Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado en Ingniería Estructural Instituo de Estructuras y Transporte
Instituto de Ingeniaría Mecánica y Producción Industrial
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Febrero de 2021

Tabla de contenidos

Capítulo 1

Introducción

1.0.1. Motivación

Las líneas eléctricas de transmisión son frecuentemente afectadas por eventos climáticos severos como vientos o nevadas. Estos eventos pueden provocar la desconexión de la línea, con consecuencias potencialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de desconexión por vientos extremos en una de las principales líneas de Uruguay. Esto plantea la necesidad de contar con herramientas que permitan predecir estos eventos, garantizando así un suministro contínuo. Dadas las características particulares de los vientos en la región, las soluciones empleadas en otros países no necesariamente son aplicables.

1.0.2. Enfoque

1.0.3. Estructura

Capítulo 2

Estado del arte

Este capítulo incluye la revisión de la literatura, de los enfoques, teorías o conceptos pertinentes en que se fundamenta la investigación. Primeramente en la Sección 2.1 se presenta un relato cronológico del estudio de los cables desde el crepúsculo del Siglo XVIII. A continuación en la Sección 2.2 se expone un recorrido a partir de los años 60's vinculado a simulaciones aplicadas a conductores de alta tensión. Consecutivamente en la Sección 2.3 se describen los fenómenos de corrientes descendentes que afectan las líneas a partir de trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas y otros fenómenos de viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades aeroelásticas numerosos trabajos han estudiado dicha temática y un breve recorrido por ellos se presenta en el apartado 2.4. Por último, en la Sección 2.5 se recorre la metodología corrotacional y los principales autores que desarrollaron esta formulación.

2.1. Historia de la temática

El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena del libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el 1657 revolucionó el conocimiento científico en occidente, tal es así que un siglo y medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino en la aplicación de las principales invenciones de la revolución industrial.

El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas de la época, Brook Taylor,d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al sistema masa resorte en los albores del siglo XVII (**Starossek1991**).

Haciendo uso del problema abstracto elemental del oscilador masa resorte en 1788 Lagrange y otros autores anteriores, hallaron la solución para las vibraciones de un cable inextensible compuesto de un número finito de elementos, de masa despreciable, sometido a la acción de fuerzas externas. Posteriormente, Poisson en 1820 presentó la ecuación diferencial que debería de cumplir el sistema en el continuo, sin embargo las herramientas matemáticas analíticas desarrolladas hasta la fecha no permitían de hallar la solución general a dicha ecuación.(**Irvine1974**)

No fue hasta 80 años mas tarde que en 1868 Routh presentó una solución exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva que describe un punto sobre una esfera girando a velocidad angular constante) **Routh1955**. En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del cable, el primero en su época fue Kloppel y Lie (**Kloppel1942**), a partir de esto Pugsley en 1949 determinó experimentalmente, para una relación entre la deflexión y el largo de vano entre 4 y 10 metros, desarrolló una fórmula para las frecuencias naturales de vibración (**Pugsley1949**). En 1953 considerando un cable inextensible Saxon y Cahn resolvieron la expresión teórica, formulada por Poisson, de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue vital, ya que permitía calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos torres **Saxon1953**.

Tal es así que seguridad de las personas e integridad de los distintos elementos circundantes imprimen criterios de seguridad sobre el descenso de la línea. Actualmente la tensión del conductor durante el montaje, se ajusta de manera tal, que la altura mínima respete un valor exigido por norma. Esta imposición depende principalmente del grado de urbanización, los umbrales de contaminación magnética y la topografía del terreno.

A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los de un sistema masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. En el año 1974 **Irvine1974** halló el rango transitorio entre ambos estados, para corregir dicha discontinuidad se requiere una inclusión completa del modelo de elasticidad del cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables horizontales (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio deflexión-largo del vano entre 1/8 y 0. El mismo autor Irivine extendió lo postulado para conductores con extremos desnivelados, aun bajo la hipótesis de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor (**Irvine1974**).

A posteriori, el mismo investigador profundizó sobre la dinámica con extremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movimiento tipo terremoto (**Irvine1976**) y (**Irvine1978**). La teoría postulada por Irvine fue confirmada por Triafani en 1984 para distintos casos experimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando en cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al movimiento **Triantafyllou1984**.

Autores contemporáneos estudiaron en simultaneo condiciones de borde dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de solicitaciones pueden inducir vibraciones y respuestas de resonancia. Los pioneros en la materia fueron Davenport y Steels ((**Davenport1965**)) en 1965. Resultados más refinados se obtienen por Velastos ((**Veletsos1983**)) y Starossek (**Starossek1991**) . En estas se exponen formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los cables sometidos a la acción del viento, mas estos trabajos no se desarrollan contemplando grandes desplazamientos ni tampoco se consideró no linealidad material.

Ese tipo de solicitaciones revelaron el fenómeno de "Galloping", este refiere a una respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del cable entra en régimen y en consonancia con las fuezas ejercidas por el viento. Teoricamente las geometrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de fenómenos. Sin embargo, debido a la existencia de imperfecciones constrictivas y durante el montaje, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte de energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respuesta se realizaron por Simu, quienes hallaron condiciones de velocidad crítica eólica en función de coeficientes experimentales, obtenidos mediante ensayos consumados en túnel de viento. (**Simiu1986**)

Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al problema de conductores eléctricos. El advenimiento del Método de Elementos Finitos (MEF) aplicado a armaduras en la década del 40 y 50 constituyó una herramienta sumamente potente e innovadora. Esto provocó que en los años venideros se desarrollaran vastas metodologías numéricas incorporando diferentes elementos y algorítmos de resolución computacional. En particular, en Italia un grupo de investigadores pertenecientes a La Universidad de Milan, aplicaron métodos numéricos a la simulación de conductores insoslayables. Un recorrido cronológico y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos científicos se presenta a continuación en la Sección 2.2.

2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de trasmisión eléctrica

Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo por Di Pilatto y Martinelli estaban basados en elementos trinodales isoparamétricos. En esta metodología se asumió las hipótesis de pequeñas deformaciones unitarias, considerandose para el desarrollo no linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, este tipo de modelos presenta la debilidad de no satisfacer las condición de equilibrio dinámico para específicos tipos de balanceo.(**Martinelli2001** y **Martinelli2004**). En consonancia, estudios contemporáneos evidenciaban que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que despreciar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predicciones erróneas sobre las frecuencias naturales de mayor orden. Tal y como se remarca en **koh2004dynamic**.

Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007. En este trabajo el cable se modelaba utilizando abordajes corrotacionales. Di Pillato presentó una formulación considerando elementos de viga tridimensionales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e inerciales teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones en coordenadas globales. Sin embargo, esta formulación basada en lo propuesto por (**oran1973tangent**) tiene como desventaja principal que no es fiable ante grandes rotaciones locales de los nodos, como también, antes significativos incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente para capturar dinámicas complejas resulta necesario e ineludible discretizar el dominio temporal y especial pequeños intervalos. Lo que conlleva a costos computacionales desmedidos.

El mismo autor y su equipo corrigieron las limitaciones relacionadas con los pequeñas rotaciones nodales al año siguiente en su trabajo: **di2008corotational**.La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la configuración deformada utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco el impedimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga, se resuelve aplicando la metodología propuesta Simo and Vu-Quoc en **simo1988dynamics**.

Conforme las simulaciones numéricas avanzaron sobre la materia, la especificación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó. Otro aspecto impulsor en el área se basaba en que los resultados experimentales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos sobre el comportamiento no holomónico del fenómeno. Esto refiere a un modeló realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha temática fueron Papailou y Kutterer en sus trabajos de la década del noventa **Papailiou1997** y **Kutterer1992**.

Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos escenarios, "full slip"donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas. El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre de "full stick". En esta situación el conjunto se comporta como un rígido, he aquí la razón de su nomenclatura. En **Papailiou1997** se establece la tensión máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. Estos resultados fueron contrastados con un análisis experimental.

Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones se traducen en momentos y fuerzas internas a cada cable que conforma al conductor. Estas se pueden vincular a la curvatura o deformación axial del conjunto. A partir de esto, se obtiene la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y momentos internos en función de la deformación y curvatura del conductor.

Esta matriz depende del estado en que se encuentre la dinámica del cable. Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen "full slip.º "full-sitck"la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso "full-stickçuando ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el conductor, la matriz de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente no se le puede atribuir un potencial, esto se asocia al comportamiento no holomónico o histéresis del fenómeno. En dicho estado un modelo de viga uniforme no es aplicable.

Con el propósito de desatollar una formulación que sea capaz de representar el fenómeno computacionalmente se publicó el articulo **Foti2016**. Aquí se implementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuerzas tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter simplificadoras son estudiadas en **costello1990average** y **rawlins2005flexure**. Para el estudio de a los contactos radiales se asume: las superficies de contacto no se deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de contacto entre cables se pueden aproximar por una linea continua, la fricción entre los cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último que la presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjunto con la condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores limites para la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado sobre la pérdida de rigidez súbita que ocurre con el conductor, al producirse deslizamiento relativo al interior del elemento. Esta disminución abrupta de rigidez puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga, esto puede intensificar o agudizar la problemática de balanceos excesivos. Estos movimientos son inminentes para determinadas condiciones atmosféricas, entre ellos las tormentas conectivas. Estas corrientes descendentes han sido objeto de estudio en los últimos 50 años por expertos en ingeniería del viento. En la siguiente Sección se presenta una somera descripción de la literatura investigada.

2.3. Tormentas convectivas

Las tormentas convectivas son fenómenos atmosféricos que generan inestabilidades en el flujo debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad. Cuando estas se ocasionan, masas de aire caliente ascienden hasta la parte superior de la nube, quedando depositado como una especie de domo o cúpula al interior de la misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al interior de la tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodeaba por debajo. Esta corriente desciende a velocidades intensas e impacta con vehemencia sobre la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de anillo vorticoso que puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h **fujita1985downburst**. En este trabajo se establecen escalas espaciales entre

40 m y 4 km. No obstante recientes estudios plantean que se explayan en un diámetro entre 1 y 5 km **darwish2010dynamic**.

Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de trasmisión eléctrica, ciertas normativas se estriban en perfiles de vientos clásicos (sinópticos)tipo capa límite atmosférica. Esto se traduce en una subestimación de las presiones que se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma IEC 60826. Esto pone en riesgo al sistema es atacado por tornados o corrientes descendentes. La probabilidad de ocurrencia es baja para dominios de corta longitud, pero cuando las lineas discurren largas distancias estos vientos extremos suelen suceder esporádicamente **ang1984probability**.

La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de daños vinculado a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores contemporáneos el diámetro de desarrollo del anillo se encuentra intrínsecamente relacionadas con dicha altura **holmes2002re**, **abd2013coupled**. Complementando a esto, **stengel2017measurements** en Alemania capturó este fenómenos utilizando anemómetros colocados en lineas de trasmisión. Esto permitió establecer un perfil de velocidades media y la función de coherencia relacionada con la turbulencia a partir de datos experimentales. De este artículo se extrajo el perfil de vientos implementado en este trabajo.

En nuestro país investigadores integrantes del Grupo de Eolo Dinámica perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante tormentas conectivas trabajo de campo exhaustivo. El primer informe relevado en el articulo **duranona2009analysis** se realiza un calculo del angulo de balanceo, simplificando cauasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio de la fuerza de viento por unidad de peso. En este trabajo se mostró que para valores de velocidad de viento de 97.9 m/s el conductor alcanza los 85º.

Dados los alarmantes resultados de **duranona2009analysis** posteriormente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha en el trabajo (**duranona2015significance**). En este estudio se atisba que fenómenos de corrientes descendentes producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minuto que los vientos tipo capa límite atmosférica. El valor máximo de velocidad registrado alcanzó los 40 m/s en promedio de 10 minutos. En el año 2019, este grupo de investigadores presentó un trabajo relevante donde se resalta que los vientos extremos afecta principalmente al norte del país **duranona2019first**. En este se sugiere que la norma (UNIT:50-84, 1984) debe ser actualizada incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos no sinópticos. Pero los eventos de vientos extremos no son los únicos que afectan a los conductores, también pueden ocurrir inestabilidades estructurales inherentes a interacción entre fluido-estructura.

2.4. Análisis semi-analíticos de conductores

Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pueden experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud, principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente estudiada por distintos autores de la literatura. Como por ejemplo **blevins1990van**, **jones1992coupled**. Para vigas de gran esbeltez, o elementos de cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto lineales como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o dos grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consisten en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal y verificar estos resultados en la práctica. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática destaca el trabajo **chabart1998galloping**, en este se propuso una aproximación innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser: la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en la fuerza lift ante la presencia de excentricidades geométricas.

El fenómeno Galloping presenta las frecuencias del movimiento excesivo suelen ser bajas y son exuberantes a simple vista. Este fenónmeno devastador tiene consecuencias severas sobre todo en lineas que se encuentran en clímas gélidos, recientemente en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur de Argentina y las imágenes son impactantes (Ver vídeo). La principal causa del fenómeno es el ataque de vientos intensos y constantes. La presencia de irregularidades geométricas en las lineas induce inestabilidades aerodinámicas y cuanto mayor sea la cantidad y discontinuidad de las excentricidades más aguda será la respuesta inducida. Las velocidades requeridas de viento suelen ser mayor a 7 m/s y las frecuencias de respuesta del conductor suelen oscilar entre los 0.15 y 1 Hz.

Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente aproximación de las lineas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separadores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, si los relativos entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elementos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en inglés (Torsional Damper Detuner) gira relativo al conductor anulando las formas irregulares producto de la formación de hielo.

En el artículo **jones1992coupled** se halló la solución a la ecuación de movimiento, despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los autovalores que permiten detectar analíticamente bajo que condiciones del sistema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente mayor a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos e indeseables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje vertical. Esto amenaza la seguridad y fiabilidad del sistema ya que esta componente, es limitada durante la instalación a través de cálculos estáticos. Al generarse desplazamiento dinámicos desmedidos, ya no hay garantías de salvaguardar la salud de las personas y los componentes cercanos.

Los estudios de Jones y Blevins, se fraguaban en premisas de linealidad geométrica. Sin embargo, autores han destacado que las efectos no lineales juegan un rol importante en el desarrollo, como ser: las referencias **luongo1984planar** y **lee1992nonlinear**. En el trabajo propuesto por Lee se incluyen componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento del conductor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un modelo lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y tercer orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numericamente la ecuación diferencial del movimiento.

Esta problemática fue abordada unos años mas tarde, por el trabajo publicado **luongo1998non**. En este artículo se hallaron las soluciones no lineales de resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se contrastaron dos soluciones arrojadas por disimiles modelos, uno de pequeños desplazamientos y otro incorporando no linealidades geométricas. En este trabajo se distinguen dos régimes del movimiento, el primero de ellos nominado crítico refiere a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos no presetan gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayectorias se amplifican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se concluye que la solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable para valores de velocidad media de viento correspondiente al estado crítico. Posteriormente al incrementar la velocidad de viento y se desata el fenómeno post-crítico y el incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible para representar cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles simétricos, la velocidad crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis lineal.

Según los autores del trabajo **luongo2007linear**, hasta la fecha de publicación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos aplicados eran exiguos, en espacial para el régimen post-critico del Galloping. Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de angulo de ataque y velocidad relativa entre el conductor y del fuljo. Además eran despreciadas las rigideces a torsión del los elementos, estos se debe a que la rigidez según el eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez felxional, principalmente por un argumento de esbeltez y disposición geométrica del conductor de estudio.

El propósito de **luongo2007linear** fue proponer un elemento de viga orientado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este a torsión. Estos términos representan diferencias notorias para secciones antisimétricas en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados numéricos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el objetivo de hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró, que el ángulo de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones críticas del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuenta los modos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la inclusión del angulo puede influir significativamente en el valor de velocidades críticas aeroelásticas.

