Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural
Instituto de Estructuras y Transporte
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Marzo de 2021

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:
Dr. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:
D.Sc. Prof. Gabriel Usera

Montevideo – Uruguay
Marzo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte, 2021.

XIV, 93 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

1 Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 87 – 93.

1. Elementos de viga corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Cables de alta tensión, 5. Transmisión electrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estrucutral Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

D.Sc. Prof. Gonzalo Cetrángolo

M.Sc. Prof. Bruno Bazzano

D.Sc. Prof. Marcelo Forets

Montevideo – Uruguay
Marzo de 2021

1

(Dedicatoria) A alguien cuyo
valor es digno de ella.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a...

(Epígrafe:) *Frase que alude al tema de trabajo.*

1

Autor

RESUMEN

En esta tesis se presenta...

Palabras claves:
Elementos de viga corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica estructural, Cables de alta tensión, Transmisión electrica.

ABSTRACT

In this work, we present ...

Keyword:

Lista de figuras

Lista de tablas

Tabla de contenidos

Capítulo 1

Introducción

1.0.1. Motivación

Debido a las condiciones climáticas especificas del territorio uruguayo. Se produce una atmósfera inestable provocada por el choque de masas de aire calientes, originadas en los trópicos, y corrientes de aires fríos que migran desde el polo. Esta eminente peligro produce vientos extremos no sinópticos sumamente violentos y destructivos. Un trágico evento se sucedió el 10 de marzo de 2002 cuando una tormenta convectiva afecto un área de alderredor 6500 km^2 en el sur del país "El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay)", s.f. En el norte de Montevideo los anemómetros capturaron velocidades de ráfaga de 34 m/s y de acuerdo con el nivel daño causado se, en determiandos puntos podría haber superado los 56 m/s. Fue tal el nivel de devastación que causó el colapso de 19 torres de trasmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV, además de unos 700 edificios y 1250 techos de hogares que fueron destruidos (Durañona, 2015). No solo afecto a las construcciones sino también muchos productores rurales y sus estancias productivas derribando invernaderos, montes y plantaciones. El costo de reparación de las torres es estimo en 2 millones de dolares y en simultaneo se gastaron unos 10 millones de dolares destinados para suplir la red con energía geotérmica proveniente de combustibles fósiles . En total los daños fueron costeados con un presupuesto de unos 27 millones de dolares Duranona et al. 2019.

Las líneas de trasmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por eventos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados. Estos eventos pueden provocar su desconexión, con consecuencias potencialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de salida en servicio por esta causa en una de las principales líneas de Uruguay (Palmar-Montevideo). Este tipo de fenómenos inducen fuertes movimientos en los cables, provocando un balanceo excesivo de los mismos. Estas amplitudes desmesuradas implican vulneraciones en la aislación del sistema, al aproximar sus cadenas de aisladores a las torres. Produciéndose descargas a tierra e indeseables interrupciones del suministro que han afectado a la capital durante varias horas. El modelado estructural de vientos severos sobre líneas de transmisión eléctrica ha sido abordado por la comunidad científica internacional desde diversas ópticas a lo largo de las últimas cuatro décadas. Se han presentado modelos semi-analíticos, análisis experimentales en túneles de viento y en campo más recientemente en modelos numéricos.

Esto plantea la necesidad de contar con herramientas complementarias que sean capaces de emular la respuesta de estos sistemas ante perfiles de viento no sinópticos. Este es el principal objetivo de este trabajo, profundizar en la bibliografía para el modelado estructural de conductores y crear un modelo robusto, consistente capaz de simular lineas de trasmisión eléctrica ante vientos los medidos experimentalmente en Stengel y Thiele, 2017.

1.0.2. Enfoque

Numerosos autores de la literatura han acuñado sus investigaciones en elementos multinodales de barras como ser: Desai et al. 1995, Yan et al. 2009 y los trabajos Gani y Légeron, 2010 Yang y Hong, 2016. No obstante, debido a la inherente rigidez a flexión en el comportamiento estructural del cable deben considerarse vigas tridimensionales. Por otra parte, los grandes desplazamientos y rotaciones que se presentan durante las trayectorias en tormentas, conducen a implementar un modelo de vigas apto para este tipo de solicitaciones. El abordaje corrotacional es propicio para este tipo de aplicaciones, pues desde su base matemática, se construye desacoplando la deformación local con deformaciones cinemáticas de cuerpo rígido para grandes amplitudes. Estas es el atractivo fundamental de la propuesta corrotacional, su versatilidad ante diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente.

El campo de la metodología corrotacional es muy amplio, pero debido a la claridad y contemporaneidad en el desarrollo de sus publicaciones, se eligió un grupo de investigadores específicos. En (Le et al. 2011) se publicó una formulación para vigas 2D, en conjunción con la parte estática desarrollada por el Dr. Jean Marc Battini en (Battini y Pacoste, 2002). La extensión dinámica de este último, devino en el artículo (“A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014) que se implementó en esta tesis. Lo innovador y atractivo se centra en el desarrollo analítico consistente no solo para los términos estáticos sino también dinámicos. Además en comparación con otras formulaciones se obtienen resultados certeros y confiables con un menor numero de elementos, ventaja principal para modelar grandes dominios como en el caso de lineas de alta tensión.

Debido a las ventajas mencionas, esta metodología es implementada en diversos campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo es un atractivo importante que la hace aplicable en vastos campos de la ingeniería entre otras: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos. En particular la formulación (“A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014) ha sido aplicado en trabajos recientes en el área de ingeniera marina, robótica y civil en (Albino et al. 2018), Asadi y Johansson, 2019 y Viana et al. 2020. Esto evidencia que la metodología es potente para diversos campos de estudio. No obstante, según el conocimiento del autor, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución de problemas dinámicos. Asimismo esta no ha sido aplicada conductores sometidos a vientos extremos donde se desarrollan grandes amplitudes en distancias de centenas de metros.

En la temática específica de conductores, la tesis del autor Foti (2013) destaca por su publicación detallada utilizando elementos corrotacionales de vigas 3D. Estudios experimentales mostraban discordancias respecto al modelo, debido a dos factores, las actualizaciones angulares mediante aproximaciones incrementares y el comportamiento inmanente del sistema. En trabajos posteriores del mismo autor, se corrigen las limitaciones y modelan los deslizamientos internos de las hebras y su histéresis sobre el fenómeno Foti y Martinelli (2018). La aplicación de estos modelos sometidos ante tormentas conectivas aun es una interrogante. Y también así el perjuicio de las mismas sobre la continuidad e integridad del servicio.

1.0.3. Estructura

Este documento consta de cinco capítulos: Introducción, Estado del arte, Preliminares, Resultados Numéricos y Conclusiones. Inicialmente en el Capítulo 2 se realiza un recorrido histórico por la bibliografía consultada en materia de simulaciones aplicadas a conductores eléctricos, con un enfoque computacional y semi analítico. También se narran los diferentes estudios locales e internacionales sobre vientos extremos para concluir en un tour dentro del abordaje corrotacional. Continuamente en el Capítulo 3, con el objetivo de acercar la metodología corrotacional al lector, se presenta someramente una descripción simplificada, según lo propuesto por la bibliografía principal “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures” (2014). Una vez presentada dicha formulación, se despliega la metodología utilizada para esta investigación en el Capítulo 4. Aquí se detallan las hipótesis fundamentales del modelado estructural y de viento, explicándose las condiciones de borde impuestas y un análisis sobre el amortiguamiento aerodinámico considerado. En este mismo capítulo, se despliega la implementación del algoritmo numérico utilizado y las estructuras de pseudocódigo referentes a los principales scripts de la implementación computacional en el software [1]ONSAS.

Posteriormente, se resuelven tres aplicaciones numéricas en el Capítulo 5. La primera de ellas persigue el objetivo de validar numericamente la implantación. Este ejemplo es un modelo clásico en la literatura corrotacional donde se observan resultados acordes en contraste con los presentados en “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014. De manera subsiguiente, se modela un ejemplo presentado por el autor Luca Foti en Foti y Martinelli, 2016. Este consiste en un conductor eléctrico sometido a una carga artificial, extraída de un viento tipo capa límite atmosférica. Por último, se presenta un problema complejo de dos vanos consecutivos, compuesto por tres torres modeladas con elementos de barra tipo Green y seis conductores por elementos de viga corrotacional. El sistema de trasmisión eléctrica, con geometrías y propiedades reales, es atacado por un perfil de viento capturado durante una corriente descendente en el norte de Alemania por Stengel y Thiele, 2017. Finalmente en 6 se sintetizan los principales resultados enriquecedores de este trabajo, además de plasmarse eventuales trabajos a futuro, con lineamientos para profunidzar en la temática

[1]https://github.com/ONSAS/ONSAS/

y sus posibles aplicaciones en el mercado de distribución eléctrica.

Capítulo 2

Estado del arte

Este capítulo incluye la revisión de la literatura, de los enfoques, teorías o conceptos pertinentes en que se fundamenta la investigación. Primeramente en la Sección 2.1 se presenta un relato cronológico del estudio de los cables desde el crepúsculo del Siglo XVIII. A continuación en la Sección 2.2 se expone un recorrido a partir de los años 60's vinculado a simulaciones aplicadas a conductores de alta tensión. Consecutivamente en la Sección 2.3 se describen los fenómenos de corrientes descendentes que afectan las líneas a partir de trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas y otros fenómenos de viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades aeroelásticas numerosos trabajos han estudiado dicha temática y un breve recorrido por ellos se presenta en el apartado 2.4. Por último, en la Sección 2.5 se recorre la metodología corrotacional y los principales autores que desarrollaron esta formulación.

2.1. Historia de la temática

El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena del libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el 1657 revolucionó el conocimiento científico en occidente, tal es así que un siglo y medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino en la aplicación de las principales invenciones de la revolución industrial.

El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas de la época, Brook Taylor,d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al sistema masa resorte en los albores del siglo XVII (Starossek, 1991).

Haciendo uso del problema abstracto elemental del oscilador masa resorte en 1788 Lagrange y otros autores anteriores, hallaron la solución para las vibraciones de un cable inextensible compuesto de un número finito de elementos, de masa despreciable, sometido a la acción de fuerzas externas. Posteriormente, Poisson en 1820 presentó la ecuación diferencial que debería de cumplir el sistema en el continuo, sin embargo las herramientas matemáticas analíticas desarrolladas hasta la fecha no permitían de hallar la solución general a dicha ecuación.(H. M. Irvine y Caughey, 1974)

No fue hasta 80 años mas tarde que en 1868 Routh presentó una solución exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva que describe un punto sobre una esfera girando a velocidad angular constante) Routh et al. 1955. En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del cable, el primero en su época fue Kloppel y Lie (Klöppel y H., 1942), a partir de esto Pugsley en 1949 determinó experimentalmente, para una relación entre la deflexión y el largo de vano entre 4 y 10 metros, desarrolló una fórmula para las frecuencias naturales de vibración (Pugsley, 1949). En 1953 considerando un cable inextensible Saxon y Cahn resolvieron la expresión teórica, formulada por Poisson, de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue vital, ya que permitía calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos torres Saxon y Cahn, 1953.

Tal es así que seguridad de las personas e integridad de los distintos elementos circundantes imprimen criterios de seguridad sobre el descenso de la línea. Actualmente la tensión del conductor durante el montaje, se ajusta de manera tal, que la altura mínima respete un valor exigido por norma. Esta imposición depende principalmente del grado de urbanización, los umbrales de contaminación magnética y la topografía del terreno.

A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los de un sistema masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. En el año 1974 H. M. Irvine y Caughey, 1974 halló el rango transitorio entre ambos estados, para corregir dicha discontinuidad se requiere una inclusión completa del modelo de elasticidad del cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables horizontales (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio deflexión-largo del vano entre 1/8 y 0. El mismo autor Irivine extendió lo postulado para conductores con extremos desnivelados, aun bajo la hipótesis de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor (H. M. Irvine y Caughey, 1974).

A posteriori, el mismo investigador profundizó sobre la dinámica con extremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movimiento tipo terremoto (H. M. Irvine y Griffin, 1976) y (M. Irvine, 1978). La teoría postulada por Irvine fue confirmada por Triafani en 1984 para distintos casos experimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando en cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al movimiento Triantafyllou, 1984.

Autores contemporáneos estudiaron en simultaneo condiciones de borde dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de solicitaciones pueden inducir vibraciones y respuestas de resonancia. Los pioneros en la materia fueron Davenport y Steels ((Davenport, 1965)) en 1965. Resultados más refinados se obtienen por Starossek (Starossek, 1991) . En estas se exponen formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los cables sometidos a la acción del viento, mas estos trabajos no se desarrollan contemplando grandes desplazamientos ni tampoco se consideró no linealidad material.

Ese tipo de solicitaciones revelaron el fenómeno de “Galloping”, este refiere a una respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del cable entra en régimen y en consonancia con las fuezas ejercidas por el viento. Teoricamente las geometrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de fenómenos. Sin embargo, debido a la existencia de imperfecciones constrictivas y durante el montaje, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte de energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respuesta se realizaron por Simu, quienes hallaron condiciones de velocidad crítica eólica en función de coeficientes experimentales, obtenidos mediante ensayos consumados en túnel de viento. (Simiu y Scanlan, 1986)

Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al problema de conductores eléctricos. El advenimiento del Método de Elementos Finitos (MEF) aplicado a armaduras en la década del 40 y 50 constituyó una herramienta sumamente potente e innovadora. Esto provocó que en los años venideros se desarrollaran vastas metodologías numéricas incorporando diferentes elementos y algorítmos de resolución computacional. En particular, en Italia un grupo de investigadores pertenecientes a La Universidad de Milan, aplicaron métodos numéricos a la simulación de conductores insoslayables. Un recorrido cronológico y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos científicos se presenta a continuación en la Sección 2.2.

2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de trasmisión eléctrica

Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo por Di Pilatto y Martinelli estaban basados en elementos trinodales isoparamétricos. En esta metodología se asumió las hipótesis de pequeñas deformaciones unitarias, considerandose para el desarrollo no linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, este tipo de modelos presenta la debilidad de no satisfacer las condición de equilibrio dinámico para específicos tipos de balanceo.(Martinelli y Perotti, 2001 y Martinelli y Perotti, 2004). En consonancia, estudios contemporáneos evidenciaban que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que despreciar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predicciones erróneas sobre las frecuencias naturales de mayor orden. Tal y como se remarca en Koh y Rong, 2004.

Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007. En este trabajo el cable se modelaba utilizando abordajes corrotacionales. Di Pillato presentó una formulación considerando elementos de viga tridimensionales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e inerciales teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones en coordenadas globales. Sin embargo, esta formulación basada en lo propuesto por (Oran, 1973) tiene como desventaja principal que no es fiable ante grandes rotaciones locales de los nodos, como también, antes significativos incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente para capturar dinámicas complejas resulta necesario e ineludible discretizar el dominio temporal y especial pequeños intervalos. Lo que conlleva a costos computacionales desmedidos.

El mismo autor y su equipo corrigieron las limitaciones relacionadas con los pequeñas rotaciones nodales al año siguiente en su trabajo: Di Pilato et al. 2008.La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la configuración deformada utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco el impedimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga, se resuelve aplicando la metodología propuesta Simo and Vu-Quoc en Simo y Vu-Quoc, 1988.

Conforme las simulaciones numéricas avanzaron sobre la materia, la especificación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó. Otro aspecto impulsor en el área se basaba en que los resultados experimentales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos sobre el comportamiento no holomónico del fenómeno. Esto refiere a un modeló realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha temática fueron Papailou y Kutterer en sus trabajos de la década del noventa Papailiou, 1997 y Kutterer y Starossek, 1992.

Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos escenarios, "full slip"donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas. El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre de "full stick". En esta situación el conjunto se comporta como un rígido, he aquí la razón de su nomenclatura. En Papailiou, 1997 se establece la tensión máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. Estos resultados fueron contrastados con un análisis experimental.

Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones se traducen en momentos y fuerzas internas a cada cable que conforma al conductor. Estas se pueden vincular a la curvatura o deformación axial del conjunto. A partir de esto, se obtiene la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y momentos internos en función de la deformación y curvatura del conductor.

Esta matriz depende del estado en que se encuentre la dinámica del cable. Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen "full slip.º "full-sitck"la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso "full-stickçuando ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el conductor, la matriz de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente no se le puede atribuir un potencial, esto se asocia al comportamiento no holomónico o histéresis del fenómeno. En dicho estado un modelo de viga uniforme no es aplicable.

Con el propósito de desatollar una formulación que sea capaz de representar el fenómeno computacionalmente se publicó el articulo Foti y Martinelli, 2016. Aquí se implementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuerzas tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter simplificadoras son estudiadas en Costello, 1990 y Rawlins, 2005. Para el estudio de a los contactos radiales se asume: las superficies de contacto no se deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de contacto entre cables se pueden aproximar por una linea continua, la fricción entre los cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último que la presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjunto con la condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores limites para la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado sobre la pérdida de rigidez súbita que ocurre con el conductor, al producirse deslizamiento relativo al interior del elemento. Esta disminución abrupta de rigidez puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga, esto puede intensificar o agudizar la problemática de balanceos excesivos. Estos movimientos son inminentes para determinadas condiciones atmosféricas, entre ellos las tormentas conectivas. Estas corrientes descendentes han sido objeto de estudio en los últimos 50 años por expertos en ingeniería del viento. En la siguiente Sección se presenta una somera descripción de la literatura investigada.

2.3. Tormentas convectivas

Las tormentas convectivas son fenómenos atmosféricos que generan inestabilidades en el flujo debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad. Cuando estas se ocasionan, masas de aire caliente ascienden hasta la parte superior de la nube, quedando depositado como una especie de domo o cúpula al interior de la misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al interior de la tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodeaba por debajo. Esta corriente desciende a velocidades intensas e impacta con vehemencia sobre la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de anillo vorticoso que puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h Fujita (1985). En este trabajo se establecen escalas espaciales entre 40 m y 4 km. No obstante recientes estudios plantean que se explayan en un diámetro entre 1 y 5 km Darwish et al. (2010).

Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de trasmisión eléctrica, ciertas normativas se estriban en perfiles de vientos clásicos (sinópticos)tipo capa límite atmosférica. Esto se traduce en una subestimación de las presiones que se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma IEC 60826. Esto pone en riesgo al sistema es atacado por tornados o corrientes descendentes. La probabilidad de ocurrencia es baja para dominios de corta longitud, pero cuando las lineas discurren largas distancias estos vientos extremos suelen suceder esporádicamente Ang y Tang (1984).

La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de daños vinculado a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores contemporáneos el diámetro de desarrollo del anillo se encuentra intrínsecamente relacionadas con dicha altura Holmes (2002), Abd-Elaal et al. 2013. Complementando a esto, Stengel y Thiele (2017) en Alemania capturó este fenómenos utilizando anemómetros colocados en lineas de trasmisión. Esto permitió establecer un perfil de velocidades media y la función de coherencia relacionada con la turbulencia a partir de datos experimentales. De este artículo se extrajo el perfil de vientos implementado en este trabajo.

En nuestro país investigadores integrantes del Grupo de Eolo Dinámica perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante tormentas conectivas trabajo de campo exhaustivo. El primer informe relevado en el articulo Durañona y Cataldo, 2009 se realiza un calculo del angulo de balanceo, simplificando cauasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio de la fuerza de viento por unidad de peso. En este trabajo se mostró que para valores de velocidad de viento de 97.9 m/s el conductor alcanza los 85º.

Dados los alarmantes resultados de Durañona y Cataldo, 2009 posteriormente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha en el trabajo (Durañona, 2015). En este estudio se atisba que fenómenos de corrientes descendentes producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minuto que los vientos tipo capa límite atmosférica. El valor máximo de velocidad registrado alcanzó los 40 m/s en promedio de 10 minutos. En el año 2019, este grupo de investigadores presentó un trabajo relevante donde se resalta que los vientos extremos afecta principalmente al norte del país Duranona et al. (2019). En este se sugiere que la norma (UNIT:50-84, 1984) debe ser actualizada incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos no sinópticos. Pero los eventos de vientos extremos no son los únicos que afectan a los conductores, también pueden ocurrir inestabilidades estructurales inherentes a interacción entre fluido-estructura.

2.4. Análisis semi-analíticos de conductores

Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pueden experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud, principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente estudiada por distintos autores de la literatura. Como por ejemplo Blevins y Vibrations, 1990, Jones, 1992. Para vigas de gran esbeltez, o elementos de cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto lineales como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o dos grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consisten en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal y verificar estos resultados en la práctica. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática destaca el trabajo Chabart y Lilien (1998), en este se propuso una aproximación innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser: la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en la fuerza lift ante la presencia de excentricidades geométricas.

