



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural
Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Mayo de 2021



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

Dr.Ing. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Dr.Ing. Prof. Gabriel Usera

Montevideo – Uruguay

Mayo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería, 2021.

XX, 108 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 85 – 91.

1. Formulación corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Transmisión eléctrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr.Ing. Prof. Gonzalo Cetrangolo

MSc. DIC.Ing. Bruno Bazzano

Dr.Sc. Prof. Marcelo Forets

Montevideo – Uruguay

Mayo de 2021

A mi Madre por su apoyo
incondicional,
por enseñarme a aprender y
enseñar,
por impulsarme a hablar, a crear
y amar

Agradecimientos

Agradezco al universo por haberme dado hálito de vida a través de ese río inefable que fluye entre la casualidad y la causalidad. Por haberme maravillado con la lagrima, la risa y el atrapante mundo del conocimiento. Las raíces de ese universo son principalmente mi familia, que me nutrieron de valores y vivencias envueltas de un afecto incommensurable. A mi padre, por haberme enseñado a remar por mis objetivos, pelear por mis proyectos con determinación, sacrificio y sobre todo, por haberme inculcado que no hay que ganarle a nadie, únicamente aprender a levantarse. A mi madre por su incondicionalidad eterna, por transferirme la vocación de la enseñanza. Por enseñarme la diversidad de las inteligencias múltiples y sobre todo, la semilla del amor inmenso. A Quique por su sabiduría, su visión biocéntrica y su flecha existencial que atraviesa cualquier tormenta.

También agradezco a mis tutores; A Jorge por ser primero un gran ser humano con una visión fascinante, por enseñarme no solo conocimientos técnicos, sino para la vida. Además por su paciencia, constancia y persistencia para guiarme hacia las salidas en los laberintos. A Gabriel por darme la oportunidad de dedicarme a la investigación e instruirme desde su experiencia insoslayable en aspectos estratégicos profesionales.

A Flor por convidarme de sus dulces pétalos y por perfumar cada parte de mi ser con el más sincero y sano amor. Por ser un alero cuando llueve y dos alas cuando hay sol. Que este camino hubiese sido árido y desolado sin ella. A Maximiliano por estar siempre latente en mi pensamiento, convertir las palabras en aves y despertarme un sin fin de ideas. Por enseñarme la senda de la filosofía, e iluminar el portal donde un punto es la inmensidad, y un segundo la eternidad.

Agradezco enormemente a mis compañeros del IIMPI y del grupo MISEs por guiarme, apoyarme y cuestionarme en este camino de aprendizaje. Por el ambiente relajado y distendido que hacen del trabajo una instancia de disfrute.

Finalmente, quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrado (CAP) de la Universidad de la República por viabilizar económicamente esta investigación. También a la Agencia Nacional de Investigación (ANII) por financiar el proyecto VioLETa “Modelado del efecto del viento sobre líneas eléctricas de transmisión y su mitigación” que fue el pilar indispensable en este trabajo.

*Hay una fuerza motriz más
poderosa que el vapor, la
electricidad y la energía atómica;
la voluntad*

Albert Einstein

RESUMEN

En Uruguay los sistemas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectados por eventos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados. Estos eventos pueden provocar su desconexión con consecuencias a la integridad de los componentes potencialmente graves, así como también a la integridad de las personas circundantes. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de salida de servicio y el 10 de marzo de 2002 una tormenta convectiva afectó un área de alrededor 6500 km^2 en el sur del país. La tormenta causó una destrucción masiva para el país colapsando 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150 kV pertenecientes a la empresa Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas (UTE). El costo de reparación de las torres fue millonario. Esta problemática representa un desafío, dadas las limitaciones de aplicabilidad de las normativas internacionales ante este tipo de vientos extremos.

Este trabajo está enfocado en desarrollar herramientas capaces de reproducir el comportamiento de conductores eléctricos, sometidos a perfiles de viento tipo tormenta convectiva. Para esto, se integró una formulación corrotacional de vigas 3D, considerando componentes aerodinámicas debido a la acción del viento. Esta formulación fue implementada en la herramienta de software libre *Open Non-linear Structural Analysis Solver* ([ONSAS](#)). Con esta implementación se resolvieron cuatro problemas numéricos: el primero de ellos valida la formulación para un ejemplo clásico en la literatura, el segundo representa la dinámica de interacción que ocurre entre la cadena aisladora y el conductor. El tercero consiste en una modificación de un modelo propuesto por investigadores referentes en simulación estructural de líneas eléctricas. Por último, se construye un ejemplo compuesto por tres torres y seis conductores, integrando elementos de viga con barras, cargados con un perfil tipo corriente descendente, extraído de un estudio experimental en el norte de Alemania. En los resultados de este modelo se observa cómo las tormentas convectivas afectan severamente, pudiendo causar potenciales perjuicios graves.

Finalmente, se concluye que los resultados generados representan un disparador para seguir profundizando en la temática, generando capacidades nativas

para emular el fenómeno de manera más precisa y poder así, incluirlo como una herramienta complementaria durante el diseño de sistemas de transmisión. Respecto a la metodología de esta tesis, se incorporaron términos aerodinámicos a una formulación corrotacional, lo cual es un aporte original de este trabajo.

Palabras claves:

Formulación corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica estructural, Transmisión eléctrica.

Lista de figuras

1.1	Ilustración de balanceos excesivos torre Ruta 5.	2
3.1	Rotaciones a cada configuración.	21
3.2	Descripción de los sistemas de coordenadas corrotacionales. . . .	22
3.3	Esquema de desplazamientos locales.	28
3.4	Ilustración de grados de libertad locales.	28
4.1	Esquema del objeto de estudio.	40
4.2	Esquema simplificado de la acción del viento sobre el cable y sus fuerzas correspondientes.	42
4.3	Esquema en sistema de referencias absoluto.	43
4.4	Esquema en sistema de referencias relativo.	44
5.1	Disposición geométrica de la estructura.	58
5.2	Perfil de fuerza transversal en el nodo A.	59
5.3	Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s.	60
5.4	Desplazamientos de control del nodo A.	61
5.5	Desplazamientos de control del nodo B.	61
5.6	Desplazamientos en x de los nodos A y B.	62
5.7	Esquema del ejemplo viga en voladizo con péndulo.	63
5.8	Desplazamientos de control de los nodos nodo A y B.	64
5.9	Estructura deformada en los instantes 2 s, 4.25 s, 8.15 s y 14.4 s. .	65
5.10	Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .	66
5.11	Esquema del conductor ASCR 7/26.	66
5.12	Perfil de velocidad progresiva z	68
5.13	Perfil de fuerza nodal según el eje z	68
5.14	Desplazamientos del nodo A.	69
5.15	Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .	69

5.16	Ángulo de balanceo Φ en función de la velocidad media $W(t)$. . .	70
5.17	Esquema del sistema de transmisión.	71
5.18	Esquema geométrico de cotas principales en la torre.	72
5.19	Perfil de velocidad y fuerza extraído del trabajo de Stengel y Thiele, 2017.	73
5.20	Ilustración de magnitudes de balanceo.	74
5.21	Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D.	75
5.22	Desplazamientos de los nodos medios B y C.	75
5.23	Curva analítica y numérica carga-desplazamiento.	77
5.24	Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s.	77

Lista de tablas

3.1	Caracterización de matrices en términos de los sistemas de referencia.	23
5.1	Propiedades mecánicas de los elementos.	63
5.2	Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26. . .	67
5.3	Parámetros del flujo tipo CLA para W_{max}	67
2.1	Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826	104
2.2	Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.	105
2.3	Tabla de factores para terrenos según referencia A. Davenport, 1960	105

Lista de símbolos

$\ddot{\mathbf{w}}$ Aceleración angular en coordenadas globales.

$\ddot{\mathbf{u}}$ Aceleración lineal en coordenadas globales.

α_{HHT} Parámetro alfa de HHT característico del método HHT.

α_{NW} Parámetro alfa característico del método de Newmark.

Φ Ángulo de balanceo de la cadena aisladora.

β_{NW} Parámetro beta característico del método de Newmark.

x Distancia respecto al nodo 1 de la sección con centroide G.

\mathbf{x}_1 Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.

\mathbf{x}_2 Coordenadas del nodo 2 en el sistema de referencia global.

ΔT Incremento temporal.

ρ Densidad del aire a presión atmosférica, humedad relativa de referencia y una temperatura de 20°C.

d_c Diámetro del conductor considerándolo cilíndrico.

\mathbf{d}_g Desplazamientos globales del elemento.

\mathbf{u}^g Desplazamientos lineales globales del elemento.

\mathbf{w}^g Desplazamientos angulares globales del elemento.

\mathbf{d}_l Desplazamientos locales del elemento.

\mathbf{d}_r Desplazamientos lineales locales referenciados a la configuración de deformación rígida.

$C_d(Re)$ Coeficiente de arrastre aerodinámico en función del coeficiente adimensionalizado de Reynolds.

\mathbf{E}_1 Vector 1 de la base isoparamétrica.

\mathbf{E}_2 Vector 2 de la base isoparamétrica.

\mathbf{E}_3 Vector 2 de la base isoparamétrica.

K Energía cinética del elemento.

f_{a_l} Fuerza axial del elemento.

F_d Fuerza de arrastre aerodinámico sobre el conductor.

$\mathbf{f}_l^{\text{int}}$ Fuerza interna del elemento en coordenadas locales.

$\mathbf{f}_g^{\text{int}}$ Fuerza interna del elemento en coordenadas globales.

F_l Fuerza de sustentación aerodinámica sobre el conductor.

\mathbf{f}_{vis} Vector de fuerzas viscosas.

\mathbf{I}_ρ Tensor de inercia del elemento en su configuración deformada.

\mathbf{f}_k Fuerza inercial en coordenadas globales.

\mathbf{u}_0 Condición inicial en desplazamientos aplicada sobre el conductor.

\mathbf{K}_k Matriz giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.

\mathbf{C}_k Matriz giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.

\mathbf{M}_k Matriz de masa consistente del elemento en coordenadas globales.

\mathbf{K}_g Matriz tangente del elemento en coordenadas globales.

\mathbf{K}_l Matriz tangente local del elemento en coordenadas locales.

\mathbf{C}_{vis} Matriz de amortiguamiento viscoso.

M_2^i Momento flector del nodo i en la dirección local 1.

M_3^i Momento flector del nodo i en la dirección local 2.

M_1^i Momento torsor del nodo i.

- \mathbf{R}_0 Matriz de rotación desde la configuración de referencia.
- \mathbf{R}_1^g Matriz de rotación global del nodo 1.
- \mathbf{R}_2^g Matriz de rotación global del nodo 2.
- \mathbf{R}_r Matriz de rotación desde la configuración rígida.
- $\overline{\mathbf{R}}_1$ Matriz de rotación local del nodo 1.
- $\overline{\mathbf{R}}_2$ Matriz de rotación local del nodo 2.
- $\tilde{\mathbf{A}}$ Operador Skew aplicado a la variable A.
- $\dot{\mathbf{w}}$ Velocidad angular en coordenadas globales.
- $\dot{\mathbf{u}}$ Velocidad lineal en coordenadas globales.
- q Velocidad de viento en el sentido perpendicular al conductor.
- w Velocidad de viento en el sentido transversal al conductor.
- \mathbf{e}_1 Vector tangente de la configuración de referencia.
- \mathbf{e}_2 Vector normal de la configuración de referencia.
- \mathbf{e}_3 Vector bi-normal de la configuración de referencia.
- l_n Largo del elemento deformado.
- \mathbf{r}_1 Vector tangente de la configuración de deformación rígida.
- \mathbf{r}_2 Vector normal de la configuración de deformación rígida.
- \mathbf{r}_3 Vector bi-normal de la configuración de deformación rígida.
- \mathbf{t}_1^1 Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- \mathbf{t}_1^i Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- \mathbf{t}_2^1 Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- \mathbf{t}_2^i Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- \mathbf{t}_3^i Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.

\mathbf{t}_3^1 Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.

$\overline{\boldsymbol{\theta}}_1$ Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 1.

$\overline{\boldsymbol{\theta}}_2$ Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 2.

\bar{u} Desplazamiento axial en coordenadas locales del elemento.

Lista de siglas

CD corrientes descendentes

CLA capa límite atmosférica

HHT Hughes, Hilbert y Taylor

IEC International Electrotechnical Commission

MEF Método de Elementos Finitos

N-R Newton Raphson

TC tormentas convectivas

UTE Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas

Tabla de contenidos

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
Lista de símbolos	XVII
Lista de siglas	XVIII
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Enfoque	3
1.4 Estructura de la tesis	4
2 Estado del arte	6
2.1 Historia de la temática	6
2.2 Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión eléctrica	9
2.3 Tormentas convectivas	11
2.4 Análisis semi-analíticos de conductores	13
2.5 Análisis corrotacional de vigas	16
3 Conceptos preliminares	20
3.1 Cinemática corrotacional	20
3.1.1 Matrices de rotación	21
3.1.2 Sistemas de coordenadas	22
3.1.3 Desplazamientos lineales y angulares	24
3.2 Formulación local	27
3.2.1 Variaciones en desplazamientos	30

3.3	Dinámica corrotacional	31
3.3.1	Velocidades y aceleraciones	31
3.3.2	Fuerza interna y matriz tangente	33
3.3.3	Fuerza inercial y matrices de masa tangentes	36
4	Metodología	39
4.1	Aspectos de modelado físico	39
4.1.1	Condiciones iniciales y de borde para la estructura . . .	40
4.1.2	Modelo de viento	41
4.2	Aspectos de modelado computacional	46
4.2.1	Métodos iterativos para la resolución de problemas dinámicos	46
4.2.2	Resolución numérica mediante HHT	49
4.2.3	Implementación numérica en ONSAS	52
5	Resultados numéricos	57
5.1	Viga en voladizo con ángulo recto	57
5.2	Viga en voladizo con péndulo	62
5.3	Modelo simplificado de una línea	65
5.4	Sistema de transmisión eléctrica	71
6	Conclusiones y trabajos a futuro	78
6.1	Conclusiones técnicas	78
6.2	Trabajos a futuro	82
	Bibliografía	85
	Glosario	91
	Apéndices	92
	Apéndice 1	93
	Apéndice 2	103
2.1	Campo de aplicación	103
2.2	Velocidad de referencia y rugosidad del terreno	104
	Apéndice 3 Reflexiones del autor	106

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los eventos climáticos extremos representan un desafío para el diseño de todo tipo de estructuras en todo el mundo. En Uruguay el choque de masas de aire caliente, originado en el trópico con corrientes de aires fríos que migran desde el polo produce una atmósfera inestable. Estos fenómenos atmosféricos son peligrosos, ya que producen vientos extremos no sinópticos sumamente violentos y destructivos. Un registro trágico de este tipo de eventos, sucedió el 10 de marzo del 2002, cuando una tormenta convectiva afectó un área de alrededor de 6500 km^2 en el sur del país “El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#). En el norte de Montevideo los anemómetros capturaron velocidades de ráfaga de 34 m/s y de acuerdo con el nivel de daño causado, se estimó que en ciertos puntos podría haber superado los 56 m/s . Este valor es mayor a la velocidad de diseño establecida por la norma UNIT 50-84. Fue tal el nivel de devastación, que 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150 kV colapsaron, además de unos 700 edificios y 1250 techos de hogares que fueron destruidos (Durañona, [2015](#)). Este tornado no solo afectó a las construcciones, sino también muchos productores rurales y sus estancias productivas, derribando invernaderos, montes y plantaciones. El costo de reparación asociado con las torres se estimó en 2 millones de dólares y en simultáneo se destinaron unos 10 millones de dólares a suplir la red con energía termoeléctrica, proveniente de combustibles fósiles. El presupuesto estimado de los daños en total ascendió a la suma de 27 millones de dólares según Durañona et al. [2019](#).

Las líneas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por eventos climáticos severos como corrientes descendentes (CD) o tornados. Estos eventos pueden provocar la desconexión de las líneas, con consecuencias potencialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de salida de servicio por esta causa en una de las principales líneas de Uruguay (Palmar-Montevideo). Este tipo de fenómenos inducen fuertes movimientos en los cables, provocando un balanceo excesivo de los mismos. Estas amplitudes desmesuradas implican vulneraciones en la aislación del sistema, al aproximar sus cadenas aisladoras a las torres. Es así que se producen descargas a tierra e indeseables interrupciones del suministro que han afectado a la capital durante varias horas. Una ilustración del fenómeno se muestra en la Figura 1.1 para una torre de alta tensión ubicada en la ruta 5 del departamento de Canelones, Uruguay.



Figura 1.1: Ilustración de balanceos excesivos torre Ruta 5.

Esto plantea la necesidad de desarrollar más conocimiento a nivel local para el modelado computacional de este tipo de problemas de gran escala y complejidad. Este es el principal objetivo de este trabajo, profundizar en la

bibliografía para el modelado estructural de conductores y crear un modelo robusto capaz de simular líneas de transmisión eléctrica sometidas bajo la acción de vientos extremos.

1.2. Objetivos

Para esta investigación se plantearon los siguientes objetivos:

1. Realizar un estudio bibliográfico sobre los diferentes modelos disponibles en la literatura capaces de simular el comportamiento dinámico de conductores eléctricos en líneas de alta tensión.
2. Implementar y validar la formulación de elementos finitos más adecuada para la aplicación en la herramienta de código abierto [ONSAS](#).
3. Generar un modelo de un sistema de transmisión eléctrica capaz de representar la dinámica de conductores de alta tensión cargados por un perfil tipo CD.

1.3. Enfoque

Los autores de la literatura han acuñado sus investigaciones en diversos tipos de elementos. Utilizando elementos de barras se destacan los trabajos de: Desai et al. [1995](#), Yan et al. [2009](#), Gani y Légeron, [2010](#), Yang y Hong, [2016](#). A pesar de la gran esbeltez de las líneas de transmisión eléctrica, las mismas cuentan con rigidez a flexión. Los elementos de barra no son capaces de representarla, por ende, es necesario incorporar elementos de vigas tridimensionales. Debido a los grandes desplazamientos y rotaciones que se presentan durante las trayectorias en tormentas, se consideró importante implementar una formulación corrotacional considerando la dinámica del problema.

El campo de la metodología corrotacional es muy amplio, pero debido a la claridad y contemporaneidad en el desarrollo de sus publicaciones, se tomó como principal referencia de la formulación a Le et al. [2014](#). A esta se le agregaron componentes no lineales debido a la interacción del sólido en un fluido que ejerce determinadas fuerzas. Esta formulación se implementó computacionalmente en la herramienta [ONSAS](#) presentado inicialmente por Bruno Bazzano y

Pérez Zerpa, 2017¹. El *software* **ONSAS** viene siendo desarrollado por el grupo de investigación: Modelado e Identificación en Sólidos y Estructuras integrado por docentes del Instituto de Mecánica y Producción Industrial (IIMPI) y por docentes del Instituto de Estructuras y Transporte (IET) de la Facultad de Ingeniería Udelar e investigadores internacionales. Se desarrollaron cuatro modelos computacionales con grado de complejidad progresivo. El primero de ellos permitió validar los códigos implementados y el segundo la dinámica de interacción entre el conductor y los elementos aisladores. El tercero acercar el modelo a la aplicación central de esta tesis y el último generar resultados sobre la respuesta de sistemas de transmisión eléctrica ante las fuerzas de vientos extremos tipo CD.

1.4. Estructura de la tesis

Este documento consta de seis capítulos: Introducción, Estado del arte, Preliminares, Metodología, Resultados Numéricos y Conclusiones. Inicialmente en el Capítulo 2 se realiza un recorrido histórico en materia de simulaciones aplicadas a conductores eléctricos, con un enfoque computacional y semi-analítico. También se narran los diferentes estudios locales e internacionales sobre vientos extremos, para concluir en un recorrido dentro del abordaje corrotacional. Posteriormente en el Capítulo 3, con el objetivo de acercar la metodología corrotacional al lector, se presenta una descripción con foco conceptual, según lo propuesto por la bibliografía principal de Le et al. (2014). Una vez presentada dicha formulación, se despliega la metodología utilizada para esta investigación en el Capítulo 4. Aquí se detallan las hipótesis fundamentales del modelado estructural y de viento, explicándose las condiciones de borde impuestas y un análisis sobre el amortiguamiento aerodinámico. En este mismo capítulo, se desarrolla la implementación del algoritmo numérico utilizado con la extensión de fuerzas viscosas y las estructuras de pseudocódigo referentes a los principales *scripts* de la implementación computacional en el software **ONSAS**.

Posteriormente, se resuelven tres aplicaciones numéricas en el Capítulo 5. La primera tiene como objetivo validar numéricamente la implementación. Luego se generó un modelo que es capaz de modelar la dinámica de interacción entre la cadena aisladora y el conductor. Habiendo validado la formulación para

¹<https://github.com/ONSAS/ONSAS.m>

los ejemplos anteriores, se modela un ejemplo de un conductor eléctrico sometido a una carga artificial, extraída de un viento tipo capa límite atmosférica (CLA). Por último, se presenta un problema realista de un sistema de transmisión eléctrica, con geometrías y propiedades reales, sometido a un perfil de viento registrado durante una CD en el norte de Alemania. Finalmente en el Capítulo 6 se sintetizan los principales resultados de esta investigación, además de plasmarse eventuales trabajos a futuro, con lineamientos para profundizar en la temática y sus posibles aplicaciones en el mercado de distribución eléctrica.

Capítulo 2

Estado del arte

Este capítulo incluye la revisión de la literatura, desde diversas aristas y focos, explicándose los conceptos y teorías en los cuales se fundamenta esta investigación. Primeramente en la Sección 2.1, se presenta un relato cronológico del estudio de conductores desde el crepúsculo del Siglo XVIII. A continuación en la Sección 2.2, se expone un recorrido a partir de los años 60's en simulaciones computacionales aplicadas a conductores de alta tensión. Consecutivamente en la Sección 2.3 se describen los fenómenos de CD que afectan a las líneas a partir de trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas y otros fenómenos de viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades aeroelásticas. Este fenómeno ha sido abordado por la literatura y un breve recorrido de estos estudios se presenta en la Sección 2.4. Por último, en la Sección 2.5 se recorre la metodología corrotacional y los principales autores que la desarrollaron.

2.1. Historia de la temática

El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena del libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el 1657 revolucionó el conocimiento científico en occidente. Tal es así que un siglo y medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino en la aplicación de las principales invenciones que arrojó la Revolución Industrial.

El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas de la época, Brook Taylor, d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron

las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al sistema masa resorte en los albores del siglo XVII según Starossek, [1991](#).

Partiendo del problema elemental del oscilador simple masa resorte, en 1788 Lagrange et al, hallaron la solución para las vibraciones de un cable inextensible compuesto por un número finito de elementos, de masa despreciable, sometido a la acción de fuerzas externas. Posteriormente, Poisson en 1820 presentó la ecuación diferencial que debería cumplir el sistema en el continuo, sin embargo según H. M. Irvine y Caughey, [1974](#), las herramientas matemáticas analíticas desarrolladas hasta la fecha, no permitían hallar la solución general a dicha ecuación.

Debió pasar más de un siglo para que Routh et al. [1955](#) presentara una solución exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva que describe un punto sobre una esfera rodando sin deslizar a velocidad angular constante). En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del cable, el primero en su época fue Klöppel H, [1942](#), a partir de esto el autor Pugsley, [1949](#) determinó experimentalmente una fórmula para las frecuencias naturales de vibración, considerando un ratio entre la deflexión y el largo de vano entre 4 y 10 metros. Además Saxon y Cahn, [1953](#) consideraron un cable inextensible en el que resolvieron la expresión teórica, formulada por Poisson, de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue un resultado de suma importancia para la ingeniería de distribución eléctrica, ya que permitía calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos torres.