A psoterirí, en el trabajo **luongo2009effect** se profundizó en los efectos del angulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como destacado resultado, se probo que mientras la rigidez de torsional no afecta significativamente los desplazamientos traslacionales, en cortaste si lo hace a la solución del angulo de giro. En especial para perfiles sin simetría de revolución. La consideración del balanceo en el lift y en el ángulo de ataque, afecta notoriamente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades de la sección aerodinámica y por tanto su velocidades críticas. Por ende, se resalta la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas para el modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

2.5. Análisis corrotacional de vigas

Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplicaciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos y terrestres. A pesar de las formulaciones “ Updated ”(UL) y “Total Lagrangian”(TL) clásicas, dentro de estas últimas el abordaje corrotacional es idóneo para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamientos den servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de **Nour-Omid1991** quienes sentaron las bases del método.

Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente considerándolo como un rígido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario que permite localizar al elemento en el espacio.Mientras que 0para la componente deformable se considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo sistema de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente. Además, destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento representa términos de no linealidades geométricas mientras que la deformables incorpora no linealidad materiales.

El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La variación de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a esta propiedad anti-simétrica, esta característica depende principalmente del des-balanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al resolver el sistema mediante métodos numéricos como Newton Raphson(N-R). Los autores **Nour-Omid1991** con el objetivo de optimizar el método, demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de convergencia cuadrático.

Debido a voluble capacidad de la metodología corrotacional, en los años posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de elementos y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron al considerar funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentrada y elementos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener de manera sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inerciales. Como habrá notado el sagaz lector, este cálculo conduce ineludiblemente a la matriz de masa constante de Timoshenko. Por otra parte, interpalciones lineales asumen que los desplazamientos transversales al eje de la viga son nulos, esta hipótesis reduce el campo de aplicación del modelo, en especial para mallas de bajo numero de elementos, ya que la matriz de masa tangente y el vector de fuerzas inerciales no representan las componentes omitidas.

En la referencia **Crisfield** se sugiere que el proceso de obtención requerido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado intrincado, debido a su grado de complejidad geométrico. El autor propone utilizar funciones de interpretación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al elemento de Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan controversiales a la hora de derivar el vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consideró un modelo simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones cúbicas para el vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una matriz de masa constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero numéricamente eficiente. Esta forma de proceder también se aplico en **pacoste1997beam**.

En paralelo otros autores, desarrollaron eficientes elementos de viga bidimensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar estructuras en grandes desplazamientos bajo cargas estáticas (**Battini2002 alsafadie2010corotational**). Estos autores afirman que al seleccionar adecuadamente el largo de elemento, los desplazamientos locales son significativamente menores que los asociados a la componente rígida. Por esta razón, se compararon resultados con diferentes número y tipos de elementos para los mismos ejemplos. Estos estudios, en conjunto con lo publicado por **alsafadie2010corotational**, concluyen que formulaciones cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión analítica hacia las componentes dinámicas.

Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos años. El primero de ellos fue **behdinan1998co** a finales de siglo, pero las funciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no eran consistente con la formulación canónica del método corrotacional propuesta por **simo1988dynamics**. De hecho, según el conocimiento del autor, no existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna sino también, las componentes inerciales.

Años mas tarde, **Le2011** publicaron una formulación para vigas 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación independeinte ÏIE"de la referencia **reddy1997locking**. Estos elementos fueron desarrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basadas en los polinomios de Hermitian, con el propósito de incluir consideraciones adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algunas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la literatura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor precisión en los terminos inerciales y sus cambios temporales en función de los desplazamientos locales.

Los mismos autores en conjunto con Lee extendieron la formulación en su trabajo del 2014 **Le2014** agregando una dimensión, este desarrollo se vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmutativiad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensables a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo, se presenta la parte estática desarrollada por Battini en **Battini2002**, además de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuerzas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se selecciono el clásico método Hughes, Hilbert y Taylor (HHT) con los parámetros convencionales (**hilber1977improved**). Este algoritmo es utilizado por reconocidos software comerciales (Abaqus,Lusas) e implica una disipación sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, mas presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

En **Le2014** se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar la nueva formulación con otros dos enfoques. La primer comparación, se deriva de la nueva formulación reemplazando las intercalaciones cúbicas por lineales. El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por **simo1988dynamics**. En base a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones: todas las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no así con mayados gruesos. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente mas imprecisas en comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el modelo. La formulación corrotacional es ligeramente mas lento (12 %) respecto a lo descrito por Simo and Vu-Quoc . Sin embargo, bajo ciertas condiciones altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo.

Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo es un atractivo para distintos investigadores del área. En **albino2018co** Albino modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por materiales graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta mar. En 2019 **asadi2019multibody** simularon palas de aerogeneradores utilizando elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas el tren de trasmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala. En el mismo año el autor **barzanooni2018modeling** atacó la problemática de anillos y interacciones de contacto aplicado a robots industriales también con la formulación propuesta por **Le2014**.

Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación central de este trabajo. Donde se desarrollan grandes desplazamientos y términos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando softwares para ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y mecánica. No obstante, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución de problemas dinámicos.

Capítulo 3

Preliminares

3.1. Formulación corrotacional

A continuación se presenta una descripción metodológica de la formulación corrotacional según lo propuesto en (**Le2014**). La temática se abordara progresivamente según la naturaleza de las variables. En primera instancia se describen las caracterización de magnitudes cinemáticas para luego exponer como, a partir de estas, se deducen las variables dinámicas.

3.1.1. Cinemática corrotacional

El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas representa grandes rotaciones y desplazamientos dados por la dinámica de un elemento rígido. La segunda componente tiene en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material. Este enfoque suele aplicarse al analizar deformaciones estáticas. Resulta intuitivo imaginar en un inicio como se deformaría la estructura de manera rígida para luego aplicarle la componente deformable. Ahora bien, en este tipo de formulaciones, hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten representar los desplazamientos de cada una de las componentes.

Para el abordaje de este análisis debe comprenderse una serie de rotaciones consecutivas ilustradas en la Figura 3.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos, se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa el elemento en su estado indeformado o de referencia. El color naranja identifica a la componente deformada mientras que en gris se ilustra la configuración rígida del elemento.

Para realizar traspasos de una componente a otra se definen una serie de transformaciones. La primera de ellas nominada $\mathbf{R_0}$ lleva al elemento desde su estado de referencia a su estado inicial. A partir de esa configuración podemos hallar la geometría deformada aplicando las transformaciones $\mathbf{R_1^g}$ o $\mathbf{R_2^g}$, dependiendo el nodo de interés. Esta no es la única forma de hallar el estado deformado del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa consiste dado un nodo i al interior del elemento, aplicar consecutivamente las transformaciones $\mathbf{R_r}$ y $\overline{\mathbf{R_i}}$ encontrando así el estado deformado partiendo desde su configuración de referencia.

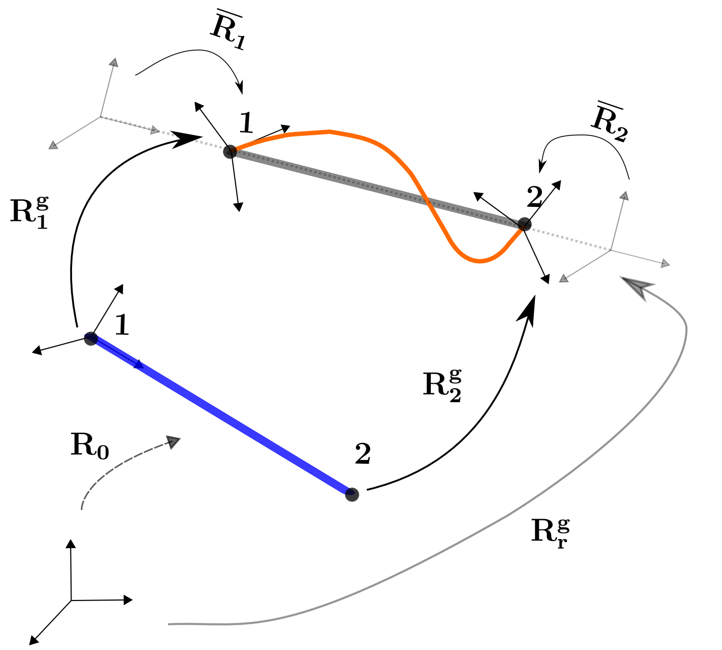


Figura 3.1: Rotaciones a cada configuración.

A partir de las definiciones descritas anteriormente e ilustradas en la Figura 3.1, resulta clarificante destacar los argumentos sobre la nomenclatura seleccionada. En primer lugar, la notación con supra- indice “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a dicha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cuales es la configuración deformada partiendo de la de referencia. Asimismo en la Figura 3.1 tanto las rotaciones locales $\overline{\mathbf{R_i}}$ como globales $\mathbf{R_i^g}$ se utiliza el sub-indice i mientras que para la rotación rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender la metodología corrotacional. Como la componente rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del sub-indice i.

Naturalmente para encontrar la curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y traslación de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas transformaciones se pueden representar matemáticamente con la artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática puede hallarse en la publicación (**kovzar1995finite**).

En los párrafos que prosiguen se desarrollan los sistemas solidarios a los nodos ubicados en los extremos del elemento. El estudio de deformaciones locales para los puntos interiores a la viga se detalla en la Sección 3.1.2.

Para deducir las matrices asociadas a cada transformación resulta imprescindible definir un conjunto de bases que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de versores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 3.2.

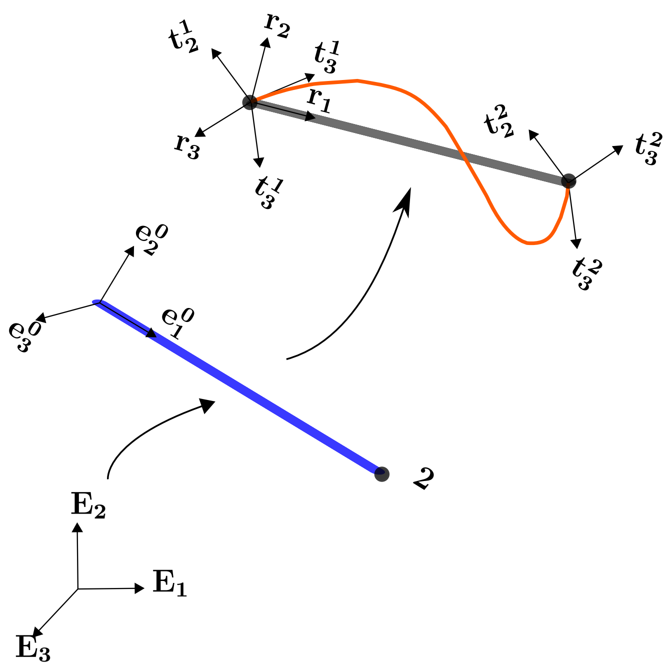


Figura 3.2: Descripción de las bases corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia auxiliar integrado por la base ortogonal $(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3})$. Una vez ubicado el elemento en su estado inicial, las coordenadas se hallan en relación a tres vectores $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Al aplicarle la traslación y rotación de cuerpo rígido la base $(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3})$ se anida al elemento y funciona como sistema de coordenadas en la configuración rígida. Por último, la base $(\mathbf{t_1^i}, \mathbf{t_2^i}, \mathbf{t_3^i})$ permite identificar la orientación y posición del nodo i en la configuración deformada. Se hace énfasis en el hecho de que tanto la configuración inicial como la rígida requieren un único sistema de coordenadas. Por el contrario, la configuración deformada debido a la flexibilidad del elemento, requiere dos sistemas, denotados con la letra $\mathbf{t^i_j}$ donde el supra-indice i identifica el nodo y el sub-indice j la dirección.

La definición de las bases mencionadas en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los vectores solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los versores se establece en la Tabla 3.1 a continuación:

Matriz	Vínculo de bases
$\mathbf{R_0}$	$(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3}) \rightarrow (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$
$\mathbf{R^g_i}$	$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) \rightarrow (\mathbf{t^i_1}, \mathbf{t^i_2}, \mathbf{t^i_3})$
$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{i}$	$(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}) \rightarrow (\mathbf{t^i_1}, \mathbf{t^i_2}, \mathbf{t^i_3})$
$\mathbf{R_r}$	$(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3}) \rightarrow (\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3})$

Tabla 3.1: Caracterización de matrices en términos de la base

Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primer fila se tiene: $\mathbf{R_0} \cdot (\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3})^\mathbf{T} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Al plantear este tipo de vínculos entre vectores y haciendo uso de la propiedad para matrices ortonnormales de la Ecuación 3.1 es posible deducir las Expresiones (3.2) y (3.3).

$$\mathbf{R^T} = \mathbf{R^{-1}} \tag{3.1}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_\mathbf{i} = (\mathbf{R^g_r})^\mathbf{T} \mathbf{R^g_i} \mathbf{R_o} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{R^g_i} \mathbf{R_o} = \mathbf{R^g_r} \overline{\mathbf{R_i}} \tag{3.3}$$

El propósito de la descripción anterior, algo intrincada y engorrosa responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones. Dado un punto arbitrario P, es posible ubicarlo en coordenadas locales y globales tal cual se muestra en la Figura 3.3. En coordenadas locales sus grados de libertad son: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra $\mathbf{u_P}$, y sus desplazamientos angulares con el nombre $\overline{\theta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{P}}}$. Los siete grados de libertad se compactan en el vector $\mathbf{d_l^P} = (\mathbf{u_P}, \overline{\theta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{P}}})$. Ahora bien, es posible desglosar el desplazamiento axial $\mathbf{u}$ en tres componentes según los vectores $\mathbf{r_i}$. Al vector desplazamientos de P en función de la base $\mathbf{r_i}$ se le denomina $\mathbf{d_r}$.

Los desplazamientos de la viga en el punto P también se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas $\mathbf{d_g} = (\mathbf{u^g}, \mathbf{w^g})$. Esta tienen origen en la configuración de referencia o material hasta la deformada como se muestra en la Figura 3.3.

