con el ejemplo resuelto de la Sección 5.2 y cuyas propiedades  
16 mecánicas se explicitan en la Tabla 5.1.

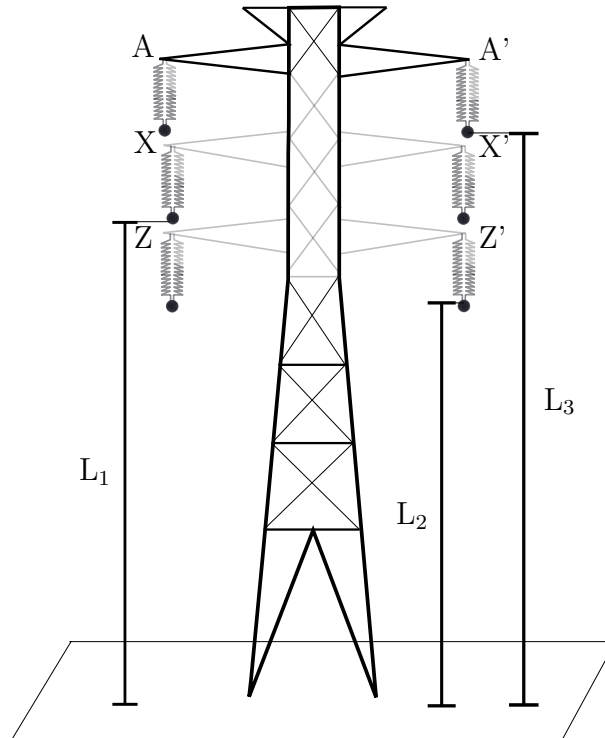


**Figura 5.14:** Esquema del sistema de transmisión.

17 En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que trans-  
18 portan un voltaje mayor a 72.5 kV. Este valor de tensión es eminentemente

1 peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elemen-  
2 tos aisladores. Para el modelar las cadenas se utilizaron elementos de barras  
3 tipo Green presentados en (Crisfield, 1997). Además, se consideró un módu-  
4 lo de elasticidad aproximado  $E = 70$  GPa según los estudios experimentales  
5 realizados por Crespo, 2019.

6 Al igual que los aisladores, las barras de las torres metálicas se modela-  
7 ron con elementos de Green, con una ley material Saint-Venant-Kirchhoff con  
8  $E = 300$  GPa y  $\nu = 0.3$ . Su geometría fue suministrada por el Ingeniero  
9 Agustín Téliz, cuya tesis de maestría consiste en el modelado y optimizado  
10 estructural de las mismas. Estos valores se corresponden con un acero ASTM  
11 A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y  
12 ASTM <sup>o</sup>65. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre  
13 los opuestos de la cercha de 14.8 m. Además, estas son capaces de soportar 6  
14 líneas, a cada altura sostienen cada una de las fases eléctricas. Las líneas se  
15 encuentran colocadas a tres cotas distintas  $L_1 = 31.75$  m,  $L_2 = 26.03$  m,  $L_3 =$   
16  $39.76$  m, tal y como se muestra en 5.15.

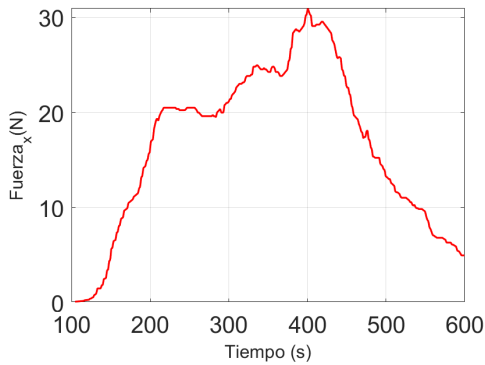


**Figura 5.15:** Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

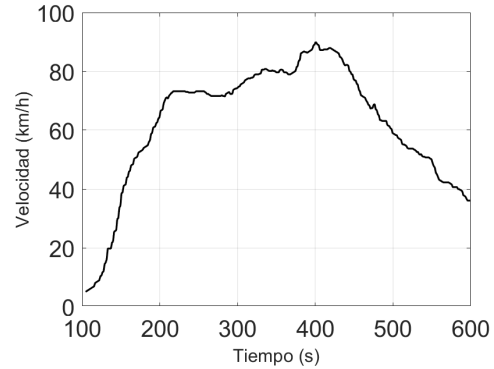
17 La simulación se separa en dos etapas, primeramente partiendo de la con-  
18 figuración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad

según el eje  $-z$  tal cual se muestra en la Figura 5.14. Nuevamente, al igual que en el Ejemplo 5.2, esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el amortiguamiento. Este se calculó según lo descrito en la Sección 4.2.2.1 resultando  $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \bar{v} = 0.15 \text{ Ns/m}$ .

Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta convectiva capturado en la referencia (Stengel y Thiele, 2017), positiva según el eje  $x$ . No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales siendo la velocidad una componente uniforme. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó únicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer resultados respecto al comportamiento flexional en el plano  $yz$ , lo que se evidenciará a continuación la diferencia de las trayectorias entre los nodos A, C, D y B. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa en que estos fenómenos tienen dimensiones espaciales del orden de 40 metros a 40 kilómetros según Fujita, 1985, consecuentemente es factible que la tormenta afecte a una fracción del tendido. Los valores de fuerza y velocidad asociadas a la coordenada  $x$  entre los nodos A y D para cada instante se muestran a continuación:



(a) Carga aplicada sobre los nodos.

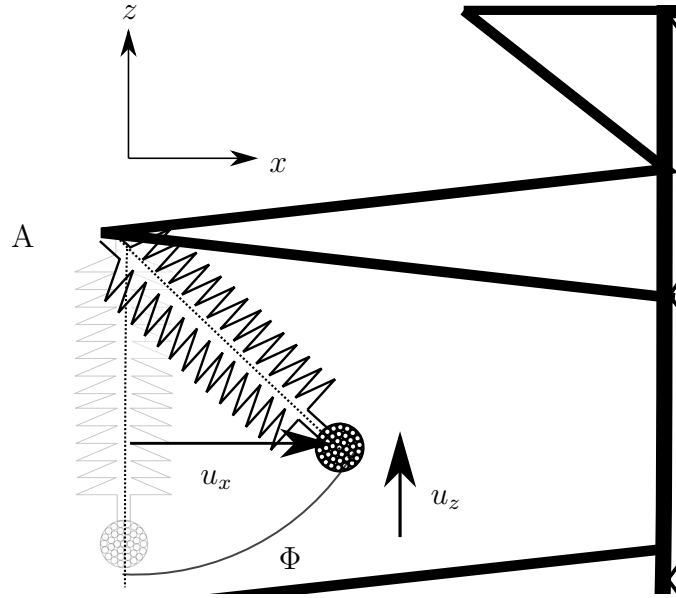


(b) Perfil de velocidades de viento.

Se compararon cuantitativamente las oscilaciones entre fases (A-A', X-X', Z-Z') de la Figura 5.15, no apreciándose sensibles diferencias, tanto en desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen apreciables variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A'). Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho de omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe antes el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando que



1 los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A como  
2 variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en los ejes  
3  $x$  y  $z$  como también el ángulo de oscilación  $\Phi$  tal y cual se observa en la Figura  
4 5.16.

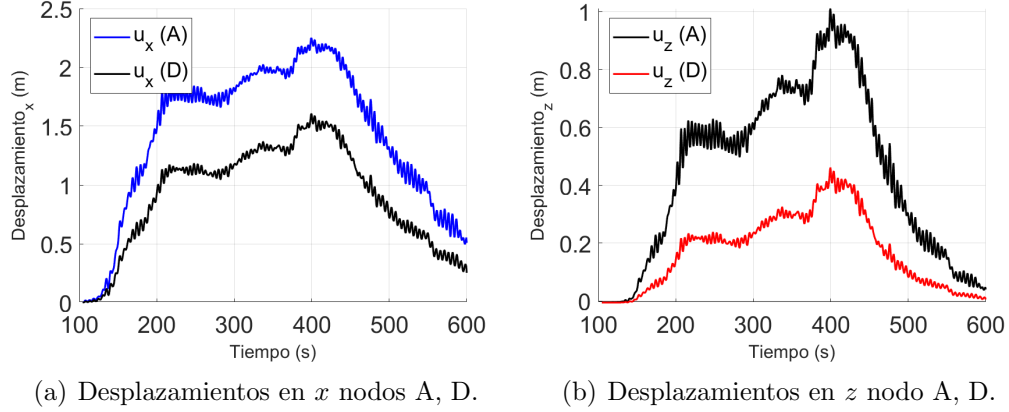


**Figura 5.16:** Ilustración de magnitudes de balanceo.

5 El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos  
6 de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de  $\Delta T = 0.5$   
7 s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico  
8  $\alpha = -0.05$ , luego de un procedimiento iterativo de ajuste de parámetros se  
9 realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con tolerancias en  
10 desplazamientos y en fuerzas residuales de  $10^{-5}$  m y  $10^{-5}$  N, respectivamente.