La seguridad de las personas e integridad de los distintos elementos circundantes son factores que imprimen criterios de seguridad sobre el descenso máximo de la línea. Actualmente la tensión del conductor durante el montaje, se ajusta de manera tal que la altura mínima respete un valor exigido por norma. Esta imposición depende principalmente del grado de urbanización, los umbrales de contaminación magnética y la topografía del terreno.

A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los modelos masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. Según H. M. Irvine y Caughey, [1974](#) se halló el rango transitorio entre ambos estados, corrigiendo dicha discontinuidad al incluir una descripción completa del modelo de elasticidad del cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables horizontales (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio deflexión-largo del vano entre $1/8$ y 0. Los mismos autores H. M. Irvine y Caughey,

1974, extendieron lo postulado para conductores con extremos desnivelados, aun bajo la hipótesis de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor.

Los investigadores H. M. Irvine y Griffin, 1976 profundizó sobre la dinámica con extremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movimiento tipo terremoto en el año 1978 (M. Irvine, 1978). La teoría postulada por Irvine fue confirmada por Triantafyllou, 1984 para distintos casos experimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando en cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al movimiento.

Autores contemporáneos estudiaron en simultáneo condiciones de borde dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de fuerzas pueden inducir vibraciones y respuestas de resonancia. El pionero en la materia fue A. G. Davenport, 1965. Resultados más refinados fueron obtenidos por Starossek, 1991. En este trabajo se exponen formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los cables sometidos a la acción del viento, obviando no linealidades geométricas y materiales.

Estos estudios revelaron el fenómeno de “Galopping”, el cual refiere a una respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del cable entra en resonancia con las fuerzas ejercidas por el viento. Teóricamente, las geometrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de fenómenos. Sin embargo, debido a la existencia de imperfecciones constructivas o errores durante la instalación, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte de energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respuesta se presentaron por Simiu y Scanlan, 1986, quienes hallaron condiciones de velocidad crítica eólica en función de coeficientes experimentales obtenidos mediante ensayos consumados en túnel de viento.

Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al problema de conductores eléctricos. El advenimiento del Método de Elementos Finitos (MEF) presentado por Zienkiewicz y Cheung, 1970 y aplicado a armaduras constituyó una herramienta sumamente potente e innovadora. Esto provocó que, en los años venideros, se desarrollasen vastas metodologías numéricas incorporando diferentes elementos y algoritmos de resolución computacional. En particular, en Italia investigadores pertenecientes al *Politecnico di Milano*, aplicaron métodos numéricos a la simulación de conductores. Estos investigadores son Francesco Foti y Luca Martinelli, entre otros. Un recorrido cronológico y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos científicos se presenta a

continuación en la Sección [2.2](#).

2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión eléctrica

Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo, por Di Pilato y Martinelli, estaban basados en elementos trinodales de barra isoparamétricos. En estos estudios se asumió pequeñas deformaciones unitarias, considerándose para el desarrollo no linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos lineales. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, este tipo de modelos poseen la debilidad de no satisfacer las condiciones de equilibrio dinámico para tipos específicos de balanceo. Esto se justifica en el trabajo de Martinelli y Perotti, [2001](#) como también en la investigación de Martinelli y Perotti, [2004](#). En consonancia, estudios contemporáneos evidencian que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que desprestigiar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predicciones erróneas sobre las mayores frecuencias naturales del sistema, tal y como se remarca en el artículo publicado por Koh y Rong, [2004](#).

Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007 utilizando abordajes corrotacionales. Este autor presentó una formulación considerando elementos de viga tridimensionales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e inerciales teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones, en coordenadas globales. No obstante, esta formulación basada en lo propuesto por Oran, [1973](#) tiene como desventaja principal que no es fiable ante grandes rotaciones locales de los nodos, como también, ante significativos incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente para capturar dinámicas complejas, resulta necesario e ineludible discretizar el dominio temporal y espacial en pequeños intervalos, lo que conlleva a costos computacionales desmedidos.

El mismo autor y su equipo, corrigieron las limitaciones relacionadas con las pequeñas rotaciones nodales al año siguiente por Di Pilato et al. [2008](#). La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la configuración deformada, utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco, el impe-

dimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga, se resuelve aplicando la metodología propuesta por Simo y Vu-Quoc, 1988.

Conforme las simulaciones numéricas en el problema avanzaron, la especificidad del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó. Otro foco de investigación en el área, se basaba en que los resultados experimentales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos sobre el comportamiento no holonómico del fenómeno. Esto refiere a un modelo realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha temática fueron Papailiou, 1997 y Kutterer y Starossek, 1992.

Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos escenarios, “*full slip*” donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas. El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre de “*full-stick*”. En esta situación, el conjunto se comporta como un rígido, he aquí la razón de su nomenclatura. En Papailiou, 1997 se establece la tensión máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. En dicho trabajo se contrastaron resultados analíticos con ensayos experimentales donde se concluyó que el modelo lograba reproducir adecuadamente el deslizamiento interno.

Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones del conjunto se traducen en momentos y fuerzas internas a cada hebra que conforma al conductor. Debido a esto, es posible vincular la curvatura con la deformación axial de cada hebra y también con la del conjunto. A partir de esto, se obtiene la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y momentos internos, en función de la deformación y curvatura del conductor.

Esta matriz de rigidez depende del estado en que se encuentre la dinámica del cable. Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen “*full slip*” o “*full-stick*” la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso “*full-stick*” cuando ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el conductor, la matriz de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente, no se le puede atribuir un potencial, lo que se asocia al comportamiento no holonómi-

co o de histéresis inherente al fenómeno. En dicho estado un modelo de viga uniforme no es aplicable.

Con el propósito de desarrollar una formulación que sea capaz de representar el fenómeno computacionalmente se publicó el artículo de Foti y Martinelli, [2016](#). En dicho artículo se implementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuerzas tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter simplificadoras son estudiadas por Costello, [1990](#) y Rawlins, [2005](#). Para el estudio de los contactos radiales se asumió que las superficies de contacto no se deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de contacto entre cables se pueden aproximar por una línea continua, la fricción entre los cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último que la presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjunto con las condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores límites para la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado de la pérdida súbita de rigidez que ocurre en el conductor, al producirse deslizamiento relativo al interior del mismo. Esta disminución abrupta de rigidez, puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga, lo que agudiza la problemática de balanceos excesivos. Estos movimientos son inminentes para determinadas condiciones atmosféricas, entre ellas las TC. Las CD originadas por TC han sido objeto de estudio en los últimos 50 años por expertos en ingeniería del viento. En la siguiente sección se presenta una somera descripción de la literatura investigada.

2.3. Tormentas convectivas

Las TC son fenómenos atmosféricos que generan inestabilidades en el flujo debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad. Estas se ocasionan cuando masas de aire caliente ascienden hasta la parte superior de la nube, quedando depositadas como una especie de domo o cúpula al interior de la misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al interior de la tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodeaba por debajo. Esta corriente desciende a grandes velocidades e impacta con vehemencia sobre la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de anillo vorticoso que puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h según Fujita, [1985](#). En

dicho trabajo se establecen escalas espaciales entre 40 m y 4 km. No obstante, estudios publicados por Darwish et al. [2010](#) plantean que se exhiban en un diámetro entre 1 y 5 km.

Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de transmisión eléctrica, ciertas normativas se basan en perfiles de vientos clásicos (sinópticos) tipo CLA. Esto se traduce en una subestimación de las presiones que se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma International Electrotechnical Commission (IEC) 60826. Esto pone en riesgo al sistema cuando es afectado por tornados o CD. La probabilidad de que los sistemas de alta tensión sean afectados es baja para dominios de corta longitud, pero cuando las líneas discurren por centenas de kilómetros estos vientos extremos suelen suceder frecuentemente, según lo publicado por Ang y Tang, [1984](#).

La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de daños vinculados a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores contemporáneos como Holmes, [2002](#) y Abd-Elaal et al. [2013](#), el diámetro del anillo se encuentra intrínsecamente relacionado con dicha altura. Complementando a esto, los autores Stengel y Thiele, [2017](#) capturaron este fenómeno en Alemania utilizando anemómetros colocados en líneas de transmisión. Esto permitió hallar un perfil de velocidades medias y la función de coherencia relacionada con la turbulencia a partir de datos experimentales. Es de este artículo del cual se extrajo el perfil de vientos utilizado en este trabajo.

En nuestro país investigadores pertenecientes al Grupo de Eolo Dinámica de la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante una TC a partir la recopilación de datos históricos y trabajo de campo. El primer informe relevado en el artículo de Durañona y Cataldo, [2009](#) donde se realiza un cálculo del ángulo de balanceo, simplificando cuasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio de la fuerza de viento por unidad de peso. En dicho trabajo se mostró que para valores de velocidad de viento de 97.9 m/s la cadena aisladora alcanza los 85 ° medidos desde su posición vertical normal.

Dados los alarmantes resultados de Durañona y Cataldo, [2009](#) posteriormente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha en el trabajo de Durañona, [2015](#). En este estudio se atisba que fenómenos de CD producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minutos que los vientos tipo CLA. El valor máximo de velocidad registrado alcanzó los 40 m/s en promedio de 10 minutos. En el año 2019, este grupo de investigadores presentó un trabajo relevante donde se resalta que los vientos extremos afectan principalmente

al norte del país según la investigadora Durañona et al. [2019](#). En este se sugiere que la norma UNIT:50-84 del año 1984 debe ser actualizada incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos no sinópticos. Pero los eventos de vientos extremos no son los únicos que afectan a los conductores, también ante vientos tipo CLA pueden ocurrir inestabilidades estructurales inherentes a interacción entre fluido-estructura según Luongo et al. [2007](#). Una somera descripción de este fenómeno se detalla a continuación.

2.4. Análisis semi-analíticos de conductores

Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pueden experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud, principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente estudiada por distintos autores de la literatura, entre ellos se destacan los trabajos de Robert D. Blevins, [1990](#) y Jones, [1992](#). Para vigas de gran esbeltez, o elementos de cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto lineales como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o dos grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consistieron en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal que luego debe verse comprobado mediante resultados experimentales. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática destaca el trabajo de Chabart y Lilien, [1998](#), en este se propuso una aproximación innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en la fuerza de sustentación aerodinámica ante la presencia de excentricidades geométricas.

El fenómeno Galloping presenta frecuencias bajas de movimiento y sus trayectorias suelen notarse a simple vista. Este fenómeno tiene consecuencias severas sobre todo en líneas que se encuentran en climas gélidos, recientemente en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur de Argentina y las imágenes son impactantes ([Ver vídeo](#)). La principal causa del fenómeno es el ataque de vientos intensos y constantes. La presencia de irregularidades geométricas en las líneas induce inestabilidades aerodinámicas y cuanto mayor sea la cantidad y discontinuidad de las excentricidades más aguda será la respuesta inducida. Las velocidades requeridas de viento suelen ser mayores a 7 m/s y las frecuen-

cias de respuesta del conductor suelen oscilar entre los 0.15 y 1 Hz.

Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente aproximación de las líneas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separadores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, sí los relativos entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elementos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en inglés *Torsional Damper Detuner* gira relativo al conductor anulando las formas irregulares producto de la formación de hielo.

En el artículo de Jones, [1992](#) se halló la solución a la ecuación de movimiento, despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los autovalores que permiten detectar analíticamente bajo qué condiciones del sistema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente mayor a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos e indeseables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje vertical.

Los estudios de Jones y Blevins, se basan en premisas de linealidad geométrica. Sin embargo otros autores han destacado que los efectos no lineales juegan un rol importante en el desarrollo, como ser los trabajos de Luongo et al. [1984](#) y Lee y Perkins, [1992](#). En el trabajo propuesto por Lee se incluyen componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento del conductor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un modelo lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y tercer orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numéricamente la ecuación diferencial del movimiento.

Esta problemática fue abordada unos años más tarde por Luongo y Piccardo, [1998](#). En este artículo se hallaron las soluciones no lineales de resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se contrastaron dos soluciones arrojadas por disímiles modelos, uno de pequeños desplazamientos y otro incorporando no linealidades geométricas. En dicho trabajo se distinguen dos regímenes del movimiento, el primero de ellos nominado crítico refiere a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos no presentan gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayectorias se amplifican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se concluye que la

solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable para valores de velocidad media de viento correspondiente al estado crítico. Posteriormente al incrementar la velocidad de viento se desata el fenómeno post-crítico y el incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible para representar cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles simétricos, la velocidad crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis lineal.

Según Luongo et al. [2007](#), hasta la fecha de publicación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos aplicados eran exiguos, en especial para el régimen post-crítico del Galloping. Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de ángulo de ataque y velocidad relativa entre el conductor y del flujo. Además, se despreciaba la rigidez a torsión de los elementos, esto se debe a que la rigidez según el eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez flexional, debido a la esbeltez geométrica del conductor de estudio.

El propósito del trabajo de Luongo et al. [2007](#) fue proponer un elemento de viga orientado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este a torsión. Estos términos representan diferencias notorias para secciones anti-simétricas en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados numéricos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el objetivo de hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró que el ángulo de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones críticas del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuenta los modos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la inclusión del ángulo puede influir significativamente en el valor de velocidades críticas aeroelásticas.

En el artículo publicado por Luongo et al. [2009](#) se profundizó en los efectos del ángulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes. Como destacado resultado de esta investigación, se probó que mientras la rigidez torsional no afecta significativamente los desplazamientos traslacionales, a diferencia de la solución del ángulo de giro que sí lo hace. En especial para perfiles sin simetría de revolución. La consideración del balanceo en la fuerza de sustentación aerodinámica y en el ángulo de ataque, afecta notoriamente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades de la sección

aerodinámica y por tanto sus velocidades críticas. Por ende, se resalta la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas para el modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

2.5. Análisis corrotacional de vigas

Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplicaciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos y terrestres. Además de las formulaciones clásicas de vigas, el abordaje corrotacional es idóneo para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamientos en servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de Nour-Omid y Rankin, [1991](#) quienes sentaron las bases del método.

Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente, considerándolo como un sólido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario a los extremos del elemento que permite localizarlo en el espacio. Mientras que para la componente deformable se considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo sistema de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones locales, permitiendo incorporar distintos tipos de elementos fácilmente. Además, destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento representa términos de no linealidades geométricas, mientras que la componente deformable incorpora la no linealidad del material.

El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La variación de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a esta propiedad anti-simétrica, y esta característica depende principalmente del desbalanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al resolver el sistema mediante métodos numéricos como Newton Raphson (N-R). Los autores Nour-Omid y Rankin, [1991](#) con el objetivo de optimizar el método,

demonstraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de convergencia cuadrático.

Debido a la versatilidad de la metodología corrotacional, en los años posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de elementos y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron a considerar funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentrada y elementos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener de manera sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inerciales. Este cálculo conduce ineludiblemente a la matriz de masa constante de Timoshenko. Por otra parte, interpolaciones lineales asumen que los desplazamientos transversales al eje de la viga son nulos, esta hipótesis reduce el campo de aplicación del modelo, en especial para mallas de bajo número de elementos, ya que la matriz de masa tangente y el vector de fuerzas inerciales no representan las componentes omitidas.

En la libro de Crisfield, [1997](#) se sugiere que el proceso de obtención requerido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado intrincado, debido a su grado de complejidad geométrica. El autor propone utilizar funciones de interpolación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al elemento de Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan complejas a la hora de derivar el vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consideró un modelo simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones cúbicas para el vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una matriz de masa constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero numéricamente eficiente. Esta forma de proceder también se aplicó en Pacoste y Eriksson, [1997](#).

En paralelo Battini y Pacoste, [2002](#) y Alsafadie et al. [2010](#), desarrollaron eficientes elementos de viga bidimensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar estructuras en grandes desplazamientos bajo cargas estáticas. Estos autores afirman que, al seleccionar adecuadamente el largo de elemento, los desplazamientos locales son significativamente menores que los asociados a la componente rígida. Por esta razón, se compararon resultados con diferente número y tipos de elementos para los mismos ejemplos. Estos estudios, en conjunto con lo publicado por Alsafadie et al. [2010](#), concluyen que formulaciones cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión analítica hacia las componentes dinámicas.

Investigadores de instituciones Europeas trabajaron en este desafío en los últimos años. El primero de ellos fue Behdinan et al. [1998](#) a finales del siglo XX, pero las funciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no eran consistentes con la formulación canónica del método corrotacional propuesta por Simo y Vu-Quoc, [1988](#). De hecho, según el conocimiento del autor, no existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna sino también, las componentes inerciales.

Años más tarde, Le et al. [2011](#) publicaron una formulación para vigas 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación independiente “IIE” de la referencia Reddy, [1997](#). Estos elementos fueron desarrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basadas en los polinomios de Hermite, con el propósito de incluir consideraciones adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algunas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además, se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la literatura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los desplazamientos locales.

Los mismos autores en conjunto con Le extendieron la formulación en su trabajo del 2014 Le et al. [2014](#) agregando una dimensión. Este desarrollo se vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmutatividad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensable a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo, se presenta la parte estática desarrollada por Battini en Battini y Pacoste, [2002](#), además de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuerzas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se seleccionó el clásico método Hughes, Hilbert y Taylor (HHT) con los parámetros convencionales según Hilber et al. [1977](#). Este algoritmo es utilizado por reconocidos programas comerciales (Abaqus, Lusas) e implica una disipación

sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, además presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

En Le et al. [2014](#) se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar la nueva formulación con otros dos enfoques. La primera comparación, se deriva de la nueva formulación reemplazando las interpolaciones cúbicas por lineales. El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por Simo y Vu-Quoc, [1988](#). En base a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones: todas las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no así con mallas gruesas. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente más imprecisas en comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el modelo. La formulación corrotacional es ligeramente más lenta (12 %) respecto a lo descrito por Simo y Vu-Quoc, [1988](#). Sin embargo, bajo ciertas condiciones altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo según el artículo (Le et al. [2014](#)).

Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo es un atractivo para distintos investigadores del área. En el trabajo de Albino et al. [2018](#) se modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas con materiales graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en altamar. En 2019 Asadi y Johansson, [2019](#) simulaban palas de aerogeneradores utilizando elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas el tren de transmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala. En el mismo año el autor Barzanooni et al. [2018](#) abordó la problemática de anillos e interacciones de contacto aplicado a robots industriales también con la formulación propuesta por Le et al. [2014](#).

Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación central de este trabajo en el que se desarrollan grandes desplazamientos y se deben considerar efectos inerciales.

Capítulo 3

Conceptos preliminares

A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de la formulación corrotacional según lo propuesto por Le et al. 2014, (Battini y Pacoste, 2002). La temática se abordará progresivamente según la naturaleza de las variables. En primera instancia se describen las magnitudes cinemáticas en las Secciones 3.1 y 3.2. Una vez presentadas las magnitudes cinemáticas se desarrolla el análisis corrotacional para las variables estáticas y dinámicas en la Sección 3.3.

3.1. Cinemática corrotacional

El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas representa grandes rotaciones y desplazamientos, dados por el movimiento de la viga considerándola como un elemento rígido. La segunda componente tiene en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material. Este enfoque se suele aplicar en casos estáticos, donde resulta intuitivo imaginar inicialmente como se deformaría la estructura de manera rígida para luego aplicarle la componente no rígida. Para poder realizar esta descomposición, hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten representar los desplazamientos de cada una de las componentes. Para encontrar la curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y traslación de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas magnitudes se obtienen a partir de transformaciones representables matemáticamente con la artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática

puede hallarse en el trabajo de Kožar y Ibrahimbegović, 1995.

3.1.1. Matrices de rotación

Las configuraciones utilizadas son dos rotaciones consecutivas ilustradas en la Figura 3.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos, se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa el elemento en su configuración indeformada o de referencia. El color naranja identifica a la componente de deformación no rígida mientras que en gris se ilustra la configuración de deformación rígida del elemento.

Para realizar cambios de coordenadas de una componente a otra se definen una serie de rotaciones, la primera de ellas denominada \mathbf{R}_0 lleva al elemento desde su configuración canónica a su configuración de referencia. A partir de esa configuración, se halla la geometría deformada aplicando las transformaciones \mathbf{R}_1^g o \mathbf{R}_2^g , dependiendo el nodo de interés. La notación con supraíndice “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a dicha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cual es la configuración deformada partiendo del sistema de coordenadas canónico.

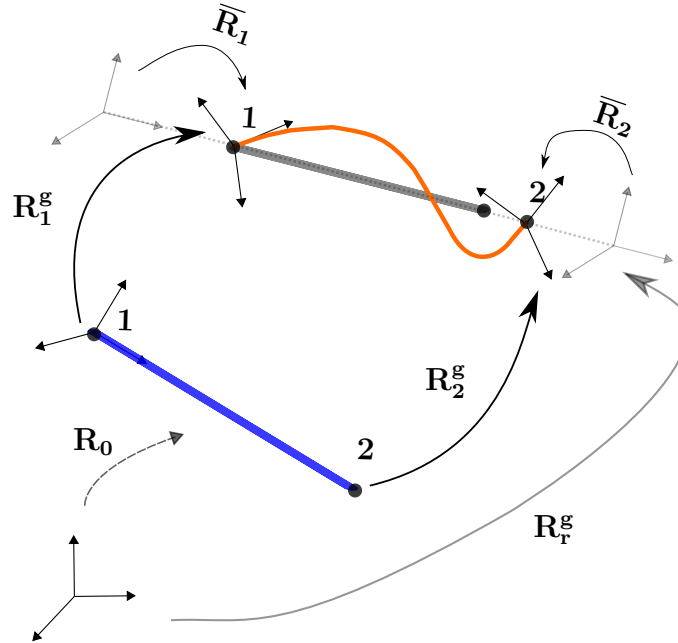


Figura 3.1: Rotaciones a cada configuración.

En la Figura 3.1, tanto las rotaciones locales $\bar{\mathbf{R}}_1$, $\bar{\mathbf{R}}_2$ como globales \mathbf{R}_1^g o \mathbf{R}_2^g se utiliza el subíndice 1 o 2, mientras que para la rotación de deformación rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender

la metodología corrotacional. Dado que la componente de deformación rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del subíndice. Para hallar la configuración deformada del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa dado un nodo arbitrario, por ejemplo el 1, consiste en aplicar consecutivamente las transformaciones \mathbf{R}_r y $\bar{\mathbf{R}}_1$ encontrando así la configuración deformada.

3.1.2. Sistemas de coordenadas

Habiendo descrito las rotaciones del elemento, para deducir las matrices asociadas a cada transformación, resulta imprescindible definir un conjunto de sistemas de coordenadas que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de vectores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 3.2.



Figura 3.2: Descripción de los sistemas de coordenadas corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia canónico integrado por el sistema de coordenadas ortogonal $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$. Al aplicarle a estos vectores la transformación \mathbf{R}_0 , se obtienen los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Estos permiten ubicar al elemento en su configuración de referencia. Consecuentemente, para definir el sistema de coordenadas $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ solidario a la configuración de deformación rígida, basta con aplicar la transformación \mathbf{R}_1^g . Por último, para los nodos 1 y

2, denominados arbitrariamente con el subíndice i , el sistema de coordenadas $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ permite identificar la orientación y posición del nodo i en su configuración deformada. Esta es posible obtenerla rotando el sistema de coordenadas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ por la matriz \mathbf{R}_i^g .

La definición de los sistemas de coordenadas mencionados en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta, intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los sistemas de coordenadas solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los sistemas de referencia se establecen en la Tabla 3.1:

Matriz	Vínculo de sistemas de referencia
\mathbf{R}_0	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
\mathbf{R}_i^g	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\bar{\mathbf{R}}_i$	$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
\mathbf{R}_r	$(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$

Tabla 3.1: Caracterización de matrices en términos de los sistemas de referencia.