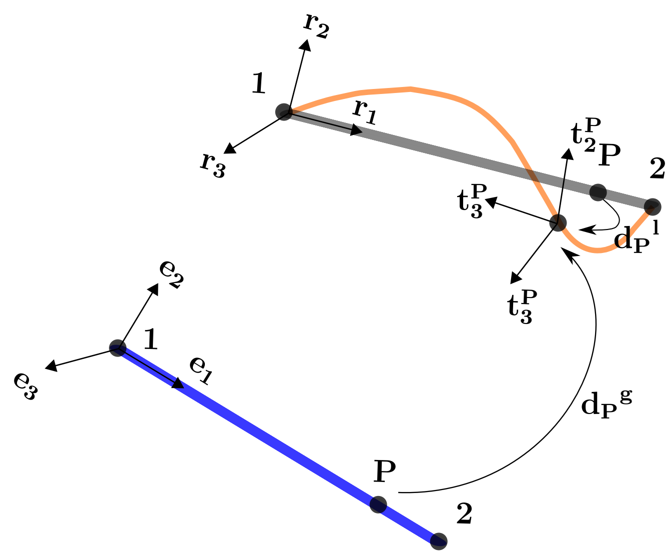


Figura 3.3: Desplazamientos locales y globales del nodo P

Acorde con los desplazamientos presentados anteriormente, es propicio calcular sus diferenciales asociados. Estos emplearan un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. A continuación las Ecuaciones (3.4) y (3.5) definen las variaciones de los desplazamientos locales y globales respectivamente.

$$\delta\mathbf{d_l} = [\delta\bar{u}, \delta\overline{\theta_{\mathbf{1}}}^{\mathbf{T}}, \delta\overline{\theta_{\mathbf{2}}}^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}} \tag{3.4}$$

$$\delta\mathbf{d_g} = [\delta\mathbf{u_1^g}^{\mathbf{T}}, \delta\mathbf{u_2^g}^{\mathbf{T}}, \mathbf{w_1^g}^{\mathbf{T}}, \mathbf{w_2^g}^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}} \tag{3.5}$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, se desarrollan los diferenciales asociados a las transformaciones de giro $\mathbf{R_r^g}$, $\mathbf{R_i^g}$, $\mathbf{R_0}$ y $\overline{\mathbf{R_i}}$. Para esto, primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla 3.1. Las entradas de $\mathbf{R_r}$ y $\mathbf{R_i^g}$ se hallan siguiendo las Ecuaciones (3.6) y (3.7) a continuación:

$$\mathbf{R_r} = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2}\ \mathbf{r_3}] \tag{3.6}$$
$$\mathbf{R_i^g} = [\mathbf{t_1}\ \mathbf{t_2}\ \mathbf{t_3}] \tag{3.7}$$

Los versores $\mathbf{r_i}$ se hallan a partir del vector director $\mathbf{r_1}$ que apunta del nodo 1 al 2. Es por esto que es preciso definirlo en función de las posiciones iniciales de los nodos en coordenadas globales $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, sus desplazamientos $\mathbf{u_1^g}$ y $\mathbf{u_2^g}$ y el largo l_n una vez deformado.

$$l_n = ||\mathbf{X_2} + \mathbf{u_2} - \mathbf{X_1} - \mathbf{u_1}|| \tag{3.8}$$
$$\mathbf{r_1} = \frac{\mathbf{x_2} + \mathbf{u_2} - \mathbf{x_1} - \mathbf{u_1}}{l_n} \tag{3.9}$$

El vector auxiliar $\mathbf{p}$ surge se define para hallar primeramente los vectores $\mathbf{r_i}$ y partir de estos la base $\mathbf{t_i}$. Estos versores son dinámicos y solidarios al movimiento. Están unidas a la configuración rígida y local respectivamente. El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen $\mathbf{p}$, $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ en la Ecuación (3.10):

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}), \qquad \mathbf{p_i} = \mathbf{R_i^g R_0}[\mathbf{0\ 1\ 0}]^{\mathbf{T}} \tag{3.10}$$

En la expresión anterior la matriz $\mathbf{R_0}$ se obtiene colgando los vectores $\mathbf{e_i}$ escritos como combinación lineal de la base $\mathbf{E_i}$. Una vez calculada esta matriz y evaluado las expresiones de la Ecuación (3.10) se obtienen los restantes versores directores de la componente rígida. Esto es:

$$\mathbf{r_3} = \frac{\mathbf{r_1\ x\ p}}{||\mathbf{r_1\ x\ p}||}, \qquad \mathbf{r_2} = \mathbf{r_3\ x\ r_1} \tag{3.11}$$

Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta\overline{\mathbf{R_i}} = \delta\mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\mathbf{R_i^g R_0} + \mathbf{R_r}^{\mathbf{T}}\delta\mathbf{R_i^g R_0} \tag{3.12}$$

En la Ecuación (3.12) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de diferenciales matriciales. Como la transformación $\mathbf{R_0}$ comunica la configuración indeformada y ambas configuraciones son fijas, su matriz es constante. Por lo tanto, su variación es nula. A diferencia de las matrices de giro $\overline{\mathbf{R_i}}$ y $\mathbf{R_i^g}$ sus variaciones pueden hallarse según las Ecuaciones (3.13) y (3.14) respectivamente.

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R_i^g} &= \widetilde{\delta\mathbf{w_i^g}}\ \mathbf{R_i^g} \qquad (3.13)\\ \delta\mathbf{R_r^g} &= \widetilde{\delta\mathbf{w_r^g}}\ \mathbf{R_r} \qquad (3.14)\end{aligned}$$

En la ecuación (3.14) el término $\widetilde{\delta\mathbf{w_r^g}}$ refiere a la operación skew del vector de ángulos de la componente rígida. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a matrices de rotación. La función aplicada al vector $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega_1}, \boldsymbol{\Omega_2}, \boldsymbol{\Omega_3})$ toma la siguiente forma:

$$\text{Skew}(\boldsymbol{\Omega}) = \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

En función de lo descrito anteriormente resta vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las variaciones globales. Para esto se definen las matrices $\mathbf{E}$y $\mathbf{G}$ según las Ecuaciones (3.16) (3.17).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R_r} \end{bmatrix} \to \delta\mathbf{d_g} = \mathbf{E^T}\mathbf{d_g} \qquad (3.16)$$

Notoese que las matrices $\mathbf{R_r}$ tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas dimensiones, $\mathbf{0}$ es una matriz nula de 3x3 e $\mathbf{I}$ una matriz identidad del mismo número de filas y columnas. De forma subsiguiente $\mathbf{E}$ posee 12 entrada en filas y columnas asociadas a los 12 grados de libertad por elemento.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \tfrac{\partial \mathbf{w_r^g}}{\partial \mathbf{d^g}} \\
\mathbf{G(1:6)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta/l_n & \eta_{12}/2 & -\eta_{11}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{G(7:12)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta/l_n & \eta_{22}/2 & -\eta_{21}/2 & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

En la columna 1 y 12 de la matriz $\mathbf{G}$ las entradas son nulas ya que los desplazamiento angulares globales no dependen de los estiramientos axiales de los nodos. Además, los parámetros η se calculan realizando los cocientes entre las componentes de los vectores $\mathbf{p_j}$ y $\mathbf{p_{ij}}$ según la Ecuación (3.18). Siendo el vector p_j el producto $\mathbf{R_r}^\mathbf{T}\mathbf{p}$ y $\mathbf{p_{ij}}$ la multiplicación de $\mathbf{R_r}^\mathbf{T}\mathbf{p_i}$.

$$
\eta = \frac{p_1}{p_2}, \quad \eta_{11} = \frac{p_{11}}{p_2}, \quad \eta_{12} = \frac{p_{12}}{p_2}, \quad \eta_{21} = \frac{p_{21}}{p_2}, \quad \eta_{22} = \frac{p_2}{p_2}, \tag{3.18}
$$

La relación entre los diferenciales anteriores, se pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos de ángulos locales en términos globales. Tal cual se expresa en la Ecuaciones (3.19) donde la matriz $\mathbf{P}$ queda definida. Esto es de sumo interés ya que para el cálculo de fuerzas internas las variables causa y efecto de su generación son los desplazamientos locales. Por ende resulta imprescindible calcular su variación en términos globales.

$$
\begin{bmatrix} \delta\overline{\theta_1} \\ \delta\overline{\theta_2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G^T} \\ \mathbf{G^T} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} = \mathbf{P}\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} \tag{3.19}
$$

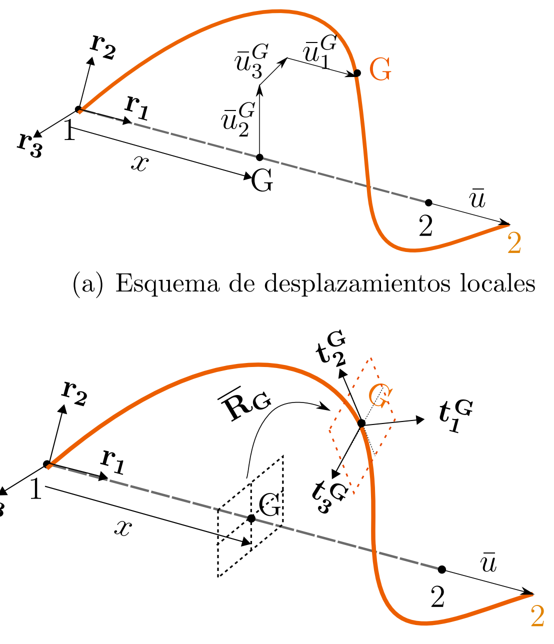
Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coordenadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar $\mathbf{r}$ que vincula los incrementos del desplazamiento axial $\delta\overline{u}$ con los globales. Esto permite escribir la Ecuación (3.4) en relación a (3.5) haciendo uso de la expresión que prosigue (3.20)

$$
\delta\overline{u} = \mathbf{r}\ \mathbf{d_g} \qquad \mathbf{r} = [-\mathbf{r_1^T}\ \mathbf{0_{1,3}}\ \mathbf{r_1^T}\ \mathbf{0_{1,3}}] \tag{3.20}
$$

3.1.2. Formulación local

La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este apartado. se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.1.3.

El movimiento local de una sección ubicada a una distancia x de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir de la rotación y traslación de la sección correspondiente a su centroide G. Una ilustración de esto se muestra en la Figura 3.4, donde la configuración rígida se identifica en punteado y la deformada en color naranja.



(a) Esquema de desplazamientos locales

(b) Esquema de angulos locales

Figura 3.4: Ilustración grados de libertad locales

El movimiento de la base $\mathbf{t_i}$ en respecto del sistema $\mathbf{r_i^G}$ esta dado por los desplazamientos $\bar{u}_3$ según el versor $\mathbf{r_3^G}$ y análogamente para los vectores $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_1$. Esto determina la ubicación del baricientro G. Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores $\mathbf{t_3^G}$ y $\mathbf{t_2^G}$ dentro del plano y un versor perpendicular $\mathbf{t_1^G}$. La transformación $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{G}$ permite encontrar los transformados de la base $\mathbf{r_i^G}$ etiquetados con las letras $\mathbf{t_i^G}$. Por último se observa el desplazamiento axial de la barra $\bar{u}$ correspondiente al del nodo 2 en la dirección $\mathbf{r_1}$.

Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para los desplazamientos axiales $\bar{u}_1$ y para los ángulo de torsión $\theta_{\mathbf{1}}$. Por la contraria, tanto para los desplazamientos transversales $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$ como para los ángulos de flexión, las interpolaciones es través de polinomios cúbicos. Estas funciones interpolantes se detallan en las Ecuaciones (3.21), 3.22 y (3.23).

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \qquad N_2 = \frac{x}{l_0} \tag{3.21}$$

$$N_3 = x\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \qquad N_4 - \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\frac{x^2}{l_0} \tag{3.22}$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right)\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \qquad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right)\left(\frac{x}{l_0}\right) \tag{3.23}$$

Para un punto ubicado a una distancia x del nodo 1 según el vector $\mathbf{r_1}$ es posible calcular los desplazamientos locales en la base $\mathbf{r_i}$. Dado el punto arbitrario G que se desplazo en el sistemas de coordenadas locales según el vector $\mathbf{d_l}^{\mathbf{G}}$. Los valores en términos de la componente rígida $\mathbf{r_i}$ se calculan aplicando la Ecuación 3.24.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d_l^G} \tag{3.24}$$

Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nulas es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas. De esta forma se construyen las matrices $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$. Estas expresan los desplazamientos transversales $\bar{u}_2, \bar{u}_3$ como también los ángulos $\bar{\theta}_1^G$ y $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$ según los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales $\overline{\theta_{\mathbf{1}}}$ y $\overline{\theta_{\mathbf{2}}}$ para el nodo 1 y 2 respectivamente. Esta artimaña analítica se expresa a continuación en las Ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u_l} = \mathbf{P_1} \begin{bmatrix} \overline{\theta_\mathbf{1}} \\ \overline{\theta_\mathbf{2}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_\mathbf{l} = \mathbf{P_2} \begin{bmatrix} \overline{\theta_\mathbf{1}} \\ \overline{\theta_\mathbf{2}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Las hipótesis de Bernoulli desprecian las deformaciones por fuerzas cortantes, esto se refleja en sus polinomios de interpolación. Esta premisa no tiene perjucios sobre la aplicación con la que se modelará el elemento. La estructura de cables es extremadamente esbelta, con relaciones de diámetro respecto a largo ínfimas. Por la tanto, las deformaciones por cortante son efectivamente despreciables respecto a las inducidas por los momentos flectores.

3.1.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura ?? queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa en según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$\mathrm{OG} = \mathbf{x_1^g} + \mathbf{u_1^g} + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r_1} + (\bar{u}_2)\mathbf{r_2} + (\bar{u}_3)\mathbf{r_3} \tag{3.27}$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente definidos en (3.27) y haciendo uso la matriz auxiliar $\mathbf{N}$ es posible escribir los desplazamientos del baricentro y su diferencial asociado.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \;\; \mathbf{I} \;\; \mathbf{0} \;\; N_2 \;\; \mathbf{I} \;\; \mathbf{0}] && (3.28) \\ OG &= N_1(\mathbf{x_1^g} + \mathbf{u_1^g}) + N_2(\mathbf{x_2^g} + \mathbf{u_2^g}) + \mathbf{R_r u_l} && (3.29) \\ \delta OG = \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\delta\mathbf{d_g} + \mathbf{R_r}\delta\mathbf{u_l} + \delta\mathbf{R_r u_l} && (3.30) \end{aligned}$$

La expresión presentada (3.30) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta el cálculo de su magnitud, ya que esos grados de libertad se encuentran solidarios a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones (3.16), (3.17), (3.19) y (3.13) lográndose de este modo, escribir a $\delta\mathbf{u}$ en coordenadas globales. Además se compacta la notación definiendo la matriz $\mathbf{H_1}$ según la Ecuación (3.31).

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{R_r}(\mathbf{N} + \mathbf{P_1}\mathbf{P} - \widetilde{\mathbf{u_l}}\mathbf{G^T})\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} \tag{3.31}$$

Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.4), son despreciables frente a los de la componente rígida. Para el autor **Le2014**, degbido a sus cambios de magnitud entre miseraciones, no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales y rígidos. Esto es: $(\delta\overline{\theta_{\mathbf{ri}}} = \overline{\delta\mathbf{w_i}}\ )$.

Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magnitudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según se establece en la Ecuación

$$\delta\mathbf{w^g}(\mathbf{OG}) = \delta\mathbf{w} = \mathbf{R_r}(\mathbf{P_2}\mathbf{P} + \mathbf{G^T})\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_2}\mathbf{E^T}\delta\mathbf{d_g} \tag{3.32}$$

3.1.2.2. Velocidades y aceleraciones

Las magnitudes dinámicas despeñan un papel primordial en el análisis implementado. Tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en términos globales. De igual modo, que en la Sección 3.1.2.1, se obtienen sus diferenciales asociados. Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.31) se deducen las velocidades traslacionales según la Expresión (3.33). Al aplicar la regla del producto en (3.33) se halla la aceleración lineal del centro de masa del elemento en (3.34).

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\delta\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} \tag{3.33}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\delta\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + (\dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T} + \mathbf{R_r}\dot{\mathbf{H}}_\mathbf{1}\mathbf{E^T} + \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\dot{\mathbf{E^T}})\delta\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} \tag{3.34}$$

Para calcular las igualdades anteriores hace falta evaluar las derivadas temporales de las matrices $\mathbf{E}$ y $\mathbf{R_r}$. Esta operatoria matricial, se traduce en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Como la variable $\mathbf{E}$ depende de $\mathbf{R_r}$ se calculan inicialmente sus derivadas, para luego sustituirlas en $\dot{\mathbf{E}}$. Esto se realiza mediante la expresión en variaciones (3.14) y resulta $\mathbf{R_r} = \mathbf{R_r}\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_\mathbf{r}}$. Al sustituir esta expresión en la derivada de $\dot{\mathbf{E}}$ se deduce la ecuación que prosigue:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E_t} \tag{3.35}$$

El valor skew de los desplazamientos globales sobre la componente rígida $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}$ se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación(3.15), aplicado al vector $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G^T}\mathbf{E^T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g}$. Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la Expresión (3.34) definiendo la matriz $\mathbf{C_1}$ como se enseña a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{C_1} &= \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}\mathbf{H_1} + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{1} - \mathbf{H_1}\mathbf{E_t} && (3.36) \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{R_r}\mathbf{H_1}\mathbf{E^T}\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{R_r}\mathbf{C_1}\mathbf{E^T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} && (3.37) \end{aligned}$$

Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó la nomenclatura para evitar el abuso de notación. Derivando la Ecuación (3.32) respecto a la variable temporal. se deduce la velocidad angular a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{R_r}\mathbf{H_2}\mathbf{E^T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} && (3.38) \\ \mathbf{C_2} &= \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_\mathbf{r}}\mathbf{H_2} + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{2} - \mathbf{H_2}\mathbf{E_t} && (3.39) \\ \ddot{\mathbf{w}} &= \mathbf{R_r}\mathbf{H_2}\mathbf{E^T}\ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{r}\mathbf{C_2}\dot{\mathbf{E}}^\mathbf{T}\dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} && (3.40) \end{aligned}$$

Una descripción detallada puede encontrarse en **Le2014**. Dentro del apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las derivadas temporales de las matrices $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$. También es posible escudriñar la deducción de las matrices $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ y $\mathbf{C_4}$.