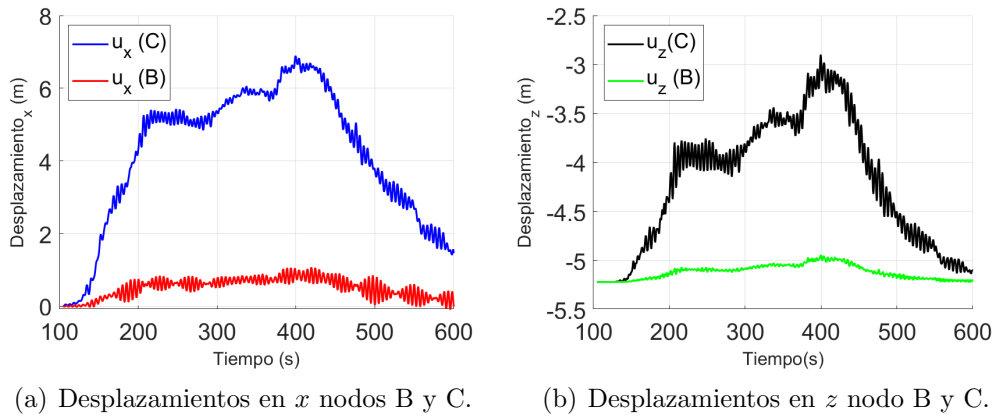
11 A continuación se muestran los desplazamientos verticales y horizontales  
12 de los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D.  
13 En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de  
14 fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas mag-  
15 nitudes externas, responde a un argumento basado en el análisis en frecuencia  
16 del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en  
17 estado estacionario. En 5.17(a) y 5.17(b) se observan los desplazamientos en  
18 vertical y transversal, respectivamente. En ambas figuras es posible notar que  
19 debido a la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2,  
20 el nodo A desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe  
21 destacar el carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que

1 el modelo no representa las cargas inerciales de los vanos contiguos a este.



**Figura 5.17:** Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D.

2 Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del con-  
3 ductor también despliegan grandes desplazamientos, este fenómeno resulta in-  
4 deseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de seguridad  
5 sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan gene-  
6 rar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proximidad  
7 entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los componentes.  
8 Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos para los  
9 nodos B y C.



**Figura 5.18:** Desplazamientos de los nodos medios B y C.

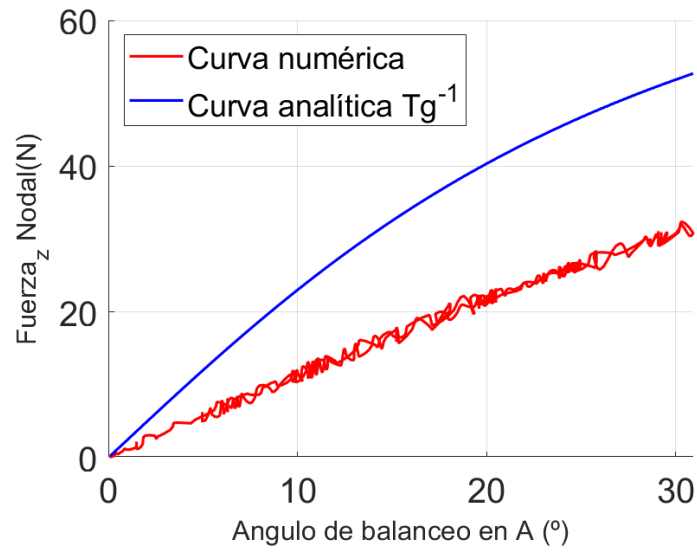
10 En la Figura 5.18(a) se aprecia que el orden de los movimientos, para am-  
11 bos nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación

entre estos es de unos 14 metros lo que garantiza que no habrá impactos entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas líneas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central, para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe considerarse a la hora del diseño. En la Figura 5.18(b) se muestra que el descenso máximo de la línea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en puntos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctuación temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Figuras 5.17.

Por otra parte, en las Figuras 5.18 se observan indicios de inestabilidades numéricas, debido a altas frecuencias inducidas por el método computacional o modos de resonancia.

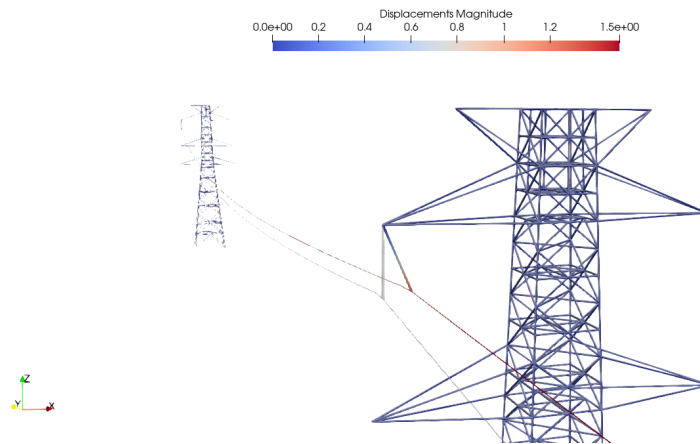
En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables cinemáticas se elaboró la Figura 5.19 carga desplazamiento para el nodo A. En abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos se graficó un cálculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo en el área de ingeniería del viento (Stengel y Thiele, 2017), (Durañona y Cataldo, 2009) (Yang y Hong, 2016).

El cálculo analítico resulta de un planteo estático plano, donde se iguala la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones pueden afectar las fuerzas internas transmitidas al elemento aislador. Asimismo, ese cálculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial, proveniente de las distintas orientaciones de la línea respecto al ángulo de incidencia del flujo. En la Figura 5.19 se evidencian las diferencias entre los modelos y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales menciona-



**Figura 5.19:** Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

1 das, se muestran la configuración indeformadas en gris y las deformadas con  
 2 una barra de colores en desplazamientos para el instante  $t = 400s$  en la Figura  
 3 [5.20](#).



**Figura 5.20:** Estructura indeformada y deformada para  $t = 400 s$ .

# 1 **Capítulo 6**

## 2 **Conclusiones**

3 El presente capítulo se separó en tres secciones que se relacionan  
4 con diferentes aristas o perspectivas del trabajo llevado a cabo. En primera  
5 instancia, se detallan las consideraciones finales y de síntesis, desde un pun-  
6 to de vista técnico sobre los resultados obtenidos. Luego de esto, se analizan  
7 limitaciones que deberían de mejorarse en posibles trabajos a futuro. Poste-  
8 riormente, se narran los aspectos del desarrollo académico de esta tesis, como  
9 trabajo cúlmine de una etapa formativa fundamental para quien escribe.

### 10 **6.1. Conclusiones técnicas**

11 Inicialmente se consultó el estado del arte en el área de Ingeniería del viento  
12 y estructural. Se analizaron bibliografías en materia de simulaciones numéricas  
13 aplicadas a conductores eléctricos, con abordajes semi-analíticos y computacio-  
14 nales. También, se estudiaron trabajos nacionales e internacionales, desde un  
15 punto de vista cualitativo y experimental de CD y sus posibles perjuicios sobre  
16 líneas de transmisión eléctrica. Existe vasta evidencia de que el fenómeno de  
17 tormentas convectivas. (TC) ha afectado severamente la calidad e integridad de  
18 la vida humana a lo largo y ancho del globo terráqueo. En particular, debido  
19 a las condiciones climáticas singulares de la región, y el progresivo calenta-  
20 miento global, se han intensificado los daños devastadores en los sistemas de  
21 transmisión y distribución eléctrica nacionales. Induciendo inevitablemente, en  
22 costos millonarios de reparación sobre las instalaciones, y pérdidas durante la  
23 interrupción del suministro. Esta investigación construye una herramienta de  
24 simulación computacional, capaz de emular los desmedidos desplazamientos y

1 esfuerzos que estos eventos producen sobre los sistemas de transmisión eléctrica.

2     Habiendo finalizado esta tesis, se enumeran las principales conclusiones  
3 técnicas de este trabajo:

4 **Conclusión T1:**

5     Se implementó y validó dentro del código abierto [ONSAS](#) una formula-  
6 ción corrotacional de vigas 3D para la simulación de problemas dinámicos  
7 no lineales.

8 **Conclusión T2:**

9     Se extendió analíticamente la formulación corrotacional para elementos  
10 de cables incorporando términos de amortiguamiento aerodinámicos.

11 **Conclusión T3:**

12     Se generó un modelo que representa el acoplamiento entre torres y con-  
13 ductores sometido por la acción de un perfil tipo CC. Según los resulta-  
14 dos del modelo, las tormentas convectivas afectan a las líneas generando  
15 desplazamientos de casi 7 metros y ángulos de hasta  $30^\circ$  en la cadena  
16 aisladora.

17 **Conclusión T1:** Debido a numerosas ventajas se eligió la formulación co-  
18 rrotacional de vigas 3D para grandes desplazamientos y rotaciones. Una vez  
19 ahondado en la temática, se implementó y validó un modelo corrotacional con-  
20 sistente robusto y eficaz, capaz de captar y reproducir desplazamientos de gran  
21 amplitud con número reducido de elementos. Esta formulación se validó con  
22 el ejemplo [5.1](#) benchmark del folclore corrotacional presentado por Simo y Vu-  
23 Quoc, [1988](#). Este es cargado con una fuerza abrupta y de severa magnitud, en  
24 relación a la rigidez de la estructura alcanzando un valor de 50 N en apenas  
25 2 segundos de simulación, tal y como se muestra en la Figura [5.2](#). Esta fuerza  
26 posee una esencia análoga al fenómeno de TC per se. Esa semejanza radica en  
27 el aumento súbito de su magnitud, en un corto lapso de tiempo, por ende, la  
28 capacidad del modelo de reproducir este tipo de impactos es fundamental para  
29 poder representar el fenómeno central de este trabajo.

