

2 Implementación de una formulación
3 corrotacional en dinámica no lineal y
4 aplicación al modelado de líneas de
5 transmisión eléctrica

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural Instituto de Estructuras y

Transporte

Instituto de Ingeniería Mecánica y Producción Industrial

Universidad de la República

Montevideo – Uruguay

Febrero de 2021

1 Tabla de contenidos

2	1 Preliminares	1
3	1.1 Formulación corrotacional	1
4	1.1.1 Cinemática corrotacional	1
5	1.1.2 Formulación local	9
6	1.1.3 Dinámica corrotacional	14
7	2 Metodología	19
8	2.1 Aspectos de modelado computacional	19
9	2.1.1 Ecuación de equilibrio	19
10	2.1.2 Resolución numérica mediante HHT	21
11	2.1.3 Implementación numérica en ONSAS	25
12	2.2 Aspectos de modelado estructural	29
13	2.2.1 Condiciones iniciales y de borde	29
14	2.2.2 Modelo de viento	29
15	2.2.3 Hipótesis de trabajo	33

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Formulación corrotacional

A continuación se presenta una descripción metodológica de la formulación corrotacional según lo propuesto en (Le2014). La temática se abordará progresivamente según la naturaleza de las variables. En primera instancia se describen las caracterización de magnitudes cinemáticas para luego exponer como, a partir de estas, se deducen las variables dinámicas.

1.1.1. Cinemática corrotacional

El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas representa grandes rotaciones y desplazamientos dados por la dinámica de un elemento rígido. La segunda componente tiene en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material. Este enfoque suele aplicarse al analizar deformaciones estáticas. Resulta intuitivo imaginar en un inicio como se deformaría la estructura de manera rígida para luego aplicarle la componente deformable. Ahora bien, en este tipo de formulaciones, hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten representar los desplazamientos de cada una de las componentes.

Para el abordaje de este análisis debe comprenderse una serie de rotaciones consecutivas ilustradas en la Figura 1.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos, se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa el elemento en su estado indeformado o de referencia. El color naranja identifica a la componente deformada mientras que

1 en gris se ilustra la configuración rígida del elemento.

2 Para realizar traspasos de una componente a otra se definen una serie de
3 transformaciones. La primera de ellas nominada \mathbf{R}_0 lleva al elemento desde su
4 estado de referencia a su estado inicial. A partir de esa configuración pode-
5 mos hallar la geometría deformada aplicando las transformaciones \mathbf{R}_1^g o \mathbf{R}_2^g ,
6 dependiendo el nodo de interés. Esta no es la única forma de hallar el estado
7 deformado del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alterna-
8 tiva consiste dado un nodo i al interior del elemento, aplicar consecutivamente
9 las transformaciones \mathbf{R}_r y $\bar{\mathbf{R}}_i$ encontrando así el estado deformado partiendo
10 desde su configuración de referencia.

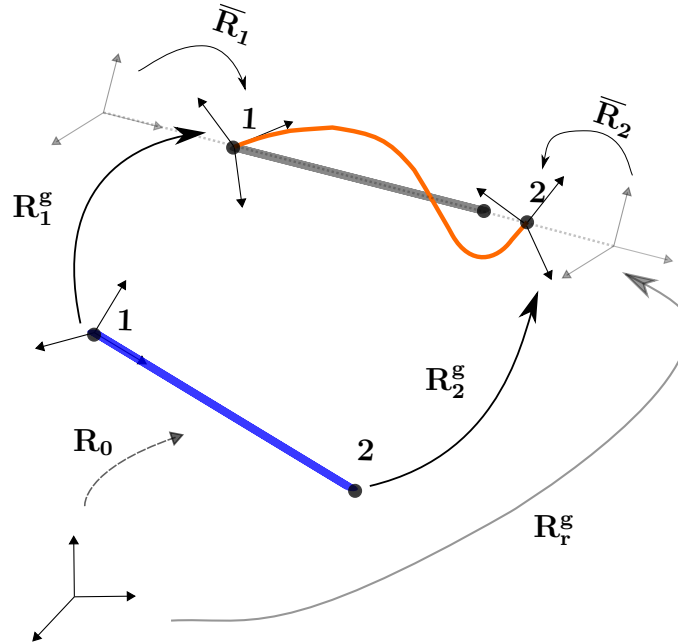


Figura 1.1: Rotaciones a cada configuración.

11 A partir de las definiciones descritas anteriormente e ilustradas en la Fi-
12 gura 1.1, resulta clarificante destacar los argumentos sobre la nomenclatura
13 seleccionada. En primer lugar, la notación con supra- índice “g” refiere a la
14 palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a dicha transforma-
15 ción, ya que permite encontrar de forma “macro” cuales es la configuración
16 deformada partiendo de la de referencia. Asimismo en la Figura 1.1 tanto las
17 rotaciones locales $\bar{\mathbf{R}}_i$ como globales \mathbf{R}_i^g se utiliza el sub-índice i mientras que
18 para la rotación rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta cla-
19 ve para comprender la metodología corrotacional. Como la componente rígida
20 es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible

1 prescindir del sub-índice i .

