

2 Implementación de una formulación
3 corrotacional en dinámica no lineal y
4 aplicación al modelado de líneas de
5 transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural Instituto de Estructuras y

Transporte

Instituto de Ingeniería Mecánica y Producción Industrial

Universidad de la República

Montevideo – Uruguay

Febrero de 2021

¹ Tabla de contenidos

²	1	Metodología	1
³	1.1	Aspectos de modelado computacional	1
⁴	1.1.1	Ecuación de equilibrio	1
⁵	1.1.2	Resolución numérica mediante HHT	3
⁶	1.1.3	Implementación numérica en ONSAS	6
⁷	1.2	Aspectos de modelado estructural	10
⁸	1.2.1	Condiciones iniciales y de borde	10
⁹	1.2.2	Modelo de viento	10

Capítulo 1

Metodología

1.1. Aspectos de modelado computacional

1.1.1. Ecuación de equilibrio

En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámico con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta imprescindible formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis que subyacen a las expresiones descritas en (Le2014). Por añadidura, se construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas \mathbf{f}_{int} , inerciales \mathbf{f}_{ine} y externas \mathbf{f}_{ext} . Este equilibrio es equivalente al postulado de PTV donde el diferencial energía interna y cinética se debe a un trabajo externo. La Ecuación de balance (1.1) debe satisfacerse para todo instante temporal, en particular para $t + \Delta_t$. Dadas determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese instante: desplazamientos $\mathbf{d}(t + \Delta_t)$, velocidades $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$. Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente de manera exacta en la Ecuación (1.1).

$$\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t)) - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)) = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

Los métodos numéricos a groso modo construyen una sucesión que al discreti-

1 zar infinitamente converge a la solución exacta. El método de Newton-Raphson
 2 (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecuación a través de su diferencial
 3 de primer orden. Esta aproximación tiene como consecuencia que la Ecuación
 4 (1.1) ya no será nula sino igual a un resto \mathbf{r} . A su vez tal y como se detalla en
 5 las Ecuaciones (1.2) y (1.3), los métodos numéricos para la solución de proble-
 6 mas dinámicos, escriben las variables de aceleración y velocidad en función de
 7 los desplazamientos. Por lo tanto, el vector resto depende unicamente de dicha
 8 magnitud. Para diferenciar las variables aproximadas de las exactas se intro-
 9 duce la siguiente nomenclatura: $(\mathbf{d}(t + \Delta_t) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_t})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ y
 10 $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$.

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_v(\mathbf{d}_t) \quad (1.2)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_a(\mathbf{d}_t) \quad (1.3)$$

11 Dado lo descrito anteriormente se buscan las aproximaciones cinemáticas
 12 tal que el residuo para un instante $t + \Delta_t$ sea próximo al vector nulo. Esto
 13 epxresa matemáticamente en Ecuación (1.4).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) = & (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) + \dots \\
 & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

14 Por otro lado, según el método
 15 de N-R presentado en **quarteroni2010numerical** es posible construir una
 16 sucesión iterativa en k de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se
 17 acerca el nulo. Realizando una aproximación de Taylor a la función se obtiene
 18 la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}|_k \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

19 Para calcular la derivada del residuo se utiliza la regla de la cadena aplicada
 20 a las funciones de velocidades y aceleraciones respecto de los desplazamientos.
 21 De manera general, se denominan a las derivadas vectoriales

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Las derivadas de la función residuo respecto de desplazamientos, velocidades y aceleraciones son las matrices tangentes descritas en la Sección ??.

Incorporando \mathbf{K}_g , \mathbf{M} y \mathbf{C}_k se llega a:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \right|_k = \left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k \quad (1.7)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (1.7) de N-R se halla el paso en desplazamientos en $k + 1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} =$.

Matemáticamente:

$$\left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k)) = \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (1.8)$$

Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de resolución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones F_a y F_v . Para esto se implementó el método de HHT presentado a continuación en La sección 1.1.2.