3.1.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (**Le2014**) y (**battini2002co**). Acompasando con el avance histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente los vectores de fuerza interna y su matriz de rigidez asociada, para luego ahondar en la incorporación de términos dinámicos.

3.1.3.1. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial fl_1, dos momentos flectores M_1^1, M_2^1 y un momento torsor M_3^1 para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección análoga a los desplazamientos locales para las fuerzas internas, se presenta en la Ecuación (3.41).

$$\boldsymbol{f_l} = [\ fl_1\ M_1^1\ M_2^1\ M_3^1\ M_1^2\ M_2^2\ M_3^2\ ] = [\ fl_1\ \boldsymbol{m}] \tag{3.41}$$

Tanto las magnitudes de fuerza interna como inercial se calcularán inicialmente para coordenadas locales, donde su cálculo es relativamente sencillo, para luego transcribir estos resultados en términos globales. Con este cometido se define la matriz $\mathbf{B}$ según se expresa en la Ecuación (3.42).

$$\delta\mathbf{d_l} = \mathbf{B}\ \delta\mathbf{d_g} \qquad \mathbf{F_g} = \mathbf{B^T}\ \mathbf{f_l}. \tag{3.42}$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Esta primer transformación en la Figura 3.3, refiere a escribir los desplazamientos locales en términos de los rígidos ($\mathbf{t_i} \rightarrow \mathbf{r_i}$). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración rígida a la indeformada ($\delta\mathbf{d_l}$ $\rightarrow \delta\mathbf{d_g}$). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en función de coordenadas estáticas y globales.

Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares $\mathbf{G}$ y $\mathbf{E}$, en las Ecuaciones (3.16) y (3.17) es posible vincular los ángulos diferenciales locales $\delta\overline{\theta_\mathbf{i}}$ con los incrementos globales $\delta\mathbf{d_g}$. Esto permite conocer los momentos flectores y torsores de la viga en coordenadas globales.

Análogamente el vector auxiliar $\mathbf{r}$ contiene a $\mathbf{r_1}$ según el sentido axial de la barra, por lo que reescribir este permite expresar la fuerza de directa $fa1$ en términos de la base $\mathbf{E_i}$. Al unir los razonamientos detallados en los párrafos anteriores, se obtienen las Ecuaciones (3.43) y (3.44) para el cálculo de la fuerza interna y su diferencial:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F^g} &= \mathbf{B^T f_l} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{PE^T} \end{bmatrix} \mathbf{f_a} && (3.43) \\
\delta\mathbf{F^g} &= \mathbf{B^T}\delta\mathbf{f_l} + \delta\mathbf{r^T} f_{a1} + \delta(\mathbf{EP^T})\boldsymbol{m} && (3.44)
\end{aligned}
$$

Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés obtener sus derivadas recepto de los desplazamientos. La matriz tangente representa esta magnitud y es un operador indispensable para la resolución mediante métodos numéricos iterativos. Este cálculo de derivadas respecto a desplazamientos globales de la expresión (3.43) concluye en la Ecuación (3.45) a continuación:

$$
\mathbf{K_g} = \mathbf{B^T K_l B} + \frac{\partial(\mathbf{B^T f_l})}{\partial \mathbf{d_g}} \tag{3.45}
$$

Operando con la regla del producto y sustituyendo la Ecuación (3.44) para el diferencial para la fuerza interna la matriz tangente resulta :

$$
\mathbf{K^g} = \mathbf{B^T K_l B} + \mathbf{D f_{a1}} - \mathbf{EQG^T E^T} + \mathbf{EGar} \tag{3.46}
$$

La matriz $\mathbf{B}$ permite realizar el cambio de coordenadas $\delta\mathbf{d_a}$ a $\delta\mathbf{d_g}$, de acuerdo con lo definido en (3.42). Esta transformación de cambio de base multiplica la variable $\mathbf{K_l}$ correspondiente al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz $\mathbf{K_l}$.

En la Ecuación (3.46) la matriz $\mathbf{D}$ es anti-simétrica y se calcula en función de los productos internos de los vectores $\mathbf{e_i}$, esta aporta la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial $f_l 1$ de la barra. Por otra parte, la matriz auxiliar $\mathbf{Q}$ se halla a partir del producto de $\mathbf{P}$ y los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, y proviene de la componente no lineal de los momentos. Por último, se define el vector $\mathbf{a}$ agrupando así el resto. Dichas defunciones se encuentran en las siguientes Ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_3} & \mathbf{0} & -\mathbf{D_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D_3} & \mathbf{0} & \mathbf{D_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D_3} = \tfrac{\mathbf{1}}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r_1}\mathbf{r_1}^{\mathbf{T}}) \tag{3.47}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p^T}\boldsymbol{m}}\ (1) \\ \widetilde{\mathbf{p^T}\boldsymbol{m}}\ (2) \\ \widetilde{\mathbf{p^T}\boldsymbol{m}}\ (3) \\ \widetilde{\mathbf{p^T}\boldsymbol{m}}\ (4) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.46) es asimétrica, sin embargo según **Rankin1986** esta puede ser simetrizada sin perder la convergencia cuadrática para el método de Newton Raphson (N-R), siempre y cuando momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger **Rankin1986**.

3.1.3.2. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes asociadas. El atractivo principal de la referencia **Le2014** se fragua en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas **Crisfield**. Esta coherencia se debe a la cabal derivación analítica del vector de fuerzas inerciales según el planteo cinemático de las variables descritas en 3.1.3. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad que la magnitud primaria será la energía cinética del elemento. Esta propiedad escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ($\dot{\mathbf{u}}$,$\ddot{\mathbf{u}}$) como también angulares ($\dot{\mathbf{w}}$,$\ddot{\mathbf{w}}$). En las ecuaciones (3.49) y (3.50) a continuación, se presentan la energía cinética de un elemento y su diferencial. Para la obtención de la Expresión se aplicó (3.50) la regla del producto de diferenciales y el teorema de Leibiniz para integrales de extremos fijos.

$$K = \frac{1}{2}\int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} \tag{3.49}$$

$$\delta K = -\int_{l_0} \delta \mathbf{u}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^{\mathbf{T}} [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \mathbf{dl} \tag{3.50}$$

Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subindices "g"para las magnitudes dinámicas ($\mathbf{u}$,$\mathbf{w}$) y sus respectivas derivadas. De igual forma, las variables del integrando en las Ecuaciones (3.49) y (3.50) se omitió la nomenclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga. Los elementos serán de área constante siendo A_ρ el producto del área transversal y la densidad del material, análogamente la matriz $\mathbf{I}_\rho$ es el tensor de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones $\mathbf{R^g}$ y $\mathbf{R_o}$ consecutivamente.

Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsables del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar el vector de fuerza inercial se obtienen las matrices tangentes dinámicas. Esto se expresa en las Ecuaciones (3.51) y (3.52).

$$\delta K = \mathbf{f_k^T} \delta \mathbf{d^g} \tag{3.51}$$

$$\delta \mathbf{f_k} = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_\mathbf{g} + \mathbf{K} \delta \mathbf{d_g} \tag{3.52}$$

En la Ecuación 3.52 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa consistente $\mathbf{M}$ se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, consecutivamente la matriz $\mathbf{C_k}$ giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo $\mathbf{K}$, se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrifuga. Determinados autores **cardona1988beam** y **hsiao1999consistent** proponen considerar unicamente $\mathbf{M}$, sin embargo exhaustivos estudios en (**hsiao1999consistent**) prueban que agregar la matriz $\mathbf{C_k}$ mejora el desempeño computacional para numerosos casos.

Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección 3.1.2.2.

Sustituyendo la Ecuación (3.52) en (3.50) se halla una fórmula para la fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.34), (3.37), (3.38) y (3.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f_k} = \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T R_r}^{\mathbf{T}} A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H_2^T R_r} [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \tag{3.53}$$

Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expresiones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices. Finalmente esto se expresa de forma matemática en las Ecuaciones (3.55) y (3.56).

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{f_k} &= \mathbf{M \Delta \ddot{d}_g} + \mathbf{C_k \Delta \dot{d}_g} + \mathbf{K_k \Delta d_g} \approx \mathbf{M \Delta \ddot{d}_g} + \mathbf{C_k \Delta \dot{d}_g} && (3.54) \\
\mathbf{M} &= \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{l_0}} \{ \mathbf{H_1^T} A_\rho \mathbf{H_1} + \mathbf{H_2^T I}_\rho \mathbf{H_2} \} \, d_l \right] \mathbf{E^T} && (3.55) \\
\mathbf{C_k} &= \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{l_0}} \left\{ \mathbf{H_1^T} A_\rho (\mathbf{C_1} + \mathbf{C_3}) + \int_{\mathbf{l_0}} \mathbf{H_2^T I}_\rho (\mathbf{C_2} + \mathbf{C_4}) + \ldots \right\} \right] \mathbf{E^T} && (3.56) \\
&\ldots \int_{l_0} \mathbf{H_2^T} (\widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho}) d_l && (3.57)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Metodología

4.1. Aspectos de modelado computacional

4.1.1. Ecuación de equilibrio

En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámico con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta imprescindible formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis que subyacen al las expresiones descritas en (**Le2014**). Por añadidura, se construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas $\mathbf{f_{int}}$, inerciales $\mathbf{f_{ine}}$ y externas $\mathbf{f_{ext}}$. Este equilibrio es equivalente al postulado de PTV donde el diferencial energía interna y cinética se debe a un trabajo externo. La Ecuación de balance (4.1) debe satisfacerse para todo instante temporal, en particular para $t + \Delta_t$. Dadas determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese instante: desplazamientos $\mathbf{d}$ $(t+\Delta_t)$, velocidades $\dot{\mathbf{d}}$ $(t+\Delta_t)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}$ $(t+\Delta_t)$. Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente de manera exácta en la Ecuación (4.1).

$$\mathbf{f_{ext,t+\Delta_t}} - \mathbf{f_{int}}(\mathbf{d}(t+\Delta_t)) - \mathbf{f_{ine}}(\mathbf{d}(t+\Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{t})) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Los métodos numéricos a groso modo construyen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta. El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecuación a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como consecuencia que la Ecuación (4.1) ya no será nula sino igual a un resto $\mathbf{r}$. A su vez tal y como se detalla en las Ecuaciones (4.2) y (4.3), los métodos numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de aceleración y velocidad en función de los desplazamientos. Por lo tanto, el vector resto depende unicamente de dicha magnitud. Para diferenciar las variables aproximadas de las exactas se introduce la siguiente nomenclatura: $(\mathbf{d}(t+\Delta_t) \rightarrow \mathbf{d_{t+\Delta_t}})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ y $(\ddot{\mathbf{d}}(t+\Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} &= F_v(\mathbf{d_t}) && (4.2) \\ \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} &= F_a(\mathbf{d_t}) && (4.3) \end{aligned}$$

Dado lo descrito anteriormente se buscan las aproximaciones cinemáticas tal que el residuo para un instante $t+\Delta_t$ sea próximo al vector nulo. Esto epxresa matemáticamente en Ecuación (4.4).

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}) = (-\mathbf{f_{ext,t+\Delta_t}} + \mathbf{f_{int}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}) + ... \\ &\qquad ... + \mathbf{f_{ine}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}}, \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}}), \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}}, \mathbf{d_t}, \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}}, \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}})) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado, según el método de N-R presentado en **quarteroni2010numerical** es posible construir una sucesión iterativa en k de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se acerca el nulo. Realizando una aproximación de Taylor a la función se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}}) = \mathbf{r}(\mathbf{d^{k}_{t+\Delta_t}}) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}|_{\mathbf{k}}\ \mathbf{\Delta d^{k+1}_{t+\Delta_t}} = \mathbf{0} \tag{4.5}$$

Para calcular la derivada del residuo se utiliza la regla de la cadena aplicada a las funciones de velocidades y aceleraciones respecto de los desplazamientos. De manera general, se denominan a las derivadas vectoriales

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} \\
\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}\frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Las derivadas de la función residuo respecto de desplazamientos, velocidades y aceleraciones son las matrices tangentes descritas en la Sección 3.1.3. Incorporando $\mathbf{K_g}$ $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C_k}$ se llega a:

$$
\left.\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d_{t+\Delta_t}})}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\right|_k = \left(\mathbf{K_g} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{C_k}\right)\Bigg|_k \tag{4.7}
$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.7) de N-R se halla el paso en desplazamientos en $k+1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}}$ =. Matemáticamente:

$$
\left(\mathbf{K_g} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d_{t+\Delta_t}}}\mathbf{C_k}\right)\Bigg|_k^{-1} \left(-\mathbf{r}(\mathbf{d^k_{t+\Delta_t}})\right) = \Delta\mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_t}} \tag{4.8}
$$

Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de resolución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones F_a y F_v. Para esto se implementó el método de HHT presentado a continuación en La sección 4.1.2.

4.1.2. Resolución numérica mediante HHT

Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo de Newmark presentado en **newmark1959method**. Según el articulo **hilber1977improved** el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica del método numérico. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (**hilber1977improved**) se compara el método de HHT con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural como ser: el método del trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark:. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores y considerando lo implementado en **Le2014** se decidió implementar este método numérico.

Primeramente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Se presentan entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark α y β. Por ende las funciones de actualizacion para el instante $t + \Delta_T$ se escriben:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2}\mathbf{u}_{\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})^{\mathbf{2}}}\mathbf{u}_{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})}\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\alpha_{\mathbf{NW}}}(\mathbf{1} - \mathbf{2}\alpha_{\mathbf{NW}})\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}} \tag{4.9}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)}\mathbf{u}_{\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}} - \frac{\beta_{\mathbf{NW}}}{\alpha_{\mathbf{NW}}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})}\mathbf{u}_{\mathbf{t}} + \left(\mathbf{1} - \frac{\beta_{\mathbf{NW}}}{\alpha_{\mathbf{NW}}}\right)\dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{t}} + \left(\mathbf{1} - \frac{\beta_{\mathbf{NW}}}{\mathbf{2}\alpha_{\mathbf{NW}}}\right)\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t} \tag{4.10}$$

Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros α_{NW} y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT}. Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.11) y (4.12). En estas funciones es posible notar las equivalencias y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$ se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \tag{4.11}$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \tag{4.12}$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan en función del parámetro α_{HHT} el incremento Δ_T ente dos tiempos consecutivos t y $t + \Delta_t$.

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{T}}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{t}}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{T}}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \tag{4.14}$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la aditividad algebraica y la propiedad de conmutativiad. Es por esto, que los vector de velocidades y aceleraciones angulares para paso $k+1$, en el instante $t+\Delta_t$, deben calcularse según las Ecuaciones (4.15) y (4.16) presentadas en la referencia (**ibrahimbegovic1998finite**).

