



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

1

2 Implementación de una formulación  
3 corrotacional en dinámica no lineal y aplicación  
4 al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural

7

Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería

8

Universidad de la República

9

Montevideo – Uruguay

10

Marzo de 2021



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

1

2

3

4

# Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

D.Sc. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

D.Sc. Prof. Gabriel Usera

7

Montevideo – Uruguay

8

Marzo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería, 2021.

XX, 106 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 86 – 92.

1. Formulación corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Transmisión eléctrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural. III. Título.

1 INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

2 

---

3 D.Sc. Prof. Gonzalo Cetrangolo

4 

---

5 M.Sc. Prof. Bruno Bazzano

6 

---

7 D.Sc. Prof. Marcelo Forets

8 Montevideo – Uruguay

9 Marzo de 2021

A mi Madre por su apoyo  
incondicional,  
por enseñarme a aprender y  
enseñar,  
por impulsarme a hablar, a crear  
y amar

# 1 Agradecimientos

2 Agradezco al universo por haberme dado hálito de vida a través de ese río  
3 inefable que fluye entre la casualidad y la causalidad. Por haberme maravilla-  
4 do con la lagrima, la risa y el atrapante mundo del conocimiento. Las raíces  
5 de ese universo son principalmente mi familia, que me nutrieron de valores y  
6 vivencias envueltas de un afecto incommensurable. A mi padre, por haberme  
7 enseñado a remar por mis objetivos, pelear por mis proyectos con determina-  
8 ción, sacrificio y sobre todo, por haberme inculcado que no hay que ganarle a  
9 nadie, únicamente aprender a levantarse. A mi madre por su incondicionalidad  
10 eterna, por transferirme la vocación de la enseñanza. Por enseñarme la diver-  
11 sidad de las inteligencias múltiples y sobre todo, la semilla del amor inmenso.  
12 A Quique por su sabiduría, su visión biocéntrica y su flecha existencial que  
13 atraviesa cualquier tormenta.

14 También agradezco a mis tutores; A Jorge por ser primero un gran ser  
15 humano con una visión fascinante, por enseñarme no solo conocimientos técni-  
16 cos, sino para la vida. Además por su paciencia, constancia y persistencia  
17 para guiarme hacia las salidas en los laberintos. A Gabriel por darme la  
18 oportunidad de dedicarme a la investigación e instruirme desde su experiencia  
19 insoslayable en aspectos estratégicos profesionales.

20 A Flor por convidarme de sus dulces pétalos y por perfumar cada parte  
21 de mi ser con el más sincero y sano amor. Por ser un alero cuando llueve y  
22 dos alas cuando hay sol. Que este camino hubiese sido árido y desolado sin  
23 ella. A Maximiliano por estar siempre latente en mi pensamiento, convertir las  
24 palabras en aves y despertarme un sin fin de ideas. Por enseñarme la senda de  
25 la filosofía, e iluminar el portal donde un punto es la inmensidad, y un segundo  
26 la eternidad.

27 Agradezco enormemente a mis compañeros del IIMPI y del grupo MISEs  
28 por guiarme, apoyarme y cuestionarme en este camino de aprendizaje. Por el  
29 ambiente relajado y distendido que hacen del trabajo una instancia de disfrute.

1 Finalmente, quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrados  
2 (CAP) de la Universidad de la República por viabilizar económicamente es-  
3 ta investigación. También a la Agencia Nacional de Investigación (ANII) por  
4 financiar el proyecto VioLETa "Modelado del efecto del viento sobre líneas  
5 eléctricas de transmisión y su mitigación" que fue el pilar indispensable en este  
6 trabajo.

*Hay una fuerza motriz más  
poderosa que el vapor, la  
electricidad y la energía atómica;  
la voluntad*

Albert Einstein



2 En Uruguay los sistemas de transmisión eléctrica son frecuentemente afec-  
3 tados por eventos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados.  
4 Estos eventos pueden provocar su desconexión con consecuencias a la integri-  
5 dad de los componentes potencialmente graves, así como también a la integri-  
6 dad de las personas circundantes. En el periodo 2000-2007 se registraron más  
7 de veinte eventos de salida en servicio y el 10 de marzo de 2002 una tormenta  
8 convectiva afectó un área de alrededor  $6500 \text{ km}^2$  en el sur del país. La tormenta  
9 causó una destrucción masiva para el país colapsando 19 torres de transmisión  
10 eléctrica de 500 kV y 48 de 150 kV pertenecientes a la empresa Administración  
11 Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas (UTE). El costo de reparación  
12 de las torres fue millonario. Esta problemática representa un desafío, dadas las  
13 limitaciones de aplicabilidad de las normativas internacionales ante este tipo  
14 de vientos extremos.

15 Este trabajo está enfocado en desarrollar herramientas capaces de reprodu-  
16 cir el comportamiento de conductores eléctricos, sometidos a perfiles de viento  
17 tipo tormenta convectiva. Para esto, se integró una formulación corrotacional  
18 de vigas 3D, considerándolo componentes aerodinámicas debido a la acción del  
19 viento. Esta formulación fue implementada en la herramienta de software libre  
20 *Open Non-linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Con este se resolvieron  
21 cuatro problemas numéricos: el primero de ellos valida la formulación para un  
22 ejemplo clásico en la literatura, el segundo representa la dinámica de interac-  
23 ción que ocurre entre la cadena aisladora y el conductor. El tercero consiste  
24 en una modificación de un modelo propuesto por investigadores referentes en  
25 simulación estructural de líneas eléctricas, donde se observan resultados seme-  
26 jantes. Por último, se construye un ejemplo compuesto por tres torres y seis  
27 conductores, integrando elementos de viga con barras, cargados con un perfil  
28 tipo corriente descendente, extraído de un estudio experimental en el norte de  
29 Alemania.

30 Finalmente, se concluye que los resultados generados representan un dispa-  
31 rador para seguir profundizando en la temática, generando capacidades nativas  
32 para emular el fenómeno de manera más precisa y poder así, incluirlo como

1 una herramienta complementaria durante el diseño de sistemas de transmisión.  
2 Respecto a la metodología de esta tesis, se incorporaron términos aerodinámi-  
3 cos a una formulación corrotacional, lo cual es un arte original de este trabajo.  
4 Según los resultados del modelo, se observa como las tormentas convectivas  
5 afectan a este severamente, pudiendo causar potenciales perjuicios graves.

6 Palabras claves:

7 Formulación corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica  
8 estructural, Transmisión eléctrica.

# 1 Lista de figuras

|    |      |   |    |
|----|------|---|----|
| 2  | 1.1  | Ilustración de balanceos excesivos torre Ruta 5. . . . .              | 2  |
| 3  | 3.1  | Rotaciones a cada configuración. . . . .                              | 21 |
| 4  | 3.2  | Descripción de los sistemas de coordenadas corrotacionales. . . .     | 22 |
| 5  | 3.3  | Esquema de desplazamientos locales. . . . .                           | 28 |
| 6  | 3.4  | Ilustración grados de libertad locales. . . . .                       | 28 |
| 7  | 4.1  | Esquema del objeto de estudio. . . . .                                | 40 |
| 8  | 4.2  | Esquema simplificado de la acción del viento sobre el cable y         |    |
| 9  |      | sus fuerzas correspondientes. . . . .                                 | 42 |
| 10 | 4.3  | Esquema en sistema de referencias absoluto. . . . .                   | 43 |
| 11 | 4.4  | Esquema en sistema de referencias relativo. . . . .                   | 44 |
| 12 | 5.1  | Disposición geométrica de la estructura. . . . .                      | 58 |
| 13 | 5.2  | Perfil de fuerza transversal en el nodo A. . . . .                    | 59 |
| 14 | 5.3  | Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s. . . . .       | 60 |
| 15 | 5.4  | Desplazamientos de control del nodo A. . . . .                        | 61 |
| 16 | 5.5  | Desplazamientos de control del nodo B. . . . .                        | 61 |
| 17 | 5.6  | Desplazamientos en x de los nodos A y B . . . . .                     | 62 |
| 18 | 5.7  | Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .       | 63 |
| 19 | 5.8  | Esquema del conductor ASCR 7/26. . . . .                              | 64 |
| 20 | 5.9  | Perfil de velocidad progresiva $z$ . . . . .                          | 65 |
| 21 | 5.10 | Perfil de fuerza nodal según el eje $z$ . . . . .                     | 66 |
| 22 | 5.11 | Desplazamientos del nodo A. . . . .                                   | 66 |
| 23 | 5.12 | Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .       | 67 |
| 24 | 5.13 | Ángulo de balanceo $\Phi$ en función de la velocidad media $W(t)$ . . | 68 |
| 25 | 5.14 | Esquema del sistema de transmisión. . . . .                           | 69 |
| 26 | 5.15 | Esquema geométrico de cotas principales en la torre. . . . .          | 70 |

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 5.16 Ilustración de magnitudes de balanceo. . . . .               | 71 |
| 2 | 5.17 Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D. . . . .     | 72 |
| 3 | 5.18 Desplazamientos de los nodos medios B y C. . . . .           | 73 |
| 4 | 5.19 Curva analítica y numérica carga desplazamiento. . . . .     | 74 |
| 5 | 5.20 Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s. . . . . | 75 |

# **1 Lista de tablas**

|   |     |  |     |
|---|-----|--|-----|
| 2 | 3.1 | Caracterización de matrices en términos de los sistemas de re- |     |
| 3 |     | ferencia. . . . .  | 23  |
| 4 | 5.1 | Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26 . . .      | 64  |
| 5 | 5.2 | Parámetros del flujo tipo CLA para $W_{max}$ . . . . .         | 64  |
| 6 | 2.1 | Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826 . . . . .      | 105 |
| 7 | 2.2 | Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826. . . . .   | 106 |
| 8 | 2.3 | Tabla de factores para terrenos según referencia A. Davenport, |     |
| 9 |     | 1960 . . . . .   | 106 |

# 1 Lista de símbolos

- 2  $\ddot{\mathbf{w}}$  Aceleración angular en coordenadas globales.
- 3  $\ddot{\mathbf{u}}$  Aceleración lineal en coordenadas globales.
- 4  $\alpha_{HHT}$  Parámetro alfa de HHT característico del método HHT.
- 5  $\alpha_{NW}$  Parámetro alfa característico del método de Newmark.
- 6  $\Phi$  Ángulo de balanceo de la cadena aisladora.
- 7  $\beta_{NW}$  Parámetro beta característico del método de Newmark.
- 8  $x$  Distancia respecto al nodo 1 de la sección con centroide G.
- 9  $\mathbf{x}_1$  Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.
- 10  $\mathbf{x}_2$  Coordenadas del nodo 2 en el sistema de referencia global.
- 11  $\Delta T$  Incremento temporal.
- 12  $\rho$  Densidad del aire a presión atmosférica, humedad relativa de referencia y  
13 una temperatura de 20°C.
- 14  $d_c$  Diámetro del conductor considerandolo cilíndrico.
- 15  $\mathbf{d}_g$  Desplazamientos globales del elemento.
- 16  $\mathbf{u}^g$  Desplazamientos lineales globales del elemento.
- 17  $\mathbf{w}^g$  Desplazamientos angulares globales del elemento.
- 18  $\mathbf{d}_l$  Desplazamientos locales del elemento.
- 19  $\mathbf{d}_r$  Desplazamientos lineales locales referenciados a la configuración de defor-  
20 mación rígida.

- 1  $C_d(Re)$  Coeficiente de arrastre aerodinámico en función del coeficiente adi-  
2 mensionado de Reynolds.
- 3  $\mathbf{E}_1$  Vector 1 de la base isoparamétrica.
- 4  $\mathbf{E}_2$  Vector 2 de la base isoparamétrica.
- 5  $\mathbf{E}_3$  Vector 2 de la base isoparamétrica.
- 6  $K$  Energía cinética del elemento.
- 7  $f_{a_l}$  Fuerza axial del elemento.
- 8  $F_d$  Fuerza de arrastre aerodinámico sobre el conductor.
- 9  $\mathbf{f}_l^{\text{int}}$  Fuerza interna del elemento en coordenadas locales.
- 10  $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$  Fuerza interna del elemento en coordenadas globales.
- 11  $F_l$  Fuerza de sustentación aerodinámica sobre el conductor.
- 12  $\mathbf{f}_{\text{vis}}$  Vector de fuerzas viscosas.
- 13  $\mathbf{I}_\rho$  Tensor de inercia del elemento en su configuración deformada.
- 14  $\mathbf{f}_k$  Fuerza inercial en coordenadas globales.
- 15  $\mathbf{u}_0$  Condición inicial en desplazamientos aplicada sobre el conductor.
- 16  $\mathbf{K}_k$  Matriz giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 17  $\mathbf{C}_k$  Matriz giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 18  $\mathbf{M}_k$  Matriz de masa consistente del elemento en coordenadas globales.
- 19  $\mathbf{K}_g$  Matriz tangente del elemento en coordenadas globales.
- 20  $\mathbf{K}_l$  Matriz tangente local del elemento en coordenadas locales.
- 21  $\mathbf{C}_{\text{vis}}$  Matriz de amortiguamiento viscoso.
- 22  $M_1^i$  Momento flector del nodo i en la dirección local 1.
- 23  $M_2^i$  Momento flector del nodo i en la dirección local 2.
- 24  $M_3^i$  Momento torsor del nodo i.

- 1  $\mathbf{R}_0$  Matriz de rotación desde la configuración de referencia.
- 2  $\mathbf{R}_1^g$  Matriz de rotación global del nodo 1.
- 3  $\mathbf{R}_2^g$  Matriz de rotación global del nodo 2.
- 4  $\mathbf{R}_r$  Matriz de rotación desde la configuración rígida.
- 5  $\overline{\mathbf{R}}_1$  Matriz de rotación local del nodo 1.
- 6  $\overline{\mathbf{R}}_2$  Matriz de rotación local del nodo 2.
- 7  $\tilde{\mathbf{A}}$  Operador Skew aplicado a la variable A.
- 8  $\dot{\mathbf{w}}$  Velocidad angular en coordenadas globales.
- 9  $\dot{\mathbf{u}}$  Velocidad lineal en coordenadas globales.
- 10  $q$  Velocidad de viento en el sentido perpendicular al conductor.
- 11  $w$  Velocidad de viento en el sentido transversal al conductor.
- 12  $\mathbf{e}_1$  Vector tangente de la configuración de referencia.
- 13  $\mathbf{e}_2$  Vector normal de la configuración de referencia.
- 14  $\mathbf{e}_3$  Vector bi-normal de la configuración de referencia.
- 15  $l_n$  Largo del elemento deformado.
- 16  $\mathbf{r}_1$  Vector tangente de la configuración de deformación rígida.
- 17  $\mathbf{r}_2$  Vector normal de la configuración de deformación rígida.
- 18  $\mathbf{r}_3$  Vector bi-normal de la configuración de deformación rígida.
- 19  $\mathbf{t}_1^1$  Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 20  $\mathbf{t}_1^i$  Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 21  $\mathbf{t}_2^1$  Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 22  $\mathbf{t}_2^i$  Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 23  $\mathbf{t}_3^i$  Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.



- <sub>1</sub>  $\mathbf{t}_3^1$  Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- <sub>2</sub>  $\overline{\boldsymbol{\theta}}_1$  Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 1.
- <sub>3</sub>  $\overline{\boldsymbol{\theta}}_2$  Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 2.
- <sub>4</sub>  $\bar{u}$  Desplazamiento axial en coordenadas locales del elemento.

# <sup>1</sup> Lista de siglas

<sup>2</sup> **CD** corrientes descendentes

<sup>3</sup> **CLA** capa límite atmosférica

<sup>4</sup> **HHT** Hughes, Hilbert y Taylor

<sup>5</sup> **IEC** International Electrotechnical Commission

<sup>6</sup> **MEF** Método de Elementos Finitos

<sup>7</sup> **N-R** Newton Raphson

<sup>8</sup> **TC** tormentas convectivas

<sup>9</sup> **UTE** Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas

# 1 Tabla de contenidos

|    |   |           |
|----|---|-----------|
| 2  | Lista de figuras  | XI        |
| 3  | Lista de tablas   | XIII      |
| 4  | Lista de símbolos   | XVII      |
| 5  | Lista de siglas   | XVIII     |
| 6  | <b>1 Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 7  | 1.1 Motivación . . . . .  | 1         |
| 8  | 1.2 Objetivos . . . . .   | 3         |
| 9  | 1.3 Enfoque . . . . .   | 3         |
| 10 | 1.4 Estructura de la tesis . . . . .                              | 4         |
| 11 | <b>2 Estado del arte</b>  | <b>6</b>  |
| 12 | 2.1 Historia de la temática . . . . .                             | 6         |
| 13 | 2.2 Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión |           |
| 14 | eléctrica . . . . .   | 9         |
| 15 | 2.3 Tormentas convectivas . . . . .                               | 11        |
| 16 | 2.4 Análisis semi-analíticos de conductores . . . . .             | 13        |
| 17 | 2.5 Análisis corrotacional de vigas . . . . .                     | 16        |
| 18 | <b>3 Conceptos preliminares</b>                                   | <b>20</b> |
| 19 | 3.1 Cinemática corrotacional . . . . .                            | 20        |
| 20 | 3.1.1 Matrices de rotación . . . . .                              | 21        |
| 21 | 3.1.2 Sistemas de coordenadas . . . . .                           | 22        |
| 22 | 3.1.3 Desplazamientos lineales y angulares . . . . .              | 24        |
| 23 | 3.2 Formulación local . . . . .                                   | 27        |
| 24 | 3.2.1 Variaciones en desplazamientos . . . . .                    | 30        |

|    |            |   |           |
|----|------------|---|-----------|
| 1  | 3.3        | Dinámica corrotacional . . . . .                          | 31        |
| 2  | 3.3.1      | Velocidades y aceleraciones . . . . .                     | 31        |
| 3  | 3.3.2      | Fuerza interna y matriz tangente . . . . .                | 33        |
| 4  | 3.3.3      | Fuerza inercial y matrices de masa tangentes . . . . .    | 36        |
| 5  | <b>4</b>   | <b>Metodología</b>  | <b>39</b> |
| 6  | 4.1        | Aspectos de modelado físico . . . . .                     | 39        |
| 7  | 4.1.1      | Condiciones iniciales y de borde para la estructura . . . | 40        |
| 8  | 4.1.2      | Modelo de viento . . . . .                                | 41        |
| 9  | 4.2        | Aspectos de modelado computacional . . . . .              | 46        |
| 10 | 4.2.1      | Métodos iterativos para la resolución de problemas        |           |
| 11 |            | dinámicos . . . . .                                       | 46        |
| 12 | 4.2.2      | Resolución numérica mediante HHT . . . . .                | 49        |
| 13 | 4.2.3      | Implementación numérica en ONSAS . . . . .                | 52        |
| 14 | <b>5</b>   | <b>Resultados numéricos</b>                               | <b>57</b> |
| 15 | 5.1        | Viga en voladizo con ángulo recto . . . . .               | 57        |
| 16 | 5.2        | Modelo simplificado de una línea . . . . .                | 62        |
| 17 | 5.3        | Sistema de transmisión eléctrica . . . . .                | 68        |
| 18 | <b>6</b>   | <b>Conclusiones</b>                                       | <b>76</b> |
| 19 | 6.1        | Conclusiones técnicas . . . . .                           | 76        |
| 20 | 6.2        | Trabajos a futuro . . . . .                               | 80        |
| 21 | 6.3        | Conclusiones de formación . . . . .                       | 82        |
| 22 | 6.3.1      | Reflexión personal . . . . .                              | 83        |
| 23 |            | <b>Bibliografía</b>                                       | <b>86</b> |
| 24 |            | <b>Glosario</b>   | <b>92</b> |
| 25 |            | <b>Apéndices</b>  | <b>93</b> |
| 26 | Apéndice 1 | . . . . .   | 94        |
| 27 | Apéndice 2 | . . . . .   | 104       |
| 28 | 2.1        | Campo de aplicación . . . . .                             | 104       |
| 29 | 2.2        | Velocidad de referencia y rugosidad del terreno . . . . . | 105       |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

1 Los eventos climáticos extremos representan un desafío para el diseño de  
2 todo tipo de estructuras en todo el mundo. En Uruguay el choque de masas  
3 de aire caliente, originado en el trópico con corrientes de aires fríos que migran  
4 desde el polo produce una atmósfera inestable. Estos fenómenos atmosféricos  
5 son peligrosos, ya que producen vientos extremos no sinópticos sumamente  
6 violentos y destructivos. Un registro trágico de este tipo de eventos, sucedió  
7 el 10 de marzo del 2002, cuando una tormenta convectiva afectó un área de  
8 alrededor de 6500 km<sup>2</sup> en el sur del país “El tornado de Canelones del año  
9 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#) En el norte de Montevideo los anemómetros capturaron  
10 velocidades de ráfaga de 34 m/s y de acuerdo con el nivel de daño causado,  
11 se estimaron que en ciertos puntos podría haber superado los 56 m/s. Este  
12 valor es mayor a la velocidad de diseño establecida por la norma UNIT 50-84.  
13 Fue tal el nivel de devastación, que 19 torres de transmisión eléctrica de 500  
14 kV y 48 de 150 kV colapsaron, además de unos 700 edificios y 1250 techos de  
15 hogares que fueron destruidos (Durañona, [2015](#)). Este tornado no solo afectó  
16 a las construcciones, sino también muchos productores rurales y sus estancias  
17 productivas, derribando invernaderos, montes y plantaciones. El costo de repa-  
18 ración asociado con las torres se estimó en 2 millones de dólares y en simultáneo  
19 se destinaron unos 10 millones de dólares a suplir la red con energía termo-  
20 eléctrica, proveniente de combustibles fósiles. El presupuesto estimado de los  
21 daños en total ascendió a la suma de 27 millones de dólares según Durañona  
22 et al. [2019](#).

1 Las líneas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por even-  
2 tos climáticos severos como corrientes descendentes (CD) o tornados. Estos  
3 eventos pueden provocar la desconexión de las líneas, con consecuencias poten-  
4 cialmente graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos  
5 de salida en servicio por esta causa en una de las principales líneas de Uruguay  
6 (Palmar-Montevideo). Este tipo de fenómenos inducen fuertes movimientos en  
7 los cables, provocando un balanceo excesivo de los mismos. Estas amplitudes  
8 desmesuradas implican vulneraciones en la aislación del sistema, al aproximar  
9 sus cadenas aisladoras a las torres. Es así que se producen descargas a tierra e  
10 indeseables interrupciones del suministro que han afectado a la capital durante  
11 varias horas. Una ilustración del fenómeno se muestra en la Figura 1.1 para  
12 una torre de alta tensión ubicada en la ruta 5 del departamento de Canelones,  
13 Uruguay.



**Figura 1.1:** Ilustración de balanceos excesivos torre Ruta 5.

14 Esto plantea la necesidad de desarrollar más conocimiento a nivel local  
15 para el modelado computacional de este tipo de problemas de gran escala y  
16 complejidad. Este es el principal objetivo de este trabajo, profundizar en la

1 bibliografía para el modelado estructural de conductores y crear un modelo  
2 robusto capaz de simular líneas de transmisión eléctrica sometidas bajo la  
3 acción de vientos extremos.

## 4 1.2. Objetivos

5 Para esta investigación se plantearon los siguientes objetivos:

- 6 1. Realizar un estudio bibliográfico sobre los diferentes modelos disponi-  
7 bles en la literatura capaces de simular el comportamiento dinámico de  
8 conductores eléctricos en líneas de alta tensión.
- 9 2. Implementar y validar la formulación de elementos finitos más adecuada  
10 para la aplicación en la herramienta de código abierto [ONSAS](#).
- 11 3. Generar un modelo de un sistema de transmisión eléctrica capaz de repre-  
12 sentar la dinámica de conductores de alta tensión cargados por un perfil  
13 tipo CD.

## 14 1.3. Enfoque

15 Los autores de la literatura han acuñado sus investigaciones en diversos  
16 tipos de elementos. Utilizando elementos de barras se destacan los trabajos  
17 de: Desai et al. [1995](#), Yan et al. [2009](#), Gani y Légeron, [2010](#), Yang y Hong,  
18 [2016](#). A pesar de la gran esbeltez de las líneas de transmisión eléctrica, las mis-  
19 mas cuentan con rigidez a flexión. Los elementos de barra no son capaces de  
20 representarla, por ende, es necesario incorporar elementos de vigas tridimen-  
21 sionales. Debido a los grandes desplazamientos y rotaciones que se presentan  
22 durante las trayectorias en tormentas, se consideró importante implementar  
23 una formulación corrotacional considerando la dinámica del problema.

24 El campo de la metodología corrotacional es muy amplio, pero debido a  
25 la claridad y contemporaneidad en el desarrollo de sus publicaciones, se tomó  
26 como principal referencia de la formulación a Le et al. [2014](#). A esta se le agrega-  
27 ron componentes no lineales debido a la interacción del sólido en un fluido que  
28 ejerce determinadas fuerzas. Esta formulación se implementó computacional-  
29 mente a la herramienta [ONSAS](#) presentado inicialmente por Bruno Bazzano y

1 Pérez Zerpa, 2017<sup>1</sup>. Este software de código abierto viene siendo desarrollado  
2 por el grupo de investigación: Modelado e Identificación en Sólidos y Estructu-  
3 ras integrado por docentes del Instituto de Mecánica y Producción Industrial  
4 (IIMPI) y por docentes del Instituto de Estructuras y Transporte (IET) de  
5 la Facultad de Ingeniería UdelaR e investigadores internacionales. Se desarro-  
6 llaron cuatro modelos computacionales con grado de complejidad progresivo.  
7 El primero de ellos permitió validar los códigos implementados y el segundo  
8 la dinámica de interacción entre el conductor y los elementos aisladores. El  
9 tercero acercar el modelo a la aplicación central de esta tesis y el último gene-  
10 rar resultados sobre la respuesta de sistemas de transmisión eléctrica ante las  
11 fuerzas de vientos extremos tipo CD.

## 12 1.4. Estructura de la tesis

13 Este documento consta de seis capítulos: Introducción, Estado del arte, Pre-  
14 liminares, Metodología, Resultados Numéricos y Conclusiones. Inicialmente en  
15 el Capítulo 2 se realiza un recorrido histórico en materia de simulaciones apli-  
16 cadas a conductores eléctricos, con un enfoque computacional y semi-analítico.  
17 También se narran los diferentes estudios locales e internacionales sobre vien-  
18 tos extremos, para concluir en un recorrido dentro del abordaje corrotacional.  
19 Posteriormente en el Capítulo 3, con el objetivo de acercar la metodología co-  
20 rrotacional al lector, se presenta una descripción con foco conceptual, según lo  
21 propuesto por la bibliografía principal de Le et al. (2014). Una vez presentada  
22 dicha formulación, se despliega la metodología utilizada para esta investigación  
23 en el Capítulo 4. Aquí se detallan las hipótesis fundamentales del modelado  
24 estructural y de viento, explicándose las condiciones de borde impuestas y  
25 un análisis sobre el amortiguamiento aerodinámico. En este mismo capítulo,  
26 se desarrolla la implementación del algoritmo numérico utilizado con la ex-  
27 tensión de fuerzas viscosas y las estructuras de pseudocódigo referentes a los  
28 principales *scripts* de la implementación computacional en el software ONSAS.