30     En la Figura [5.4\(b\)](#) se observan amplitudes que alcanzan los 8 metros cuan-  
31 do la estructura mide 10. Esto evidencia, la fuerte presencia de grandes des-  
32 plazamientos y rotaciones. En relación a los desplazamientos en el sentido de  
33 *y* del nodo A, presentados en la Figura [5.4\(a\)](#), se observa el signo negativo

1 de este, concordando con lo esperado intuitivamente según la fuerza aplicada.  
2 Por último, el resultado más importante de este ejemplo, se destila al cotejar  
3 las respuestas del as Figuras 5.4(a), 5.4(b) y 5.5(b) con lo publicado por el  
4 artículo de referencia (Le et al. 2014). Al comparar estas figuras se concluye  
5 que el modelo implementado es capaz de representar cabalmente movimientos  
6 de gran amplitud, con apenas 10 elementos por miembro y un paso temporal  
7 de 0.25 s. Esto permitió validar la formulación para este caso y aplicarla a  
8 dominios más complejos específicamente con el foco en conductores eléctricos.

9 **6.1.0.0.1. Conclusión T2:** En la Sección 4.1.2 se desarrolló un estudio  
10 general sobre los campos de velocidades absolutos y relativos, vinculados al  
11 efecto relativo del movimiento del conductor respecto al viento. Este enfoque  
12 no se encontró en la bibliografía consultada, esclareciéndose la dinámica del  
13 fenómeno. A su vez, según la Figura 4.4, se develó que despreciar la velocidad  
14 perpendicular frente a la componente media, en el sentido transversal  $z$ , es  
15 equivalente a el ángulo de ataque sea nulo y también así, la componente del  
16 drag según el sentido de  $y$ . Por otra parte, se concluyó que al considerar los  
17 campos relativos aparece un término aeroelástico, que emerge de la diferencia  
18 de velocidades, vista desde un referencial solidario al conductor. A este término  
19 se lo identifica en la materia con el nombre de amortiguamiento aerodinámico  
20 y, según lo estudiado, no había sido incluido en la metodología corrotacional.

21 Una vez descritas las hipótesis en este mismo capítulo, en la Sección 4.2.2  
22 se generó un análisis analítico no explicado en la bibliografía de referencia (Le  
23 et al. 2014). En esta misma sección se aplicó el método de resolución para  
24 problemas dinámicos de HHT, incondicionalmente estable, explicando con de-  
25 tenimiento la deducción y premisas utilizadas. Complementario, al desarrollo  
26 teórico, se establecieron los principales pseudocódigos subyacentes a la imple-  
27 mentación numérica en el Software **ONSAS**.

28 En función de los avances originales de esta investigación mencionados en  
29 los párrafos anteriores. Esta tesis constituye un desarrollo complementario a  
30 la formulación propuesta, por Le et al. 2014, incluyendo fuerzas aerodinámicas  
31 linealizadas provenientes de la acción de vientos sobre conductores. Esto puede  
32 aplicarse a un espectro enorme de estructuras representables por elementos de  
33 viga, con grandes desplazamientos y rotaciones, atacadas por el viento. Dado  
34 este diverso abanico de aplicaciones, el interés de la comunidad científica puede  
35 ser un impulso catalizador para ciertas publicaciones a futuro.

### 1 **Conclusión T3:**

2 Se acoplaron diferentes componentes de un sistema de al-  
3 ta tensión conductores, aisladores y torres. Con este objetivo, se validaron  
4 ejemplos intermedios integrando elementos de biela tipo Green y de viga co-  
5 rrotacional con resultados lineales y dinámicos conocidos. Las geometrías y  
6 propiedades que integraron el modelo son extraídas de bibliografías experi-  
7 mentales y normativas buscando representar y emular el fenómeno de forma  
8 realista. Con el mismo cometido, el perfil de viento se extrajo de estudios ex-  
9 perimentales en el Norte de Alemania durante el transcurso de una tormenta  
10 convectiva, tipo corriente descendente, publicado en (Stengel y Thiele, 2017).  
11 Esta es de una magnitud intensa, aunque no en comparación con los resultados  
12 capturados en diferentes estudios de campo nacionales, en (Durañona y Catal-  
13 do, 2009) y (Durañona et al. 2019). En estos artículos se presentan medidas  
14 que alcanzan umbrales de 88.2 a 162 km/h a 45 m de altura. Otra diferencia al  
15 respecto, refiere al gradiente de velocidad, el flujo introducido numéricamente  
16 del autor Stengel y Thiele posee una menor aceleración en comparación con  
tormentas en el territorio uruguayo.

17 La carga del viento se distribuyó en el primer vano, provocando un perfil  
18 que ataque diferente a la línea en su coordenada axial. Esto genera un efecto  
19 de desfase entre los conductores de los vanos entre la torres 1-2 y 2-3 de  
20 la Figura 5.20. Esta variabilidad del flujo, busca representar un fenómeno de  
21 oscilación axial, relacionado con la presencia de vórtices a lo largo del espacio.  
22 Las diferencias en desplazamientos de los puntos A B C Y D de la cadena  
23 aisladora, se evidencia en las Figuras 5.18 y 5.17. Por más que los movimientos  
24 posean diferentes amplitudes de banda, los perfiles obtenidos se encuentran  
25 gráficamente emparentados con el perfil de la tormenta en la Figura 5.16(b).  
26 Vale destacar que en estos resultados se evidencia una cierta oscilación de alta  
27 frecuencia que puede deberse a inestabilidades numéricas.

28 Se desarrolló un análisis de contraste con un modelo ampliamente utilizado  
29 en el área de Ingeniería del Viento. Esta se utiliza para calcular de forma cua-  
30 siestática, utilizando una fórmula de arcoangente. Esta se basa en un péndulo  
31 cuasiestático plano, omitiendo términos inerciales. Los trabajos de Stengel y  
32 Thiele, 2017, Durañona y Cataldo, 2009 y Yan et al. 2009 aplican esta aproxi-  
33 mación simplificada. Si bien en los resultados del Ejemplo 5.3 no son com-  
34 prables, la aproximación plana no funciona. Para este caso en particular, la  
35 curva numérica parece reflejar una linealidad, evaluar el ángulo de la cadena  
36 mediante el modelo estático, arrojaría un resultado de sobrestimado. Esto se



1 detalla en la Figura 5.19.

2 Estos resultados presentan indicios que, para enfrentar la problemática, los  
3 códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complementario  
4 para el diseño de sistemas de transmisión y distribución. Según contactos es-  
5 tablecidos con la empresa de transmisión eléctrica (UTE), las torres de alta  
6 y media tensión suelen encargarse a empresas privadas que obtienen la obra  
7 por licitación y entregan las instalaciones con llave en mano. Estos proyectos  
8 suelen importar soluciones del extranjero, que pueden ser no aplicables a las  
9 condiciones nacionales. Esto se explica por la carencia de las normas interna-  
10 cionales en materia de fenómenos de viento no sinópticos como CD y ciclones  
11 extratropicales. Esto se intensifica en el territorio para sistemas montados hace  
12 30 años en superposición con la asiduidad, intensidad y frecuencia de TC.

13 Uniendo resultados de diferentes trabajos internacionales con los resultados  
14 del modelo presentado en la Sección 5.3, es posible teorizar que la mayoría de  
15 las incidencias ocurridas en las líneas Palmar-Montevideo de 500kV, pueden  
16 deberse al pasaje de tormentas severas sobre la zona. Estas tormentas produ-  
17 cen CD, que ejercen cargas desmesuradas sobre el conductor, en el orden de  
18 minutos, imponiendo ángulos de balanceo excesivos, acercando los conductores  
19 a las torres, a una distancia tal, que inminentes descarga a tierra pueden dejar  
20 fuera de servicio a la línea. Además según los estudios de la norma *Design cri-*  
21 *teria of overhead transmission lines*, 2003 del Apéndice 2, esta solo considera  
22 vientos tipo CLA. Esto podría estar subestimando las fuerzas ejercidas por el  
23 viento, ya que para el territorio uruguayo según Durañona y Denis, 2018, los  
24 periodos de retorno para velocidades de hasta 100 km/h es menor para CD en  
25 comparación con vientos tipo CLA.

## 26 6.2. Trabajos a futuro

27 Actualmente este trabajo abre claras líneas de investigación y desarrollo  
28 para continuar la mejora de los modelos que se aproximen a la realidad con  
29 mayor precisión. Como trabajo a futuro para continuar la línea de investigación  
30 con un encare general se proponen los siguientes lineamientos:

- 31 1. Investigar exhaustivamente sobre el origen de las oscilaciones de alta fre-  
32 cuencia observadas en los resultados numéricos del ejemplo de la Sección  
33 5.3.