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta t}} \left[\frac{\alpha}{\beta \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{t}}} \theta_{\mathbf{t+\Delta_t}} + \frac{\beta-\alpha}{\beta}\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} + \frac{(\beta - \mathbf{0.5}\alpha)\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{t}}}{\beta}\ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}}\right] && (4.15)\\
\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta t}} \left[\frac{\mathbf{1}}{\beta \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{2}}} \theta_{\mathbf{t+\Delta_t}} - \frac{\mathbf{1}}{\beta \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{t}}}\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} - \frac{(\mathbf{0.5}-\beta)}{\beta}\ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta t}}\right] && (4.16)
\end{aligned}$$

En las Ecuaciones (4.15) y (4.16) la transformación $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta t}}$ es la composición de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta t}} = \exp(\widetilde{\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}}) = \mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t+\Delta_t}}(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{t}})^{\mathbf{T}} \tag{4.17}$$

Análogamente a las derivadas de las funciones lineales se calculan las angulares. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones expresiones (4.15) y (4.16).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t+\Delta_t}}} &= \frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2} \quad \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) && (4.18)\\
\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t+\Delta_T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t+\Delta t}}} &= \frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \quad \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) && (4.19)
\end{aligned}$$

Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones (4.18), (4.19), (4.13) y (4.14) al definir convenientemente la matriz $\mathbf{B}_{\mathbf{t}}$. En función de esta es posible escribir los incrementos del vector de velocidades y aclaraciones globales en función del incremento en desplazamiento. Estas relaciones se expresan a continuación:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B_t} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{1,t+\Delta_t}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T_s^{-T}}(\theta^{\mathbf{g}}_{\mathbf{2,t+\Delta_t}}) \end{bmatrix} && (4.20)\\
\Delta\dot{\mathbf{d_g}} &= \left(\frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T}\mathbf{B_t}\right)\Delta\mathbf{d_{g,t+\Delta_t}} && (4.21)\\
\Delta\ddot{\mathbf{d_g}} &= \left(\frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2}\mathbf{B_t}\right)\Delta\mathbf{d_{g,t+\Delta_t}} && (4.22)
\end{aligned}
$$

Al dividir las Ecuaciones (4.21) y (4.22) se obtienen las funciones F_a y F_v. Estas relaciones matemática debe integrarse a la Ecuación linealizada de equilibrio (4.8) para obtener el paso en desplazamientos para la iteración en el instante $t + \Delta_T$. Finalmente eso se plantea en la Ecuación (4.23).

$$
\mathbf{r}(\mathbf{d^k_{t+\Delta_t}}) = -\left(\mathbf{K_g} + \left(\frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2\Delta_T^2}\right)\mathbf{MB_t} + \left(\frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T}\right)\mathbf{C_k B_t}\right)\mathbf{\Delta d^{k+1}_{t+\Delta_t}} \tag{4.23}
$$

Se aclara que una para obtener el valor incerementał en desplazamientos la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las matrices que la integran (de masa, centrifuga y tangente). Las matrices tangentes fueron simetrizadas como se aclaró anteriormente para mantener el orden de convergencia. Las matrices centrifugas y de masa devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros α_{HHT} son menores a uno, en general en el intervalo $[-0.1; 0.1]$, la suma de esta matrices suele ser definidas positivas. Por lo que $\mathbf{K_{tot}}$ será invertible. Se aclara que para este trabajo, si bien se consideraron las funciones de actualización angulares para los incrementos, el angulo se sumo de forma aditiva.

4.1.3. Implementación numérica en ONSAS

En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en la librería de software libre: *Open Non Linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Se destaca lo valioso de incorporarar el elemento corrotacional a una librería de software abierto. ONSAS es una herramienta general que permite integrar distintos elementos dentro del mismo modelo, resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente las salidas en 3D a través del programa de código abierto Paraview.

Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones matriciales de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de los pilares fundamentales no solo por ser pionero dela formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en los trabajos (**Battini2002**) (**Le2014**) sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable. A continuación en ?? se detalla un pseudo-código panorámico sobre la librería general ejecutada en ONSAS.

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : tol_r, tol_u, maxIter, Δ_T, α_{HHT}
  Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d_t} \leftarrow \mathbf{d_0}$ $\mathbf{\dot{d}_t} \leftarrow \mathbf{\dot{d}_0}$ $\mathbf{\ddot{d}_t} \leftarrow \mathbf{\ddot{d}_0}$
  Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$
  while $t < t_f$ **do**
    finDisp $= 0$
    Definir: $\mathbf{d^k} \leftarrow \mathbf{d_t}$, $\mathbf{\dot{d}^k} \leftarrow \mathbf{\dot{d}_t}$, $\mathbf{\ddot{d}^k} \leftarrow \mathbf{\ddot{d}_t}$.
    Evaluar $\mathbf{f_{ext,t+\Delta t}}$
    while FinDisp $= 0$ **do**
      Calcular fuerzas: $\mathbf{f^k_{ine}}(\mathbf{d^k}, \mathbf{\dot{d}^k}, \mathbf{\ddot{d}^k})$, $\mathbf{f^k_{int}}(\mathbf{d^k})$ y $\mathbf{res^k}(\mathbf{d^k}, \mathbf{\dot{d}^k}, \mathbf{\ddot{d}^k})$.
      Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K^k_g}$ $\mathbf{M^k}$ $\mathbf{C^k_k}$.
      Despejar $\Delta\mathbf{d^{k+1}}$
      Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d^{k+1}} = \mathbf{d^k} + \mathbf{\Delta d^{k+1}}$
      Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\mathbf{\dot{u}^{k+1}})$, $(\mathbf{\ddot{u}^{k+1}})$.
      Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\mathbf{\dot{w}^{k+1}})$, $(\mathbf{\ddot{w}^{k+1}})$.
      Ensamblar velocidades: $\mathbf{\dot{d}^{k+1}} \leftarrow (\mathbf{\dot{u}^{k+1}}, \mathbf{\dot{w}^{k+1}})$
      Ensamblar aceleraciones: $\mathbf{\ddot{d}^{k+1}} \leftarrow (\mathbf{\ddot{u}^{k+1}}, \mathbf{\ddot{w}^{k+1}})$ ´
      Actualizar fuerzas: $\mathbf{f^{k+1}_{ine}}(\mathbf{d^{k+1}}, \mathbf{\dot{d}^{k+1}}, \mathbf{\ddot{d}^{k+1}})$, $\mathbf{f^{k+1}_{int}}(\mathbf{u^{k+1}})$ y $\mathbf{res}(\mathbf{d^{k+1}})$.
      Calcular:
      if $\left\|\Delta\mathbf{d^{k+1}}\right\| < tol_d \left\|\mathbf{d^{k+1}}\right\|$ V $\left\|\mathbf{res}(\mathbf{d^{k+1}})\right\| < tol_r \left\|\mathbf{f_{ext}}\right\|$ V $\mathrm{k} \geq \mathrm{max}_{iter}$
      then
        finDisp $= 1$
      end if
    end while
    Actualizar $\mathbf{d_t} \leftarrow \mathbf{d^{k+1}_{t+\Delta_T}}$, $\mathbf{\dot{d}_t} \leftarrow \mathbf{\dot{d}^{k+1}_{t+\Delta_T}}$, $\mathbf{\ddot{d}_t} \leftarrow \mathbf{\ddot{d}^{k+1}_{t+\Delta_T}}$.
    $t = t + \Delta_T$
  end while

En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo.

Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico que permite incrementar la variable temporal en pasos de $Delta_T$ y evaluar los valores que son constantes en el tiempo, como ser: el valor de $\mathbf{f_{ext}}$. Para resolver el estado del sistema en el tiempo $t + \Delta T$ hace falta resolver la ecuación no lineal de resto descrita en la Expresión (4.4). Para esto, se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo **??** se omitió la notación en $t + \Delta T$ para simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

Esta parte del código se pudría subdividir en dos estructuras, primeramente el cálculo del incremento que determina el paso $k + 1$, a partir de los desplazamientos en el paso actual k. Luego se actualizan las variables cinemáticas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza mientras que la variable boolena finDisp sea nula. La alteración de su valor se encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la operación lógica disyunta de tolerancias en desplazamientos tol_u, en vector de fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter}. Las primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la variable finDisp alcanza la unidad y se tanto el valor del tiempo como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

Habiendo explicado la estructura general del código resulta importante profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices dinámicas tangentes. Este código se agregó a ONSAS procurando un análisis general para aplicaciones futuras que trascienden al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo pseudocódigo de la función elementbeamforces.m disponible.

En el diagrama presentado anteriormente en el Pseudocódigo **??** se observan tres divisiones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matrices de rotación que permiten vincular las magnitudes a cada una de las configuraciones: de referencia, rígida y deformada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las fuerzas interna y las matrices tangentes en la configuración local a través de la función beamLocalStaticForces. Desafortunadamente tanto entradas como salidas de escrita función se

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I}_\rho^{\mathbf{ref}}$ E ν G $\mathbf{X_1}$ $\mathbf{X_2}$ $\mathbf{d_g^e}$

for 1 **to** N_{elem} **do**

Separar vector desplazamientos $\mathbf{d_g} = (\mathbf{u^g}, \mathbf{w^g})$

————-Cálculo de matrices de rotación ————-

Computar matrices de rotación global $\mathbf{R_g^1}$ y $\mathbf{R_g^2}$

Evaluar matriz de rotación de referencia $\mathbf{R_o}$

Hallar $\mathbf{q_1}$ $\mathbf{q_2}$ $\mathbf{q}$ y calcular $\mathbf{e_1}$ $\mathbf{e_2}$ y $\mathbf{e_3}$.

Evaluar maitrz de rotación rígida $\mathbf{R_r}$

Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R_i} = \mathbf{R_r^T R_g^i R_o}$

———————————————————

——— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente ———

Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$

Invertir $\mathbf{R_i}$ y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_\mathbf{i}$.

Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f_{int}^{loc}}$ y matriz tangente local $\mathbf{K_T^{loc}}$.

Construir matrices auxiliares: **H G P B r**

Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K_T^g} \leftarrow \mathbf{K_T^{loc}}$ y $\mathbf{f_{int}^g} \leftarrow \mathbf{f_{int}^{loc}}$.

———————————————————

—— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámcias——

Todas las variables dependen de la coordenada (x)

Definir funciones de interpolación N_i

Calcular matrices: $\mathbf{P_1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{H_1}$.

Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$

Calcular matrices auxiliares: $\mathbf{H_1}$, $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\mathbf{H_2}$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ y $\mathbf{C_4}$.

Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.

Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\mathbf{ref}}$

Hallar expresiones e integrar en el elemento: $\mathbf{f_{ine}}$ $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C_k}$

Ensamblar : $\mathbf{f_{ine}}$ $\mathbf{M}$, $\mathbf{C_k}$ $\mathbf{K_T^g}$ $\mathbf{f_{int}^g}$

———————————————————

end for

encuentra referida al sistema de coordenadas locales. Es por esto que resulta inevitable calcular los angulos y desplazamientos locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales para integrar al código general expuesto en ??.

De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de fuerza inercial asociadas al elemento. Con este fin, se calculan las expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas están referidas al baricentro ubicado a una distancia x en la configuración de referencia. Para esto se definen una serie de variables auxiliares y sus respectivas derivadas.

Una vez finalizado estos cálculos se integran las matrices tangentes y el vector de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadratura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último, los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas, como los vectores de fuerza inercial e internas, en coordenadas globales, se ensamblan a las matrices de todo el sistema.

4.2. Aspectos de modelado estructural

4.2.1. Condiciones iniciales y de borde

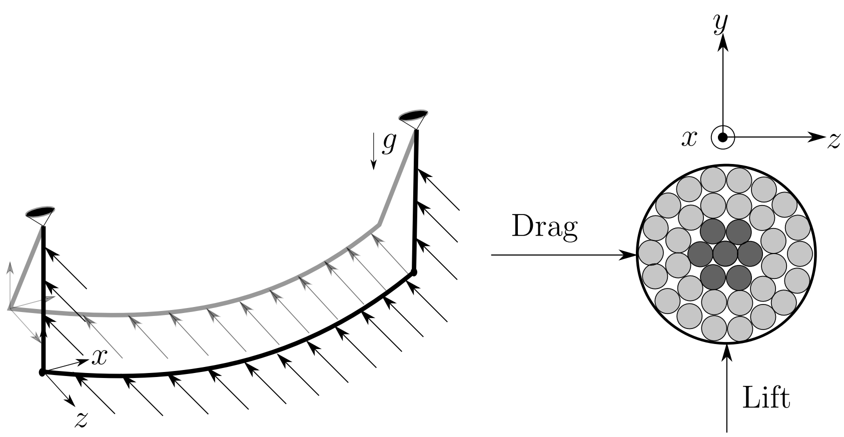
4.2.2. Modelo de viento

Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuerzas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift). Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes en la capa limite en toda la frontera del cuerpo. Mientras que las cargas de lift aparecen sobre el sólido debido a la asimetría del campo de presiones entre el intradós y extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones entre dos superficies contrarias del cuerpo genera una circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en curva cerrada correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura ??. Para este trabajo la competente de lift se desprecia frente al drag. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, esta garantiza que la circulación sea nula, lo que se traduce en que la fuerza lift sea insignificante respecto al arrastre.

Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje z en la Figura **??**, siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipótesis proviene de diferentes trabajos publicados donde la componente perpendicular a la superficie terrestre o ascendente suele ser significativamente menor a la paralela (**duranona2009analysis**) (**stengel2017measurements**) **yang2016nonlinear**. Esta premisa simplificadora supone que el sistema de trasmisión, en el tiempo inicial, se encuentra completamente perpendicular al sentido del viento, por ende la velocidad descarga su mayor fuerza sobre el sistema.

Otra hipótesis a clarificar es que no se considera el cambio de orientación del cable respecto al viento. También se deprecia la velocidad relativa que el viento desarrolla respecto al cable y viceversa. Un sucinto análisis de este fenómeno se muestra en **??**

Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis se sustenta en la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del el peso que se opone a la fuerza de sustentación. La componente unidireccional del



(a) Vista en perspetiva (b) Vista lateral

Figura 4.1: Ilustración del viento y sus efectos.

flujo puede ser desglosada en una termino medido y otro fluctuante $u_v(z,t) = u_m(z,t) + u'(z,t)$, por ende la velocidad media para un período T toma la expresión de Ecuación (4.24):

$$u_m(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u_v(t)dt \tag{4.24}$$

El valor del periodo T debe ajustarse minimizando la desviación estándar asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la desviación estándar de la velocidad fluctuante y media para un instante de tiempo dado. Sin embargo para este trabajo no se consideran las fluctuaciones debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de $T = 1/30$ s se extrajo del artículo (**stengel2017measurements**).

Considerando el aire como un fluido no newtoneano indicado ρ la densidad del aire a determinada temperatura, C_d el coeficiente de drag para como función del número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo ("drag") para un elemento de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la Expresión (4.25):

$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{1}{2}\rho(T)C_d(Re)d_c u_m(t)^2 dl = \frac{1}{2}\rho C_d d_c u_m(t)^2 l_e \tag{4.25}$$

Para este cálculo se asumió como constante a las magnitudes al interior del elemento, es por esto que el valor de la integral es simplemente el producto del integrando por el largo del intervalo. Además se modeló como una fuerza nodal equivalente a la mita de F_v. Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales que estas inducen se cancelan con los elementos aledaños. Por otra parte los valores de C_d se extrajeron de las referencias (**Foti2016**) y se verificaron con el estudio para estos coeficientes durante tormentas conectivas (**mara2007effects**). La densidad ρ se consideró la usual para presión atmosférica y una temperatura de 20 ºC.