29 Posteriormente, se resuelven tres aplicaciones numéricas en el Capítulo 5.  
30 La primera tiene como objetivo validar numéricamente la implementación. Lue-  
31 go se generó un modelo que es capaz de modelar la dinámica de interacción  
32 entre la cadena aisladora y el conductor. Habiendo validado la formulación para

---

<sup>1</sup><https://github.com/ONSAS/ONSAS.m>



1 los ejemplos anteriores, se modela un ejemplo de un conductor eléctrico some-  
2 tido a una carga artificial, extraída de un viento tipo capa límite atmosférica  
3 (CLA). Por último, se presenta un problema realista de un sistema de transmi-  
4 sión eléctrica, con geometrías y propiedades reales, sometido por un perfil de  
5 viento capturado durante una CD en el norte de Alemania. Finalmente en el  
6 Capítulo 6 se sintetizan los principales resultados de esta investigación, además  
7 de plasmarse eventuales trabajos a futuro, con lineamientos para profundizar  
8 en la temática y sus posibles aplicaciones en el mercado de distribución eléctri-  
9 ca.

# 1 Capítulo 2

## 2 Estado del arte

3 Este capítulo incluye la revisión de la literatura, desde diversas aristas y  
4 focos, explicándose los conceptos y teorías en los cuales se fundamenta esta in-  
5 vestigación. Primeramente en la Sección 2.1, se presenta un relato cronológico  
6 en el estudio de conductores desde el crepúsculo del Siglo XVIII. A continua-  
7 ción en la Sección 2.2, se expone un recorrido a partir de los años 60's en  
8 simulaciones computacionales aplicadas a conductores de alta tensión. Conse-  
9 cutivamente en la Sección 2.3 se describen los fenómenos de CD que afectan  
10 a las líneas a partir de trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas  
11 y otros fenómenos de viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades  
12 aeroelásticas, este fenómeno ha sido abordado por la literatura y un breve  
13 recorrido de estos estudios se presenta en la Sección 2.4. Por último, en la Sec-  
14 ción 2.5 se recorre la metodología corrotacional y los principales autores que  
15 la desarrollaron.

### 16 2.1. Historia de la temática

17 El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados  
18 por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena del  
19 libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el 1657  
20 revolucionó el conocimiento científico en occidente. Tal es así que un siglo y  
21 medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino en  
22 la aplicación de las principales invenciones que arrojó la Revolución Industrial.

23 El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas  
24 de la época, Brook Taylor, d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron

1 las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al  
2 sistema masa resorte en los albores del siglo XVII según Starossek, [1991](#).

3 Partiendo del problema elemental del oscilador simple masa resorte, en 1788  
4 Lagrange et al, hallaron la solución para las vibraciones de un cable inextensible  
5 compuesto por un número finito de elementos, de masa despreciable, sometido  
6 a la acción de fuerzas externas. Posteriormente, Poisson en 1820 presentó la  
7 ecuación diferencial que debería cumplir el sistema en el continuo, sin embargo  
8 según H. M. Irvine y Caughey, [1974](#), las herramientas matemáticas analíticas  
9 desarrolladas hasta la fecha, no permitían hallar la solución general a dicha  
10 ecuación.

11 Debió pasar más de un siglo para que Routh et al. [1955](#) presentara una  
12 solución exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal (curva  
13 que describe un punto sobre una esfera rodando sin deslizar a velocidad angu-  
14 lar constante). En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del  
15 cable, el primero en su época fue Klöppel y H., [1942](#), a partir de esto el autor  
16 Pugsley, [1949](#) determinó experimentalmente una fórmula para las frecuencias  
17 naturales de vibración, considerando un ratio entre la deflexión y el largo de  
18 vano entre, 4 y 10 metros. Además Saxon y Cahn, [1953](#) consideraron un cable  
19 inextensible en el que resolvieron la expresión teórica, formulada por Poisson,  
20 de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue un resultado de su-  
21 ma importancia para la ingeniería de distribución eléctrica, ya que permitía  
22 calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos torres.

23 La seguridad de las personas e integridad de los distintos elementos cir-  
24 cundantes son factores que imprimen criterios de seguridad sobre el descenso  
25 máximo de la línea. Actualmente la tensión del conductor durante el monta-  
26 je, se ajusta de manera tal que la altura mínima respete un valor exigido por  
27 norma. Esta imposición depende principalmente del grado de urbanización, los  
28 umbrales de contaminación magnética y la topografía del terreno.

29 A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las  
30 frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los mode-  
31 los masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. Según H. M. Irvine y  
32 Caughey, [1974](#) se halló el rango transitorio entre ambos estados, corrigiendo  
33 dicha discontinuidad al incluir una descripción completa del modelo de elas-  
34 ticidad del cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables  
35 horizontales (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio defle-  
36 xión-largo del vano entre  $1/8$  y 0. Los mismos autores H. M. Irvine y Caughey,

1 1974, extendió lo postulado para conductores con extremos desnivelados, aun  
2 bajo la hipótesis de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor.

3 El investigador H. M. Irvine y Griffin, 1976 profundizó sobre la dinámica  
4 con extremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movi-  
5 miento tipo terremoto en el año 1978 (M. Irvine, 1978). La teoría postulada  
6 por Irvine fue confirmada por Triantafyllou, 1984 para distintos casos expe-  
7 rimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría y tomando en  
8 cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector tangente al  
9 movimiento.

10 Autores contemporáneos estudiaron en simultáneo condiciones de borde  
11 dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de fuerzas pueden inducir vibracio-  
12 nes y respuestas de resonancia. El pionero en la materia fue A. G. Davenport,  
13 1965. Resultados más refinados fueron obtenidos por Starossek, 1991. En este  
14 trabajo se exponen formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los  
15 cables sometidos a la acción del viento, obviando no linealidades geométricas  
16 y materiales.

17 Estos estudios revelaron el fenómeno de “Galopping”, el cual refiere a una  
18 respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del cable entra  
19 en resonancia con las fuerzas ejercidas por el viento. Teóricamente, las geo-  
20 metrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de fenómenos. Sin em-  
21 bargo, debido a la existencia de imperfecciones constructivas o errores durante  
22 la instalación, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte de  
23 energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respuesta se  
24 presentaron por Simiu y Scanlan, 1986, quienes hallaron condiciones de veloci-  
25 dad crítica eólica en función de coeficientes experimentales obtenidos mediante  
26 ensayos consumados en túnel de viento.

27 Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al pro-  
28 blema de conductores eléctricos. El advenimiento del Método de Elementos  
29 Finitos (MEF) presentado por Zienkiewicz y Cheung, 1970 y aplicado a arma-  
30 duras constituyó una herramienta sumamente potente e innovadora. Esto pro-  
31 vocó que, en los años venideros, se desarrollasen vastas metodologías numéricas  
32 incorporando diferentes elementos y algoritmos de resolución computacional.  
33 En particular, en Italia investigadores pertenecientes al *Politecnico di Milano*,  
34 aplicaron métodos numéricos a la simulación de conductores. Estos investigado-  
35 res son Francesco Foti y Luca Martinelli, entre otros. Un recorrido cronológico  
36 y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos científicos se presenta a

1 continuación en la Sección [2.2](#).

## 2 2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a con- 3 ductores de transmisión eléctrica

4 Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo, por  
5 Di Pilato y Martinelli, estaban basados en elementos trinodales de barra iso-  
6 paramétricos. En estos estudios se asumió pequeñas deformaciones unitarias,  
7 considerándose para el desarrollo no linealidades geométricas debido a grandes  
8 desplazamientos lineales. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos  
9 alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones  
10 para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, este  
11 tipo de modelos poseen la debilidad de no satisfacer las condiciones de equili-  
12 brio dinámico para específicos tipos de balanceo. Esto se justifica en el trabajo  
13 de Martinelli y Perotti, [2001](#) como también en la investigación de Martinelli y  
14 Perotti, [2004](#). En consonancia, estudios contemporáneos evidencian que la rigi-  
15 dez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que despremiar estas  
16 magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predicciones erróneas  
17 sobre las mayores frecuencias naturales del sistema, tal y como se remarca en  
18 el artículo publicado por Koh y Rong, [2004](#).

19 Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007  
20 utilizando abordajes corrotacionales. Este autor presentó una formulación con-  
21 siderando elementos de viga tridimensionales corrotacionales, para calcular el  
22 vector de fuerzas internas e inerciales teniendo en cuenta grandes desplaza-  
23 mientos y rotaciones, en coordenadas globales. No obstante, esta formulación  
24 basada en lo propuesto por Oran, [1973](#) tiene como desventaja principal que  
25 no es fiable ante grandes rotaciones locales de los nodos, como también, ante  
26 significativos incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Conse-  
27 cuentemente para capturar dinámicas complejas, resulta necesario e ineludible  
28 discretizar el dominio temporal y espacial en pequeños intervalos, lo que con-  
29 lleva a costos computacionales desmedidos.

30 El mismo autor y su equipo, corrigieron las limitaciones relacionadas con  
31 las pequeñas rotaciones nodales al año siguiente por Di Pilato et al. [2008](#).  
32 La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la configuración  
33 deformada, utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco, el impe-

1 dimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga, se resuelve  
2 aplicando la metodología propuesta por Simo y Vu-Quoc, 1988.

3 Conforme las simulaciones numéricas en el problema avanzaron, la especi-  
4 ficación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó. Otro  
5 foco de investigación en el área, se basaba en que los resultados experimen-  
6 tales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para  
7 grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y  
8 geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos so-  
9 bre el comportamiento no holomónico del fenómeno. Esto refiere a un modelo  
10 realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción  
11 entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha  
12 temática fueron Papailiou, 1997 y Kutterer y Starossek, 1992.

13 Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos  
14 escenarios, “*full slip*” donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento  
15 relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas.  
16 El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre  
17 ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre  
18 de “*full-stick*”. En esta situación, el conjunto se comporta como un rígido, he  
19 aquí la razón de su nomenclatura. En Papailiou, 1997 se establece la tensión  
20 máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones  
21 de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. En dicho  
22 trabajo se contrastaron resultados analíticos con ensayos experimentales donde  
23 se concluyó que el modelo lograba reproducir adecuadamente el deslizamiento  
24 interno.

25 Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones del conjunto  
26 se traducen en momentos y fuerzas internas a cada hebra que conforma al  
27 conductor. Debido a esto, es posible vincular la curvatura con la deformación  
28 axial de cada hebra y también con la del conjunto. A partir de esto, se obtiene  
29 la matriz de rigidez global, derivando dichas fuerzas y momentos internos, en  
30 función de la deformación y curvatura del conductor.

31 Esta matriz de rigidez depende del estado en que se encuentre la dinámica  
32 del cable. Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen “*full*  
33 *slip*” o “*full-stick*” la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso  
34 “*full-stick*” cuando ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el con-  
35 ductor, la matriz de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente, no se le  
36 puede atribuir un potencial, lo que se asocia al comportamiento no holomóni-

1 co o de histéresis inherente al fenómeno. En dicho estado un modelo de viga  
2 uniforme no es aplicable.

3 Con el propósito de desarrollar una formulación que sea capaz de represen-  
4 tar el fenómeno computacionalmente se publicó el artículo de Foti y Martinelli,  
5 2016. En dicho artículo se implementa un modelo de contacto donde se despre-  
6 cian las fuerzas tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis  
7 de carácter simplificadoras son estudiadas por Costello, 1990 y Rawlins, 2005.  
8 Para el estudio de los contactos radiales se asumió que las superficies de con-  
9 tacto no se deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de  
10 contacto entre cables se pueden aproximar por una línea continua, la fricción  
11 entre los cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último  
12 que la presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

13 Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjun-  
14 to con las condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores límites para  
15 la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El  
16 carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado de  
17 la pérdida súbita de rigidez que ocurre en el conductor, al producirse desli-  
18 zamiento relativo al interior del mismo. Esta disminución abrupta de rigidez,  
19 puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga, lo que  
20 agudiza la problemática de balanceos excesivos. Estos movimientos son inmi-  
21 nentes para determinadas condiciones atmosféricas, entre ellas las TC. Las CD  
22 originadas por TC han sido objeto de estudio en los últimos 50 años por ex-  
23 pertos en ingeniería del viento. En la siguiente Sección se presenta una somera  
24 descripción de la literatura investigada.

## 25 **2.3. Tormentas convectivas**

26 Las TC son fenómenos atmosféricos que generan inestabilidades en el flujo  
27 debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad. Estas se ocasionan  
28 cuando masas de aire caliente ascienden hasta la parte superior de la nube,  
29 quedando depositado como una especie de domo o cúpula al interior de la  
30 misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al interior de la  
31 tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodeaba por debajo.  
32 Esta corriente desciende a grandes velocidades e impacta con vehemencia sobre  
33 la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de anillo vorticoso que  
34 puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h según Fujita, 1985. En

1 dicho trabajo se establecen escalas espaciales entre 40 m y 4 km. No obstante,  
2 estudios publicados por Darwish et al. [2010](#) plantean que se desplazan en un  
3 diámetro entre 1 y 5 km.

4 Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de transmisión  
5 eléctrica, ciertas normativas se basan en perfiles de vientos clásicos (sinópti-  
6 cos) tipo CLA. Esto se traduce en una subestimación de las presiones que  
7 se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma International Electro-  
8 technical Commission (IEC) 60826. Esto pone en riesgo al sistema cuando es  
9 afectado por tornados o CD. La probabilidad de que los sistemas de alta tensión  
10 sean afectados es baja para dominios de corta longitud, pero cuando las líneas  
11 discurren por centenas de kilómetros estos vientos extremos suelen suceder  
12 frecuentemente según lo publicado por Ang y Tang, [1984](#).

13 La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de  
14 daños vinculados a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores con-  
15 temporáneos como Holmes, [2002](#) y Abd-Elaal et al. [2013](#), el diámetro del anillo  
16 se encuentra intrínsecamente relacionado con dicha altura. Complementando a  
17 esto, los autores Stengel y Thiele, [2017](#) en Alemania capturaron este fenómeno  
18 utilizando anemómetros colocados en líneas de transmisión. Esto permitió ha-  
19 llar un perfil de velocidades medias y la función de coherencia relacionada con  
20 la turbulencia a partir de datos experimentales. Es de este artículo del cual se  
21 extrajo el perfil de vientos utilizado en este trabajo.

22 En nuestro país investigadores pertenecientes al Grupo de Eolo Dinámica  
23 perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante una TC a  
24 partir de la recopilación de datos históricos y trabajo de campo. El primer  
25 informe relevado en el artículo de Durañona y Cataldo, [2009](#) donde se realiza  
26 un cálculo del ángulo de balanceo, simplificando cuasi-estáticamente que la  
27 tangente del mismo es igual al ratio de la fuerza de viento por unidad de peso.  
28 En dicho trabajo se mostró que para valores de velocidad de viento de 97.9  
29 m/s la cadena aisladora conductor alcanza los 85 ° medidos desde su posición  
30 vertical normal.

31 Dados los alarmantes resultados de Durañona y Cataldo, [2009](#) posterior-  
32 mente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha  
33 en el trabajo de Durañona, [2015](#). En este estudio se atisba que fenómenos de  
34 CD producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minutos que los vientos tipo  
35 CLA. El valor máximo de velocidad registrado alcanzó los 40 m/s en promedio  
36 de 10 minutos. En el año 2019, este grupo de investigadores presentó un traba-



1 jo relevante donde se resalta que los vientos extremos afectan principalmente  
2 al norte del país según la investigadora Durañona et al. [2019](#). En este se su-  
3 giere que la norma UNIT:50-84 del año 1984 debe ser actualizada incluyendo  
4 cálculos de cargas por fenómenos de vientos no sinópticos. Pero los eventos  
5 de vientos extremos no son los únicos que afectan a los conductores, también  
6 ante vientos tipo CLA pueden ocurrir inestabilidades estructurales inherentes  
7 a interacción entre fluido-estructura según Luongo et al. [2007](#). Una somera  
8 descripción de este fenómeno se detalla a continuación.

## 9 **2.4. Análisis semi-analíticos de conductores**

10 Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pue-  
11 den experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud,  
12 principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente  
13 estudiada por distintos autores de la literatura, entre ellos se destacan los tra-  
14 bajos de Blevins y Vibrations, [1990](#) y Jones, [1992](#). Para vigas de gran esbeltez,  
15 o elementos de cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones  
16 tanto lineales como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos  
17 de uno o dos grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones  
18 consistieron en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinan-  
19 do la relación intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal que luego  
20 debe verse comprobado mediante resultados experimentales. Algunos de ellos,  
21 estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin simetría tangencial, debido a  
22 formaciones de escarcha o hielo. En la temática destaca el trabajo de Chabart  
23 y Lilien, [1998](#), en este se propuso una aproximación innovadora teniendo en  
24 cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser la variación de ángulo de  
25 ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en la fuerza de sustentación  
26 aerodinámica ante la presencia de excentricidades geométricas.

27 El fenómeno Galloping presenta frecuencias bajas de movimiento y sus  
28 trayectorias suelen notarse a simple vista. Este fenómeno tiene consecuencias  
29 severas sobre todo en líneas que se encuentran en climas gélidos, recientemente  
30 en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur de Argentina y las imágenes  
31 son impactantes ([Ver vídeo](#)). La principal causa del fenómeno es el ataque de  
32 vientos intensos y constantes. La presencia de irregularidades geométricas en  
33 las líneas induce inestabilidades aerodinámicas y cuanto mayor sea la cantidad  
34 y discontinuidad de las excentricidades más aguda será la respuesta inducida.

1 Las velocidades requeridas de viento suelen ser mayores a 7 m/s y las frecuen-  
2 cias de respuesta del conductor suelen oscilar entre los 0.15 y 1 Hz.

3 Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente apro-  
4 ximación de las líneas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separa-  
5 dores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, sí los relativos  
6 entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elemen-  
7 tos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la  
8 formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en  
9 inglés *Torsional Damper Detuner* gira relativo al conductor anulando las for-  
10 mas irregulares producto de la formación de hielo.

11 En el artículo de Jones, [1992](#) se halló la solución a la ecuación de movimien-  
12 to, despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los  
13 autovalores que permiten detectar analíticamente bajo qué condiciones del sis-  
14 tema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el  
15 estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose  
16 un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente ma-  
17 yor a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos  
18 e indeseables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje  
19 vertical.

20 Los estudios de Jones y Blevins, se basan en premisas de linealidad  
21 geométrica. Sin embargo otros autores han destacado que los efectos no li-  
22 neales juegan un rol importante en el desarrollo, como ser los trabajos de  
23 Luongo et al. [1984](#) y Lee y Perkins, [1992](#). En el trabajo propuesto por Lee se  
24 incluyen componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento  
25 del conductor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un  
26 modelo lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y  
27 tercer orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numéricamente  
28 la ecuación diferencial del movimiento.

29 Esta problemática fue abordada unos años más tarde por Luongo y Piccar-  
30 do, [1998](#). En este artículo se hallaron las soluciones no lineales de resonancia  
31 desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se contrastaron dos solu-  
32 ciones arrojadas por disímiles modelos, uno de pequeños desplazamientos y  
33 otro incorporando no linealidades geométricas. En dicho trabajo se distinguen  
34 dos regímenes del movimiento, el primero de ellos nominado crítico refiere a  
35 valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos no presentan  
36 gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayectorias se ampli-

1 fican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se concluye que la  
2 solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable para valores de  
3 velocidad media de viento correspondiente al estado crítico. Posteriormente al  
4 incrementar la velocidad de viento se desata el fenómeno post-crítico y el in-  
5 cluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible para representar  
6 cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles simétricos, la velocidad  
7 crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis lineal.

8 Según Luongo et al. 2007, hasta la fecha de publicación, era necesaria una  
9 formulación orientada al modelado no lineal de la dinámica del problema. En  
10 numerosos trabajos publicados, se calculaban las fuerzas en su régimen cuasi  
11 estacionario y los desarrollos en elementos finitos aplicados eran exigüos, en  
12 espacial para el régimen post-crítico del Galloping. Por otra parte, escasos  
13 estudios consideraban las variaciones de ángulo de ataque y velocidad relativa  
14 entre el conductor y del flujo. Además, se despreciaba la rigidez a torsión de  
15 los elementos, esto se debe a que la rigidez según el eje axial suele ser mayor  
16 respecto a la rigidez flexional, debido a la esbeltez geométrica del conductor  
17 de estudio.

18 El propósito del trabajo de Luongo et al. 2007 fue proponer un elemento  
19 de viga orientado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de  
20 este a torsión. Estos términos representan diferencias notorias para secciones  
21 anti-simétricas en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resul-  
22 tados numéricos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el  
23 objetivo de hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró que  
24 el ángulo de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones  
25 críticas del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuen-  
26 ta los modos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la  
27 inclusión del ángulo puede influir significativamente en el valor de velocidades  
28 críticas aeroelásticas.

29 En el artículo publicado por Luongo et al. 2009 se profundizó en los efectos  
30 del ángulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la  
31 formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como  
32 destacado resultado, se probó que mientras la rigidez torsional no afecta signi-  
33 ficativamente los desplazamientos traslacionales, a diferencia de la solución del  
34 ángulo de giro que si lo hace. En especial para perfiles sin simetría de revolu-  
35 ción. La consideración del balanceo en la fuerza de sustentación aerodinámica  
36 y en el ángulo de ataque, afecta notoriamente las frecuencias naturales del

1 cable, en particular las propiedades de la sección aerodinámica y por tanto  
2 sus velocidades críticas. Por ende, se resalta la importancia de incorporar un  
3 modelo robusto y completo de vigas para el modelado del conductor, como ser  
4 un modelo de vigas corrotacional.

## 5 **2.5. Análisis corrotacional de vigas**

6 Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplica-  
7 ciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos  
8 y terrestres. Además de las formulaciones clásicas de vigas, el abordaje corro-  
9 tacional es idóneo para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la  
10 necesidad de incluir términos de no linealidad geométrica generados por los  
11 grandes desplazamientos en servicio. Destacados autores han contribuido al  
12 desarrollo histórico de esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el  
13 emblemático trabajo de Nour-Omid y Rankin, [1991](#) quienes sentaron las bases  
14 del método.

15 Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del  
16 elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente, considerándolo como  
17 un sólido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componen-  
18 te rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario a los extremos del  
19 elemento que permite localizarlo en el espacio. Mientras que para la componen-  
20 te deformable se considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su  
21 respectivo sistema de coordenadas, específica para cada material. La principal  
22 ventaja de la propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formula-  
23 ciones locales, permitiendo incorporar distintos tipos de elementos fácilmente.  
24 Además, destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del  
25 elemento representa términos de no linealidades geométricas, mientras que la  
26 componente deformable incorpora la no linealidad del material.

27 El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se  
28 calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La varia-  
29 ción de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz  
30 tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce  
31 a esta propiedad anti-simétrica, y esta característica depende principalmente  
32 del desbalanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades  
33 anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al  
34 resolver el sistema mediante métodos numéricos como Newton Raphson (N-R).

1 Los autores Nour-Omid y Rankin, [1991](#) con el objetivo de optimizar el método,  
2 demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de  
3 convergencia cuadrático.

4 Debido a la versatilidad de la metodología corrotacional, en los años poste-  
5 riores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de elementos  
6 y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron a considerar  
7 funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentrada y elemen-  
8 tos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener de manera  
9 sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inerciales. Este  
10 cálculo conduce ineludiblemente a la matriz de masa constante de Timoshenko.  
11 Por otra parte, interpolaciones lineales asumen que los desplazamientos trans-  
12 versales al eje de la viga son nulos, esta hipótesis reduce el campo de aplicación  
13 del modelo, en especial para mallas de bajo número de elementos, ya que la  
14 matriz de masa tangente y el vector de fuerzas inerciales no representan las  
15 componentes omitidas.

16 En la libro de Crisfield, [1997](#) se sugiere que el proceso de obtención reque-  
17 rido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado intrincado,  
18 debido a su grado de complejidad geométrica. El autor propone utilizar fun-  
19 ciones de interpolación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al elemento de  
20 Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan complejas a la hora de derivar el  
21 vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consideró un modelo  
22 simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones cúbicas para el  
23 vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una matriz de masa  
24 constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero numéricamen-  
25 te eficiente. Esta forma de proceder también se aplicó en Pacoste y Eriksson,  
26 [1997](#).

27 En paralelo Battini y Pacoste, [2002](#) y Alsafadie et al. [2010](#), desarrollaron  
28 eficientes elementos de viga bidimensionales y tridimensionales, con el propósi-  
29 to de modelar estructuras en grandes desplazamientos bajo cargas estáticas.  
30 Estos autores afirman que, al seleccionar adecuadamente el largo de elemento,  
31 los desplazamientos locales son significativamente menores que los asociados a  
32 la componente rígida. Por esta razón, se compararon resultados con diferente  
33 número y tipos de elementos para los mismos ejemplos. Estos estudios, en con-  
34 junto con lo publicado por Alsafadie et al. [2010](#), concluyen que formulaciones  
35 cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales bajo ciertas circunstan-  
36 cias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión analítica hacia las

1 componentes dinámicas.

2 Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos  
3 años. El primero de ellos fue Behdinan et al. [1998](#) a finales del siglo XX, pero  
4 las funciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales  
5 no eran consistentes con la formulación canónica del método corrotacional  
6 propuesta por Simo y Vu-Quoc, [1988](#). De hecho, según el conocimiento del  
7 autor, no existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una  
8 formulación consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de  
9 fuerza interna sino también, las componentes inerciales.

10 Años más tarde, Le et al. [2011](#) publicaron una formulación para vigas  
11 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación  
12 independiente “IIE” de la referencia Reddy, [1997](#). Estos elementos fueron desa-  
13 rrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz  
14 tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basa-  
15 das en los polinomios de Hermite, con el propósito de incluir consideraciones  
16 adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es  
17 una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y  
18 su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algunas  
19 aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además, se  
20 comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la lite-  
21 ratura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta  
22 nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir  
23 significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor  
24 precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los  
25 desplazamientos locales.