Los vínculos descritos en la Tabla 3.1 se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda refieren al dominio de la matriz y a su derecha hacen a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primera fila se tiene: $\mathbf{R}_0 \cdot (\mathbf{E}_1) = \mathbf{e}_1^T$. Al plantear este tipo de vínculos entre el sistema de coordenadas $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ se puede hallar a partir del sistema de coordenadas canónico $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ de dos formas. La primera consiste en aplicar consecutivamente las rotaciones \mathbf{R}_0 y \mathbf{R}_i^g y la segunda en aplicar \mathbf{R}_r y luego $\bar{\mathbf{R}}_i$. Esto se muestra en la ecuación a continuación:

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_i. \quad (3.1)$$

A partir de la Ecuación (3.1) se puede obtener la matriz de rotación $\bar{\mathbf{R}}_i$. Para esto se hace uso de la propiedad de matrices ortonormales $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ y se obtiene la ecuación que prosigue:

$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0. \quad (3.2)$$

3.1.3. Desplazamientos lineales y angulares

El propósito de la descripción anterior, responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones, ubicando a cada elemento en coordenadas locales y globales. Las coordenadas globales se referencian al sistema de vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mientras que las locales a $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$. El vector de desplazamientos locales del elemento es compuesto por: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra \bar{u} , y sus desplazamientos angulares nodales con el nombre $\bar{\theta}_1$ y $\bar{\theta}_2$. El escalar \bar{u} representa el estiramiento del elemento respecto de su largo inicial (l_0). A su vez, el ángulo $\bar{\theta}_1$ se asocia con la rotación del sistema de coordenadas $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$ respecto de $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ indicados en la Figura 3.2. Estos siete grados de libertad se compactan en el vector $\mathbf{d}_1 = (\bar{u}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$.

El vector de desplazamiento axial \bar{u} se descompone en tres componentes según el sistema de vectores \mathbf{r}_i , solidario a la configuración de deformación rígida. A este vector de desplazamientos se le denomina \mathbf{d}_r . Además, los desplazamientos de la viga se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$. Estas tienen origen en la configuración de referencia y permiten encontrar los desplazamientos en la configuración deformada. Para el nodo 1 los $\delta \mathbf{w}_1^{gT}$ hacen referencia a la rotación de los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ hasta $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$. Además, los desplazamientos globales del nodo 1 $\delta \mathbf{u}_1^g$ se corresponden con los desplazamientos del nodo desde su configuración de referencia hasta la deformada. Esto se puede observar en la Figura 3.2.

Para resolver el problema mediante métodos numéricos, es necesario definir variaciones. Estas emplearán un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. Las variaciones infinitesimales de los desplazamientos se definen según:

$$\delta \mathbf{d}_1 = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T, \quad (3.3)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^{gT}, \delta \mathbf{u}_2^{gT}, \delta \mathbf{w}_1^{gT}, \delta \mathbf{w}_2^{gT}]^T. \quad (3.4)$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales presentados en las Ecuaciones (3.3) y (3.4), se deben calcular los diferenciales asociados a las transformaciones de giro \mathbf{R}_r^g , \mathbf{R}_i^g , \mathbf{R}_0 y $\bar{\mathbf{R}}_i$. Para esto, primeramente deben

obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla 3.1. Las entradas de \mathbf{R}_r y \mathbf{R}_i^g se hallan siguiendo las ecuaciones:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (3.6)$$

Los vectores \mathbf{r}_i se hallan a partir del vector director \mathbf{r}_1 que apunta del nodo 1 al 2. El versor \mathbf{r}_1 tiene como dirección la recta que une los puntos 1 y 2 en la configuración deformada, esto es equivalente a $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1^g}{l_n}$, donde l_n es la distancia entre 1 y 2 en la configuración deformada. Dadas las posiciones iniciales de los nodos en coordenadas globales \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , sus desplazamientos \mathbf{u}_1^g y \mathbf{u}_2^g , el largo una vez deformado se calcula como $l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\|$.

El vector auxiliar \mathbf{p} se define para hallar los vectores \mathbf{r}_i y a partir de estos la base \mathbf{t}_i . Estos vectores son solidarios al movimiento ya que se encuentran anidados a la configuración de deformación rígida y local respectivamente. El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen \mathbf{p} , \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ 1 \ 0]^T. \quad (3.7)$$

En la expresión anterior la matriz \mathbf{R}_0 se obtiene colgando los vectores \mathbf{e}_i escritos como combinación lineal de la base \mathbf{E}_i . Una vez calculada esta matriz y evaluado las expresiones de las Ecuaciones (3.7) se obtienen los restantes vectores asociados a la componente de deformación rígida según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1. \quad (3.8)$$

Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}_i} = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.9)$$

En la Ecuación (3.9) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de diferenciales matriciales. Dado que la matriz de rotación \mathbf{R}_0 vincula la confi-

guración canónica con la de referencia, dado que ambas son fijas esta matriz es constante. Por lo tanto, su variación es nula. Definiendo el vector de ángulos de la componente de deformación rígida con el símbolo $\delta \mathbf{w}_r^g$, las matrices de giro $\overline{\mathbf{R}}_i$, \mathbf{R}_i^g y sus variaciones pueden hallarse según las expresiones:

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g, \quad (3.10)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r. \quad (3.11)$$

En las Ecuaciones (3.10) y (3.11) el término $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$ refiere a la operación *skew* del vector $\delta \mathbf{w}_r^g$. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a matrices de rotación. La función $\widetilde{\mathbf{A}}$ aplicada al vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ toma la siguiente forma:

$$(\boldsymbol{\Omega}) = \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Para vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las variaciones globales se definen las matrices \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g, \quad (3.13)$$

según los cocientes entre las componentes de los vectores auxiliares \mathbf{p}_j y \mathbf{p}_{ij} de la Ecuación (3.7), el vector $\mathbf{p}_j = (\mathbf{R}_r^T \mathbf{p})$ y $\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$ se calcula la matriz \mathbf{G} de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}^g} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] \quad (3.14)$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_{12}}{2p_2} & -\frac{p_{11}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_2}{2p_2} & -\frac{p_{21}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Nótese que la matriz \mathbf{R}_r tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas dimensiones, $\mathbf{0}$ es una matriz nula de 3x3 e \mathbf{I} una matriz identidad del mismo número de filas y columnas. La relación entre los diferenciales anteriores, se pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos de ángulos locales en términos globales, según la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.17)$$

Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coordenadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar \mathbf{r} que vincula los incrementos del desplazamiento axial $\delta \bar{u}$ con los globales. Esto permite escribir la Ecuación (3.3) en relación a (3.4) haciendo uso de la expresión:

$$\delta \bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \quad \mathbf{0}_{1,3} \quad \mathbf{r}_1^T \quad \mathbf{0}_{1,3}]. \quad (3.18)$$

3.2. Formulación local

La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En esta sección se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.3.

Sea una sección transversal de un punto G ubicado a una distancia x del nodo 1 en la configuración rotada, el movimiento local de una sección ubicada a una distancia x de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir

de la rotación y traslación de dicha sección. Una ilustración de esto se muestra en la Figura 3.3, donde la configuración de deformación rígida se identifica en punteado y la configuración deformada en color naranja.



Figura 3.3: Esquema de desplazamientos locales.



Figura 3.4: Ilustración de grados de libertad locales.

El movimiento de la base \mathbf{t}_i con respecto al sistema \mathbf{r}_i^G está dado por los desplazamientos \bar{u}_3 según el versor \mathbf{r}_3^G y análogamente para los vectores \bar{u}_2 y \bar{u}_1 . Esto determina la ubicación del baricentro G . Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes está dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores \mathbf{t}_3^G y \mathbf{t}_2^G dentro del plano y un versor perpendicular \mathbf{t}_1^G . La transformación $\bar{\mathbf{R}}_G$ permite encontrar los transformados de la base \mathbf{r}_i^G etiquetados con las letras \mathbf{t}_i^G de acuerdo con la Figura 3.4. En esta también se observa el desplazamiento axial de la barra \bar{u} correspondiente al del nodo 2 en la dirección \mathbf{r}_1 .

Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para los desplazamientos axiales \bar{u}_1 y el ángulo de torsión $\bar{\theta}_1^G$, según las ecuaciones:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0}. \quad (3.19)$$

Tanto para los desplazamientos transversales \bar{u}_2^G y \bar{u}_3^G como para los ángulos de flexión $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$, las interpolaciones se realizan través de los polinomios cúbicos expresados en las ecuaciones a continuación:

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (3.20)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right). \quad (3.21)$$

Los desplazamientos del baricentro G de la sección, respecto del sistemas de coordenadas locales, se expresan en el vector \mathbf{d}_1^G . Los valores en términos de la componente de deformación rígida \mathbf{r}_1 se calculan aplicando la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G. \quad (3.22)$$

Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nulas es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas. De esta forma se construyen las matrices \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 . Estas expresan los desplazamientos transversales \bar{u}_2^G, \bar{u}_3^G como también los ángulos $\bar{\theta}_1^G$ y $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$ según los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales $\bar{\theta}_1$ y $\bar{\theta}_2$ para el nodo 1 y 2 respectivamente. Analíticamente esto es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

3.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura 3.3 queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$OG = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (3.25)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente en las Ecuaciones (3.19), (3.20) y (3.21) es posible escribir los desplazamientos del baricentro según:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (3.26)$$

$$OG = \mathbf{N}_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + \mathbf{N}_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (3.27)$$

y su diferencial asociado se calcula de la siguiente forma:

$$\delta OG = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1. \quad (3.28)$$

La Ecuación (3.28) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta el cálculo de su magnitud, ya que dicha variable es solidaria a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones (3.13), (3.14), (3.17) y (3.10) lográndose de este modo, escribir a $\delta \mathbf{u}$ en coordenadas globales según la siguiente ecuación:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.29)$$

Además se compacta la notación definiendo la matriz \mathbf{H}_1 según la ecuación a continuación:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R}_r (\mathbf{N} + \mathbf{P}_1 \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_1 \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.30)$$

Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.3), son despreciables

frente a los de la componente de deformación rígida. Para el autor Le et al. 2014, las reducidas variaciones en la geometría de dos iteraciones consecutivas implican que no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales y rígidos, matemáticamente : $\delta \overline{\boldsymbol{\theta}}_{ri} = \overline{\delta \mathbf{w}_i}$.

Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magnitudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según:

$$\delta \mathbf{w}^g(\mathbf{OG}) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r(\mathbf{P}_2\mathbf{P} + \mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g. \quad (3.31)$$

Análogamente a la Ecuación (3.29), se compacta la notación definiendo la matriz \mathbf{H}_2 según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_2\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g. \quad (3.32)$$

3.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección 3.1 resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (Le et al. 2014) y (Battini y Pacoste, 2002). Acompasando con el desarrollo histórico de la materia, resulta natural definir las velocidades y aceleraciones para luego obtener los vectores de fuerza interna e inercial y sus matrices tangentes asociadas.

3.3.1. Velocidades y aceleraciones

Las magnitudes dinámicas desempeñan un papel primordial en el análisis implementado y tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en términos globales. Para calcular estas expresiones hace falta expresar las derivadas temporales de las matrices \mathbf{E} y \mathbf{R}_r . Esta operatoria matricial, se traduce en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Dado que la variable \mathbf{E} depende de \mathbf{R}_r se calculan inicialmente sus derivadas según la Ecuación (3.11). Al derivar se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}. \quad (3.33)$$

Al sustituir esta ecuación en $\dot{\mathbf{E}}$ se deduce la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E}_t. \quad (3.34)$$

Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.29) se deduce la siguiente expresión para la velocidad lineal $\dot{\mathbf{u}}$:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.35)$$

Aplicando la regla del producto a la Ecuación (3.35) se halla la aceleración lineal $\ddot{\mathbf{u}}$ del baricentro:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{E}}^T) \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.36)$$

El valor *skew* de las velocidades angulares sobre la componente de deformación rígida $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r$ se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación (3.12), aplicado al vector $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$. Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la Ecuación (3.36) definiendo la matriz \mathbf{C}_1 como se escribe a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t, \quad (3.37)$$

quedando definida la aceleración lineal de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.38)$$

Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó la nomenclatura para evitar el abuso de notación. Derivando la Ecuación (3.31) respecto a la variable temporal, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad angular $\dot{\mathbf{w}}$:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.39)$$

Utilizando la regla del producto se deduce la siguiente expresión para la aceleración angular $\ddot{\mathbf{w}}$:

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{C}}_2 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{E}}^T) \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.40)$$

A partir de esto, se compacta la expresión de la Ecuación (3.40) definiendo la matriz \mathbf{C}_2 de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\mathbf{w}}_r \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (3.41)$$

$$(3.42)$$

Una descripción detallada puede encontrarse en (Le et al. 2014). Dentro del apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las derivadas temporales de las matrices \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 . También es posible profundizar en la deducción de las matrices \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .

3.3.2. Fuerza interna y matriz tangente

En esta sección se busca obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$ para el nodo i se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial f_{a_i} , dos momentos flectores M_2^i , M_3^i y un momento torsor M_1^i para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección de nomenclatura para el vector $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$ de fuerza interna se presenta a continuación:

$$\mathbf{f}_1^{\text{int}} = [f_{a_i} \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2] = [f_{a_i} \ \mathbf{m}]. \quad (3.43)$$

La fuerza interna se calculará inicialmente para coordenadas locales denominada $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$, donde su obtención es relativamente sencilla, para luego transcribir estos resultados en términos globales $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$. Con este cometido se define la matriz \mathbf{B} de cambio de base según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{d}_1 = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1^{\text{int}}. \quad (3.44)$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional, el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración de deformación rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para

los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Según los sistemas de referencia de la Figura 3.2, los cambios de variables refieren a escribir primeramente los desplazamientos locales en términos de los rígidos ($\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración de deformación rígida a la de referencia ($\delta \mathbf{d}_i \rightarrow \delta \mathbf{d}_g$). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en función de coordenadas inmóviles y globales.

Con la ayuda algebraica de las matrices auxiliares \mathbf{G} y \mathbf{E} , definidas en las Ecuaciones (3.13) y (3.14) es posible vincular los ángulos diferenciales locales $\delta \bar{\theta}_i$ con los incrementos globales $\delta \mathbf{d}_g$. Esto permite conocer los momentos flectores y torsores de la viga en coordenadas globales. Análogamente el vector auxiliar \mathbf{r} contiene a \mathbf{r}_i según el sentido axial de la barra, por lo que reescribir este último permite expresar la fuerza de directa del elemento f_{a_i} en términos de la base \mathbf{E}_i . Estos razonamientos se plasman en las ecuaciones a continuación:

$$\mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_i^{\text{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{PE}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_i^{\text{int}} \quad (3.45)$$

$$\delta \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \delta \mathbf{r}^T f_{a_i} + \delta (\mathbf{E} \mathbf{P}^T) \mathbf{m}. \quad (3.46)$$

Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés, para la resolución empleando métodos numéricos, obtener sus derivadas respecto de los desplazamientos. La matriz tangente \mathbf{K}_g representa esta magnitud y su expresión se escribe a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_i \mathbf{B} + \frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{f}_i)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (3.47)$$

La matriz \mathbf{B} permite realizar el cambio de coordenadas $\delta \mathbf{d}_a$ a $\delta \mathbf{d}_g$, de acuerdo con lo definido en (3.44). A su vez, se define la variable \mathbf{K}_i correspondiente al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz \mathbf{K}_i .

Para calcular las matrices tangentes se define la matriz \mathbf{D} anti-simétrica y se calcula en función de los productos internos de los vectores \mathbf{e}_i , esta aporta la rigidez no lineal correspondiente a la fuerza axial f_{a_i} de la barra. Esta se calcula según las siguiente ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (3.48)$$

Por otra parte, se define la matriz auxiliar \mathbf{Q} a partir del producto de \mathbf{P} y los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, de acuerdo con la ecuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(2)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(3)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Ademas el vector auxiliar \mathbf{a} se construye de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Operando con la regla del producto al diferencial de fuerza interna de la Ecuación (3.46) y sustituyendo las definiciones postuladas en las Ecuaciones (3.50), (3.48) y (3.49), la matriz tangente resulta:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a} \mathbf{r}. \quad (3.51)$$

Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.51) es asimétrica, sin embargo según Nour-Omid y Rankin, 1991 esta puede ser simetrizada sin perder la convergencia cuadrática para el método de N-R, siempre y cuando los momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó numericamente la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con fuerzas, esto conlleva a un número mayor de iteraciones en converger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger según lo publicado en (Rankin y Nour-Omid, 1988).

3.3.3. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes asociadas. El atractivo principal de la referencia de Le et al. 2014 se basa en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas (Crisfield, 1997). Esta consistencia se debe al encare analítico del vector de fuerzas inerciales, según el planteo cinemático de las variables descritas en la Sección 3.1. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad de que la magnitud primaria será la energía cinética del elemento K . Esta propiedad escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ($\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$) como también angulares ($\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$) según la siguiente ecuación:

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} dl_0 \quad (3.52)$$

Dada la Ecuación (3.52) se calcula la variación de energía cinética del elemento. Para la obtención de esta expresión se aplicó la regla del producto de diferenciales y el teorema de Leibiniz para integrales de extremos fijos, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}}] dl_0 \quad (3.53)$$

Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subindices “g” para las magnitudes dinámicas (\mathbf{u}, \mathbf{w}) y sus respectivas derivadas. De igual forma, en las variables del integrando en las Ecuaciones (3.52) y (3.53) se omitió la nomenclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga, que si el elemento es de densidad uniforme coincide con el centro de masa de la sección. Los elementos serán de área constante siendo A_ρ el producto del área transversal y la densidad del material, análogamente la matriz \mathbf{I}_ρ es el tensor de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones \mathbf{R}^g y \mathbf{R}_o consecutivamente.

Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsables del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar el vector de fuerza inercial \mathbf{f}_k se obtienen las matrices tangentes dinámicas

según las siguientes ecuaciones:

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.54)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M}_k \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.55)$$

En la Ecuación (3.55) se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa consistente \mathbf{M}_k se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, consecutivamente la matriz \mathbf{C}_k giroscópica se asocia a la velocidad. Por ultimo \mathbf{K}_k , se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrífuga. Determinados autores como Cardona y Geradin, 1988 y Hsiao et al. 1999 proponen considerar únicamente \mathbf{M}_k , sin embargo exhaustivos estudios en (Hsiao et al. 1999) prueban que agregar la matriz \mathbf{C}_k mejora el desempeño computacional para numerosos casos.

Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección 3.3.1.

Sustituyendo la Ecuación (3.55) en (3.53) se halla una fórmula para la fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.36), (3.38), (3.39) y (3.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \quad (3.56)$$

Como se mencionó anteriormente para obtener analíticamente las expresiones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el diferencial fuerza interna. Una vez identificados los términos que multiplican a cada variación incremental de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices. Finalmente, esto se expresa de forma matemática en las siguientes expresiones:

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \} dl \right] \mathbf{E}^T \quad (3.58)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) \dots \right\} \right] \mathbf{E}^T \quad (3.59)$$

$$\dots + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho) dl \quad (3.60)$$

Capítulo 4

Metodología

En este capítulo se exponen los métodos centrales desarrollados durante este trabajo de tesis. Este desarrollo, representa, según la revisión de literatura realizada, una contribución original al conocimiento sobre la aplicación de la formulación corrotacional de vigas a problemas de interacción con el viento. El problema de modelado computacional de líneas eléctricas afectadas por fenómenos de vientos extremos se construyó sobre dos etapas sucesivas. En primer lugar, se explican cuestiones sobre el modelado físico y en segundo lugar sobre el modelado computacional.

Se describen las condiciones de borde e iniciales consideradas para el modelado estructural en la Sección 4.1.1. Posteriormente en la Sección 4.1.2 se presenta el campo de velocidades absoluto, relativo y las fuerzas que el viento genera sobre el conductor. Luego, dentro de la Sección 4.2 se explica la deducción del algoritmo de HHT aplicado a la formulación corrotacional para modelado de conductores con fuerzas aerodinámicas.

4.1. Aspectos de modelado físico

El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de la realidad, para crear un modelo, que se comporte de forma análoga, permitiendo emular y controlar determinadas variables de estudio relevantes para el observador. En este acto de representación existen simplificaciones inherentes, que reducen los factores incidentes al sistema como objeto de estudio. En este caso el objeto de estudio es el conductor presentado en la Figura 4.1, sujetado mediante los elementos aisladores CD y AB solidarios a las torres.



Figura 4.1: Esquema del objeto de estudio.

Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determinadas condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema. Estas imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto está siendo desvinculado, se nominan condiciones de borde. En particular, para esta investigación, se consideraron las siguientes hipótesis del modelado estructural respecto a sus condiciones de borde e iniciales.

4.1.1. Condiciones iniciales y de borde para la estructura

1. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea. Vale aclarar que este caso de pretensión refiere a la configuración punteada en la Figura 4.1, en ese estado la tensión es 0 N . No obstante, al aplicarse el peso propio la tensión en el conductor se incrementa hasta que se equilibre las fuerzas externas de la gravedad con las internas.
2. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura, ignorándose cualquier variación en el perfil topográfico del terreno. Como consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
3. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a mo-

delarlo con elementos de vigas, las cuales tienen una variación de ángulo continuo.

4. Se supone que no existe deslizamiento relativo entre las hebras que componen al conductor.
5. Consecuente con el inciso anterior, al escindir el vano BC de su continuación (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo nulo en z para los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta las condiciones de deformación angulares impuestas por la simetría del sistema.
6. Dado que los puntos B y C no se deforman según el eje x , ergo sus trayectorias pertenecen al plano z - y , lo que se impone en los nodos B y C.
7. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB, obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se modelaron a partir de barras de Green según Crisfield, [1997](#).
8. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada en la Figura [4.1](#), se aplica una condición inicial de desplazamiento \mathbf{u}_0 . Esta se corresponde con la solución estática del sistema cargado por el peso propio en la dirección de $-y$ de la gravedad.
9. No se consideran formaciones de hielo depositadas sobre las líneas, por las evidentes condiciones climáticas del territorio uruguayo.

4.1.2. Modelo de viento

Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuerzas de arrastre (*drag*), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares de (*lift*). Las cargas de *drag* son el resultado de integrar las tensiones rasantes en la capa límite a lo largo de la frontera del cuerpo y luego proyectar este resultado en la dirección del flujo medio. Las fuerzas de *lift* que aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones entre el intradós (zona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones puntuales entre dos superficies contrarias, genera una circulación circundante

en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en la curva cerrada que delimita el cuerpo, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura 4.2(b).

Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la componente de *lift* es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo que garantiza una circulación del campo de velocidades nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas, entre las superficies del sólido.

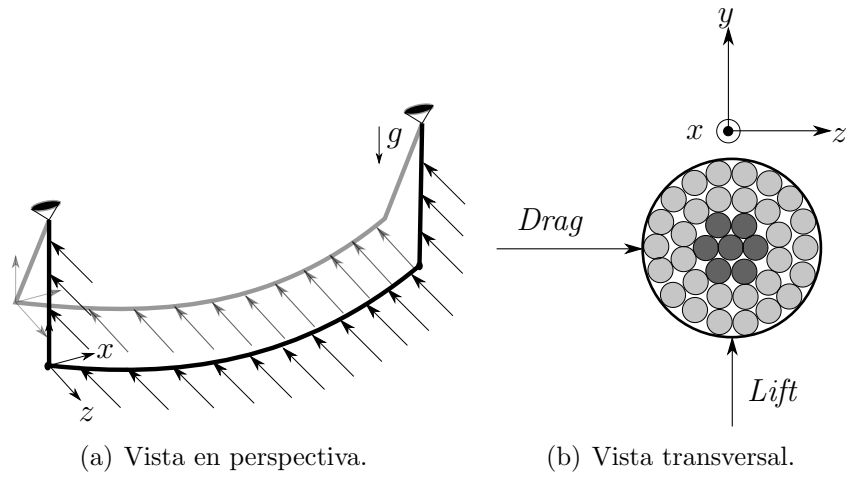


Figura 4.2: Esquema simplificado de la acción del viento sobre el cable y sus fuerzas correspondientes.