- 1     2. Incluir en el análisis teórico de la formulación corrotacional condiciones  
2        de Dirichlet no homogéneas en desplazamientos, que sean capaces de  
3        representar el tensado del conductor durante la instalación. La hipótesis  
4        reduccionista sobre la tensión inicial, aparenta ser imprecisa respecto a  
5        la rigidez del sistema y tiende a reducir la exactitud en la representación  
6        del fenómeno. Según el punto de vista del autor, esta implementación en  
7        [ONSAS](#) es el punto de partida en la continuación de este trabajo.
- 8     3. Implementar un módulo modal dentro del [ONSAS](#) capaz de calcular los  
9        modos estructurales, insumo fundamental para realizar un análisis en  
10       frecuencia de posibles resonancias viento-conductor.
- 11    4. Agregar al desarrollo analítico de la formulación corrotacional la posibi-  
12       lidad de incluir relaciones de fuerza viscosas, no lineales con diferentes  
13       coeficientes de *drag* y *lift* de acuerdo al perfil geométrico de la sección e  
14       implementarlo en el Software [ONSAS](#).
- 15    5. Agregar al modelo del Ejemplo [5.3](#) los elementos separadores con más de  
16       un conductor por aislador. En las instalaciones visitadas de forma presen-  
17       cial, se observaron una serie de separadores que mantienen distanciados  
18       los conductores evitando el cortocircuito. Además, al unir cuatro cables  
19       generan una mayor rigidez e inercia en los tendidos. Este análisis deberá  
20       incluir diferentes valores de coeficientes de drag dada la proximidad entre  
21       conductores y sus efectos sobre las líneas de flujo.
- 22    6. Verificar el no deslizamiento interno entre las lingas que conforman el  
23       conductor, según los estudios propuestos por Foti y Martinelli, [2016](#).  
24       Esto permitiría verificar la hipótesis asumida respecto al comportamiento  
25       de unión que mantiene el conductor durante sus trayectorias. Asu vez  
26       generar un aporte original estudiando como las TC afectan al fenómeno  
27       de deslizamiento interno de Papailiou, [1997](#).
- 28    7. Generar un análisis de malla en el número de elementos por unidad de  
29       largo del conductor y sensibilidad respecto a las condiciones de borde  
30       establecidas. Esto permitiría estudiar el grado de discretización óptimo,  
31       para minimizar el error numérico sin incurrir en un tiempo excesivo de  
32       simulación.

1 8. Integrar la herramienta [ONSAS](#) con un solver de fluidos como por ejem-  
2 plo el [caffa.3d.MBRi](#) basado en volúmenes finitos con paralelización mul-  
3 titorntal Mendina et al. [2014](#). Esta ardua integración permitiría generar  
4 una herramienta sumamente potente para atacar problemas de interac-  
5 ción fluido-estructura.

6 Con el objetivo de generar una herramienta de diseño complementario para  
7 UTE se proponen los siguientes trabajos a futuro:

- 8 1. Incorporar diferentes geometrías de torres presentes en los distintos ten-  
9 didos de distribución del país. Según los intercambios con el personal de  
10 transmisión de UTE, las líneas de distribución, a partir de la década del  
11 2000, respecto a los que se representaron el Ejemplo [5.3](#) cambiaron las  
12 geometrías de torres. Es importante este análisis para lograr emular la  
13 influencia de la arquitectura de las torres, en la aproximación excesiva del  
14 conductor a las barras. De igual manera, adquirir datos reales aportados  
15 por UTE podría aportar un valor significativo a esta investigación.
- 16 2. Incorporar al modelo el agarre doble que, en determinadas ocasiones,  
17 se dispone en las líneas centrales de la torre. Esta es una solución ante  
18 la aproximación inminente del aislador, consiste en instalar una cadena  
19 aisladora extra que oficia de sujetador adicional para los conductores.  
20 Rigidizando y evitando de este modo el balanceo desmesurado. Otro  
21 tipo de soluciones implantadas, consiste en agregar pesos sobre puntos  
22 estratégicos en las líneas, aumentando la inercia del sistema. En este  
23 caso, la elección del peso consiste en un compromiso entre los esfuerzos  
24 generados en el cable sin alcanzar la fluencia y la masa que atenúa el  
25 balanceo. Este tipo de soluciones paliativas resultan interesantes como  
26 objeto de simulación.

## 27 6.3. Conclusiones de formación

28 El desarrollo de este trabajo constituyó una instancia de formación fun-  
29 damental y enriquecedora para el autor enmarcada dentro del programa de  
30 Maestría en Ingeniería Estructural. Este documento es la síntesis y aplicación  
31 de un conjunto de conocimientos profundizados durante la actividad programa-  
32 da, aplicada al modelado numérico de estructuras. Desde la óptica del autor, la

1 creación de herramientas endógenas con foco en atacar problemáticas a nivel  
2 nacional constituye un pilar fundamental en el desarrollo autónomo y origi-  
3 nal de la ingeniería uruguaya. Este trabajo es una muestra de la convicción  
4 y determinación, que el conocimiento académico, debe desarrollarse de forma  
5 transparente, comunitaria y democrática. Es por esto, que todos los códigos  
6 utilizados en esta investigación se implementaron en la herramienta de soft-  
7 ware libre [ONSAS](#). Esto abre la posibilidad a cualquier tercero, ya sea una  
8 organización o persona, de estudiar, modificar y difundir los códigos creados  
9 como también aplicarlos a sus propias necesidades.

### 10 **6.3.1. Reflexión personal**

11 Antes que nada, es necesario realizar una arqueología de las palabras su-  
12 jeto y fenómeno en castellano. Sujeto en latín *sub-iectum* significa lo que está  
13 debajo, según una interpretación posmoderna. Desde esta perspectiva, es el  
14 sujeto el sustrato de cualquier ente, que lo dota de sustancia, colores, palabras  
15 y formas. Por otra parte, fenómeno tiene una raíz etimológica en la palabra  
16 *phainomenon* al igual que la palabra fantasía. Esto alude a lo que se muestra,  
17 lo que se deja ver, lo que brilla. Ahora bien, en el acto de percibir cogniti-  
18 vamente existe una dirección previa (inconsciente o consciente) de apuntar el  
19 foco hacia algo, entonces ¿Quién y cómo se dirige ese foco?

20 Toda disciplina e investigación debería conocer sus propias fugas, fronteras  
21 y puntos ciegos. De lo contrario, cualquier pretensión hermética podría ser un  
22 síntoma de arrogancia y altanería. A lo largo de este trabajo, he canonizado una  
23 redacción en tercera persona, como si existiese una determinada imparcialidad  
24 y transparencia en dicho escritor. O quizás una búsqueda con necedad de la  
25 verdad absoluta. Este sujeto, apuntado y enfocado en los párrafos siguientes,  
26 merece ensimismarse y cuestionarse a sí mismo, según el proverbio en templo  
27 de Apolo del Oráculo de Delfos, *gnóthi sautón* o en castellano *Conócete a ti*  
28 *mismo*.

29 Durante el transcurso de este trabajó me surgieron las siguientes inquietu-  
30 des ¿Es la realidad un conjunto de fenómenos externos o es siempre un acto  
31 de interpretación inmanente al sujeto? Además, ¿Ese sujeto accede la reali-  
32 dad (el objeto) a través de la razón para conocer y explicarla, o simplemente  
33 la experiencia es quien valida ese conjunto de fenómenos? A partir de esta  
34 pregunta, emana una interrogante natural, ¿Es posible entonces, desligar al

1 sujeto del objeto, o más bien este ente (ex-siste) en el mundo, y está siempre  
2 arrojado, lanzado y en relación con el? Y de ser así, ¿No se encuentra entonces  
3 **ya** sugestionado por el paradigma actual, su cultura nativa y sus experiencias  
4 personales cuando describe?

5 Esas preguntas han sido abordadas por eminencias de la filosofía y la cien-  
6 cia, desde la modernidad hasta hoy. Por un lado, el realismo científico concibe  
7 que es posible constatar la realidad a través de la experiencia o a través del  
8 pensamiento. Para Descartes ese sujeto duda, piensa y por tanto **ya** en ese acto  
9 analítico, existe (*Cogito ergo sum*) Descartes, 1637, ósea el ente en tanto ente.  
10 El padre del racionalismo nos plantea que es el yo del sujeto, quien a través de  
11 la duda metódica puede acceder la verdad. Contrapuesto a este, el empirismo  
12 valida cualquier conocimiento sólo por la experiencia. Esta se define por lo  
13 que es captado por nuestros sentidos, es decir que la experiencia es sensorial.  
14 Estas dos posturas, la del racionalismo de Descartes y la del empirismo de  
15 Hume, pueden ser pensadas como una forma de abordaje a la relación realidad  
16 - conocimiento. Para Descartes: conozco en tanto analizo y pienso, y los ob-  
17 jetos existen cuando yo realizo la abstracción. Para el empirismo: conozco en  
18 la medida en que incorporo la realidad “objetiva”, la de los objetos que puedo  
19 percibir a través de los sentidos.