El fenómeno Galloping presenta las frecuencias del movimiento excesivo suelen ser bajas y son exuberantes a simple vista. Este fenónmeno devastador tiene consecuencias severas sobre todo en lineas que se encuentran en clímas gélidos, recientemente en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur de Argentina y las imágenes son impactantes (Ver vídeo). La principal causa del fenómeno es el ataque de vientos intensos y constantes. La presencia de irregularidades geométricas en las lineas induce inestabilidades aerodinámicas y cuanto mayor sea la cantidad y discontinuidad de las excentricidades más aguda será la respuesta inducida. Las velocidades requeridas de viento suelen ser mayor a 7 m/s y las frecuencias de respuesta del conductor suelen oscilar entre los 0.15 y 1 Hz.

Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente aproximación de las lineas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separadores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, si los relativos entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elementos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en inglés (Torsional Damper Detuner) gira relativo al conductor anulando las formas irregulares producto de la formación de hielo.

En el artículo Jones, 1992 se halló la solución a la ecuación de movimiento, despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los autovalores que permiten detectar analíticamente bajo que condiciones del sistema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente mayor a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos e indeseables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje vertical. Esto amenaza la seguridad y fiabilidad del sistema ya que esta componente, es limitada durante la instalación a través de cálculos estáticos. Al generarse desplazamiento dinámicos desmedidos, ya no hay garantías de salvaguardar la salud de las personas y los componentes cercanos.

Los estudios de Jones y Blevins, se fraguaban en premisas de linealidad geométrica. Sin embargo, autores han destacado que las efectos no lineales juegan un rol importante en el desarrollo, como ser: las referencias Luongo et al. 1984 y Lee y Perkins, 1992. En el trabajo propuesto por Lee se incluyen componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento del conductor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un modelo lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y tercer orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numericamente la ecuación diferencial del movimiento.

Esta problemática fue abordada unos años mas tarde, por el trabajo publicado Luongo y Piccardo, 1998. En este artículo se hallaron las soluciones no lineales de resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se contrastaron dos soluciones arrojadas por disimiles modelos, uno de pequeños desplazamientos y otro incorporando no linealidades geométricas. En este trabajo se distinguen dos régimes del movimiento, el primero de ellos nominado crítico refiere a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos no presetan gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayectorias se amplifican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se concluye que la solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable para valores de velocidad media de viento correspondiente al estado crítico.

Posteriormente al incrementar la velocidad de viento y se desata el fenómeno post-crítico y el incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible para representar cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles simétricos, la velocidad crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis lineal.

Según los autores del trabajo Luongo et al. 2007, hasta la fecha de publicación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos aplicados eran exiguos, en espacial para el régimen post-critico del Galloping. Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de angulo de ataque y velocidad relativa entre el conductor y del fuljo. Además eran despreciadas las rigideces a torsión del los elementos, estos se debe a que la rigidez según el eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez felxional, principalmente por un argumento de esbeltez y disposición geométrica del conductor de estudio.

El propósito de Luongo et al. 2007 fue proponer un elemento de viga orientado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este a torsión. Estos términos representan diferencias notorias para secciones antisimétricas en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados numéricos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el objetivo de hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró, que el ángulo de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones críticas del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuenta los modos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la inclusión del angulo puede influir significativamente en el valor de velocidades críticas aeroelásticas.

A psoterirí, en el trabajo Luongo et al. 2009 se profundizó en los efectos del angulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como destacado resultado, se probo que mientras la rigidez de torsional no afecta significativamente los desplazamientos traslacionales, en cortaste si lo hace a la solución del angulo de giro. En especial para perfiles sin simetría de revolución. La consideración del balanceo en el lift y en el ángulo de ataque, afecta notoriamente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades de la sección aerodinámica y por tanto su velocidades críticas. Por ende, se resalta la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas para el modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

2.5. Análisis corrotacional de vigas

Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplicaciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos y terrestres. A pesar de las formulaciones " Updated "(UL) y "Total Lagrangian"(TL) clásicas, dentro de estas últimas el abordaje corrotacional es idóneo para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamientos den servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de Nour-Omid y Rankin, 1991 quienes sentaron las bases del método.

Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente considerándolo como un rígido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario que permite localizar al elemento en el espacio.Mientras que 0para la componente deformable se considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo sistema de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente. Además, destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento representa términos de no linealidades geométricas mientras que la deformables incorpora no linealidad materiales.

El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La variación de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a esta propiedad anti-simétrica, esta característica depende principalmente del des-balanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al resolver el sistema mediante métodos numéricos como Newton Raphson(N-R). Los autores Nour-Omid y Rankin, 1991 con el objetivo de optimizar el método, demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de convergencia cuadrático.

Debido a voluble capacidad de la metodología corrotacional, en los años posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de elementos y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron al considerar funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentrada y elementos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener de manera sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inerciales. Como habrá notado el sagaz lector, este cálculo conduce ineludiblemente a la matriz de masa constante de Timoshenko. Por otra parte, interpolaciones lineales asumen que los desplazamientos transversales al eje de la viga son nulos, esta hipótesis reduce el campo de aplicación del modelo, en especial para mallas de bajo numero de elementos, ya que la matriz de masa tangente y el vector de fuerzas inerciales no representan las componentes omitidas.

En la referencia De Borst et al. 2012 se sugiere que el proceso de obtención requerido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado intrincado, debido a su grado de complejidad geométrico. El autor propone utilizar funciones de interpretación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al elemento de Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan controversiales a la hora de derivar el vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consideró un modelo simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones cúbicas para el vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una matriz de masa constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero numéricamente eficiente. Esta forma de proceder también se aplico en Pacoste y Eriksson, 1997.

En paralelo otros autores, desarrollaron eficientes elementos de viga bidimensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar estructuras en grandes desplazamientos bajo cargas estáticas (Battini y Pacoste, 2002 Alsafadie et al. 2010). Estos autores afirman que al seleccionar adecuadamente el largo de elemento, los desplazamientos locales son significativamente menores que los asociados a la componente rígida. Por esta razón, se compararon resultados con diferentes número y tipos de elementos para los mismos ejemplos. Estos estudios, en conjunto con lo publicado por Alsafadie et al. 2010, concluyen que formulaciones cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión analítica hacia las componentes dinámicas.

Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos años. El primero de ellos fue Behdinan et al. 1998 a finales de siglo, pero las funciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no eran consistente con la formulación canónica del método corrotacional propuesta por Simo y Vu-Quoc (1988). De hecho, según el conocimiento del autor, no existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna sino también, las componentes inerciales.

Años mas tarde, Le et al. 2011 publicaron una formulación para vigas 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación independiente ÏIE"de la referencia Reddy, 1997. Estos elementos fueron desarrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basadas en los polinomios de Hermitian, con el propósito de incluir consideraciones adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algunas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la literatura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los desplazamientos locales.

Los mismos autores en conjunto con Lee extendieron la formulación en su trabajo del 2014 "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014 agregando una dimensión, este desarrollo se vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmutativiad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensables a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo, se presenta la parte estática desarrollada por Battini en Battini y Pacoste, 2002, además de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuerzas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se selecciono el clásico método Hughes, Hilbert y Taylor (HHT) con los parámetros convencionales (Hilber et al. 1977). Este algoritmo es utilizado por reconocidos software comerciales (Abaqus,Lusas) e implica una disipación sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, mas presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

En "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014 se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar la nueva formulación con otros dos enfoques. La primer comparación, se deriva de la nueva formulación reemplazando las intercalaciones cúbicas por lineales. El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por Simo y Vu-Quoc, 1988. En base a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones: todas las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no así con mayados gruesos. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente mas imprecisas en comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el modelo. La formulación corrotacional es ligeramente mas lento (12 %) respecto a lo descrito por Simo and Vu-Quoc . Sin embargo, bajo ciertas condiciones altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo.

Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo es un atractivo para distintos investigadores del área. En Albino et al. 2018 Albino modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por materiales graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta mar. En 2019 Asadi y Johansson, 2019 simularon palas de aerogeneradores utilizando elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas el tren de trasmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala. En el mismo año el autor Barzanooni et al. 2018 atacó la problemática de anillos y interacciones de contacto aplicado a robots industriales también con la formulación propuesta por "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014.

Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación central de este trabajo. Donde se desarrollan grandes desplazamientos y términos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando softwares para ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y mecánica. No obstante, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución de problemas dinámicos.

Capítulo 3

Preliminares

A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de la formulación corrotacional según lo propuesto en (“A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014). La temática se abordara progresivamente según la naturaleza de las variables. En primera instancia se describen la caracterización de magnitudes cinemáticas globales y locales en las Secciones 3.1 y 3.2. Una vez ahondadas las variables asociadas al movimiento se expone como, a partir de estas, se deducen las variables estáticas y dinámicas en la Sección 3.3.

3.1. Cinemática corrotacional

El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas representa grandes rotaciones y desplazamientos dados por la dinámica de un elemento rígido. La segunda componente tiene en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material. Este enfoque suele aplicarse al analizar deformaciones estáticas. Resulta intuitivo imaginar en un inicio como se deformaría la estructura de manera rígida para luego aplicarle la componente deformable. Ahora bien, en este tipo de formulaciones, hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten representar los desplazamientos de cada una de las componentes.

Para el abordaje de este análisis debe comprenderse una serie de rotaciones consecutivas ilustradas en la Figura 3.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos, se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa el elemento en su estado indeformado o de referencia. El color naranja identifica a la componente deformada mientras que en gris se ilustra la configuración rígida del elemento.

Para realizar traspasos de una componente a otra se definen una serie de transformaciones. La primera de ellas nominada $\mathbf{R_0}$ lleva al elemento desde su estado de referencia a su estado inicial. A partir de esa configuración podemos hallar la geometría deformada aplicando las transformaciones $\mathbf{R_1^g}$ o $\mathbf{R_2^g}$, dependiendo el nodo de interés. Esta no es la única forma de hallar el estado deformado del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa consiste dado un nodo i al interior del elemento, aplicar consecutivamente las transformaciones $\mathbf{R_r}$ y $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$ encontrando así el estado deformado partiendo desde su configuración de referencia.

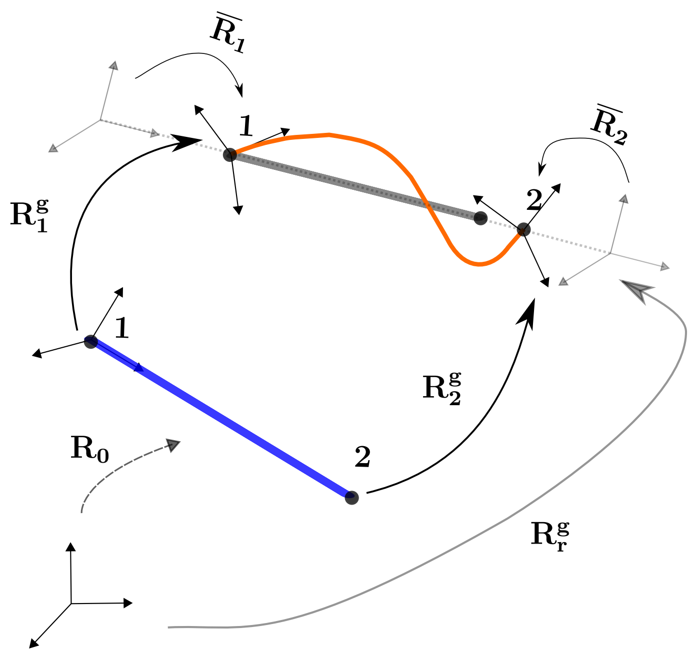


Figura 3.1: Rotaciones a cada configuración.

A partir de las definiciones descritas anteriormente e ilustradas en la Figura 3.1, resulta clarificante destacar los argumentos sobre la nomenclatura seleccionada. En primer lugar, la notación con supra- indice “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a dicha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cuales es la configuración deformada partiendo de la de referencia. Asimismo en la Figura 3.1 tanto las rotaciones locales $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$ como globales $\mathbf{R_i^g}$ se utiliza el sub-indice i mientras que para la rotación rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender la metodología corrotacional. Como la componente rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del sub-indice i.

Naturalmente para encontrar la curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y traslación de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas transformaciones se pueden representar matemáticamente con la artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática puede hallarse en la publicación (Kožar y Ibrahimbegović, 1995).

En los párrafos que prosiguen se desarrollan los sistemas solidarios a los nodos ubicados en los extremos del elemento. El estudio de deformaciones locales para los puntos interiores a la viga se detalla en la Sección 3.2.

Para deducir las matrices asociadas a cada transformación resulta imprescindible definir un conjunto de bases que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de versores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 3.2.

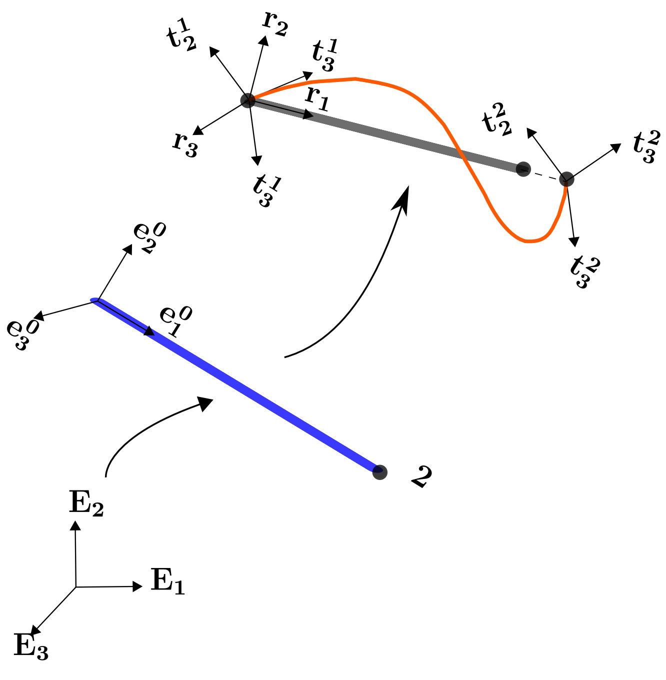


Figura 3.2: Descripción de las bases corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia auxiliar integrado por la base ortogonal $(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3})$. Una vez ubicado el elemento en su estado inicial, las coordenadas se hallan en relación a tres vectores $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Al aplicarle la traslación y rotación de cuerpo rígido la base $(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3})$ se anida al elemento y funciona como sistema de coordenadas en la configuración rígida. Por último, la base $(\mathbf{t^i_1}, \mathbf{t^i_2}, \mathbf{t^i_3})$ permite identificar la orientación y posición del nodo i en la configuración deformada. Se hace énfasis en el hecho de que tanto la configuración inicial como la rígida requieren un único sistema de coordenadas. Por el contrario, la configuración deformada debido a la flexibilidad del elemento, requiere dos sistemas, denotados con la letra $\mathbf{t^i_j}$ donde el supra-indice i identifica el nodo y el sub-indice j la dirección.

La definición de las bases mencionadas en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los vectores solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los versores se establece en la Tabla 3.1 a continuación:

Matriz	Vínculo de bases
$\mathbf{R_0}$	$(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3}) \to (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$
$\mathbf{R^g_i}$	$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) \to (\mathbf{t^i_1}, \mathbf{t^i_2}, \mathbf{t^i_3})$
$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$	$(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}) \to (\mathbf{t^i_1}, \mathbf{t^i_2}, \mathbf{t^i_3})$
$\mathbf{R_r}$	$(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3}) \to (\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3})$

Tabla 3.1: Caracterización de matrices en términos de la base

Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primer fila se tiene: $\mathbf{R_0}. (\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3})^\mathbf{T} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Al plantear este tipo de vínculos entre vectores y haciendo uso de la propiedad para matrices ortonnormales de la Ecuación 3.1 es posible deducir las Expresiones (3.2) y (3.3).

$$\mathbf{R^T} = \mathbf{R^{-1}} \tag{3.1}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_\mathbf{i} = (\mathbf{R^g_r})^\mathbf{T}\mathbf{R^g_i}\mathbf{R_o} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{R^g_i}\mathbf{R_o} = \mathbf{R^g_r}\overline{\mathbf{R_i}} \tag{3.3}$$

El propósito de la descripción anterior, algo intrincada y engorrosa responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones. Dado un punto arbitrario P, es posible ubicarlo en coordenadas locales y globales tal cual se muestra en la Figura 3.3. En coordenadas locales sus grados de libertad son: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra $\mathbf{u_P}$, y sus desplazamientos angulares con el nombre $\overline{\theta_\mathbf{i}^\mathbf{P}}$. Los siete grados de libertad se compactan en el vector $\mathbf{d_l^P} = (\mathbf{u_P}, \overline{\theta_\mathbf{i}^\mathbf{P}})$. Ahora bien, es posible desglosar el desplazamiento axial $\mathbf{u}$ en tres componentes según los vectores $\mathbf{r_i}$. Al vector desplazamientos de P en función de la base $\mathbf{r_i}$ se le denomina $\mathbf{d_r}$.

Los desplazamientos de la viga en el punto P también se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas $\mathbf{d_g} = (\mathbf{u^g}, \mathbf{w^g})$. Esta tienen origen en la configuración de referencia o material hasta la deformada como se muestra en la Figura 3.3.

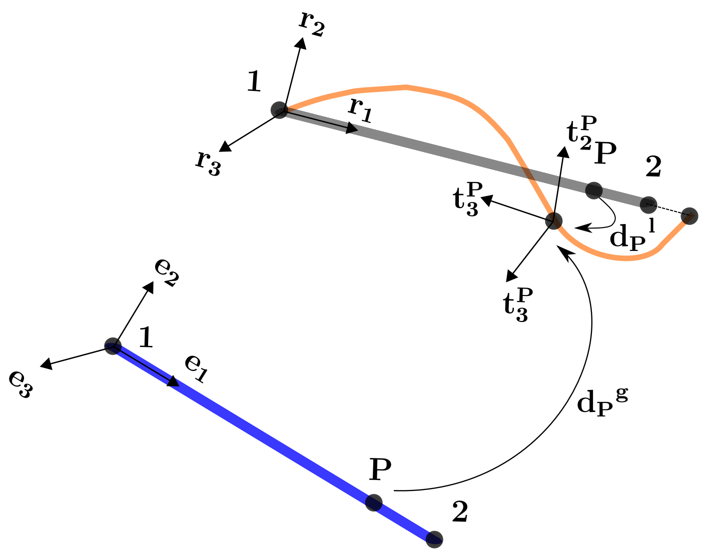


Figura 3.3: Desplazamientos locales y globales del nodo P

Acorde con los desplazamientos presentados anteriormente, es propicio calcular sus diferenciales asociados. Estos emplearan un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. A continuación las Ecuaciones (3.4) y (3.5) definen las variaciones de los desplazamientos locales y globales respectivamente.

$$\delta \mathbf{d_l} = [\delta \bar{u}, \delta \overline{\theta_\mathbf{1}}^\mathbf{T}, \delta \overline{\theta_\mathbf{2}}^\mathbf{T}]^\mathbf{T} \tag{3.4}$$

$$\delta \mathbf{d_g} = [\delta \mathbf{u_1^g}^\mathbf{T}, \delta \mathbf{u_2^g}^\mathbf{T}, \mathbf{w_1^g}^\mathbf{T}, \mathbf{w_2^g}^\mathbf{T}]^\mathbf{T} \tag{3.5}$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, se desarrollan los diferenciales asociados a las transformaciones de giro $\mathbf{R_r^g}$, $\mathbf{R_i^g}$, $\mathbf{R_0}$ y $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$. Para esto, primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla 3.1. Las entradas de $\mathbf{R_r}$ y $\mathbf{R_i^g}$ se hallan siguiendo las Ecuaciones (3.6) y (3.7) a continuación:

$$\mathbf{R_r} = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2}\ \mathbf{r_3}] \tag{3.6}$$

$$\mathbf{R_i^g} = [\mathbf{t_1}\ \mathbf{t_2}\ \mathbf{t_3}] \tag{3.7}$$

Los versores $\mathbf{r_i}$ se hallan a partir del vector director $\mathbf{r_1}$ que apunta del nodo 1 al 2. Es por esto que es preciso definirlo en función de las posiciones iniciales de los nodos en coordenadas globales $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, sus desplazamientos $\mathbf{u_1^g}$ y $\mathbf{u_2^g}$ y el largo l_n una vez deformado.

$$l_n = ||\mathbf{X_2} + \mathbf{u_2} - \mathbf{X_1} - \mathbf{u_1}|| \tag{3.8}$$

$$\mathbf{r_1} = \frac{\mathbf{x_2} + \mathbf{u_2} - \mathbf{x_1} - \mathbf{u_1}}{l_n} \tag{3.9}$$

El vector auxiliar $\mathbf{p}$ surge se define para hallar primeramente los vectores $\mathbf{r_i}$ y partir de estos la base $\mathbf{t_i}$. Estos versores son dinámicos y solidarios al movimiento. Están unidas a la configuración rígida y local respectivamente. El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen $\mathbf{p}$, $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ en la Ecuación (3.10):