La componente unidireccional del flujo a una altura dada, puede ser desglosada en un término medio y otro fluctuante $w_v(t) = w_m(t) + w'(t)$. A su vez, la fuerza de “*drag*” que ejerce el aire como un fluido No Newtoniano, con determinada densidad ρ , coeficiente de drag en función del Reynolds $C_d(Re)$, sobre un elemento cilíndrico en reposo de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la expresión:

$$F_d(t) = \int_{l_e} \frac{\rho C_d(Re)}{2} d_c w_v(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c w_v(t)^2 l_e. \quad (4.1)$$

Para este cálculo se asumieron uniformes las magnitudes al interior del elemento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto de la fuerza por unidad de longitud por el largo del intervalo. Por otra parte, la carga del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente a la mitad de F_v . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales que estas cargas inducen en los nodos, se cancelan en los elementos interiores.

Por otra parte, los valores de C_d se extrajeron de (Foti y Martinelli, 2016) y se verificaron con el estudio para estos coeficientes durante TC de (Mara, 2007).

4.1.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas asociadas.

Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde el viento tiene determinada componente transversal según z y perpendicular (según y). En la Figura 4.3 se indican con el nombre w y q . En esta figura las velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tanto en un sistema de coordenadas absoluto. Asimismo, en esta imagen se representan las velocidades media y fluctuante w_m y w_a , que sumada a la velocidad v , resulta en el vector V_{tot} formando un ángulo β con la horizontal. Las velocidades globales del baricentro de la sección según z e y se identifican con las letras $\dot{\mathbf{u}}_y$ y $\dot{\mathbf{u}}_z$ respectivamente y se corresponden con las descritas en la Sección 3.3.1. Las magnitudes identificadas anteriormente se ilustran en la Figura 4.3.

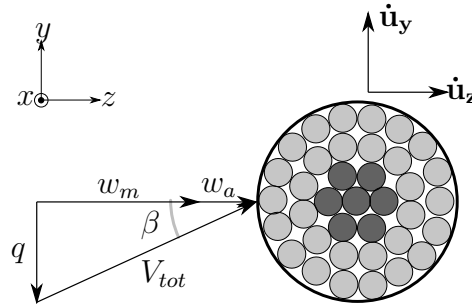


Figura 4.3: Esquema en sistema de referencias absoluto.

Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la Figura 4.4. Este campo de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de *drag* F_d y de *lift* F_l . Estas pueden ser proyectadas en el sistema de ejes globales, ocasionando dos fuerzas F_z y F_y .

Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, se hallan las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y dinámicas. La velocidad relativa absoluta se calcula de la siguiente forma:

$$V_{rel}^2 = (w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)^2 + (q - \dot{\mathbf{u}}_y)^2. \quad (4.2)$$

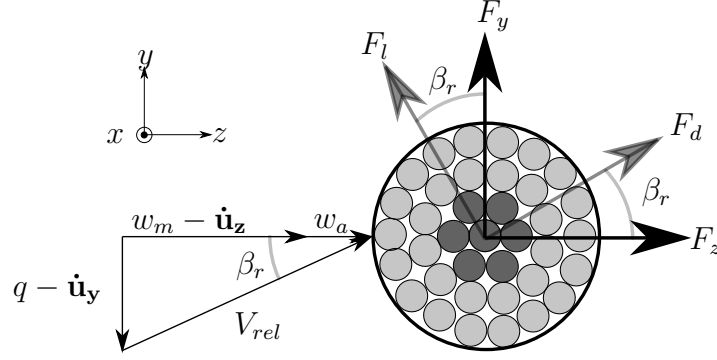


Figura 4.4: Esquema en sistema de referencias relativo.

Desarrollando el término $(w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)^2$ de la Ecuación (4.2) se deduce la siguiente expresión:

$$(w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)^2 = w_m^2 + w_a^2 + \dot{\mathbf{u}}_z^2 + (w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)2w_m + w_a^2 - 2w_a\dot{\mathbf{u}}_z. \quad (4.3)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.4) en (4.2) y dividiendo entre la velocidad media w_m se obtiene:

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = \frac{w_m^2 + w_a^2 + \dot{\mathbf{u}}_z^2}{w_m} + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z) + \frac{w_a^2 - 2w_a\dot{\mathbf{u}}_z}{w_m} + \frac{(q - \dot{\mathbf{u}}_y)^2}{w_m} \quad (4.4)$$

Tomando como hipótesis que los cuadrados de: la componente alternante del viento y la velocidad del rígido en z y la velocidad relativa en y , son mucho menores que las asociadas al flujo medio $(q - \dot{\mathbf{u}}_y)^2, w_a^2, \dot{\mathbf{u}}_z^2, \ll w_m$, se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z). \quad (4.5)$$

Las hipótesis formuladas anteriormente tiene consecuencias sobre el ángulo de ataque y la fuerza por unidad de longitud según las ecuaciones a continuación:

$$\tan(\beta_r) = \frac{v - \dot{\mathbf{u}}_y}{w_m - \dot{\mathbf{u}}_z + w_a} = \frac{\frac{v - \dot{\mathbf{u}}_y}{w_m}}{1 + \frac{w_a}{w_m} - \dot{\mathbf{u}}_z} \approx 0 \quad (4.6)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)) w_m \quad (4.7)$$

Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes z e y . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas absoluto, calcular la fuerza que se ejerce sobre el conductor. A partir de estas se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido. Considerando que el ángulo β es ínfimo y por lo tanto $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$ y $\cos(\beta) = 1$ al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + w_a^2 - 2w_m \dot{\mathbf{u}}_z) \cos(\beta_r) = \bar{F}_x + F_a - F_{vis}, \quad (4.8)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2 + w_a^2 - 2w_m \dot{\mathbf{u}}_z) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (4.9)$$

Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es un promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo, se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un tercer término surge al desarrollar la Ecuación (4.7). Este factor depende del producto entre la velocidad media de viento y la velocidad media del rígido en la dirección del flujo medio (z). Dado que este término depende de la dinámica del rígido y del viento, recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico. Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sorpresivo el sentido de esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición de fuerzas según z se le llaman \bar{F}_x , F_a , $-F_{vis}$ a la componente media, alternante y de amortiguamiento dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2), \quad (4.10)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_a^2), \quad (4.11)$$

$$F_{vis} = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2\dot{\mathbf{u}}_z w_m). \quad (4.12)$$

4.1.2.2. Hipótesis de modelado del viento

Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones

de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no es el eje central de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio. Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

1. El viento incide con velocidad en el sentido z de forma perpendicular a la línea. Esta hipótesis proviene de diferentes trabajos publicados como (Durañona y Cataldo, 2009), (Yang y Hong, 2016) y (Stengel y Thiele, 2017).
2. La velocidad relativa transversal $v - \dot{\mathbf{u}}_y$ al igual que la componente alter-nante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el sentido de z llamada w_m .
3. Considerando la simetría de revolución del conductor y el flujo alrededor del mismo, se desprecia la fuerza de *lift* frente al *drag*.
4. Se desprecia la fuerza alternante en el sentido de z dada por la Ecuación (4.12). Esto es equivalente a despreciar la componente alternante del flujo w_a .
5. Para el cálculo del amortiguamiento aerodinámico F_{vis} se promedió la velocidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el dominio temporal de simulación.

4.2. Aspectos de modelado computacional

4.2.1. Métodos iterativos para la resolución de problemas dinámicos

Discretizando el cuerpo mediante el MEF, para cada nodo y en cada instante, debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas \mathbf{f}_{int} , inerciales \mathbf{f}_{ine} y externas \mathbf{f}_{ext} . Además según la Ecuación (4.12) dentro de las fuerzas externas aparece un término aerodinámico \mathbf{f}_{vis} que depende de la velocidad lineal del rígido. Este término debe tratarse aparte ya que su naturaleza, a pesar de ser externa, es una función del estado cinemático del sólido. La ecuación de equilibrio de fuerzas en el instante $t + \Delta T$ resulta:

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta\mathbf{T}} + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)) - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t + \Delta T)) \dots \\ & \dots - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t + \Delta T), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La Ecuación de balance (4.13) debe satisfacerse para todo instante temporal, en particular para $t + \Delta T$. Dadas determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: los desplazamientos $\mathbf{d}(t + \Delta T)$, las velocidades $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)$.

Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables, construyen una sucesión que al iterar infinitamente deben converger a la solución exacta. Al realizar una aproximación de Taylor de primer orden en la Ecuación (4.13) esta ya no será nula sino igual a un resto \mathbf{r} . Para diferenciar las variables aproximadas de las exactas, se distingue con la siguiente nomenclatura: $(\mathbf{d}(t + \Delta T) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})$ y $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})$. Rescribiendo acorde a esto la Ecuación (4.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}) &= (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta\mathbf{T}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta\mathbf{T}}) \dots \\ & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta\mathbf{T}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta\mathbf{T}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Los métodos numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de aceleración y velocidad, en el instante $t + \Delta T$, en función de los desplazamientos para ese tiempo y las magnitudes cinemáticas del paso anterior. Para esto, se definen las funciones F_a y F_v según se establece en las siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T} = F_v(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t) \quad (4.15)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T} = F_a(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t). \quad (4.16)$$

Dadas las funciones de las Ecuaciones (4.15) y (4.16), como los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración para el instante t se encuentran dados, la única incógnita en el vector resto para el instante $t + \Delta T$ es el vector desplazamientos para ese mismo tiempo. Por lo tanto, al aplicar el método iterativo de Newton en k , para ecuaciones no lineales, al vector residuo definido en la Ecuación (4.14) se obtiene:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}}) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \Big|_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1} = \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena aplicada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar las derivadas de la función residuo respecto de las magnitudes globales: desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Según el vector residuo de la Ecuación (4.17), estas derivadas son las matrices tangentes $\mathbf{K}_{\mathbf{g}}$, \mathbf{M} y $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$ descritas en el Capítulo 3. Asimismo, al derivar la función de fuerza residual presentada en la Ecuación (4.17) aparece un término \mathbf{C}_{vis} correspondiente a la derivada de la fuerza viscosa respecto de la velocidad del sólido. Esto resulta una matriz diagonal con valores principalmente nulos, salvo en las entradas correspondientes a la dirección del viento, con valor $\rho d_c C_d w_m$.

Incorporando estas matrices se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \Big|_{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\text{vis}}) \right) \Big|_{\mathbf{k}} \quad (4.19)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.17) se halla el paso en desplazamientos en $k+1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}$. Matemáticamente:

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\text{vis}}) \right) \Big|_{\mathbf{k}}^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}})) = \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1} \quad (4.20)$$

Esta sección se desarrolló para determinada función de residuo, sin embargo el Método de HHT implementado considera una expresión diferente. Además, propone determinadas funciones de aproximación para las velocidades y ace-

leraciones que se describen en la sección a continuación.

4.2.2. Resolución numérica mediante HHT

Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo de Newmark presentado en (Newmark, 1959). Según el artículo (Hilber et al. 1977) el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de ecuaciones dinámicas lineales en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (Hilber et al. 1977) se compara el método de HHT con otros métodos clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser: el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es más preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores, superpuesto a que este se implementó en (Le et al. 2014), resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

El parámetro característico del método se lo identifica con el nombre α_{HHT} . Este permite expresar el vector de fuerzas residuales de HHT al ponderar el vector residuo definido en la Ecuación (4.17) en $t + \Delta T$ y t según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{HHT}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) = & (1 + \alpha_{HHT})(-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta T} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})) \dots \\ & \dots + \alpha_{HHT}(-\mathbf{f}_{\text{ext},t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_t) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_t)) \dots \\ & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Se presentan las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark α_{NW} y β_{NW} para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones

de actualización para el instante $t + \Delta T$ se escriben:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta \mathbf{T}} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta \mathbf{T})^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta \mathbf{T})} \dot{\mathbf{u}}_t - \dots \quad (4.22)$$

$$\dots - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta T)} \mathbf{u}_{t+\Delta \mathbf{T}} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta \mathbf{T})} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \dots \quad (4.23)$$

$$+ \dots \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) \mathbf{u}_t \ddot{\Delta \mathbf{T}}$$

Para implementar HHT basta con definir los parámetros α_{NW} y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT} y calcular las matrices tangentes asociadas al vector de fuerzas residuales definidas en 4.21. Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.24) y (4.25). En estas funciones, es posible notar las similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$ se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (4.24)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (4.25)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro α_{HHT} y el incremento ΔT entre dos tiempos consecutivos t y $t + \Delta T$.

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta \mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta T} \quad (4.27)$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. De acuerdo con los artículos publicados por Ibrahimbegović y Mikdad, 1998 y Ibrahimbegovic y Mamouri, 2002, los vectores de velocidades y aceleraciones angulares para el paso $k + 1$, en el instante $t + \Delta T$, deben calcularse según las siguientes

Ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta T}^g (\mathbf{R}_t^g)^T \left[\frac{\alpha}{\beta \Delta T} \theta_{t+\Delta T} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_t + \frac{(\beta - 0.5\alpha)\Delta T}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_t \right] \quad (4.28)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta T}^g (\mathbf{R}_t^g)^T \left[\frac{1}{\beta \Delta T^2} \theta_{t+\Delta T} - \frac{1}{\beta \Delta T} \dot{\mathbf{w}}_t - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta T} \right] \quad (4.29)$$

Un procedimiento análogo al de las funciones lineales se aplica a las angulares de las Ecuaciones expresadas en (4.28) y (4.29). Sus derivadas se presentan en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta T}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta T}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta T}^g) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta T}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta T}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta T} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta T}^g) \quad (4.31)$$

Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones (4.30), (4.31), (4.26) y (4.27) al definir convenientemente la matriz \mathbf{B}_t . En función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aceleraciones globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta T}^g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{2,t+\Delta T}^g) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta T} \quad (4.33)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta T} \quad (4.34)$$

Al escindir las Ecuaciones (4.33) y (4.34) se identifican las funciones F_a y F_v de la sección 4.2.1. Estas relaciones matemáticas deben integrarse a la ecuación linealizada de equilibrio, con el vector de residuos para HHT definido en (4.21). De esta manera se deduce el incremento en $k+1$ que permite conocer el vector desplazamientos en el paso $k+1$, a partir del vector en k , para el instante $t + \Delta T$ según la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}}) = & \\
& \left((1 + \alpha_{HHT})\mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT}^2)\Delta T^2} \right) \mathbf{M}\mathbf{B}_{\mathbf{t}} + \left(\frac{1^2 + \alpha_{HHT}^2}{2\Delta T} \right) (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\mathbf{vis}})\mathbf{B}_{\mathbf{t}} \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}
\end{aligned}
\tag{4.35}$$

Se aclara que para despejar la Ecuación (4.35) anterior, la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Para esto las matrices tangentes fueron simetrizadas de forma numérica, redefiniendo a la matriz como la semi-suma con su transpuesta. Esto garantiza la no singularidad y mantiene el orden de convergencia cuadrático para N-R.

4.2.2.1. Hipótesis de modelado numérico

Se enumeran las premisas y simplificaciones durante la implementación numérica de los códigos creados:

1. Los incrementos angulares no se calcularon componiendo dos rotaciones consecutivas sino de forma aditiva, es decir: $\theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1} = \theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}} + \Delta\theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}$.
2. La matriz de amortiguamiento viscoso $\mathbf{C}_{\mathbf{vis}}$ se consideró una diagonal con elementos no nulos en las componentes asociadas a los desplazamientos traslacionales. Se copió el valor del amortiguamiento aerodinámico con el valor correspondiente a la coordenada lineal $\rho d_c C_d w_m$ para el resto de los desplazamientos. Esto garantiza la estabilidad y atenuación de la respuesta en la primera etapa asociada a la acción del peso propio.
3. La simulación se separó en dos etapas consecutivas, en primer lugar se carga con la fuerza de la gravedad (a partir de la condición inicial) y una vez que la respuesta es constante se aplica la carga del viento.

4.2.3. Implementación numérica en ONSAS

En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el software (ONSAS). Este código es abierto y se desarrolló para distintos tipos de elementos, materiales y geometrías dentro del mismo modelo. Además permite

resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código abierto *Paraview* difundido en (Ahrens et al. 2005).

Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron aportadas por el Prof. Jean-Marc Battini. Su contribución al ONSAS constituye uno de los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser pionero de la formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en los trabajos (Battini y Pacoste, 2002) (Le et al. 2014), sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación. A continuación en el pseudocódigo 1 se detalla el esquema panorámico sobre el esqueleto del código ejecutado en ONSAS.

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta T, \alpha_{HHT}$
 Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0 \quad \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0 \quad \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$
 Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$
while $t < t_f$ **do**
 finDisp = 0
 Definir: $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$.
 Evaluar $\mathbf{f}_{\text{ext}, t+\Delta t}$
 while FinDisp = 0 **do**
 Calcular fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$, $\mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$ y $\text{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$.
 Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K}_g^k \mathbf{M}_k^k \mathbf{C}_k^k, \mathbf{C}_{\text{vis}}^k$.
 Despejar $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$
 Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$
 Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$.
 Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$.
 Ensamblar velocidades: $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$
 Ensamblar aceleraciones: $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$ '
 Actualizar fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$ y $\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})$.

 Calcular:
 if $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\|$ **OR** $\|\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\|$ **OR**
 $k \geq \max_{\text{iter}}$ **then**
 finDisp = 1
end if
end while
 Actualizar $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta T}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}$.
 $t = t + \Delta T$
end while

En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultáneo. Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite incrementar la variable temporal en pasos de ΔT . Además, debe evaluar los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de \mathbf{f}_{ext} . Para resolver el estado del sistema en el tiempo $t + \Delta T$, hace falta resolver la ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (4.35). Con este cometido se utiliza el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo 1 se omitió el subíndice temporal $t + \Delta T$ para simplificar la notación.

Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramente, el cálculo del incremento que determina el paso $k + 1$, a partir de los desplazamientos en el paso actual k . Luego se actualizan las variables cinemáticas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza mientras que la variable finDisp sea nula. La alteración de estado, se encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos tol_u , en vector de fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter} . Las primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la variable finDisp alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices dinámicas tangentes. Este código se agregó a **ONSAS** procurando su versatilidad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo pseudocódigo de la función `elementbeamforces.m` implementada y presentada en el Apéndice 1.

El diagrama presentado en el Pseudocódigo 2, puede dividirse en tres divisiones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo constructivo de las variables intervinientes. Primeramente, se hallan las matrices de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y deformada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las fuerzas internas estáticas y las matrices tangentes en la configuración local a través de la función `beamLocalStaticForces`. Tanto entradas como salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas locales. Es por

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$ E ν G \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{d}_g^e

for 1 **to** N_{elem} **do**

 Separar vector desplazamientos $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$

 ————Cálculo de matrices de rotación————

 Computar matrices de rotación global \mathbf{R}_g^1 y \mathbf{R}_g^2

 Evaluar matriz de rotación de referencia \mathbf{R}_o

 Hallar \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q} y calcular \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 .

 Evaluar matriz de rotación rígida \mathbf{R}_r

 Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$

 ———— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente ————

 Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$

 Invertir \mathbf{R}_i y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_i$.

 Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f}_l^{\text{int}}$ y matriz tangente local \mathbf{K}_l^T .

 Construir matrices auxiliares: \mathbf{H} \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{r}

 Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K}_g^T \leftarrow \mathbf{K}_l^T$ y $\mathbf{f}_g^{\text{int}} \leftarrow \mathbf{f}_l^{\text{int}}$.

 ———— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas ————

 Todas las variables dependen de la coordenada (x)

 Definir funciones de interpolación N_i

 Calcular matrices: $\mathbf{P}_1(x)$, \mathbf{P}_2 , \mathbf{N} y \mathbf{H}_1 .

 Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$

 Calcular matrices auxiliares: \mathbf{H}_1 , $\dot{\mathbf{H}}_1$, \mathbf{H}_2 , $\dot{\mathbf{H}}_2$, \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .

 Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.

 Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$

 Hallar expresiones e integrar en el elemento: \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M}_k y \mathbf{C}_k

 Ensamblar : \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} , \mathbf{C}_k \mathbf{K}_T^g $\mathbf{f}_{\text{int}}^g$

end for

esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego integrarlas al código general expuesto en el Algoritmo 1.

De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia x en la configuración de referencia. Dado que su obtención directa es algo compleja, se definen una serie de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

Una vez finalizados estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadratura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último, los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas, como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices de todo el sistema en coordenadas globales.

Capítulo 5

Resultados numéricos

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementación corrotacional detallada en el Capítulo 3, para luego aplicarse a modelos específicos de conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando un computador portátil con un procesador Intel i7 6700HQ y una memoria ram de 8 Gb. La formulación se implementó en el software de código abierto [ONSAS](#) el cual se ejecutó en GNU-Octave presentado por Eaton et al. [2007](#) y visualizándose los resultados haciendo uso de la herramienta Paraview publicada por Ahrens et al. [2014](#). El hilo conductual de este capítulo fue ideado con un aumento progresivo de complejidad con el objetivo de validar paulatinamente la implementación para luego generar un modelo completo sobre la problemática central de aborda esta investigación.

5.1. Viga en voladizo con ángulo recto

Este ejemplo fue publicado por primera vez por Simo y Vu-Quoc, [1988](#) y es usualmente considerado en la literatura para validar implementaciones de elementos de viga tridimensionales aplicadas al análisis no lineal de estructuras ((Albino et al. [2018](#)) y (Le et al. [2014](#))). El mismo consta de dos barras idénticas en ángulo recto formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo $L = 10$ m tal y como se ilustra en la Figura [5.1](#).

Las rigideces de torsión (GJ), flexión (EI) y directa (EA) del ejemplo se seleccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales y sus unidades carecen de sentido, su valor garantiza movimientos de gran

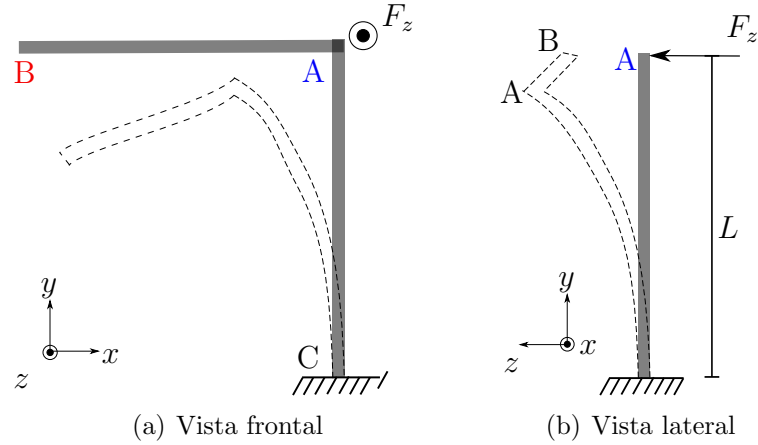


Figura 5.1: Disposición geométrica de la estructura.

amplitud y para esto deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$GA = EA = 10^6 \quad (5.1)$$

$$GJ = EI = 10^3. \quad (5.2)$$

Dado esto la elección de dichas magnitudes se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado de las Ecuaciones (5.1) y (5.2). Para este trabajo el autor escogió los siguientes valores: $E = G = 10^6$, $A = 1$, $I = J = 10^{-3}$ y $\nu = 0.3$. Se hace notar que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan de sentido.