4.2.2.1. Amortiguamiento aerodinámico

En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortiguamiento introducido. Dada una sección arbitraria transversal al cable, donde el viento tiene determinada componente transversal según z) y perpendicular (según y) a el conductor indicadas con el nombre u y v. Un análisis general desde un sistema de referencias abosultos se muestra en la Figura 4.2. En esta imagen se representan las velocidades media y fluctuante u_m y u_a que sumada la velocidad v resulta en el vector de velocidad total V_{tot} formando un ángulo β con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce sobre el conductor este despliega una determinada velocidad rígida en ambas direcciones identificadas con las letras W_{ry} y W_{rz}.

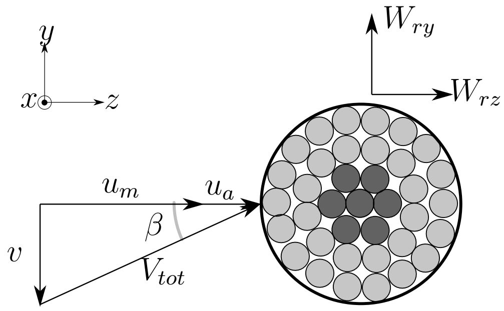


Figura 4.2: Esquema en sistema de referencias absoluto.

Debido al campo de velocidades del rígido, en un sistema de referencia solidario con el conductor, la velocidad percibida de viento sería la diferencia entre las velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 4.3. Este campo de velocidades relativos origina fuerzas en el sentido paralelo al flujo de drag F_d y perpendicular de lift F_l. Estas puede ser proyectada en el sistema de ejes globales ocasionando dos fuerzas F_z y F_y.

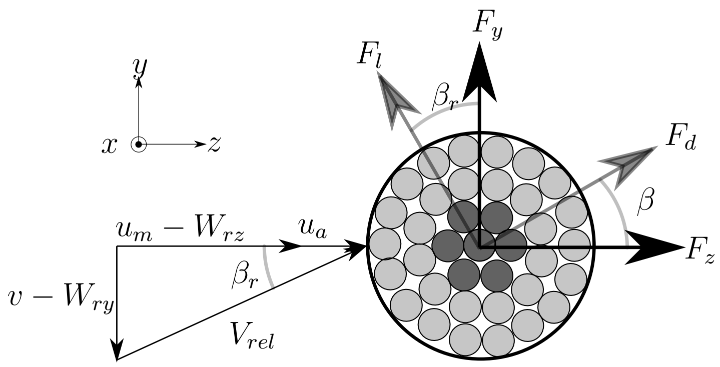


Figura 4.3: Esquema en sistema de referencias relativo.

Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y dinámicas. La velocidad relativa absoluta es el cuadrado de los catetos tal y como se exrepsa en la Ecuación (4.26). Tomando como hipótesis que las velocidades relativas, de rígido y la componente vertical son mucho menores que la asociada al flujo medio en el sentido de z se deduce la Ecuación (4.27).

$$V_{rel}^2 = (u_m + u_a - W_{rx})^2 + (v - W_{ry})^2 \tag{4.26}$$

$$\frac{V_{rel}^2}{u_m} = u_m + 2(u_a - W_{rz}) \tag{4.27}$$

La carga de drag postulada la Ecuación (4.24) por unidad de longitud se detalla en (4.29). Además se muestra que para las asunciones de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a 0°. Para formular esto matemáticamente se escriben las Ecuaciones (4.29) y (4.28).

$$\tan(\beta) = \frac{v - W_{ry}}{u_m - W_{rz} + u_a} = \frac{\frac{v - W_{ry}}{u_m}}{1\frac{-W_{rz}+u_a}{u_m}} \approx 0 \tag{4.28}$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2}(u_m + 2(u_a - W_{rz}))u_m \tag{4.29}$$

Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes z e y. Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de esta se hallan el campo de desplzamientios, velocidad y aceleraciones. Considerando que ángulo β es ínfimo y por lo tanto $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$ y $\cos(\beta) = 1$ al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2}(u_m^2 + u_a^2 - 2u_a u_m)\cos(\beta_r) \tag{4.30}$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2}(u_m^2 + u_a^2 + 2u_a u_m)\sin(\beta_r) \approx 0 \tag{4.31}$$

Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud es una promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un tercer termino surge al escindir la Ecuación (4.29) que depende del producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Es por esto que se le llama amortiguamiento aerodinámico, pus depende del campo de velocidades del fluido y del sólido y es sorpresivamente en sentido contrario a la sentido del viento. Esta descomposición de fuerzas según z se le llaman $\bar{F}_x$, F_a, $-D$ a la componente media, alternante y de amoritguamentio dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan a continuación:

$$\bar{F}_x == \frac{\rho d_c C_d}{2}(u_m^2) \tag{4.32}$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2}(u_a^2) \tag{4.33}$$

$$D = \frac{\rho d_c C_d}{2}(2u_a u_m) \tag{4.34}$$

Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos se postulan las premisas en las cual se fragua este trabajo para el modelado de la fuerza del viento sobre la linea:

- No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
- La velocidad relativa transversal $v - W_r y$ al igual que la componente alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el sentido de z llamada u_m.
- La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera despreciable frente al drag.
- Para la fuerza en el sentido de z se desprecia la componente fluctuante F_a.
- Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico se promedió la velocidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el dominio temporal de simulación.

Capítulo 5

Resultados numéricos

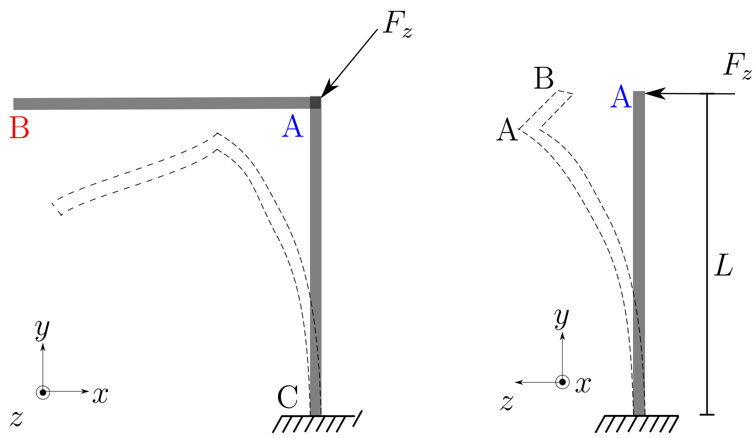
En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementación corrotacional detallada en 3.1, para luego aplicarse a modelos específicos de conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando un computador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de 8 Gb. La formulación se implementó en el software de código abierto ONSAS [1] el cual se ejecutó en GNU-Octave **Octave**y visualizándose los resultados haciendo uso del la herramienta Paraview **squillacote2007paraview**. Vale notar que el hilo conductual de este capítulo fue ideado con un aumento progresivo de complejidad. Capturando en modelos simples y académicos los movimientos fundamentales de los elementos, para garantizar así una representación cabal del fenómeno de oscilación del conductor en servicio.

5.1. Vigas en voladizo con ángulo recto

Este ejemplo fue publicado por primera vez en **simo1988dynamics** y es usualmente considerado en la literatura para validar formulaciones de elementos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales (**albino2018co Le2014**). El mismo consta de dos barra idénticas en ángulo recto formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo $L = 10$ m tal y como se ilustra en las Figuras 5.1.

Las propiedades del rigideces de torsión, flexión y directa del ejemplo se seleccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales,

[1] https://github.com/ONSAS/ONSAS/



(a) Vista frontal (b) Vista lateral

Figura 5.1: Disposición geométrica de la estructura.

garantizan movimientos de gran amplitud y para esto deben cumplir determinadas igualdades Por esta razón la elección de dichas magnitudes se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado de Las Ecuaciones (5.1) y (5.2) descritas en la bibliografía. Para este trabajo los segundos momentos de inercia según el eje z e y además de los valores del módulo de elasticidad lineal y transversal valen: $E = G = 10^6$ $A = 1$ $I = J = 10^{-3}$ y $\nu = 0.3$. Se hace notar que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan de sentido.

$$
\begin{aligned}
GA &= EA &= 10^6 \qquad (5.1)\\
GJ &= EI &= 10^3 \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplazamientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que permiten aplicar una fuerza en el sentido del eje z tal y como se muestra en la Figura 5.2. Este forzante flecta y trosiona al sistema en un plano saliente al xy, produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento, son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la carga. Esta fuerza actúa linealmente en los dos segundos iniciales, crece hasta un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y luego decrece hasta cero.Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual en un corto intervalo de tiempo. Para reproducir este comportamiento altamente dinámico se eligieron 10 elementos por miembro y un incremento de tiempo $\Delta T = 0.25$ s.

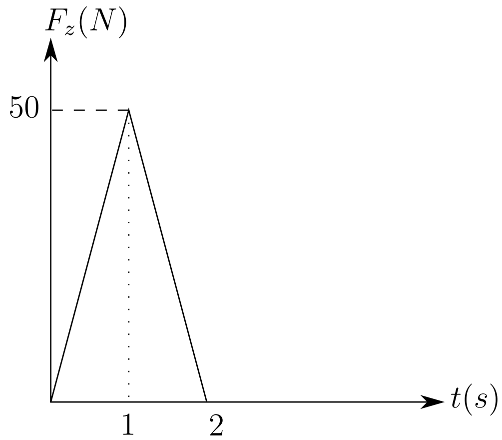


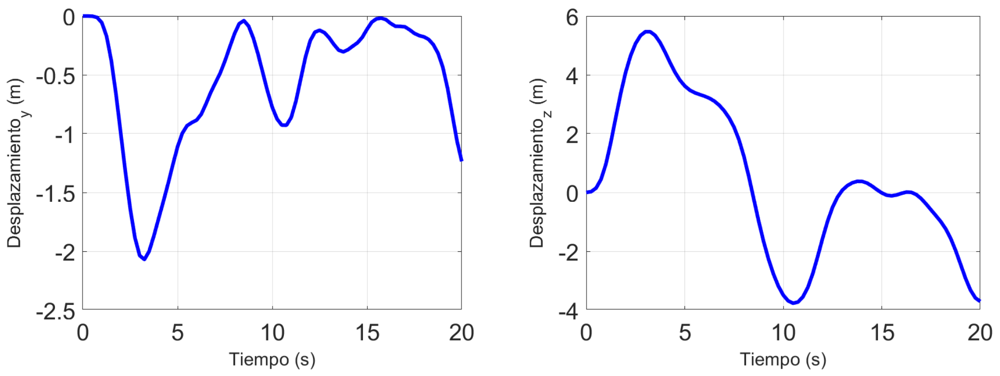
Figura 5.2: Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

El objetivo principal del ejemplo es el validar la librería de códigos corrotacional incorporados en el software ONSAS [1], por ende, tanto el método de resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en el artículo **Le2014**, comparando así resultados semejantes. Consecuentemente se implementó un algoritmo que lleva el nombre de sus creadores (HHT) y se selecciono un valor característico $\alpha = -0.05$ y un valor de parada en desplazamientos de 10^{-7} m. Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de $\Delta T = 0.25$ s.

Para comparar con el paper de referencia se plasmaron gráficamente determinados grados de libertad correspondientes al nodo A. Estos son: el desplazamiento lineal vertical (según el eje y) y el transversales (según z). Los resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras **??** y **??** en función de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la estructura. En particular, la Figura **??** denota oscilaciones que alcanzan las decenas de metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exigente en términos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no armónico de vaivén en el eje z, se puede notar la presencia no conservativa

[1] https://github.com/ONSAS/ONSAS/

de la formulación corrotacional, ya que las amplitudes prestan una tendencia atenuante con el tiempo.

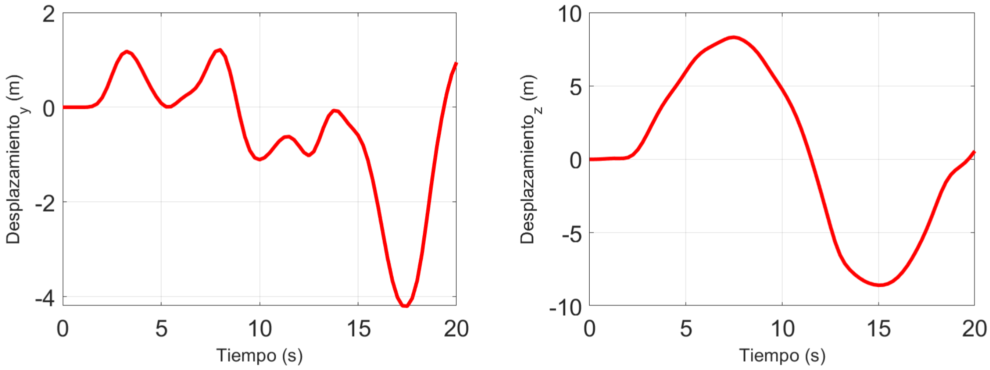


(a) Desplazamiento vertical según y (b) Desplazamiento transversal según z

Figura 5.3: Desplazamientos de control del nodo A

Por otra parte al analizar en la Figura ?? se observa que los desplazamientos en y, son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido de la fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano yz con el versor x saliente, el movimiento del nodo A es análogo al de una viga empotrada con una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de A es siempre en el sentido de $-y$, lo que se refleja en La Figura ?? y se condice con la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación con los presentados en la bibliografía de referencia **Le2014**, observamos similares valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento respecto a las Figuras 5.3 y 5.4. También así los valles y las crestas de la curvas se suceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que el software implementado reproduce correctamente el ejemplo y es capaz de capturar movimientos de flexo-torsión cabalmente.

Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B. En la Figura ?? se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente, y una forma que se asemeja a una sinusoide. Esto podría vincularse al modo flector en el plano xz de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la dirección z. Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de AC superpuestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento. El autor del trabajo **Le2014** publicó el desplazamiento en z de B y los resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva. Complementando este análisis podemos comparar los despeamientos del nodos A y B concluyendo que los movimientos



(a) Desplazamiento vertical según y (b) Desplazamiento transversal según z

Figura 5.4: Desplazamientos de control del nodo B

inerciales de la barra A-B afectan notoriamente a los desplazamientos del nodo B respecto de A, tanto en frecuencia como en magnitud.

Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se visualizaron mediante el software *Paraview* las deformadas para diferentes instantes de tiempo: $t_1 = 4$ s, $t_2 = 11$ s y $t_1 = 19$ s. En la Figura 5.5 se observan las oscilaciones flexionales para distintos planos yx e yz. Estos movimientos son originados por diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante F_z mientras que en el miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a su unión rígida con el resto de la estructura.