1.1.2. Resolución numérica mediante HHT

Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo de Newmark presentado en **newmark1959method**. Según el artículo **hilber1977improved** el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica del método numérico. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (**hilber1977improved**) se compara el método de HHT

1 con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural como
2 ser: el método del trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de New-
3 mark:. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es
4 mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección
5 para la aplicación de conductores y considerando lo implementado en **Le2014**
6 se decidió implementar este método numérico.

7 Primeramente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares,
8 para esto se utiliza la nomenclatura $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Se presentan entonces las
9 funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales
10 en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente
11 en términos de los parámetros de Newmark α y β . Por ende las funciones de
12 actualizacion para el instante $t + \Delta_T$ se escriben:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{y}}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) (\dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{y}}_t)\end{aligned}$$

13 Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros α_{NW}
14 y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT} . Esto se realiza mediante las Ecuaciones
15 (1.11) y (1.12). En estas funciones es posible notar las equivalencias y simili-
16 tudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$
17 se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (1.11)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (1.12)$$

18 Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las fun-
19 ciones de aproximación. Estas se expresan en función del parámetro α_{HHT} el
20 incremento Δ_T ente dos tiempos consecutivos t y $t + \Delta_t$.

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \quad (1.14)$$

1 A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales,
2 las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este
3 tipo de variables no cumple la aditividad algebraica y la propiedad de conmutatividad.
4 Es por esto, que los vector de velocidades y aceleraciones angulares
5 para paso $k + 1$, en el instante $t + \Delta_t$, deben calcularse según las Ecuaciones
6 (1.15) y (1.16) presentadas en la referencia (ibrahimbegovic1998finite).

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{t+\Delta t}^g \left[\frac{\alpha}{\beta \Delta_t} \theta_{t+\Delta t} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_t + \frac{(\beta - 0.5\alpha)\Delta_t}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_t \right] \quad (1.15)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{t+\Delta t}^g \left[\frac{1}{\beta \Delta_t^2} \theta_{t+\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta_t} \dot{\mathbf{w}}_t - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} \right] \quad (1.16)$$

7 En las Ecuaciones (1.15) y (1.16) la transformación $\Lambda_{t+\Delta t}^g$ es la composición
8 de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\Lambda_{t+\Delta t}^g = \exp(\widetilde{\theta_{t+\Delta t}^g}) = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^g (\mathbf{R}_t^g)^T \quad (1.17)$$

9 Análogamente a las derivadas de las funciones lineales se calculan las an-
10 gulares. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones
11 expresiones (1.15) y (1.16).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta t}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_t^2} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta t}^g) \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta t}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_t} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta t}^g) \quad (1.19)$$

12 Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones
13 (1.18), (1.19), (1.13) y (1.14) al definir convenientemente la matriz \mathbf{B}_t . En
14 función de esta es posible escribir los incrementos del vector de velocidades
15 y aclaraciones globales en función del incremento en desplazamiento. Estas
16 relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta_t}^g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{2,t+\Delta_t}^g) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (1.21)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (1.22)$$

Al dividir las Ecuaciones (1.21) y (1.22) se obtienen las funciones F_a y F_v . Estas relaciones matemática debe integrarse a la Ecuación linealizada de equilibrio (1.8) para obtener el paso en desplazamientos para la iteración en el instante $t + \Delta_T$. Finalmente eso se plantea en la Ecuación (1.23).

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) = - \left(\mathbf{K}_g + \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \right) \mathbf{M} \mathbf{B}_t + \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \right) \mathbf{C}_k \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (1.23)$$

Se aclara que una para obtener el valor incremental en desplazamientos la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las matrices que la integran (de masa, centrífuga y tangente). Las matrices tangentes fueron simetrizadas como se aclaró anteriormente para mantener el orden de convergencia. Las matrices centrífugas y de masa devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros α_{HHT} son menores a uno, en general en el intervalo $[-0.1; 0.1]$, la suma de esta matrices suele ser definidas positivas. Por lo que \mathbf{K}_{tot} será invertible. Se aclara que para este trabajo, si bien se consideraron las funciones de actualización angulares para los incrementos, el angulo se sumo de forma aditiva.