26 Los mismos autores en conjunto con Le extendieron la formulación en su  
27 trabajo del 2014 Le et al. [2014](#) agregando una dimensión, este desarrollo se  
28 vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmu-  
29 tatividad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensable  
30 a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo,  
31 se presenta la parte estática desarrollada por Battini en Battini y Pacoste,  
32 [2002](#), además de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuer-  
33 zas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para  
34 las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se  
35 seleccionó el clásico método Hughes, Hilbert y Taylor (HHT) con los paráme-  
36 tros convencionales según Hilber et al. [1977](#). Este algoritmo es utilizado por

1 reconocidos programas comerciales (Abaqus, Lusas) e implica una disipación  
2 sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, además  
3 presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

4 En Le et al. [2014](#) se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar  
5 la nueva formulación con otros dos enfoques. La primera comparación, se deriva  
6 de la nueva formulación reemplazando las interpolaciones cúbicas por lineales.  
7 El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por Simo y Vu-Quoc, [1988](#).  
8 En base a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones:  
9 todas las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no  
10 así con mallas gruesas. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y  
11 Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente más imprecisas en  
12 comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo  
13 computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el  
14 modelo. La formulación corrotacional es ligeramente más lenta (12 %) respecto  
15 a lo descrito por Simo y Vu-Quoc, [1988](#). Sin embargo, bajo ciertas condiciones  
16 altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación  
17 innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo según el artículo (Le et  
18 al. [2014](#)).

19 Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos  
20 campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo  
21 es un atractivo para distintos investigadores del área. En el trabajo de Albino  
22 et al. [2018](#) se modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por  
23 materiales graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta  
24 mar. En 2019 Asadi y Johansson, [2019](#) simulaban palas de aerogeneradores  
25 utilizando elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas,  
26 entre ellas el tren de transmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-  
27 pala. En el mismo año el autor Barzanooni et al. [2018](#) abordó la problemática  
28 de anillos e interacciones de contacto aplicado a robots industriales también  
29 con la formulación propuesta por Le et al. [2014](#).

30 Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación  
31 central de este trabajo en el que se desarrollan grandes desplazamientos y  
32 términos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando *software*  
33 para ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y  
34 mecánica.

# 1 Capítulo 3

## 2 Conceptos preliminares

3 A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de  
4 la formulación corrotacional según lo propuesto por Le et al. 2014, (Battini y  
5 Pacoste, 2002). La temática se abordará progresivamente según la naturaleza  
6 de las variables. En primera instancia se describen las magnitudes cinemáticas  
7 en las Secciones 3.1 y 3.2. Una vez presentadas las magnitudes cinemáticas se  
8 desarrolla el análisis corrotacional para las variables estáticas y dinámicas en  
9 la Sección 3.3.

### 10 3.1. Cinemática corrotacional

11 El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en  
12 escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas  
13 representa grandes rotaciones y desplazamientos, dados por el movimiento de  
14 la viga considerandola como un elemento rígido. La segunda componente tiene  
15 en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material.  
16 Este enfoque se suele aplicar en casos estáticos, donde resulta intuitivo imagi-  
17 nar inicialmente como se deformaría la estructura de manera rígida para luego  
18 aplicarle la componente no rígida. Para poder realizar esta descomposición,  
19 hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten repre-  
20 sentar los desplazamientos de cada una de las componentes. Para encontrar la  
21 curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y trasla-  
22 ción de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas magnitudes se  
23 obtienen a partir de transformaciones representables matemáticamente con la  
24 artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática

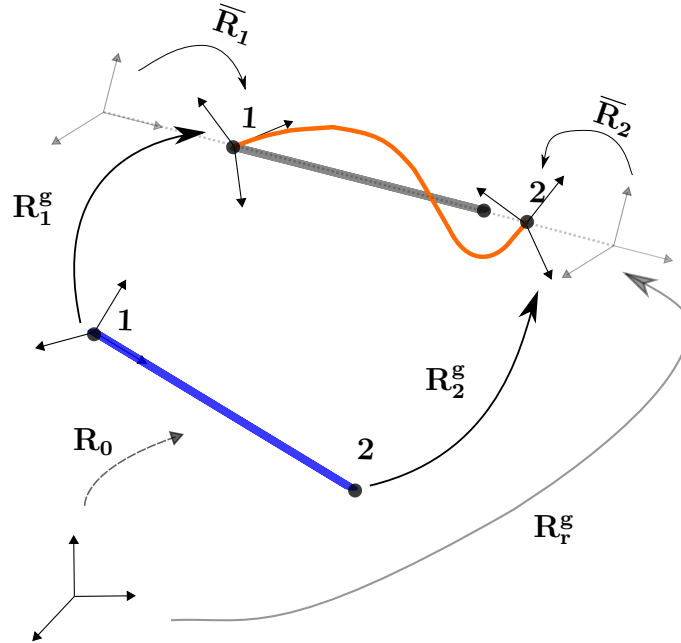


1 puede hallarse en el trabajo de Kožar y Ibrahimbegović, 1995.

### 2 3.1.1. Matrices de rotación

3 Las configuraciones utilizadas son dos rotaciones consecutivas ilustradas en  
4 la Figura 3.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos,  
5 se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa  
6 el elemento en su configuración indeformada o de referencia. El color naranja  
7 identifica a la componente de deformación no rígida mientras que en gris se  
8 ilustra la configuración de deformación rígida del elemento.

9 Para realizar cambios de coordenadas de una componente a otra se definen  
10 una serie de rotaciones, la primera de ellas denominada  $\mathbf{R}_0$  lleva al elemento  
11 desde su configuración canónica a su configuración de referencia. A partir de  
12 esa configuración, se halla la geometría deformada aplicando las transforma-  
13 ciones  $\mathbf{R}_1^g$  o  $\mathbf{R}_2^g$ , dependiendo el nodo de interés. La notación con supraíndice  
14 “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a di-  
15 cha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cual es la  
16 configuración deformada partiendo del sistema de coordenadas canónico.



**Figura 3.1:** Rotaciones a cada configuración.

17 En la Figura 3.1, tanto las rotaciones locales  $\bar{\mathbf{R}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{R}}_2$  como globales  $\mathbf{R}_1^g$  o  
18  $\mathbf{R}_2^g$  se utiliza el subíndice 1 o 2, mientras que para la rotación de deformación  
19 rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender

la metodología corrotacional. Dado que la componente de deformación rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del subíndice. Para hallar la configuración deformada del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa dado un nodo arbitrario, por ejemplo el 1, consiste en aplicar consecutivamente las transformaciones  $\mathbf{R}_r$  y  $\bar{\mathbf{R}}_1$  encontrando así la configuración deformada.

### 3.1.2. Sistemas de coordenadas

Habiendo descrito las rotaciones del elemento, para deducir las matrices asociadas a cada transformación, resulta imprescindible definir un conjunto de sistemas de coordenadas que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de vectores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Descripción de los sistemas de coordenadas corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia canónico integrado por el sistema de coordenadas ortogonal  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ . Al aplicarle a estos vectores la transformación  $\mathbf{R}_0$ , se obtienen los vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Estos permiten ubicar al elemento en su configuración de referencia. Consecuentemente, para definir el sistema de coordenadas  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  solidario a la configuración de deformación rígida, basta con aplicar la transformación  $\mathbf{R}_1^g$ . Por último, para los nodos 1 y

2, denominado arbitrariamente con el subíndice  $i$ , el sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$  permite identificar la orientación y posición del nodo  $i$  en su configuración deformada. Esta es posible obtenerla rotando el sistema de coordenados  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  por la matriz  $\mathbf{R}_i^g$ .

La definición de los sistemas de coordenadas mencionados en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta, intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los sistemas de coordenadas solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los sistemas de referencia se establecen en la Tabla 3.1:

| Matriz               | Vínculo de sistemas de referencia   |
|----------------------|---|
| $\mathbf{R}_0$       | $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$       |
| $\mathbf{R}_i^g$     | $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ |
| $\bar{\mathbf{R}}_i$ | $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ |
| $\mathbf{R}_r$       | $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ |

**Tabla 3.1:** Caracterización de matrices en términos de los sistemas de referencia.

Los vínculos descritos en la Tabla 3.1 se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda refieren al dominio de la matriz y a su derecha hacen a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primera fila se tiene:  $\mathbf{R}_0 \cdot (\mathbf{E}_1) = \mathbf{e}_1^T$ . Al plantear este tipo de vínculos entre el sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$  se puede hallar a partir del sistema de coordenadas canónico  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  de dos formas. La primera consiste aplicar consecutivamente las rotaciones  $\mathbf{R}_0$  y  $\mathbf{R}_i^g$  y la segunda en aplicar  $\mathbf{R}_r$  y luego  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Esto se muestra en la ecuación a continuación:

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_i. \quad (3.1)$$

A partir de la Ecuación (3.1) se puede obtener la matriz de rotación  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Para esto se hace uso de la propiedad de matrices ortonormales  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$  y se obtiene la ecuación que prosigue:

$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.2)$$

### 3.1.3. Desplazamientos lineales y angulares

El propósito de la descripción anterior, responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones, ubicando a cada elemento en coordenadas locales y globales. Las coordenadas globales se referencian al sistema de vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mientras que las locales a  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ . El vector de desplazamientos locales del elemento es compuesto por: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra  $\bar{u}$ , y sus desplazamientos angulares nodales con el nombre  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$ . El escalar  $\bar{u}$  representa el estiramiento del elemento respecto de su largo inicial  $(l_0)$ . A su vez, el ángulo  $\bar{\theta}_1$  se asocia con la rotación del sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$  respecto de  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  indicados en la Figura 3.2. Estos siete grados de libertad se compactan en el vector  $\mathbf{d}_1 = (\bar{u}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ .

El vector de desplazamiento axial  $\bar{u}$  se descompone en tres componentes según el sistema de vectores  $\mathbf{r}_i$ , solidario a la configuración de deformación rígida. A este vector de desplazamientos se le denomina  $\mathbf{d}_r$ . Además, los desplazamientos de la viga se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas  $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$ . Estas tienen origen en la configuración de referencia y permiten encontrar los desplazamientos en la configuración deformada. Para el nodo 1 los  $\delta \mathbf{w}_1^{gT}$  hacen referencia a la rotación de los vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  hasta  $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$ . Además, los desplazamientos globales del nodo 1  $\delta \mathbf{u}_1^g$  se corresponden con los desplazamientos del nodo desde su configuración de referencia hasta la deformada. Esto se puede observar en la Figura 3.2.

Para resolver el problema mediante métodos numéricos, es necesario definir variaciones. Estas emplearán un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. Las variaciones infinitesimales de los desplazamientos se definen según:

$$\delta \mathbf{d}_1 = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T \quad (3.3)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^{gT}, \delta \mathbf{u}_2^{gT}, \delta \mathbf{w}_1^{gT}, \delta \mathbf{w}_2^{gT}]^T \quad (3.4)$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales presentados en las Ecuaciones (3.3) y (3.4), se deben calcular los diferenciales asociados a las transformaciones de giro  $\mathbf{R}_r^g$ ,  $\mathbf{R}_i^g$ ,  $\mathbf{R}_0$  y  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Para esto, primeramente deben

1 obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla 3.1. Las entradas de  $\mathbf{R}_r$   
 2 y  $\mathbf{R}_i^g$  se hallan siguiendo las ecuaciones:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (3.6)$$

3 Los vectores  $\mathbf{r}_i$  se hallan a partir del vector director  $\mathbf{r}_1$  que apunta del nodo  
 4 1 al 2. El versor  $\mathbf{r}_1$  tiene como dirección la recta que une los puntos 1 y 2 en  
 5 la configuración deformada, esto es equivalente a  $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1^g}{l_n}$ , donde  $l_n$   
 6 es la distancia entre 1 y 2 en la configuración deformada. Dadas las posiciones  
 7 iniciales de los nodos en coordenadas globales  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , sus desplazamientos  $\mathbf{u}_1^g$   
 8 y  $\mathbf{u}_2^g$ , el largo una vez deformado se calcula  $l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\|$ .

9 El vector auxiliar  $\mathbf{p}$  se define para hallar los vectores  $\mathbf{r}_i$  y partir de estos  
 10 la base  $\mathbf{t}_i$ . Estos vectores son solidarios al movimiento ya que se encuentran  
 11 anidados a la configuración de deformación rígida y local respectivamente.  
 12 El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la  
 13 necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen  
 14  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ 1 \ 0]^T. \quad (3.7)$$

15 En la expresión anterior la matriz  $\mathbf{R}_0$  se obtiene colgando los vectores  $\mathbf{e}_i$   
 16 escritos como combinación lineal de la base  $\mathbf{E}_i$ . Una vez calculada esta matriz  
 17 y evaluado las expresiones de las Ecuaciones (3.7) se obtienen los restantes  
 18 vectores asociados a la componente de deformación rígida según la siguiente  
 19 ecuación:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1. \quad (3.8)$$

20 Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones  
 21 de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de  
 22 variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}_i} = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.9)$$

23 En la Ecuación (3.9) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de  
 24 diferenciales matriciales. Dado que la matriz de rotación  $\mathbf{R}_0$  vincula la con-

1 figuración canónica con la de referencia, como ambas son fijas esta matriz es  
 2 constante. Por lo tanto, su variación es nula. Definiendo el vector de ángulos  
 3 de la componente de deformación rígida con el símbolo  $\delta \mathbf{w}_r^g$ , las matrices de  
 4 giro  $\overline{\mathbf{R}}_i$ ,  $\mathbf{R}_i^g$  y sus variaciones pueden hallarse según las expresiones:

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g \quad (3.10)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r. \quad (3.11)$$

5 En las Ecuaciones (3.10) y (3.11) el término  $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$  refiere a la operación  
 6 *skew* del vector  $\delta \mathbf{w}_r^g$ . Esta operación simplifica el producto vectorial de forma  
 7 matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a ma-  
 8 trices de rotación. La función  $\tilde{\mathbf{A}}$  aplicada al vector  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  toma la  
 9 siguiente forma:

$$(\boldsymbol{\Omega}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

10 Para vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las varia-  
 11 ciones globales se definen las matrices  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g, \quad (3.13)$$

12 Según los cocientes entre las componentes de los vectores auxiliares  $\mathbf{p}_j$  y  $\mathbf{p}_{ij}$  de  
 13 la Ecuación (3.7), el vector  $\mathbf{p}_j = (\mathbf{R}_r^T \mathbf{p})$  y  $\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$  se calcula la matriz  $\mathbf{G}$   
 14 de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}^g} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] \quad (3.14)$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_{12}}{2p_2} & -\frac{p_{11}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_2}{2p_2} & -\frac{p_{21}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

1      Notoese que las matrices  $\mathbf{R}_r$  tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas  
2      dimensiones,  $\mathbf{0}$  es una matriz nula de 3x3 e  $\mathbf{I}$  una matriz identidad del mismo  
3      número de filas y columnas. La relación entre los diferenciales anteriores, se  
4      pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos  
5      de ángulos locales en términos globales, según la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.17)$$

6      Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coorde-  
7      nadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar  $\mathbf{r}$  que vincula los  
8      incrementos del desplazamiento axial  $\delta \bar{u}$  con los globales. Esto permite escribir  
9      la Ecuación (3.3) en relación a (3.4) haciendo uso de la expresión:

$$\delta \bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \quad \mathbf{0}_{1,3} \quad \mathbf{r}_1^T \quad \mathbf{0}_{1,3}]. \quad (3.18)$$

## 10      3.2.      Formulación local

11      La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su  
12      versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento  
13      analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En esta  
14      sección se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para  
15      el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.3.

16      Sea una sección transversal de un punto G ubicado a una distancia  $x$  del  
17      nodo 1 en la configuración rotada, el movimiento local de una sección ubicada  
18      a una distancia  $x$  de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir

de la rotación y traslación de dicha sección. Una ilustración de esto se muestra en la Figura 3.3, donde la configuración de deformación rígida se identifica en punteado y la configuración deformada en color naranja.



**Figura 3.3:** Esquema de desplazamientos locales.



**Figura 3.4:** Ilustración grados de libertad locales.

El movimiento de la base  $\mathbf{t}_i$  con respecto al sistema  $\mathbf{r}_i^G$  está dado por los desplazamientos  $\bar{u}_3$  según el versor  $\mathbf{r}_3^G$  y análogamente para los vectores  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_1$ . Esto determina la ubicación del baricentro  $G$ . Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes está dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores  $\mathbf{t}_3^G$  y  $\mathbf{t}_2^G$  dentro del plano y un versor perpendicular  $\mathbf{t}_1^G$ . La transformación  $\bar{\mathbf{R}}_G$  permite encontrar los transformados de la base  $\mathbf{r}_i^G$  etiquetados con las letras  $\mathbf{t}_i^G$  de acuerdo con la Figura 3.4. En esta también se observa el desplazamiento axial de la barra  $\bar{u}$  correspondiente al del nodo 2 en la dirección  $\mathbf{r}_1$ .

Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para los desplazamientos axiales  $\bar{u}_1$  y el ángulo de torsión  $\bar{\theta}_1^G$ , según las ecuaciones:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0}. \quad (3.19)$$



1 Tanto para los desplazamientos transversales  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_3$  como para los ángulos de  
2 flexión  $\bar{\theta}_2^G$  y  $\bar{\theta}_3^G$ , las interpolaciones se realizan través de los polinomios cúbicos  
3 expresados en las ecuaciones a continuación:

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (3.20)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right). \quad (3.21)$$

4 Los desplazamientos del baricentro G de la sección, respecto del sistemas  
5 de coordenadas locales, se expresan en el vector  $\mathbf{d}_1^G$ . Los valores en términos  
6 de la componente de deformación rígida  $\mathbf{r}_1$  se calculan aplicando la siguiente  
7 ecuación:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G. \quad (3.22)$$

8 Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nu-  
9 las es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas.  
10 De esta forma se construyen las matrices  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ . Estas expresan los despla-  
11 zamientos transversales  $\bar{u}_2, \bar{u}_3$  como también los ángulos  $\bar{\theta}_1^G$  y  $\bar{\theta}_2^G$  y  $\bar{\theta}_3^G$  según  
12 los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$  para  
13 el nodo 1 y 2 respectivamente. Analíticamente esto es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

### 3.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura 3.3 queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$OG = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (3.25)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente en las Ecuaciones (3.19), (3.20) y (3.21) es posible escribir los desplazamientos del baricentro según:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (3.26)$$

$$OG = \mathbf{N}_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + \mathbf{N}_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (3.27)$$

y su diferencial asociado se calcula de la siguiente forma:

$$\delta OG = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1. \quad (3.28)$$

La Ecuación (3.28) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta el cálculo de su magnitud, ya que dicha variable es solidaria a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones (3.13), (3.14), (3.17) y (3.10) lográndose de este modo, escribir a  $\delta \mathbf{u}$  en coordenadas globales según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R}_r(\mathbf{N} + \mathbf{P}_1 \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_1 \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.29)$$

Además se compacta la notación definiendo la matriz  $\mathbf{H}_1$  según la ecuación a continuación:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.30)$$

Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.3), son despreciables

1 frente a los de la componente de deformación rígida. Para el autor Le et al.  
2 2014, las reducidas variaciones en la geometría de dos iteraciones consecutivas  
3 implican que no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales  
4 y rígidos, matemáticamente :  $\delta \overline{\boldsymbol{\theta}}_{ri} = \overline{\delta \mathbf{w}_i}$ .

5 Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magni-  
6 tudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa  
7 se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según:

$$\delta \mathbf{w}^g(\mathbf{OG}) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r(\mathbf{P}_2\mathbf{P} + \mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g. \quad (3.31)$$

8 Análogamente a la Ecuación (3.30), se compacta la notación definiendo la  
9 matriz  $\mathbf{H}_2$  según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_2\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g. \quad (3.32)$$

### 10 3.3. Dinámica corrotacional

11 Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección 3.1 resulta plau-  
12 sible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación  
13 se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa  
14 de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales  
15 y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (Le et al. 2014) y  
16 (Battini y Pacoste, 2002). Acompasando con el desarrollo histórico de la ma-  
17 teria, resulta natural definir las velocidades y aceleraciones para luego obtener  
18 los vectores de fuerza interna e inercial y sus matrices tangentes asociadas.

#### 19 3.3.1. Velocidades y aceleraciones

20 Las magnitudes dinámicas desempeñan un papel primordial en el análisis im-  
21 plementado y tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en  
22 términos globales. Para calcular estas expresiones hace falta expresar las deri-  
23 vadas temporales de las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{R}_r$ . Esta operatoria matricial, se traduce  
24 en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Dado que varia-  
25 ble  $\mathbf{E}$  depende de  $\mathbf{R}_r$  se calculan inicialmente sus derivadas según la Ecuación  
26 (3.11). Al derivar se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}. \quad (3.33)$$

1 Al sustituir esta ecuación en  $\dot{\mathbf{E}}$  se deduce a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E}_t. \quad (3.34)$$

2 Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.30) se deduce la siguiente expresión para la velocidad lineal  $\dot{\mathbf{u}}$ :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.35)$$

4 Aplicando la regla del producto a la Ecuación (3.35) se halla la aceleración lineal  $\ddot{\mathbf{u}}$  del baricentro:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{E}}^T) \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.36)$$

6 El valor *skew* de las velocidades angulares sobre la componente de deformación rígida  $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r$  se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación (3.12),  
7 aplicado al vector  $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$ . Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la Ecuación (3.36) definiendo la matriz  $\mathbf{C}_1$  como se escribe  
8 a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t, \quad (3.37)$$

11 quedando definida la aceleración lineal de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.38)$$

12 Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó la nomenclatura para evitar la lectura engorrosa de notación. Derivando  
13 la Ecuación (3.31) respecto a la variable temporal, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad angular  $\dot{\mathbf{w}}$ :

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.39)$$

16 Utilizando la regla del producto se deduce la siguiente expresión para la aceleración angular  $\ddot{\mathbf{w}}$ :

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{C}}_2 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{E}}^T) \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.40)$$

1 A partir de esto, se compacta la expresión de la Ecuación (3.40) definiendo la  
2 matriz  $\mathbf{C}_2$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\mathbf{w}}_r \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (3.41)$$

$$(3.42)$$

3 Una descripción detallada puede encontrarse en (Le et al. 2014). Dentro del  
4 apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las derivadas  
5 temporales de las matrices  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{H}_2$ . También es posible profundizar en la  
6 deducción de las matrices  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .

### 7 3.3.2. Fuerza interna y matriz tangente

8 En esta sección se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del  
9 elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  para el  
10 nodo  $i$  se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por  
11 la fuerza axial  $f_{a_i}$ , dos momentos flectores  $M_1^i$ ,  $M_2^i$  y un momento torsor  $M_3^i$   
12 para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección de nomenclatura  
13 para el vector  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  de fuerza interna se presenta a continuación:

$$\mathbf{f}_1^{\text{int}} = [f_{a_i} \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2] = [f_{a_i} \ \mathbf{m}]. \quad (3.43)$$

14 La fuerza interna se calculará inicialmente para coordenadas locales deno-  
15 minada  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$ , donde su obtención es relativamente sencilla, para luego transcri-  
16 bir estos resultados en términos globales  $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$ . Con este cometido se define la  
17 matriz  $\mathbf{B}$  de cambio de base según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{d}_1 = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1^{\text{int}}. \quad (3.44)$$

18 Haciendo uso de la descomposición corrotacional, el cambio de variables  
19 se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite  
20 expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración de de-  
21 formación rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para

1 los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Según  
2 los sistemas de referencia de la Figura 3.2, los cambios de variables refieren  
3 a escribir primeramente los desplazamientos locales en términos de los rígidos  
4 ( $\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$ ). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los  
5 desplazamientos desde la configuración de deformación rígida a la de referencia  
6 ( $\delta \mathbf{d}_i \rightarrow \delta \mathbf{d}_g$ ). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes  
7 en función de coordenadas inmóviles y globales.

8 Con la ayuda algebraica de las matrices auxiliares  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{E}$ , definidas en las  
9 Ecuaciones (3.13) y (3.14) es posible vincular los ángulos diferenciales locales  
10  $\delta \bar{\theta}_i$  con los incrementos globales  $\delta \mathbf{d}_g$ . Esto permite conocer los momentos flec-  
11 tores y torsores de la viga en coordenadas globales. Análogamente el vector  
12 auxiliar  $\mathbf{r}$  contiene a  $\mathbf{r}_i$  según el sentido axial de la barra, por lo que rees-  
13 cribir este último permite expresar la fuerza de directa del elemento  $f_{a_i}$  en  
14 términos de la base  $\mathbf{E}_i$ . Estos razonamientos se plasman en las ecuaciones a  
15 continuación:

$$\mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_i^{\text{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \mathbf{E}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_i^{\text{int}} \quad (3.45)$$

$$\delta \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \delta \mathbf{r}^T f_{a_i} + \delta (\mathbf{E} \mathbf{P}^T) \mathbf{m}. \quad (3.46)$$

16 Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés, para la resolución  
17 empleando métodos numéricos, obtener sus derivadas respecto de los despla-  
18 zamientos. La matriz tangente  $\mathbf{K}_g$  representa esta magnitud y su expresión se  
19 escribe a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_i \mathbf{B} + \frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{f}_i)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (3.47)$$

20 La matriz  $\mathbf{B}$  permite realizar el cambio de coordenadas  $\delta \mathbf{d}_a$  a  $\delta \mathbf{d}_g$ , de acuer-  
21 do con lo definido en (3.44). A su vez, se define la variable  $\mathbf{K}_i$  correspondiente  
22 al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y  
23 rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material  
24 implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante  
25 diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz  $\mathbf{K}_i$ .

26 Para calcular las matrices tangentes se define la matriz  $\mathbf{D}$  anti-simétrica y  
27 se calcula en función de los productos internos de los vectores  $\mathbf{e}_i$ , esta aporta  
28 la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial  $f_{a_i}$  de la barra. Esta se  
29 calcula según las siguiente ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (3.48)$$

1 Por otra parte, se define matriz auxiliar  $\mathbf{Q}$  a partir del producto de  $\mathbf{P}$  y  
2 los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, de acuerdo con la  
3 ecuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(2)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(3)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

4 Además el vector auxiliar  $\mathbf{a}$  se construye de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

5 Operando con la regla del producto al diferencial de fuerza interna de la  
6 Ecuación (3.46) y sustituyendo las definiciones postuladas en las Ecuaciones  
7 (3.50), (3.48) y (3.49), la matriz tangente resulta:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a} \mathbf{r}. \quad (3.51)$$

8 Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.51) es asimétrica, sin  
9 embargo según Nour-Omid y Rankin, 1991 esta puede ser simetrizada sin per-  
10 der la convergencia cuadrática para el método de N-R, siempre y cuando los  
11 momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó  
12 numericamente la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán  
13 cargados con fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en con-  
14 verger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión  
15 y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger según lo  
16 publicado en (Rankin y Nour-Omid, 1988).