20 A mediados del sg XIX nació un pensador disruptivo que viró absoluta-  
21 mente a la cuestión. Frederick Nietzsche plantea en su libro Voluntad de Poder  
22 Nietzsche, 2018 “ El pensar no es para nosotros un medio para “conocer” sino  
23 para designar el acontecer, para ordenarlo, para volverlo manejable para nues-  
24 tro uso: así pensamos hoy acerca del pensar: mañana quizá de otro modo ”.  
25 Esta frase alude, desde mi voz de hoy, a un nihilismo que niega la posibilidad de  
26 conocer algo absoluto verdadero pues no es más que un desarrollo pragmático  
27 de poder. Es una cuestión de voluntad de voluntad, un dispositivo ordenatorio  
28 de la realidad según categorías y características en nuestro acto de querer/-  
29 poder conocer. Antípoda a esta teoría nihilista aparece el relativismo. Este se  
30 estriba en el principio de incertidumbre Heisenberg, si existe ese conocimien-  
31 to, es entonces indisoluble de cierta estructura. Thomas Khun en su libro *La*  
32 *estructuras de las revoluciones científicas* Kuhn, 2019 plantea que el método  
33 científico revoluciona, cuando se produce un cambio de paradigma, no a partir  
34 de la observación de nuevos hechos o fenómenos. Junto con otros destacados  
35 sociólogos, acuñan la idea del concepto de “cargado de teoría”, un cierto con-  
36 junto de preconceptos anteriores a la observación, descripción y desarrollo de

1 la cualquier investigación, que llevarán al científico demostrar lo que realmente  
2 quiere demostrar... de nuevo demostración de poder.

3       ¿Como se demuestran los resultados de esta investigación?, construyendo  
4 un conjunto de artefactos experimentales/computacionales que constatan una  
5 supuesta realidad casi como un espejo, por correspondencia. En ese proceso de  
6 creación o utilización de instrumentos como ser: un programa, un anemóme-  
7 tro o un código computacional existe una omnipresente intervención humana.  
8 ¿Vale entonces seguir redactando en tercera persona desde un objetivismo posi-  
9 tivistista heredado de hace dos siglos? ¿Es coherente no ser impersonal la descrip-  
10 ción de un resultado, cuando **ya** todo el dispositivo ordenatorio que subyace es  
11 una construcción humana? ¿Debemos seguir defendiendo un cadáver **ya** ase-  
12 sinado por las ciencias humanas, desde un **sujeto que no es más que un**  
13 **efecto** cultural, histórico y económico?. ¡Por una ciencia que tenga con-ciencia  
14 de sus puntos ciegos, Por una ciencia con con-ciencia de que la verdad absoluta  
15 ha muerto, Por una ciencia construida por personas en primera persona!

# 1 Bibliografía

- 2 Abd-Elaal, E.-S., Mills, J. E. y Ma, X. (2013). A coupled parametric-CFD  
3 study for determining ages of downbursts through investigation of dif-  
4 ferent field parameters. *Journal of Wind Engineering and Industrial*  
5 *Aerodynamics*, 123, 30-42.
- 6 Ahrens, J., Geveci, B. y Law, C. (2005). Paraview: An end-user tool for large  
7 data visualization. *The visualization handbook*, 717(8).
- 8 Ahrens, J., Jourdain, S., OLeary, P., Patchett, J., Rogers, D. H. y Petersen,  
9 M. (2014). An image-based approach to extreme scale in situ visualiza-  
10 tion and analysis. *SC'14: Proceedings of the International Conference*  
11 *for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*,  
12 424-434.
- 13 Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M. y Paulino, G. H. (2018).  
14 Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers  
15 manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering*  
16 *Structures*, 173, 283-299.
- 17 Alsafadie, R., Hjiiaj, M. y Battini, J.-M. (2010). Corotational mixed finite  
18 element formulation for thin-walled beams with generic cross-section.  
19 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52),  
20 3197-3212.
- 21 Ang, A. H.-S. y Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering plan-*  
22 *ning and design*.
- 23 Asadi, S. y Johansson, H. (2019). Multibody dynamic modelling of a direct  
24 wind turbine drive train. *Wind Engineering*, 0309524X19849827.
- 25 Barzanooni, R., Bog, I. T. y Elhaddad, M. (2018). Modeling of Flexible Wirings  
26 and Contact Interactions in In-dustrial Robots Using Geometrically  
27 Exact Beam Formulation.
- 28 Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping  
29 effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- 1        *and Engineering*, 191(17-18), 1755-1789. [https://doi.org/10.1016/](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
- 2        [S0045-7825\(01\)00352-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
- 3        Behdinan, K., Stylianou, M. y Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic
- 4        analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and*
- 5        *engineering*, 154(3-4), 151-161.
- 6        Blevins, R. D. y Vibrations, F.-I. (1990). Van Nostrand Reinhold. *New York*,
- 7        104-110.
- 8        Bruno Bazzano, J. y Pérez Zerpa, J. (2017). Introducción al Análisis No Lineal
- 9        de Estructuras: texto del curso Análisis No Lineal de Estructuras.
- 10       Cardona, A. y Geradin, M. (1988). A beam finite element non-linear theory
- 11       with finite rotations. *International journal for numerical methods in*
- 12       *engineering*, 26(11), 2403-2438.
- 13       Chabart, O. y Lilien, J.-L. (1998). Galloping of electrical lines in wind tunnel
- 14       facilities. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*,
- 15       74, 967-976.
- 16       Costello, G. A. (1990). Average Voting Members and Other Benign Fictions:
- 17       The Relative Reliability of Committee Reports, Floor Debates, and
- 18       Other Sources of Legislative History. *Duke LJ*, 39.
- 19       Crespo, C. A. M. (2019). *Análisis en la selección de aisladores para una línea de*
- 20       *transmisión*. Facultad de ingeniería/ Universidad Autonoma de Mexico.
- 21       Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and struc-*
- 22       *tures*, Vol. 2. John Wiley & Sons.
- 23       Darwish, M. M., El Damatty, A. A. y Hangan, H. (2010). Dynamic characte-
- 24       ristics of transmission line conductors and behaviour under turbulent
- 25       downburst loading. *Wind and Structures*, 13(4), 327.
- 26       Davenport, A. G. (1965). *Dynamic Behaviour of Massive Guy Cables*.
- 27       Davenport, A. (1960). *Wind Loads on Structures*, Division of Building Re-
- 28       search.
- 29       Desai, Y., Yu, P., Popplewell, N. y Shah, A. (1995). Finite element modelling
- 30       of transmission line galloping. *Computers & structures*, 57(3), 407-420.
- 31       Descartes, R. (1637). *Discours de la methode*. Leyde.
- 32       Di Pilato, M., Martelli, F. y Martinelli, L. (2008). Corotational Cable Elements
- 33       to Simulate the Behaviour of Suspended Cables under Wind Loading.
- 34       *not yet published*.
- 35       Durañona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of
- 36       high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and



1        their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Ae-*  
2        *rodynamics*, 184, 128-138.

3    Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme  
4        wind climate of Uruguay. *Proceedings of the 14th International Confe-*  
5        *rence on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*, 21-26.

6    Durañona, V. y Cataldo, J. (2009). Analysis of severe storms in Uruguay and  
7        their effect on high voltage transmission lines. *Proceedings of the 11th*  
8        *Americas Conference on Wind Engineering*.

9    Durañona, V. y Denis, A. (2018). Bluff and body action, Apuntes del curso  
10        Elementos Aerodinámica y Aerolaticdad Estrcutrul.

11   Eaton, J. W., Bateman, D. y Hauberg, S. (2007). *GNU Octave version 3.0. 1*  
12        *manual: a high-level interactive language for numerical computations*.  
13        SoHo Books.

14   El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).

15   Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic  
16        bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*,  
17        40(13-14), 6451-6467. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063>  
18        001

19   Foti, F. y Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping  
20        vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal  
21        resonance. *Journal of Vibration and Control*, 24(7), 1322-1340.

22   Fujita, T. (1985). The downburst: Microburst and macroburst, SMRP Res.

23   Gani, F. y Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines gu-  
24        yed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*,  
25        37(3), 450-465.

26   Hilber, H. M., Hughes, T. J. y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipa-  
27        tion for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake*  
28        *Engineering & Structural Dynamics*, 5(3), 283-292.

29   Holmes, J. D. (2002). A re-analysis of recorded extreme wind speeds in region  
30        A. *Australian Journal of Structural Engineering*, 4(1), 29-40.

31   Hsiao, K. M., Lin, J. Y. y Lin, W. Y. (1999). A consistent co-rotational finite  
32        element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-  
33        D beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,  
34        169(1-2), 1-18.

35   Ibrahimbegovic, A. y Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying impli-  
36        cit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional

- 1 beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Me-*  
2 *chanics and Engineering*, 191(37-38), 4241-4258.
- 3 Ibrahimbegović, A. y Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of  
4 beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for*  
5 *Numerical Methods in Engineering*, 41(5), 781-814.
- 6 *Design criteria of overhead transmission lines* (Standard). (2003). Internatio-  
7 nal Electrotechnical Commission. Geneva, CH.
- 8 Irvine, H. M. y Caughey, T. K. (1974). The Linear Theory of Free Vibrations of  
9 a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical,*  
10 *Physical and Engineering Sciences*, 341(1626), 299-315. [https://doi.](https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189)  
11 [org/10.1098/rspa.1974.0189](https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189)
- 12 Irvine, H. M. y Griffin, J. H. (1976). *On the dynamic response of a suspended*  
13 *cable* (Vol. 4). <https://doi.org/10.1002/eqe.4290040406>
- 14 Irvine, M. (1978). Free Vibrations of Inclined Cables. *Journal of the Structural*  
15 *Division*, Vol. 104, 343-347.
- 16 Jones, K. F. (1992). Coupled vertical and horizontal galloping. *Journal of*  
17 *engineering mechanics*, 118(1), 92-107.
- 18 Klöppel, K. y H., L. K. (1942). *Die lotrechten Eigenschwingungen der*  
19 *Hängerbrücken* (23.<sup>a</sup> ed., Vol. 23).
- 20 Koh, C. G. y Rong, Y. (2004). Dynamic analysis of large displacement cable  
21 motion with experimental verification. *Journal of sound and vibration*,  
22 272(1-2), 187-206.
- 23 Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite  
24 rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, 20(2),  
25 101-126.
- 26 Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de  
27 cultura economica.
- 28 Kutterer, M. y Starossek, U. (1992). *Dynamic cable stiffness and dynamic*  
29 *interaction between cable and beam* (Tesis doctoral).
- 30 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiaj, M. (2011). Efficient formulation for dynamics  
31 of corotational 2D beams. *Computational Mechanics*, 48(2), 153-161.  
32 <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6>  
33 007
- 34 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiaj, M. (2014). A consistent 3D corotational beam  
35 element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. *Computer*  
36 *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269, 538-565.