1.1.3. Implementación numérica en ONSAS

En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en la librería de software libre: *Open Non Linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Se destaca lo valioso de incorporar el elemento corrotacional a una

1 librería de software abierto. [ONSAS](#) es una herramienta general que permite
2 integrar distintos elementos dentro del mismo modelo, resolver mediante diver-
3 sos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente las salidas en 3D a través
4 del programa de código abierto Paraview.

5 Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones
6 matriciales de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron
7 aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de los
8 pilares fundamentales no solo por ser pionero dela formulación corrotacional
9 aplicada a estructuras, publicadas en los trabajos ([Battini2002](#)) ([Le2014](#))
10 sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación,
11 cuyo valor es invaluable. A continuación en [??](#) se detalla un pseudo-código
12 panorámico sobre la librería general ejecutada en [ONSAS](#).

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta_T, \alpha_{HHT}$
 Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0 \quad \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0 \quad \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$
 Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$
while $t < t_f$ **do**
 finDisp = 0
 Definir: $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$.
 Evaluar $\mathbf{f}_{ext,t+\Delta t}$
 while FinDisp = 0 **do**
 Calcular fuerzas: $\mathbf{f}_{ine}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{int}^k(\mathbf{d}^k)$ y $\mathbf{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$.
 Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K}_g^k \mathbf{M}^k \mathbf{C}_k^k$.
 Despejar $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$
 Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$
 Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$.
 Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$.
 Ensamblar velocidades: $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$
 Ensamblar aceleraciones: $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$,
 Actualizar fuerzas: $\mathbf{f}_{ine}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{int}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$ y $\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})$.
 Calcular:
 if $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\| \vee \|\mathbf{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{ext}\| \vee k \geq \max_{iter}$
 then
 finDisp = 1
 end if
end while
 Actualizar $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}$.
 $t = t + \Delta_T$
end while

13 En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo.

1 Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico que permite
2 incrementar la variable temporal en pasos de Δt y evaluar los valores
3 que son constantes en el tiempo, como ser: el valor de \mathbf{f}_{ext} . Para resolver el
4 estado del sistema en el tiempo $t + \Delta t$ hace falta resolver la ecuación no lineal
5 de resto descrita en la Expresión (1.4). Para esto, se construye una sucesión
6 en desplazamientos que tienda a la solución para ese paso, esto se realiza
7 mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el
8 pseudocódigo ?? se omitió la notación en $t + \Delta t$ para simplificar, mas todas
9 las variables se corresponden a dicho tiempo.

10 Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramente
11 el cálculo del incremento que determina el paso $k + 1$, a partir de los despla-
12 zamientos en el paso actual k . Luego se actualizan las variables cinemáticas de
13 desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza
14 mientras que la variable booleana finDisp sea nula. La alteración de su valor se
15 encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la
16 operación lógica disyunta de tolerancias en desplazamientos tol_u , en vector de
17 fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter} . Las primeras
18 dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos, lográndose de
19 este modo independizarse de las magnitudes absolutas desconocidas. Una vez
20 que el segundo bucle en desplazamientos converge, la variable finDisp alcanza
21 la unidad y se tanto el valor del tiempo como las magnitudes cinemáticas para
22 el instante siguiente.

23 Habiendo explicado la estructura general del código resulta importante pro-
24 fundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices
25 dinámicas tangentes. Este código se agregó a [ONSAS](#) procurando un análisis
26 general para aplicaciones futuras que trascienden al alcance y foco de este tra-
27 bajo. Se presenta a continuación un esquema tipo pseudocódigo de la función
28 [elementbeamforces.m](#) disponible.