### 3.3.3. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes asociadas. El atractivo principal de la referencia de Le et al. 2014 se basa en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas (Crisfield, 1997). Esta consistencia se debe al encare analítico del vector de fuerzas inerciales, según el planteo cinemático de las variables descritas en la Sección 3.1. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad de que la magnitud primaria será la energía cinética del elemento  $K$ . Esta propiedad escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ( $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ ) como también angulares ( $\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$ ) según la siguiente ecuación:

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} dl_0 \quad (3.52)$$

Dada la Ecuación (3.52) se calcula la variación de energía cinética del elemento. Para la obtención de esta expresión se aplicó la regla del producto de diferenciales y el teorema de Leibiniz para integrales de extremos fijos, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}}] dl_0 \quad (3.53)$$

Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subíndices “g” para las magnitudes dinámicas ( $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ ) y sus respectivas derivadas. De igual forma, las variables del integrando en las Ecuaciones (3.52) y (3.53) se omitió la nomenclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga, que si el elemento es de densidad uniforme coincide con el centro de masa de la sección. Los elementos serán de área constante siendo  $A_\rho$  el producto del área transversal y la densidad del material, análogamente la matriz  $\mathbf{I}_\rho$  es el tensor de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones  $\mathbf{R}^g$  y  $\mathbf{R}_o$  consecutivamente.

Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsables del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar el vector de fuerza inercial  $\mathbf{f}_k$  se obtienen las matrices tangentes dinámicas



1 según las siguientes ecuaciones:

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.54)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M}_k \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.55)$$

2 En la Ecuación 3.55 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de  
 3 ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los des-  
 4 plazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa  
 5 consistente  $\mathbf{M}_k$  se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, con-  
 6 secutivamente la matriz  $\mathbf{C}_k$  giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo  $\mathbf{K}_k$ ,  
 7 se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz cen-  
 8 trifuga. Determinados autores como Cardona y Geradin, 1988 y Hsiao et al.  
 9 1999 proponen considerar unicamente  $\mathbf{M}_k$ , sin embargo exhaustivos estudios  
 10 en (Hsiao et al. 1999) prueban que agregar la matriz  $\mathbf{C}_k$  mejora el desempeño  
 11 computacional para numerosos casos.

12 Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector  
 13 de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta  
 14 idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la  
 15 energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino  
 16 también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección  
 17 3.3.1.

18 Sustituyendo la Ecuación (3.55) en (3.53) se halla una fórmula para la  
 19 fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al  
 20 integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.36), (3.38),  
 21 (3.39) y (3.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra  
 22 a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} dl \right] \quad (3.56)$$

23 Como se mencionó anteriormente para obtener analíticamente las expresio-  
 24 nes de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el  
 25 diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a  
 26 cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices.  
 27 Finalmente, esto se expresa de forma matemática en las siguientes expresiones:

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \} dl \right] \mathbf{E}^T \quad (3.58)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) \dots \right\} \right] \mathbf{E}^T \quad (3.59)$$

$$\dots + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho) dl \quad (3.60)$$

# 1 **Capítulo 4**

## 2 **Metodología**

3        En este capítulo se exponen los métodos centrales desarrollados durante  
4 este trabajo de tesis. Este desarrollo, representa, según la revisión de literatura  
5 realizada, una contribución original al conocimiento sobre la aplicación de la  
6 formulación corrotacional de vigas a problemas de interacción con el viento.  
7 El problema de modelado computacional de líneas eléctricas afectadas por  
8 fenómenos de vientos extremos se construyó sobre dos etapas sucesivas. En  
9 primer lugar, se explican cuestiones sobre el modelado físico y en segundo  
10 lugar sobre el modelado computacional.

11        Se describen las condiciones de borde e iniciales consideradas para el mo-  
12 delado estructural en la Sección 4.1.1. Posteriormente en la Sección 4.1.2 se  
13 presenta el campo de velocidades absoluto, relativo y las fuerzas que el viento  
14 genera sobre el conductor. Luego, dentro de la Sección 4.2 se explica la de-  
15 ducción del algoritmo de HHT aplicado a la formulación corrotacional para  
16 modelado de conductores con fuerzas aerodinámicas.

### 17 **4.1. Aspectos de modelado físico**

18        El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de  
19 la realidad, para crear un modelo, que se comporte de forma análoga, permi-  
20 tiendo emular y controlar determinadas variables de estudio relevantes para el  
21 observador. En este acto de representación existen simplificaciones inherentes,  
22 que reducen los factores incidentes al sistema como objeto de estudio. En este  
23 caso el objeto de estudio es el conductor presentado en la Figura 4.1, sujetado  
24 mediante los elementos aisladores CD y AB solidarios a las torres.



**Figura 4.1:** Esquema del objeto de estudio.

Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determinadas condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema. Estas imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto está siendo desvinculado, se nominan condiciones de borde. En particular, para esta investigación, se consideraron las siguientes hipótesis del modelado estructural respecto a sus condiciones de borde y e iniciales.

#### 4.1.1. Condiciones iniciales y de borde para la estructura

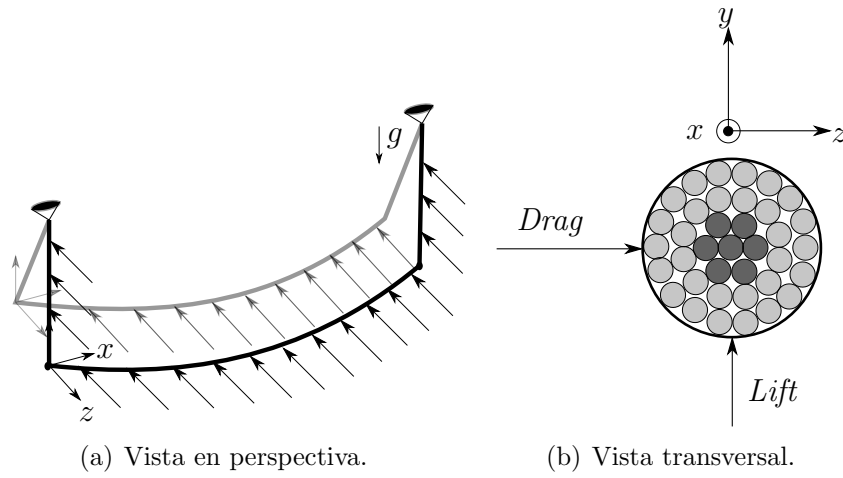
1. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea. Vale aclarar que este caso de pretensión refiere a la configuración punteada en la Figura 4.1, en ese estado la tensión es 0  $N$ . No obstante, al aplicarse el peso propio la tensión en el conductor se incrementa hasta que se equilibre las fuerzas externas de la gravedad con las internas.
2. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura, ignorándose cualquier variación en el perfil topográfico del terreno. Como consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
3. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a mo-

- 1 delarlo con elementos de vigas, las cuales tienen una variación de ángulo  
2 continuo.
- 3 4. Se supone que no existe deslizamiento relativo entre las hebras que com-  
4 ponen al conductor.
- 5 5. Consecuente con el inciso anterior, al escindir el vano BC de su con-  
6 tinuación (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo  
7 nulo en  $x$  para los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta  
8 las condiciones de deformación angulares impuestas por la simetría del  
9 sistema.
- 10 6. Dado que los puntos B y C no se deforman según el eje  $x$ , ergo sus  
11 trayectorias pertenecen al plano  $z-y$ , lo que se impone en los nodos B y  
12 C.
- 13 7. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB,  
14 obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se  
15 modelaron a partir de barras de Green según Crisfield, [1997](#).
- 16 8. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada  
17 en la Figura [4.1](#), se aplica una condición inicial de desplazamiento  $\mathbf{u}_0$ .  
18 Esta se corresponde con la solución estática del sistema cargado por el  
19 peso propio en la dirección de  $-y$  de la gravedad.
- 20 9. No se consideran formaciones de hielo depositadas sobre las líneas, por  
21 las evidentes condiciones climáticas del territorio uruguayo.

#### 22 4.1.2. Modelo de viento

23 Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas  
24 debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuer-  
25 zas de arrastre (*drag*), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares de  
26 (*lift*). Las cargas de *drag* son el resultado de integrar las tensiones rasantes  
27 en la capa límite a lo largo de la frontera del cuerpo y luego proyectar este  
28 resultado en la dirección del flujo medio. Las fuerzas de *lift* que aparecen sobre  
29 el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones entre el intradós (zona  
30 de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones  
31 puntales entre dos superficies contrarias, genera una circulación circundante en

1 el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en la curva cerrada  
2 que delimita el cuerpo, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una  
3 fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura 4.2(b).  
4 Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la com-  
5 petente de *lift* es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo que  
6 garantiza una circulación del campo de velocidades nula, pues no hay diferen-  
7 cias, ni geométricas, ni dinámicas, entre las superficies del sólido.



**Figura 4.2:** Esquema simplificado de la acción del viento sobre el cable y sus fuerzas correspondientes.

8 La componente unidireccional del flujo a una altura dada, puede ser des-  
9 glosada en un término medido y otro fluctuante  $w_v(t) = w_m(t) + w'(t)$ . A su  
10 vez, la fuerza de “*drag*” que ejerce el aire como un fluido No Newtoniano, con  
11 determinada densidad  $\rho$ , coeficiente de drag en función del Reynolds  $C_d(Re)$ ,  
12 sobre un elemento cilíndrico en reposo de diámetro  $d_c$  y largo  $l_e$  se calcula  
13 según la expresión:

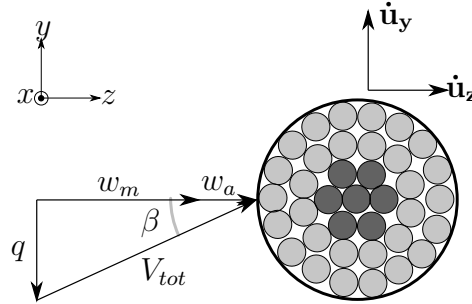
$$F_d(t) = \int_{l_e} \frac{\rho C_d(Re)}{2} d_c w_v(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c w_v(t)^2 l_e. \quad (4.1)$$

14 Para este cálculo se asumieron uniformes las magnitudes al interior del ele-  
15 mento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto de la  
16 fuerza por unidad de longitud por el largo del intervalo. Por otra parte, la carga  
17 del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente a la  
18 mitad de  $F_v$ . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales  
19 que estas cargas inducen en los nodos, se cancelan en los elementos interiores.

1 Por otra parte, los valores de  $C_d$  se extrajeron de (Foti y Martinelli, 2016) y se  
 2 verificaron con el estudio para estos coeficientes durante TC de (Mara, 2007).

#### 3 4.1.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas aso- 4 ciadas.

5 Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde el viento tiene de-  
 6 terminada componente transversal según  $z$  y perpendicular (según  $y$ ). En la  
 7 Figura 4.3 se indican con el nombre  $w$  y  $q$ . En esta figura las velocidades se  
 8 referencian a un observador solidario con la tierra y por tanto en un sistema  
 9 de coordenadas absoluto. Asimismo, en esta imagen se representan las veloci-  
 10 dades media y fluctuante  $w_m$  y  $w_a$ , que sumada a la velocidad  $v$ , resulta en el  
 11 vector  $V_{tot}$  formando un ángulo  $\beta$  con la horizontal. Las velocidades globales  
 12 del baricentro de la sección según  $z$  e  $y$  se identifican con las letras  $\dot{\mathbf{u}}_y$  y  $\dot{\mathbf{u}}_z$   
 13 respectivamente y se corresponden con las descritas en la Sección 3.3.1. Las  
 14 magnitudes identificadas anteriormente se ilustran en la siguiente figura:

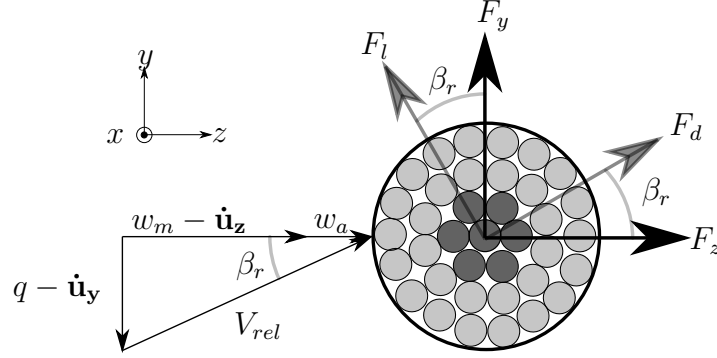


**Figura 4.3:** Esquema en sistema de referencias absoluto.

15 Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia  
 16 anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las  
 17 velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la Figura 4.4. Este  
 18 campo de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de *drag*  $F_d$  y de  
 19 *lift*  $F_l$ . Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando  
 20 dos fuerzas  $F_z$  y  $F_y$ .

21 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde  
 22 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, se  
 23 hallan las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y dinámicas. La  
 24 velocidad relativa absoluta se calcula de la siguiente forma:

$$V_{rel}^2 = (w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)^2 + (q - \dot{\mathbf{u}}_y)^2. \quad (4.2)$$



**Figura 4.4:** Esquema en sistema de referencias relativo.

1 Desarrollando el término  $(w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)^2$  de la Ecuación (4.2) se deduce  
 2 la siguiente expresión:

$$(w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)^2 = w_m^2 + w_a^2 + \dot{\mathbf{u}}_z^2 + (w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)2w_m + w_a^2 - 2w_a\dot{\mathbf{u}}_z. \quad (4.3)$$

3 Sustituyendo la Ecuación (4.4) en (4.2) y dividiendo entre la velocidad  
 4 media  $w_m$  se obtiene:

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = \frac{w_m^2 + w_a^2 + \dot{\mathbf{u}}_z^2}{w_m} + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z) + \frac{w_a^2 - 2w_a\dot{\mathbf{u}}_z}{w_m} + \frac{(q - \dot{\mathbf{u}}_y)^2}{w_m} \quad (4.4)$$

5 Tomando como hipótesis que los cuadrados de: la componente alternante  
 6 del viento y la velocidad del rígido en  $z$  y la velocidad relativa en  $y$ , son mucho  
 7 menores que las asociadas al flujo medio  $(q - \dot{\mathbf{u}}_y)^2, w_a^2, \dot{\mathbf{u}}_z^2, \ll w_m$ , se llega a  
 8 la siguiente ecuación:

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z). \quad (4.5)$$

9 Las hipótesis formulada anteriormente tiene consecuencias sobre el ángulo  
 10 de ataque y la fuerza por unidad de longitud según las ecuaciones a continua-  
 11 ción:

$$\tan(\beta_r) = \frac{v - \dot{\mathbf{u}}_y}{w_m - \dot{\mathbf{u}}_z + w_a} = \frac{\frac{v - \dot{\mathbf{u}}_y}{w_m}}{1 + \frac{w_a}{w_m} - \dot{\mathbf{u}}_z} \approx 0 \quad (4.6)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_z)) w_m \quad (4.7)$$



1 Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes  
2  $z$  e  $y$ . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas  
3 absoluto, calcular la fuerza que se ejerce sobre el conductor. A partir de estas  
4 se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido.  
5 Considerando que el ángulo  $\beta$  es ínfimo y por lo tanto  $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$  y  
6  $\cos(\beta) = 1$  al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + w_a^2 - 2w_m \dot{\mathbf{u}}_z) \cos(\beta_r) = \bar{F}_x + F_a - F_{vis} \quad (4.8)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2 + w_a^2 - 2w_m \dot{\mathbf{u}}_z) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (4.9)$$

7 Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en  
8 componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es un  
9 promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo,  
10 se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes  
11 tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un  
12 tercer término surge al desarrollar la Ecuación (4.7). Este factor depende del  
13 producto entre la velocidad media de viento y la velocidad media del rígido en  
14 la dirección del flujo medio ( $z$ ). Como este término depende de la dinámica del  
15 rígido y del viento, recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico. Por  
16 otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sorpresivo el sentido de esta  
17 fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición de  
18 fuerzas según  $z$  se le llaman  $\bar{F}_x$ ,  $F_a$ ,  $-F_{vis}$  a la componente media, alternante  
19 y de amortiguamiento dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan  
20 a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2) \quad (4.10)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_a^2) \quad (4.11)$$

$$F_{vis} = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2\dot{\mathbf{u}}_z w_m) \quad (4.12)$$

#### 21 4.1.2.2. Hipótesis de modelado del viento

22 Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan  
23 las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones

1 de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no es el eje central  
 2 de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio.  
 3 Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

4 1. El viento incide con velocidad en el sentido  $z$  de forma perpendicular a  
 5 la línea. Esta hipótesis proviene de diferentes trabajos publicados como  
 6 (Durañona y Cataldo, 2009), (Yang y Hong, 2016) y (Stengel y Thiele,  
 7 2017).

8 2. La velocidad relativa transversal  $v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}$  al igual que la componente alter-  
 9 nante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el sentido  
 10 de  $z$  llamada  $w_m$ .

11 3. Considerando la simetría de revolución del conductor y el flujo alrededor  
 12 del mismo, se desprecia la fuerza de *lift* frente al *drag*.

13 4. Se desprecia la fuerza alternante en el sentido de  $z$  dada por la Ecuación  
 14 (4.12). Esto es equivalente a despreciar la componente alternante del flujo  
 15  $w_a$ .

16 5. Para el cálculo del amortiguamiento aerodinámico  $F_{vis}$  se promedió la  
 17 velocidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el  
 18 dominio temporal de simulación.

## 19 4.2. Aspectos de modelado computacional

### 20 4.2.1. Métodos iterativos para la resolución de proble- 21 mas dinámicos

22 Discretizando el cuerpo mediante el MEF, para cada nodo y en cada ins-  
 23 tante, debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas  $\mathbf{f}_{\text{int}}$ , inerciales  
 24  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$  y externas  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Además según la Ecuación (4.12) dentro de las fuerzas ex-  
 25 ternas aparece un término aerodinámico  $\mathbf{f}_{\text{vis}}$  que depende de la velocidad lineal  
 26 del rígido. Este término debe tratarse aparte ya que su naturaleza, a pesar de  
 27 ser externa, es una función de el estado cinemático del sólido. La ecuación de  
 28 equilibrio de fuerzas en el instante  $t + \Delta T$  resulta:

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta\mathbf{T}} + \mathbf{f}_{\text{vis},(\dot{\mathbf{d}}(t+\Delta T))} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t+\Delta T)) \dots \\ & \dots - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t+\Delta T), \dot{\mathbf{d}}(t+\Delta T), \ddot{\mathbf{d}}(t+\Delta T)) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

1 La Ecuación de balance (4.13) debe satisfacerse para todo instante tempo-  
 2 ral, en particular para  $t + \Delta T$ . Dadas determinadas propiedades materiales y  
 3 geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las mag-  
 4 nitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: los desplazamientos  $\mathbf{d}$   
 5  $(t + \Delta T)$ , las velocidades  $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T)$ .

6 Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables cons-  
 7 truyen una sucesión que al iterar infinitamente deben converge a la solución  
 8 exacta. Al realizar una aproximación de Taylor de primer orden en la Ecuación  
 9 (4.13) esta ya no será nula sino igual a un resto  $\mathbf{r}$ . Para diferenciar las  
 10 variables aproximadas de las exactas, se distingue con la siguiente nomencla-  
 11 tura:  $(\mathbf{d}(t + \Delta T) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}})$ ,  $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta T) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})$  y  $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta T) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T})$ .  
 12 Rescribiendo acorde a esto la Ecuación (4.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}) &= (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta\mathbf{T}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta\mathbf{T}}) \dots \\ &\dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta\mathbf{T}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta\mathbf{T}}(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

13 Los métodos numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las  
 14 variables de aceleración y velocidad, en el instante  $t + \Delta T$ , en función de  
 15 los desplazamientos para ese tiempo y las magnitudes cinemáticas del paso  
 16 anterior. Para esto, se definen las funciones  $F_a$  y  $F_v$  según se establece en las  
 17 siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T} = F_v(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t) \quad (4.15)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T} = F_a(\mathbf{d}_{t+\Delta\mathbf{T}}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t). \quad (4.16)$$

18 Dadas las funciones de las Ecuaciones (4.15) y (4.16), como los vectores des-  
 19 plazamiento, velocidad y aceleración para el instante  $t$  se encuentran dados, la  
 20 única incógnita en el vector resto para el instante  $t + \Delta T$  es el vector despla-  
 21 zamientos para ese mismo tiempo. Por lo tanto, al aplicar el método iterativo  
 22 de Newton en  $k$ , para ecuaciones no lineales, al vector residuo definido en la  
 23 Ecuación (4.14) se obtiene:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}}) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \Big|_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1} = \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena aplicada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar las derivadas de la función residuo respecto de las magnitudes globales: desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Según el vector residuo de la Ecuación (4.17), estas derivadas son las matrices tangentes  $\mathbf{K}_{\mathbf{g}}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$  descritas en el Capítulo 3. Asimismo, al derivar la función de fuerza residual presentada en la Ecuación (4.17) aparece un termino  $\mathbf{C}_{\mathbf{vis}}$  correspondiente la derivada de la fuerza viscosa respecto de la velocidad del sólido. Esto resulta una matriz diagonal con valores principalmente nulos, salvo en las entradas correspondientes a la dirección del viento, con valor  $\rho d_c C_d w_m$ .

Incorporando estas matrices se obtiene a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \Big|_{\mathbf{k}} = \left( \mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\mathbf{vis}}) \right) \Big|_{\mathbf{k}} \quad (4.19)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.17) se halla el paso en desplazamientos en  $k+1$  a partir de las magnitudes en  $k$   $\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}$ . Matemáticamente:

$$\left( \mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}} (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\mathbf{vis}}) \right) \Big|_{\mathbf{k}}^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}})) = \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1} \quad (4.20)$$

Esta sección se desarrolló para determinada función de residuo, sin embargo el Método de HHT implementado considera una expresión diferente. Además, propone determinadas funciones de aproximación para las velocidades y ace-

1 laciones que se describen en la sección a continuación.

## 2 4.2.2. Resolución numérica mediante HHT

3 Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo  
 4 de Newmark presentado en (Newmark, 1959). Según el artículo (Hilber et al.  
 5 1977) el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de  
 6 ecuaciones dinámicas lineales en el área estructural. Esto implica que el paso  
 7 de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia  
 8 numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar  
 9 modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del  
 10 sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto,  
 11 evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los  
 12 modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

13 En la publicación (Hilber et al. 1977) se compara el método de HHT con  
 14 otros métodos clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser:  
 15 el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark.  
 16 El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es más  
 17 preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la  
 18 aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en (Le et al.  
 19 2014), resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

20 El parámetro característico del método se lo identifica con el nombre  $\alpha_{HHT}$ .  
 21 Este permite expresar el vector de fuerzas residuales de HHT al ponderar el  
 22 vector residuo definido en la Ecuación (4.17) en  $t + \Delta T$  y  $t$  según la siguiente  
 23 expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{HHT}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) = & (1 + \alpha_{HHT})(-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta T} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}))... \\ & ... + \alpha_{HHT}(-\mathbf{f}_{\text{ext},t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_t) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_t))... \\ & ... + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}(\mathbf{d}_{t+\Delta T}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

24 Se presentan las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades  
 25 lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escri-  
 26 birán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark  $\alpha_{NW}$  y  $\beta_{NW}$   
 27 para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente  
 28 uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones

de actualización para el instante  $t + \Delta T$  se escriben:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \dots \quad (4.22)$$

$$\dots - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \dots \quad (4.23)$$

$$+ \dots \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t$$

Para implementar HHT basta con definir los parámetros  $\alpha_{NW}$  y  $\beta_{NW}$  en términos del valor de  $\alpha_{HHT}$  y calcular las matrices tangentes del según el vector de fuerzas residuales definidas en 4.21. Esto se realiza mediante las Ecuaciones (4.24) y (4.25). En estas funciones, es posible notar las similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con  $\beta_{NW} = 1/2$  y  $\alpha_{NW} = 1/4$  se logra ajustando el parámetro  $\alpha_{HHT} = 0$ .

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (4.24)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (4.25)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro  $\alpha_{HHT}$  y el incremento  $\Delta T$  entre dos tiempos consecutivos  $t$  y  $t + \Delta T$ .

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta T} \quad (4.27)$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. De acuerdo con los artículos publicados por Ibrahimbegović y Mikdad, 1998 y Ibrahimbegovic y Mamouri, 2002, los vectores de velocidades y aceleraciones angulares para el paso  $k + 1$ , en el instante  $t + \Delta T$ , deben calcularse según las siguientes

1 Ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta T}^g (\mathbf{R}_t^g)^T \left[ \frac{\alpha}{\beta \Delta T} \theta_{t+\Delta T} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_t + \frac{(\beta - 0.5\alpha)\Delta T}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_t \right] \quad (4.28)$$

$$2 \quad \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta T}^g (\mathbf{R}_t^g)^T \left[ \frac{1}{\beta \Delta T^2} \theta_{t+\Delta T} - \frac{1}{\beta \Delta T} \dot{\mathbf{w}}_t - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta T} \right] \quad (4.29)$$

3 Un procedimiento análogo al de las funciones lineales se aplican a las an-  
4 gulares de las Ecuaciones expresadas en (4.28) y (4.29). Sus derivadas se pre-  
5 sentan en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta T}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta T}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta T}^g) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta T}}{\partial \mathbf{w}_{t+\Delta T}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta T} \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta T}^g) \quad (4.31)$$

6 Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones  
7 (4.30), (4.31), (4.26) y (4.27) al definir convenientemente la matriz  $\mathbf{B}_t$ . En  
8 función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y acelera-  
9 ciones globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas  
10 relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta T}^g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{2,t+\Delta T}^g) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_g = \left( \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta T} \quad (4.33)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_g = \left( \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta T} \quad (4.34)$$

11 Al escindir las Ecuaciones (4.33) y (4.34) se identifican las funciones  $F_a$   
12 y  $F_v$  de la sección 4.2.1. Estas relaciones matemáticas deben integrarse a la  
13 ecuación linealizada de equilibrio, con el vector de residuos para HHT definido  
14 en (4.21). De esta manera se deduce el incremento en  $k+1$  que permite conocer  
15 el vector desplazamientos en el paso  $k+1$ , a partir del vector en  $k$ , para el  
16 instante  $t + \Delta T$  según la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}}) = & \\
& \left( (1 + \alpha_{HHT})\mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \left( \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT}^2)\Delta T^2} \right) \mathbf{M}\mathbf{B}_{\mathbf{t}} + \left( \frac{1^2 + \alpha_{HHT}^2}{2\Delta T} \right) (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\mathbf{vis}})\mathbf{B}_{\mathbf{t}} \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}
\end{aligned}
\tag{4.35}$$

1 Se aclara que para despejar la Ecuación (4.35) anterior, la matriz entre  
 2 paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario,  
 3 el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas  
 4 soluciones o ninguna. Para esto las matrices tangentes fueron simetrizadas de  
 5 forma numérica, redefiniendo a la matriz como la semi-suma con su trans-  
 6 puesta. Esto garantiza la no singularidad y mantiene el orden de convergencia  
 7 cuadrático para N-R.