La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplazamientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que permiten aplicar una fuerza en el sentido del eje z tal y como se muestra en la Figura 5.1. Este forzante flecta y torsiona al sistema en un plano saliente al xy , produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento, son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la carga. Esta fuerza crece linealmente en los dos segundos iniciales, hasta un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y luego decrece hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual en un corto intervalo de tiempo como se muestra en la figura a continuación:

El objetivo principal del ejemplo es validar los códigos incorporados al soft-

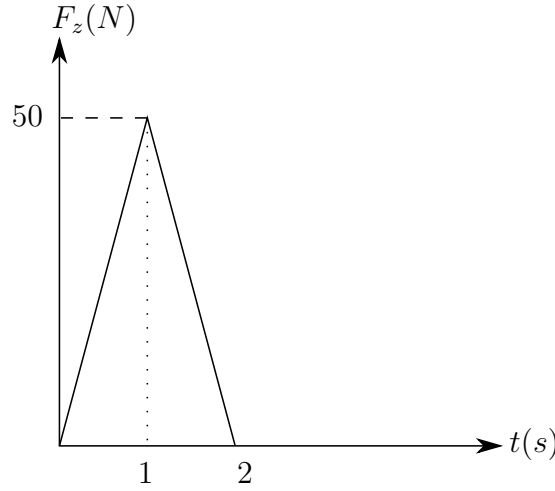


Figura 5.2: Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

ware [ONSAS](#), por ende, tanto el método de resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en el artículo (Le et al. [2014](#)), comparando así resultados semejantes. Consecuentemente se seleccionó un valor característico $\alpha = -0.05$ y un valor de parada en desplazamientos de 10^{-7} . Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de $\Delta T = 0.25$ s y se discretizó la geometría con 10 elementos por barra.

Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se graficaron las deformadas para diferentes instantes de tiempo: $t_1 = 4$ s, $t_2 = 11$ s y $t_3 = 19$ s. En la Figura [5.3](#) se observan las oscilaciones flexionales para distintos planos yx e yz . Estos movimientos son originados por diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante F_z mientras que en el miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a su unión rígida con el resto de la estructura.

Con el objetivo de comparar los resultados del artículo de referencia se graficaron ciertos desplazamientos del nodo A. Estos son: el desplazamiento lineal vertical (según el eje y) y el transversal (según z). Los resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras [5.4](#) en función de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la estructura. En particular, la Figura [5.4\(b\)](#) denota oscilaciones que alcanzan varios metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exigente en términos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no armónico de vaivén en el eje z , se puede notar la presencia del amortiguamiento artificial introducido por el método de



Figura 5.3: Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s.

resolución numérica, ya que las amplitudes presentan una tendencia atenuante con el tiempo.

Por otra parte al analizar en la Figura 5.4(a) se observa que los desplazamientos en y , son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido de la fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano yz con el versor x saliente, el movimiento del nodo A es análogo al de una viga empotrada con una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de A es siempre en el sentido de $-y$, lo que se refleja en la Figura 5.4(a) y condice con la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación con los presentados en la bibliografía de Le et al. 2014, se observan similares valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento respecto a las Figuras 5.4 y 5.5. También así los valles y las crestas de la curvas se suceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que las funciones implementadas en [ONSAS](#) reproducen correctamente el ejemplo y es capaz de capturar movimientos de flexo-torsión para grandes desplazamientos y rotaciones cabalmente.

Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B . En la Figura

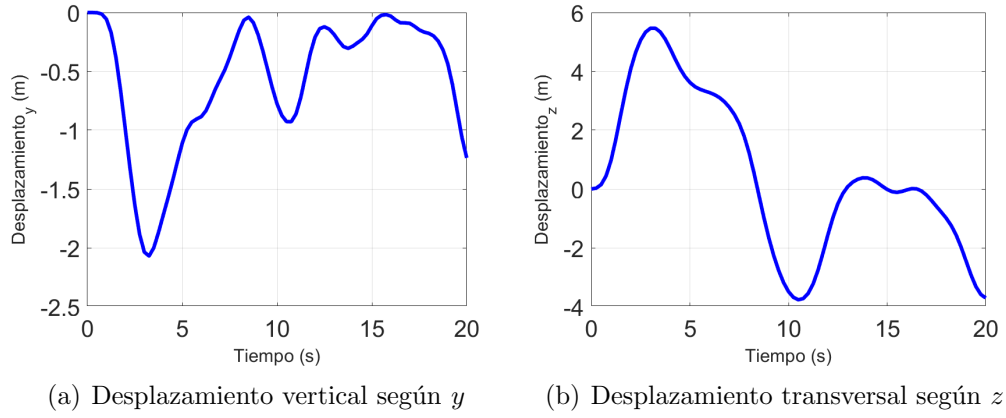


Figura 5.4: Desplazamientos de control del nodo A.

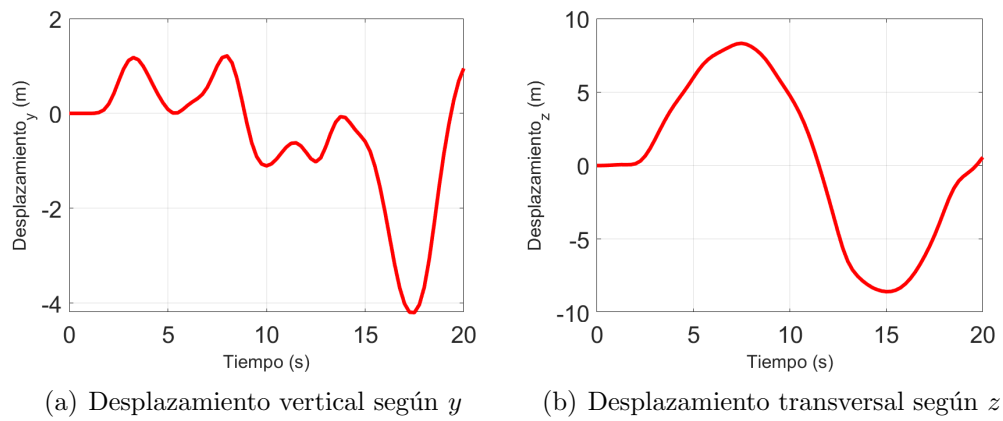


Figura 5.5: Desplazamientos de control del nodo B.

5.5(b) se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente, y una forma que se asemeja a una senoide. Esto podría vincularse al modo flector en el plano xz de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la dirección z . Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de AC superpuestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento. El autor Le et al. 2014 publicó el desplazamiento en z de B y los resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva.

Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inmanentes a cada elemento en la Figura 5.3. En esta se identifica que el esfuerzo alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando considerables fluctuaciones temporales. En simultáneo, la viga horizontal A-B desarrolla fuerzas normales en todo su largo.

El modelo implementado desarrolla magnitudes no despreciables de desplazamientos en x tal y como se constata en las Figuras 5.6. He aquí la importancia de implementar un modelo considerando no linealidad geométrica, estas consideraciones son esenciales para la aplicación principal de este trabajo.

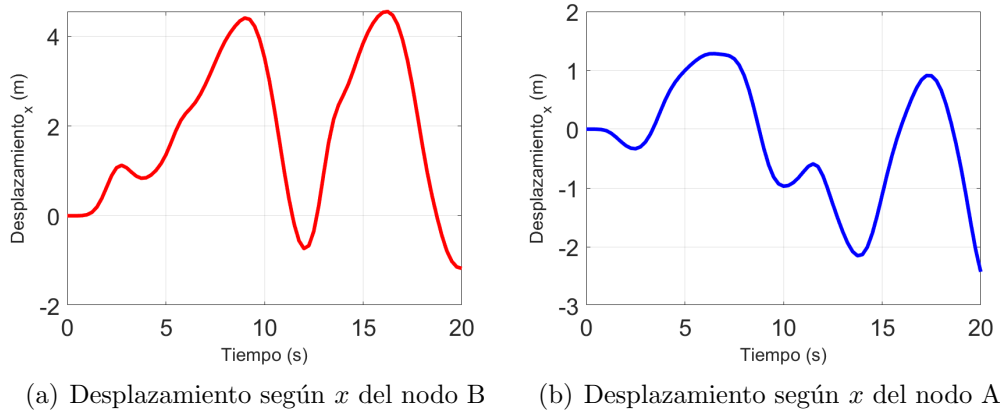


Figura 5.6: Desplazamientos en x de los nodos A y B.

5.2. Viga en voladizo con péndulo

Este ejemplo tiene como objetivo validar la respuesta dinámica del acople entre elementos de viga corrotacional y de biela. Esto es necesario ya que las líneas eléctricas (que se modelarán como vigas) son sujetadas en suspensión por cadenas aisladoras modeladas como barras. Previo al desarrollo de este caso se

validaron ambas formulaciones de forma independiente, para los elementos de viga corrotacional se utilizó el modelo de la Sección 5.1 y para los elementos de biela tipo Green un péndulo simple extraído del libro de Crisfield, 1997. Una vez culminada esta etapa se acoplaron ambas formulaciones en [ONSAS](#) y se validaron estéticamente. Luego se estudió el comportamiento dinámico del acople en el modelo presentado en esta sección.

Tal y como se observa en la Figura 5.7, la estructura esta compuesta por una viga en voladizo empotrada en C y un péndulo anidado a la viga en A. Ambos elementos son de largo $L = 3.04$ y los nodos etiquetados con las letras A y B se encuentran libres.

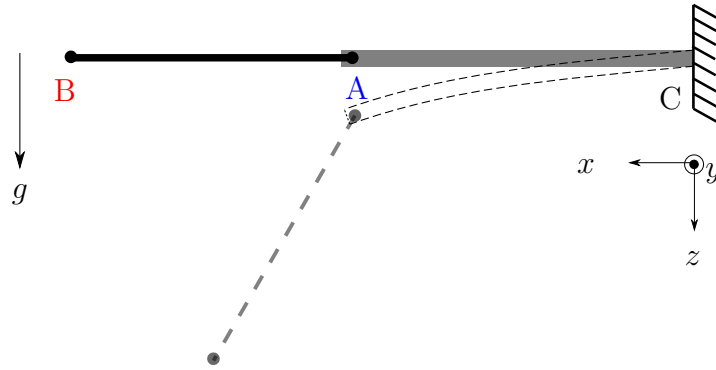


Figura 5.7: Esquema del ejemplo viga en voladizo con péndulo.

Las propiedades del péndulo se extrajeron del libro de Crisfield, 1997 mientras que para la viga sus propiedades mecánicas se ajustaron artificialmente hasta encontrar una dinámica flexible de esta. Estas propiedades tienen un fin únicamente de validación, por lo que sus unidades carecen de sentido físico. A continuación la rigidez a flexión (EI), a directa (EA), la densidad ρ y la cantidad de elementos N_{elem} se presentan en la Tabla 5.1:

Elemento	A	ρ	EA	EI	N_{elem}
Viga	0.1	65.7	10^{10}	-	10
Péndulo	0.1	65.7	10^{10}	1300	1

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas de los elementos.

El forzante del ejemplo es únicamente la fuerza peso según la dirección z . La estructura parte de su configuración inicial horizontalmente donde no encuentra el equilibrio y comienza a oscilar generando un movimiento plano con desplazamientos de traslación en los ejes z y x como también angulares

en el eje saliente y . Este movimiento se simuló para un tiempo final $T_f = 10$ s con pasos de $\Delta T = 0.25$ s. Para el método numérico de HHT se eligió un parámetro característico de $\alpha_{HHT} = -0.05$ y unas tolerancias en fuerza residuales y desplazamientos de $tol_r = 10^{-5}$ y $tol_u = 10^{-5}$ respectivamente.

Como salida de control del ejemplo se eligieron los desplazamientos en z del nodo A y B respectivamente obteniéndose los resultados que se muestran en las figuras que prosiguen:

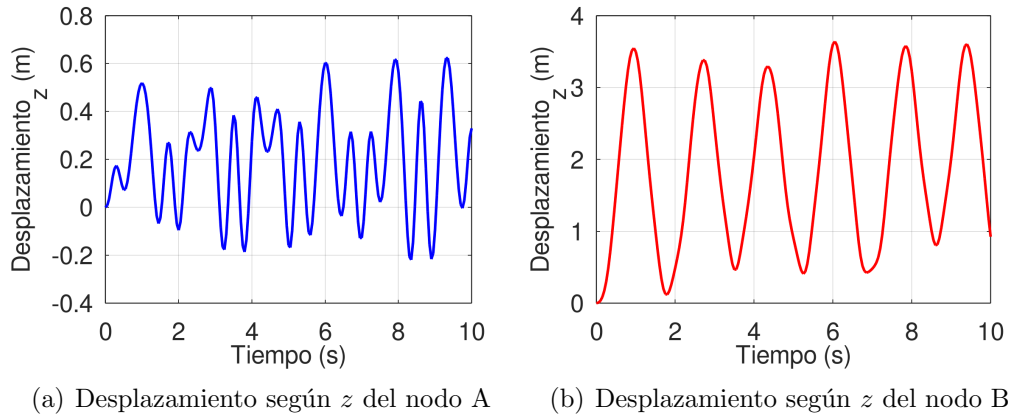


Figura 5.8: Desplazamientos de control de los nodos nodo A y B.

En la Figura 5.8(a) se presenta un movimiento oscilatorio con presencia del primer modo flexión de la viga, intervenido por el movimiento acoplado que el péndulo le imprime a la viga. Además las amplitudes parecen ser asimétricas respecto a 0 ya que el péndulo en toda su trayectoria presenta desplazamientos positivos en z . Respecto a la Figura 5.8(b), el movimiento de vibración del péndulo es relativamente armónico en comparación con la viga. No obstante las amplitudes del movimiento parecen ir variando con el tiempo y la respuesta no se corresponde con el movimiento de un péndulo armónico simple. La dinámica generada en el ejemplo se consideró aceptable y representativa de acuerdo al movimiento real esperado. Para ilustrar al lector se generó la Figura 5.9 con el modelo en su estado indeformado en líneas azules y con una barra de colores en desplazamientos para la estructura deformada en diferentes tiempos de simulación.

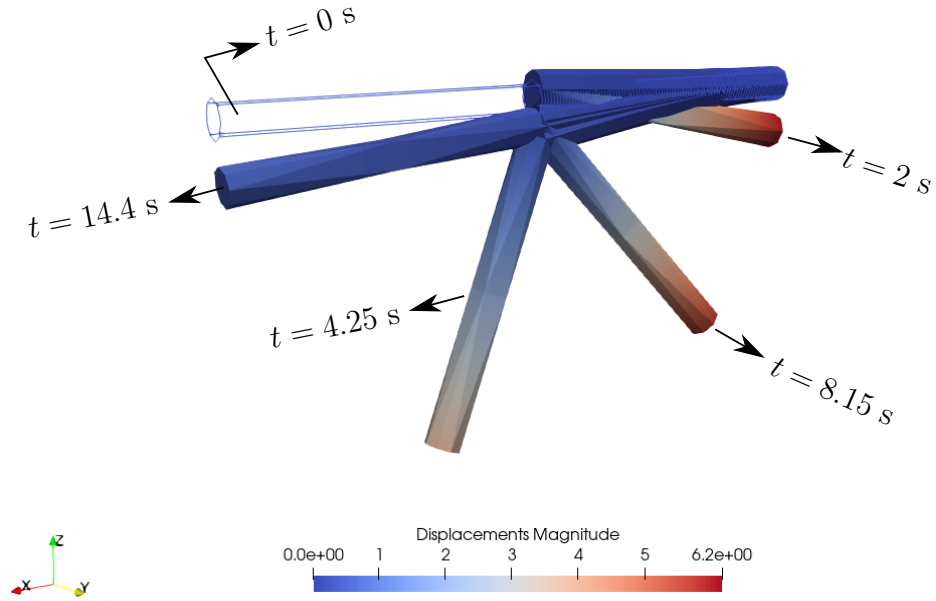


Figura 5.9: Estructura deformada en los instantes 2 s, 4.25 s, 8.15 s y 14.4 s.

5.3. Modelo simplificado de una línea

En esta sección se presenta un primer modelo simplificado del enfoque central de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de Foti y Martinelli, 2018 aunque ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado, como ser el caso de: Luongo y Piccardo, 1998, Martinelli y Perotti, 2001. El ejemplo consiste en un conductor de transmisión eléctrica reforzado con núcleo de acero sometido a un perfil de viento artificial.

Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo $L_a = 3$ m cada una de ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas, para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en las tres direcciones en x , z e y en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan correctamente las presentadas por Foti y Martinelli, 2018, donde los extremos se encuentran sujetos. Habiendo detallado someramente los componentes que integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría a continuación:

El vano tiene un largo $L_c = 267$ m y para esta simulación no se tendrá en

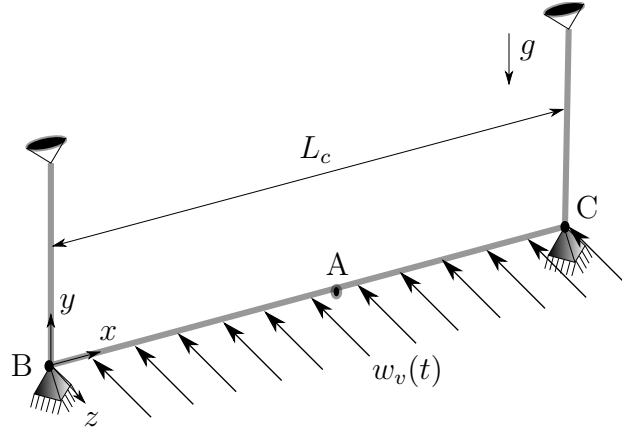


Figura 5.10: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

cuenta la tensión previa al momento de la colocación, pero sí la tensión debida a la carga del peso. Por otra parte, el modelo del conductor se encuentra estandarizado bajo la norma europea (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003) y se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la cantidad de cables en el núcleo y en la periferia, respectivamente. El diámetro se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos de aluminio (color gris) y los 7 de acero (color azul). El perfil del conductor se ilustra en la Figura 5.11.

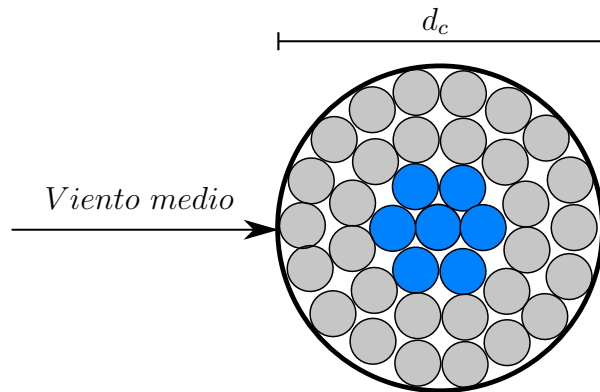


Figura 5.11: Esquema del conductor ASCR 7/26.

El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad E , coeficiente de Poisson ν , una densidad ρ y una rigidez flexional y torsional EI y GJ , respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de (Foti y Martinelli, 2016) y se presentan en La Tabla 5.2.

d_c (cm)	m (kg/m)	EA (kN)	EI (N.m ²)	GJ (N.m ²)
2.81	1.8	29700	2100	159

Tabla 5.2: Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26.

Existen diferencias sustanciales respecto al ejemplo original postulado por Luongo y Piccardo, 1998 y Martinelli y Perotti, 2001, en donde se resolvió mediante elementos de barra trinodal y de viga corrotacional, respectivamente. Para ambos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generada artificialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se desprecia las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flujo medio W en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico y alcanza la velocidad media máxima W_{max} en 20 segundos. Este valor de velocidad se calculó según (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003) considerando un flujo tipo CLA con las propiedades indicadas en la siguiente Tabla considerando a un tipo de terreno sub-urbano o industrial:

k_r	z_0	z_{min}
0.22	0.3 m	8 m

Tabla 5.3: Parámetros del flujo tipo CLA para W_{max} .

La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gravitatoria según el eje $-z$ y luego las fuerzas del viento según direcciones que se muestra en la Figura 5.10. No se muestran los resultados de esta etapa debido a que carecen de relevancia y en el trabajo de referencia se toma la catenaria como condición inicial. Una vez estabilizada la respuesta del sistema por el amortiguamiento interno, se aplica una fuerza lineal de media positiva según el eje $-z$ desde cero hasta W_{max} . Esta forma del perfil podría emular el aumento modulado de presiones en un túnel de viento entre las bocas de entrada y descarga. La forma del perfil se muestra en la Figura 5.12.

Para este estudio no se considerará la fuerza de *lift*, esta es despreciada por diferentes autores Lee y Perkins, 1992, Foti y Martinelli, 2016 y Papailiou, 1997 principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares a los flujos está relacionada con posibles asimetrías tangenciales en el perfil. Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce

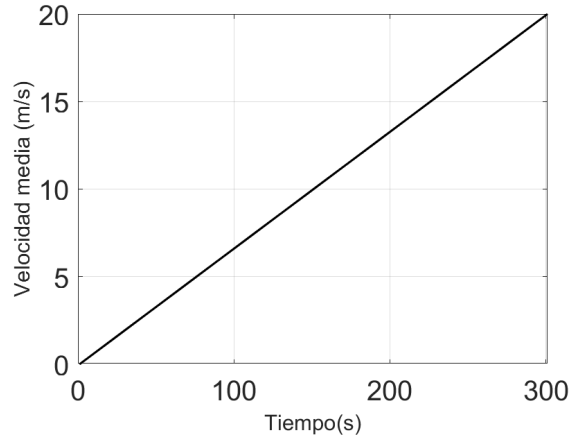


Figura 5.12: Perfil de velocidad progresiva z .

en una fuerza de *lift*. nula. Esta es la principal diferencia de este caso en comparación por lo propuesto en la literatura por Luongo et al. 1984 y Foti y Martinelli, 2018 donde los perfiles presentan formaciones de hielo.

Se considera un flujo transversal al eje del cable, con una historia de velocidad media mostrada en la Figura 5.12. Los valores de $C_d = 1.5$ se extrajeron del trabajo de Foti y Martinelli, 2018. Se aclara que el ángulo de ataque varía durante la trayectoria del cable, no obstante, el coeficiente C_d permanece constante debido a la simetría de revolución del perfil. Se muestran entonces las fuerzas sobre cada nodo del conductor en la Figura 5.13.

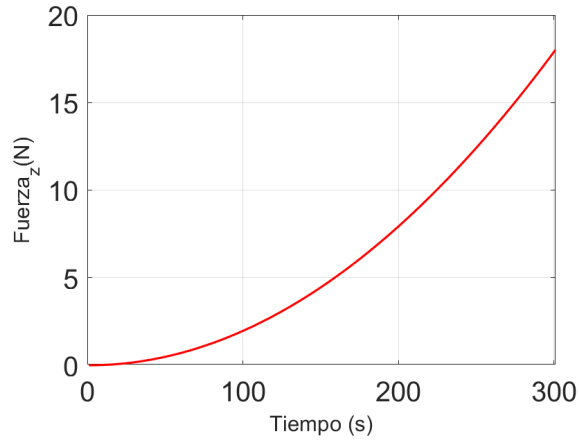


Figura 5.13: Perfil de fuerza nodal según el eje z .

En las Figura 5.14 se presentan los desplazamientos en vertical y transversal del nodo A, respectivamente, situado en el punto medio del vano.

Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la

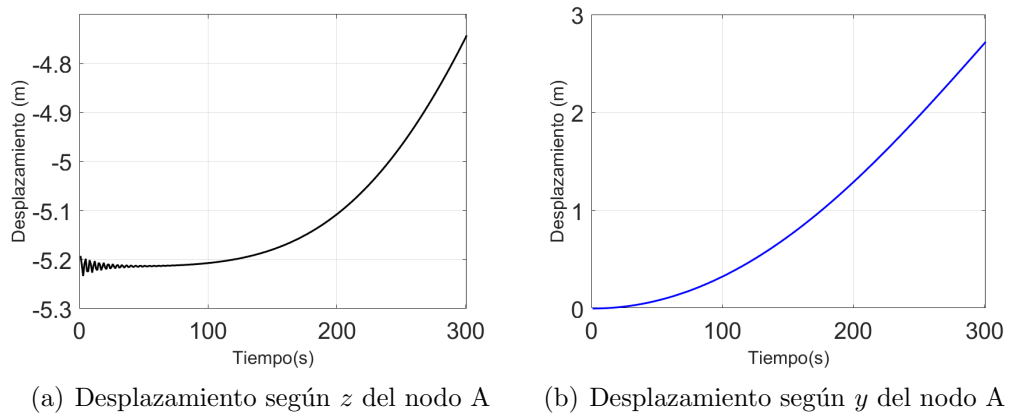


Figura 5.14: Desplazamientos del nodo A.

literatura fuente (Foti y Martinelli (2018)), se capturo el ángulo de balanceo del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función tangente que vincula el ángulo respecto de la deformada en el eje x con los desplazamientos en z e y . En la Figura 5.15 se ilustra un esquema del ángulo Φ .

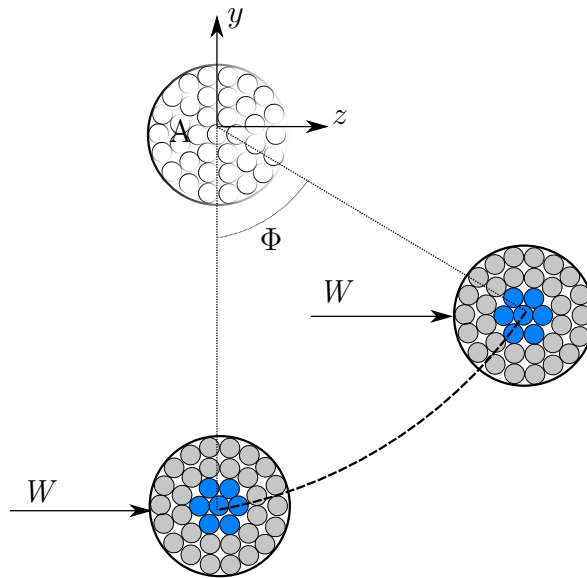


Figura 5.15: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

Se graficaron las trayectorias del ángulo para diferentes valores de velocidad media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica. Es posible notar que la forma de la Figura 5.15 describe un perfil semejante al que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras

5.14 y 5.13. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte, en comparación con los resultados presentados por Foti y Martinelli, 2018 se observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo, la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamente, lo que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincronizadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia del *lift* y la variación del ángulo de ataque con el ángulo. Como en el trabajo de Foti y Martinelli, 2018 se toman en cuenta un perfil con formaciones de hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.

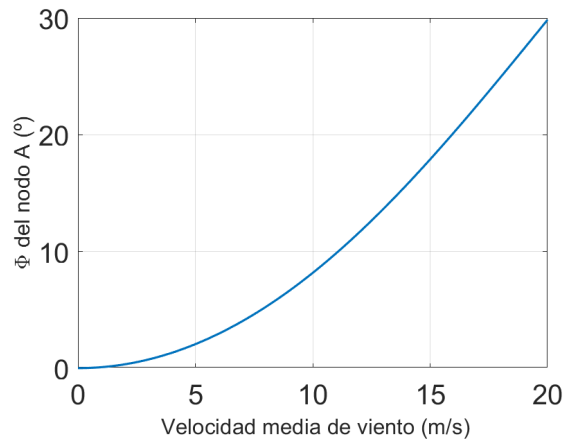


Figura 5.16: Ángulo de balanceo Φ en función de la velocidad media $W(t)$.

El ejemplo permite inferir que la respuesta numérica del modelo representa de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores de transmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejanza en los resultados arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

5.4. Sistema de transmisión eléctrica

Este ejemplo ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de transmisión eléctrica afectados por vientos extremos no sinópticos, en particular, TC. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizando un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos vanos de idéntico largo $D_v = 206.5$ m tal cual se indica el Esquema 5.17. Para el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1 y 2, respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del primer y segundo vano con los literales C y B, respectivamente. Con el objetivo de representar una geometría real de una línea de alta tensión los conductores de la simulación se corresponden con el ejemplo resuelto de la Sección 5.3 y cuyas propiedades mecánicas se explicitan en la Tabla 5.2.

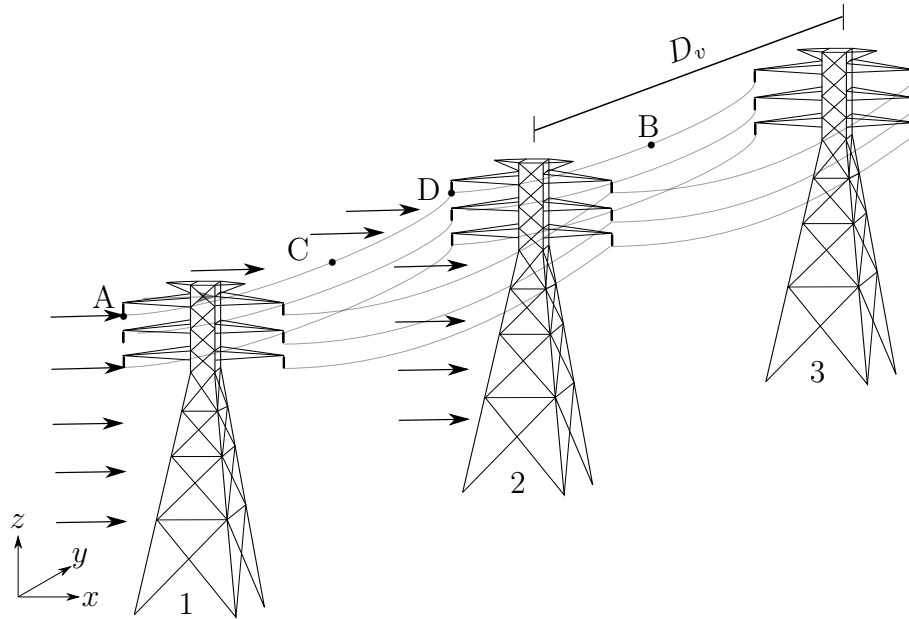


Figura 5.17: Esquema del sistema de transmisión.

En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que transportan un voltaje mayor a 72.5 kV. Este valor de tensión es eminentemente peligroso y para asegurar que la torre se encuentre a voltaje nulo se utilizan elementos aisladores. Para el modelado las cadenas se utilizaron elementos de barras tipo Green presentados en el libro de Crisfield, 1997. Además, para las

cadenas aisladoras se consideró un módulo de elasticidad aproximado $E = 70$ GPa según los estudios experimentales realizados por Crespo, 2019.

Al igual que los aisladores, las barras de las torres metálicas se modelaron con elementos de Green, con una ley material Saint-Venant-Kirchhoff con $E = 300$ GPa y $\nu = 0.3$. Su geometría fue suministrada por el Ingeniero Agustín Téliz, cuya tesis de maestría consiste en el modelado y optimizado estructural de las mismas. Estos valores se corresponden con un acero ASTM A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y ASTM grado 65. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre los opuestos de la cercha de 14.8 m. Además, estas son capaces de soportar 6 líneas, a cada altura sostienen cada una de las fases eléctricas. Las líneas se encuentran colocadas a tres cotas distintas $L_1 = 31.75$ m, $L_2 = 26.03$ m, $L_3 = 39.76$ m, tal y como se muestra en la Figura 5.18.

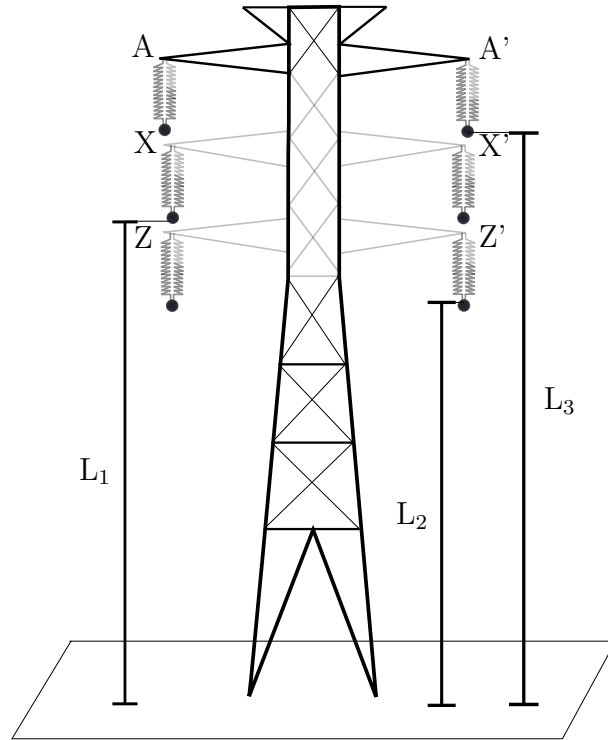


Figura 5.18: Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

La simulación se separa en dos etapas, primeramente partiendo de la configuración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.17. Nuevamente, al igual que en el Ejemplo 5.3, esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada

por el amortiguamiento. Este se calculó según lo descrito en la Sección 4.2.2.1 resultando $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \bar{v} = 0.15 \text{ Ns/m}$.

Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta convectiva capturado en la referencia (Stengel y Thiele, 2017), positiva según el eje x . No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales siendo la velocidad una componente uniforme. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó únicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer resultados respecto al comportamiento flexional en el plano yz , lo que se evidenciará a continuación la diferencia de las trayectorias entre los nodos A, C, D y B. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa en que estos fenómenos tienen dimensiones espaciales del orden de 40 metros a 40 kilómetros según Fujita, 1985, consecuentemente es factible que la tormenta afecte a una fracción del tendido. Los valores de fuerza y velocidad asociadas a la coordenada x entre los nodos A y D para cada instante se muestran a continuación:

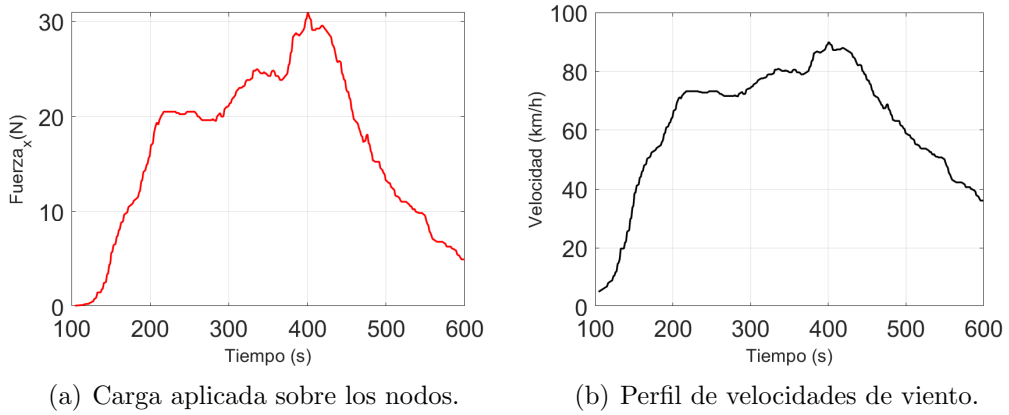


Figura 5.19: Perfil de velocidad y fuerza extraído del trabajo de Stengel y Thiele, 2017.

Se compararon cuantitativamente las oscilaciones entre fases (A-A', X-X', Z-Z') de la Figura 5.18, no apreciándose sensibles diferencias, tanto en desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen apreciables variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A'). Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho de omitir las variaciones en el flujo luego de la interacción con el conductor. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando que los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A como variable de control. Para este

nodo se registraron su desplazamiento en los ejes x y z como también el ángulo de oscilación Φ tal y cual se observa en la Figura 5.20.

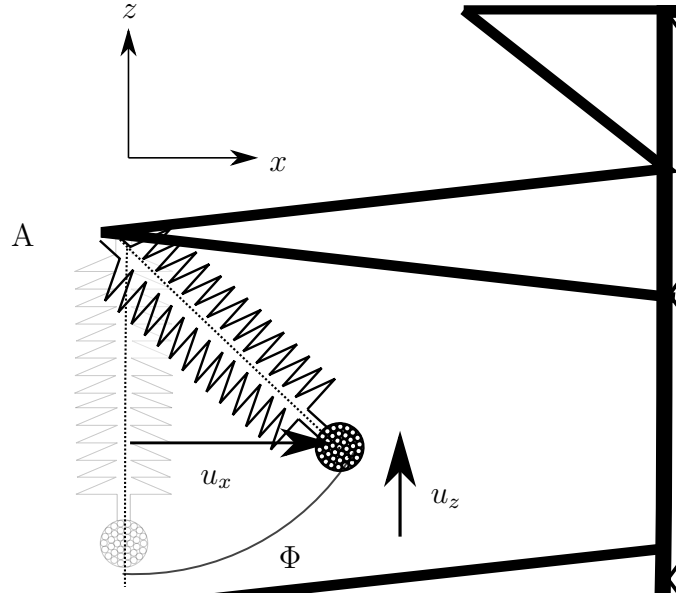


Figura 5.20: Ilustración de magnitudes de balanceo.

El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de $\Delta T = 0.5$ s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico $\alpha = -0.05$. Luego de un procedimiento iterativo de ajuste de parámetros se realizaron las simulaciones en un período 30 horas aproximado con tolerancias en desplazamientos y en fuerzas residuales de 10^{-5} m y 10^{-5} N, respectivamente.

A continuación se muestran los desplazamientos verticales y horizontales de los extremos libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magnitudes externas, responde a un argumento basado en el análisis en frecuencia del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en estado estacionario. En 5.21(a) y 5.21(b) se observan los desplazamientos en vertical y transversal, respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo no representa las cargas inerciales de los vanos contiguos a este.

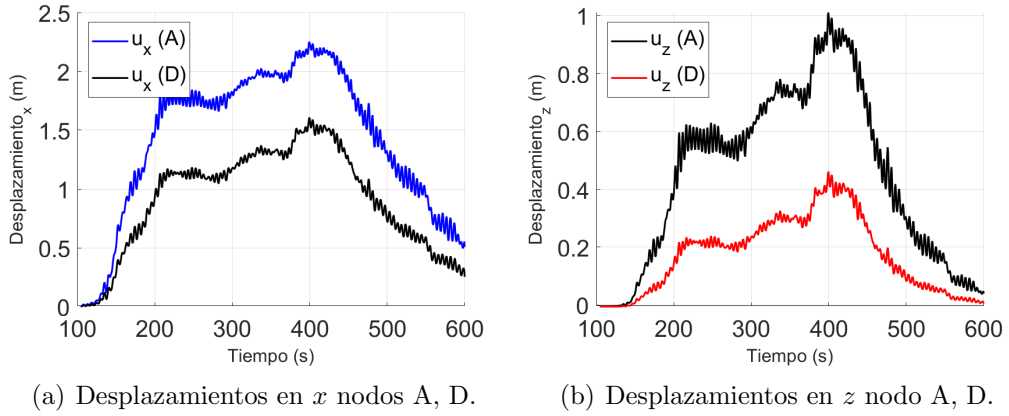


Figura 5.21: Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D.

Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del conductor también despliegan grandes desplazamientos, este fenómeno resulta indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de seguridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proximidad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los componentes. Por estas razones, en las Figuras 5.22 se ilustran los desplazamientos para los nodos B y C.

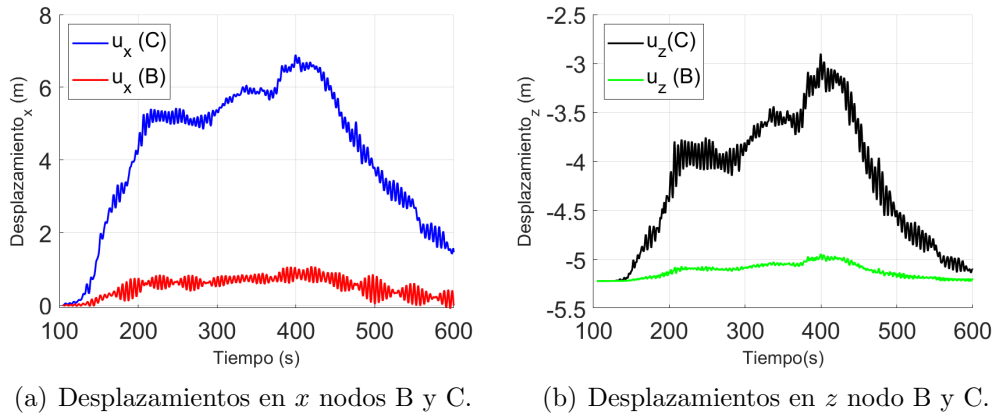


Figura 5.22: Desplazamientos de los nodos medios B y C.

En la Figura 5.22(a) se aprecia que el orden de los movimientos, para ambos nodos, es menor a 8 m durante el dominio temporal. Como la separación entre estos es de unos 14 metros lo que garantiza que no habrá impactos entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas

líneas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central, para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe considerarse a la hora del diseño. En la Figura 5.22(b) se muestra que el descenso máximo de la línea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par de Figuras 5.21, en 5.22 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en puntos medios representados en las Figuras 5.22 presentan una mayor fluctuación temporal respecto a los de las cadenas aisladoras mostradas en las Figuras 5.21.

Por otra parte, en las Figuras 5.22 se observan indicios de inestabilidades numéricas, debido a altas frecuencias inducidas por el método computacional o modos de resonancia.

En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables cinemáticas se elaboró la Figura 5.23 carga-desplazamiento para el nodo A. En las abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos se graficó un cálculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo en el área de ingeniería del viento. Esta hipótesis se explicita en los trabajos de Stengel y Thiele, 2017, Durañona y Cataldo, 2009, Yang y Hong, 2016.

El cálculo analítico resulta de un planteo estático plano, donde se iguala la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones pueden afectar las fuerzas internas transmitidas al elemento aislador. Asimismo, ese cálculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial, proveniente de las distintas orientaciones de la línea respecto al ángulo de incidencia del flujo. En la Figura 5.23 se evidencian las diferencias entre los modelos y cómo el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales menciona-

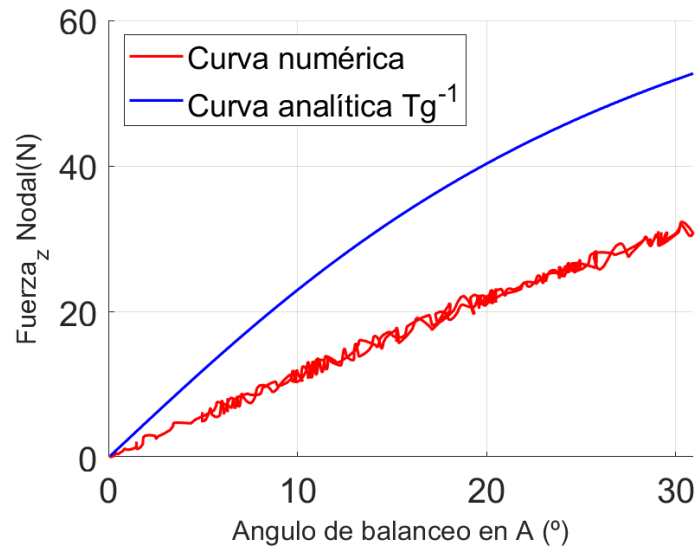


Figura 5.23: Curva analítica y numérica carga-desplazamiento.

das, se muestran la configuración indeformadas en gris y las deformadas con una barra de colores en desplazamientos para el instante $t = 400s$ en la Figura 5.24.

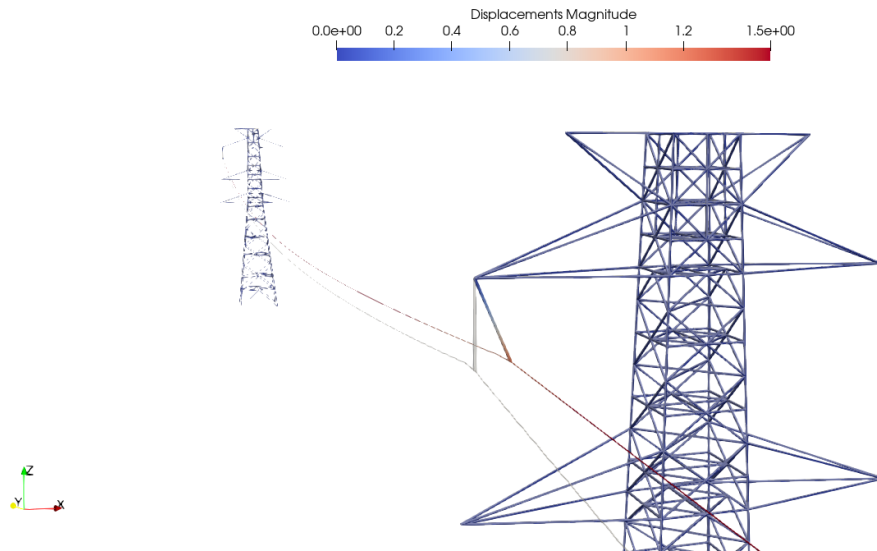


Figura 5.24: Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos a futuro

El presente capítulo se separó en dos secciones que se relacionan con diferentes aristas o perspectivas del trabajo llevado a cabo. En primera instancia, se detallan las consideraciones finales y de síntesis, desde un punto de vista técnico sobre los resultados obtenidos. Luego de esto, se analizan limitaciones de esta investigación que deberían de mejorarse en posibles trabajos a futuro.

6.1. Conclusiones técnicas

Inicialmente se consultó el estado del arte en el área de Ingeniería del viento e Ingeniería Estructural. Se analizaron bibliografías en materia de simulaciones numéricas aplicadas a conductores eléctricos, con abordajes semi-analíticos y computacionales. También, se estudiaron trabajos nacionales e internacionales, desde un punto de vista cualitativo y experimental de CD y sus posibles perjuicios sobre líneas de transmisión eléctrica. Existe vasta evidencia en la literatura de que el fenómeno de tormentas convectivas (TC) ha afectado severamente la continuidad e integridad de los sistemas de transmisión eléctrica y por tanto la calidad de vida humana. Induciendo inevitablemente, en costos millonarios de reparación sobre las instalaciones, y pérdidas durante la interrupción del suministro. Esta investigación construye una herramienta de simulación computacional, capaz de emular los desmedidos desplazamientos y esfuerzos que estos eventos producen sobre los sistemas de transmisión eléctrica.

Habiendo finalizado esta tesis, se enumeran las principales conclusiones técnicas respecto de los objetivos planteados en un comienzo y postulados en la Sección 1.2.

Conclusión T1:

Se implementó y validó dentro del código abierto [ONSAS](#) una formulación corrotacional de vigas 3D para la simulación de problemas dinámicos no lineales de estructuras tridimensionales formadas por vigas.

Conclusión T2:

Se estudió la literatura y extendió analíticamente la formulación corrotacional para elementos de cables incorporando términos de amortiguamiento aerodinámicos.

Conclusión T3:

Se generó un modelo que representa el acoplamiento entre torres y conductores sometido a la acción de un perfil tipo CD. Según los resultados del modelo, las tormentas convectivas afectan a las líneas generando desplazamientos de casi 7 metros y ángulos de hasta 30° en la cadena aisladora.