29 En el diagrama presentado anteriormente en el Pseudocódigo ?? se obser-
30 van tres divisiones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el
31 desarrollo constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan
32 las matrices de rotación que permiten vincular las magnitudes a cada una de
33 las configuraciones: de referencia, rígida y deformada. Una vez representadas
34 estas transformaciones, se procede a calcular las fuerzas interna y las matrices
35 tangentes en la configuración local a través de la función [beamLocalStatic-](#)
36 [Forces](#). Desafortunadamente tanto entradas como salidas de escrita función se

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$ E ν G \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{d}_g^e
for 1 **to** N_{elem} **do**
 Separar vector desplazamientos $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$
 ————Cálculo de matrices de rotación————
 Computar matrices de rotación global \mathbf{R}_g^1 y \mathbf{R}_g^2
 Evaluar matriz de rotación de referencia \mathbf{R}_o
 Hallar \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q} y calcular \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 .
 Evaluar matriz de rotación rígida \mathbf{R}_r
 Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$
 ———— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente ————
 Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$
 Invertir \mathbf{R}_i y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_i$.
 Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$ y matriz tangente local $\mathbf{K}_T^{\text{loc}}$.
 Construir matrices auxiliares: \mathbf{H} \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{r}
 Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K}_T^g \leftarrow \mathbf{K}_T^{\text{loc}}$ y $\mathbf{f}_{int}^g \leftarrow \mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$.
 ———— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas ————
 Todas las variables dependen de la coordenada (\mathbf{x})
 Definir funciones de interpolación N_i
 Calcular matrices: $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$, \mathbf{P}_2 , \mathbf{N} y \mathbf{H}_1 .
 Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$
 Calcular matrices auxiliares: \mathbf{H}_1 , $\dot{\mathbf{H}}_1$, \mathbf{H}_2 , $\dot{\mathbf{H}}_2$, \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .
 Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.
 Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$
 Hallar expresiones e integrar en el elemento: \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} y \mathbf{C}_k
 Ensamblar : \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} , \mathbf{C}_k \mathbf{K}_T^g \mathbf{f}_{int}^g
end for

1 encuentra referida al sistema de coordenadas locales. Es por esto que resulta
2 inevitable calcular los angulos y desplazamientos locales. Asimismo transfor-
3 mar las salidas a coordenadas globales para integrar al código general expuesto
4 en ??.

5 De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de
6 fuerza inercial asociadas al elemento. Con este fin, se calculan las expresiones
7 analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas están referidas
8 al baricentro ubicado a una distancia x en la configuración de referencia. Para
9 esto se definen una serie de variables auxiliares y sus respectivas derivadas.

10 Una vez finalizado estos cálculos se integran las matrices tangentes y el
11 vector de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica
12 de cuadratura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración.
13 Por último, los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas
14 y estáticas, como los vectores de fuerza inercial e internas, en coordenadas
15 globales, se ensamblan a las matrices de todo el sistema.

16 **1.2. Aspectos de modelado estructural**

17 **1.2.1. Condiciones iniciales y de borde**

18 **1.2.2. Modelo de viento**

19 Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas
20 debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuer-
21 zas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift).
22 Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes en la capa
23 limite en toda la frontera del cuerpo. Mientras que las cargas de lift aparecen
24 sobre el sólido debido a la asimetría del campo de presiones entre el intradós
25 y extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones entre dos superfi-
26 cies contrarias del cuerpo genera una circulación circundante en el campo de
27 velocidades relativos. Al integrar ese campo en curva cerrada correspondiente
28 a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre
29 el cable se ilustran en la Figura ?. Para este trabajo la competente de lift se
30 desprecia frente al drag. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo,
31 esta garantiza que la circulación sea nula, lo que se traduce en que la fuerza
32 lift sea insignificante respecto al arrastre.