#### 8 **4.2.2.1. Hipótesis de modelado numérico**

9 Se esclarecen las premisas y simplificaciones durante la implementación  
 10 numérica de los códigos creados:

- 11 1. Los incrementos angulares no se calcularon componiendo dos rotaciones  
 12 consecutivas sino de forma aditiva, es decir:  $\theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1} = \theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}} + \Delta\theta_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{T}}^{\mathbf{k}+1}$ .
- 13 2. La matriz de amortiguamiento viscoso  $\mathbf{C}_{\mathbf{vis}}$  se considero una diagonal con  
 14 elementos no nulos en las componentes asociadas a los desplazamientos  
 15 transaccionales. Se copió el valor del amortiguamiento aerodinámico con  
 16 el valor correspondiente a la coordenada lineal  $\rho d_c C_d w_m$  para el resto  
 17 de los desplazamientos. Esto garantiza la estabilidad y atenuación de la  
 18 respuesta en la primera etapa asociada a la acción del peso propio.
- 19 3. La simulación se separó en dos etapas consecutivas, en primer lugar se  
 20 carga con la fuerza de la gravedad (a partir de la condición inicial) y una  
 21 vez que la respuesta es constante se aplica la carga del viento.

#### 22 **4.2.3. Implementación numérica en ONSAS**

23 En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el  
 24 software (ONSAS). Este código de carácter abierto y se desarrolló de forma



1 general integrando distintos elementos, materiales y geometrías dentro del mis-  
2 mo modelo. Además permite resolver mediante diversos algoritmos numéricos  
3 y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código  
4 abierto *Paraview* difundido en (Ahrens et al. 2005).

5 Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones  
6 matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron  
7 aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de  
8 los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser  
9 pionero de la formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en  
10 los trabajos (Battini y Pacoste, 2002) (Le et al. 2014), sino también por su  
11 predisposición a difundir los códigos de su investigación. A continuación en el  
12 pseudocódigo 1 se detalla el esquema panorámico sobre el esqueleto del código  
13 ejecutado en [ONSAS](#).

14 En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultáneo.  
15 Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite  
16 incrementar la variable temporal en pasos de  $\Delta T$ . Además, debe evaluar los  
17 valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Para  
18 resolver el estado del sistema en el tiempo  $t + \Delta T$ , hace falta resolver la ecuación  
19 no lineal del resto descrita en la Expresión (4.35). Con este cometido se utiliza  
20 el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo 1 se  
21 omitió la notación en  $t + \Delta T$  para simplificar la notación.

22 Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primera-  
23 mente, el cálculo del incremento que determina el paso  $k + 1$ , a partir de los  
24 desplazamientos en el paso actual  $k$ . Luego se actualizan las variables cinemáti-  
25 cas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se  
26 realiza mientras que la variable finDisp sea nula. La alteración de estado, se  
27 encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la  
28 operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos  $tol_u$ , en  
29 vector de fueras residuales  $tol_{res}$  y número máximo de iteraciones  $maxIter$ . Las  
30 primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese  
31 tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas  
32 desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la  
33 variable finDisp alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor  
34 del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

35 Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante  
36 profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices

---

**Algorithm 1** Pseudocódigo de iteración general.

---

**Require:** :  $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta T, \alpha_{HHT}$

Iniciar cinemáticas:  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0 \quad \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0 \quad \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$

Iniciar tiempo:  $t \leftarrow t_0$

**while**  $t < t_f$  **do**

    finDisp = 0

    Definir:  $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$ .

    Evaluar  $\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t}$

**while** FinDisp = 0 **do**

        Calcular fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$  y  $\text{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$ .

        Calcular y ensamblar matrices Tangentes:  $\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^k, \mathbf{M}_{\mathbf{k}}^k, \mathbf{C}_{\mathbf{k}}^k, \mathbf{C}_{\text{vis}}$ .

        Despejar  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$

        Actualizar desplazamientos globales:  $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$

        Recalcular velocidades y aceleraciones lineales:  $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$ .

        Recalcular velocidades y aceleraciones angulares:  $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$ .

        Ensamblar velocidades:  $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$

        Ensamblar aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$

        Actualizar fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$  y  $\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})$ .

        Calcular:

**if**  $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\|$  *OR*  $\|\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\|$  *OR*

$k \geq \max_{iter}$  **then**

            finDisp = 1

**end if**

**end while**

    Actualizar  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta T}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta T}$ .

$t = t + \Delta T$

**end while**

---

1 dinámicas tangentes. Este código se agregó a [ONSAS](#) procurando su versatili-  
2 dad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden  
3 al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo  
4 pseudocódigo de la función [elementbeamforces.m](#) implementada y presentada  
5 en el Apéndice 1.

---

**Algorithm 2** Pseudocódigo elementBeamForces.

---

**Require:**  $A_\rho$   $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$   $E$   $\nu$   $G$   $\mathbf{X}_1$   $\mathbf{X}_2$   $\mathbf{d}_g^e$   
**for** 1 **to**  $N_{elem}$  **do**  
    Separar vector desplazamientos  $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$   
    —————Cálculo de matrices de rotación —————  
    Computar matrices de rotación global  $\mathbf{R}_g^1$  y  $\mathbf{R}_g^2$   
    Evaluar matriz de rotación de referencia  $\mathbf{R}_o$   
    Hallar  $\mathbf{q}_1$   $\mathbf{q}_2$   $\mathbf{q}$  y calcular  $\mathbf{e}_1$   $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .  
    Evaluar matriz de rotación rígida  $\mathbf{R}_r$   
    Calcular matrices de rotación locales  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$   
    ————— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente —————  
    Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento  $l_0$  y  $l$   $u = l - l_0$   
    Invertir  $\mathbf{R}_i$  y hallar ángulos locales  $\theta_i$ .  
    Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna  $\mathbf{f}_l^{\text{int}}$  y matriz tangente  
    local  $\mathbf{K}_l^T$ .  
    Construir matrices auxiliares:  $\mathbf{H}$   $\mathbf{G}$   $\mathbf{P}$   $\mathbf{B}$   $\mathbf{r}$   
    Transformar a coordenadas globales:  $\mathbf{K}_g^T \leftarrow \mathbf{K}_l^T$  y  $\mathbf{f}_g^{\text{int}} \leftarrow \mathbf{f}_l^{\text{int}}$ .  
    ————— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas —————  
    Todas las variables dependen de la coordenada (x)  
    Definir funciones de interpolación  $N_i$   
    Calcular matrices:  $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{H}_1$ .  
    Hallar velocidades  $\dot{\mathbf{w}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\dot{\mathbf{w}}_r$   
    Calcular matrices auxiliares:  $\mathbf{H}_1$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .  
    Hallar las aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{w}}$   $\ddot{\mathbf{u}}$ .  
    Girar el tensor de inercia a la configuración deformada:  $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$   
    Hallar expresiones e integrar en el elemento:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$   $\mathbf{M}_k$  y  $\mathbf{C}_k$   
    Ensamblar :  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$   $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_k$   $\mathbf{K}_T^g$   $\mathbf{f}_{\text{int}}^g$   
**end for**

---

6 El diagrama presentado en el Pseudocódigo 2, puede dividirse en tres divi-  
7 siones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo  
8 constructivo de las variables intervinientes. Primeramente, se hallan las matri-  
9 ces de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y defor-

1 mada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las  
2 fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de  
3 la función `beamLocalStaticForces`. Desafortunadamente, tanto entradas como  
4 salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas loca-  
5 les. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos  
6 locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego  
7 integrarlas al código general expuesto en el Algoritmo 1.

8 De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de  
9 fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las  
10 expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas  
11 están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia  $x$  en la configuración  
12 de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie  
13 de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

14 Una vez finalizados estos pasos, se integran las matrices tangentes y el  
15 vector de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de  
16 cuadratura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por  
17 último, los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y  
18 estáticas, como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a  
19 las matrices de todo el sistema en coordenadas globales.

# 1 Capítulo 5

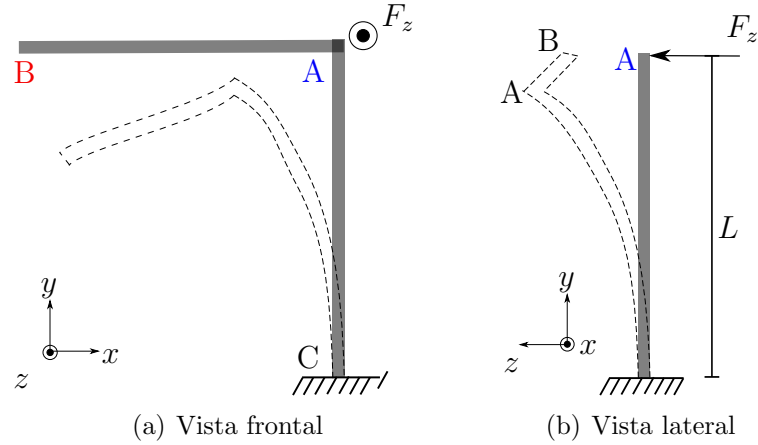
## 2 Resultados numéricos

3 En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante  
4 el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementa-  
5 ción corrotacional detallada en el Capítulo 3, para luego aplicarse a modelos  
6 específicos de conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando  
7 un computador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de  
8 8 Gb. La formulación se implementó en el software de código abierto [ONSAS](#)  
9 el cual se ejecutó en GNU-Octave presentado por Eaton et al. [2007](#) y visua-  
10 lizándose los resultados haciendo uso de la herramienta Paraview publicada  
11 por Ahrens et al. [2014](#). El hilo conductual de este capítulo fue ideado con un  
12 aumento progresivo de complejidad con el objetivo de validar paulatinamente  
13 la implementación para luego generar un modelo completo sobre el central de  
14 esta investigación.

### 15 5.1. Viga en voladizo con ángulo recto

16 Este ejemplo fue publicado por primera vez por Simo y Vu-Quoc, [1988](#) y  
17 es usualmente considerado en la literatura para validar implementaciones de  
18 elementos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales ((Albino  
19 et al. [2018](#)) (Le et al. [2014](#))). El mismo consta de dos barras idénticas en ángulo  
20 recto formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo  
21  $L = 10$  m tal y como se ilustra en la Figura [5.1](#).

22 Las rigideces de torsión ( $GJ$ ), flexión ( $EI$ ) y directa ( $EA$ ) del ejemplo se  
23 seleccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales  
24 y sus unidades carecen de sentido, su valor garantiza movimientos de gran



**Figura 5.1:** Disposición geométrica de la estructura.

1 amplitud y para esto deben cumplir las siguientes ecuaciones:

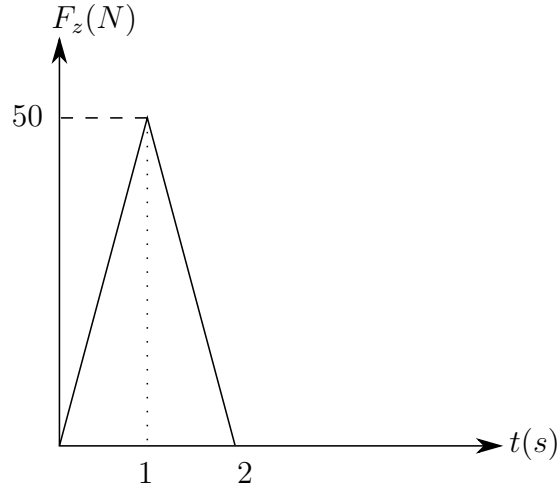
$$GA = EA = 10^6 \quad (5.1)$$

$$GJ = EI = 10^3. \quad (5.2)$$

2 Dado esto la elección de dichas magnitudes se obtiene resolviendo el sistema  
3 compatible indeterminado de las Ecuaciones (5.1) y (5.2). Para este trabajo  
4 el autor escogió los siguientes valores:  $E = G = 10^6$   $A = 1$   $I = J = 10^{-3}$  y  
5  $\nu = 0.3$ . Se hace notar que el carácter arbitrario de los parámetros implica que  
6 sus unidades carezcan de sentido.

7 La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplaza-  
8 mientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que permi-  
9 ten aplicar una fuerza en el sentido del eje  $z$  tal y como se muestra en la Figura  
10 5.1. Este forzante flecta y torsiona al sistema en un plano saliente al  $xy$ , produ-  
11 ciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo gran,  
12 hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento, los  
13 cuales son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura.  
14 Estos desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplica-  
15 ción de la carga. Esta fuerza crece linealmente en los dos segundos iniciales,  
16 crece hasta un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y  
17 luego decrece hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual  
18 en un corto intervalo de tiempo como se muestra en la figura a continuación:

19 El objetivo principal del ejemplo es validar los códigos incorporados al soft-



**Figura 5.2:** Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

ware [ONSAS](#), por ende, tanto el método de resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en el artículo (Le et al. [2014](#)), comparando así resultados semejantes. Consecuentemente se seleccionó un valor característico  $\alpha = -0.05$  y un valor de parada en desplazamientos de  $10^{-7}$  m. Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de  $\Delta T = 0.25$  s y se discretizó la geometría con 10 elementos por barra.

Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se graficaron las deformadas para diferentes instantes de tiempo:  $t_1 = 4$  s,  $t_2 = 11$  s y  $t_3 = 19$  s. En la Figura [5.3](#) se observan las oscilaciones flexionales para distintos planos  $yx$  e  $yz$ . Estos movimientos son originados por diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante  $F_z$  mientras que en el miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a su unión rígida con el resto de la estructura.

Con el objetivo de comparar los resultados del artículo de referencia se graficaron ciertos desplazamientos del nodo A. Estos son: el desplazamiento lineal vertical (según el eje  $y$ ) y el transversal (según  $z$ ). Los resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras [5.4](#) en función de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la estructura. En particular, la Figura [5.4\(b\)](#) denota oscilaciones que alcanzan varios metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exigente en términos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no armónico de vaivén en el eje  $z$ , se puede notar la presencia del amortiguamiento artificial introducido por el método de



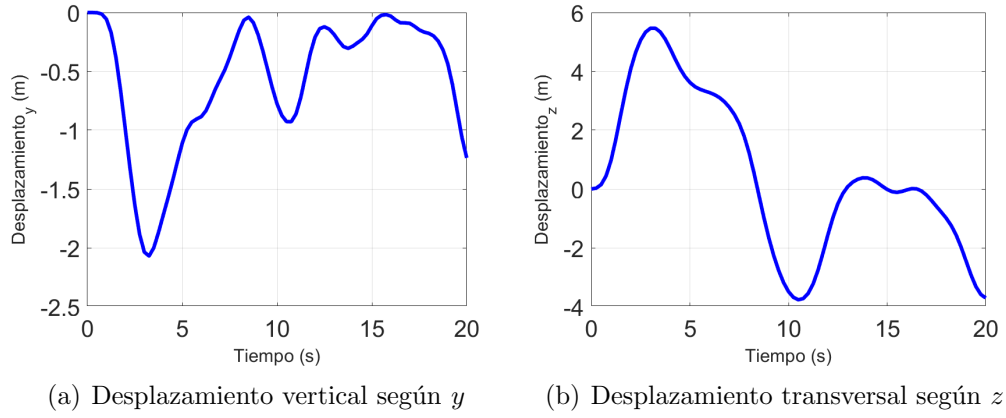
**Figura 5.3:** Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s.

1 resolución numérica, ya que las amplitudes prestan una tendencia atenuante  
2 con el tiempo.

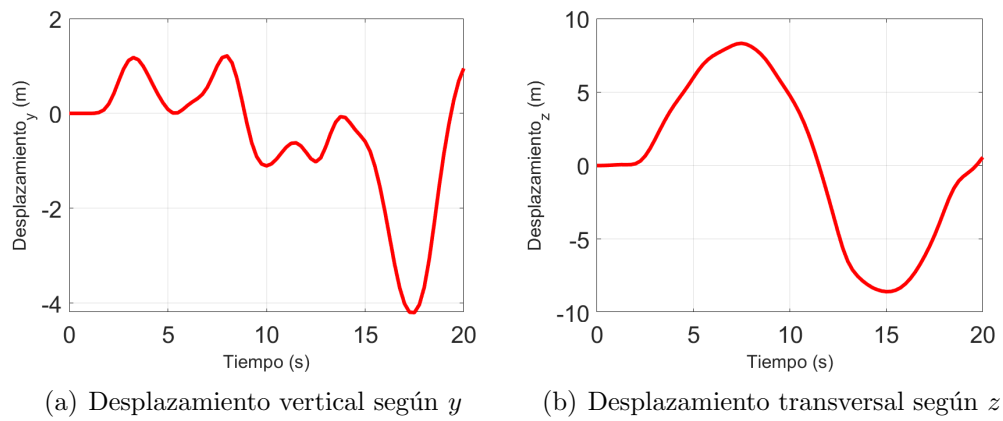
3 Por otra parte al analizar en la Figura 5.4(a) se observa que los despla-  
4 mientos en  $y$ , son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido  
5 de la fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano  $yz$  con el versor  
6  $x$  saliente, el movimiento del nodo  $A$  es análogo al de una viga empotrada con  
7 una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de  $A$   
8 es siempre en el sentido de  $-y$ , lo que se refleja en La Figura 5.4(a) y condice  
9 con la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación  
10 con los presentados en la bibliografía de Le et al. 2014, se observan similares  
11 valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento respecto a  
12 las Figuras 5.4 y 5.5. También así los valles y las crestas de la curvas se su-  
13 ceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que las  
14 funciones implementadas en [ONSAS](#) reproducen correctamente el ejemplo y es  
15 capaz de capturar movimientos de flexo-torsión para grandes desplazamientos  
16 y rotaciones cabalmente.

17 Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo  $B$ . En la Figura





**Figura 5.4:** Desplazamientos de control del nodo A.

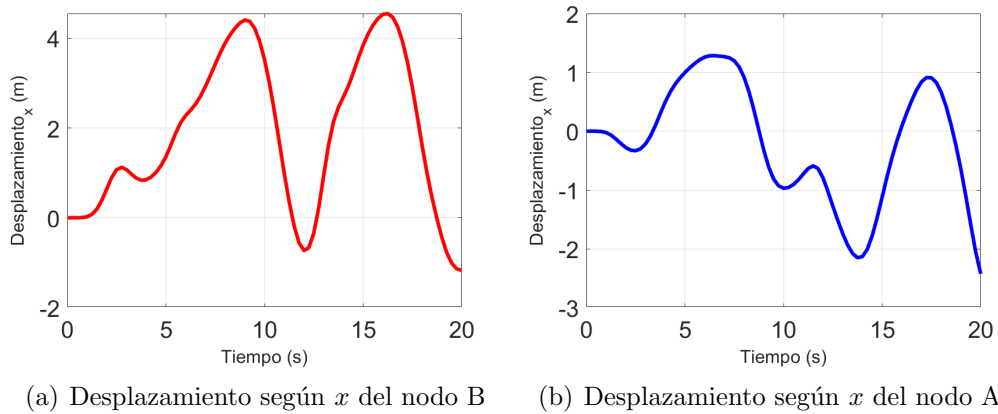


**Figura 5.5:** Desplazamientos de control del nodo B.

1 5.5(b) se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente,  
2 y una forma que se asemeja a una senoide. Esto podría vincularse al modo  
3 flector en el plano  $xz$  de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la  
4 dirección  $z$ . Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de  
5 AC superpuestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento.  
6 El autor del trabajo Le et al. (2014) publicó el desplazamiento en  $z$  de B y los  
7 resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva.

8 Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las  
9 magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inma-  
10 nentes a cada elemento en la Figura 5.3. En esta se identifica que el esfuerzo  
11 alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando  
12 considerables fluctuaciones temporales. En simultáneo, la viga horizontal A-B  
13 desarrolla fuerzas normales en todo su largo.

14 El modelo implementado desarrolla magnitudes no despreciables de despla-  
15 zamientos en  $x$  tal y como se constata en las Figuras 5.6. He aquí la impor-  
16 tancia de implementar un modelo considerando no linealidad geométrica, estas  
17 consideraciones son esenciales para la aplicación principal de este trabajo.



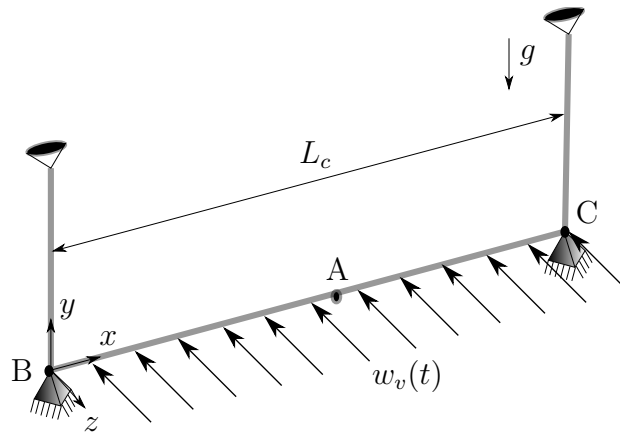
**Figura 5.6:** Desplazamientos en  $x$  de los nodos A y B

## 18 5.2. Modelo simplificado de una línea

19 En esta sección se presenta un primer modelo simplificado del enfoque cen-  
20 tral de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de Foti y Martinelli,  
21 2018 aunque ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado,  
22 como ser el caso de: Luongo y Piccardo, 1998, Martinelli y Perotti, 2001. El

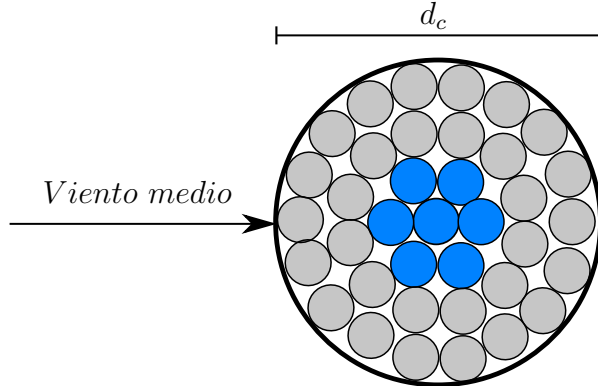
1 ejemplo consiste en un conductor de transmisión eléctrica reforzado con núcleo  
2 de acero sometido a un perfil de viento artificial.

3 Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto  
4 en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos  
5 cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo  $L_a = 3$  m cada una de  
6 ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni  
7 esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas,  
8 para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en  
9 las tres direcciones en  $x$ ,  $z$  e  $y$  en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas  
10 solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan  
11 correctamente las presentadas por Foti y Martinelli, 2018, donde los extremos  
12 se encuentran sujetos. Habiendo detallado someramente los componentes que  
13 integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría a continuación:



**Figura 5.7:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

14 El vano tiene un largo  $L_c=267$  m y para esta simulación no se tendrá en  
15 cuenta la tensión previa al momento de la colocación, pero sí la tensión debida  
16 a la carga del peso. Por otra parte, el modelo del conductor esta estandarizado  
17 bajo la norma europea (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003) y  
18 se identifica con la nomenclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la  
19 cantidad de cables en el núcleo y en la periferia, respectivamente. El diámetro  
20 se calcula entonces como la composición del área de los 26 conductores hechos  
21 de aluminio (color gris) y los 7 de acero (color azul). El perfil del conductor se  
22 ilustra en la siguiente figura:



**Figura 5.8:** Esquema del conductor ASCR 7/26.

El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad  $E$ , co-  
eficiente de Poissón  $\nu$ , una densidad  $\rho$  y una rigidez flexional y torsional  $EI$   
y  $GJ$ , respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de (Foti y  
Martinelli, 2016) y se presentan en La Tabla a continuación:

| $d_c$ (cm) | m (kg/m) | $EA$ (kN) | $EI$ (N.m <sup>2</sup> ) | $GJ$ (N.m <sup>2</sup> ) |
|------------|----------|-----------|--------------------------|--------------------------|
| 2.81       | 1.8      | 29700     | 2100                     | 159                      |

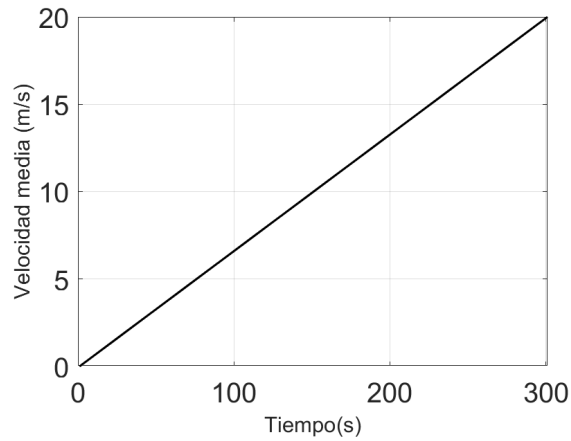
**Tabla 5.1:** Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

Existen diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postulados por  
Luongo y Piccardo, 1998 y Martinelli y Perotti, 2001, en donde se resolvió me-  
diante elementos de barra trinodal y de viga corrotacional, respectivamente.  
Para ambos trabajos se consideraron efectos de turbulencia generada artifi-  
cialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para este estudio se  
desprecia las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta el mismo flujo me-  
dio  $W$  en la coordenada axial del conductor. Este perfil es parabólico y alcanza  
la velocidad media máxima  $W_{max}$  en 20 segundos. Este valor de velocidad se  
calculó según (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003) conside-  
rando un flujo tipo CLA con las propiedades indicadas en la siguiente Tabla  
considerando a un tipo de terreno sub-urbano o industrial:

| $k_r$ | $z_0$ | $z_{min}$ |
|-------|-------|-----------|
| 0.22  | 0.3 m | 8 m       |

**Tabla 5.2:** Parámetros del flujo tipo CLA para  $W_{max}$

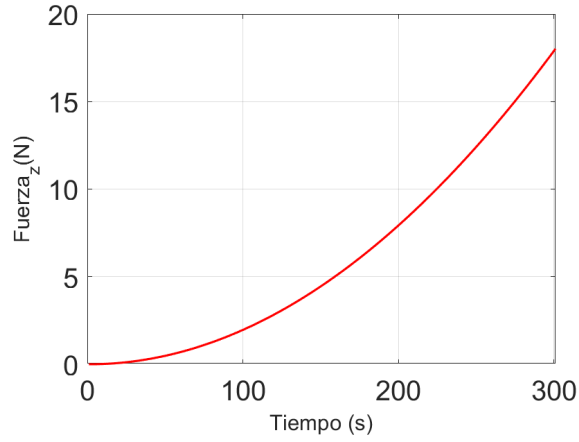
1 La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gra-  
2 vitatoria según el eje  $-z$  y luego las fuerzas del viento tal e las direcciones  
3 que se muestra en la Figura 5.7. No se muestran los resultados de esta etapa  
4 debido a que carecen de relevancia y en el trabajo de referencia se toma la  
5 catenaria como condición inicial. Una vez estabilizada la respuesta del sistema  
6 por el amortiguamiento interno, se aplica una fuerza lineal de media positiva  
7 según el eje  $-z$  desde cero hasta  $W_{max}$ . Esta forma del perfil podría emular  
8 el aumento modulado de presiones en un túnel de viento entre las bocas de  
9 entrada y descarga. La forma del perfil se muestra en la siguiente figura:



**Figura 5.9:** Perfil de velocidad progresiva  $z$ .

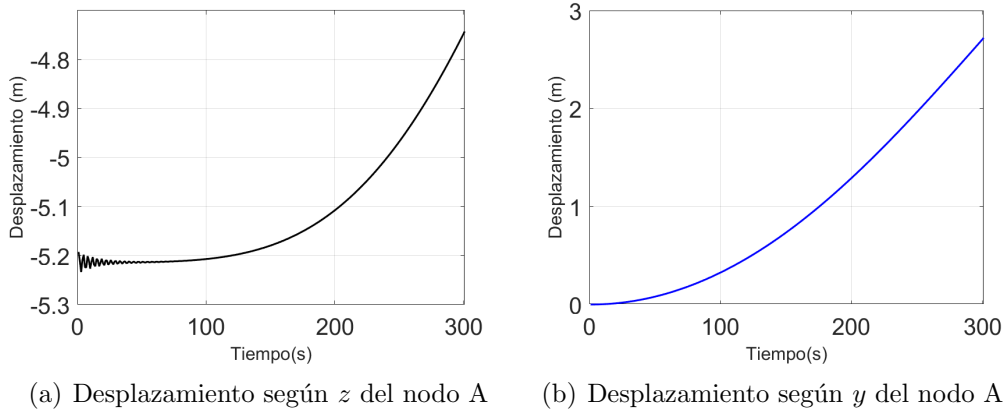
9  
10 Para este estudio no se considerará la fuerza de *lift*. Esta es despreciada por  
11 diferentes autores Lee y Perkins, 1992, Foti y Martinelli, 2016 y Papailiou, 1997  
12 principalmente porque la razón de fuerzas en las componentes perpendiculares  
13 a los flujos está relacionada con posibles asimetrías tangenciales en el perfil.  
14 Para conductores sin formaciones de hielo en su superficie, la circulación del  
15 campo de velocidades relativo circundante es próxima a cero, lo que se traduce  
16 en una fuerza de *lift*. nula. Esta es la principal diferencia de este caso en  
17 comparación por lo propuesto en la literatura por Luongo et al. 1984 y Foti y  
18 Martinelli, 2018 donde los perfiles presentan formaciones de hielo.