Conclusión T1: Debido a numerosas ventajas se eligió la formulación corrotacional de vigas 3D para grandes desplazamientos y rotaciones. Una vez ahondado en la temática, se implementó y validó un modelo corrotacional consistente, robusto y eficaz, capaz de captar y reproducir desplazamientos de gran amplitud con número reducido de elementos. Esta formulación se validó con el Ejemplo [5.1](#) *benchmark* del folclore corrotacional presentado por Simo y Vu-Quoc, 1988. Este es cargado con una fuerza abrupta en relación a la rigidez de la estructura alcanzando su valor máximo en apenas 2 segundos de simulación, tal y como se muestra en la Figura [5.2](#). Esta fuerza posee una esencia análoga al fenómeno de TC per se. Esa semejanza radica en el aumento súbito de su magnitud, en un corto lapso de tiempo, por ende, la capacidad del modelo de reproducir este tipo de impactos es fundamental para poder representar el fenómeno central de este trabajo.

En la Figura [5.4\(b\)](#) se observan amplitudes que alcanzan los 8 m cuando la estructura mide 10 m. Esto evidencia, la fuerte presencia de grandes desplazamientos y rotaciones. En relación a los desplazamientos en el sentido de y del nodo A, presentados en la Figura [5.4\(a\)](#), se observa el signo negativo de este, concordando con lo esperado intuitivamente según la fuerza aplicada. Por último, el resultado más importante de este ejemplo, se obtiene al cotejar las respuestas de las Figuras [5.4\(a\)](#), [5.4\(b\)](#) y [5.5\(b\)](#) con lo publicado por el

artículo de referencia de Le et al. [2014](#). Al comparar estas figuras se concluye que el modelo implementado es capaz de representar cabalmente movimientos de gran amplitud, con apenas 10 elementos por miembro y un paso temporal de 0.25 s. Esto permitió validar la formulación para este caso y aplicarla a dominios más complejos específicamente con el foco en conductores eléctricos.

Conclusión T2: En la Sección [4.1.2](#) se desarrolló un estudio general sobre los campos de velocidades absolutos y relativos, vinculados al efecto relativo del movimiento del conductor respecto al viento. Este enfoque no se encontró en la bibliografía consultada, esclareciéndose la dinámica del fenómeno. A su vez, según la Figura [4.4](#), se develó que despreciar la velocidad perpendicular frente a la componente media, en el sentido transversal z , es equivalente a que el ángulo de ataque sea nulo y también así, la componente del *drag* según el sentido de y . Por otra parte, se concluyó que al considerar los campos relativos aparece un término aeroelástico, que emerge de la diferencia de velocidades, vista desde un referencial solidario al conductor. A este término se lo identifica en la materia con el nombre de amortiguamiento aerodinámico y, según lo estudiado, no había sido incluido en la metodología corrotacional.

Una vez descritas las hipótesis en este mismo capítulo, en la Sección [4.2.2](#) se generó un análisis analítico no explicado en la bibliografía de referencia (Le et al. [2014](#)). En esta misma sección se aplicó el método de resolución para problemas dinámicos de HHT, incondicionalmente estable en dinámica lineal, explicando con detenimiento la deducción y premisas utilizadas. Complementario al desarrollo teórico, se establecieron los principales pseudocódigos subyacentes a la implementación numérica en el Software [ONSAS](#).

En función de los avances originales de esta investigación mencionados en los párrafos anteriores. Esta tesis constituye un desarrollo complementario a la formulación propuesta, por Le et al. [2014](#), incluyendo fuerzas aerodinámicas linealizadas provenientes de la acción de vientos sobre conductores. Esto puede aplicarse a un espectro enorme de estructuras representables por elementos de viga, con grandes desplazamientos y rotaciones, atacadas por el viento. Dado este diverso abanico de aplicaciones, el interés de la comunidad científica puede ser un impulso catalizador para ciertas publicaciones a futuro.

Conclusión T3: Se acoplaron diferentes componentes de un sistema de alta tensión: conductores, aisladores y torres. Con el objetivo de estudiar esta

interacción entre elementos se implementó el ejemplo de la Sección 5.2. Este integra elementos de biela tipo Green y de viga corrotacional con resultados lineales y dinámicos aceptables según la respuesta esperada. Luego se avanzó en complejidad y se modeló un sistema de transmisión eléctrica en la Sección 5.4. Las geometrías y propiedades que integraron el modelo son extraídas de bibliografías experimentales y normativas buscando representar y emular el fenómeno de forma realista. Con el mismo cometido, el perfil de viento se extrajo de estudios experimentales en el Norte de Alemania durante el transcurso de una tormenta convectiva, tipo corriente descendente, publicado por Stengel y Thiele, 2017. Esta es de una magnitud intensa, aunque no en comparación con los resultados capturados en diferentes estudios de campo nacionales, en (Durañona y Cataldo, 2009) y (Durañona et al. 2019).

La carga del viento se distribuyó en el primer vano, provocando un perfil que ataque diferente a la línea en su coordenada axial. Esto genera un efecto de desfase entre los conductores, de los vanos entre la torres 1-2 y 2-3 de la Figura 5.24. Esta variabilidad del flujo, busca representar un fenómeno de oscilación axial, relacionado con la presencia de vórtices a lo largo del espacio. Las diferencias en desplazamientos de los puntos A, B, C, y D de la cadena aisladora, se evidencia en las Figuras 5.22 y 5.21. Por más que los movimientos posean diferentes amplitudes de banda, los perfiles obtenidos se encuentran gráficamente emparentados con el perfil de la tormenta en la Figura 5.19(b). Vale destacar que en estos resultados se evidencia una cierta oscilación de alta frecuencia que puede deberse a inestabilidades numéricas.

Se desarrolló un análisis de contraste con un modelo ampliamente utilizado en el área de Ingeniería del Viento. Este se utiliza para calcular de forma cuasiestática, utilizando una fórmula de arctoangente. Esta se basa en un péndulo cuasiestático plano, omitiendo términos inerciales. Los trabajos de Stengel y Thiele, 2017, Durañona y Cataldo, 2009 y Yan et al. 2009 aplican esta aproximación simplificadora. Si bien en los resultados del Ejemplo 5.4 no son comprobables, la aproximación plana no funciona. Para este caso en particular, la curva numérica parece reflejar una linealidad, evaluar el ángulo de la cadena mediante el modelo estático, arrojaría un resultado sobrestimado. Esto se detalla en la Figura 5.23.

Estos resultados presentan indicios que, para enfrentar la problemática, los códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complementario para el diseño de sistemas de transmisión y distribución. Según contactos

establecidos con la empresa de transmisión eléctrica (UTE), la construcción de torres de alta y media tensión suelen encargarse a empresas privadas que obtienen la obra por licitación y entregan las instalaciones con llave en mano. Estos proyectos suelen importar soluciones del extranjero, que pueden ser no aplicables a las condiciones nacionales. Esto se explica por la carencia de las normas internacionales en materia de fenómenos de viento no sinópticos como CD y ciclones extratropicales. Esto se intensifica en el territorio para sistemas montados hace 30 años en superposición con la asiduidad, intensidad y frecuencia de TC.

Uniando resultados de diferentes trabajos internacionales con los resultados del modelo presentado en la Sección 5.4, es posible teorizar que la mayoría de las incidencias ocurridas en las líneas Palmar-Montevideo de 500kV, pueden deberse al pasaje de tormentas severas sobre la zona. Estas tormentas producen CD, que ejercen cargas desmesuradas sobre el conductor, en el orden de minutos, imponiendo ángulos de balanceo excesivos, acercando los conductores a las torres, a una distancia tal, que inminente descarga a tierra pueden dejar fuera de servicio a la línea. Además según los estudios de la norma *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 del Apéndice 2, esta solo considera vientos tipo CLA. Esto podría estar subestimando las fuerzas ejercidas por el viento, ya que para el territorio uruguayo según Durañona y Denis, 2018, los periodos de retorno para velocidades de hasta 100 km/h es menor para CD en comparación con vientos tipo CLA.

6.2. Trabajos a futuro

Actualmente este trabajo abre claras líneas de investigación y desarrollo para continuar la mejora de los modelos que se aproximen a la realidad con mayor precisión. Como trabajo a futuro para continuar la línea de investigación con un encare general se proponen los siguientes lineamientos:

1. Investigar exhaustivamente sobre el origen de las oscilaciones de alta frecuencia observadas en los resultados numéricos del ejemplo de la Sección 5.4.
2. Incluir en el análisis teórico de la formulación corrotacional condiciones de Dirichlet no homogéneas en desplazamientos, que sean capaces de representar el tensado del conductor durante la instalación. La hipótesis

reduccionista sobre la tensión inicial, aparenta ser imprecisa respecto a la rigidez del sistema y tiende a reducir la exactitud en la representación del fenómeno. Según el punto de vista del autor, esta implementación en [ONSAS](#) es el punto de partida en la continuación de este trabajo.

3. Implementar un módulo modal dentro del [ONSAS](#) capaz de calcular los modos de vibración de la estructura, insumo fundamental para realizar un análisis en frecuencia de posibles resonancias viento-conductor.
4. Agregar al desarrollo analítico de la formulación corrotacional la posibilidad de incluir relaciones de fuerza viscosas, no lineales con diferentes coeficientes de *drag* y *lift* de acuerdo al perfil geométrico de la sección e implementarlo en el Software [ONSAS](#).
5. Agregar al modelo del Ejemplo [5.4](#) los elementos separadores con más de un conductor por aislador. En las instalaciones visitadas de forma presencial, se observaron una serie de separadores que mantienen distanciados los conductores evitando el cortocircuito. Además, al unir cuatro cables generan una mayor rigidez e inercia en los tendidos. Este análisis deberá incluir diferentes valores de coeficientes de *drag* dada la proximidad entre conductores y sus efectos sobre las líneas de flujo.
6. Verificar el no deslizamiento interno entre las lingas que conforman el conductor, según los estudios propuestos por Foti y Martinelli, [2016](#). Esto permitiría verificar la hipótesis asumida respecto al comportamiento de unión que mantiene el conductor durante sus trayectorias. A su vez generar un aporte original estudiando cómo las TC afectan al fenómeno de deslizamiento interno de Papailiou, [1997](#).
7. Generar un análisis de malla en el número de elementos por unidad de largo del conductor y sensibilidad respecto a las condiciones de borde establecidas. Esto permitiría estudiar el grado de discretización óptimo, para minimizar el error numérico sin incurrir en un tiempo excesivo de simulación.
8. Integrar la herramienta [ONSAS](#) con un solver de fluidos como por ejemplo el `caffa.3d.MBRi` basado en volúmenes finitos con paralelización multifrontal Mendina et al. [2014](#). Esta ardua integración permitiría generar

una herramienta sumamente potente para atacar problemas de interacción fluido-estructura.

Con el objetivo de generar una herramienta de diseño complementario para UTE se proponen los siguientes trabajos a futuro:

1. Incorporar diferentes geometrías de torres presentes en los distintos tendidos de distribución del país. Según los intercambios con el personal de transmisión de UTE, las líneas de distribución, a partir de la década del 2000, respecto a los que se representaron en el Ejemplo 5.4 cambiaron las geometrías de torres. Es importante este análisis para lograr emular la influencia de la arquitectura de las torres, en la aproximación excesiva del conductor a las barras. De igual manera, adquirir datos reales aportados por UTE podría aportar un valor significativo a esta investigación.
2. Incorporar al modelo el agarre doble que, en determinadas ocasiones, se dispone en las líneas centrales de la torre. Esta es una solución ante la aproximación inminente del aislador, consiste en instalar una cadena aisladora extra que oficia de sujetador adicional para los conductores. Rigidizando y evitando de este modo el balanceo desmesurado. Otro tipo de soluciones implantadas, consiste en agregar pesos sobre puntos estratégicos en las líneas, aumentando la inercia del sistema. En este caso, la elección del peso consiste en un compromiso entre los esfuerzos generados en el cable sin alcanzar la fluencia y la masa que atenúa el balanceo. Este tipo de soluciones paliativas resultan interesantes como objeto de simulación.

Bibliografía

- Abd-Elaal, E.-S., Mills, J. E. y Ma, X. (2013). A coupled parametric-CFD study for determining ages of downbursts through investigation of different field parameters. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 123, 30-42.
- Ahrens, J., Geveci, B. y Law, C. (2005). Paraview: An end-user tool for large data visualization. *The visualization handbook*, 717(8).
- Ahrens, J., Jourdain, S., OLeary, P., Patchett, J., Rogers, D. H. y Petersen, M. (2014). An image-based approach to extreme scale in situ visualization and analysis, En *SC'14: Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*. IEEE.
- Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M. y Paulino, G. H. (2018). Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering Structures*, 173, 283-299.
- Alsafadie, R., Hjiiaj, M. y Battini, J.-M. (2010). Corotational mixed finite element formulation for thin-walled beams with generic cross-section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52), 3197-3212.
- Ang, A. H.-S. y Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering planning and design*.
- Asadi, S. y Johansson, H. (2019). Multibody dynamic modelling of a direct wind turbine drive train. *Wind Engineering*, 0309524X19849827.
- Barzanooni, R., Bog, I. T. y Elhaddad, M. (2018). Modeling of Flexible Wirings and Contact Interactions in Industrial Robots Using Geometrically Exact Beam Formulation.
- Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and Engineering*, 191(17-18), 1755-1789. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00352-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
- Behdinan, K., Stylianou, M. y Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 154(3-4), 151-161.
- Bruno Bazzano, J. y Pérez Zerpa, J. (2017). Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras: texto del curso Análisis No Lineal de Estructuras.
- Cardona, A. y Geradin, M. (1988). A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International journal for numerical methods in engineering*, 26(11), 2403-2438.
- Chabart, O. y Lilien, J.-L. (1998). Galloping of electrical lines in wind tunnel facilities. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 74, 967-976.
- Costello, G. A. (1990). Average Voting Members and Other Benign Fictions: The Relative Reliability of Committee Reports, Floor Debates, and Other Sources of Legislative History. *Duke LJ*, 39.
- Crespo, C. A. M. (2019). *Análisis en la selección de aisladores para una línea de transmisión*. Facultad de ingeniería/ Universidad Autonoma de Mexico.
- Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol. 2*. John Wiley & Sons.
- Darwish, M. M., El Damatty, A. A. y Hangan, H. (2010). Dynamic characteristics of transmission line conductors and behaviour under turbulent downburst loading. *Wind and Structures*, 13(4), 327.
- Davenport, A. G. (1965). *Dynamic Behaviour of Massive Guy Cables*.
- Davenport, A. (1960). *Wind Loads on Structures*. Ottawa, National Research Council, Division of Building Research.
- Desai, Y., Yu, P., Popplewell, N. y Shah, A. (1995). Finite element modelling of transmission line galloping. *Computers & structures*, 57(3), 407-420.
- Descartes, R. (1637). *Discours de la methode*. Leyde.
- Di Pilato, M., Martelli, F. y Martinelli, L. (2008). Corotational Cable Elements to Simulate the Behaviour of Suspended Cables under Wind Loading. *not yet published*.
- Durañona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 184, 128-138.

- Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme wind climate of Uruguay, En *Proceedings of the 14th International Conference on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*.
- Durañona, V. y Cataldo, J. (2009). Analysis of severe storms in Uruguay and their effect on high voltage transmission lines, En *Proceedings of the 11th Americas Conference on Wind Engineering*.
- Durañona, V. y Denis, A. (2018). Bluff and body action, Apuntes del curso Elementos Aerodinámica y Aerolaticdad Estrcutrul. *Montevideo*.
- Eaton, J. W., Bateman, D. y Hauberg, S. (2007). *GNU Octave version 3.0. 1 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. SoHo Books.
- El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).
- Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14), 6451-6467. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063>
- Foti, F. y Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal resonance. *Journal of Vibration and Control*, 24(7), 1322-1340.
- Fujita, T. (1985). The downburst: Microburst and macroburst, SMRP Res. Rep.
- Gani, F. y Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines guyed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 37(3), 450-465.
- Hilber, H. M., Hughes, T. J. y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3), 283-292.
- Holmes, J. D. (2002). A re-analysis of recorded extreme wind speeds in region A. *Australian Journal of Structural Engineering*, 4(1), 29-40.
- Hsiao, K. M., Lin, J. Y. y Lin, W. Y. (1999). A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169(1-2), 1-18.
- Ibrahimbegovic, A. y Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional

- beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(37-38), 4241-4258.
- Ibrahimbegović, A. y Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(5), 781-814.
- Design criteria of overhead transmission lines* (Standard). (2003). International Electrotechnical Commission. Geneva, CH.
- Irvine, H. M. y Caughey, T. K. (1974). The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 341(1626), 299-315. <https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189>
- Irvine, H. M. y Griffin, J. H. (1976). *On the dynamic response of a suspended cable* (Vol. 4). <https://doi.org/10.1002/eqe.4290040406>
- Irvine, M. (1978). Free Vibrations of Inclined Cables. *Journal of the Structural Division*, Vol. 104, 343-347.
- Jones, K. F. (1992). Coupled vertical and horizontal galloping. *Journal of engineering mechanics*, 118(1), 92-107.
- Klöppel H,
L. K. (1942). *Die lotrechten Eigenschwingungen der Hängerbrücken* (23.^a ed., Vol. 23). Bauingenieur.
- Koh, C. G. y Rong, Y. (2004). Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification. *Journal of sound and vibration*, 272(1-2), 187-206.
- Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, 20(2), 101-126.
- Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura economica.
- Kutterer, M. y Starossek, U. (1992). *Dynamic cable stiffness and dynamic interaction between cable and beam* (Tesis doctoral).
- Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiar, M. (2011). Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. *Computational Mechanics*, 48(2), 153-161. <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6>

- Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiar, M. (2014). A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269, 538-565.
- Lee, C. L. y Perkins, N. C. (1992). Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 3(6), 465-490.
- Luongo, A. y Piccardo, G. (1998). Non-linear galloping of sagged cables in 1: 2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5), 915-940.
- Luongo, A., Rega, G. y Vestroni, F. (1984). Planar non-linear free vibrations of an elastic cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19(1), 39-52.
- Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2007). A linear curved-beam model for the analysis of galloping in suspended cables. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2(4), 675-694.
- Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2009). On the effect of twist angle on non-linear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, 87(15-16), 1003-1014.
- Mara, T. G. (2007). *The effects of multi-directional winds on lattice sections* (Tesis doctoral). Faculty of Graduate Studies, University of Western Ontario.
- Martinelli, L. y Perotti, F. (2004). Numerical analysis of the dynamic behavior of cables under turbulent wind, En *Struct. Eng. Mech. & Comput. (SEMC 2004)*, Cape Town, South Africa.
- Martinelli, L. y Perotti, F. (2001). Numerical analysis of the non-linear dynamic behaviour of suspended cables under turbulent wind excitation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1(02), 207-233.
- Mendina, M., Draper, M., Soares, A. P. K., Narancio, G. y Usera, G. (2014). A general purpose parallel block structured open source incompressible flow solver. *Cluster Computing*, 17(2), 231-241.
- Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67-94.
- Nietzsche, F. (2018). *La voluntad de poder*. Edaf.
- Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90248-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5)

- Oke, D. G. (2000). Estimating.
- Oran, C. (1973). Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural Division*, 99(6), 987-1001.
- Pacoste, C. y Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 144(1-2), 163-197.
- Papailiou, K. O. (1997). On the bending stiffness of transmission line conductors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(4), 1576-1583. <https://doi.org/10.1109/61.634178>
- 003
- Pugsley, A. G. (1949). On the natural frequencies of suspension chains. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2(4), 412-418. <https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.412>
- Rankin, C. y Nour-Omid, B. (1988). The use of projectors to improve finite element performance. *Computers & Structures*, 30(1-2), 257-267.
- Rawlins, C. (2005). Flexure of a single-layer tensioned cable at a rigid support. Proc. 6th International Symposium on Cable Dynamics. Charleston (USA). 19-22 Sept.
- Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 149(1-4), 113-132.
- Robert D. Blevins, V. N. R. (1990). Flow induced vibrations. *New York*, 104-110.
- Routh, E. J. Et al. (1955). *Dynamics of a system of rigid bodies*. Dover New York.
- Saxon, D. S. y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended chain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6(3), 273-285. <https://doi.org/10.1093/qjmam/6.3.273>
- Simiu, E. y Scanlan, R. H. (1986). *Wind Effects on Structures*, 3. ed. (second edi). New York, Jhon Wiley; Sons.
- Simo, J. C. y Vu-Quoc, L. (1988). On the dynamics in space of rods undergoing large motions—a geometrically exact approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 66(2), 125-161.
- Starossek, U. (1991). Boundary induced vibration and dynamic stiffness of a sagging cable. http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf

- Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia engineering*, 199, 3152-3157.
- Triantafyllou, M. S. (1984). The dynamics of taut inclined cables. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 37(3), 421-440. <https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421>
- Yan, B., Lin, X., Luo, W., Chen, Z. y Liu, Z. (2009). Numerical study on dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission line under wind load. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 25(1), 248-259.
- Yang, S. y Hong, H. (2016). Nonlinear inelastic responses of transmission tower-line system under downburst wind. *Engineering Structures*, 123, 490-500.
- Zienkiewicz, O. C. y Cheung, Y. (1970). The finite element method in structural and continuum mechanics.