- 1 Lee, C. L. y Perkins, N. C. (1992). Nonlinear oscillations of suspended cables  
2 containing a two-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 3(6),  
3 465-490.
- 4 Luongo, A. y Piccardo, G. (1998). Non-linear galloping of sagged cables in 1:  
5 2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5), 915-940.
- 6 Luongo, A., Rega, G. y Vestroni, F. (1984). Planar non-linear free vibrations of  
7 an elastic cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19(1),  
8 39-52.
- 9 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2007). A linear curved-beam model for  
10 the analysis of galloping in suspended cables. *Journal of Mechanics of*  
11 *Materials and Structures*, 2(4), 675-694.
- 12 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2009). On the effect of twist angle on non-  
13 linear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, 87(15-  
14 16), 1003-1014.
- 15 Mara, T. G. (2007). *The effects of multi-directional winds on lattice sections*  
16 (Tesis doctoral). Faculty of Graduate Studies, University of Western  
17 Ontario.
- 18 Martinelli, L. y Perotti, F. (2004). Numerical analysis of the dynamic behavior  
19 of cables under turbulent wind. *Struct. Eng. Mech. & Comput. (SEMC*  
20 *2004)*.
- 21 Martinelli, L. y Perotti, F. (2001). Numerical analysis of the non-linear dy-  
22 namic behaviour of suspended cables under turbulent wind excita-  
23 tion. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1(02),  
24 207-233.
- 25 Mendina, M., Draper, M., Soares, A. P. K., Narancio, G. y Usera, G. (2014).  
26 A general purpose parallel block structured open source incompressible  
27 flow solver. *Cluster Computing*, 17(2), 231-241.
- 28 Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics.  
29 *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67-94.
- 30 Nietzsche, F. (2018). *La voluntad de poder*. Edaf.
- 31 Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent  
32 linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics*  
33 *and Engineering*. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90248-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5)
- 34 Oke, D. G. (2000). Estimating.
- 35 Oran, C. (1973). Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural*  
36 *Division*, 99(6), 987-1001.

- 1 Pacoste, C. y Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Com-*  
2 *puter methods in applied mechanics and engineering*, 144(1-2), 163-197.
- 3 Papailiou, K. O. (1997). On the bending stiffness of transmission line conduc-  
4 tors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(4), 1576-1583. [https:](https://doi.org/10.1109/61.634178)  
5 [//doi.org/10.1109/61.634178](https://doi.org/10.1109/61.634178)  
6 003
- 7 Pugsley, A. G. (1949). On the natural frequencies of suspension chains. *Quar-*  
8 *terly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2(4), 412-418.  
9 <https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.412>
- 10 Rankin, C. y Nour-Omid, B. (1988). The use of projectors to improve finite  
11 element performance. *Computers & Structures*, 30(1-2), 257-267.
- 12 Rawlins, C. (2005). Flexure of a single-layer tensioned cable at a rigid support.  
13 Proc. 6th International Symposium on Cable Dynamics. Charleston  
14 (USA). 19-22 Sept.
- 15 Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements.  
16 *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 149(1-4),  
17 113-132.
- 18 Routh, E. J. et al. (1955). *Dynamics of a system of rigid bodies*. Dover New  
19 York.
- 20 Saxon, D. S. y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended  
21 chain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6(3),  
22 273-285. <https://doi.org/10.1093/qjmam/6.3.273>
- 23 Simiu, E. y Scanlan, R. H. (1986). *Wind Effects on Structures*, 3. ed. (second  
24 edi). Jhon Wiley; Sons.
- 25 Simo, J. C. y Vu-Quoc, L. (1988). On the dynamics in space of rods undergoing  
26 large motions—a geometrically exact approach. *Computer methods in*  
27 *applied mechanics and engineering*, 66(2), 125-161.
- 28 Starossek, U. (1991). Boundary induced vibration and dynamic stiffness of a  
29 sagging cable. [http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C\\_%7D/](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)  
30 [Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C\\_%7DCable%7B%5C\\_%](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)  
31 [7DStiffness.pdf](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)
- 32 Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading  
33 acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia*  
34 *engineering*, 199, 3152-3157.

- 1 Triantafyllou, M. S. (1984). The dynamics of taut inclined cables. *Quarterly*  
2 *Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 37(3), 421-440. [https:](https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421)  
3 [//doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421](https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421)
- 4 Yan, B., Lin, X., Luo, W., Chen, Z. y Liu, Z. (2009). Numerical study on  
5 dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission  
6 line under wind load. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 25(1),  
7 248-259.
- 8 Yang, S. y Hong, H. (2016). Nonlinear inelastic responses of transmission  
9 tower-line system under downburst wind. *Engineering Structures*, 123,  
10 490-500.
- 11 Zienkiewicz, O. C. y Cheung, Y. (1970). The finite element method in struc-  
12 tural and continuum mechanics.

# APÉNDICES

# 1 Apéndice 1

2 Se presenta a continuación los códigos implementados durante el transcurso  
3 de este trabajo en el software ([ONSAS](#)). Los códigos a continuación incluyeron  
4 al software los términos dinámicos de fuerzas inerciales y matrices tangentes.

```
5 1 % Copyright (C) 2020, Jorge M. Perez Zerpa, J. Bruno Bazzano ,  
6     Joaquin Viera ,  
7 2 %   Mauricio Vanzulli, Marcelo Forets, Jean-Marc Battini ,  
8     Sebastian Toro  
9 3 %  
10 4 % This file is part of ONSAS.  
11 5 %  
12 6 % ONSAS is free software: you can redistribute it and/or modify  
13 7 % it under the terms of the GNU General Public License as  
14     published by  
15 8 % the Free Software Foundation, either version 3 of the License  
16     , or  
17 9 % (at your option) any later version.  
18 0 %  
19 1 % ONSAS is distributed in the hope that it will be useful,  
20 2 % but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty  
21     of  
22 3 % MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the  
23 4 % GNU General Public License for more details.  
24 5 %  
25 6 % You should have received a copy of the GNU General Public  
26     License  
27 7 % along with ONSAS. If not, see <https://www.gnu.org/licenses  
28     />.  
29 8  
30 9 function [ fs, ks, stress, rotData ]= elementBeamForces( ...  
31 0     elemCoords, elemCrossSecParams, elemConstitutiveParams,  
32     solutionMethod, Ue, Udote, Udotdote, elemrho ) ;
```

```

11
12 elemCoords = elemCoords(:) ;
13 xs         = elemCoords(1:2:end) ;
14
15 booleanCSTangs = 0 ;
16
17 % --- material constit params ---
18 rho = elemrho ;
19 E   = elemConstitutiveParams(2) ;
20 nu  = elemConstitutiveParams(3) ;
21 G   = E/(2*(1+nu)) ;
22 % -----
23
24 % --- cross section ---
25 if elemCrossSecParams(1) == 1
26     Area = elemCrossSecParams( 2 ) ;
27     J     = elemCrossSecParams( 3 ) ;
28     Iyy   = elemCrossSecParams( 4 ) ;
29     Izz   = elemCrossSecParams( 5 ) ;
30     %
31     if length( elemCrossSecParams ) > 5
32         Jrho = diag( elemCrossSecParams( 6:8 ) ) ;
33     else
34         Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
35     end
36 elseif elemCrossSecParams(1) == 2
37     Area = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3) ;
38     Iyy  = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)^3/12 ;
39     Izz  = elemCrossSecParams(3)*elemCrossSecParams(2)^3/12 ;
40     if elemCrossSecParams(2)==elemCrossSecParams(3)
41         J     = 1/3*0.40147*elemCrossSecParams(2)^4 ;
42     else
43         error('rectangular section type not implemented yet,
44 please create an issue')
45     end
46     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
47 elseif elemCrossSecParams(1) == 3
48     diameter = elemCrossSecParams(2) ;
49     Area     = pi*diameter^2/4 ;
50     Iyy      = pi*diameter^4/64 ;
51     Izz      = Iyy ;
52     J        = Iyy + Izz ;
53     Jrho     = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;