19 Se considera un flujo transversal al eje del cable, con una historia de velo-  
20 cidad media mostrada en la Figura 5.9. Los valores de  $C_d = 1.5$  se extrajeron  
21 la referencia de (Foti y Martinelli, 2018). Se aclara que el ángulo de ataque  
22 varía durante la trayectoria del cable, no obstante, el coeficiente  $C_d$  permanece  
23 constate debido a la simetría de revolución del perfil. Se muestran entonces las  
24 fuerzas sobre cada nodo del conductor en la figura a continuación:



**Figura 5.10:** Perfil de fuerza nodal según el eje  $z$ .

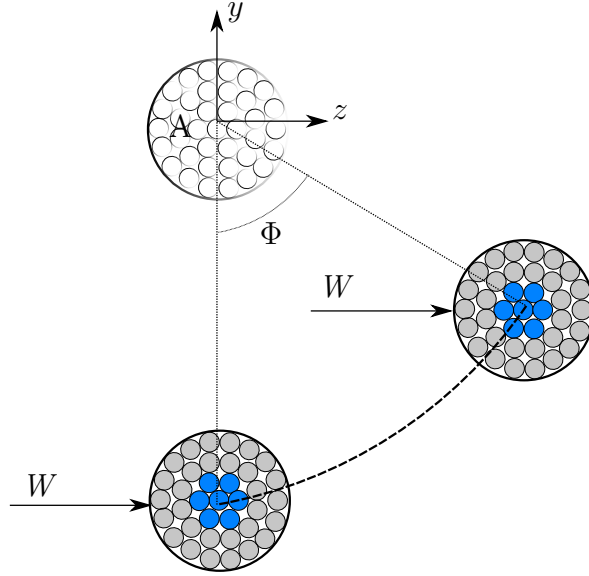
- 1 Se presentan a continuación los desplazamientos en vertical y transversal  
2 del nodo A, respectivamente, situado en el punto medio del vano :



**Figura 5.11:** Desplazamientos del nodo A.

- 3 Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la  
4 literatura fuente (Foti y Martinelli (2018)), se capturo el ángulo de balanceo  
5 del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función  
6 tangente que vincula el ángulo respecto da la deformada en el eje  $x$  con los  
7 desplazamientos en  $z$  e  $y$ . Para ilustrar al lector se realizó el siguiente esquema  
8 del ángulo  $\Phi$ :

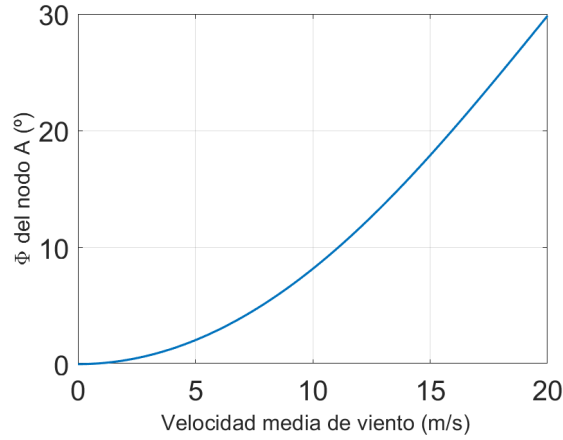
- 9 Se graficaron las trayectorias del ángulo para diferentes valores de velocidad  
10 media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica.  
11 Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante  
12 al que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras



**Figura 5.12:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

1 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el  
2 tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte,  
3 en comparación con los resultados presentados por Foti y Martinelli, 2018 se  
4 observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo,  
5 la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el  
6 valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamen-  
7 te, lo que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la  
8 turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a  
9 que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincroni-  
10 zadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan  
11 produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia  
12 del y la variación del ángulo de ataque con el ángulo. Como en la referen-  
13 cia (Foti y Martinelli, 2018) se toman en cuenta un perfil con formaciones de  
14 hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de  
15 diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.

16 El ejemplo permite inferir que la respuesta numérica del modelo representa  
17 de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores de  
18 transmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejanza en los resultados  
19 arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible  
20 aventurarse a la aplicación de casos más complejos.



**Figura 5.13:** Ángulo de balanceo  $\Phi$  en función de la velocidad media  $W(t)$ .

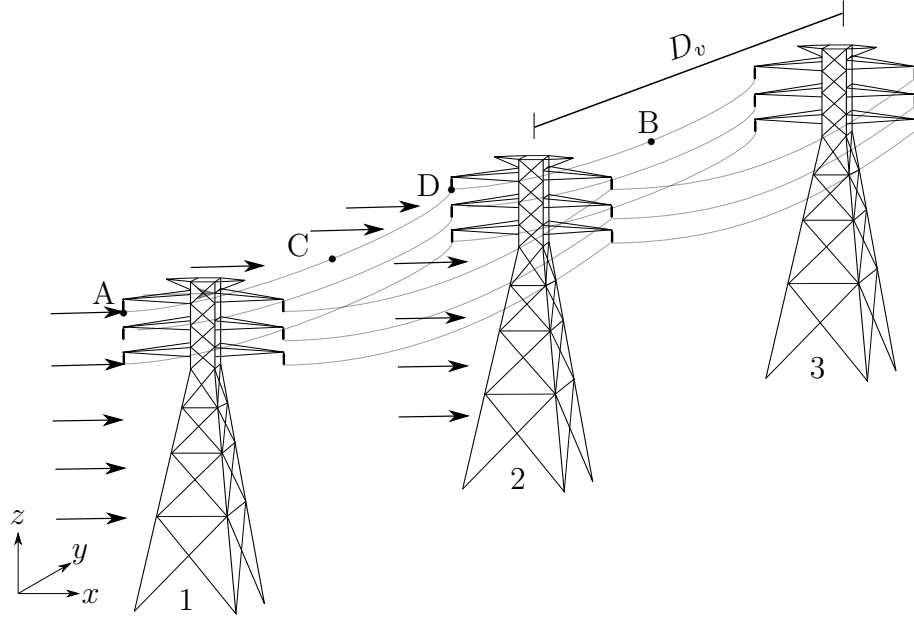
### 5.3. Sistema de transmisión eléctrica

Este ejemplo ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de transmisión eléctrica afectados por vientos extremos no sinópticos, en particular, TC. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizando un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos vanos de idéntico largo  $D_v = 206.5$  m tal cual se indica el Esquema 5.14. Para el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1 y 2, respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del primer y segundo vano con los literales C y B, respectivamente. Con el objetivo de representar una geometría real de una línea de alta tensión y no aborrecer al lector con descripciones de propiedades, los conductores de la simulación se corresponden con el ejemplo resuelto de la Sección 5.2 y cuyas propiedades mecánicas se explicitan en la Tabla 5.1.

En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que transportan un voltaje mayor a 72.5 kV. Este valor de tensión es eminentemente peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elementos aisladores. Para el modelar las cadenas se utilizaron elementos de barras tipo Green presentados en (Crisfield, 1997). Además, se consideró un módulo de elasticidad aproximado  $E = 70$  GPa según los estudios experimentales realizados por Crespo, 2019.

Al igual que los aisladores, las barras de las torres metálicas se modela-



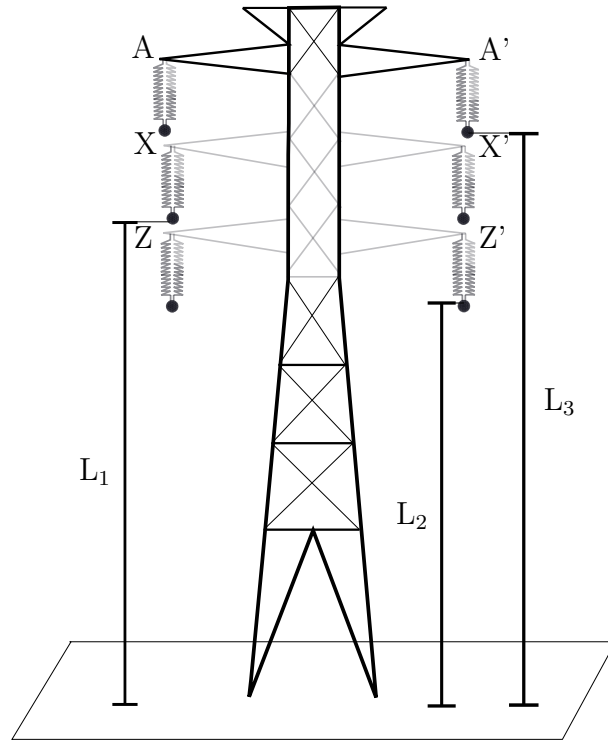


**Figura 5.14:** Esquema del sistema de transmisión.

ron con elementos de Green, con una ley material Saint-Venant-Kirchhoff con  $E = 300$  GPa y  $\nu = 0.3$ . Su geometría fue suministrada por el Ingeniero Agustín Téliz, cuya tesis de maestría consiste en el modelado y optimizado estructural de las mismas. Estos valores se corresponden con un acero ASTM A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y ASTM <sup>9</sup>65. Estas torres tienen una altura máxima de 44 m y un ancho entre los opuestos de la cercha de 14.8 m. Además, estas son capaces de soportar 6 líneas, a cada altura sostienen cada una de las fases eléctricas. Las líneas se encuentran colocadas a tres cotas distintas  $L_1 = 31.75$  m,  $L_2 = 26.03$  m,  $L_3 = 39.76$  m, tal y como se muestra en 5.15.

La simulación se separa en dos etapas, primeramente partiendo de la configuración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad según el eje  $-z$  tal cual se muestra en la Figura 5.14. Nuevamente, al igual que en el Ejemplo 5.2, esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el amortiguamiento. Este se calculó según lo descrito en la Sección 4.2.2.1 resultando  $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \bar{v} = 0.15$  Ns/m.

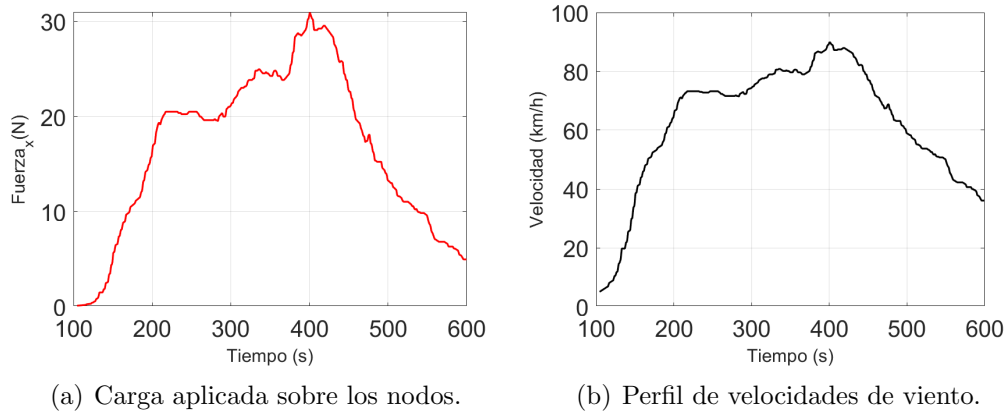
Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta convectiva capturado en la referencia (Stengel y Thiele, 2017), positiva según el eje  $x$ . No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales siendo la velocidad



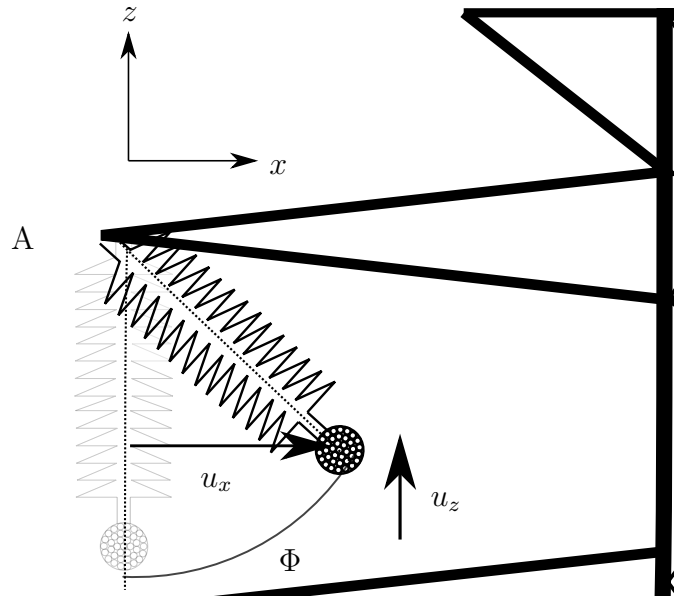
**Figura 5.15:** Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

1 una componente uniforme. Es menester destacar que la tormenta convectiva  
2 se aplicó únicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de  
3 extraer resultados respecto al comportamiento flexional en el plano  $yz$ , lo que  
4 se evidenciará a continuación la diferencia de las trayectorias entre los nodos  
5 A, C, D y B. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa  
6 en que estos fenómenos tienen dimensiones espaciales del orden de 40 metros a  
7 40 kilómetros según Fujita, 1985, consecuentemente es factible que la tormenta  
8 afecte a una fracción del tendido. Los valores de fuerza y velocidad asociadas  
9 a la coordenada  $x$  entre los nodos A y D para cada instante se muestran a  
10 continuación:

11 Se compararon cuantitativamente las oscilaciones entre fases (A-A', X-X',  
12 Z-Z') de la Figura 5.15, no apreciándose sensibles diferencias, tanto en des-  
13 plazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen apreciables  
14 variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A'). Es-  
15 to se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho de  
16 omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe antes  
17 el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando que  
18 los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A como



1 variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en los ejes  
 2  $x$  y  $z$  como también el ángulo de oscilación  $\Phi$  tal y cual se observa en la Figura  
 3 5.16.

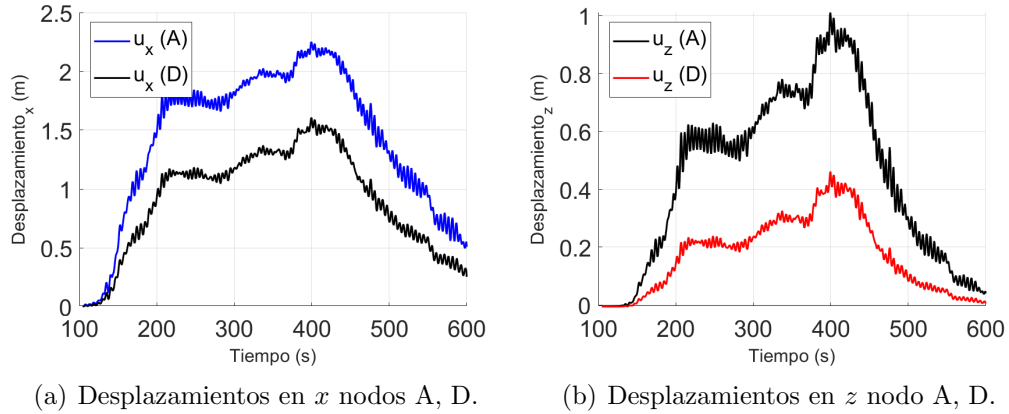


**Figura 5.16:** Ilustración de magnitudes de balanceo.

4 El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos  
 5 de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de  $\Delta T = 0.5$   
 6 s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico  
 7  $\alpha = -0.05$ , luego de un procedimiento iterativo de ajuste de parámetros se  
 8 realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con tolerancias en  
 9 desplazamientos y en fuerzas residuales de  $10^{-5}$  m y  $10^{-5}$  N, respectivamente.

10 A continuación se muestran los desplazamientos verticales y horizontales

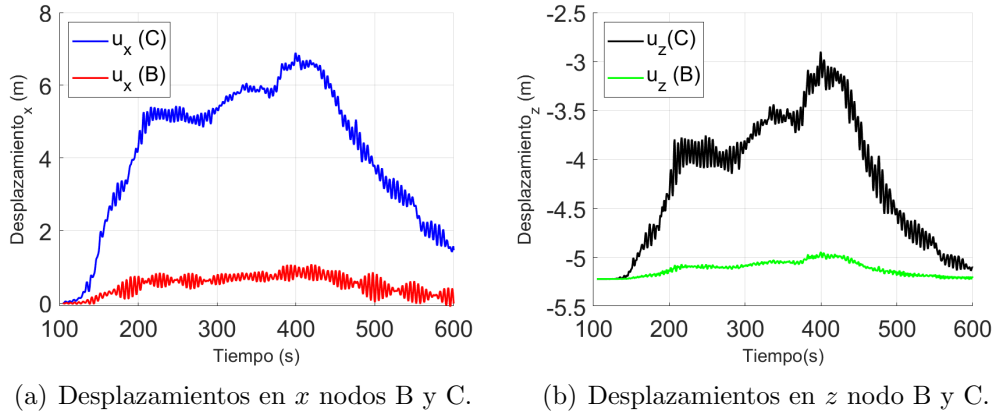
de los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magnitudes externas, responde a un argumento basado en el análisis en frecuencia del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en estado estacionario. En 5.17(a) y 5.17(b) se observan los desplazamientos en vertical y transversal, respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo no representa las cargas inerciales de los vanos contiguos a este.



**Figura 5.17:** Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D.

Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del conductor también despliegan grandes desplazamientos, este fenómeno resulta indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de seguridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proximidad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los componentes. Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos para los nodos B y C.

En la Figura 5.18(a) se aprecia que el orden de los movimientos, para ambos nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación entre estos es de unos 14 metros lo que garantiza que no habrá impactos entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas líneas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central,



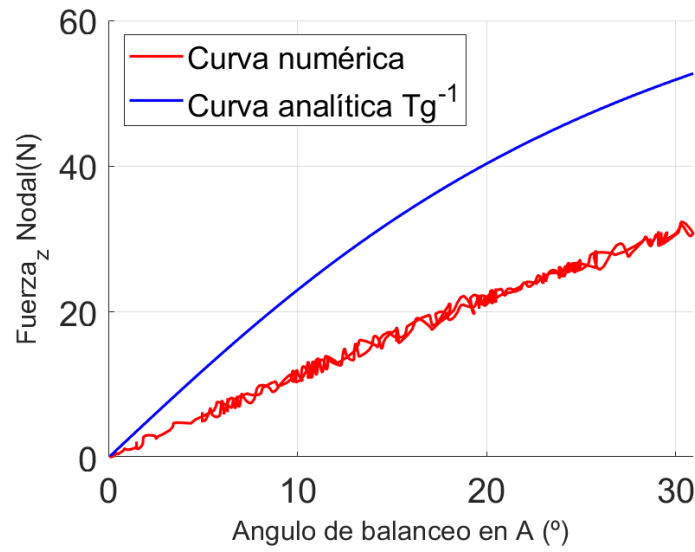
**Figura 5.18:** Desplazamientos de los nodos medios B y C.

1 para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe con-  
2 siderarse a la hora del diseño. En la Figura 5.18(b) se muestra que el descenso  
3 máximo de la línea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando  
4 un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza  
5 ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento  
6 de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par  
7 de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes  
8 en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de que  
9 los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en pun-  
10 tos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctuación  
11 temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Figuras 5.17.

12 Por otra parte, en las Figuras 5.18 se observan indicios de inestabilidades  
13 numéricas, debido a altas frecuencias inducidas por el método computacional  
14 o modos de resonancia.

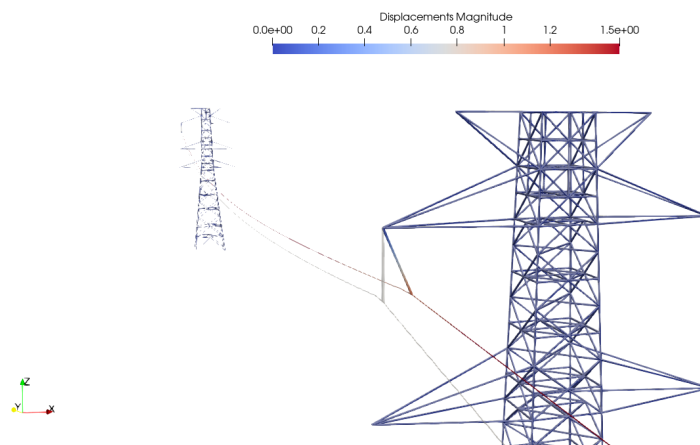
15 En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables  
16 cinemáticas se elaboró la Figura 5.19 carga desplazamiento para el nodo A. En  
17 abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza  
18 nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos  
19 se graficó un cálculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre  
20 todo en el área de ingeniería del viento (Stengel y Thiele, 2017), (Durañona y  
21 Cataldo, 2009) (Yang y Hong, 2016).

22 El cálculo analítico resulta de un planteo estático plano, donde se iguala  
23 la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el  
24 conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes



**Figura 5.19:** Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

1 inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas ace-  
 2 leraciones pueden afectar las fuerzas internas transmitidas al elemento aislador.  
 3 Asimismo, ese cálculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coor-  
 4 denada axial, proveniente de las distintas orientaciones de la línea respecto al  
 5 ángulo de incidencia del flujo. En la Figura 5.19 se evidencian las diferencias  
 6 entre los modelos y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensio-  
 7 nados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los  
 8 resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente  
 9 sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales menciona-  
 10 das, se muestran la configuración indeformadas en gris y las deformadas con  
 11 una barra de colores en desplazamientos para el instante  $t = 400s$  en la Figura  
 12 5.20.



**Figura 5.20:** Estructura indeformada y deformada para  $t = 400$  s.

# 1 **Capítulo 6**

## 2 **Conclusiones**

3 El presente capítulo se separó en tres secciones que se relacionan con dife-  
4 rentes aristas o perspectivas del trabajo llevado a cabo. En primera instancia,  
5 se detallan las consideraciones finales y de síntesis, desde un punto de vista  
6 técnico sobre los resultados obtenidos. Luego de esto, se analizan limitaciones  
7 que deberían de mejorarse en posibles trabajos a futuro. Posteriormente, se na-  
8 rran los aspectos del desarrollo académico de esta tesis, como trabajo culmine  
9 de una etapa formativa fundamental para quien escribe.

### 10 **6.1. Conclusiones técnicas**

11 Inicialmente se consultó el estado del arte en el área de Ingeniería del viento  
12 y estructural. Se analizaron bibliografías en materia de simulaciones numéricas  
13 aplicadas a conductores eléctricos, con abordajes semi-analíticos y computacio-  
14 nales. También, se estudiaron trabajos nacionales e internacionales, desde un  
15 punto de vista cualitativo y experimental de CD y sus posibles perjuicios sobre  
16 líneas de transmisión eléctrica. Existe vasta evidencia de que el fenómeno de  
17 tormentas convectivas (TC) ha afectado severamente la calidad e integridad de  
18 la vida humana a lo largo y ancho del globo terráqueo. En particular, debido  
19 a las condiciones climáticas singulares de la región, y el progresivo calenta-  
20 miento global, se han intensificado los daños devastadores en los sistemas de  
21 transmisión y distribución eléctrica nacionales. Induciendo inevitablemente, en  
22 costos millonarios de reparación sobre las instalaciones, y pérdidas durante la  
23 interrupción del suministro. Esta investigación construye una herramienta de  
24 simulación computacional, capaz de emular los desmedidos desplazamientos y



1 esfuerzos que estos eventos producen sobre los sistemas de transmisión eléctrica.

2     Habiendo finalizado esta tesis, se enumeran las principales conclusiones  
3 técnicas de este trabajo:

4 **Conclusión T1:**

5     Se implementó y validó dentro del código abierto [ONSAS](#) una formula-  
6 ción corrotacional de vigas 3D para la simulación de problemas dinámicos  
7 no lineales de estructuras tridimensionales formadas por vigas.

8 **Conclusión T2:**

9     Se extendió analíticamente la formulación corrotacional para elementos  
10 de cables incorporando términos de amortiguamiento aerodinámicos.

11 **Conclusión T3:**

12     Se generó un modelo que representa el acoplamiento entre torres y con-  
13 ductores sometido a la acción de un perfil tipo CD. Según los resulta-  
14 dos del modelo, las tormentas convectivas afectan a las líneas generando  
15 desplazamientos de casi 7 metros y ángulos de hasta 30° en la cadena  
16 aisladora.

17 **Conclusión T1:** Debido a numerosas ventajas se eligió la formulación co-  
18 rrotacional de vigas 3D para grandes desplazamientos y rotaciones. Una vez  
19 ahondado en la temática, se implementó y validó un modelo corrotacional con-  
20 sistente robusto y eficaz, capaz de captar y reproducir desplazamientos de gran  
21 amplitud con número reducido de elementos. Esta formulación se validó con  
22 el ejemplo [5.1](#) benchmark del folclore corrotacional presentado por Simo y Vu-  
23 Quoc, [1988](#). Este es cargado con una fuerza abrupta y de severa magnitud, en  
24 relación a la rigidez de la estructura alcanzando un valor de 50 N en apenas  
25 2 segundos de simulación, tal y como se muestra en la Figura [5.2](#). Esta fuerza  
26 posee una esencia análoga al fenómeno de TC per se. Esa semejanza radica en  
27 el aumento súbito de su magnitud, en un corto lapso de tiempo, por ende, la  
28 capacidad del modelo de reproducir este tipo de impactos es fundamental para  
29 poder representar el fenómeno central de este trabajo.