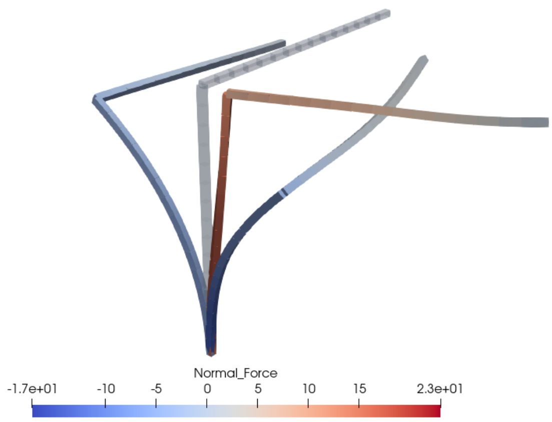
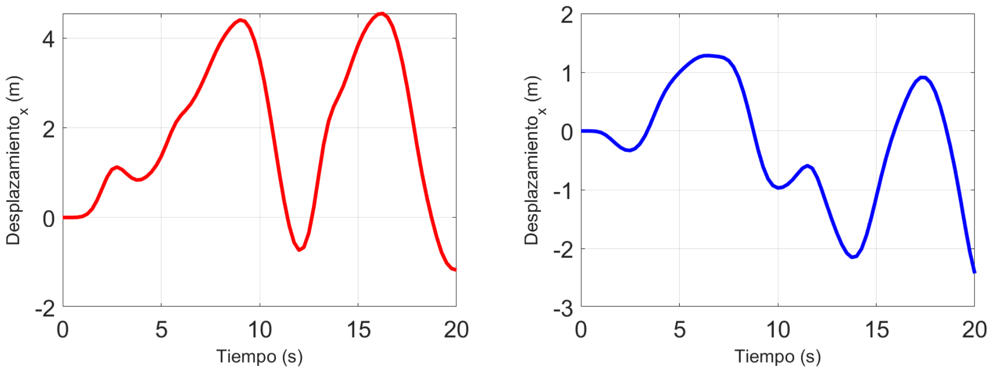


Figura 5.5: Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s

Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inmanentes a cada elemento en La Figura 5.5. En esta se identifica que el esfuerzo alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando considerables fluctuaciones temporales. En simultaneo, la viga horizontal A-B desarrolla fuerzas normales en todo su largo. Se suceden tanto positivas como negativas, es oportuno notar que un modelo lineal para pequeños desplazamientos concluiría que los esfuerzos en esa viga serían nulos. Además este modelo lineal arrojaría desplazamientos triviales en x para ambos nodos, induciéndose significativos errores para este tipo de cargas de alto impacto en estructuras de exigua rigidez. El modelo implementado desarrolla magnitudes no despreciables de desplazamientos en x tal y como se constata en las Figuras 5.6. He aquí las principales diferencias y la importancia de implementar un modelo considerando no linealidad geométricas, estas consideraciones son esenciales para la aplicación principal de este trabajo.



(a) Desplazamiento según x del nodo B (b) Desplazamiento según x del nodo A

Figura 5.6: Desplazamientos en x de los nodos A y B

5.2. Modelo simplificado de una linea

En este apartado se presenta un primer modelo simplificado del enfoque central de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de **foti2018finite** mas ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado, como ser el caso de: **luongo1998non** y **martinelli2001numerical**. El ejemplo consiste en un conductor de trasmisión eléctrica reforzado con núcleo de acero. La raíz de acero forjado tiene como propósito aportar rigidez mecánica al componente, disminuyendo la deflexión y flexibilidad del conjunto. Esto suele ser ventajoso para largos vanos donde la rigidez del conductor es una variable decisiva. Además su construcción no afecta significativamente la resistividad eléctrica debido al efecto de reluctancia radial variable. que obliga a la corriente a fluir principalmente en la superficie.

El modelo del conductor esta estandarizado bajo la norma IEC europea **IEC6081** y se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la cantidad de cables en el núcleo y en la periferia respectivamente. El diámetro se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos de aluminio (color gris en la Figura 5.7) y los 7 de acero (color azul). Además asumiremos despreciables, sobre las propiedades del flujo y la geometría, las irregularidades de su perfil en la silueta.

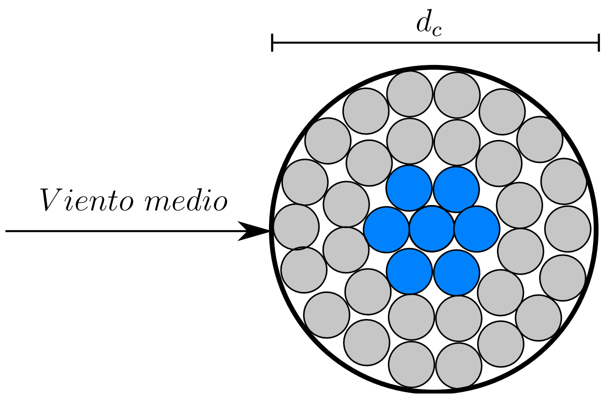


Figura 5.7: Esquema del conductor ASCR 7/26.

El vano tiene un largo Lc=267 m mientras que el cable en su configuración deformada mide 269 m. Esta diferencia de longitudes del conductor en su eje axial, responde a un tensado que se realiza durante su instalación. En la etapa de montaje del conductor, se ajusta la pre-tensión de manera tal que la altura ratifique los requerimientos de seguridad según la urbanización, contaminación magnética y tipografía del terreno. Para esta simulación no se tendrá en cuenta la tensión previa al momento de la colocación pero si la tensión debida a la carga del peso. Vale notar que el valor de los esfuerzos generados durante la instalación es menor a un 2 % respecto a los esfuerzos axiales desarrollados durante su movimiento.

El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad E, módulo de poisson ν, una densidad similar ρ y una rigidez flexional y torsional EI y GJ respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de la norma *ISO:9001* y se presentan en La Tabla ??.

d_c(cm)	m(kg/m)	EA kN	EI N m^2	GJ Nm^2
2.81	1.8	29700	2100	159

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo $L_a = 3$ m cada una de ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas, para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en las tres direcciones en x, z e y en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan correctamente las presentadas por **foti2018finite**, donde los extremos se encuentran sujetados. Habiendo detallado someramente los componentes que integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría en la Figura 5.8.

Existen una diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postulados por **luongo1998non** y **martinelli2001numerical**, en donde se resolvió mediante elementos de barra trinodal y de viga corrtacional respectivamente. Para amibos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generadas artificialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se despreciaran las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flujo medio W en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico y alcanza la velocidad media máxima W_{max} en 20 segundos. Este valor de velocidad se calculó según **euroCode** considerando un flujo tipo capa límite atmosférica con las propiedades indicadas en La Tabla ?? asociadas a un tipo de terreno sub-urbano o industrial.

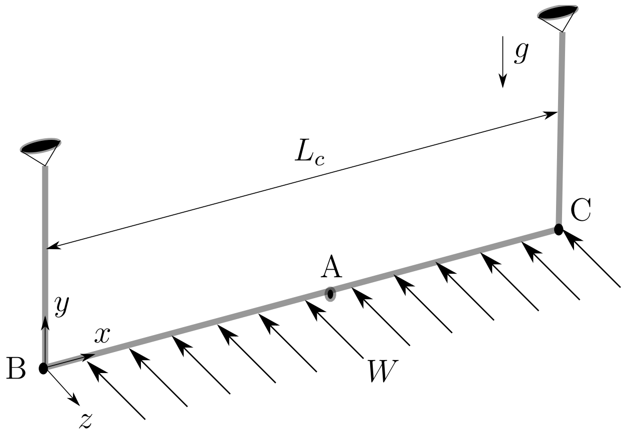


Figura 5.8: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

k_r	z_0	z_{min}
0.22	0.3 m	8 m

Tabla 5.2: Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para W_{max}

La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gravitatoria según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.8. No se muestran los resultados de esta etapa debido a que carecen de relevancia y en el trabajo de referencia se toma la catenaria como condición inicial. La fuerza peso es relevante desde un punto de vista dinámico pues mitiga posibles inestabilidades cuando las normales de los elementos son próximas a cero. Una vez estabilizada la respuesta del sistema por el amortiguamiento interno, se aplica una fuerza lineal de media positiva según el eje $-z$ desde cero hasta W_{max}. Esta forma del perfil podría emular el aumento modulado de un presiones en un túnel de viento entre las bocas de entrada y descarga. La forma se muestra en La Figura 5.9.

Para este estudio no se considerará la fuerza perpendicular al sentido de flujo: lift. Esta es despreciada por diferentes autores (**lee1992nonlinear**) (**Foti2016**) (**Papailiou1997**) principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares a los flujos esta relacionada posibles asimetrías tangenciales en el perfil. Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce en una fuerza de lift nula. Esta es la principal di-

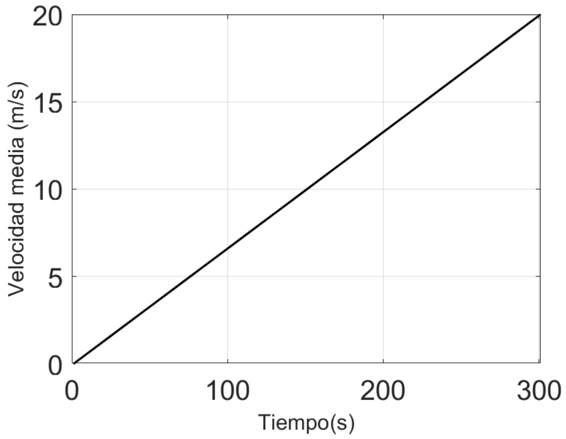


Figura 5.9: Perfil de velocidad progresiva z.

ferencia de este caso en comparación por lo propuesto en la literatura fuente (**luongo1984planar**) y (**foti2018finite**) donde si son considerados perfiles con formaciones de hielo.

El perfil de velocidades en la Figura 5.9 genera fuerzas sobre la estructura. La orientación del cable es tal que el flujo en todo punto es transversal a el. Los valores de $C_d = 1.5$ se extrajeron la referencia (**foti2018finite**). Se aclara que el angulo de ataque varía durante la trayectoria del cable, no obstante el coeficiente C_d permanece constate debido a la simetría de revolución del perfil. Se gráfica entonces las fuerzas sobre cada nodo del conductor en La Figura 5.10.

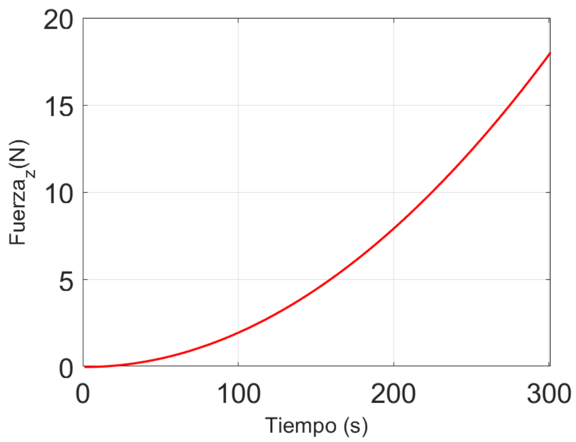
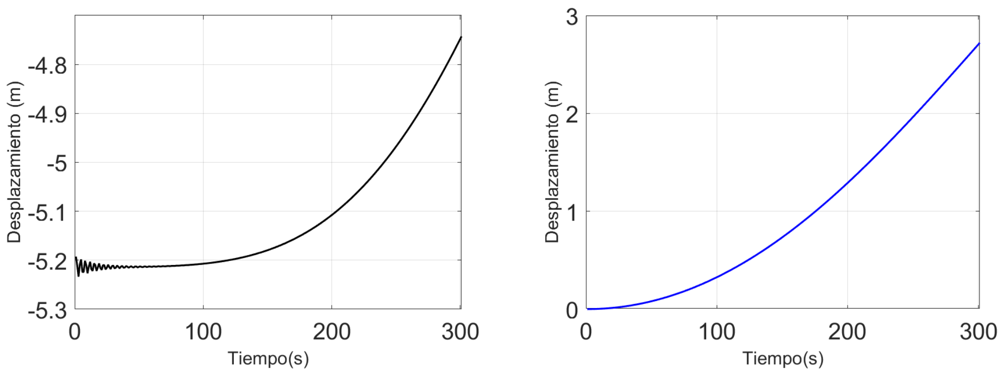


Figura 5.10: Perfil de fuerza nodal según el eje z.

A continuación se exponen los desplazamientos verticales y horizontales del nodo A. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Esta homología entre los perfiles de ambas magnitudes es explicable mediante un análisis de Fourier del sistema. Haciendo referencia a la función de transferencia que relaciona a ambas variables, la misma produce unicamente en desfazaje en estado estacionario. Como la curva de carga es de manera gradual y no presenta exabruptos en el tiempo, podemos suponer que la respuesta es cuasi-estática. Se presentan entonces en las Figuras 5.11 los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente del nodo A situado en el punto medio del vano.



(a) Desplazamiento según z del nodo A (b) Desplazamiento según y del nodo A

Figura 5.11: Desplazamientos del nodo A

Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la literatura fuente (**foti2018finite**), se capturo el ángulo de balanceo del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función tangente que vincuula el ángulo respecto da la deformada en el eje x con los desplazamiento en z e y. Para ilustrar al lector se realizó el esquema mostrado en la Figura 5.12 del ángulo Φ en cuestión.

Se graficaron las trayectorias del angulo para diferentes valores de velocidad media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica. Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante al de que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte, en comparación con los resultados presentados por **foti2018finite** se observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamente, lo

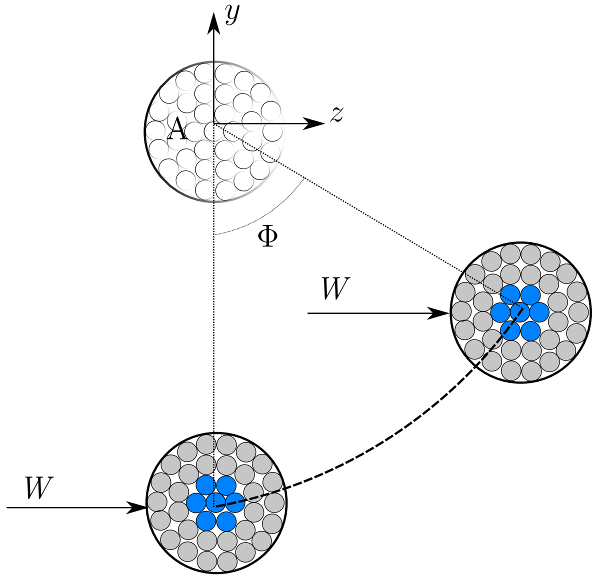


Figura 5.12: Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincornizadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia del lift y la variación del angulo de ataque con el ángulo. Como en la referencia **foti2018finite** se toman en cuenta un perfil con formaciones de hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.

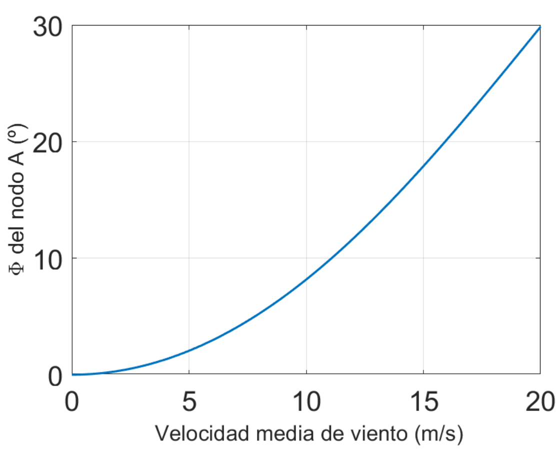


Figura 5.13: Angulo de balanceo Φ en función de la velocidad media $W(t)$.

El ejemplo permite conjeturar que la respuesta numéricas del modelo representan de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores de trasmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejada en los resultados arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

5.3. Sistema de transmisión eléctrica

Este apartado ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de transmisión eléctricas afectados por vientos extremos no sinópticos, en particular, tormentas conectivas. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizando un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos vanos de idéntico largo D_v= 206.5 m tal cual se índica el Esquema 5.14. Para el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1 y 2 respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del primer y segundo vano con los literales C y B respectivamente. Con el objetivo de representar una geometría real de una línea de alta tensión y no aborrcer al lector con descripciones de propiedades, los conductores de la simulación se corresponden con el Ejemplo 5.2 y cuyas propiedades mecánicas se explicitan en la Tabla ??.