```



```

133 else
134     error(' section type not implemented yet, please create an
135           issue')
136 end
137 % -----
138 %--- Auxiliar matrices ---
139 I3 = eye(3) ;
140 O3 = zeros(3) ;
141 O1 = zeros(1,3) ;
142
143 permutIndxs = [1:2:5 2:2:6 ([1:2:5]+6) ([2:2:6]+6) ] ;
144
145 dg = Ue ( permutIndxs ) ;
146 if solutionMethod > 2
147     ddotg = Udote ( permutIndxs ) ;
148     ddotdotg = Udotdote( permutIndxs ) ;
149 end
150
151 % --- Global thetas ---
152 tg1 = dg (4:6);
153 tg2 = dg (10:12);
154
155 %% --- Rotation matrices ---
156 Rg1 = expon( tg1 ) ;
157 Rg2 = expon( tg2 ) ;
158
159 x21 = xs(4:6) - xs(1:3) ;
160 d21 = dg(7:9) - dg(1:3) ;
161
162 lo = sqrt( ( x21 )' * ( x21 ) ) ; %
163 l = sqrt( ( x21 + d21 )' * ( x21 + d21 ) ) ; %
164
165 % --- rotation matrix to reference configuration ---
166 Ro = beamRefConfRotMat( x21 ) ;
167
168 % --- rigid rotation ---
169
170 % --- deformed x axis ---
171 e1 = ( x21 + d21 ) / l ;
172
173 q1 = Rg1 * Ro * [0 1 0]' ;
174 q2 = Rg2 * Ro * [0 1 0]' ;

```

```

115 q = ( q1 + q2 ) / 2 ;
126
137 % --- deformed z local axis ---
148 e3 = cross (e1, q) ;
159 e3 = e3 / norm(e3) ;
160
171 % --- deformed y local axis ---
182 e2 = cross (e3, e1);
193
104 % --- rotation matrix ---
115 Rr = [ e1 e2 e3 ] ;
126
137 % --- local displacements ---
148
159 % --- axial displacement ---
160 u = l - lo;
171
182 % --- local rotations ---
193 Re1 = Rr' * Rg1 * Ro;
204 Re2 = Rr' * Rg2 * Ro;
215
226 t11 = logar( Re1 ) ;
237 t12 = logar( Re2 ) ;
248
259 locDisp = [ u t11' t12' ] ;
260
271 %% --- local force vector and tangent stiffness matrix ---
282 [f1, k1, strain, stress] = beamLocalStaticForces (u, t11, t12,
29     lo, E, G, Area, Iyy, Izz, J ) ;
303
314 %% transformation to the new local coordinates
325 q = Rr' * q ;
336 q1 = Rr' * q1 ;
347
358 nu = q(1)/q(2);
369 nu11 = q1(1)/q(2);
370 nu12 = q1(2)/q(2);
381 nu21 = 2*nu-nu11;
392 nu22 = 2-nu12;
403
414 De1 = invTs( t11 ) ;
425 De2 = invTs( t12 ) ;
436

```

```

117 % --- matrix for transformation between global and relative ---
128 % --- rotations/moments ---
139 H = [ 1    01    01 ; ...
140        01' De1    03 ; ...
151        01'    03    De2 ] ;
162
173 fe = H' * fl ;
184 Dh1 = dinvTs( tl1, fl(2:4) ) * De1 ;
195 Dh2 = dinvTs( tl2, fl(5:7) ) * De2 ;
206
217 Kh = [ 0    01    01
228        01' Dh1    03
239        01'    03    Dh2 ] ;
240
251 ke = H' * kl * H + Kh ;
262
273 % --- transformation to the global coordinates ---
284 r = [ -e1' 01    e1' 01 ]' ;
295
306 B = [ r'
317        -nu/l*e3' (1-nu12/2)*e1'+nu11/2*e2'    nu/l*e3' 1/2*(-nu22*e1
322            '+nu21*e2')
338        -e3'/l e2' e3'/l 0 0 0
349        e2'/l e3' -e2'/l 0 0 0
350        -nu/l*e3' 1/2*(-nu12*e1'+nu11*e2')    nu/l*e3' (1-nu22/2)*e1'+
366            nu21/2*e2'
371        -e3'/l 0 0 0 e3'/l e2'
382        e2'/l 0 0 0 -e2'/l e3'];
393
404 fg = B' * fe ;
415
426 A = (I3-e1*e1')/l;
437
448 Dr=[A    03 -A    03
459        03 03    03 03
460        -A    03    A    03
471        03 03    03 03];
482
493 G=[0    0    nu/l    nu12/2    -nu11/2    0    0    0    -nu/l    nu22/2    -
494        nu21/2    0
504        0    0    1/l    0    0    0    0    0    -1/l    0
515        0    0

```

```

135      0   -1/1   0       0       0       0   0   1/1   0       0
2      0       0]';
136
147 II=[03 I3 03 03
158      03 03 03 I3];
169
170 P = II - [G'; G'] ;
181
192 F = P' * fe(2:7);
103
114 sF=[skew(F(1:3))
125      skew(F(4:6))
136      skew(F(7:9))
147      skew(F(10:12))];
158
169 EE=[Rr 03 03 03
170      03 Rr 03 03
181      03 03 Rr 03
192      03 03 03 Rr];
203
214 nab=[0
225      (nu*(fe(2)+fe(5))+fe(3)+fe(6))/1
236      (fe(4)+fe(7))/1];
247
258 Kg = B' * ke * B + Dr * fe(1) - EE*sF*G'*EE' + EE*G*nab*r' ;
269
270
281 %% --- transformation to the new global coordinates ---
292
303 Dg1 = Ts( tg1 ) ;
314 Dg2 = Ts( tg2 ) ;
325
336 q=[fg(1:3)
347      Dg1'*fg(4:6)
358      fg(7:9)
369      Dg2'*fg(10:12)];
370
381 Dk1=dTs(tg1,fg(4:6));
392 Dk2=dTs(tg2,fg(10:12));
403
414 H=[I3 03 03 03
425      03 Dg1 03 03
436      03 03 I3 03

```

```

217     03 03 03 Dg2];
228
239 Kt = H' * Kg * H ;
240
251 Kt( 4:6 , 4:6 ) = Kt( 4:6 , 4:6 ) + Dk1 ;
262 Kt(10:12,10:12) = Kt(10:12,10:12) + Dk2 ;
273
284 Kt = (Kt+Kt')/2;
295
306 Finte = zeros(size(q)) ;
317 dofscomb = [ 1:2:5 2:2:6 7:2:11 8:2:12 ] ;
328
339 Finte( dofscomb ) = q ;
340 KTe = zeros( size(Kt));
351
362 KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
373
384 fs = {Finte} ;
395 ks = {KTe};
406
417 rotData = {locDisp, Rr} ;
428
439 if solutionMethod > 2
440 %% ---- interpolation functions ----
451 % --- linear ---
462 N1 = @(x) 1 -x/lo ;
473 N2 = @(x) x/lo ;
484
495 % --- cubic ---
506 N3 = @(x) x*(1-x/lo)^2 ;
517 N4 = @(x) -(1-x/lo)*(x^2)/lo ;
528 N5 = @(x) (1-3*x/lo)*(1-x/lo) ;
539 N6 = @(x) (3*x/lo-2)*(x/lo) ;
540
551 N7 = @(x) N3(x)+N4(x) ;
562 N8 = @(x) N5(x)+N6(x)-1 ;
573 % -----
584
595 P1 = @(x) [ 0 0 0 0 0 0 ; ...
606             0 0 N3(x) 0 0 N4(x) ; ...
617             0 -N3(x) 0 0 -N4(x) 0 ] ;
628
639 ul = @(x) P1(x) * [ t11; t12 ] ; % Eq. 38

```

```

210
221 P2      = @(x) [ N1(x)      0      0  N2(x)      0      0 ; ...
232              0  N5(x)      0      0  N6(x)      0 ; ...
243              0      0  N5(x)      0      0  N6(x) ] ;
254
265 N        = @(x) [ N1(x)*I3      03      N2(x)*I3      03 ];
276
287 H1        = @(x) N(x) + P1( x ) * P - 1*skew( ul(x) ) * G' ;
298
309 wdoter= G' * EE' * ddotg ; % Eq. 65
310
321 A1        = [      01      01      01      01 ;
332              0 -1      0  01      0  1      0  01 ;
343              0  0      -1  01      0  0      1  01 ] ;
354
365 udot1 = @(x)  P1(x) * P * EE' * ddotg ;
376
387 H1dot = @(x)  N7(x)/(1^2)*A1*(r' * ddotg) - skew( udot1(x) )
39      * G' ;
408
419 ET = [skew(wdoter)      03      03      03      ;
420        03      skew(wdoter)      03      03      ;
431        03      03      skew(wdoter)      03      ;
442        03      03      03      skew(wdoter)      ];
453
464 C1 = @(x)  skew(wdoter)*H1(x) + H1dot(x) -H1(x)*ET;
475
486 udot      = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotg;
497 udotdot = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotdotg+Rr*C1(x)*EE'*ddotg;
508
519 %% --- Matrix to compute wdot y wdtotdot ---
520
531 H2 = @(x) P2(x)*P+G';
542
553 wdot      = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotg;
564
575
586 A2        = [      01      01      01      01;
597              0  0      1  01      0  0 -1      01;
608              0 -1  0      01      0  1      0      01 ] ;
619
620 H2dot      = @(x) N8(x)/1^2*A2*(r'*ddotg) ;
631