30     En la Figura [5.4\(b\)](#) se observan amplitudes que alcanzan los 8 metros cuan-  
31 do la estructura mide 10. Esto evidencia, la fuerte presencia de grandes des-  
32 plazamientos y rotaciones. En relación a los desplazamientos en el sentido de  
33 *y* del nodo A, presentados en la Figura [5.4\(a\)](#), se observa el signo negativo

1 de este, concordando con lo esperado intuitivamente según la fuerza aplicada.  
2 Por último, el resultado más importante de este ejemplo, se destila al cotejar  
3 las respuestas del as Figuras 5.4(a), 5.4(b) y 5.5(b) con lo publicado por el  
4 artículo de referencia (Le et al. 2014). Al comparar estas figuras se concluye  
5 que el modelo implementado es capaz de representar cabalmente movimientos  
6 de gran amplitud, con apenas 10 elementos por miembro y un paso temporal  
7 de 0.25 s. Esto permitió validar la formulación para este caso y aplicarla a  
8 dominios más complejos específicamente con el foco en conductores eléctricos.

9 **Conclusión T2:** En la Sección 4.1.2 se desarrolló un estudio general sobre  
10 los campos de velocidades absolutos y relativos, vinculados al efecto relativo  
11 del movimiento del conductor respecto al viento. Este enfoque no se encontró  
12 en la bibliografía consultada, esclareciéndose la dinámica del fenómeno. A su  
13 vez, según la Figura 4.4, se develó que despreciar la velocidad perpendicular  
14 frente a la componente media, en el sentido transversal  $z$ , es equivalente a  
15 el ángulo de ataque sea nulo y también así, la componente del drag según el  
16 sentido de  $y$ . Por otra parte, se concluyó que al considerar los campos relativos  
17 aparece un término aeroelástico, que emerge de la diferencia de velocidades,  
18 vista desde un referencial solidario al conductor. A este término se lo identifica  
19 en la materia con el nombre de amortiguamiento aerodinámico y, según lo  
20 estudiado, no había sido incluido en la metodología corrotacional.

21 Una vez descritas las hipótesis en este mismo capítulo, en la Sección 4.2.2  
22 se generó un análisis analítico no explicado en la bibliografía de referencia (Le  
23 et al. 2014). En esta misma sección se aplicó el método de resolución para  
24 problemas dinámicos de HHT, incondicionalmente estable, explicando con de-  
25 tenimiento la deducción y premisas utilizadas. Complementario, al desarrollo  
26 teórico, se establecieron los principales pseudocódigos subyacentes a la imple-  
27 mentación numérica en el Software **ONSAS**.

28 En función de los avances originales de esta investigación mencionados en  
29 los párrafos anteriores. Esta tesis constituye un desarrollo complementario a  
30 la formulación propuesta, por Le et al. 2014, incluyendo fuerzas aerodinámicas  
31 linealizadas provenientes de la acción de vientos sobre conductores. Esto puede  
32 aplicarse a un espectro enorme de estructuras representables por elementos de  
33 viga, con grandes desplazamientos y rotaciones, atacadas por el viento. Dado  
34 este diverso abanico de aplicaciones, el interés de la comunidad científica puede  
35 ser un impulso catalizador para ciertas publicaciones a futuro.

1 **Conclusión T3:** Se acoplaron diferentes componentes de un sistema de al-  
2 ta tensión conductores, aisladores y torres. Con este objetivo, se validaron  
3 ejemplos intermedios integrando elementos de biela tipo Green y de viga co-  
4 rrotacional con resultados lineales y dinámicos conocidos. Las geometrías y  
5 propiedades que integraron el modelo son extraídas de bibliografías experi-  
6 mentales y normativas buscando representar y emular el fenómeno de forma  
7 realista. Con el mismo cometido, el perfil de viento se extrajo de estudios ex-  
8 perimentales en el Norte de Alemania durante el transcurso de una tormenta  
9 convectiva, tipo corriente descendente, publicado en (Stengel y Thiele, 2017).  
10 Esta es de una magnitud intensa, aunque no en comparación con los resultados  
11 capturados en diferentes estudios de campo nacionales, en (Durañona y Catal-  
12 do, 2009) y (Durañona et al. 2019). En estos artículos se presentan medidas  
13 que alcanzan umbrales de 88.2 a 162 km/h a 45 m de altura. Otra diferencia al  
14 respecto, refiere al gradiente de velocidad, el flujo introducido numéricamente  
15 del autor Stengel y Thiele posee una menor aceleración en comparación con  
16 tormentas en el territorio uruguayo.

17 La carga del viento se distribuyó en el primer vano, provocando un perfil  
18 que ataque diferente a la línea en su coordenada axial. Esto genera un efecto  
19 de desfase entre los conductores de los vanos entre la torres 1-2 y 2-3 de  
20 la Figura 5.20. Esta variabilidad del flujo, busca representar un fenómeno de  
21 oscilación axial, relacionado con la presencia de vórtices a lo largo del espacio.  
22 Las diferencias en desplazamientos de los puntos A B C Y D de la cadena  
23 aisladora, se evidencia en las Figuras 5.18 y 5.17. Por más que los movimientos  
24 posean diferentes amplitudes de banda, los perfiles obtenidos se encuentran  
25 gráficamente emparentados con el perfil de la tormenta en la Figura 5.16(b).  
26 Vale destacar que en estos resultados se evidencia una cierta oscilación de alta  
27 frecuencia que puede deberse a inestabilidades numéricas.

28 Se desarrolló un análisis de contraste con un modelo ampliamente utilizado  
29 en el área de Ingeniería del Viento. Esta se utiliza para calcular de forma cua-  
30 siestática, utilizando una fórmula de arco tangente. Esta se basa en un péndulo  
31 cuasiestático plano, omitiendo términos inerciales. Los trabajos de Stengel y  
32 Thiele, 2017, Durañona y Cataldo, 2009 y Yan et al. 2009 aplican esta aproxi-  
33 mación simplificada. Si bien en los resultados del Ejemplo 5.3 no son com-  
34 prables, la aproximación plana no funciona. Para este caso en particular, la  
35 curva numérica parece reflejar una linealidad, evaluar el ángulo de la cadena  
36 mediante el modelo estático, arrojaría un resultado de sobrestimado. Esto se

1 detalla en la Figura 5.19.

2 Estos resultados presentan indicios que, para enfrentar la problemática, los  
3 códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complementario  
4 para el diseño de sistemas de transmisión y distribución. Según contactos es-  
5 tablecidos con la empresa de transmisión eléctrica (UTE), las torres de alta  
6 y media tensión suelen encargarse a empresas privadas que obtienen la obra  
7 por licitación y entregan las instalaciones con llave en mano. Estos proyectos  
8 suelen importar soluciones del extranjero, que pueden ser no aplicables a las  
9 condiciones nacionales. Esto se explica por la carencia de las normas interna-  
10 cionales en materia de fenómenos de viento no sinópticos como CD y ciclones  
11 extratropicales. Esto se intensifica en el territorio para sistemas montados hace  
12 30 años en superposición con la asiduidad, intensidad y frecuencia de TC.

13 Uniendo resultados de diferentes trabajos internacionales con los resultados  
14 del modelo presentado en la Sección 5.3, es posible teorizar que la mayoría de  
15 las incidencias ocurridas en las líneas Palmar-Montevideo de 500kV, pueden  
16 deberse al pasaje de tormentas severas sobre la zona. Estas tormentas produ-  
17 cen CD, que ejercen cargas desmesuradas sobre el conductor, en el orden de  
18 minutos, imponiendo ángulos de balanceo excesivos, acercando los conductores  
19 a las torres, a una distancia tal, que inminentes descarga a tierra pueden dejar  
20 fuera de servicio a la línea. Además según los estudios de la norma *Design cri-*  
21 *teria of overhead transmission lines*, 2003 del Apéndice 2, esta solo considera  
22 vientos tipo CLA. Esto podría estar subestimando las fuerzas ejercidas por el  
23 viento, ya que para el territorio uruguayo según Durañona y Denis, 2018, los  
24 periodos de retorno para velocidades de hasta 100 km/h es menor para CD en  
25 comparación con vientos tipo CLA.

## 26 6.2. Trabajos a futuro

27 Actualmente este trabajo abre claras líneas de investigación y desarrollo  
28 para continuar la mejora de los modelos que se aproximen a la realidad con  
29 mayor precisión. Como trabajo a futuro para continuar la línea de investigación  
30 con un encare general se proponen los siguientes lineamientos:

- 31 1. Investigar exhaustivamente sobre el origen de las oscilaciones de alta fre-  
32 cuencia observadas en los resultados numéricos del ejemplo de la Sección  
33 5.3.

- 1     2. Incluir en el análisis teórico de la formulación corrotacional condiciones  
2        de Dirichlet no homogéneas en desplazamientos, que sean capaces de  
3        representar el tensado del conductor durante la instalación. La hipótesis  
4        reduccionista sobre la tensión inicial, aparenta ser imprecisa respecto a  
5        la rigidez del sistema y tiende a reducir la exactitud en la representación  
6        del fenómeno. Según el punto de vista del autor, esta implementación en  
7        [ONSAS](#) es el punto de partida en la continuación de este trabajo.
- 8     3. Implementar un módulo modal dentro del [ONSAS](#) capaz de calcular los  
9        modos estructurales, insumo fundamental para realizar un análisis en  
10       frecuencia de posibles resonancias viento-conductor.
- 11    4. Agregar al desarrollo analítico de la formulación corrotacional la posibi-  
12       lidad de incluir relaciones de fuerza viscosas, no lineales con diferentes  
13       coeficientes de *drag* y *lift* de acuerdo al perfil geométrico de la sección e  
14       implementarlo en el Software [ONSAS](#).
- 15    5. Agregar al modelo del Ejemplo [5.3](#) los elementos separadores con más de  
16       un conductor por aislador. En las instalaciones visitadas de forma presen-  
17       cial, se observaron una serie de separadores que mantienen distanciados  
18       los conductores evitando el cortocircuito. Además, al unir cuatro cables  
19       generan una mayor rigidez e inercia en los tendidos. Este análisis deberá  
20       incluir diferentes valores de coeficientes de drag dada la proximidad entre  
21       conductores y sus efectos sobre las líneas de flujo.
- 22    6. Verificar el no deslizamiento interno entre las lingas que conforman el  
23       conductor, según los estudios propuestos por Foti y Martinelli, [2016](#).  
24       Esto permitiría verificar la hipótesis asumida respecto al comportamiento  
25       de unión que mantiene el conductor durante sus trayectorias. Asu vez  
26       generar un aporte original estudiando como las TC afectan al fenómeno  
27       de deslizamiento interno de Papailiou, [1997](#).
- 28    7. Generar un análisis de malla en el número de elementos por unidad de  
29       largo del conductor y sensibilidad respecto a las condiciones de borde  
30       establecidas. Esto permitiría estudiar el grado de discretización óptimo,  
31       para minimizar el error numérico sin incurrir en un tiempo excesivo de  
32       simulación.

1 8. Integrar la herramienta [ONSAS](#) con un solver de fluidos como por ejem-  
2 plo el [caffa.3d.MBRi](#) basado en volúmenes finitos con paralelización mul-  
3 titorntal Mendina et al. [2014](#). Esta ardua integración permitiría generar  
4 una herramienta sumamente potente para atacar problemas de interac-  
5 ción fluido-estructura.

6 Con el objetivo de generar una herramienta de diseño complementario para  
7 UTE se proponen los siguientes trabajos a futuro:

- 8 1. Incorporar diferentes geometrías de torres presentes en los distintos ten-  
9 didos de distribución del país. Según los intercambios con el personal de  
10 transmisión de UTE, las líneas de distribución, a partir de la década del  
11 2000, respecto a los que se representaron el Ejemplo [5.3](#) cambiaron las  
12 geometrías de torres. Es importante este análisis para lograr emular la  
13 influencia de la arquitectura de las torres, en la aproximación excesiva del  
14 conductor a las barras. De igual manera, adquirir datos reales aportados  
15 por UTE podría aportar un valor significativo a esta investigación.
- 16 2. Incorporar al modelo el agarre doble que, en determinadas ocasiones,  
17 se dispone en las líneas centrales de la torre. Esta es una solución ante  
18 la aproximación inminente del aislador, consiste en instalar una cadena  
19 aisladora extra que oficia de sujetador adicional para los conductores.  
20 Rigidizando y evitando de este modo el balanceo desmesurado. Otro  
21 tipo de soluciones implantadas, consiste en agregar pesos sobre puntos  
22 estratégicos en las líneas, aumentando la inercia del sistema. En este  
23 caso, la elección del peso consiste en un compromiso entre los esfuerzos  
24 generados en el cable sin alcanzar la fluencia y la masa que atenúa el  
25 balanceo. Este tipo de soluciones paliativas resultan interesantes como  
26 objeto de simulación.

## 27 6.3. Conclusiones de formación

28 El desarrollo de este trabajo constituyó una instancia de formación fun-  
29 damental y enriquecedora para el autor enmarcada dentro del programa de  
30 Maestría en Ingeniería Estructural. Este documento es la síntesis y aplicación  
31 de un conjunto de conocimientos profundizados durante la actividad programa-  
32 da, aplicada al modelado numérico de estructuras. Desde la óptica del autor, la

1 creación de herramientas endógenas con foco en atacar problemáticas a nivel  
2 nacional constituye un pilar fundamental en el desarrollo autónomo y origi-  
3 nal de la ingeniería uruguaya. Este trabajo es una muestra de la convicción  
4 y determinación, que el conocimiento académico, debe desarrollarse de forma  
5 transparente, comunitaria y democrática. Es por esto, que todos los códigos  
6 utilizados en esta investigación se implementaron en la herramienta de soft-  
7 ware libre [ONSAS](#). Esto abre la posibilidad a cualquier tercero, ya sea una  
8 organización o persona, de estudiar, modificar y difundir los códigos creados  
9 como también aplicarlos a sus propias necesidades.

### 10 **6.3.1. Reflexión personal**

11 Antes que nada, es necesario realizar una arqueología de las palabras su-  
12 jeto y fenómeno en castellano. Sujeto en latín *sub-iectum* significa lo que está  
13 debajo, según una interpretación posmoderna. Desde esta perspectiva, es el  
14 sujeto el sustrato de cualquier ente, que lo dota de sustancia, colores, palabras  
15 y formas. Por otra parte, fenómeno tiene una raíz etimológica en la palabra  
16 *phainomenon* al igual que la palabra fantasía. Esto alude a lo que se muestra,  
17 lo que se deja ver, lo que brilla. Ahora bien, en el acto de percibir cogniti-  
18 vamente existe una dirección previa (inconsciente o consciente) de apuntar el  
19 foco hacia algo, entonces ¿Quién y cómo se dirige ese foco?

20 Toda disciplina e investigación debería conocer sus propias fugas, fronteras  
21 y puntos ciegos. De lo contrario, cualquier pretensión hermética podría ser un  
22 síntoma de arrogancia y altanería. A lo largo de este trabajo, he canonizado una  
23 redacción en tercera persona, como si existiese una determinada imparcialidad  
24 y transparencia en dicho escritor. O quizás una búsqueda con necedad de la  
25 verdad absoluta. Este sujeto, apuntado y enfocado en los párrafos siguientes,  
26 merece ensimismarse y cuestionarse a sí mismo, según el proverbio en templo  
27 de Apolo del Oráculo de Delfos, *gnóthi sautón* o en castellano *Conócete a ti*  
28 *mismo*.

29 Durante el transcurso de este trabajó me surgieron las siguientes inquietu-  
30 des ¿Es la realidad un conjunto de fenómenos externos o es siempre un acto  
31 de interpretación inmanente al sujeto? Además, ¿Ese sujeto accede la reali-  
32 dad (el objeto) a través de la razón para conocer y explicarla, o simplemente  
33 la experiencia es quien valida ese conjunto de fenómenos? A partir de esta  
34 pregunta, emana una interrogante natural, ¿Es posible entonces, desligar al

1 sujeto del objeto, o más bien este ente (ex-siste) en el mundo, y está siempre  
2 arrojado, lanzado y en relación con el? Y de ser así, ¿No se encuentra entonces  
3 **ya** sugestionado por el paradigma actual, su cultura nativa y sus experiencias  
4 personales cuando describe?

5 Esas preguntas han sido abordadas por eminencias de la filosofía y la cien-  
6 cia, desde la modernidad hasta hoy. Por un lado, el realismo científico concibe  
7 que es posible constatar la realidad a través de la experiencia o a través del  
8 pensamiento. Para Descartes ese sujeto duda, piensa y por tanto **ya** en ese acto  
9 analítico, existe (*Cogito ergo sum*) Descartes, 1637, ósea el ente en tanto ente.  
10 El padre del racionalismo nos plantea que es el yo del sujeto, quien a través de  
11 la duda metódica puede acceder la verdad. Contrapuesto a este, el empirismo  
12 valida cualquier conocimiento sólo por la experiencia. Esta se define por lo  
13 que es captado por nuestros sentidos, es decir que la experiencia es sensorial.  
14 Estas dos posturas, la del racionalismo de Descartes y la del empirismo de  
15 Hume, pueden ser pensadas como una forma de abordaje a la relación realidad  
16 - conocimiento. Para Descartes: conozco en tanto analizo y pienso, y los ob-  
17 jetos existen cuando yo realizo la abstracción. Para el empirismo: conozco en  
18 la medida en que incorporo la realidad “objetiva”, la de los objetos que puedo  
19 percibir a través de los sentidos.

20 A mediados del sg XIX nació un pensador disruptivo que viró absoluta-  
21 mente a la cuestión. Frederick Nietzsche plantea en su libro Voluntad de Poder  
22 Nietzsche, 2018 “ El pensar no es para nosotros un medio para “conocer” sino  
23 para designar el acontecer, para ordenarlo, para volverlo manejable para nues-  
24 tro uso: así pensamos hoy acerca del pensar: mañana quizá de otro modo ”.  
25 Esta frase alude, desde mi voz de hoy, a un nihilismo que niega la posibilidad de  
26 conocer algo absoluto verdadero pues no es más que un desarrollo pragmático  
27 de poder. Es una cuestión de voluntad de voluntad, un dispositivo ordenatorio  
28 de la realidad según categorías y características en nuestro acto de querer/-  
29 poder conocer. Antípoda a esta teoría nihilista aparece el relativismo. Este se  
30 estriba en el principio de incertidumbre Heisenberg, si existe ese conocimien-  
31 to, es entonces indisoluble de cierta estructura. Thomas Khun en su libro *La*  
32 *estructuras de las revoluciones científicas* Kuhn, 2019 plantea que el método  
33 científico revoluciona, cuando se produce un cambio de paradigma, no a partir  
34 de la observación de nuevos hechos o fenómenos. Junto con otros destacados  
35 sociólogos, acuñan la idea del concepto de “cargado de teoría”, un cierto con-  
36 junto de preconceptos anteriores a la observación, descripción y desarrollo de



1 la cualquier investigación, que llevarán al científico demostrar lo que realmente  
2 quiere demostrar... de nuevo demostración de poder.

3       ¿Como se demuestran los resultados de esta investigación?, construyendo  
4 un conjunto de artefactos experimentales/computacionales que constatan una  
5 supuesta realidad casi como un espejo, por correspondencia. En ese proceso de  
6 creación o utilización de instrumentos como ser: un programa, un anemóme-  
7 tro o un código computacional existe una omnipresente intervención humana.  
8 ¿Vale entonces seguir redactando en tercera persona desde un objetivismo posi-  
9 tivistista heredado de hace dos siglos? ¿Es coherente no ser impersonal la descrip-  
10 ción de un resultado, cuando **ya** todo el dispositivo ordenatorio que subyace es  
11 una construcción humana? ¿Debemos seguir defendiendo un cadáver **ya** ase-  
12 sinado por las ciencias humanas, desde un **sujeto que no es más que un**  
13 **efecto** cultural, histórico y económico?. ¡Por una ciencia que tenga con-ciencia  
14 de sus puntos ciegos, Por una ciencia con con-ciencia de que la verdad absoluta  
15 ha muerto, Por una ciencia construida por personas en primera persona!

# 1 Bibliografía

- 2 Abd-Elaal, E.-S., Mills, J. E. y Ma, X. (2013). A coupled parametric-CFD  
3 study for determining ages of downbursts through investigation of dif-  
4 ferent field parameters. *Journal of Wind Engineering and Industrial*  
5 *Aerodynamics*, 123, 30-42.
- 6 Ahrens, J., Geveci, B. y Law, C. (2005). Paraview: An end-user tool for large  
7 data visualization. *The visualization handbook*, 717(8).
- 8 Ahrens, J., Jourdain, S., OLeary, P., Patchett, J., Rogers, D. H. y Petersen, M.  
9 (2014). An image-based approach to extreme scale in situ visualization  
10 and analysis, En *SC'14: Proceedings of the International Conference*  
11 *for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*.  
12 IEEE.
- 13 Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M. y Paulino, G. H. (2018).  
14 Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers  
15 manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering*  
16 *Structures*, 173, 283-299.
- 17 Alsafadie, R., Hjiiaj, M. y Battini, J.-M. (2010). Corotational mixed finite  
18 element formulation for thin-walled beams with generic cross-section.  
19 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52),  
20 3197-3212.
- 21 Ang, A. H.-S. y Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering plan-*  
22 *ning and design*.
- 23 Asadi, S. y Johansson, H. (2019). Multibody dynamic modelling of a direct  
24 wind turbine drive train. *Wind Engineering*, 0309524X19849827.
- 25 Barzanooni, R., Bog, I. T. y Elhaddad, M. (2018). Modeling of Flexible Wirings  
26 and Contact Interactions in In-dustrial Robots Using Geometrically  
27 Exact Beam Formulation.
- 28 Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping  
29 effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- 1        *and Engineering*, 191(17-18), 1755-1789. [https://doi.org/10.1016/](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
- 2        [S0045-7825\(01\)00352-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)
- 3        Behdinan, K., Stylianou, M. y Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic
- 4        analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and*
- 5        *engineering*, 154(3-4), 151-161.
- 6        Blevins, R. D. y Vibrations, F.-I. (1990). Van Nostrand Reinhold. *New York*,
- 7        104-110.
- 8        Bruno Bazzano, J. y Pérez Zerpa, J. (2017). Introducción al Análisis No Lineal
- 9        de Estructuras: texto del curso Análisis No Lineal de Estructuras.
- 10       Cardona, A. y Geradin, M. (1988). A beam finite element non-linear theory
- 11       with finite rotations. *International journal for numerical methods in*
- 12       *engineering*, 26(11), 2403-2438.
- 13       Chabart, O. y Lilien, J.-L. (1998). Galloping of electrical lines in wind tunnel
- 14       facilities. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*,
- 15       74, 967-976.
- 16       Costello, G. A. (1990). Average Voting Members and Other Benign Fictions:
- 17       The Relative Reliability of Committee Reports, Floor Debates, and
- 18       Other Sources of Legislative History. *Duke LJ*, 39.
- 19       Crespo, C. A. M. (2019). *Análisis en la selección de aisladores para una línea de*
- 20       *transmisión*. Facultad de ingeniería/ Universidad Autonoma de Mexico.
- 21       Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and struc-*
- 22       *tures*, Vol. 2. John Wiley & Sons.
- 23       Darwish, M. M., El Damatty, A. A. y Hangan, H. (2010). Dynamic characte-
- 24       ristics of transmission line conductors and behaviour under turbulent
- 25       downburst loading. *Wind and Structures*, 13(4), 327.
- 26       Davenport, A. G. (1965). *Dynamic Behaviour of Massive Guy Cables*.
- 27       Davenport, A. (1960). *Wind Loads on Structures*. Ottawa, National Research
- 28       Council, Division of Building Research.
- 29       Desai, Y., Yu, P., Popplewell, N. y Shah, A. (1995). Finite element modelling
- 30       of transmission line galloping. *Computers & structures*, 57(3), 407-420.
- 31       Descartes, R. (1637). *Discours de la methode*. Leyde.
- 32       Di Pilato, M., Martelli, F. y Martinelli, L. (2008). Corotational Cable Elements
- 33       to Simulate the Behaviour of Suspended Cables under Wind Loading.
- 34       *not yet published*.
- 35       Durañona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of
- 36       high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and

1           their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Ae-*  
2           *rodynamics*, 184, 128-138.

3   Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme  
4           wind climate of Uruguay, En *Proceedings of the 14th International Con-*  
5           *ference on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*.

6   Durañona, V. y Cataldo, J. (2009). Analysis of severe storms in Uruguay and  
7           their effect on high voltage transmission lines, En *Proceedings of the*  
8           *11th Americas Conference on Wind Engineering*.

9   Durañona, V. y Denis, A. (2018). Bluff and body action, Apuntes del curso  
10          Elementos Aerodinámica y Aerolaticidad Estrcutrul. *Montevideo*.

11   Eaton, J. W., Bateman, D. y Hauberg, S. (2007). *GNU Octave version 3.0. 1*  
12          *manual: a high-level interactive language for numerical computations*.  
13          SoHo Books.

14   El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).

15   Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic  
16          bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*,  
17          40(13-14), 6451-6467. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063>  
18          001

19   Foti, F. y Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping  
20          vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal  
21          resonance. *Journal of Vibration and Control*, 24(7), 1322-1340.

22   Fujita, T. (1985). The downburst: Microburst and macroburst, SMRP Res.  
23          Rep.

24   Gani, F. y Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines gu-  
25          yed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*,  
26          37(3), 450-465.

27   Hilber, H. M., Hughes, T. J. y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipa-  
28          tion for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake*  
29          *Engineering & Structural Dynamics*, 5(3), 283-292.

30   Holmes, J. D. (2002). A re-analysis of recorded extreme wind speeds in region  
31          A. *Australian Journal of Structural Engineering*, 4(1), 29-40.

32   Hsiao, K. M., Lin, J. Y. y Lin, W. Y. (1999). A consistent co-rotational finite  
33          element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-  
34          D beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,  
35          169(1-2), 1-18.