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}), \qquad \mathbf{p_i} = \mathbf{R_i^g}\mathbf{R_0}[\mathbf{0}\ \mathbf{1}\ \mathbf{0}]^{\mathbf{T}} \tag{3.10}$$

En la expresión anterior la matriz $\mathbf{R_0}$ se obtiene colgando los vectores $\mathbf{e_i}$ escritos como combinación lineal de la base $\mathbf{E_i}$. Una vez calculada esta matriz y evaluado las expresiones de la Ecuación (3.10) se obtienen los restantes versores directores de la componente rígida. Esto es:

$$\mathbf{r_3} = \frac{\mathbf{r_1}\ \mathbf{x}\ \mathbf{p}}{||\mathbf{r_1}\ \mathbf{x}\ \mathbf{p}||}, \qquad \mathbf{r_2} = \mathbf{r_3}\ \mathbf{x}\ \mathbf{r_1} \tag{3.11}$$

Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta\overline{\mathbf{R_i}} = \delta\mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\mathbf{R_i^g}\mathbf{R_0} + \mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\delta\mathbf{R_i^g}\mathbf{R_0} \tag{3.12}$$

En la Ecuación (3.12) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de diferenciales matriciales. Como la transformación $\mathbf{R_0}$ comunica la configuración indeformada y ambas configuraciones son fijas, su matriz es constante. Por lo tanto, su variación es nula. A diferencia de las matrices de giro $\overline{\mathbf{R_i}}$ y $\mathbf{R_i^g}$ sus variaciones pueden hallarse según las Ecuaciones (3.13) y (3.14) respectivamente.

$$\delta\mathbf{R_i^g} = \widetilde{\delta\mathbf{w_i^g}}\ \mathbf{R_i^g} \tag{3.13}$$
$$\delta\mathbf{R_r^g} = \widetilde{\delta\mathbf{w_r^g}}\ \mathbf{R_r} \tag{3.14}$$

En la ecuación (3.14) el término $\widetilde{\delta\mathbf{w_r^g}}$ refiere a la operación skew del vector de ángulos de la componente rígida. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a matrices de rotación. La función aplicada al vector $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega_1}, \mathbf{\Omega_2}, \mathbf{\Omega_3})$ toma la siguiente forma:

$$\mathrm{Skew}(\mathbf{\Omega}) = \widetilde{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

En función de lo descrito anteriormente resta vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las variaciones globales. Para esto se definen las matrices $\mathbf{E}$y $\mathbf{G}$ según las Ecuaciones (3.16) (3.17).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R_r} \end{bmatrix} \rightarrow \delta\mathbf{d_g} = \mathbf{E^T}\mathbf{d_g} \tag{3.16}$$

Notoese que las matrices $\mathbf{R_r}$ tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas dimensiones, $\mathbf{0}$ es una matriz nula de 3x3 e $\mathbf{I}$ una matriz identidad del mismo número de filas y columnas. De forma subsiguiente $\mathbf{E}$ posee 12 entrada en filas y columnas asociadas a los 12 grados de libertad por elemento.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \tfrac{\partial \mathbf{w_r^g}}{\partial \mathbf{d^g}} \\
\mathbf{G(1:6)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta/l_n & \eta_{12}/2 & -\eta_{11}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{G(7:12)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta/l_n & \eta_{22}/2 & -\eta_{21}/2 & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

En la columna 1 y 12 de la matriz $\mathbf{G}$ las entradas son nulas ya que los desplazamiento angulares globales no dependen de los estiramientos axiales de los nodos. Además, los parámetros η se calculan realizando los cocientes entre las componentes de los vectores $\mathbf{p_j}$ y $\mathbf{p_{ij}}$ según la Ecuación (3.18). Siendo el vector p_j el producto $\mathbf{R_r}^\mathbf{T}\mathbf{p}$ y $\mathbf{p_{ij}}$ la multiplicación de $\mathbf{R_r}^\mathbf{T}\mathbf{p_i}$.

$$
\eta = \frac{p_1}{p_2}, \quad \eta_{11} = \frac{p_{11}}{p_2}, \qquad \eta_{12} = \frac{p_{12}}{p_2}, \qquad \eta_{21} = \frac{p_{21}}{p_2}, \qquad \eta_{22} = \frac{p_2}{p_2}, \tag{3.18}
$$

La relación entre los diferenciales anteriores, se pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos de ángulos locales en términos globales. Tal cual se expresa en la Ecuaciones (3.19) donde la matriz $\mathbf{P}$ queda definida. Esto es de sumo interés ya que para el cálculo de fuerzas internas las variables causa y efecto de su generación son los desplazamientos locales. Por ende resulta imprescindible calcular su variación en términos globales.

$$
\begin{bmatrix} \delta\overline{\theta_1} \\ \delta\overline{\theta_2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G^T} \\ \mathbf{G^T} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} = \mathbf{P}\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} \tag{3.19}
$$

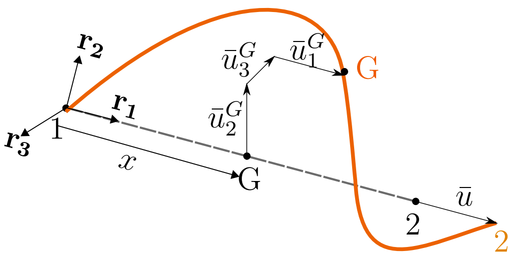
Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coordenadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar $\mathbf{r}$ que vincula los incrementos del desplazamiento axial $\delta\overline{u}$ con los globales. Esto permite escribir la Ecuación (3.4) en relación a (3.5) haciendo uso de la expresión que prosigue (3.20)

$$
\delta\overline{u} = \mathbf{r}\ \mathbf{d_g} \qquad \mathbf{r} = [-\mathbf{r_1^T}\ \mathbf{0_{1,3}}\ \mathbf{r_1^T}\ \mathbf{0_{1,3}}] \tag{3.20}
$$

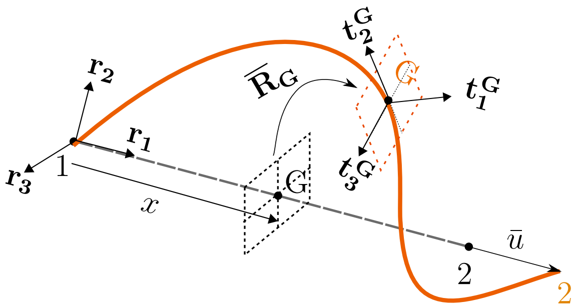
3.2. Formulación local

La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este apartado. se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.3.

El movimiento local de una sección ubicada a una distancia x de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir de la rotación y traslación de la sección correspondiente a su centroide G. Una ilustración de esto se muestra en la Figura 3.4, donde la configuración rígida se identifica en punteado y la deformada en color naranja.



(a) Esquema de desplazamientos locales



(b) Esquema de angulos locales

Figura 3.4: Ilustración grados de libertad locales

El movimiento de la base $\mathbf{t_i}$ en respecto del sistema $\mathbf{r_i^G}$ esta dado por los desplazamientos $\bar{u}_3$ según el versor $\mathbf{r_3^G}$ y análogamente para los vectores $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_1$. Esto determina la ubicación del baricientro G. Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores $\mathbf{t_3^G}$ y $\mathbf{t_2^G}$ dentro del plano y un versor perpendicular $\mathbf{t_1^G}$. La transformación $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{G}$ permite encontrar los transformados de la base $\mathbf{r_i^G}$ etiquetados con las letras $\mathbf{t_i^G}$. Por último se observa el desplazamiento axial de la barra $\bar{u}$ correspondiente al del nodo 2 en la dirección $\mathbf{r_1}$.

Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para los desplazamientos axiales $\bar{u}_1$ y para los ángulo de torsión $\theta_{\mathbf{1}}$. Por la contraria, tanto para los desplazamientos transversales $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$ como para los ángulos de flexión, las interpolaciones es través de polinomios cúbicos. Estas funciones interpolantes se detallan en las Ecuaciones (3.21), 3.22 y (3.23).

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \qquad N_2 = \frac{x}{l_0} \tag{3.21}$$

$$N_3 = x\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \qquad N_4 - \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\frac{x^2}{l_0} \tag{3.22}$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right)\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \qquad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right)\left(\frac{x}{l_0}\right) \tag{3.23}$$

Para un punto ubicado a una distancia x del nodo 1 según el vector $\mathbf{r_1}$ es posible calcular los desplazamientos locales en la base $\mathbf{r_i}$. Dado el punto arbitrario G que se desplazo en el sistemas de coordenadas locales según el vector $\mathbf{d_l}^{\mathbf{G}}$. Los valores en términos de la componente rígida $\mathbf{r_i}$ se calculan aplicando la Ecuación 3.24.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d_l^G} \tag{3.24}$$

Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nulas es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas. De esta forma se construyen las matrices $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$. Estas expresan los desplazamientos transversales $\bar{u}_2, \bar{u}_3$ como también los ángulos $\bar{\theta}_1^G$ y $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$ según los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales $\overline{\theta_{\mathbf{1}}}$ y $\overline{\theta_{\mathbf{2}}}$ para el nodo 1 y 2 respectivamente. Esta artimaña analítica se expresa a continuación en las Ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u_l} = \mathbf{P_1} \begin{bmatrix} \overline{\theta_1} \\ \overline{\theta_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_l = \mathbf{P_2} \begin{bmatrix} \overline{\theta_1} \\ \overline{\theta_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Las hipótesis de Bernoulli desprecian las deformaciones por fuerzas cortantes, esto se refleja en sus polinomios de interpolación. Esta premisa no tiene perjucios sobre la aplicación con la que se modelará el elemento. La estructura de cables es extremadamente esbelta, con relaciones de diámetro respecto a largo ínfimas. Por la tanto, las deformaciones por cortante son efectivamente despreciables respecto a las inducidas por los momentos flectores.

3.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura ?? queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa en según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$\mathrm{OG} = \mathbf{x_1^g} + \mathbf{u_1^g} + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r_1} + (\bar{u}_2)\mathbf{r_2} + (\bar{u}_3)\mathbf{r_3} \quad (3.27)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente definidos en (3.27) y haciendo uso la matriz auxiliar $\mathbf{N}$ es posible escribir los desplazamientos del baricentro y su diferencial asociado.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \;\; \mathbf{I} \;\; \mathbf{0} \;\; N_2 \;\; \mathbf{I} \;\; \mathbf{0}] && (3.28) \\ OG &= N_1(\mathbf{x_1^g} + \mathbf{u_1^g}) + N_2(\mathbf{x_2^g} + \mathbf{u_2^g}) + \mathbf{R_r u_l} && (3.29) \\ \delta OG = \delta \mathbf{u} &= \mathbf{N}\delta \mathbf{d_g} + \mathbf{R_r}\delta \mathbf{u_l} + \delta \mathbf{R_r u_l} && (3.30) \end{aligned}$$

La expresión presentada (3.30) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta el cálculo de su magnitud, ya que esos grados de libertad se encuentran solidarios a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones (3.16), (3.17), (3.19) y (3.13) lográndose de este modo, escribir a $\delta\mathbf{u}$ en coordenadas globales. Además se compacta la notación definiendo la matriz $\mathbf{H_1}$ según la Ecuación (3.31).

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{R_r}(\mathbf{N} + \mathbf{P_1}\mathbf{P} - \widetilde{\mathbf{u_l}}\mathbf{G^T})\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} \tag{3.31}$$

Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.4), son despreciables frente a los de la componente rígida. Para el autor "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014, degbido a sus cambios de magnitud entre miseraciones, no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales y rígidos. Esto es: ($\delta\overline{\theta_{\mathbf{ri}}} = \overline{\delta\mathbf{w_i}}$).

Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magnitudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según se establece en la Ecuación

$$\delta\mathbf{w^g}(\mathbf{OG}) = \delta\mathbf{w} = \mathbf{R_r}(\mathbf{P_2}\mathbf{P} + \mathbf{G^T})\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_2}\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} \tag{3.32}$$

3.2.2. Velocidades y aceleraciones

Las magnitudes dinámicas despeñan un papel primordial en el análisis implementado. Tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en términos globales. De igual modo, que en la Sección 3.2.1, se obtienen sus diferenciales asociados. Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.31) se deducen las velocidades traslacionales según la Expresión (3.33). Al aplicar la regla del producto en (3.33) se halla la aceleración lineal del centro de masa del elemento en (3.34).

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\delta\dot{\mathbf{d_g}} \tag{3.33}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\delta\dot{\mathbf{d_g}} + (\dot{\mathbf{R_r}}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T} + \mathbf{R_r}\dot{\mathbf{H_1}}\mathbf{E^T} + \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\dot{\mathbf{E^T}})\delta\dot{\mathbf{d_g}} \tag{3.34}$$

Para calcular las igualdades anteriores hace falta evaluar las derivadas temporales de las matrices $\mathbf{E}$ y $\mathbf{R_r}$. Esta operatoria matricial, se traduce en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Como la variable $\mathbf{E}$ depende de $\mathbf{R_r}$ se calculan inicialmente sus derivadas, para luego sustituirlas en $\dot{\mathbf{E}}$. Esto se realiza mediante la expresión en variaciones (3.14) y resulta $\mathbf{R_r} = \mathbf{R_r}\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{r}}}$. Al sustituir esta expresión en la derivada de $\dot{\mathbf{E}}$ se deduce la ecuación que prosigue:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E_t} \tag{3.35}$$

El valor skew de los desplazamientos globales sobre la componente rígida $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}$ se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación(3.15), aplicado al vector $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G^T E^T \dot{d}_g}$. Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la Expresión (3.34) definiendo la matriz $\mathbf{C_1}$ como se enseña a continuación:

$$\mathbf{C_1} = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}\mathbf{H_1} + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{1} - \mathbf{H_1 E_t} \tag{3.36}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R_r H_1 E^T \ddot{d}_g} + \mathbf{R_r C_1 E^T \dot{d}_g} \tag{3.37}$$

Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó la nomenclatura para evitar el abuso de notación. Derivando la Ecuación (3.32) respecto a la variable temporal. se deduce la velocidad angular a continuación:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R_r H_2 E^T \dot{d}_g} \tag{3.38}$$

$$\mathbf{C_2} = \widetilde{\mathbf{w_r}}\mathbf{H_2} + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{2} - \mathbf{H_2 E_t} \tag{3.39}$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R_r H_2 E^T \ddot{d}_g} + \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r}\mathbf{C_2}\dot{\mathbf{E}}^\mathbf{T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} \tag{3.40}$$

Una descripción detallada puede encontrarse en “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014. Dentro del apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las derivadas temporales de las matrices $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$. También es posible escudriñar la deducción de las matrices $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ y $\mathbf{C_4}$.

3.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (“A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures”, 2014) y (**battini2002co**). Acompasando con el avance histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente los vectores de fuerza interna y su matriz de rigidez asociada, para luego ahondar en la incorporación de términos dinámicos.

3.3.1. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial fl_1, dos momentos flectores M_1^1, M_2^1 y un momento torsor M_3^1 para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección análoga a los desplazamientos locales para las fuerzas internas, se presenta en la Ecuación (3.41).

$$\boldsymbol{f_l} = [\ fl_1\ M_1^1\ M_2^1\ M_3^1\ M_1^2\ M_2^2\ M_3^2\ ] = [\ fl_1\ \boldsymbol{m}] \tag{3.41}$$

Tanto las magnitudes de fuerza interna como inercial se calcularán inicialmente para coordenadas locales, donde su cálculo es relativamente sencillo, para luego transcribir estos resultados en términos globales. Con este cometido se define la matriz $\mathbf{B}$ según se expresa en la Ecuación (3.42).

$$\delta \mathbf{d_l} = \mathbf{B}\ \delta \mathbf{d_g} \qquad \mathbf{F_g} = \mathbf{B^T}\ \mathbf{f_l}. \tag{3.42}$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Esta primer transformación en la Figura 3.3, refiere a escribir los desplazamientos locales en términos de los rígidos ($\mathbf{t_i} \rightarrow \mathbf{r_i}$). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración rígida a la indeformada ($\delta\mathbf{d_l}$ $\rightarrow \delta\mathbf{d_g}$). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en función de coordenadas estáticas y globales.

Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares $\mathbf{G}$ y $\mathbf{E}$, en las Ecuaciones (3.16) y (3.17) es posible vincular los ángulos diferenciales locales $\delta\overline{\theta_\mathbf{i}}$ con los incrementos globales $\delta\mathbf{d_g}$. Esto permite conocer los momentos flectores y torsores de la viga en coordenadas globales.

Análogamente el vector auxiliar $\mathbf{r}$ contiene a $\mathbf{r_1}$ según el sentido axial de la barra, por lo que reescribir este permite expresar la fuerza de directa $fa1$ en términos de la base $\mathbf{E_i}$. Al unir los razonamientos detallados en los párrafos anteriores, se obtienen las Ecuaciones (3.43) y (3.44) para el cálculo de la fuerza interna y su diferencial:

$$\mathbf{F^g} = \mathbf{B^T f_l} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{PE^T} \end{bmatrix} \mathbf{f_a} \tag{3.43}$$

$$\delta\mathbf{F^g} = \mathbf{B^T}\delta\mathbf{f_l} + \delta\mathbf{r^T} f_{a1} + \delta(\mathbf{EP^T})\boldsymbol{m} \tag{3.44}$$

Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés obtener sus derivadas recepto de los desplazamientos. La matriz tangente representa esta magnitud y es un operador indispensable para la resolución mediante métodos numéricos iterativos. Este cálculo de derivadas respecto a desplazamientos globales de la expresión (3.43) concluye en la Ecuación (3.45) a continuación:

$$\mathbf{K_g} = \mathbf{B^T K_l B} + \frac{\partial(\mathbf{B^T f_l})}{\partial \mathbf{d_g}} \tag{3.45}$$

Operando con la regla del producto y sustituyendo la Ecuación (3.44) para el diferencial para la fuerza interna la matriz tangente resulta :

$$\mathbf{K^g} = \mathbf{B^T K_l B} + \mathbf{D f_{a1}} - \mathbf{EQG^T E^T} + \mathbf{EGar} \tag{3.46}$$

La matriz $\mathbf{B}$ permite realizar el cambio de coordenadas $\delta\mathbf{d_a}$ a $\delta\mathbf{d_g}$, de acuerdo con lo definido en (3.42). Esta transformación de cambio de base multiplica la variable $\mathbf{K_l}$ correspondiente al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz $\mathbf{K_l}$.

En la Ecuación (3.46) la matriz $\mathbf{D}$ es anti-simétrica y se calcula en función de los productos internos de los vectores $\mathbf{e_i}$, esta aporta la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial f_l1 de la barra. Por otra parte, la matriz auxiliar $\mathbf{Q}$ se halla a partir del producto de $\mathbf{P}$ y los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, y proviene de la componente no lineal de los momentos. Por último, se define el vector $\mathbf{a}$ agrupando así el resto. Dichas defunciones se encuentran en las siguientes Ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_3} & \mathbf{0} & -\mathbf{D_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D_3} & \mathbf{0} & \mathbf{D_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D_3} = \frac{\mathbf{1}}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r_1}\mathbf{r_1}^{\mathbf{T}}) \tag{3.47}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\,(1) \\ \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\,(2) \\ \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\,(3) \\ \widetilde{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{m}}\,(4) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.46) es asimétrica, sin embargo según **Rankin1986** esta puede ser simetrizada sin perder la convergencia cuadrática para el método de Newton Raphson (N-R), siempre y cuando momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger **Rankin1986**.

3.3.2. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes asociadas. El atractivo principal de la referencia “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures” (2014) se fragua en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas De Borst et al. 2012. Esta coherencia se debe a la cabal derivación analítica del vector de fuerzas inerciales según el planteo cinemático de las variables descritas en 3.3. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad que la magnitud primaria será la energía cinética del elemento. Esta propiedad escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ($\dot{\mathbf{u}}$,$\ddot{\mathbf{u}}$) como también angulares ($\dot{\mathbf{w}}$,$\ddot{\mathbf{w}}$). En las ecuaciones (3.49) y (3.50) a continuación, se presentan la energía cinética de un elemento y su diferencial. Para la obtención de la Expresión se aplicó (3.50) la regla del producto de diferenciales y el teorema de Leibiniz para integrales de extremos fijos.

$$K = \frac{1}{2}\int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} \tag{3.49}$$

$$\delta K = -\int_{l_0} \delta \mathbf{u}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^{\mathbf{T}} [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \mathbf{dl} \tag{3.50}$$

Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subindices "g"para las magnitudes dinámicas ($\mathbf{u}$,$\mathbf{w}$) y sus respectivas derivadas. De igual forma, las variables del integrando en las Ecuaciones (3.49) y (3.50) se omitió la nomenclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga. Los elementos serán de área constante siendo A_ρ el producto del área transversal y la densidad del material, análogamente la matriz $\mathbf{I}_\rho$ es el tensor de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones $\mathbf{R}^\mathbf{g}$ y $\mathbf{R_o}$ consecutivamente.

Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsables del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar el vector de fuerza inercial se obtienen las matrices tangentes dinámicas. Esto se expresa en las Ecuaciones (3.51) y (3.52).

$$\delta K = \mathbf{f}_\mathbf{k}^\mathbf{T} \delta \mathbf{d}^\mathbf{g} \tag{3.51}$$

$$\delta \mathbf{f_k} = \mathbf{M}\delta \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{C}\delta \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{K}\delta \mathbf{d_g} \tag{3.52}$$

En la Ecuación 3.52 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa consistente $\mathbf{M}$ se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, consecutivamente la matriz $\mathbf{C_k}$ giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo $\mathbf{K}$, se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrifuga. Determinados autores **cardona1988beam** y **hsiao1999consistent** proponen considerar unicamente $\mathbf{M}$, sin embargo exhaustivos estudios en (**hsiao1999consistent**) prueban que agregar la matriz $\mathbf{C_k}$ mejora el desempeño computacional para numerosos casos.

Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección 3.2.2.

Sustituyendo la Ecuación (3.52) en (3.50) se halla una fórmula para la fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.34), (3.37), (3.38) y (3.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f_k} = \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T} \mathbf{R_r}^{\mathbf{T}} A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H_2^T} \mathbf{R_r} [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \tag{3.53}$$

Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expresiones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices. Finalmente esto se expresa de forma matemática en las Ecuaciones (3.55) y (3.56).

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{f_k} &= \mathbf{M} \boldsymbol{\Delta} \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{C_k} \boldsymbol{\Delta} \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{K_k} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{d_g} \approx \mathbf{M} \boldsymbol{\Delta} \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{C_k} \boldsymbol{\Delta} \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} && (3.54)\\
\mathbf{M} &= \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T} A_\rho \mathbf{H_1} + \mathbf{H_2^T} \mathbf{I}_\rho \mathbf{H_2} \right\} d_l \right] \mathbf{E^T} && (3.55)\\
\mathbf{C_k} &= \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T} A_\rho (\mathbf{C_1} + \mathbf{C_3}) + \int_{\mathbf{l_0}} \mathbf{H_2^T} \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C_2} + \mathbf{C_4}) + ... \right\} \right] \mathbf{E^T} && (3.56)\\
&... \int_{l_0} \mathbf{H_2^T} (\tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho}) d_l && (3.57)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Metodología

En este capitulo se exponen los fundamentos para la obtención de resultados numéricos. El problema de modelado computacional de lineas eléctricas afectadas por fenómenos de vientos extremos se construyó sobre dos etapas sucesivas. En primer lugar, se explican cuestiones sobre el modelado físico. Los protagonistas del fenómeno son el viento y la estructura. Respecto al primero se describe en la Sección 4.1.2 el campo de velocidades absoluto, relativo y las fuerzas que el viento genera sobre el conductor. Análogamente se despliegan las condiciones iniciales y de borde consideradas para el modelado estructural en la Sección 4.1.1. Posteriormente, dentro de la Sección 4.2 se describe la deducción del algoritmo de HHT aplicado a la formulación corrotacional para modelado de conductores con fuerzas aerodinámicas. Este desarrollo no se ha registrado en la biografía consultada y tampoco los pseudocódigo que permiten incorporar dicha formulación al software ONSAS. Por último una vez explicada la deducción se postulan las hipótesis del modelado físico y computacional en las Secciones 4.1.2.2 y 4.2.2.1 respectivamente.

4.1. Aspectos de modelado físico

4.1.1. Condiciones iniciales y de borde para la estructura

El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de la realidad, para crear un modelo en el computador, que se comporte de forma análoga. Permitiendo emular y controlar determinadas variables de estudio relevantes al observador. En este acto de representación existen simplificaciones inherentes, que reducen los factores incidentes al sistema como objeto de estudio.

Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determinadas condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema. Estas imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto esta siendo desvinculado, se nominan condiciones de borde o contorno. En particular, para esta investigación, se consideraron las siguientes hipótesis del modelado estructural respecto a sus condiciones de contorno y de borde.

4.1.1.1. Hipótesis de modelado estructural

1. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura, ignorándose cualquier variación en el perfil tipográfico del terreno. Como consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
2. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a modelarlo con elementos de vigas, las cuales tienen un variación de ángulo continuo. Consecuentemente, al escindir el vano BC de su continuación (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo nulo en x para los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta las condiciones de deformación angulares impostadas por la geometría del sistema.
3. Como el conductor no presenta fuerzas en el sentido axial, los puntos B y C no se deforman según el eje x, ergo sus trayectoria pertenecen al plano z-y. Esto debe forzarse en los nodos B y C.
4. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB, obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se modelaron a partir de barras de Green. Las condiciones de borde dependen del ejemplo al que se haga referencia. Para el Ejemplo 3 los puntos D y A se encuentran anclados a la torre, acompañando sus movimientos, mientas que para el 2 se encuentran fijos.
5. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada en La Figura 4.1, se aplica una condición inicial de desplazamiento $\mathbf{u_0}$.

Esta se corresponde con la solución estática del sistema sometido por el preso propio en la dirección de z de la gravedad.

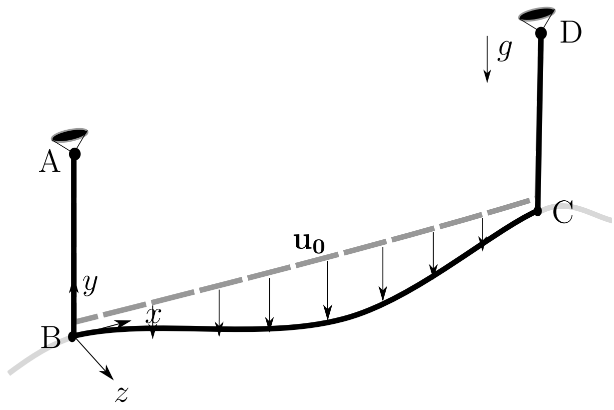


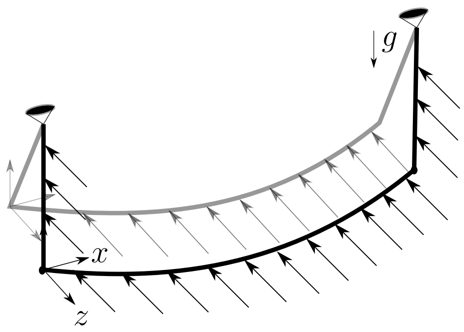
Figura 4.1: Esquema de condición inicial y de borde.

Una vez plasmadas las condiciones de borde cinemáticas anteriores. Se establecen a continuación las principales condiciones de borde dinámicas:

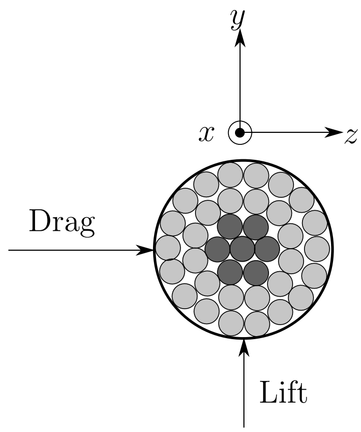
1. No se consideran las fuerzas internas trasmitidas por los vanos aledaños.
2. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea.
3. Las simulaciones se realizan en dos etapas sucesivas, primeramente se imponen la condiciones iniciales de desplazamientos y una vez estabilizada la respuesta por el amortiguamiento interno y aerodinámico se ejerce la fuerza del viento sobre el cable.
4. Los vínculos dinámicos entre los elementos de vigas y de barra se implementaron de forma tal, que no se trasmiten los momentos de unos a otros. Por lo tanto, en los nodos de sujeción los elementos de barra CD y AB trasmiten unicamente fuerzas direccionales en C y B .

4.1.2. Modelo de viento

Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuerzas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift). Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes, en la capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo. Y luego proyectarla la fuerza neta en la dirección del flujo medio. A diferencia de estas, las fuerzas lift que aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones entre el intradós (sona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones puntales entre dos superficies contrarias, genera una circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en curva cerrada, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura ??. Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la competente de lift es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, garantiza que la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas entre las superficies del sólido.



(a) Vista en perspetiva



(b) Vista lateral

Figura 4.2: Ilustración del viento y sus efectos.

La componente unidireccional del flujo a una altura dada, puede ser desglosada en un termino medido y otro fluctuante $w_v(t) = w_m(t) + w'(t)$. A partir de esto, la velocidad media para un período T toma la expresión de la Ecuación (4.1):

$$w_m(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} w_v(\tau) d\tau \tag{4.1}$$

El valor del periodo T debe ajustarse minimizando la desviación estándar asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la desviación estándar de la velocidad fluctuante y la media para un instante de tiempo dado. Sin embargo, para este trabajo no se consideran las fluctuaciones debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de $T = 1/30$ s y de velocidad media, se extrajo del artículo (Stengel y Thiele, 2017).

Considerando el aire como un fluido no newtoneano, ρ su densidad asociada a determinada temperatura, C_d el coeficiente de drag para como función del número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo ("drag") para un elemento cilíndrico de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la Expresión (4.2):

$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{\rho(T)C_d(Re)}{2} d_c w_m(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c w_m(t)^2 l_e \tag{4.2}$$

Para este cálculo se asumió constantes las magnitudes al interior del elemento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto del integrando por el largo del intervalo. Además se para este trabajo la carga del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente a la mitad de F_v. Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales que estas inducen, se cancelan con los elementos aledaños. Por otra parte, los valores de C_d se extrajeron de las referencias (Foti y Martinelli, 2016) y se verificaron con el estudio para estos coeficientes durante tormentas conectivas (Mara, 2007). La densidad ρ del aire se consideró la usual para presión atmosférica y una temperatura de 20 ºC.

4.1.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas asociadas.

En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortiguamiento introducido. Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde el viento tiene determinada componente transversal según z y perpendicular (según y). En la figura 4.3 se indican con el nombre w y q. En esta figura las velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tanto absoluto. Asimismo en esta imagen se representan las velocidades media y fluctuante w_m y w_a, que sumada a la velocidad v, resulta en el vector V_{tot} formando un ángulo β con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce sobre el conductor, este despliega una determinada velocidad rígida en ambas direcciones identificadas con las letras $\mathbf{\dot{u}_{ry}}$ y $\mathbf{\dot{u}_{rz}}$.

Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 4.4. Este campo de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de drag F_d y de lift F_l.

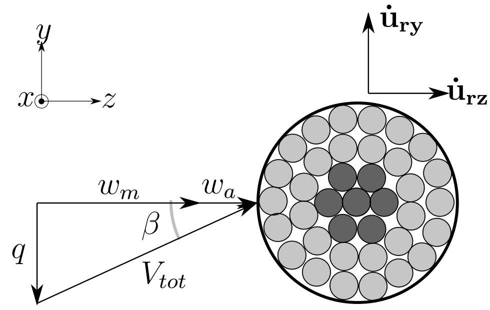


Figura 4.3: Esquema en sistema de referencias absoluto.

Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando dos fuerzas F_z y F_y.

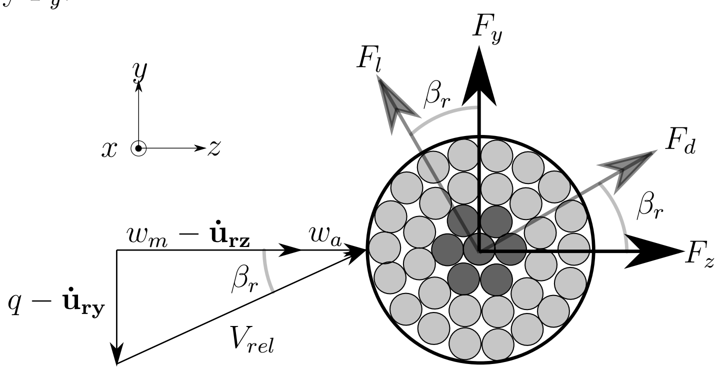


Figura 4.4: Esquema en sistema de referencias relativo.

Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y dinámicas. La velocidad relativa absoluta, es el cuadrado de los catetos, tal y como se expresa en la Ecuación (4.3). Tomando como hipótesis que las velocidades relativas del rígido y la componente vertical v, son mucho menores que las asociada al flujo medio, en el sentido de z se deduce la Ecuación (4.4).

$$V_{rel}^2 = (w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rx}})^{\mathbf{2}} + (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}})^{\mathbf{2}} \tag{4.3}$$

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}}) \tag{4.4}$$

La carga de drag postulada en la Ecuación (4.1) se escribe por unidad de longitud y se reescribe en (4.6). Además, se muestra que para las asunciones de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a 0°. Para formular esto matemáticamente se plantean las Ecuaciones (4.6) y (4.5).

$$\tan(\beta_r) = \frac{v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}}}{w_m - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}} + w_a} = \frac{\frac{v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}}}{w_m}}{1\frac{-\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}} + w_a}{w_m}} \approx 0 \tag{4.5}$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}}))w_m \tag{4.6}$$

Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes z e y. Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de estas se hallan el campo de desplzamientios, velocidad y aceleraciones del sólido. Considerando que el ángulo β es ínfimo y por lo tanto $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$ y $\cos(\beta) = 1$ al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2}(u_m^2 + w_a^2 - 2w_a\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}})\cos(\beta_r) = \bar{F}_x + F_a - F_{vis} \tag{4.7}$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_m^2 + w_a^2 - 2w_a\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}})\sin(\beta_r) \approx 0 \tag{4.8}$$

Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es una promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo, se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un tercer termino surge al desarrollar la Ecuación (4.6). Este factor depende del producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Vinculando al fluido y al sólido, es por esto que recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico. Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sporepresivo el sentido de esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición de fuerzas según z se le llaman $\bar{F}_x$, F_a, $-F_{vis}$ a la componente media, alternante y de amoritguamentio dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_m^2) \tag{4.9}$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2}(w_a^2) \tag{4.10}$$

$$F_{vis} = \frac{\rho d_c C_d}{2}(2\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}} w_m) \tag{4.11}$$

4.1.2.2. Hipótesis aplicadas al modelado de viento

Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no el eje central de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio. Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

1. No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
2. La velocidad incide en el sentido z de forma perpendicular a la linea.
3. La velocidad relativa transversal $v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}}$ al igual que la componente alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el sentido de z llamada w_m.
4. La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera despreciable frente al drag.
5. Para la fuerza en el sentido de z se desprecia la componente fluctuante F_a.
6. Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico f_{vis} se promedió la velocidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el dominio temporal de simulación.

El primer supuesto parte del modelo figurado en 4.4, para poder realizar este análisis plano, se obvian las fluctuaciones espaciales en el sentido axial del conductor. Esta asunción no es del todo correcta, pues la turbulencia del fenómeno provoca fluctuaciones en las cargas a lo largo dela linea, cambiando así, su orientación. Esto se asocia directamente con la hipótesis 4, donde la fuerza alternante proveniente de la presencia de vórtices se desprecia.

Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje z en la Figura **??**, siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipótesis proviene de diferentes trabajos publicados, donde la componente perpendicular a la superficie terrestre o ascendente (según y) suele ser significativamente menor a la paralela (en el sentido de z) (Durañona y Cataldo, 2009) (Stengel y Thiele, 2017) Yang y Hong, 2016. Si bien simplifica lo hace de forma conservadora. Puesto que supone al sistema de trasmisión, en el tiempo inicial, dispuesto completamente perpendicular al sentido del viento, es así que este descarga su mayor fuerza sobre el sistema (Hipótesis 2).

Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis, se sustenta en la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del peso que se opone a la fuerza de sustentación. De todos modos, esta fuerza en sentido ascendente se despreció frente al drag, consecuencia de la simetría de revolución tangencial del conductor. Esto de establece en la Hipótesis 4.

Otra hipótesis a clarificar refiere al amortiguamiento aerodinámico (Hipótesis 6). Se utilizó una simplificación adicional en la velocidad de viento para su cálculo. Se consideró una velocidad constante, igual al promedio de viento en todo el dominio temporal. Este es el valor que insertó para el cálculo de D según la Ecuación (4.11). Por último se explicitan las premisas 3 y 5 que fueron consideradas para calcular el campo de velocidades relativo y sus fuerzas asociadas.

4.2. Aspectos de modelado computacional

4.2.1. Ecuación de equilibrio

En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámico con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta imprescindible formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis que subyacen a las expresiones postuladas en ("A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014). Por añadidura, se construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas $\mathbf{f_{int}}$, inerciales $\mathbf{f_{ine}}$ y externas $\mathbf{f_{ext}}$. Además según la Ecuación (4.11) dentro de las fuerzas externas aparece un término aerodinámico f_{vis} que depende de la velocidad lineal del rígido. Este termino debe tratarse aparte ya que su naturaleza función de el estado cinemático del problema, lo que es la incógnita a resolver.

El equilibrio de fuerzas es equivalente al postulado de PTV donde el incremento diferencial en la energía interna y cinética se debe a un trabajo externo. La Ecuación de balance (4.12) debe satisfacerse para todo instante temporal, en particular para $t + \Delta_t$. Dadas determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: el desplazamientos $\mathbf{d}$ $(t+\Delta_t)$, las velocidades $\dot{\mathbf{d}}$ $(t+\Delta_t)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}$ $(t+\Delta_t)$. Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente de manera exacta en la Ecuación (4.12).

$$\begin{aligned} \mathbf{f_{ext,t+\Delta_t}} + \mathbf{f_{vis,}}(\dot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t)) - \mathbf{f_{int}}(\mathbf{d}(t+\Delta_t))... \\ ... \ -\mathbf{f_{ine}}(\mathbf{d}(t+\Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t)) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables construyen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta. El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecuación a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como consecuencia que la Ecuación (4.12) ya no será nula sino igual a un resto $\mathbf{r}$. A su vez, tal y como se detalla en las Ecuaciones (4.13) y (4.14), los métodos numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de aceleración y velocidad, en el instante $t+\Delta_t$, en función de los desplazamientos para ese tiempo y las magnitudes cinemáticas en el paso anterior. Como los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración para el paso anterior se encuentran dados, el vector resto depende indirectamente de los desplazamientos. Para diferenciar las variables aproximadas de las exactas, se introduce la siguiente nomenclatura: $(\mathbf{d}(t+\Delta_t) \rightarrow \mathbf{d_{t+\Delta_t}})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ y $(\ddot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$.

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_v(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}) \tag{4.13}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_a(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}) \tag{4.14}$$

Según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, se buscan las aproximaciones cinemáticas tal que el residuo para un instante $t+\Delta_t$ sea próximo al vector nulo. Esto se expresa matemáticamente en Ecuación (4.15).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}) = (-\mathbf{f_{ext,t+\Delta_t}} + \mathbf{f_{int}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}) + \mathbf{f_{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t+\Delta_t})... \\ ... + \mathbf{f_{ine}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t+\Delta_t}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}), \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t+\Delta_t}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}, \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t})) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por otro lado, según el método de N-R presentado en Quarteroni et al.

2010 es posible construir una sucesión iterativa en k, de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se acerque al nulo. Para aplicar esto se utiliza el teorema de Taylor aplicado a la función resto, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}}) = \mathbf{r}(\mathbf{d^{k}_{t+\Delta_t}}) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}|_{\mathbf{k}}\ \mathbf{\Delta d^{k+1}_{t+\Delta_t}} = \mathbf{0} \tag{4.16}$$

Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena aplicada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\end{aligned} \tag{4.17}$$

En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar las derivadas de la función residuo respecto de: desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Estas son las matrices tangentes $\mathbf{K_g}$ $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C_k}$ descritas en el Capítulo 3. Asimismo, al derivar la función de fuerza residual aparece un termino $\mathbf{C_{vis}}$ correspondiente la derivada de la fuerza viscosa respecto de la velocidad del viento. Esto resulta una matriz diagonal esparsa con valores nulas salvo las entradas correspondientes a la dirección del viento, con valor $\rho d_c C_d w_m$. Incorporando estas matrices se obtiene a la Ecuación (4.18).

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\right|_k = \left.\left(\mathbf{K_g} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}(\mathbf{C_k} + \mathbf{C_{vis}})\right)\right|_k \tag{4.18}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.18) de N-R se halla el paso en desplazamientos en $k+1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}}$. Matemáticamente:

$$\left.\left(\mathbf{K_g} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}(\mathbf{C_k} + \mathbf{C_{vis}})\right)\right|_k^{-1} \left(-\mathbf{r}(\mathbf{d^{k}_{t+\Delta_t}})\right) = \Delta\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}} \tag{4.19}$$

Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de resolución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones F_a y F_v. Para esto se implementó el Método de HHT presentado a continuación en La sección 4.2.2.