```

```

312 C2      = @(x) skew(wdoter)*H2(x) + H2dot(x) - H2(x)*ET ;
323
334 wdotdot  = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotdotg + Rr*C2(x)*EE'*ddotg ;
345
356 %% --- Tensor dyadc of Intertia ---
367 %compute Rg(x)
378 thethaRoof = @(x) P2(x)*[t11;t12] ;
389 Rex        = @(x) expon(thethaRoof(x)) ;
390 Rgx        = @(x) Rr*Rex(x)*Ro' ;
401
412 Irho       = @(x) Rgx(x)*Ro*(Jrho)*(Rgx(x)*Ro)' ;
423 Irhoe      = @(x) Rr'*Irho(x)*Rr ;
434
445 % --- Compute interial force by quadrature ---
456 xIntPoints = [ -sqrt(3/5)    0    sqrt(3/5) ] ;
467 wIntPoints = [      5/9    8/9      5/9 ] ;
478
489 IntegrandoForce = @(x) H1(x)'*Rr'*Area*rho*udotdot(x) ...
490                    + H2(x)'*Rr'*( ...
501                    Irho(x)*wdotdot(x)...
512                    + skew(wdot(x)) * Irho(x) * wdot(x)
523                    ) ;
534
545 IntegrandoMassMatrix = @(x) 1*H1(x)'*Area*rho*H1(x)+1*H2(x)'*
556 Irhoe(x)*H2(x);
567
578 %% --- Compute C3 and C4 ---
589
590 h1 = @(x) H1(x) * ddotg ;
601 h2 = @(x) H2(x) * ddotg ;
612
623 rElem = [ [-1 0 0]    01    [1 0 0] 01];
634
645 F1     = [skew(udot(0))' skew(wdot(0))' skew(udot(lo))' skew(
656 wdot(lo))']';
667
678 C3     = @(x) -skew(h1(x))*G' + (N7(x)/l^2)*A1*(ddotg*rElem)...
689
690          +skew(wdoter)*P1(x)*P + H1(x)*F1*G';
701
712 C4     = @(x) -skew(h2(x))*G' + (N8(x)/l^2)*A2*ddotg*rElem + H2(
723 x)*F1*G';
734

```

```

310
321 %% --- Compute Gyroscopic Matrix---
322 IntegrandoGyroMatrix = @(x) H2(x)' * ( ( skew(wdoter) *
4   Irhoe(x) ) - skew( Irhoe(x) * wdoter) ) * H2(x) ...
353   + H1(x)' * Area*rho*(C1(x) + C3(x
6   )) + H2(x)'*Irhoe(x)*(C2(x)+C4(x)) ;
374
385 sumForce = zeros (12, 1 ) ;
396 sumGyro = zeros (12 ) ;
407 sumMass = zeros (12 ) ;
418
429
430 for ind = 1 : length( xIntPoints )
441     sumForce = sumForce ...
452         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoForce      ( lo/2 *
16   (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
473     %
484     sumGyro = sumGyro ...
495         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoGyroMatrix( lo/2 *
20   (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
416     %
427     sumMass = sumMass ...
438         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoMassMatrix( lo/2 *
24   (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
459 end
460
471 Fine = EE * sumForce ;
482 GyroMatrix = EE * sumGyro * EE' ;
493 MassMatrix = EE * sumMass * EE' ;
504
515 %% --- Add Bt Matrix ---
526
537 Bt=[I3      03      03      03
548      03 inv(Dg1)',      03      03
559      03      03      I3      03
560      03      03      03      inv(Dg2)' ];
571
581 MassMatrix =MassMatrix*Bt ;
592 GyroMatrix =GyroMatrix*Bt ;
603 %% --- Switch base ---
614 Fine = Cambio_Base(Fine);
625 GyroMatrix = Cambio_Base(GyroMatrix);
636 MassMatrix = Cambio_Base(MassMatrix);
647

```



```
328 fs{3} = Fine ;  
329 ks{2} = GyroMatrix ;  
330 ks{3} = MassMatrix ;  
341  
352 end
```

# 1 Apéndice 2

2 En esta sección se exponen las secciones destacadas de la norma interna-  
3 cional *Design criteria of overhead transmission lines*, [2003](#), explicitándose las  
4 hipótesis fundamentales y el procedimiento para el diseño de elementos de tras-  
5 misión eléctrica. También se corroboró efectivamente que la norma estudiada  
6 considera exclusivamente vientos tipo CLA.

## 7 2.1. Campo de aplicación

8 El campo de aplicación de la norma esta sujeto a los siguientes requeri-  
9 mientos sobre el conductor y el terreno:

- 10 ■ La longitud de vano debe pertenecer al intervalo (200 m, 800 m). Para  
11 longitudes fuera de ese rango deben analizarse coeficientes de racha dife-  
12 rentes a los presentados, sin embargo para vanos más largos a 800 m el  
13 análisis de la norma resulta sobrestimado.
- 14 ■ Altura de soportes menores a 60 m y ya que los soportes de una altura  
15 mayor podrían inducir factores de amplificación dinámicos en la respues-  
16 ta.
- 17 ■ La línea debe estar a una altura menor a los 1300 msnm.
- 18 ■ Los terrenos no pueden tener características topográficas singulares cuyo  
19 tamaño y forma puedan afectar las consideraciones respecto al flujo.

## 2.2. Velocidad de referencia y rugosidad del terreno

Se establecen diferentes tipos de terrenos según las condiciones topográficas del mismo, esto afecta la forma del flujo considerado para el diseño. Para un perfil tipo ley potencial, terrenos más rugosos acentúan el gradiente de la velocidad en la altura de referencia  $z = 0$ , aumentando la intensidad de turbulencia e incrementando el valor donde el perfil alcanza la atmósfera libre  $Z_G$ .

Categoría de terrenos	Características del terreno
A	Largos y estrechos viento de ultramar, área costera llana, llanura desértica.
B	Campo abierto con escasa densidad de obstáculos. áreas cultivadas con pocos árboles y edificios
C	Terreno con numerosos obstáculos pequeños de baja altura (matorrales, árboles y edificios)
D	Áreas sub-urbanas con pequeños arboles

**Tabla 2.1:** Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826

Considerando un flujo medio plano tipo CLA, una atmósfera neutra y diferentes constantes de terreno  $\alpha$ , entonces la velocidad media en altura  $v(z)$  se puede calcularse de la siguiente manera:

$$V(z) = V_G \left( \frac{z}{z_G} \right)^\alpha \quad (2.1)$$

Medidas de velocidad utilizando artefactos, como anemómetros o sensores de ultra sonido, permiten obtener para un determinado periodo de adquisición de datos, valores de velocidad media e intensidad de turbulencia. Es por esto, que es clave relacionar la velocidad a diferentes alturas y para cambios de terreno a lo largo del sentido del flujo. Definiendo  $V_{ref}$  como la velocidad media del viento a una altura de  $z = 10$  m para un tipo de terreno categoría B y llamando a dos puntos a diferentes alturas 1 y 2, es posible relacionar su velocidad media según:

$$V(z) = V_{ref1} \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2}. \quad (2.2)$$

En la Ecuación (2.2) se introduce un factor  $K_R$  el cual permite obtener la relación entre las velocidades de referencia para distintos terrenos  $V_{rX} =$

1  $K_R V_{rB}$ . Además se presentan a continuación las diferentes alturas de rugosidad  
2 media de obstáculos  $z_0$ :

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_0(m)$	0.01	0.05	0.30	1.00
$\alpha$	0.1 a 0.12	0.16	0.22	0.28
$K_R$	1.08	1.00	0.85	0.67

**Tabla 2.2:** Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.

3 Los datos presentados en la Tabla 2.2 los valores de  $\alpha$  se asemejan con  
4 lo presentado por Davenport, 1960, para la categoría A y B el numero de  $\alpha$   
5 considerado por la norma es menor, esto se fundamente en que valores menores  
6 de  $\alpha$ , es decir terrenos menos rugosos, inducen una velocidad mayor para la  
7 misma cota. En el caso de la categoría C y D el valor es exactamente idéntico  
8 a lo propuesto en (Davenport, 1960) . De igual forma el termino  $z_0$  se coincide  
9 con la tabla publicada en (Oke, 2000).

10 Desglosando el factor  $K_R$  para dos puntos de referencia, colocados a una  
11 cota de  $z_{ref1} = z_{ref2} = 10m$  en función de la Ecuación (2.2) y combinándola  
12 con la definición de  $K_r$  se obtiene la siguiente expresión:

$$V_{ref2}(10m) = V_{ref1} \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \rightarrow K_r = \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \quad (2.3)$$

13 Sustituyendo la Ecuación 2.3 y considerando los valores de  $Z_G$  según la  
14 referencia (Oke, 2000) se expresan los resultados obtenidos: l

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_G(m)$	250	305	365	410
$\alpha$	0.12	0.15	0.22	0.28
$K_R$	1.13	1.00	0.77	0.61

**Tabla 2.3:** Tabla de factores para terrenos según referencia Davenport, 1960

15 Estos coinciden con un error menor al 8 % con los estipulados por la nor-  
16 ma en la Tabla 2.2. Lo que comprueba que efectivamente para estimar las  
17 velocidades se considera un viento tipo CLA.