1 Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje z en la
2 Figura ??, siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipóte-
3 sis proviene de diferentes trabajos publicados donde la componente perpen-
4 dicular a la superficie terrestre o ascendente suele ser significativamente me-
5 nor a la paralela (**duranona2009analysis**) (**stengel2017measurements**)
6 **yang2016nonlinear**. Esta premisa simplificadora supone que el sistema de
7 transmisión, en el tiempo inicial, se encuentra completamente perpendicular al
8 sentido del viento, por ende la velocidad descarga su mayor fuerza sobre el
9 sistema.

10 Otra hipótesis a clarificar es que no se considera el cambio de orientación
11 del cable respecto al viento. También se deprecia la velocidad relativa que
12 el viento desarrolla respecto al cable y viceversa. Un sucinto análisis de este
13 fenómeno se muestra en ??

14 Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad
15 de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis se sustenta en la
16 mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del el
peso que se opone a la fuerza de sustentación. La componente unidireccional del

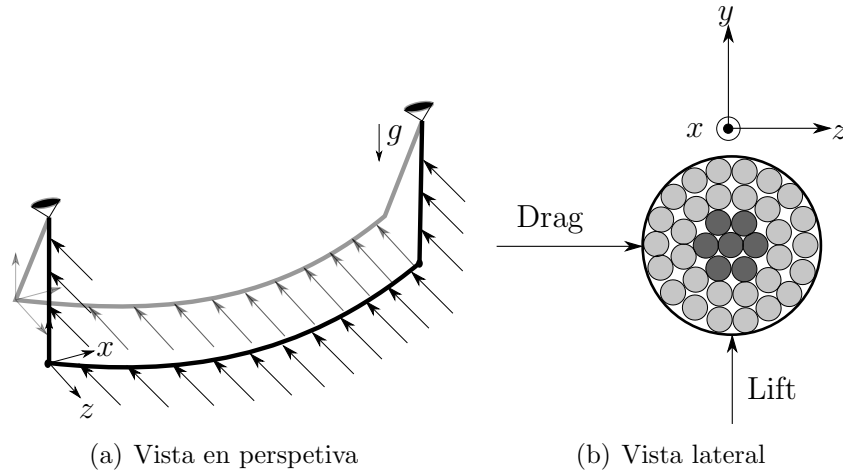


Figura 1.1: Ilustración del viento y sus efectos.

17
18 flujo puede ser desglosada en una termino medido y otro fluctuante $u_v(z, t) =$
19 $u_m(z, t) + u'(z, t)$, por ende la velocidad media para un período T toma la
20 expresión de Ecuación (1.24):

$$u_m(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u_v(t) dt \quad (1.24)$$

El valor del periodo T debe ajustarse minimizando la desviación estándar asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la desviación estándar de la velocidad fluctuante y media para un instante de tiempo dado. Sin embargo para este trabajo no se consideran las fluctuaciones debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de $T = 1/30$ s se extrajo del artículo (**stengel2017measurements**).

Considerando el aire como un fluido no newtoneano indicado ρ la densidad del aire a determinada temperatura, C_d el coeficiente de drag para como función del número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo (“drag”) para un elemento de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la Expresión (1.25):

$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{1}{2} \rho(T) C_d(Re) d_c u_m(t)^2 dl = \frac{1}{2} \rho C_d d_c u_m(t)^2 l_e \quad (1.25)$$

Para este cálculo se asumió como constante a las magnitudes al interior del elemento, es por esto que el valor de la integral es simplemente el producto del integrando por el largo del intervalo. Además se modeló como una fuerza nodal equivalente a la mita de F_v . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales que estas inducen se cancelan con los elementos aledaños. Por otra parte los valores de C_d se extrajeron de las referencias (**Foti2016**) y se verificaron con el estudio para estos coeficientes durante tormentas conectivas (**mara2007effects**). La densidad ρ se consideró la usual para presión atmosférica y una temperatura de 20 °C.