4.2.2. Resolución numérica mediante HHT

Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo de Newmark presentado en Newmark, 1959. Según el articulo Hilber et al. 1977 el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (Hilber et al. 1977) se compara el método de HHT con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser: el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark:. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014, resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

Para este abordaje inicialmente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Se presentan entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark α y β para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones de actualización para el instante $t + \Delta_T$ se escriben:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2}\mathbf{u_{t+\Delta t}} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\mathbf{\Delta t})^{\mathbf{2}}}\mathbf{u_t} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\mathbf{\Delta t})}\dot{\mathbf{u}}_t - ... \tag{4.20}$$

$$... - \frac{1}{2\alpha_{NW}}(1 - 2\alpha_{NW})\ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)}\mathbf{u_{t+\Delta t}} - \frac{\beta_{\mathbf{NW}}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\mathbf{\Delta t})}\mathbf{u_t} + \left(\mathbf{1} - \frac{\beta_{\mathbf{NW}}}{\alpha_{\mathbf{NW}}}\right)\dot{\mathbf{u}}_t + ... \tag{4.21}$$

$$+... \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right)\ddot{\mathbf{u}}_t\Delta t$$

Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros α_{NW} y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT}. Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.22) y (4.23). En estas funciones, es posible notar las equivalencias, parentescos y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$ se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \tag{4.22}$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \tag{4.23}$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro α_{HHT} y el incremento Δ_T ente dos tiempos consecutivos t y $t + \Delta_t$.

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t+\Delta t}}}{\partial \mathbf{u_{t+\Delta_T}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2\Delta_T^2} \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{u_{t+\Delta_T}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \tag{4.25}$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la propiedad de conmutativiad. Es por esto, que los vector de velocidades y aceleraciones angulares para el paso $k+1$, en el instante $t + \Delta_t$, deben calcularse según las Ecuaciones (4.26) y (4.27) presentadas en la referencias (Ibrahimbegović y Mikdad, 1998) y (Ibrahimbegovic y Mamouri, 2002).

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}} \left[\frac{\alpha}{\beta \mathbf{\Delta_t}} \theta_{\mathbf{t+\Delta_t}} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} + \frac{(\beta - \mathbf{0.5}\alpha)\mathbf{\Delta_t}}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} \right] \tag{4.26}$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}} \left[\frac{\mathbf{1}}{\beta \mathbf{\Delta_t^2}} \theta_{\mathbf{t+\Delta_t}} - \frac{\mathbf{1}}{\beta \mathbf{\Delta_t}} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} - \frac{(\mathbf{0.5} - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta t}} \right] \tag{4.27}$$

En las Ecuaciones (4.26) y (4.27) la transformación $\mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}}$ es la composición de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\mathbf{\Lambda^g_{t+\Delta t}} = \exp(\widetilde{\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}) = \mathbf{R^g_{t+\Delta_t}} (\mathbf{R^g_t})^{\mathbf{T}} \tag{4.28}$$

Un procedimiento análogo al de las funciones angulares se aplican a las lineales. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones expresadas en (4.26) y (4.27).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t+\Delta_t}}} = \frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \quad \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta_T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t+\Delta t}}} = \frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \quad \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) \tag{4.30}$$

Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones (4.29), (4.30), (4.24) y (4.25) al definir convenientemente la matriz $\mathbf{B_t}$. En función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclaraciones globales en términos del vector de desplazamientos inceremental. Estas relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B_t} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{2,t+\Delta_t}}) \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \mathbf{B_t} \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{g,t+\Delta_t}} \tag{4.32}$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{B_t} \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{g,t+\Delta_t}} \tag{4.33}$$

Al escindir las Ecuaciones (4.32) y (4.33) se identifican las funciones F_a y F_v de la sección 4.2.1. Estas relaciones matemáticas deben de integrarse a la

Ecuación linealizada de equilibrio (4.19) para obtener el incremento en k que permita conocer el vector desplazamientos en el paso $k+1$ para el instante $t+\Delta_T$. Finalmente, eso se plantea en la Ecuación (4.34).

$$\mathbf{r}(\mathbf{d^k_{t+\Delta_t}}) = -\left(\mathbf{K_g} + \left(\frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2}\right)\mathbf{MB_t} + \left(\frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T}\right)(\mathbf{C_k}+\mathbf{C_{vis}})\mathbf{B_t}\right)\Delta\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}} \tag{4.34}$$

Se aclara que para despejar la Ecuación (4.34) anterior, la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las matrices que la integran (de masa, centrifuga y tangente). Las matrices tangentes fueron simetrizadas .ªrtificialmenteçomo se aclaró anteriormente, manteniendo el orden de convergencia de N-R. Las matrices centrifugas y de masa devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros α_{HHT} son menores a uno, en general en el intervalo $[-0.1; 0.1]$, la suma de esta matrices suele ser definidas positivas. Por lo que $\mathbf{K_{tot}}$ será invertible.

4.2.2.1. Hipótesis de modelado numérico

Se esclarecen las premisas y simplificaciones durante la implementación numérica de los códigos creados:

1. Los incrementos angulares no se calcularon componiendo dos rotaciones consecutivas sino de forma aditiva, es decir: $\theta^{\mathbf{k+1}}_{\mathbf{t+\Delta_t}} = \theta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{t+\Delta_t}} + \boldsymbol{\Delta}\theta^{\mathbf{k+1}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}$.
2. La matriz de amortiguamiento viscoso $\mathbf{C_{vis}}$ se considero una diagonal con elementos no nulos en las componentes asociadas a los desplazamientos transaccionales. Se copió el valor del amortiguamiento aerodinámico con el valor correspondiente a la coordenada lineal $\rho d_c C_d w_m$ para el resto de los desplazamientos. Esto garantiza la estabilidad y atenuación de la respuesta en la primer etapa asociada al peso.
3. La simulación se separó en dos etapas consecutivas, en primer lugar se carga con la fuerza de la gravedad (a partir de la condición inicial) y una vez que la respuesta es constante se aplica la carga del viento.

4.2.3. Implementación numérica en ONSAS

En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el software: *An Open Non Linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Este código de carácter abierto y se desarrolló de forma general integrando distintos elementos, materiales y geometrías dentro del mismo modelo. Además permite resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código abierto *Paraview* difundido en (Ahrens et al. 2005).

Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser pionero dela formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en los trabajos (Battini y Pacoste, 2002) ("A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014), sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable. A continuación en **??** se detalla un pseudo-código panorámico sobre el esqueleto ejecutado en ONSAS.

En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo. Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite incrementar la variable temporal en pasos de $Delta_T$. Además debe evaluar los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de $\mathbf{f_{ext}}$. Para resolver el estado del sistema en el tiempo $t + \Delta T$, hace falta resolver la ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (4.15). Con este cometido, se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo **??** se omitió la notación en $t + \Delta T$ para simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

Esta parte del código se pudría subdividir en dos estructuras, primeramente el cálculo del incremento que determina el paso $k+1$, a partir de los desplazamientos en el paso actual k. Luego se actualizan las variables cinemáticas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza mientras que la variable boolena finDisp sea nula. La alteración de estado, se encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos tol_u, en

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : tol_r, tol_u, maxIter, Δ_T, α_{HHT}
  Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d_t} \leftarrow \mathbf{d_0}$ $\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{0}$ $\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{0}$
  Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$
  while $t < t_f$ **do**
    finDisp = 0
    Definir: $\mathbf{d^k} \leftarrow \mathbf{d_t}$, $\dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k} \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}$, $\ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k} \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t}$.
    Evaluar $\mathbf{f_{ext,t+\Delta t}}$
    while FinDisp = 0 **do**
      Calcular fuerzas: $\mathbf{f^k_{ine}}(\mathbf{d^k}, \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k}, \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k})$, $\mathbf{f^k_{int}}(\mathbf{d^k})$ y $\mathbf{res^k}(\mathbf{d^k}, \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k}, \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k})$.
      Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K^k_g}$ $\mathbf{M^k}$ $\mathbf{C^k_k}$.
      Despejar $\Delta\mathbf{d^{k+1}}$
      Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d^{k+1}} = \mathbf{d^k} + \mathbf{\Delta d^{k+1}}$
      Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\dot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1})$, $(\ddot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1})$.
      Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\dot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$, $(\ddot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$.
      Ensamblar velocidades: $\dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$
      Ensamblar aceleraciones: $\ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^\mathbf{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^\mathbf{k+1})$ ´
      Actualizar fuerzas: $\mathbf{f^{k+1}_{ine}}(\mathbf{d^{k+1}}, \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1})$, $\mathbf{f^{k+1}_{int}}(\mathbf{u^{k+1}})$ y $\mathbf{res}(\mathbf{d^{k+1}})$.
      Calcular:
      if $\left\|\Delta\mathbf{d^{k+1}}\right\| < tol_d \left\|\mathbf{d^{k+1}}\right\|$ V $\left\|\mathbf{res}(\mathbf{d^{k+1}})\right\| < tol_r \left\|\mathbf{f_{ext}}\right\|$ V $\mathrm{k} \geq \max_{iter}$ **then**
        finDisp = 1
      end if
    end while
    Actualizar $\mathbf{d_t} \leftarrow \mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_T}}$, $\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \dot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1}_\mathbf{t+\Delta_T}$, $\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{t} \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}^\mathbf{k+1}_\mathbf{t+\Delta_T}$.
    $t = t + \Delta_T$
  end while

vector de fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter}. Las primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la variable finDisp alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices dinámicas tangentes. Este código se agregó a ONSAS procurando su versatilidad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo pseudocódigo de la función elementbeamforces.m implementada.

El diagrama presentado en el Pseudocódigo ??, puede dividirse en tres divisiones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matrices de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y deformada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de la función beamLocalStaticForces. Desafortunadamente, tanto entradas como salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas locales. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego integrarlas al código general expuesto en ??.

De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia x en la configuración de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadratura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último, los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas, como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices de todo el sistema en coordenadas globales.

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I}_\rho^{\mathbf{ref}}$ E ν G $\mathbf{X_1}$ $\mathbf{X_2}$ $\mathbf{d_g^e}$

for 1 **to** N_{elem} **do**

Separar vector desplazamientos $\mathbf{d_g} = (\mathbf{u^g}, \mathbf{w^g})$

——————-Cálculo de matrices de rotación ——————-

Computar matrices de rotación global $\mathbf{R_g^1}$ y $\mathbf{R_g^2}$

Evaluar matriz de rotación de referencia $\mathbf{R_o}$

Hallar $\mathbf{q_1}$ $\mathbf{q_2}$ $\mathbf{q}$ y calcular $\mathbf{e_1}$ $\mathbf{e_2}$ y $\mathbf{e_3}$.

Evaluar maitrz de rotación rígida $\mathbf{R_r}$

Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R_i} = \mathbf{R_r^T}\mathbf{R_g^i}\mathbf{R_o}$

———————————————————————————

——— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente ———

Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$

Invertir $\mathbf{R_i}$ y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_\mathbf{i}$.

Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f_{int}^{loc}}$ y matriz tangente local $\mathbf{K_T^{loc}}$.

Construir matrices auxiliares: $\mathbf{H}$ $\mathbf{G}$ $\mathbf{P}$ $\mathbf{B}$ $\mathbf{r}$

Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K_T^g} \leftarrow \mathbf{K_T^{loc}}$ y $\mathbf{f_{int}^g} \leftarrow \mathbf{f_{int}^{loc}}$.

———————————————————————————

—— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámcias——

Todas las variables dependen de la coordenada (x)

Definir funciones de interpolación N_i

Calcular matrices: $\mathbf{P_1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{H_1}$.

Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$

Calcular matrices auxiliares: $\mathbf{H_1}$, $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\mathbf{H_2}$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ y $\mathbf{C_4}$.

Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.

Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\mathbf{ref}}$

Hallar expresiones e integrar en el elemento: $\mathbf{f_{ine}}$ $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C_k}$

Ensamblar : $\mathbf{f_{ine}}$ $\mathbf{M}$, $\mathbf{C_k}$ $\mathbf{K_T^g}$ $\mathbf{f_{int}^g}$

———————————————————————————

end for

Capítulo 5

Resultados numéricos

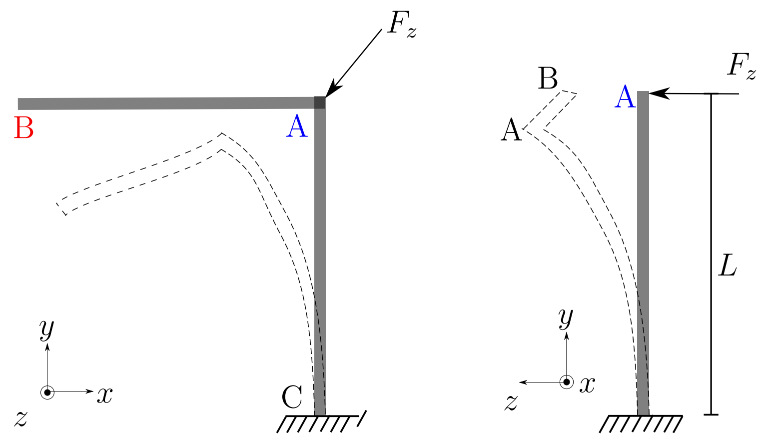
En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementación corrotacional detallada en **??**, para luego aplicarse a modelos específicos de conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando un computador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de 8 Gb. La formulación se implementó en el software de código abierto ONSAS [1] el cual se ejecutó en GNU-Octave Eaton et al. (2007)y visualizándose los resultados haciendo uso del la herramienta Paraview Ahrens et al. (2014). Vale notar que el hilo conductual de este capítulo fue ideado con un aumento progresivo de complejidad. Capturando en modelos simples y académicos los movimientos fundamentales de los elementos, para garantizar así una representación cabal del fenómeno de oscilación del conductor en servicio.

5.1. Vigas en voladizo con ángulo recto

Este ejemplo fue publicado por primera vez en Simo y Vu-Quoc, 1988 y es usualmente considerado en la literatura para validar formulaciones de elementos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales (Albino et al. 2018 "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014). El mismo consta de dos barra idénticas en ángulo recto formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo $L = 10$ m tal y como se ilustra en las Figuras 5.1.

Las propiedades del rigideces de torsión, flexión y directa del ejemplo se se-

[1] https://github.com/ONSAS/ONSAS/



(a) Vista frontal (b) Vista lateral

Figura 5.1: Disposición geométrica de la estructura.

leccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales, garantizan movimientos de gran amplitud y para esto deben cumplir determinadas igualdades Por esta razón la elección de dichas magnitudes se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado de Las Ecuaciones (5.1) y (5.2) descritas en la bibliografía. Para este trabajo los segundos momentos de inercia según el eje z e y además de los valores del módulo de elasticidad lineal y transversal valen: $E = G = 10^6$ $A = 1$ $I = J = 10^{-3}$ y $\nu = 0.3$. Se hace notar que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan de sentido.

$$GA = EA = 10^6 \tag{5.1}$$

$$GJ = EI = 10^3 \tag{5.2}$$

La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplazamientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que permiten aplicar una fuerza en el sentido del eje z tal y como se muestra en la Figura 5.2. Este forzante flecta y trosiona al sistema en un plano saliente al xy, produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento, son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la carga. Esta fuerza actúa linealmente en los dos segundos iniciales, crece hasta un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y luego decrece hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual en un corto intervalo de tiempo. Para reproducir este comportamiento altamente dinámico se eligieron 10 elementos por miembro y un incremento de tiempo $\Delta T = 0.25$ s.

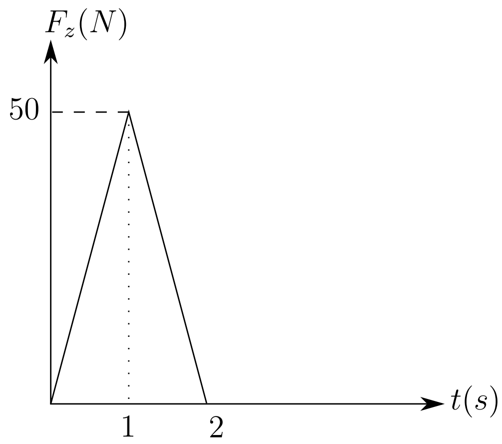


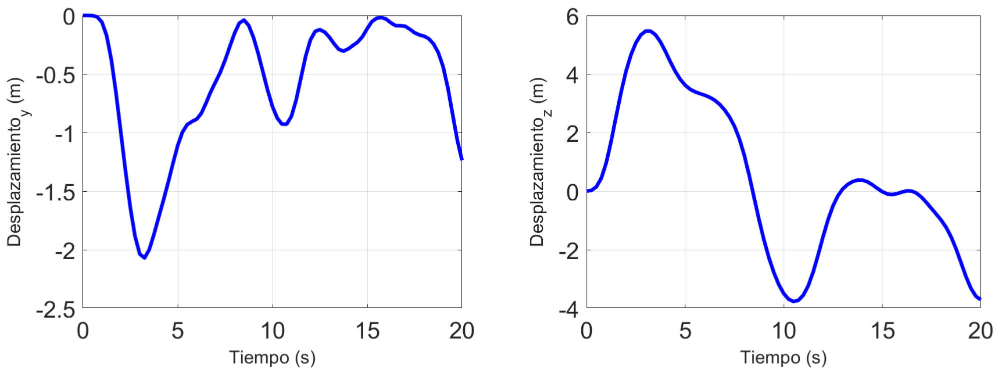
Figura 5.2: Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

El objetivo principal del ejemplo es el validar la librería de códigos corrotacional incorporados en el software ONSAS [1], por ende, tanto el método de resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en el artículo "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014, comparando así resultados semejantes. Consecuentemente se implementó un algoritmo que lleva el nombre de sus creadores (HHT) y se selecciono un valor característico $\alpha = -0.05$ y un valor de parada en desplazamientos de 10^{-7} m. Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de $\Delta T = 0.25$ s.

Para comparar con el paper de referencia se plasmaron gráficamente determinados grados de libertad correspondientes al nodo A. Estos son: el desplazamiento lineal vertical (según el eje y) y el transversales (según z). Los resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras **??** y **??** en función de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la estructura. En particular, la Figura **??** denota oscilaciones que alcanzan varios metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exigente en términos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no armónico de

[1] https://github.com/ONSAS/ONSAS/

vaivén en el eje z, se puede notar la presencia no conservativa de la formulación corrotacional, ya que las amplitudes prestan una tendencia atenuante con el tiempo.

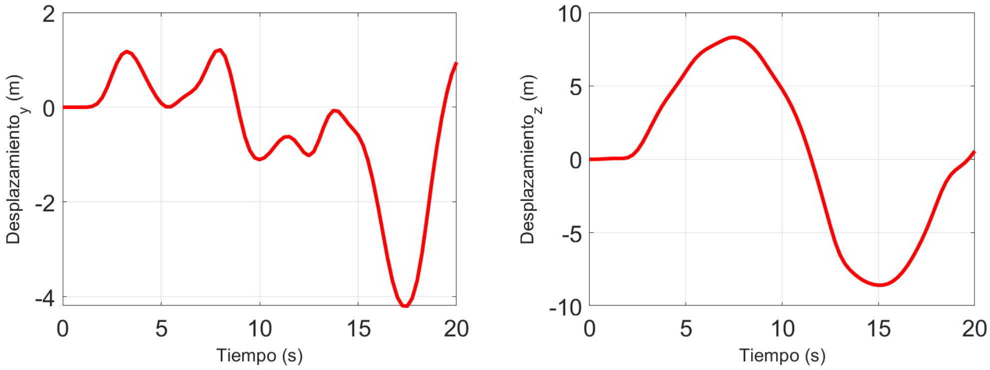


(a) Desplazamiento vertical según y (b) Desplazamiento transversal según z

Figura 5.3: Desplazamientos de control del nodo A

Por otra parte al analizar en la Figura ?? se observa que los desplazamientos en y, son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido de la fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano yz con el versor x saliente, el movimiento del nodo A es análogo al de una viga empotrada con una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de A es siempre en el sentido de $-y$, lo que se refleja en La Figura ?? y se condice con la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación con los presentados en la bibliografía de referencia “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures” (2014), observamos similares valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento respecto a las Figuras 5.3 y 5.4. También así los valles y las crestas de la curvas se suceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que el software implementado reproduce correctamente el ejemplo y es capaz de capturar movimientos de flexo-torsión cabalmente.

Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B. En la Figura ?? se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente, y una forma que se asemeja a una sinusoide. Esto podría vincularse al modo flector en el plano xz de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la dirección z. Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de AC superpuestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento. El autor del trabajo “A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic



(a) Desplazamiento vertical según y (b) Desplazamiento transversal según z

Figura 5.4: Desplazamientos de control del nodo B

analysis of flexible structures" (2014) publicó el desplazamiento en z de B y los resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva. Complementando este análisis podemos comparar los despeamientos del nodos A y B concluyendo que los movimientos inerciales de la barra A-B afectan notoriamente a los desplazamientos del nodo B respecto de A, tanto en frecuencia como en magnitud.

Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se visualizaron mediante el software *Paraview* las deformadas para diferentes instantes de tiempo: $t_1 = 4$ s, $t_2 = 11$ s y $t_1 = 19$ s. En la Figura 5.5 se observan las oscilaciones flexionales para distintos planos yx e yz. Estos movimientos son originados por diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante F_z mientras que en el miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a su unión rígida con el resto de la estructura.

Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inmanentes a cada elemento en La Figura 5.5. En esta se identifica que el esfuerzo alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando considerables fluctuaciones temporales. En simultaneo, la viga horizontal A-B desarrolla fuerzas normales en todo su largo. Se suceden tanto positivas como negativas, es oportuno notar que un modelo lineal para pequeños desplazamientos concluiría que los esfuerzos en esa viga serían nulos. Además este modelo lineal arrojaría desplazamientos triviales en x para ambos nodos, induciéndose significativos errores para este tipo de cargas de alto impacto en estructuras de exigua rigidez. El modelo implementado desarrolla magnitudes

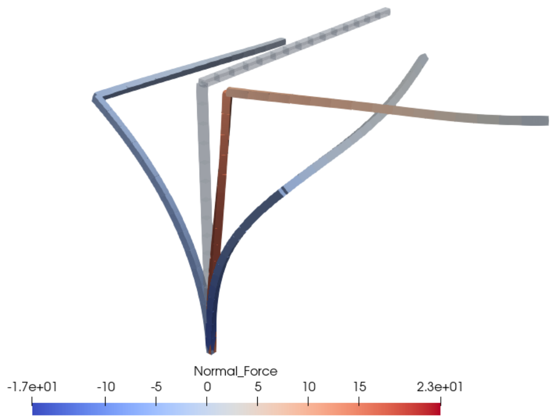
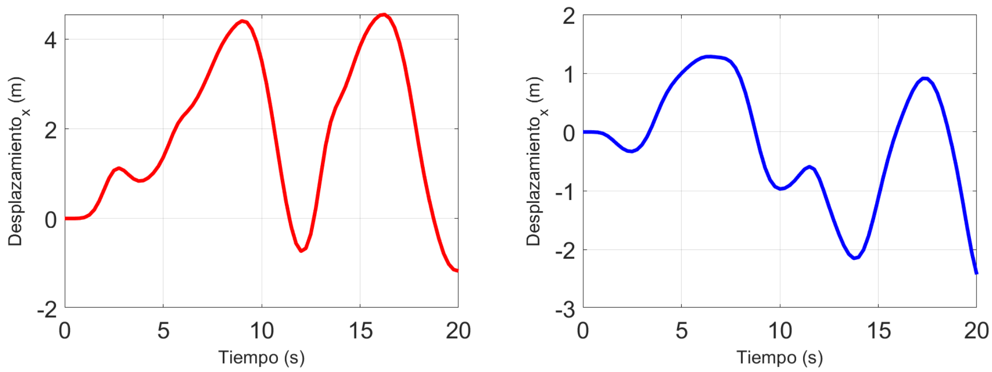


Figura 5.5: Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s

no despreciables de desplazamientos en x tal y como se constata en las Figuras 5.6. He aquí las principales diferencias y la importancia de implementar un modelo considerando no linealidad geométricas, estas consideraciones son esenciales para la aplicación principal de este trabajo.



(a) Desplazamiento según x del nodo B (b) Desplazamiento según x del nodo A

Figura 5.6: Desplazamientos en x de los nodos A y B

5.2. Modelo simplificado de una linea

En este apartado se presenta un primer modelo simplificado del enfoque central de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de Foti y Martinelli, 2018 mas ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado, como ser el caso de: Luongo y Piccardo, 1998 y Martinelli y Perotti, 2001. El ejemplo consiste en un conductor de trasmisión eléctrica reforzado con núcleo de acero. La raíz de acero forjado tiene como propósito aportar rigidez mecánica al componente, disminuyendo la deflexión y flexibilidad del conjunto. Esto suele ser ventajoso para largos vanos donde la rigidez del conductor es una variable decisiva. Además su construcción no afecta significativamente la resistividad eléctrica debido al efecto de reluctancia radial variable. que obliga a la corriente a fluir principalmente en la superficie.

El modelo del conductor esta estandarizado bajo la norma IEC europea *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 y se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la cantidad de cables en el núcleo y en la periferia respectivamente. El diámetro se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos de aluminio (color gris en la Figura 5.7) y los 7 de acero (color azul). Además asumiremos despreciables, sobre las propiedades del flujo y la geometría, las irregularidades de su perfil en la silueta.

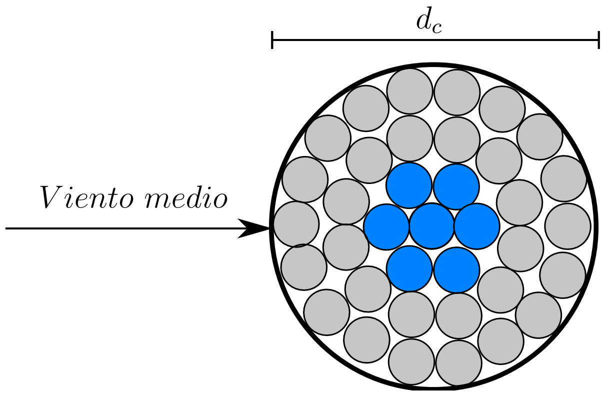


Figura 5.7: Esquema del conductor ASCR 7/26.

El vano tiene un largo Lc=267 m mientras que el cable en su configuración deformada mide 269 m. Esta diferencia de longitudes del conductor en su eje axial, responde a un tensado que se realiza durante su instalación. En la etapa de montaje del conductor, se ajusta la pre-tensión de manera tal que la altura ratifique los requerimientos de seguridad según la urbanización, contaminación magnética y tipografía del terreno. Para esta simulación no se tendrá en cuenta la tensión previa al momento de la colocación pero si la tensión debida a la carga del peso. Vale notar que el valor de los esfuerzos iniciales generados durante la instalación es menor a un 2 % respecto a los esfuerzos axiales desarrollados durante su movimiento. De igual manera se resalta que para este ejemplo no se consideró amortiguamiento aerodinámico de fuerzas viscosas.

El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad E, módulo de poisson ν, una densidad similar ρ y una rigidez flexional y torsional EI y GJ respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de la norma *ISO:9001* y se presentan en La Tabla ??.

d_c(cm)	m(kg/m)	EA kN	EI N m^2	GJ Nm^2
2.81	1.8	29700	2100	159

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo $L_a = 3$ m cada una de ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas, para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en las tres direcciones en x, z e y en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan correctamente las presentadas por Foti y Martinelli (2018), donde los extremos se encuentran sujetados. Habiendo detallado someramente los componentes que integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría en la Figura 5.8.

Existen una diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postulados por Luongo y Piccardo (1998) y Martinelli y Perotti (2001), en donde se resolvió mediante elementos de barra trinodal y de viga corrtacional respectivamente. Para amibos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generadas artificialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se despreciaran las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flujo medio W en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico y alcanza la velocidad media máxima W_{max} en 20 segundos. Este

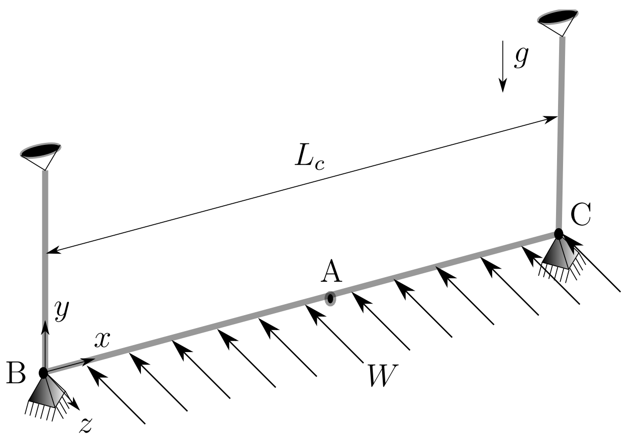


Figura 5.8: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

valor de velocidad se calculó según *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 considerando un flujo tipo capa límite atmosférica con las propiedades indicadas en La Tabla ?? asociadas a un tipo de terreno sub-urbano o industrial.

k_r	z_0	z_{min}
0.22	0.3 m	8 m

Tabla 5.2: Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para W_{max}

La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gravitatoria según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.8. No se muestran los resultados de esta etapa debido a que carecen de relevancia y en el trabajo de referencia se toma la catenaria como condición inicial. La fuerza peso es relevante desde un punto de vista dinámico pues mitiga posibles inestabilidades cuando las normales de los elementos son próximas a cero. Una vez estabilizada la respuesta del sistema por el amortiguamiento interno, se aplica una fuerza lineal de media positiva según el eje $-z$ desde cero hasta W_{max}. Esta forma del perfil podría emular el aumento modulado de un presiones en un túnel de viento entre las bocas de entrada y descarga. La forma se muestra en La Figura 5.9.

Para este estudio no se considerará la fuerza perpendicular al sentido de flujo: lift. Esta es despreciada por diferentes autores (Lee y Perkins, 1992) (Foti

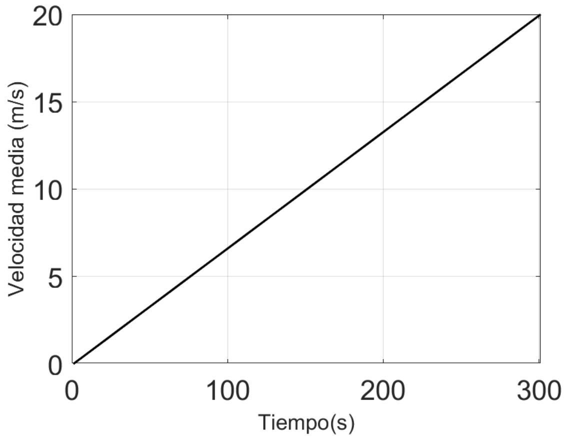


Figura 5.9: Perfil de velocidad progresiva z.

y Martinelli, 2016) (Papailiou, 1997) principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares a los flujos esta relacionada posibles asimetrías tangenciales en el perfil. Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce en una fuerza de lift nula. Esta es la principal diferencia de este caso en comparación por lo propuesto en la literatura fuente (Luongo et al. 1984) y (Foti y Martinelli, 2018) donde si son considerados perfiles con formaciones de hielo.

El perfil de velocidades en la Figura 5.9 genera fuerzas sobre la estructura. La orientación del cable es tal que el flujo en todo punto es transversal a el. Los valores de $C_d = 1.5$ se extrajeron la referencia (Foti y Martinelli, 2018). Se aclara que el angulo de ataque varía durante la trayectoria del cable, no obstante el coeficiente C_d permanece constate debido a la simetría de revolución del perfil. Se gráfica entonces las fuerzas sobre cada nodo del conductor en La Figura 5.10.

A continuación se exponen los desplazamientos verticales y horizontales del nodo A. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Esta homología entre los perfiles de ambas magnitudes es explicable mediante un análisis de Fourier del sistema. Haciendo referencia a la función de transferencia que relaciona a ambas variables, la misma produce unicamente en desfazaje en estado estacionario. Como la curva de carga es de manera gradual y no presenta exabruptos en el tiempo, podemos suponer que la respuesta es cuasi-estática. Se presentan entonces en las Figuras 5.11 los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente del nodo A

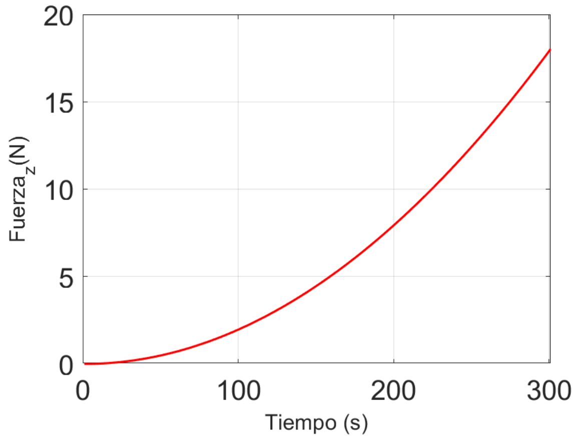
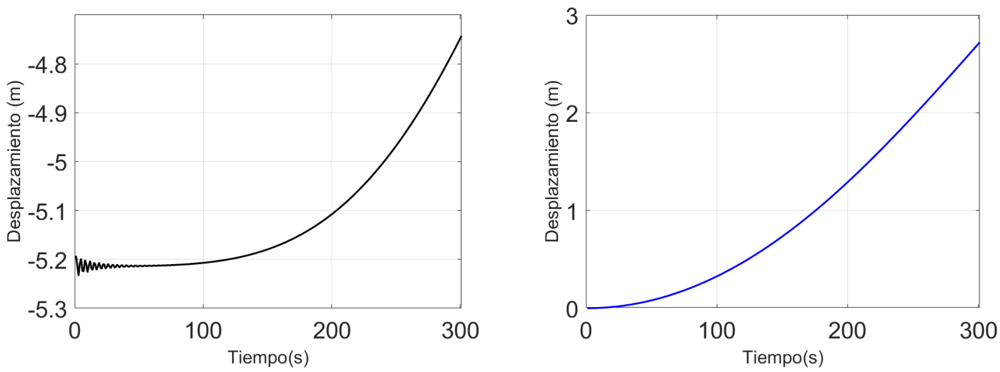


Figura 5.10: Perfil de fuerza nodal según el eje z.

situado en el punto medio del vano.



(a) Desplazamiento según z del nodo A (b) Desplazamiento según y del nodo A

Figura 5.11: Desplazamientos del nodo A

Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la literatura fuente (Foti y Martinelli (2018)), se capturo el ángulo de balanceo del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función tangente que vincuula el ángulo respecto da la deformada en el eje x con los desplazamiento en z e y. Para ilustrar al lector se realizó el esquema mostrado en la Figura 5.12 del ángulo Φ en cuestión.

Se graficaron las trayectorias del angulo para diferentes valores de velocidad media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica. Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante al de que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el

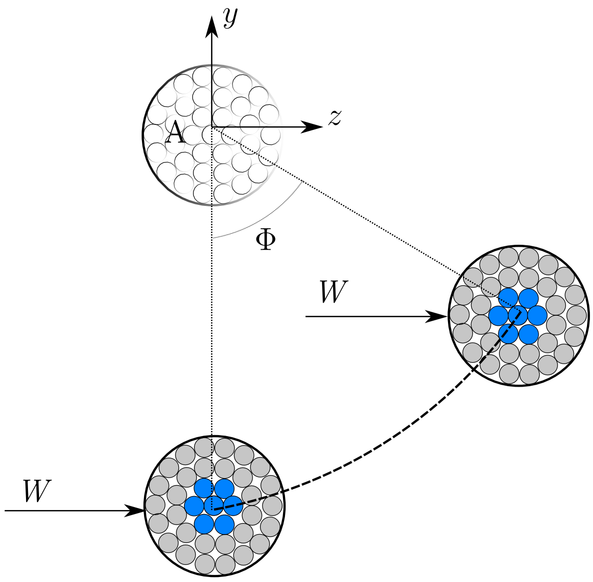


Figura 5.12: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte, en comparación con los resultados presentados por Foti y Martinelli, 2018 se observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamente, lo que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincornizadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia del lift y la variación del angulo de ataque con el ángulo. Como en la referencia Foti y Martinelli, 2018 se toman en cuenta un perfil con formaciones de hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.

El ejemplo permite inferir que la respuesta numéricas del modelo representan de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores de trasmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejada en los resultados arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

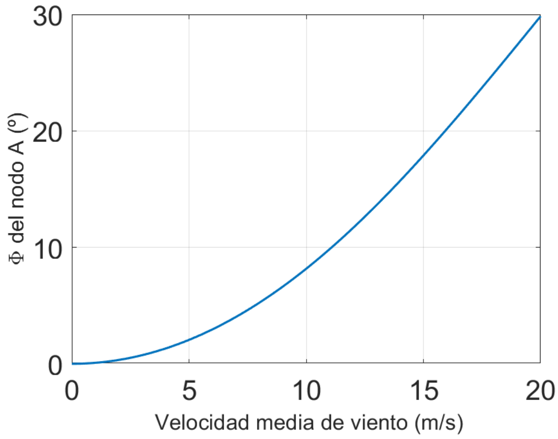


Figura 5.13: Angulo de balanceo Φ en función de la velocidad media $W(t)$.

5.3. Sistema de transmisión eléctrica

Este apartado ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de transmisión eléctricas afectados por vientos extremos no sinópticos, en particular, tormentas conectivas. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizando un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos vanos de idéntico largo D_v= 206.5 m tal cual se índica el Esquema 5.14. Para el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1 y 2 respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del primer y segundo vano con los literales C y B respectivamente. Con el objetivo de representar una geometría real de una línea de alta tensión y no aborrcer al lector con descripciones de propiedades, los conductores de la simulación se corresponden con el Ejemplo 5.2 y cuyas propiedades mecánicas se explicitan en la Tabla ??.

En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que transportan un voltaje mayor a 72.5 kV. Este valor de tensión es eminentemente peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elementos aisladores. Estas cadenas aisladoras tradicionalmente de vidrio y cerámicas han ido mutando a poliméricas con un núcleo sólido, aumentando así su tenacidad y flexibilidad. Según la normativa Norma IEC 60815, para alta tensión, deben medir un largo de 10 in. Para el modelo las cadenas se modelaron como barras de Green, debido a su exigua rigidez a flexión y su articulación de

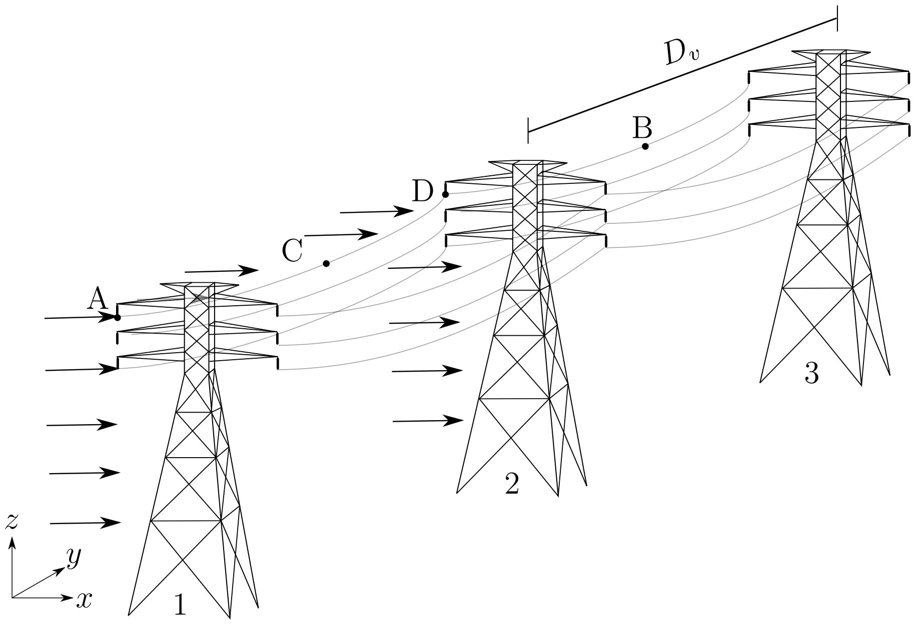


Figura 5.14: Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo.

anclaje en ambos extremos. Además se consideró un modulo de elasticidad aproximado E = 70 GPa según los estudios experimentales realizados por la referencia Crespo, 2019.

Al igual que los aisladores, las barras de la estructura metálica se modelaron con elementos de tipo green, con una ley material Saint-Venant-Kirchhoff con E = 300 GPa y $\nu = 0.3$. Estos valores se corresponden con un acero ASTM A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y ASTM ºG5. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre los opuestos de la cercha 14.8 m. Además son capaces de sostener 6 lineas, estas se corresponden a cada altura, con cada una de las fases eléctricas. Las lineas se encuentran colocadas a tres cotas distintas $L_1 = 31.75$ m, $L_2 = 26.03$ m,$L_3 = 39.76$ m, tal y como se muestra en 5.15.

La simulación consta de dos etapas, primeramente partiendo de la configuración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.15. Nuevamente, al igual que en el Ejemplo 5.2 , esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el amortiguamiento aerodinámico en desplazamientos. Este se calculó como una aproximación a partir de la literatura Matheson y Holmes, 1981 promediando la velocidad media de viento, resultando $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \overline{v} = 0.15$ Ns/m.