APÉNDICES

Apéndice 1

En este apéndice se presenta el código de la principal función implementada en (ONSAS) donde el autor incorporó los términos dinámicos de fuerzas inerciales y matrices tangentes estudiadas.

```
1 function [ fs, ks, stress, rotData ]= elementBeamForces( ...
2     elemCoords, elemCrossSecParams, elemConstitutiveParams,
3     solutionMethod, Ue, Udote, Udotdote, elemrho ) ;
4
5 elemCoords = elemCoords(:) ;
6 xs         = elemCoords(1:2:end) ;
7
8 booleanCSTangs = 0 ;
9
10 % --- material constit params ---
11 rho = elemrho ;
12 E   = elemConstitutiveParams(2) ;
13 nu  = elemConstitutiveParams(3) ;
14 G   = E/(2*(1+nu)) ;
15
16 % -----
17
18 % --- cross section ---
19 if elemCrossSecParams(1) == 1
20     Area = elemCrossSecParams( 2 ) ;
21     J     = elemCrossSecParams( 3 ) ;
22     Iyy   = elemCrossSecParams( 4 ) ;
23     Izz   = elemCrossSecParams( 5 ) ;
24     %
25     if length( elemCrossSecParams ) > 5
26         Jrho = diag( elemCrossSecParams( 6:8 ) ) ;
27     else
28         Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
29     end
```

```

28 elseif elemCrossSecParams(1) == 2
29     Area = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)      ;
30     Iyy  = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)^3/12 ;
31     Izz  = elemCrossSecParams(3)*elemCrossSecParams(2)^3/12 ;
32     if elemCrossSecParams(2)==elemCrossSecParams(3)
33         J    = 1/3*0.40147*elemCrossSecParams(2)^4 ;
34     else
35         error('rectangular section type not implemented yet,
36         please create an issue')
37     end
38     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
39 elseif elemCrossSecParams(1) == 3
40     diameter = elemCrossSecParams(2) ;
41     Area = pi*diameter^2/4            ;
42     Iyy  = pi*diameter^4/64           ;
43     Izz  = Iyy                        ;
44     J    = Iyy + Izz ;
45     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
46 else
47     error(' section type not implemented yet, please create an
48     issue')
49 end
50 % -----
51 %--- Auxiliar matrices ---
52 I3 = eye(3)      ;
53 O3 = zeros(3)    ;
54 O1 = zeros(1,3)  ;
55
56 permutIndxs = [1:2:5 2:2:6 ([1:2:5]+6) ([2:2:6]+6) ] ;
57
58 dg          = Ue          ( permutIndxs ) ;
59 if solutionMethod > 2
60     ddotg     = Udotg     ( permutIndxs ) ;
61     ddotdotg  = Udotdote( permutIndxs ) ;
62 end
63 % --- Global thetas ---
64 tg1 = dg (4:6);
65 tg2 = dg (10:12);
66
67 %% --- Rotation matrices ---
68 Rg1 = expon( tg1 ) ;

```

```

69 Rg2 = expon( tg2 ) ;
70
71 x21 = xs(4:6) - xs(1:3) ;
72 d21 = dg(7:9) - dg(1:3) ;
73
74 lo = sqrt( ( x21 )' * ( x21 ) ) ; %
75 l  = sqrt( ( x21 + d21 )' * ( x21 + d21 ) ) ; %
76
77 % --- rotation matrix to reference configuration ---
78 Ro = beamRefConfRotMat( x21 ) ;
79
80 % --- rigid rotation ---
81
82 % --- deformed x axis ---
83 e1 = ( x21 + d21 ) / l ;
84
85 q1 = Rg1 * Ro * [0 1 0]' ;
86 q2 = Rg2 * Ro * [0 1 0]' ;
87 q  = ( q1 + q2 ) / 2 ;
88
89 % --- deformed z local axis ---
90 e3 = cross (e1, q) ;
91 e3 = e3 / norm(e3) ;
92
93 % --- deformed y local axis ---
94 e2 = cross (e3, e1);
95
96 % --- rotation matrix ---
97 Rr = [ e1 e2 e3 ] ;
98
99 % --- local displacements ---
100
101 % --- axial displacement ---
102 u  = l - lo;
103
104 % --- local rotations ---
105 Re1 = Rr' * Rg1 * Ro;
106 Re2 = Rr' * Rg2 * Ro;
107
108 t11 = logar( Re1 ) ;
109 t12 = logar( Re2 ) ;
110
111 locDisp = [ u t11' t12' ] ;

```

```

112
113 %% --- local force vector and tangent stiffness matrix ---
114 [f1, k1, strain, stress] = beamLocalStaticForces (u, t11, t12,
115     lo, E, G, Area, Iyy, Izz, J ) ;
116
117 %% transformation to the new local coordinates
118 q = Rr' * q ;
119 q1 = Rr' * q1 ;
120
121 nu = q(1)/q(2);
122 nu11 = q1(1)/q(2);
123 nu12 = q1(2)/q(2);
124 nu21 = 2*nu-nu11;
125 nu22 = 2-nu12;
126
127 De1 = invTs( t11 ) ;
128 De2 = invTs( t12 ) ;
129
130 % --- matrix for transformation between global and relative ---
131 % --- rotations/moments ---
132 H = [ 1 01 01 ; ...
133       01' De1 03 ; ...
134       01' 03 De2 ] ;
135
136 fe = H' * f1 ;
137 Dh1 = dinvTs( t11, f1(2:4) ) * De1 ;
138 Dh2 = dinvTs( t12, f1(5:7) ) * De2 ;
139
140 Kh = [ 0 01 01
141        01' Dh1 03
142        01' 03 Dh2 ] ;
143
144 ke = H' * k1 * H + Kh ;
145
146 % --- transformation to the global coordinates ---
147 r = [ -e1' 01 e1' 01 ]' ;
148
149 B = [ r'
150       -nu/l*e3' (1-nu12/2)*e1'+nu11/2*e2' nu/l*e3' 1/2*(-nu22*e1
151         '+nu21*e2')
152       -e3'/l e2' e3'/l 0 0 0
153       e2'/l e3' -e2'/l 0 0 0

```

```

152 -nu/l*e3' 1/2*(-nu12*e1'+nu11*e2') nu/l*e3' (1-nu22/2)*e1'+
    nu21/2*e2'
153 -e3'/l 0 0 0 e3'/l e2'
154 e2'/l 0 0 0 -e2'/l e3'];
155
156 fg = B' * fe ;
157
158 A = (I3-e1*e1')/l;
159
160 Dr=[A 03 -A 03
161      03 03 03 03
162      -A 03 A 03
163      03 03 03 03];
164
165 G=[0 0 nu/l nu12/2 -nu11/2 0 0 0 -nu/l nu22/2 -
    nu21/2 0
166 0 0 1/l 0 0 0 0 0 -1/l 0
    0 0
167 0 -1/l 0 0 0 0 0 1/l 0 0
    0 0]';
168
169 II=[03 I3 03 03
170      03 03 03 I3];
171
172 P = II - [G'; G'] ;
173
174 F = P' * fe(2:7);
175
176 sF=[skew(F(1:3))
177      skew(F(4:6))
178      skew(F(7:9))
179      skew(F(10:12))];
180
181 EE=[Rr 03 03 03
182      03 Rr 03 03
183      03 03 Rr 03
184      03 03 03 Rr];
185
186 nab=[0
187      (nu*(fe(2)+fe(5))+fe(3)+fe(6))/l
188      (fe(4)+fe(7))/l];
189
190 Kg = B' * ke * B + Dr * fe(1) - EE*sF*G'*EE' + EE*G*nab*r' ;

```

```

191
192
193 %% --- transformation to the new global coordinates ---
194
195 Dg1 = Ts( tg1 ) ;
196 Dg2 = Ts( tg2 ) ;
197
198 q=[fg(1:3)
199     Dg1'*fg(4:6)
200     fg(7:9)
201     Dg2'*fg(10:12)];
202
203 Dk1=dTs(tg1,fg(4:6));
204 Dk2=dTs(tg2,fg(10:12));
205
206 H=[I3 03 03 03
207     03 Dg1 03 03
208     03 03 I3 03
209     03 03 03 Dg2];
210
211 Kt = H' * Kg * H ;
212
213 Kt( 4:6 , 4:6 ) = Kt( 4:6 , 4:6 ) + Dk1 ;
214 Kt(10:12,10:12) = Kt(10:12,10:12) + Dk2 ;
215
216 Kt = (Kt+Kt')/2;
217
218 Finte = zeros(size(q)) ;
219 dofscomb = [ 1:2:5 2:2:6 7:2:11 8:2:12 ] ;
220
221 Finte( dofscomb ) = q ;
222 KTe = zeros( size(Kt));
223
224 KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
225
226 fs = {Finte} ;
227 ks = {KTe};
228
229 rotData = {locDisp, Rr} ;
230
231 if solutionMethod > 2
232 %% ---- interpolation functions ---
233 % --- linear ---

```

```

234 N1 = @(x) 1 -x/lo ;
235 N2 = @(x) x/lo ;
236
237 % --- cubic ---
238 N3 = @(x) x*(1-x/lo)^2 ;
239 N4 = @(x) -(1-x/lo)*(x^2)/lo ;
240 N5 = @(x) (1-3*x/lo)*(1-x/lo) ;
241 N6 = @(x) (3*x/lo-2)*(x/lo) ;
242
243 N7 = @(x) N3(x)+N4(x) ;
244 N8 = @(x) N5(x)+N6(x)-1 ;
245 % -----
246
247 P1 = @(x) [ 0 0 0 0 0 0 ; ...
248             0 0 N3(x) 0 0 N4(x) ; ...
249             0 -N3(x) 0 0 -N4(x) 0 ] ;
250
251 ul = @(x) P1(x) * [ t11; t12 ] ; % Eq. 38
252
253 P2 = @(x) [ N1(x) 0 0 N2(x) 0 0 ; ...
254             0 N5(x) 0 0 N6(x) 0 ; ...
255             0 0 N5(x) 0 0 N6(x) ] ;
256
257 N = @(x) [ N1(x)*I3 03 N2(x)*I3 03 ] ;
258
259 H1 = @(x) N(x) + P1( x ) * P - 1*skew( ul(x) ) * G' ;
260
261 wdoter= G' * EE' * ddotg ; % Eq. 65
262
263 A1 = [ 01 01 01 01 ;
264        0 -1 0 01 0 1 0 01 ;
265        0 0 -1 01 0 0 1 01 ] ;
266
267 udot1 = @(x) P1(x) * P * EE' * ddotg ;
268
269 H1dot = @(x) N7(x)/(1^2)*A1*(r' * ddotg) - skew( udot1(x) )
    * G' ;
270
271 ET = [skew(wdoter) 03 03 03 ;
272       03 skew(wdoter) 03 03 ;
273       03 03 skew(wdoter) 03 ;
274       03 03 03 skew(wdoter) ] ;
275

```

```

276 C1 = @(x) skew(wdoter)*H1(x) + H1dot(x) -H1(x)*ET;
277
278 udot = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotg;
279 udotdot = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotdotg+Rr*C1(x)*EE'*ddotg;
280
281 %% --- Matrix to compute wdot y wdtotdot ---
282
283 H2 = @(x) P2(x)*P+G';
284
285 wdot = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotg;
286
287
288 A2 = [ 01 01 01 01;
289        0 0 1 01 0 0 -1 01;
290        0 -1 0 01 0 1 0 01 ] ;
291
292 H2dot = @(x) N8(x)/l^2*A2*(r'*ddotg) ;
293
294 C2 = @(x) skew(wdoter)*H2(x) + H2dot(x) - H2(x)*ET ;
295
296 wdotdot = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotdotg + Rr*C2(x)*EE'*ddotg ;
297
298 %% --- Tensor dyadc of Intertia ---
299 %compute Rg(x)
300 thethaRoof = @(x) P2(x)*[tl1;tl2] ;
301 Rex = @(x) expon(thethaRoof(x)) ;
302 Rgx = @(x) Rr*Rex(x)*Ro';
303
304 Irho = @(x) Rgx(x)*Ro*(Jrho)*(Rgx(x)*Ro)';
305 Irhoe = @(x) Rr'*Irho(x)*Rr;
306
307 % --- Compute interial force by quadrature ---
308 xIntPoints = [ -sqrt(3/5) 0 sqrt(3/5) ] ;
309 wIntPoints = [ 5/9 8/9 5/9 ] ;
310
311 IntegrandoForce = @(x) H1(x)''*Rr'*Area*rho*udotdot(x) ...
312                        + H2(x)''*Rr'* ...
313                        Irho(x)*wdotdot(x)...
314                        + skew(wdot(x)) * Irho(x) * wdot(x)
315                        ...
316                        ) ;

```



```

317 IntegrandoMassMatrix = @(x) 1*H1(x)'+Area*rho*H1(x)+1*H2(x)'*
    Irhoe(x)*H2(x);
318
319 %% --- Compute C3 and C4 ---
320
321 h1 = @(x) H1(x) * ddotg ;
322 h2 = @(x) H2(x) * ddotg ;
323
324 rElem = [ [-1 0 0]    01    [1 0 0] 01];
325
326 F1      = [skew(udot(0))' skew(wdot(0))' skew(udot(lo))' skew(
    wdot(lo))']';
327
328 C3  = @(x) -skew(h1(x))*G' + (N7(x)/l^2)*A1*(ddotg*rElem)...
    +skew(wdoter)*P1(x)*P + H1(x)*F1*G';
329
330
331 C4  = @(x) -skew(h2(x))*G' + (N8(x)/l^2)*A2*ddotg*rElem + H2(
    x)*F1*G';
332
333 %% --- Compute Gyroscopic Matrix---
334 IntegrandoGyroMatrix = @(x) H2(x)' * ( ( skew(wdoter) *
    Irhoe(x) ) - skew( Irhoe(x) * wdoter) ) * H2(x) ...
335                                + H1(x)' * Area*rho*(C1(x) + C3(x)
    )) + H2(x) '*Irhoe(x)*(C2(x)+C4(x)) ;
336
337 sumForce = zeros (12, 1 ) ;
338 sumGyro  = zeros (12      ) ;
339 sumMass  = zeros (12      ) ;
340
341
342 for ind = 1 : length( xIntPoints )
343     sumForce = sumForce ...
344         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoForce      ( lo/2 *
    (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
345     %
346     sumGyro = sumGyro ...
347         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoGyroMatrix( lo/2 *
    (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
348     %
349     sumMass = sumMass ...
350         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoMassMatrix( lo/2 *
    (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
351 end

```

```

352
353 Fine          = EE * sumForce          ;
354 GyroMatrix = EE * sumGyro * EE' ;
355 MassMatrix = EE * sumMass * EE' ;
356
357 %% --- Add Bt Matrix ---
358
359 Bt=[I3      03      03      03
360     03 inv(Dg1)'    03      03
361     03      03      I3      03
362     03      03      03      inv(Dg2)' ];
363 MassMatrix =MassMatrix*Bt ;
364 GyroMatrix =GyroMatrix*Bt ;
365 %% --- Switch base ---
366 Fine          = Cambio_Base(Fine);
367 GyroMatrix = Cambio_Base(GyroMatrix);
368 MassMatrix = Cambio_Base(MassMatrix);
369
370 fs{3} = Fine ;
371 ks{2} = GyroMatrix ;
372 ks{3} = MassMatrix ;
373
374 end

```

Apéndice 2

En esta sección se exponen las secciones destacadas de la norma internacional *Design criteria of overhead transmission lines*, [2003](#), explicitándose las hipótesis fundamentales y el procedimiento para el diseño de elementos de transmisión eléctrica. También se corroboró efectivamente que la norma estudiada considera exclusivamente vientos tipo CLA.

2.1. Campo de aplicación

El campo de aplicación de la norma está sujeto a los siguientes requerimientos sobre el conductor y el terreno:

- La longitud de vano debe pertenecer al intervalo (200 m, 800 m). Para longitudes fuera de ese rango deben analizarse coeficientes de racha diferentes a los presentados, sin embargo para vanos más largos a 800 m el análisis de la norma resulta sobrestimado.
- Altura de soportes menores a 60 m ya que los soportes de una altura mayor podrían inducir factores de amplificación dinámicos en la respuesta.
- La línea debe estar a una altura menor a los 1300 msnm.
- Los terrenos no pueden tener características topográficas singulares cuyo tamaño y forma puedan afectar las consideraciones respecto al flujo.

2.2. Velocidad de referencia y rugosidad del terreno

Se establecen diferentes tipos de terrenos según las condiciones topográficas del mismo, esto afecta la forma del flujo considerado para el diseño. Para un perfil tipo ley potencial, terrenos más rugosos acentúan el gradiente de la velocidad en la altura de referencia $z = 0$, aumentando la intensidad de turbulencia e incrementando el valor donde el perfil alcanza la atmósfera libre Z_G .

Categoría de terrenos	Características del terreno
A	Largos y estrechos viento de ultramar, área costera llana, llanura desértica.
B	Campo abierto con escasa densidad de obstáculos. áreas cultivadas con pocos árboles y edificios
C	Terreno con numerosos obstáculos pequeños de baja altura (matorrales, árboles y edificios)
D	Áreas sub-urbanas con pequeños arboles

Tabla 2.1: Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826

Considerando un flujo medio plano tipo CLA, una atmósfera neutra y diferentes constantes de terreno α , entonces la velocidad media en altura $v(z)$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$V(z) = V_G \left(\frac{z}{z_G} \right)^\alpha \quad (2.1)$$

Medidas de velocidad utilizando artefactos, como anemómetros o sensores de ultra sonido, permiten obtener para un determinado periodo de adquisición de datos, valores de velocidad media e intensidad de turbulencia. Es por esto, que es clave relacionar la velocidad a diferentes alturas y para cambios de terreno a lo largo del sentido del flujo. Definiendo V_{ref} como la velocidad media del viento a una altura de $z = 10$ m para un tipo de terreno categoría B y llamando a dos puntos a diferentes alturas 1 y 2, es posible relacionar su velocidad media según:

$$V(z) = V_{ref1} \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2}. \quad (2.2)$$

En la Ecuación (2.2) se introduce un factor K_R el cual permite obtener la relación entre las velocidades de referencia para distintos terrenos $V_{rX} =$

$K_R V_{rB}$. En la Tabla 2.2 las diferentes alturas de rugosidad media de obstáculos z_0 .

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_0(m)$	0.01	0.05	0.30	1.00
α	0.1 a 0.12	0.16	0.22	0.28
K_R	1.08	1.00	0.85	0.67

Tabla 2.2: Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.

En los datos presentados en la Tabla 2.2, los valores de α se asemejan con lo presentado por A. Davenport, 1960, para la categoría A y B el número de α considerado por la norma es menor, esto se fundamenta en que valores menores de α , es decir terrenos menos rugosos, inducen una velocidad mayor para la misma cota. En el caso de la categoría C y D el valor es exactamente idéntico a lo propuesto en (A. Davenport, 1960). De igual forma el término z_0 se condice con la Tabla publicada en (Oke, 2000).

Desglosando el factor K_R para dos puntos de referencia, colocados a una cota de $z_{ref1} = z_{ref2} = 10$ m en función de la Ecuación (2.2) y combinándola con la definición de K_r se obtiene la siguiente expresión:

$$V_{ref2}(10m) = V_{ref1} \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \rightarrow K_r = \left(\frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \quad (2.3)$$

Sustituyendo la Ecuación 2.3 y considerando los valores de Z_G según la referencia (Oke, 2000) se expresan los resultados obtenidos: l

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_G(m)$	250	305	365	410
α	0.12	0.15	0.22	0.28
K_R	1.13	1.00	0.77	0.61

Tabla 2.3: Tabla de factores para terrenos según referencia A. Davenport, 1960

Estos coinciden con un error menor al 8 % con los estipulados por la norma en la Tabla 2.2. Lo que comprueba que efectivamente para estimar las velocidades se considera un viento tipo CLA.

Apéndice 3

Reflexiones del autor

Síntesis de formación

El desarrollo de este trabajo constituyó una instancia de formación fundamental y enriquecedora enmarcada dentro del programa de Maestría en Ingeniería Estructural. Este documento es la síntesis y aplicación de un conjunto de conocimientos profundizados durante la actividad programada, aplicada al modelado numérico de estructuras. La creación de herramientas endógenas con foco en atacar problemáticas a nivel nacional constituye un pilar fundamental en el desarrollo autónomo y original de la ingeniería uruguaya. Este trabajo es una muestra de la convicción y determinación, que el conocimiento académico, debe desarrollarse de forma transparente, comunitaria y democrática. Es por esto, que todos los códigos utilizados en esta investigación se implementaron en la herramienta de software libre [ONSAS](#). Esto abre la posibilidad a cualquier tercero, ya sea una organización o persona, de estudiar, modificar y difundir los códigos creados como también aplicarlos a sus propias necesidades.

Episteme del sujeto

Antes que nada, es necesario realizar una arqueología de las palabras sujeto y fenómeno en castellano. Sujeto en latín *sub-iectum* significa lo que está debajo, según una interpretación posmoderna. Desde esta perspectiva, es el sujeto el sustrato de cualquier ente, que lo dota de sustancia, colores, palabras y formas. Por otra parte, fenómeno tiene una raíz etimológica en la palabra *phainomenon* al igual que la palabra fantasía. Esto alude a lo que se muestra, lo que se deja ver, lo que brilla. Ahora bien, en el acto de percibir cogniti-

vamente existe una dirección previa (inconsciente o consciente) de apuntar el foco hacia algo, entonces ¿Quién y cómo se dirige ese foco?

Toda disciplina e investigación debería conocer sus propias fugas, fronteras y puntos ciegos. De lo contrario, cualquier pretensión hermética podría ser un síntoma de arrogancia y altanería. A lo largo de este trabajo, he canonizado una redacción en tercera persona, como si existiese una determinada imparcialidad y transparencia en dicho escritor. O quizás una búsqueda con necedad de la verdad absoluta. Este sujeto, apuntado y enfocado en los párrafos siguientes, merece ensimismarse y cuestionarse a sí mismo, según el proverbio en templo de Apolo del Oráculo de Delfos, *gnóthi sautón* o en castellano *Conócete a ti mismo*.

Durante el transcurso de este trabajo me surgieron las siguientes inquietudes ¿Es la realidad un conjunto de fenómenos externos o es siempre un acto de interpretación inmanente al sujeto? Además, ¿Ese sujeto accede la realidad (el objeto) a través de la razón para conocer y explicarla, o simplemente la experiencia es quien valida ese conjunto de fenómenos? A partir de esta pregunta, emana una interrogante natural, ¿Es posible entonces, desligar al sujeto del objeto, o más bien este ente (ex-siste) en el mundo, y está siempre arrojado, lanzado y en relación con el? Y de ser así, ¿No se encuentra entonces **ya** sugestionado por el paradigma actual, su cultura nativa y sus experiencias personales cuando describe?

Esas preguntas han sido abordadas por eminencias de la filosofía y la ciencia, desde la modernidad hasta hoy. Por un lado, el realismo científico concibe que es posible constatar la realidad a través de la experiencia o a través del pensamiento. Para Descartes ese sujeto duda, piensa y por tanto **ya** en ese acto analítico, existe (*Cogito ergo sum*) Descartes, 1637, ósea el ente en tanto ente. El padre del racionalismo nos plantea que es el yo del sujeto, quien a través de la duda metódica puede acceder la verdad. Contrapuesto a este, el empirismo valida cualquier conocimiento sólo por la experiencia. Esta se define por lo que es captado por nuestros sentidos, es decir que la experiencia es sensorial. Estas dos posturas, la del racionalismo de Descartes y la del empirismo de Hume, pueden ser pensadas como una forma de abordaje a la relación realidad - conocimiento. Para Descartes: conozco en tanto analizo y pienso, y los objetos existen cuando yo realizo la abstracción. Para el empirismo: conozco en la medida en que incorporo la realidad “objetiva”, la de los objetos que puedo percibir a través de los sentidos.

A mediados del sg XIX nació un pensador disruptivo que viró absolutamente a la cuestión. Frederick Nietzsche plantea en su libro *Voluntad de Poder* Nietzsche, 2018 “ El pensar no es para nosotros un medio para “conocer” sino para designar el acontecer, para ordenarlo, para volverlo manejable para nuestro uso: así pensamos hoy acerca del pensar: mañana quizá de otro modo ”. Esta frase alude, desde mi voz de hoy, a un nihilismo que niega la posibilidad de conocer algo absoluto verdadero pues no es más que un desarrollo pragmático de poder. Es una cuestión de voluntad de voluntad, un dispositivo ordenador de la realidad según categorías y características en nuestro acto de querer/-poder conocer. Antípoda a esta teoría nihilista aparece el relativismo. Este se estriba en el principio de incertidumbre Heisenberg, si existe ese conocimiento, es entonces indisoluble de cierta estructura. Thomas Kuhn en su libro *La estructura de las revoluciones científicas* Kuhn, 2019 plantea que el método científico revoluciona, cuando se produce un cambio de paradigma, no a partir de la observación de nuevos hechos o fenómenos. Junto con otros destacados sociólogos, acuñan la idea del concepto de “cargado de teoría”, un cierto conjunto de preconceitos anteriores a la observación, descripción y desarrollo de la cualquier investigación, que llevarán al científico demostrar lo que realmente quiere demostrar... de nuevo demostración de poder.

¿Como se demuestran los resultados de esta investigación?, construyendo un conjunto de artefactos experimentales/computacionales que constatan una supuesta realidad casi como un espejo, por correspondencia. En ese proceso de creación o utilización de instrumentos como ser: un programa, un anemómetro o un código computacional existe una omnipresente intervención humana. ¿Vale entonces seguir redactando en tercera persona desde un objetivismo positivista heredado de hace dos siglos? ¿Es coherente no ser impersonal la descripción de un resultado, cuando **ya** todo el dispositivo ordenador que subyace es una construcción humana? ¿Debemos seguir defendiendo un cadáver **ya** asesinado por las ciencias humanas, desde un **sujeto que no es más que un efecto** cultural, histórico y económico?. ¿Por una ciencia que tenga conciencia de sus puntos ciegos, por una ciencia con conciencia de que la verdad absoluta ha muerto, por una ciencia construida por personas en primera persona!