1.2.2.1. Amortiguamiento aerodinámico

En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortiguamiento introducido. Dada una sección arbitraria transversal al cable, donde el viento tiene determinada componente transversal según z) y perpendicular (según y) a el conductor indicadas con el nombre u y v . Un análisis general desde un sistema de referencias abosultos se muestra en la Figura 1.2. En esta imagen se representan las velocidades media y fluctuante u_m y u_a que sumada la velocidad v resulta en el vector de velocidad total V_{tot} formando un ángulo β con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce sobre el conductor este

- 1 despliega una determinada velocidad rígida en ambas direcciones identificadas
2 con las letras W_{ry} y W_{rz} .

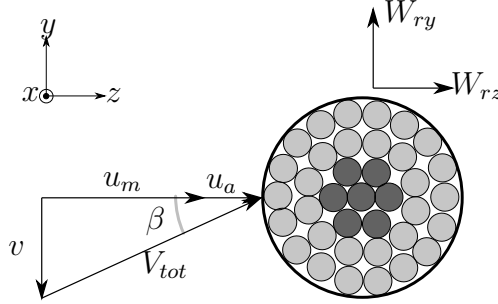


Figura 1.2: Esquema en sistema de referencias absoluto.

- 3 Debido al campo de velocidades del rígido, en un sistema de referencia
4 solidario con el conductor, la velocidad percibida de viento sería la diferencia
5 entre las velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 1.3.
6 Este campo de velocidades relativos origina fuerzas en el sentido paralelo al
7 flujo de drag F_d y perpendicular de lift F_l . Estas puede ser proyectada en el
8 sistema de ejes globales ocasionando dos fuerzas F_z y F_y .

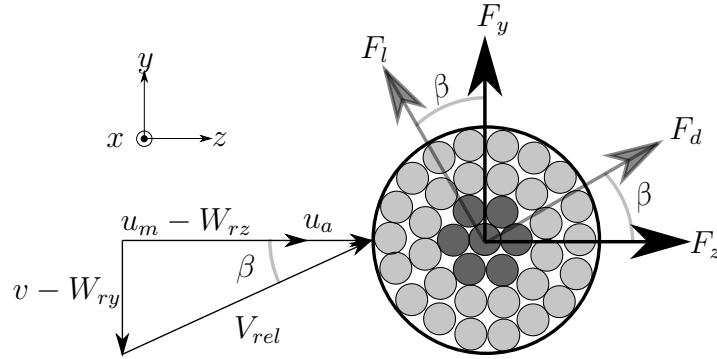


Figura 1.3: Esquema en sistema de referencias relativo.

- 9 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde
10 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta
11 natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas
12 y dinámicas. La velocidad relativa absoluta es el cuadrado de los catetos tal
13 y como se expresa en la Ecuación (1.26). Tomando como hipótesis que las
14 velocidades relativas, de rígido y la componente vertical son mucho menores
15 que la asociada al flujo medio en el sentido de z se deduce la Ecuación (1.27).

$$V_{rel}^2 = (u_m + u_a - W_{rx})^2 + (v - W_{ry})^2 \quad (1.26)$$

$$\frac{V_{rel}^2}{u_m} = u_m + 2(u_a - W_{rz}) \quad (1.27)$$

1 La carga de drag postulada la Ecuación (1.24) por unidad de longitud se
 2 detalla en (1.29). Además se descompone esta en los ejes cartesianos z e y y se
 3 muestra que para las asunciones de velocidad media predominante, el ángulo
 4 de ataque es cercano a 0° . Para formular esto matemáticamente se escriben
 5 las Ecacuines (1.30), (??) y (1.28)

$$\tan(\beta) = \frac{v - W_{ry}}{u_m - W_{rz} + u_a} = \frac{\frac{v - W_{ry}}{u_m}}{1 - \frac{W_{rz} + u_a}{u_m}} \approx 0 \quad (1.28)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c}{2} C_d (u_m + 2(u_a - W_{rz})) u_m \quad (1.29)$$

$$F_x = \bar{F}_x + Fx' - D_x \quad (1.30)$$