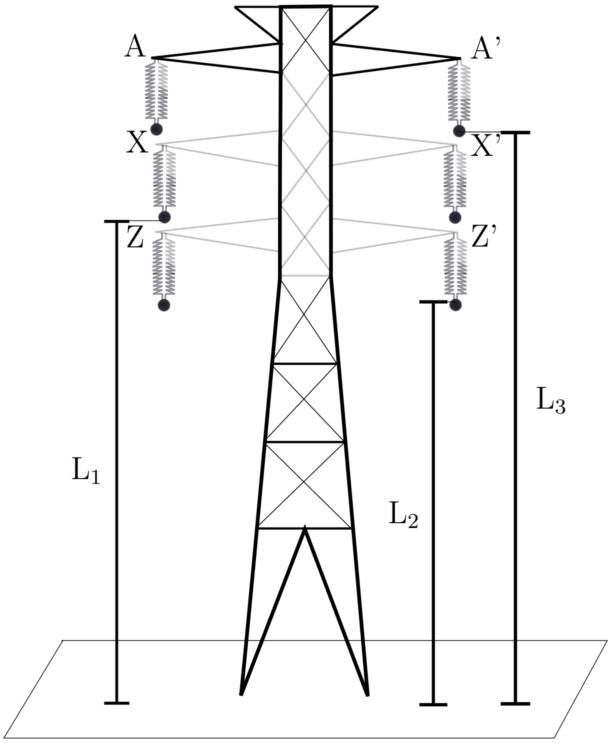
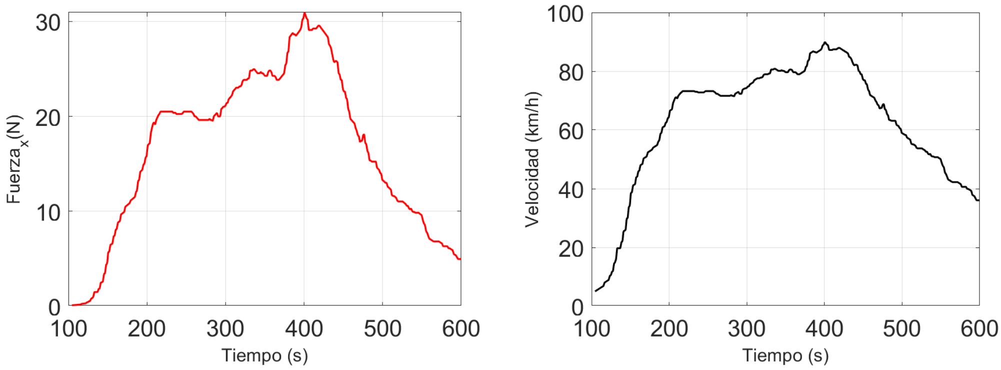


Figura 5.15: Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta convectiva capturado en la referencia Stengel y Thiele, 2017, positiva según el eje x. No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales en la coordenada axial del cable, asociada a una función de coherencia de correlación espacial debida a la turbulencia. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó unicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer resultados respecto al comportamiento felxional en el plano yz, lo que se evidenciará a continuación en disimil desarrollo de las trayectorias entre los nodos A, C, D yB. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa en que estos fenómenos tiene dimensiones espaciales del orden de 40 metros a 40 kilómetros Fujita (1985), consecuentemente es factible que la tormenta afecte a una fracción del tendido. Se muestra continuación en las Figuras **??** los valores de fuerza y velocidad aplicados en la coordenada x entre los nodos A y D para cada instante.

Las tormentas severas generan corrientes descendentes donde las velocidades aumentan vertiginosamente en pequeños intervalos de tiempo, alcanzando umbrales de hasta 270 km/h Fujita, 1985. Para este modelo, el perfil representado es menor tenor, mas no el aumento súbito del fenómeno. La velocidad se



(a) Carga aplicada sobre los nodos.

(b) Perfil de velocidades de viento.

eleva del valor nulo a 80 km/h en menos de 3 minutos, tal y como se observa en la Figura ??. Debido al impacto de del viento sobre el conductor se generan fuerzas, estas se calcularon con los valores de coeficiente drag y fórmula detalladas en el Ejemplo 5.2 anterior extraídos de la referencia Foti y Martinelli (2016).

Ya se ha resaltado en retiradas ocasiones los posibles daños severos que puede ocasionar un excesivo balanceo del conductor. Volores desmedidios de esta variable deben controlarse en todos los aisladores rotulados en el Esquema 5.15. Consecuentemente, se compararon cuantitativamente las oscilaciones entre fases (A-A', X-X', Z-Z'), no apreciándose sensibles diferencias, tanto en desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen apreciables variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A'). Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho de omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe antes el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando que los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A como variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en los ejes x y z como también el ángulo de oscilación Φ tal y cual se observa en la Figura 5.16.

El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de $\Delta T = 0.5$ s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico $\alpha = -0.05$, luego de un arduo y tedioso procedimiento iterativo de ajuste de parámetros se realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con tolerancias en desplazamientos y en fuerzas residuales de 10^{-5} m y 10^{-5} N

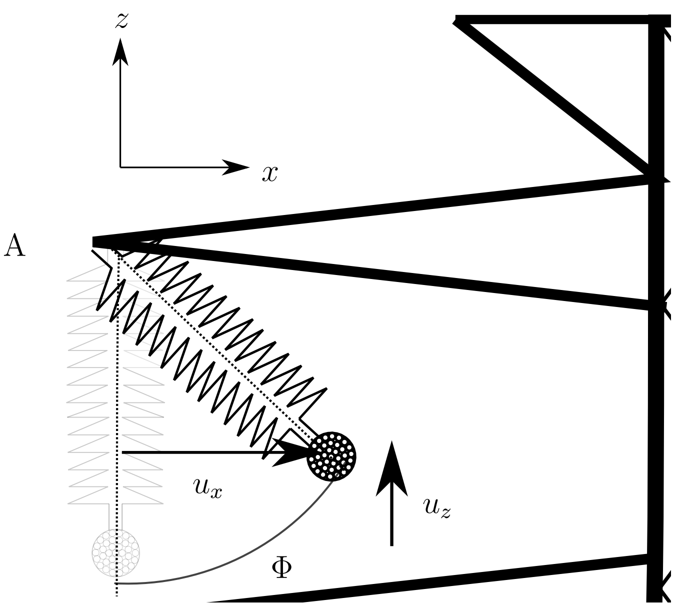
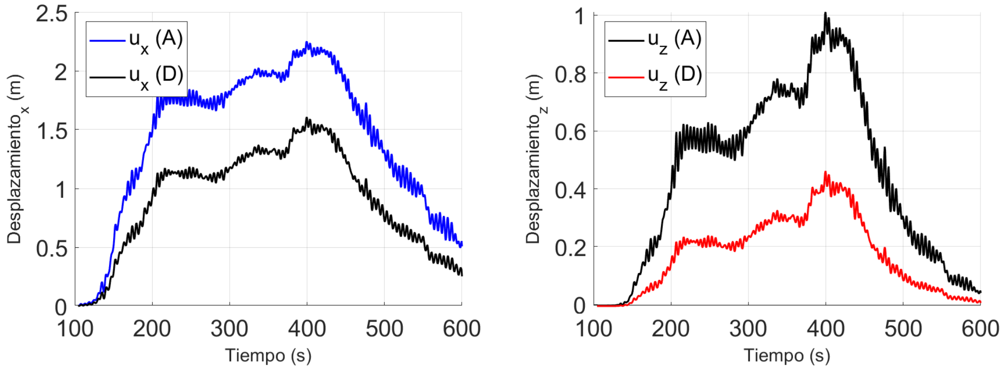


Figura 5.16: Ilustración de magnitudes de balanceo.

respectivamente.

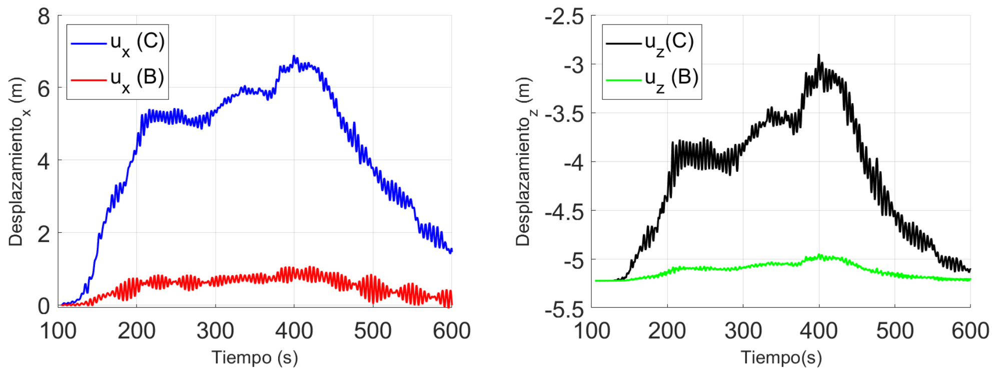
A continuación se figuran los desplazamientos verticales y horizontales de los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magnitudes externas, responden a un argumento basado en el análisis en frecuencia del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en estado estacionario. En ?? y ?? se observan los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo no representa los cargas inerciales de los vanos contiguos a este.

Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del conductor también despliguean grandes desplazamientos, este fenómeno resulta indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de seguridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proximidad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los componentes. Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos para los nodos B y C.



(a) Desplazamientos en x nodos A, D. (b) Desplazamientos en z nodo A, D.

Figura 5.17: Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D



(a) Desplazamientos en x nodos B,C. (b) Desplazamientos en z nodo B, C.

Figura 5.18: Desplazamientos de los nodos medios B y C

En la Figura ?? se aprecia que el orden de los movimientos, para ambos nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación entre estos es de unos 14 metros podremos garantizar que no habrá impactos entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas lineas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central, para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe considerarse a la hora del diseño. En la Figura ?? se muestra que el descenso máximo de la linea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en puntos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctuación temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Gráficas 5.17.

En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables cinemáticas se elaboró la Figura ?? carga desplazamiento para el nodo A. En abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos se graficó un calculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo en el área de ingeniería del viento (Stengel y Thiele, 2017), (Durañona y Cataldo, 2009) (Yang y Hong, 2016).

El cálculo analítico resulta de análisis estático plano, donde se iguala la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones pueden afectar las fuerzas internas trasmitidas al elemento aislador. Asimismo, ese calculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial, proveniente de las distintas orientación de la linea respecto al ángulo de incidencia del flujo. En la Figura ?? se evidencian las diferencias entre los modelos y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales mencionadas, se muestran la con-

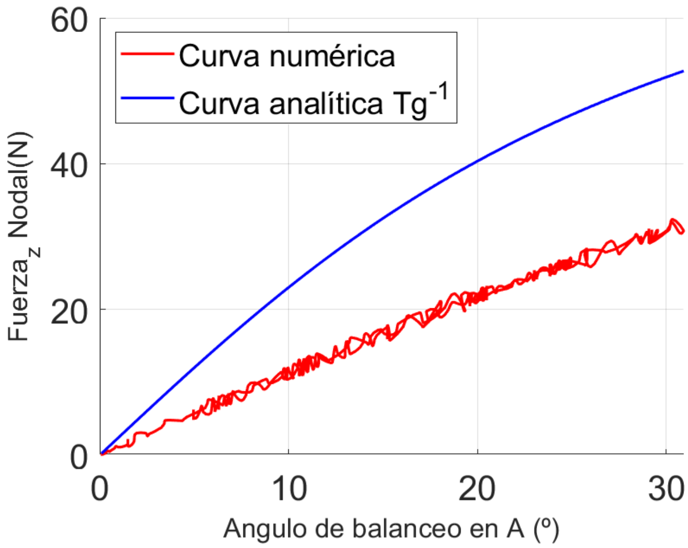


Figura 5.19: Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

figuración indefomradas en gris y las deformadas con una barra de colores en desplazamientos para el instante $t = 400s$ en la Figura ??.

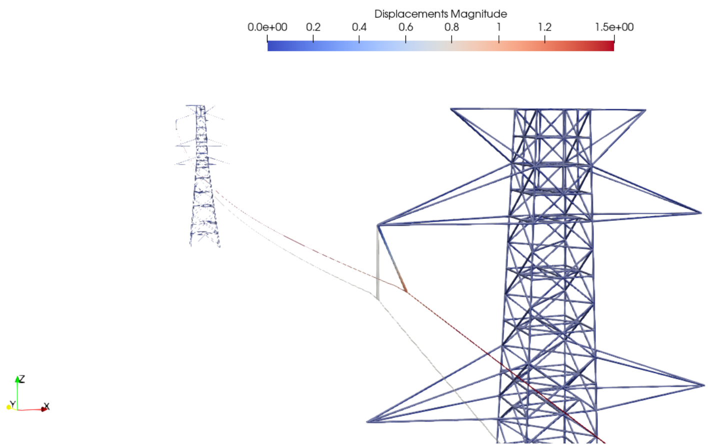


Figura 5.20: Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s.

Capítulo 6

Conclusiones

El presente capítulo puede separarse en tres secciones que se relacionan con diferentes aristas o perspectivas del trabajo llevado a cabo. En primera instancia, se detallan las consideraciones finales y de síntesis, desde un punto de vista técnico sobre los resultados obtenidos. Posteriormente, se narran los aspectos del desarrollo académico de esta tesis como trabajo culmine dentro de una etapa formativa fundamental para quien escribe. Luego de esto, se realizan recomendaciones y posibles trabajos a futuro para finalizar con una reflexión sobre las limitaciones críticas de este trabajo y el método científico en general.

6.1. Conclusiones técnicas

6.1.1. Sobre el fenómeno

Según la bibliografía consultada hay vasta evidencia de que el fenómeno de tormentas convectivas ha afectado severamente la calidad e integridad de vida a lo largo y ancho del globo terráqueo. En particular, debido condiciones climáticas singulares de la región, y el progresivo calentamiento global, han intensificado los daño devastadores en los sistemas de trasmisión y distribución eléctrica nacionales. Induciendo inevitablemente en costos millonarios de reparación sobre las instalaciones y mas las perdidas de ganancias durante interrupción del suministro. Además, estos eventos extremos se manifiestan en corrientes descendentes o tornados extra-tropicales que han puesto en peligro la salud y condiciones de vida de las personas.

A partir de las bibliografías consultadas y los resultados del ejemplo 5.3posible teorizar que la mayoría de las incidencias ocurridas en las líneas Palmar-

Montevideo de 500kV pueden deberse al pasaje de tormentas severas sobre la zona. Estas tormentas producen corrientes descendentes que ejercen cargas desmesuradas sobre el conductor, en el orden de minutos, imponiendo ángulos de balanceo excesivos que acercarían los conductores a las torres a una distancia tal que inminentes descarga a tierra pueden sacar del serivcio a la linea. Además según los estudios, el diseño de sistemas de trasmisión considerando flujos tipo capa límite atmosférica poliandria estar subdimensionando ya que los periodos de retorno para velocidades de hasta 100 km/h es menor para corrientes descendentes respecto de vientos capa límite atmosférica.

Dada la problemática esta investigación la atacó generando herramientas de simulación computacional, capaces de emular los desmedidos desplazamientos y esfuerzos que estos eventos producen sobre los sistemas de trasmisión eléctrica de alta tensión. Para esto, inicialmente se consulto el estado del arte desde un foco de ingeniería del viento y estructural. Se analizaron bibliografías en materia de simulaciones numéricas aplicadas a conducentes eléctricos, con abordajes semi analíticos y computacionales. También, se estudiaron trabajos nacionales e internacionales, desde un punto de vista cualitativo y experimental de corrientes descendentes y sus posibles perjucios en lineas de trasmisión eléctrica. Asimismo, el autor se interiorizó y eligió la formulación corrotacional de vigas 3D. Una vez ahondado en la temática, se implementó y validó un modelo corrotacional consistente robusto y eficaz capaz de captar y reproducir desplazamientos de gran amplitud con numero reducido de elementos.

6.1.2. Sobre la metodología

En la Sección 4.1.2 se desarrolló un estudio general sobre los campos de velocidades absolutos y relativos, vinculados al efecto del movimiento del conductor respecto al viento. Este enofque no se encontró en la bibliografía consultada, esclareciéndose la dinámica del fenómeno. A su vez, según la Figura 4.4, se develó que despreciar la velocidad perpendicular frente a la componente media, en el sentido transversal z, es equivalente a que ángulos de ataque sean nulos y también así, la componente del drag según el sentido de y. Por otra parte, se concluyó que al considerar los campos relativos aparece un término aeroelástico, que emerge de la diferencia de velocidades, vista desde un refrencial solidario al conductor. A este termino se lo identifica en la materia con el nombre de amortiguaneinto aerodinámico o fuerza viscosas.

Una vez descritas las hipótesis en este mismo capítulo, en la Sección 4.2.2 se generó un análisis analítico no explicado en la bibliografía de referencia ("A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014). En este apartado se aplicó el método de resolución para problemas dinámicos de HHT, incondicionalmente estable, para la formulación corrotacional. Explicando con detenimiento la deducción y premisas utilizadas. Posteriormente al despliegue teórico, se establecieron los principales pseudocódigo subyacentes a la implementación numérica en el Software ONSAS. Esta sección 4.2.3 se desarrolló con el objetivo de esquematizar y explicar la implementación de la formulación, ademas de sentar las bases para posibles implementaciones y estudios futuros.

En función de los avances originales de esta investigación mencionados en los párrafos anteriores. Esta tesis constituye un desarrollo complementario a la formulación propuesta, en ("A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014), incluyendo fuerzas aerodinámicas en el estudio analítico. Las estructuras representables por elementos de viga, con grandes desplazamientos y rotaciones, atacadas por el viento es enorme. Dado este diverso habaníco de aplicaciones, el interés de la comunidad científica puede ser un impulso catalizador para ciertas publicaciones a futuro.

6.1.3. Sobre los resultados

Esta formulación se valido con el ejemplo 5.1 benchmark del folclore corrotacional presentado por Simo y Vu-Quoc, 1988. Este es cargado con una fuerza abrupta y de severa magnitud, respecot al rigidez de la estructura alcanzando un valor de 50 N en apenas 2 segundos de simulación, tal y como se muestra en la Figura 5.2. Esta fuerza pose una esencia análoga al fenómeno de tormentas convectivas per se. Esta fuerza aumenta estrepitosamente en un corto lapso de tiempo, por ende la capacidad del modelo de reproducir este tipo de impactos es fundamental para poder emular el fenómeno central de este trabajo en simulaciones de sistemas eléctricos.

En la Figura **??** se observan amplitudes que alcanzan las 8 metros cuando la estructura mide 10. Esto evidencia, la fuerte presencia de grandes desplazamientos y rotaciones. Asimismo, en la dirección z, se puede observar el carácter no conservativo de la formulación corrotacional, ya que los valles y crestas de las respuesta prestan una tendencia decreciente con el tiempo. En relación con los desplazamientos en el sentido de y del nodo A, presentados en la Figura ??, se observa el singo negativo de este, concordando con lo esperado intuitivamente según el sentido de la fuerza aplicada. Por último, el resultado mas importante de este ejemplo se destila al cotejar las respuestas del as Figuras ??, ?? y ?? con lo publicado por le articulo de referencia ("A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", 2014). Al comparar estas figuras se concluye que el modelo implementado es capaz de representar cabalmente movimientos de gran amplitud, con apenas 10 elementos por miembro y unas paso temporal de 0.25 s. Esto permitió validar la formulación para este ejemplo y aplicarla a dominios mas complejos específicamente con el foco en el modelado de conductores eléctricos.

Como primer ejemplo aplicado al modelado de conductores se eligió un problema postulado en la publicación (Foti y Martinelli, 2016). Para esto, se investigó la normativa IEC 60815 que detalla propiedades geométricas y constructivas de conductores para alta y media tensión. Con el fin de cotejar fielmente los resultados obtenidos, se extrajeron, tanto los parámetros del flujo, como las propiedades geométricas y materiales, del trabajo de referencia correspondientes con un conductor DRAKE ASCR 7/26. No obstante, con el objetivo acercar la representación a la real, se incorporaron dos elementos aisladores ilustrativos, que por sus condiciones de borde, no afectan el comportamiento dinámico y cinemático del problema. (Ver Figura 5.8)

Para este ejemplo de la Sección 5.2,se aplicó un viento progresivo desde un valor nulo hasta una velocidad de un perfil Capa límite atmosférica en 20 segundos, según la Figura 5.9. Este cálculo se realizó considerando las propiedades extraídas del(*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003), explicitadas en la Tabla ??. Al espejar los perfiles de velocidad presentados en las Figuras ?? y ?? con las fuerzas aplicadas de la Figura 5.10 se observa una homología. Esto se fundamenta con un análisis de Foruier donde las salidas y entrdas son los desplazamientos y fuerzas respectivamente.

Las contribuciones principales del Ejemplo 5.2 se desprenden al contrastar los resultados del ángulo Φ, gratificado en la Figura 5.12 con los presentados por L. Foti. De este análisis se extraen ciertos paralelismos y discordancias. En primer lugar las perfiles arrojados son semejantes, presentando un relación cuadrática con la velocidad. Esto se atribuye a la relación de dependencia cuadrática de la fuerza con la velocidad media de viento. Sin embargo, para el caso implementado en esta tesis se alcanzan mayores valores de ángulo. Esto puede deberse las múltiples diferencias entre los modelos: la omisión de las componentes turbulentas del flujo, el estado inicial de tensado y la presencia de hielo en las lineas. Los últimos dos factores parecen intuitivamente atenuar el angulo máximo alcanzado por la linea durante el transcurso del movimiento, por su mayor rigidez inicial e inercial. Dado estos resultados, se decidió llevarlas simulaciones a un grado mayor de complejidad, e implementar un modelo con múltiples elementos simulando un sistema de trasmisión eléctrica.