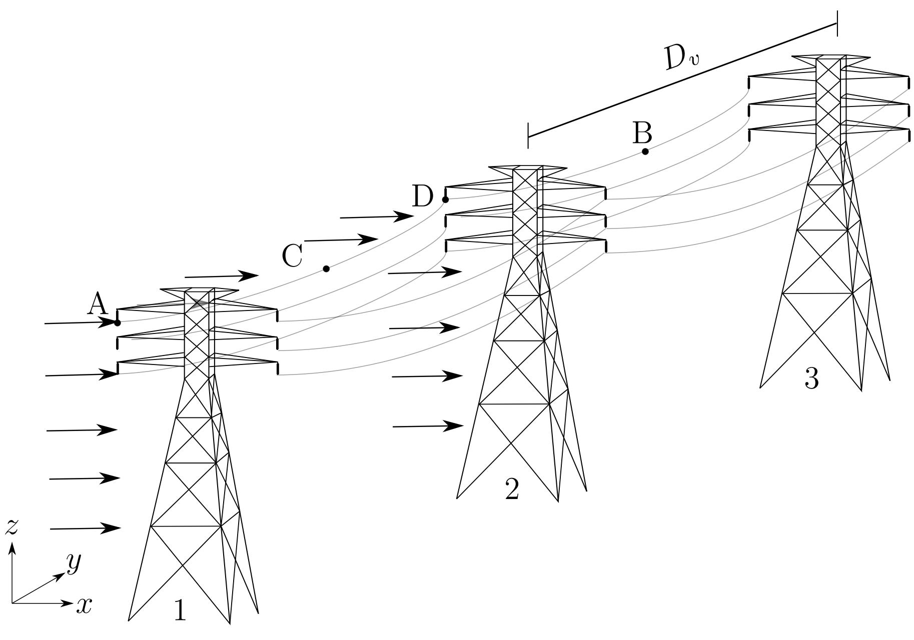


Figura 5.14: Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo.

En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que transportan un voltaje mayor a 72.5 kV. Este valor de tensión es eminentemente peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elementos aisladores. Estas cadenas aisladoras tradicionalmente de vidrio y cerámicas han ido mutando a poliméricas con un núcleo sólido, aumentando así su tenacidad y flexibilidad. Según la normativa Norma IEC 60815, para alta tensión, deben medir un largo de 10 in. Para el modelo las cadenas se modelaron como barras de Green, debido a su exigua rigidez a flexión y su articulación de anclaje en ambos extremos. Además se consideró un modulo de elasticidad aproximado E = 70 GPa según los estudios experimentales realizados por la referencia **TesisMexicano**.

Al igual que los aisladores, las barras de la estructura metálica se modelaron con elementos de tipo green, con una ley materialsaint venant kirchhoff con E = 300 GPa y $\nu = 0.3$. Estos valores se corresponden con un acero ASTM A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y ASTM º65. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre los opuestos de la cercha 14.8 m. Además son capaces de sostener 6 lineas, estas se corresponden a cada altura, con cada una de las fases eléctricas. Las lineas se encuentran colocadas a tres cotas distintas $L_1 = 31.75$ m, $L_2 = 26.03$ m,$L_3 = 39.76$ m, tal y como se muestra en 5.15.

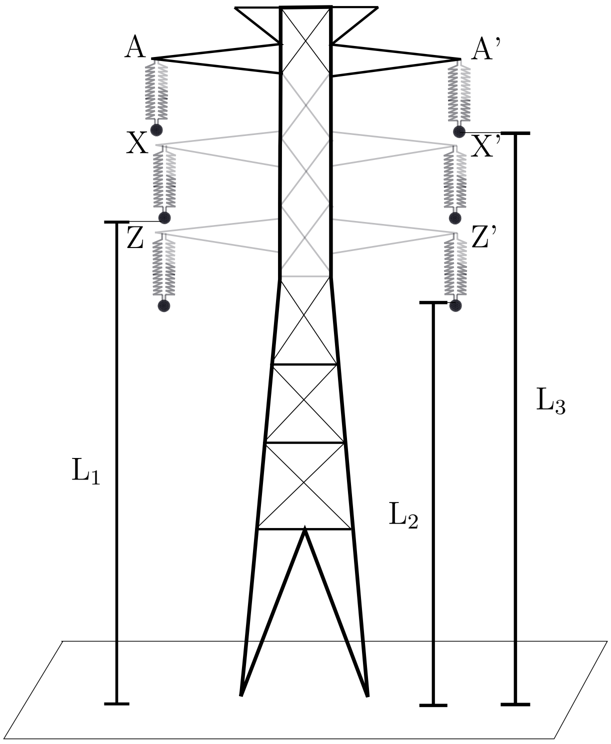
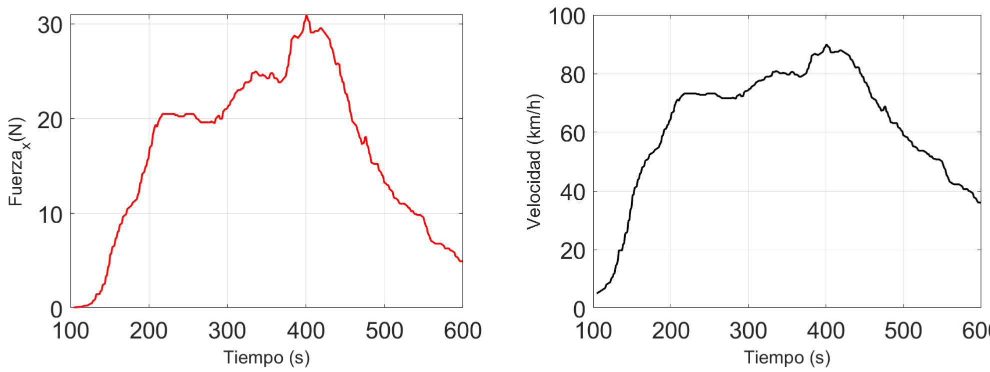


Figura 5.15: Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

La simulación consta de dos etapas, primeramente partiendo de la configuración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad según el eje $-z$ tal cual se muestra en la Figura 5.15. Nuevamente, al igual que en el Ejemplo 5.2 , esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el amortiguamiento aerodinámico en desplazamientos. Este se calculó como una aproximación a partir de la literatura **matheson1981simulation** promediando la velocidad media de viento, resultando $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \overline{v} = 0.15$ Ns/m.

Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta convectiva capturado en la referencia **Stengel2017a**, positiva según el eje x. No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales en la coordenada axial del cable, asociada a una función de coherencia de correlación espacial debida a la turbulencia. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó unicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer resultados respecto al comportamiento felxional en el plano yz, lo que se evidenciará a continuación en disimil desarrollo de las trayectorias entre los nodos A, C, D yB. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa en que estos fenómenos tiene dimensiones espaciales del orden de 40 metros a 40 kilómetros **fujita1985downburst**, consecuentemente es factible que la tormenta afecte a una fracción del tendido. Se muestra continuación en las Figuras ?? los valores de fuerza y velocidad aplicados en la coordenada x entre los nodos A y D para cada instante.



(a) Carga aplicada sobre los nodos.

(b) Perfil de velocidades de viento.

Las tormentas severas generan corrientes descendentes donde las velocidades aumentan vertiginosamente en pequeños intervalos de tiempo, alcanzando umbrales de hasta 270 km/h **fujita1985downburst**. Para este modelo, el perfil representado es menor tenor, mas no el aumento súbito del fenómeno. La velocidad se eleva del valor nulo a 80 km/h en menos de 3 minutos, tal y como se observa en la Figura ??. Debido al impacto de del viento sobre el conductor se generan fuerzas, estas se calcularon con los valores de coeficiente drag y fórmula detalladas en el Ejemplo 5.2 anterior extraídos de la referencia **Foti2016**.

Ya se ha resaltado en retiradas ocasiones los posibles daños severos que puede ocasionar un excesivo balanceo del conductor. Volores desmedidios de esta variable deben controlarse en todos los aisladores rotulados en el Esquema 5.15. Consecuentemente, se compararon cuantitativamente las oscilaciones entre fases (A-A', X-X', Z-Z'), no apreciándose sensibles diferencias, tanto en desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen apreciables variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A'). Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho de omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe antes el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando que los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A como variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en los ejes x y z como también el ángulo de oscilación Φ tal y cual se observa en la Figura 5.16.

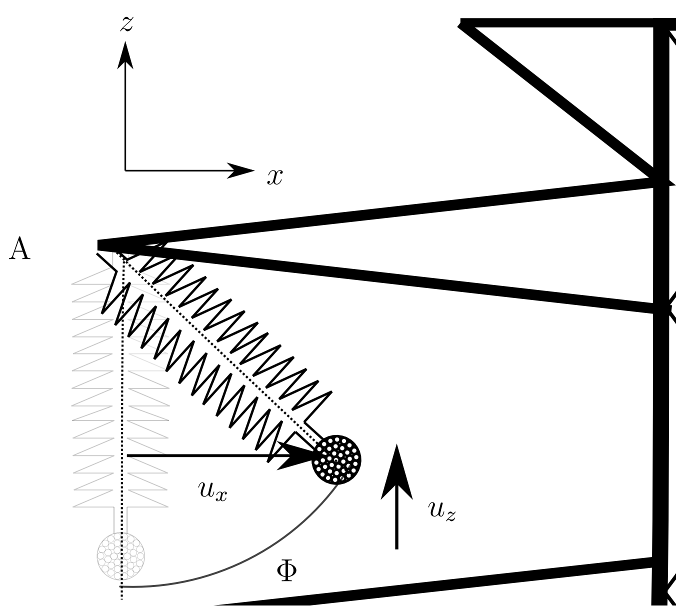
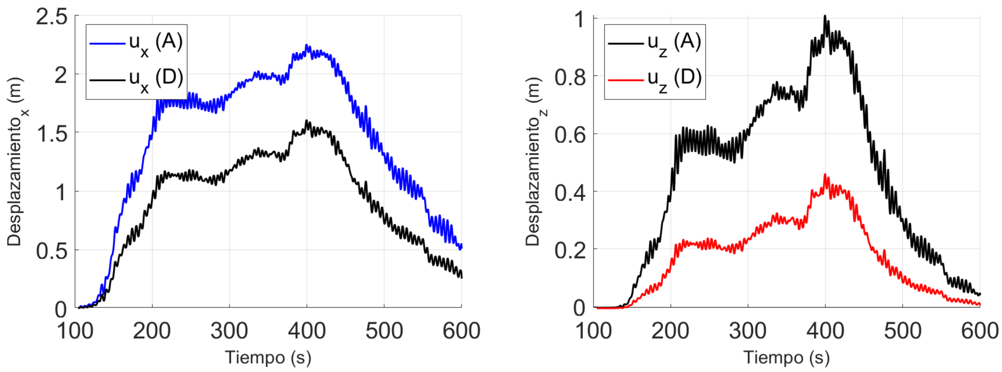


Figura 5.16: Ilustración de magnitudes de balanceo.

El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de $\Delta T = 0.5$ s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico

$\alpha = -0.05$, luego de un arduo y tedioso procedimiento iterativo de ajuste de parámetros se realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con tolerancias en desplazamientos y en fuerzas residuales de 10^{-5} m y 10^{-5} N respectivamente.

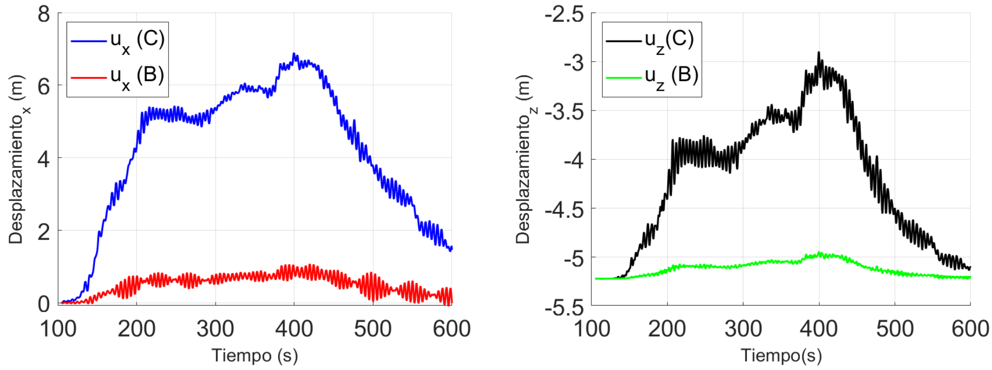
A continuación se figuran los desplazamientos verticales y horizontales de los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magnitudes externas, responden a un argumento basado en el análisis en frecuencia del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en estado estacionario. En ?? y ?? se observan los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo no representa los cargas inerciales de los vanos contiguos a este.



(a) Desplazamientos en x nodos A, D. (b) Desplazamientos en z nodo A, D.

Figura 5.17: Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D

Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del conductor también despliguean grandes desplazamientos, este fenómeno resulta indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de seguridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proximidad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los componentes. Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos para los nodos B y C.



(a) Desplazamientos en x nodos B,C.

(b) Desplazamientos en z nodo B, C.

Figura 5.18: Desplazamientos de los nodos medios B y C

En la Figura ?? se aprecia que el orden de los movimientos, para ambos nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación entre estos es de unos 14 metros podremos garantizar que no habrá impactos entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas lineas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central, para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe considerarse a la hora del diseño. En la Figura ?? se muestra que el descenso máximo de la linea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en puntos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctuación temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Gráficas 5.17.

En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables cinemáticas se elaboró la Figura ?? carga desplazamiento para el nodo A. En abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos se graficó un calculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo en el área de ingeniería del viento (**Stengel2017a**), (**duranona2009analysis**) (**yang2016nonlinear**).

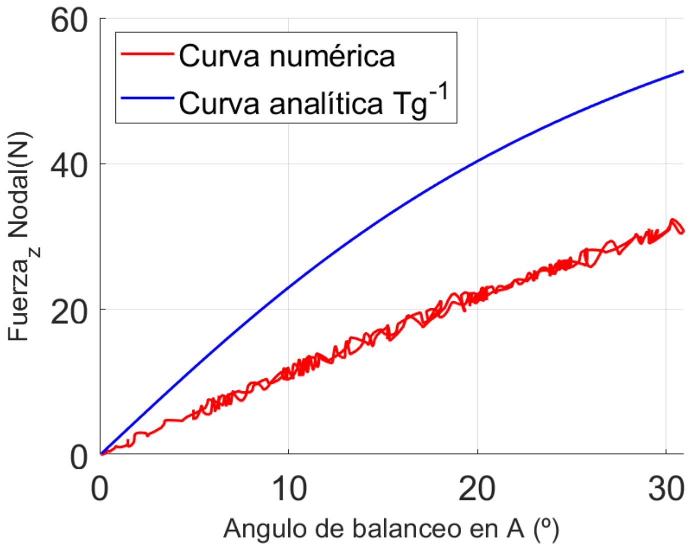


Figura 5.19: Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

El cálculo analítico resulta de análisis estático plano, donde se iguala la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones pueden afectar las fuerzas internas trasmitidas al elemento aislador. Asimismo, ese calculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial, proveniente de las distintas orientación de la linea respecto al ángulo de incidencia del flujo. En la Figura **??** se evidencian las diferencias entre los modelos y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales mencionadas, se muestran la configuración indefomradas en gris y las deformadas con una barra de colores en desplazamientos para el instante $t = 400s$ en la Figura **??**.

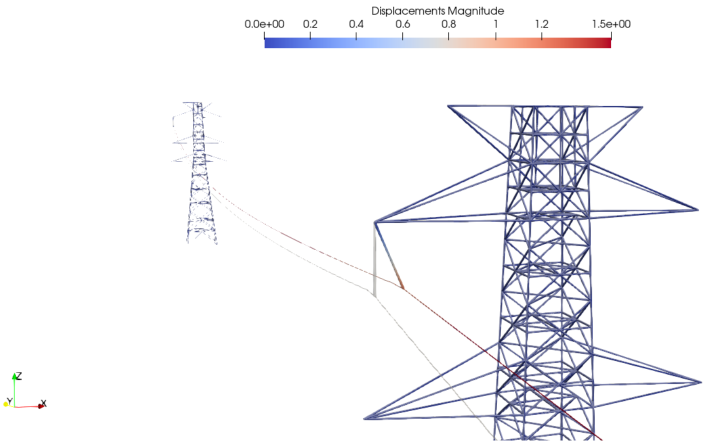


Figura 5.20: Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s.

Capítulo 6

Consideraciones finales