- 1 Ibrahimbegovic, A. y Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional  
2 beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(37-38), 4241-4258.
- 3  
4 Ibrahimbegović, A. y Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of  
5 beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(5), 781-814.
- 6  
7  
8 *Design criteria of overhead transmission lines* (Standard). (2003). International Electrotechnical Commission. Geneva, CH.
- 9  
10 Irvine, H. M. y Caughey, T. K. (1974). The Linear Theory of Free Vibrations of  
11 a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 341(1626), 299-315. <https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189>
- 12  
13  
14 Irvine, H. M. y Griffin, J. H. (1976). *On the dynamic response of a suspended cable* (Vol. 4). <https://doi.org/10.1002/eqe.4290040406>
- 15  
16 Irvine, M. (1978). Free Vibrations of Inclined Cables. *Journal of the Structural Division*, Vol. 104, 343-347.
- 17  
18 Jones, K. F. (1992). Coupled vertical and horizontal galloping. *Journal of engineering mechanics*, 118(1), 92-107.
- 19  
20 Klöppel, K. y H., L. K. (1942). *Die lotrechten Eigenschwingungen der Hängerbrücken* (23.<sup>a</sup> ed., Vol. 23). Bauingenieur.
- 21  
22 Koh, C. G. y Rong, Y. (2004). Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification. *Journal of sound and vibration*, 272(1-2), 187-206.
- 23  
24  
25 Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, 20(2), 101-126.
- 26  
27  
28 Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura economica.
- 29  
30 Kutterer, M. y Starossek, U. (1992). *Dynamic cable stiffness and dynamic interaction between cable and beam* (Tesis doctoral).
- 31  
32 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiaj, M. (2011). Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. *Computational Mechanics*, 48(2), 153-161.
- 33  
34 <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6>
- 35 007

- 1 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiar, M. (2014). A consistent 3D corotational beam  
2 element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. *Computer*  
3 *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269, 538-565.
- 4 Lee, C. L. y Perkins, N. C. (1992). Nonlinear oscillations of suspended cables  
5 containing a two-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 3(6),  
6 465-490.
- 7 Luongo, A. y Piccardo, G. (1998). Non-linear galloping of sagged cables in 1:  
8 2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5), 915-940.
- 9 Luongo, A., Rega, G. y Vestroni, F. (1984). Planar non-linear free vibrations of  
10 an elastic cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19(1),  
11 39-52.
- 12 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2007). A linear curved-beam model for  
13 the analysis of galloping in suspended cables. *Journal of Mechanics of*  
14 *Materials and Structures*, 2(4), 675-694.
- 15 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2009). On the effect of twist angle on non-  
16 linear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, 87(15-  
17 16), 1003-1014.
- 18 Mara, T. G. (2007). *The effects of multi-directional winds on lattice sections*  
19 (Tesis doctoral). Faculty of Graduate Studies, University of Western  
20 Ontario.
- 21 Martinelli, L. y Perotti, F. (2004). Numerical analysis of the dynamic beha-  
22 vior of cables under turbulent wind, En *Struct. Eng. Mech. & Comput.*  
23 *(SEMC 2004)*, Cape Town, South Africa.
- 24 Martinelli, L. y Perotti, F. (2001). Numerical analysis of the non-linear dy-  
25 namic behaviour of suspended cables under turbulent wind excita-  
26 tion. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1(02),  
27 207-233.
- 28 Mendina, M., Draper, M., Soares, A. P. K., Narancio, G. y Usera, G. (2014).  
29 A general purpose parallel block structured open source incompressible  
30 flow solver. *Cluster Computing*, 17(2), 231-241.
- 31 Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics.  
32 *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67-94.
- 33 Nietzsche, F. (2018). *La voluntad de poder*. Edaf.
- 34 Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent  
35 linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics*  
36 *and Engineering*. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90248-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5)

- 1 Oke, D. G. (2000). Estimating.
- 2 Oran, C. (1973). Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural*  
3 *Division*, 99(6), 987-1001.
- 4 Pacoste, C. y Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Com-*  
5 *puter methods in applied mechanics and engineering*, 144(1-2), 163-197.
- 6 Papailiou, K. O. (1997). On the bending stiffness of transmission line conduc-  
7 tors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(4), 1576-1583. [https:](https://doi.org/10.1109/61.634178)  
8 [//doi.org/10.1109/61.634178](https://doi.org/10.1109/61.634178)  
9 003
- 10 Pugsley, A. G. (1949). On the natural frequencies of suspension chains. *Quar-*  
11 *terly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2(4), 412-418.  
12 <https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.412>
- 13 Rankin, C. y Nour-Omid, B. (1988). The use of projectors to improve finite  
14 element performance. *Computers & Structures*, 30(1-2), 257-267.
- 15 Rawlins, C. (2005). Flexure of a single-layer tensioned cable at a rigid support.  
16 Proc. 6th International Symposium on Cable Dynamics. Charleston  
17 (USA). 19-22 Sept.
- 18 Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements.  
19 *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 149(1-4),  
20 113-132.
- 21 Routh, E. J. Et al. (1955). *Dynamics of a system of rigid bodies*. Dover New  
22 York.
- 23 Saxon, D. S. y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended  
24 chain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6(3),  
25 273-285. <https://doi.org/10.1093/qjmam/6.3.273>
- 26 Simiu, E. y Scanlan, R. H. (1986). *Wind Effects on Structures*, 3. ed. (second  
27 edi). New York, Jhon Wiley; Sons.
- 28 Simo, J. C. y Vu-Quoc, L. (1988). On the dynamics in space of rods undergoing  
29 large motions—a geometrically exact approach. *Computer methods in*  
30 *applied mechanics and engineering*, 66(2), 125-161.
- 31 Starossek, U. (1991). Boundary induced vibration and dynamic stiffness of a  
32 sagging cable. [http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C\\_%7D/](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)  
33 [Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C\\_%7DCable%7B%5C\\_%](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)  
34 [7DStiffness.pdf](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)

- 1 Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading  
2 acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia*  
3 *engineering*, 199, 3152-3157.
- 4 Triantafyllou, M. S. (1984). The dynamics of taut inclined cables. *Quarterly*  
5 *Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 37(3), 421-440. [https:](https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421)  
6 [//doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421](https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421)
- 7 Yan, B., Lin, X., Luo, W., Chen, Z. y Liu, Z. (2009). Numerical study on  
8 dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission  
9 line under wind load. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 25(1),  
10 248-259.
- 11 Yang, S. y Hong, H. (2016). Nonlinear inelastic responses of transmission  
12 tower-line system under downburst wind. *Engineering Structures*, 123,  
13 490-500.
- 14 Zienkiewicz, O. C. y Cheung, Y. (1970). The finite element method in struc-  
15 tural and continuum mechanics.



# APÉNDICES

# 1 Apéndice 1

2 En este apéndice se presenta el código de la principal función implementa-  
3 da en (ONSAS) donde el autor incorporó los términos dinámicos de fuerzas  
4 inerciales y matrices tangentes estudiadas.

```
51 function [ fs, ks, stress, rotData ]= elementBeamForces( ...  
62     elemCoords, elemCrossSecParams, elemConstitutiveParams,  
7     solutionMethod, Ue, Udote, Udotdote, elemrho ) ;  
83  
94 elemCoords = elemCoords(:) ;  
105 xs         = elemCoords(1:2:end) ;  
116  
127 booleanCSTangs = 0 ;  
138  
149 % --- material constit params ---  
150 rho = elemrho ;  
161 E   = elemConstitutiveParams(2) ;  
172 nu  = elemConstitutiveParams(3) ;  
183 G   = E/(2*(1+nu)) ;  
194 % -----  
205  
216 % --- cross section ---  
227 if elemCrossSecParams(1) == 1  
238     Area = elemCrossSecParams( 2 ) ;  
249     J     = elemCrossSecParams( 3 ) ;  
250     Iyy   = elemCrossSecParams( 4 ) ;  
261     Izz   = elemCrossSecParams( 5 ) ;  
272     %  
283     if length( elemCrossSecParams ) > 5  
294         Jrho = diag( elemCrossSecParams( 6:8 ) ) ;  
305     else  
316         Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;  
327     end
```

```

128 elseif elemCrossSecParams(1) == 2
129     Area = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3) ;
130     Iyy = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)^3/12 ;
141     Izz = elemCrossSecParams(3)*elemCrossSecParams(2)^3/12 ;
152     if elemCrossSecParams(2)==elemCrossSecParams(3)
163         J = 1/3*0.40147*elemCrossSecParams(2)^4 ;
174     else
185         error('rectangular section type not implemented yet,
9         please create an issue')
106     end
117     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
128 elseif elemCrossSecParams(1) == 3
139     diameter = elemCrossSecParams(2) ;
140     Area = pi*diameter^2/4 ;
151     Iyy = pi*diameter^4/64 ;
162     Izz = Iyy ;
173     J = Iyy + Izz ;
184     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
195 else
206     error(' section type not implemented yet, please create an
21     issue')
227 end
238 % -----
249
250 %--- Auxiliar matrices ---
261 I3 = eye(3) ;
272 O3 = zeros(3) ;
283 O1 = zeros(1,3) ;
294
305 permutIndxs = [1:2:5 2:2:6 ([1:2:5]+6) ([2:2:6]+6) ] ;
316
327 dg = Ue ( permutIndxs ) ;
338 if solutionMethod > 2
349     ddotg = Udote ( permutIndxs ) ;
350     ddotdotg = Udotdote( permutIndxs ) ;
361 end
372
383 % --- Global thetas ---
394 tg1 = dg (4:6);
405 tg2 = dg (10:12);
416
427 %% --- Rotation matrices ---
438 Rg1 = expon( tg1 ) ;

```

```

159 Rg2 = expon( tg2 ) ;
170
31 x21 = xs(4:6) - xs(1:3) ;
42 d21 = dg(7:9) - dg(1:3) ;
53
64 lo = sqrt( ( x21 )' * ( x21 ) ) ; %
75 l  = sqrt( ( x21 + d21 )' * ( x21 + d21 ) ) ; %
86
97 % --- rotation matrix to reference configuration ---
108 Ro = beamRefConfRotMat( x21 ) ;
119
120 % --- rigid rotation ---
131
142 % --- deformed x axis ---
153 e1 = ( x21 + d21 ) / l ;
164
175 q1 = Rg1 * Ro * [0 1 0]' ;
186 q2 = Rg2 * Ro * [0 1 0]' ;
197 q  = ( q1 + q2 ) / 2 ;
208
219 % --- deformed z local axis ---
220 e3 = cross (e1, q) ;
231 e3 = e3 / norm(e3) ;
242
253 % --- deformed y local axis ---
264 e2 = cross (e3, e1);
275
286 % --- rotation matrix ---
297 Rr = [ e1 e2 e3 ] ;
308
319 % --- local displacements ---
320
331 % --- axial displacement ---
342 u  = l - lo;
353
364 % --- local rotations ---
375 Re1 = Rr' * Rg1 * Ro;
386 Re2 = Rr' * Rg2 * Ro;
397
408 t11 = logar( Re1 ) ;
419 t12 = logar( Re2 ) ;
420
431 locDisp = [ u t11' t12' ] ;

```

```

112
123 %% --- local force vector and tangent stiffness matrix ---
134 [f1, k1, strain, stress] = beamLocalStaticForces (u, t11, t12,
14         lo, E, G, Area, Iyy, Izz, J ) ;
155
166 %% transformation to the new local coordinates
177 q  = Rr' * q ;
188 q1 = Rr' * q1 ;
199
200 nu = q(1)/q(2);
211 nu11 = q1(1)/q(2);
222 nu12 = q1(2)/q(2);
233 nu21 = 2*nu-nu11;
244 nu22 = 2-nu12;
255
266 De1 = invTs( t11 ) ;
277 De2 = invTs( t12 ) ;
288
299 % --- matrix for transformation between global and relative ---
300 % --- rotations/moments ---
311 H  = [ 1    01    01 ; ...
322         01' De1    03 ; ...
333         01'    03    De2 ] ;
344
355 fe = H' * f1 ;
366 Dh1 = dinvTs( t11, f1(2:4) ) * De1 ;
377 Dh2 = dinvTs( t12, f1(5:7) ) * De2 ;
388
399 Kh = [ 0    01    01
400         01' Dh1    03
411         01'    03    Dh2 ] ;
422
433 ke = H' * k1 * H + Kh ;
444
455 % --- transformation to the global coordinates ---
466 r = [ -e1' 01    e1' 01 ]' ;
477
488 B = [ r'
499       -nu/l*e3' (1-nu12/2)*e1'+nu11/2*e2'    nu/l*e3' 1/2*(-nu22*e1
500       '+nu21*e2')
510       -e3'/l e2' e3'/l 0 0 0
521       e2'/l e3' -e2'/l 0 0 0

```

```

152 -nu/l*e3' 1/2*(-nu12*e1'+nu11*e2') nu/l*e3' (1-nu22/2)*e1'+
2 nu21/2*e2'
133 -e3'/l 0 0 0 e3'/l e2'
144 e2'/l 0 0 0 -e2'/l e3'];
155
166 fg = B' * fe ;
177
188 A = (I3-e1*e1')/l;
199
200 Dr=[A 03 -A 03
111 03 03 03 03
122 -A 03 A 03
133 03 03 03 03];
144
155 G=[0 0 nu/l nu12/2 -nu11/2 0 0 0 -nu/l nu22/2 -
16 nu21/2 0
176 0 0 1/l 0 0 0 0 0 -1/l 0
18 0 0
197 0 -1/l 0 0 0 0 0 1/l 0 0
20 0 0]';
218
229 II=[03 I3 03 03
230 03 03 03 I3];
241
252 P = II - [G'; G'] ;
263
274 F = P' * fe(2:7);
285
296 sF=[skew(F(1:3))
307 skew(F(4:6))
318 skew(F(7:9))
329 skew(F(10:12))];
330
341 EE=[Rr 03 03 03
352 03 Rr 03 03
363 03 03 Rr 03
374 03 03 03 Rr];
385
396 nab=[0
407 (nu*(fe(2)+fe(5))+fe(3)+fe(6))/l
418 (fe(4)+fe(7))/l];
429
430 Kg = B' * ke * B + Dr * fe(1) - EE*sF*G'*EE' + EE*G*nab*r' ;

```

```

111
122
133 %% --- transformation to the new global coordinates ---
144
155 Dg1 = Ts( tg1 ) ;
166 Dg2 = Ts( tg2 ) ;
177
188 q=[fg(1:3)
199     Dg1'*fg(4:6)
200     fg(7:9)
211     Dg2'*fg(10:12)];
222
233 Dk1=dTs(tg1,fg(4:6));
244 Dk2=dTs(tg2,fg(10:12));
255
266 H=[I3 03 03 03
277     03 Dg1 03 03
288     03 03 I3 03
299     03 03 03 Dg2];
300
311 Kt = H' * Kg * H ;
322
333 Kt( 4:6 , 4:6 ) = Kt( 4:6 , 4:6 ) + Dk1 ;
344 Kt(10:12,10:12) = Kt(10:12,10:12) + Dk2 ;
355
366 Kt = (Kt+Kt')/2;
377
388 Finte = zeros(size(q)) ;
399 dofscomb = [ 1:2:5 2:2:6 7:2:11 8:2:12 ] ;
400
411 Finte( dofscomb ) = q ;
422 KTe = zeros( size(Kt));
433
444 KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
455
466 fs = {Finte} ;
477 ks = {KTe};
488
499 rotData = {locDisp, Rr} ;
500
511 if solutionMethod > 2
522 %% ---- interpolation functions ---
533 % --- linear ---

```

```

214 N1 = @(x) 1 -x/lo ;
225 N2 = @(x) x/lo ;
236
247 % --- cubic ---
258 N3 = @(x) x*(1-x/lo)^2 ;
269 N4 = @(x) -(1-x/lo)*(x^2)/lo ;
270 N5 = @(x) (1-3*x/lo)*(1-x/lo) ;
281 N6 = @(x) (3*x/lo-2)*(x/lo) ;
292
303 N7 = @(x) N3(x)+N4(x) ;
314 N8 = @(x) N5(x)+N6(x)-1 ;
325 % -----
336
347 P1 = @(x) [ 0 0 0 0 0 0 ; ...
358 0 0 N3(x) 0 0 N4(x) ; ...
369 0 -N3(x) 0 0 -N4(x) 0 ] ;
370
381 ul = @(x) P1(x) * [ t11; t12 ] ; % Eq. 38
392
403 P2 = @(x) [ N1(x) 0 0 N2(x) 0 0 ; ...
414 0 N5(x) 0 0 N6(x) 0 ; ...
425 0 0 N5(x) 0 0 N6(x) ] ;
436
447 N = @(x) [ N1(x)*I3 03 N2(x)*I3 03 ] ;
458
469 H1 = @(x) N(x) + P1( x ) * P - 1*skew( ul(x) ) * G' ;
470
481 wdoter= G' * EE' * ddotg ; % Eq. 65
492
503 A1 = [ 01 01 01 01 ;
514 0 -1 0 01 0 1 0 01 ;
525 0 0 -1 01 0 0 1 01 ] ;
536
547 udot1 = @(x) P1(x) * P * EE' * ddotg ;
558
569 H1dot = @(x) N7(x)/(1^2)*A1*(r' * ddotg) - skew( udot1(x) )
37 * G' ;
380
391 ET = [skew(wdoter) 03 03 03 ;
402 03 skew(wdoter) 03 03 ;
413 03 03 skew(wdoter) 03 ;
424 03 03 03 skew(wdoter) ] ;
435

```



```

216 C1 = @(x) skew(wdoter)*H1(x) + H1dot(x) -H1(x)*ET;
227
238 udot      = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotg;
249 udotdot   = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotdotg+Rr*C1(x)*EE'*ddotg;
250
261 %% --- Matrix to compute wdot y wdtotdot ---
272
283 H2 = @(x) P2(x)*P+G';
294
305 wdot   = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotg;
316
327
338 A2      = [    01      01      01      01;
349            0 0  1  01  0 0 -1  01;
350            0 -1 0  01  0 1  0  01 ] ;
361
372 H2dot    = @(x) N8(x)/l^2*A2*(r'*ddotg) ;
383
394 C2        = @(x) skew(wdoter)*H2(x) + H2dot(x) - H2(x)*ET ;
405
416 wdotdot   = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotdotg + Rr*C2(x)*EE'*ddotg ;
427
438 %% --- Tensor dyadc of Intertia ---
449 %compute Rg(x)
450 thethaRoof = @(x) P2(x)*[tl1;tl2] ;
461 Rex         = @(x) expon(thethaRoof(x)) ;
472 Rgx         = @(x) Rr*Rex(x)*Ro';
483
494 Irho        = @(x) Rgx(x)*Ro*(Jrho)*(Rgx(x)*Ro)';
505 Irhoe       = @(x) Rr'*Irho(x)*Rr;
516
527 % --- Compute interial force by quadrature ---
538 xIntPoints = [ -sqrt(3/5)      0  sqrt(3/5)  ] ;
549 wIntPoints = [      5/9      8/9      5/9  ] ;
550
561 IntegrandoForce = @(x) H1(x)''*Rr'*Area*rho*udotdot(x) ...
572                    + H2(x)''*Rr'*( ...
583                    Irho(x)*wdotdot(x)...
594                    + skew(wdot(x)) * Irho(x) * wdot(x)
605                    ...
616                    ) ;
627

```

```

317 IntegrandoMassMatrix = @(x) 1*H1(x)'+Area*rho*H1(x)+1*H2(x)'*
2   Irhoe(x)*H2(x);
338
349 %% --- Compute C3 and C4 ---
350
361 h1 = @(x) H1(x) * ddotg ;
372 h2 = @(x) H2(x) * ddotg ;
383
394 rElem = [ [-1 0 0]    01   [1 0 0] 01];
105
116 F1      = [skew(udot(0))' skew(wdot(0))' skew(udot(lo))' skew(
12   wdot(lo))']';
137
148 C3  = @(x) -skew(h1(x))*G' + (N7(x)/l^2)*A1*(ddotg*rElem)...
159   +skew(wdoter)*P1(x)*P + H1(x)*F1*G';
160
171 C4  = @(x) -skew(h2(x))*G' + (N8(x)/l^2)*A2*ddotg*rElem + H2(
18   x)*F1*G';
192
203 %% --- Compute Gyroscopic Matrix---
214 IntegrandoGyroMatrix = @(x) H2(x)' * ( ( skew(wdoter) *
22   Irhoe(x) ) - skew( Irhoe(x) * wdoter) ) * H2(x) ...
235   + H1(x)' * Area*rho*(C1(x) + C3(x
24   )) + H2(x)'*Irhoe(x)*(C2(x)+C4(x)) ;
256
267 sumForce = zeros (12, 1 ) ;
278 sumGyro  = zeros (12      ) ;
289 sumMass  = zeros (12      ) ;
290
301
312 for ind = 1 : length( xIntPoints )
323     sumForce = sumForce ...
334         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoForce      ( lo/2 *
34   (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
355     %
366     sumGyro = sumGyro ...
377         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoGyroMatrix( lo/2 *
38   (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
398     %
409     sumMass = sumMass ...
410         + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoMassMatrix( lo/2 *
42   (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
431 end

```

```

352
323 Fine          = EE * sumForce          ;
334 GyroMatrix = EE * sumGyro * EE' ;
345 MassMatrix = EE * sumMass * EE' ;
356
367 %% --- Add Bt Matrix ---
378
389 Bt=[I3      03      03      03
390      03 inv(Dg1)'      03      03
401      03      03      I3      03
412      03      03      03      inv(Dg2)' ];
423 MassMatrix =MassMatrix*Bt ;
434 GyroMatrix =GyroMatrix*Bt ;
445 %% --- Switch base ---
456 Fine          = Cambio_Base(Fine);
467 GyroMatrix = Cambio_Base(GyroMatrix);
478 MassMatrix = Cambio_Base(MassMatrix);
489
490 fs{3} = Fine ;
501 ks{2} = GyroMatrix ;
512 ks{3} = MassMatrix ;
523
534 end

```

# 1 Apéndice 2

2 En esta sección se exponen las secciones destacadas de la norma interna-  
3 cional *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003, explicitándose las  
4 hipótesis fundamentales y el procedimiento para el diseño de elementos de tras-  
5 misión eléctrica. También se corroboró efectivamente que la norma estudiada  
6 considera exclusivamente vientos tipo CLA.

## 7 2.1. Campo de aplicación

8 El campo de aplicación de la norma esta sujeto a los siguientes requeri-  
9 mientos sobre el conductor y el terreno:

- 10 ■ La longitud de vano debe pertenecer al intervalo (200 m, 800 m). Para  
11 longitudes fuera de ese rango deben analizarse coeficientes de racha dife-  
12 rentes a los presentados, sin embargo para vanos más largos a 800 m el  
13 análisis de la norma resulta sobrestimado.
- 14 ■ Altura de soportes menores a 60 m y ya que los soportes de una altura  
15 mayor podrían inducir factores de amplificación dinámicos en la respues-  
16 ta.
- 17 ■ La línea debe estar a una altura menor a los 1300 msnm.
- 18 ■ Los terrenos no pueden tener características topográficas singulares cuyo  
19 tamaño y forma puedan afectar las consideraciones respecto al flujo.

## 2.2. Velocidad de referencia y rugosidad del terreno

Se establecen diferentes tipos de terrenos según las condiciones topográficas del mismo, esto afecta la forma del flujo considerado para el diseño. Para un perfil tipo ley potencial, terrenos más rugosos acentúan el gradiente de la velocidad en la altura de referencia  $z = 0$ , aumentando la intensidad de turbulencia e incrementando el valor donde el perfil alcanza la atmósfera libre  $Z_G$ .

| Categoría de terrenos | Características del terreno   |
|-----------------------|---|
| A                     | Largos y estrechos viento de ultramar, área costera llana, llanura desértica.                   |
| B                     | Campo abierto con escasa densidad de obstáculos. áreas cultivadas con pocos árboles y edificios |
| C                     | Terreno con numerosos obstáculos pequeños de baja altura (matorrales, árboles y edificios)      |
| D                     | Áreas sub-urbanas con pequeños arboles  |

**Tabla 2.1:** Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826

Considerando un flujo medio plano tipo CLA, una atmósfera neutra y diferentes constantes de terreno  $\alpha$ , entonces la velocidad media en altura  $v(z)$  se puede calcularse de la siguiente manera:

$$V(z) = V_G \left( \frac{z}{z_G} \right)^\alpha \quad (2.1)$$

Medidas de velocidad utilizando artefactos, como anemómetros o sensores de ultra sonido, permiten obtener para un determinado periodo de adquisición de datos, valores de velocidad media e intensidad de turbulencia. Es por esto, que es clave relacionar la velocidad a diferentes alturas y para cambios de terreno a lo largo del sentido del flujo. Definiendo  $V_{ref}$  como la velocidad media del viento a una altura de  $z = 10$  m para un tipo de terreno categoría B y llamando a dos puntos a diferentes alturas 1 y 2, es posible relacionar su velocidad media según:

$$V(z) = V_{ref1} \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2}. \quad (2.2)$$

En la Ecuación (2.2) se introduce un factor  $K_R$  el cual permite obtener la relación entre las velocidades de referencia para distintos terrenos  $V_{rX} =$

1  $K_R V_{rB}$ . Además se presentan a continuación las diferentes alturas de rugosidad  
2 media de obstáculos  $z_0$ :

| Factor   | Categoría de terreno |      |      |      |
|----------|----------------------|------|------|------|
|          | A                    | B    | C    | D    |
| $z_0(m)$ | 0.01                 | 0.05 | 0.30 | 1.00 |
| $\alpha$ | 0.1 a 0.12           | 0.16 | 0.22 | 0.28 |
| $K_R$    | 1.08                 | 1.00 | 0.85 | 0.67 |

**Tabla 2.2:** Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.

3 Los datos presentados en la Tabla 2.2 los valores de  $\alpha$  se asemejan con lo  
4 presentado por A. Davenport, 1960, para la categoría A y B el numero de  $\alpha$   
5 considerado por la norma es menor, esto se fundamente en que valores menores  
6 de  $\alpha$ , es decir terrenos menos rugosos, inducen una velocidad mayor para la  
7 misma cota. En el caso de la categoría C y D el valor es exactamente idéntico a  
8 lo propuesto en (A. Davenport, 1960) . De igual forma el termino  $z_0$  se coincide  
9 con la tabla publicada en (Oke, 2000).

10 Desglosando el factor  $K_R$  para dos puntos de referencia, colocados a una  
11 cota de  $z_{ref1} = z_{ref2} = 10m$  en función de la Ecuación (2.2) y combinándola  
12 con la definición de  $K_r$  se obtiene la siguiente expresión:

$$V_{ref2}(10m) = V_{ref1} \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \rightarrow K_r = \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \quad (2.3)$$

13 Sustituyendo la Ecuación 2.3 y considerando los valores de  $Z_G$  según la  
14 referencia (Oke, 2000) se expresan los resultados obtenidos: l

| Factor   | Categoría de terreno |      |      |      |
|----------|----------------------|------|------|------|
|          | A                    | B    | C    | D    |
| $z_G(m)$ | 250                  | 305  | 365  | 410  |
| $\alpha$ | 0.12                 | 0.15 | 0.22 | 0.28 |
| $K_R$    | 1.13                 | 1.00 | 0.77 | 0.61 |

**Tabla 2.3:** Tabla de factores para terrenos según referencia A. Davenport, 1960

15 Estos coinciden con un error menor al 8 % con los estipulados por la nor-  
16 ma en la Tabla 2.2. Lo que comprueba que efectivamente para estimar las  
17 velocidades se considera un viento tipo CLA.