El ejemplo descrito en la sección 5.3 es el resultado principal de este trabajo. Se acoplaron diferentes componentes de un sistema de alta tensión conductores, aisladores y torres. Para esto se validaron ejemplos intermedios integrando resultados lineales e inerciales conocidos con elementos de biela tipo Green y de viga corrotacional. Las geometrías y propiedades que integraron el modelo son extraídas de bibliografías experimentales y normativas buscando representar y emular el fenómeno de forma realista.

De igual modo, el perfil de viento se extrajo de estudios experimentales en el Norte de Alemania durante el transcurso de una tormenta convectiva tipo corriente descendente publicado en (Stengel y Thiele, 2017). Esta es de una magnitud intensa, aunque no en comparación con los resultados capturados en diferentes estudios de campo nacionales como (Durañona y Cataldo, 2009) y el trabajo de Duranona et al. 2019, donde se alcanzan umbrales de 88.2 a 162 km/h a 45 m de altura. Otra diferencia al respecto, refiere al gradiente de velocidad, el flujo introducido numéricamente de Stangel posee una menor aceleración en comparación con tormentas en el territorio uruguayo.

La carga del viento se distribuyo en el primer vano provocando un perfil que ataque diferente a la linea en su coordenada axial. Esto genera un efecto de desfazaje entre los desplazamientos en los vanos. Esta variabilidad del flujo, busca representar un fenómeno de oscilación axial, relacionado con la presencia de vórtices a lo largo del espacio. Las diferencias en desplazamientos de los puntos A B C Y D de la cadena aisladora, se evidencia en las Figuras 5.18 y 5.17. Por mas que los movimientos posean diferentes amplitudes de banda, los perfiles obtenidos se encuentran gráficamente emparentados con el perfil de la tormenta en la Figura **??**.

Finalmente se creó un análisis de contraste con un modelo ampliamente utilizados en el área de Ingeniería del Viento. Esta se utiliza para calcular de forma cuasiestaitca, utilizando una fórmula de arctoangente, basado en un péndulo sin términos dinámicos e inerciales. Los trabajos de Stengel y Thiele, 2017, Durañona y Cataldo, 2009 y Yan et al. 2009 se aplica esta aproximación simplificadora. Si bien en los resultados del Ejemplo 5.3 no son comprables, la aproximación plana no funciona. Para este caso en particular, la curva numérica parece reflejar una linealidad, evaluar el ángulo de la cadena mediante el modelo estático, arrojaría un resultado de sobrestimado. Esto se detalla en la Figura ??.

Estos resultados presentan indicios que para enfrentar la problemática, los códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complementario para el diseño de sistemas de trasmisión de alta tensión. Según contactos establecidos con la empresa de transmisión eléctrica (UTE), las torres de alta y media tensión suelen encargarse a empresas privadas que obtienen la obra por licitación y entregan las instalaciones con llave en mano. Estos proyectos suelen importar soluciones del extranjero, que pueden ser no aplicables a las condiciones nacionales. Esto se explica por la carencia de las normas internacionales en materia de fenómenos de viento no sinópticos como corrientes descendentes y ciclones extratropicales. Esto se intensifica en el territorio para sistemas montados hace 30 años en superposición con la asiduidad y frecuencia en los periodos de retorno.

6.2. Conclusiones de formación

El desarrollo de este trabajo constituyó una instancia de formación fundamental y enriquecedora para el autor enmarcada dentro del programa de Magister en Ingeniería Estructural. Este documento es la síntesis y aplicación de un conjunto de conocimientos profundizados durante la actividad programada, aplicada al modelado numérico de estructuras. Desde la óptica del autor, la creación de herramientas endogenas con foco en atacar problemáticas a nivel nacional constituye un pilar fundamental en el desarrollo autónomo y original de la ingeniería uruguaya. Este trabajo es una muestra de la convicción y determinación, que el conocimiento académico, debe desarrollarse de forma transparente, comunitaria y democrática. Es por esto, que todos los códigos utilizados en esta investigación se implementaron en el software libre ONSAS. Esto abre la posibilidad a cualquier tercero ya sea una organización o persona de estudiar, modificar y difundir los códigos creados como también aplicarlos a sus propias necesidades.

6.3. Trabajos a futuro

Actualmente este trabajo presenta algunas limitaciones o falencias que deberían mejorarse de continuar esta línea de investigación. Como guías de futuras se proponen los siguientes lineamientos que buscan ampliar las potencias y capacidades del modelo:

1. Incluir en el análisis teórico de la formulación corrotacional condiciones de Dirichlet no homogenas en desplazamientos que sean capaces de representar el tensado del conductor durante la instalación. La hipótesis reduccionista sobre la tensión inicial es imprecisa y disminuye la exactitud en la representación del fenómeno. Según el punto de vista del autor, esta implementación en ONSAS es el punto de partida en la continuación de este trabajo.
2. Implementar un módulo modal dentro del ONSAS capaz de calcular los modos estructurales, insumo fundamental para realizar un análisis en frecuencia de posibles resonancias viento-conductor.
3. Agregar al Software ONSAS la posibilidad de incluir relaciones de fuerza viscosas no lineal con diferentes coeficientes de drag y lift de acuerdo al perfil geométrico de la sección. Incluir a partir de esto fuerzas viscosas no lineales, al desarrollo analítico de la formulación corrotacional y su implementación numérica.
4. Agregar al modelo los elementos separadores con mas de un conductor por aislador. En las instalaciones visitadas de forma presencial, se observaron una serie de separadores que mantienen distanciadas los conductores evitando el cortocircuito. Además, unen a cuatro conductores aportando una mayor rigidez e inercia en los tendidos. Este análisis deberá incluir diferentes valores de coeficientes de drag dada la proximidad entre conductores y sus efectos sobre las líneas de flujo.
5. Incorporar diferentes geometrías de torres presentes en los distintos tendidos de distribución del país. Según los datos recolectados en las lineas de distribución a partir de la década del 2000, las modelos de torres cambiaron respecto a los que se representaron el Ejemplo 5.3. Es importante este análisis para lograr emular la influencia de arquitectura de las torres en la aproximación excesiva del conductor las barras. De igual manera, adquirir datos reales aportados por UTE.

6. Incorporar al modelo el agarre doble, que en determinadas ocasiones, se dispone en las lineas centrales de la torre. En algunos casos, una solución ante la aproximación inminente del aislador, consiste en instalar una cadena aisladora extra que oficia de sujetador adicional para los conductores. Rigidizando y evitando de este modo el balanceo desmesurado. Otro tipo de soluciones implantadas, consiste en agregar pesos sobre puntos estratégicos en las lineas, aumentando la inercia del sistema. En este caso, la elección del peso consiste en un compromiso entre los esfuerzos generados en el cable sin alcanzar la fluencia y la masa que disminuye el balanceo. Este tipo de soluciones paliativas resultan interesantes como objeto de simulación.
7. Generar un análisis de malla y sensibilidad respecto a las condiciones de borde establecidas y el numero de elementos por unidad de largo del conductor. Esto permitiría estudiar que grado de discretización sería el ópitmo para minimizar el error numérico sin incurrir en un tiempo excesivo de simulación.
8. Integrar la herramienta ONSAS con un solver de fluidos como por ejemplo el caffa.3d.MBRi basado en volúmenes finitos con paralelización multiforntal Mendina et al. 2014. Esta ardua integración permitiría generar una herramienta sumamente potente para atacar problemas de interacción fluido-estructura.

6.4. Reflexión

Toda disciplina e investigación debería conocer sus propias fugas, fronteras y puntos ciegos. De lo contrario, cualquier pretensión hermética podría ser un síntoma de arrogancia y altanería. A lo largo de este trabajo he canonizado una redacción en tercera persona, como si hubiese una determinada imparcialidad y transparencia en dicho escritor. Este sujeto, apuntado y enfocado en los párrafos siguientes, merece ensimismarse y cuestionarse a si mismo, según el proverbio del Oráculo de Delfos *gnóthi sautón* o en castellano *Conócete a ti mismo*.

Durante el transcurso de este trabajó me surgieron las siguientes inquietudes ¿Es la realidad un conjunto de fenómenos externos o es siempre un acto de interpretación inmanente al sujeto? Ademas, ¿Ese sujeto accede la realidad (el objeto) a través de la razón para conocer y explicarla, o simplemente la experiencia es quien valida ese conjunto de fenómenos?. A partir de esta pregunta, emana una interrogante natural, ¿Es posible entonces, desligar al sujeto del objeto, o mas bien es ente, (ex-siste) en el mundo, y esta siempre arrojado, eyectado y lanzado hacia el? Y de ser así, ¿No se encuentra entonces yá sugestionado por el paradigma actual, su cultura nativa y sus experiencias personales?

Antes que nada, es necesario develar que sujeto en latín *sub*-iectum significa lo que esta debajo, según una interpretación posmoderna. Es entonces el sustrato de esos entes que este dota de sustancia, colores, palabras y formas. Esas preguntas han sido abordadas por eminencias de la filosofía y la ciencia, desde la modernidad hasta hoy. Por un lado, el realismo científico concibe que es posible constatar la realidad a través de la experiencia experimental o a través del pensamiento. Para Descartes ese sujeto duda, piensa y por tanto **ya** en ese acto analítico, existe (*Cogito ergo sum*)Descartes, 1637, osea el ente en tanto ente. El padre del racionalismo nos plantea que el es yo del sujeto, a través de la duda metódica puede acceder la verdad. Contrapuesto a este, el empirismo valida cualquier conocimiento sólo por la experiencia. Esta se define por lo que es captado por nuestros sentidos, es decir que la experiencia es sensorial. Estas dos posturas, la del racionalismo de Descartes y la del empirismo de Hume, pueden ser pensadas como una forma de abordaje a la relación realidad - conocimiento. Para Descartes: conozco en tanto analizo y pienso, y los objetos existen cuando yo realizo la abstracción. Para el empirismo: conozco en la medida en que incorporo la realidad “objetiva”, la de los objetos que puedo percibir por la experiencia sensorial.

A mediados del sg XX surgió un pensador disruptivo viró absolutamente a la cuestión. Frederick Niezstche plantea en su libro Voluntad de Poder Nietzsche, 2018.El pensar no es para nosotros un medio para “conocer”sino para designar el acontecer, para ordenarlo, para volverlo manejable para nuestro uso: así pensamos hoy acerca del pensar: mañana quizá de otro modo ”. Esta frase alude, desde mi perspectiva, a un nihilismo que niega la posibilidad de conocer algo absoluto verdadero pues no es más que un desarrollo pragmático de poder. Sino mas bien es una cuestión de voluntad de voluntad, un dispositivo ordenatorio de la realidad según categorías y características en nuestro acto de querer/poder conocer. Antípoda a esta teoría nihilista aparece el relativismo. Este se estriba en el principio de incertidumbre Heisenberg, si existe ese conocimiento, es entonces indisoluble de cierta estructura. Thomas Khun en su libro *La estructuras de las revoluciones científicas* Kuhn, 2019 plantea que el método científico revoluciona, cuando se produce un cambio de paradigma, no a partir de la observación de nuevos hechos o fenómenos. Junto con otros destacados sociólogos, acuñan la idea del concepto de "cargado de teoría", un cierto conjunto de preconceptos anteriores a la observación, descripción y desarrollo de la cualquier investigación, que llevarán al científico demostrar lo que realmente quiere demostrar... deunuevo demostración de poder.

¿Como se demuestran los resultados de esta investigación?, construyendo un conjunto de artefactos experimentales/computacionales que constatan una supuesta realidad casí como por espejo o correspondencia. En ese proceso de creación o utilización de instrumentos como ser: un programa, un nanemómetro o código computacional existe una omnipresente intervención humana. ¿Vale entonces seguir redactando en tercera persona desde un racionalismo positivista heredado de hace dos siglos? ¿Es coherente no ser categórico en la descripción de un resultado, cuando **ya** todo el dispositivo ordenatorio que subyace es una construcción humana? ¿Debemos seguir defendiendo un cadáver **ya** asesinado por las ciencias humanas desde un sujeto que no es mas que un efecto cultural, histórico y económico?. Por una ciencia en primera persona!

Bibliografía

A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. (2014). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *269*, 538-565. https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.11.007

Abd-Elaal, E.-S., Mills, J. E. y Ma, X. (2013). A coupled parametric-CFD study for determining ages of downbursts through investigation of different field parameters. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *123*, 30-42.

Ahrens, J., Geveci, B. y Law, C. (2005). Paraview: An end-user tool for large data visualization. *The visualization handbook*, *717*(8).

Ahrens, J., Jourdain, S., OLeary, P., Patchett, J., Rogers, D. H. y Petersen, M. (2014). An image-based approach to extreme scale in situ visualization and analysis. *SC'14: Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, 424-434.

Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M. y Paulino, G. H. (2018). Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering Structures*, *173*, 283-299.

Alsafadie, R., Hjiaj, M. y Battini, J.-M. (2010). Corotational mixed finite element formulation for thin-walled beams with generic cross-section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *199*(49-52), 3197-3212.

Ang, A. H.-S. y Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering planning and design.*

Asadi, S. y Johansson, H. (2019). Multibody dynamic modelling of a direct wind turbine drive train. *Wind Engineering*, 0309524X19849827.

Barzanooni, R., Bog, I. T. y Elhaddad, M. (2018). Modeling of Flexible Wirings and Contact Interactions in In-dustrial Robots Using Geometrically Exact Beam Formulation.

Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *191*(17-18), 1755-1789. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8

Behdinan, K., Stylianou, M. y Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *154*(3-4), 151-161.

Blevins, R. D. y Vibrations, F.-I. (1990). Van Nostrand Reinhold. *New York*, 104-110.

Chabart, O. y Lilien, J.-L. (1998). Galloping of electrical lines in wind tunnel facilities. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *74*, 967-976.

Costello, G. A. (1990). Average Voting Members and Other Benign Fictions: The Relative Reliability of Committee Reports, Floor Debates, and Other Sources of Legislative History. *Duke LJ*, 39.

Crespo, C. A. M. (2019). *Análisis en la selección de aisladores para una línea de transmisión*. Facultad de ingeniería/ Universidad Autonma de Mexico.

Darwish, M. M., El Damatty, A. A. y Hangan, H. (2010). Dynamic characteristics of transmission line conductors and behaviour under turbulent downburst loading. *Wind and Structures*, *13*(4), 327.

Davenport, A. G. (1965). *Dynamic Behaviour of Massive Guy Cables*.

De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. y Verhoosel, C. V. (2012). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons.

Desai, Y., Yu, P., Popplewell, N. y Shah, A. (1995). Finite element modelling of transmission line galloping. *Computers & structures*, *57*(3), 407-420.

Descartes, R. (1637). *Discours de la methode*. Leyde.

Di Pilato, M., Martelli, F. y Martinelli, L. (2008). Corotational Cable Elements to Simulate the Behaviour of Suspended Cables under Wind Loading. *not yet published*.

Duranona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *184*, 128-138.

Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme wind climate of Uruguay. *Proceedings of the 14th International Conference on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*, 21-26.

Durañona, V. y Cataldo, J. (2009). Analysis of severe storms in Uruguay and their effect on high voltage transmission lines. *Proceedings of the 11th Americas Conference on Wind Engineering*.

Eaton, J. W., Bateman, D. y Hauberg, S. (2007). *GNU Octave version 3.0. 1 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. SoHo Books.

El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).

Foti, F. (2013). *A corotational beam element and a refined mechanical model for the nonlinear dynamic analysis of cables* (Tesis doctoral). Doctoral Dissertation, Politecnico di Milano, Milan (Italy).

Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*, *40*(13-14), 6451-6467. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063 001

Foti, F. y Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal resonance. *Journal of Vibration and Control*, *24*(7), 1322-1340.

Fujita, T. (1985). The downburst: Microburst and macroburst, SMRP Res.

Gani, F. y Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines guyed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*, *37*(3), 450-465.

Hilber, H. M., Hughes, T. J. y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, *5*(3), 283-292.

Holmes, J. D. (2002). A re-analysis of recorded extreme wind speeds in region A. *Australian Journal of Structural Engineering*, *4*(1), 29-40.

Ibrahimbegovic, A. y Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *191*(37-38), 4241-4258.

Ibrahimbegović, A. y Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *41*(5), 781-814.

Design criteria of overhead transmission lines (Standard). (2003). International Electrotechnical Commission. Geneva, CH.

Irvine, H. M. y Caughey, T. K. (1974). The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *341*(1626), 299-315. https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189

Irvine, H. M. y Griffin, J. H. (1976). *On the dynamic response of a suspended cable* (Vol. 4). https://doi.org/10.1002/eqe.4290040406

Irvine, M. (1978). Free Vibrations of Inclined Cables. *Journal of the Structural Division*, *Vol. 104,* 343-347.

Jones, K. F. (1992). Coupled vertical and horizontal galloping. *Journal of engineering mechanics*, *118*(1), 92-107.

Klöppel, K. y H., L. K. (1942). *Die lotrecheten Eigenschwingungen der Hängerbrücken* (23.ª ed., Vol. 23).

Koh, C. G. y Rong, Y. (2004). Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification. *Journal of sound and vibration*, *272*(1-2), 187-206.

Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, *20*(2), 101-126.

Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones cientificas*. Fondo de cultura economica.

Kutterer, M. y Starossek, U. (1992). *Dynamic cable stiffness and dynamic interaction between cable and beam* (Tesis doctoral).

Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiaj, M. (2011). Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. *Computational Mechanics*, *48*(2), 153-161. https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6
007

Lee, C. L. y Perkins, N. C. (1992). Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, *3*(6), 465-490.

Luongo, A. y Piccardo, G. (1998). Non-linear galloping of sagged cables in 1: 2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, *214*(5), 915-940.

Luongo, A., Rega, G. y Vestroni, F. (1984). Planar non-linear free vibrations of an elastic cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, *19*(1), 39-52.

Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2007). A linear curved-beam model for the analysis of galloping in suspended cables. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, *2*(4), 675-694.

Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2009). On the effect of twist angle on non-linear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, *87*(15-16), 1003-1014.

Mara, T. G. (2007). *The effects of multi-directional winds on lattice sections* (Tesis doctoral). Faculty of Graduate Studies, University of Western Ontario.

Martinelli, L. y Perotti, F. (2004). Numerical analysis of the dynamic behavior of cables under turbulent wind. *Struct. Eng. Mech. & Comput. (SEMC 2004)*.

Martinelli, L. y Perotti, F. (2001). Numerical analysis of the non-linear dynamic behaviour of suspended cables under turbulent wind excitation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, *1*(02), 207-233.

Matheson, M. y Holmes, J. (1981). Simulation of the dynamic response of transmission lines in strong winds. *Engineering Structures*, *3*(2), 105-110.

Mendina, M., Draper, M., Soares, A. P. K., Narancio, G. y Usera, G. (2014). A general purpose parallel block structured open source incompressible flow solver. *Cluster Computing*, *17*(2), 231-241.

Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, *85*(3), 67-94.

Nietzsche, F. (2018). *La voluntad de poder*. Edaf.

Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5

Oran, C. (1973). Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural Division*, *99*(6), 987-1001.

Pacoste, C. y Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *144*(1-2), 163-197.

Papailiou, K. O. (1997). On the bending stiffness of transmission line conductors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, *12*(4), 1576-1583. https://doi.org/10.1109/61.634178
003

Pugsley, A. G. (1949). On the natural frequencies of suspension chains. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, *2*(4), 412-418. https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.412

Quarteroni, A., Sacco, R. y Saleri, F. (2010). *Numerical mathematics* (Vol. 37). Springer Science & Business Media.

Rawlins, C. (2005). Flexure of a single-layer tensioned cable at a rigid support. Proc. 6th International Symposium on Cable Dynamics. Charleston (USA). 19-22 Sept.

Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *149*(1-4), 113-132.

Routh, E. J. et al. (1955). *Dynamics of a system of rigid bodies*. Dover New York.

Saxon, D. S. y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended chain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, *6*(3), 273-285. https://doi.org/10.1093/qjmam/6.3.273

Simiu, E. y Scanlan, R. H. (1986). *Wind Effects on Structures, 3. ed.* (second edi). Jhon Wiley; Sons.

Simo, J. C. y Vu-Quoc, L. (1988). On the dynamics in space of rods undergoing large motions—a geometrically exact approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *66*(2), 125-161.

Starossek, U. (1991). Boundary induced vibration and dynamic stiffness of a sagging cable. http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf

Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia engineering*, *199*, 3152-3157.

Triantafyllou, M. S. (1984). The dynamics of taut inclined cables. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, *37*(3), 421-440. https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421

Viana, H. F., da Silva, R. G. L., Costa, R. S. y Lavall, A. C. C. (2020). Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering the plastic zone method. *Engineering Structures*, *223*, 111197.

Yan, B., Lin, X., Luo, W., Chen, Z. y Liu, Z. (2009). Numerical study on dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission line under wind load. *IEEE Transactions on Power Delivery*, *25*(1), 248-259.

Yang, S. y Hong, H. (2016). Nonlinear inelastic responses of transmission tower-line system under downburst wind. *Engineering Structures*, *123*, 490-500.