2 Naturalmente para encontrar la curva deformada que describe el elemento,
 3 hace falta la orientación y traslación de un sistema de coordenadas solidario a
 4 cada punto. Estas transformaciones se pueden representar matemáticamente
 5 con la artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la
 6 temática puede hallarse en la publicación (**kovzar1995finite**).

7 En los párrafos que prosiguen se desarrollan los sistemas solidarios a los
 8 nodos ubicados en los extremos del elemento. El estudio de deformaciones
 9 locales para los puntos interiores a la viga se detalla en la Sección 1.1.2.

10 Para deducir las matrices asociadas a cada transformación resulta impres-
 11 cionable definir un conjunto de bases que permitan seguir al elemento en cada
 12 configuración. Estas tríadas de versores se muestran gráficamente a continua-
 13 ción en la Figura 1.2.

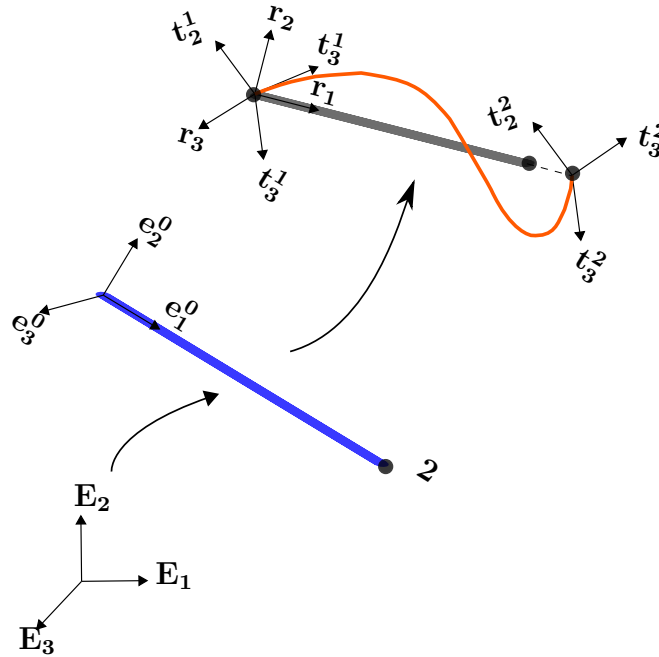


Figura 1.2: Descripción de las bases corrotacionales.

14 Primeramente se define un sistema de referencia auxiliar integrado por la
 15 base ortogonal $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$. Una vez ubicado el elemento en su estado inicial,
 16 las coordenadas se hallan en relación a tres vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Al aplicarle la
 17 traslación y rotación de cuerpo rígido la base $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ se anida al elemento y
 18 funciona como sistema de coordenadas en la configuración rígida. Por último,
 19 la base $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ permite identificar la orientación y posición del nodo i en la

1 configuración deformada. Se hace énfasis en el hecho de que tanto la configu-
2 ración inicial como la rígida requieren un único sistema de coordenadas. Por el
3 contrario, la configuración deformada debido a la flexibilidad del elemento, re-
4 quiere dos sistemas, denotados con la letra \mathbf{t}_j^i donde el supra-índice i identifica
5 el nodo y el sub-índice j la dirección.

6 La definición de las bases mencionadas en el párrafo anterior no es arbi-
7 traria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta intuitivo y oportuno
8 escribirlas a partir de los vectores solidarios a cada configuración. Esa relación
9 intrínseca entre matrices y los versores se establece en la Tabla 1.1 a continua-
10 ción:

Matriz	Vínculo de bases
\mathbf{R}_0	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
\mathbf{R}_i^g	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\bar{\mathbf{R}}_i$	$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
\mathbf{R}_r	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$

Tabla 1.1: Caracterización de matrices en términos de la base

11 Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones
12 para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la
13 y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primer fila se tiene: \mathbf{R}_0 .
14 $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)^T = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Al plantear este tipo de vínculos entre vectores y
15 haciendo uso de la propiedad para matrices ortonormales de la Ecuación 1.1
16 es posible deducir las Expresiones (1.2) y (1.3).

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (1.1)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r^g)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r^g \bar{\mathbf{R}}_i \quad (1.3)$$

17 El propósito de la descripción anterior, algo intrincada y engorrosa respon-
18 de a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los
19 desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones. Dado
20 un punto arbitrario P, es posible ubicarlo en coordenadas locales y globales tal
21 cual se muestra en la Figura 1.3. En coordenadas locales sus grados de libertad
22 son: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra \mathbf{u}_P , y sus desplazamientos

1 angulares con el nombre $\overline{\theta_i^P}$. Los siete grados de libertad se compactan en el
2 vector $\mathbf{d}_i^P = (\mathbf{u}_P, \overline{\theta_i^P})$. Ahora bien, es posible desglosar el desplazamiento axial
3 \mathbf{u} en tres componentes según los vectores \mathbf{r}_i . Al vector desplazamientos de P
4 en función de la base \mathbf{r}_i se le denomina \mathbf{d}_r .

5 Los desplazamientos de la viga en el punto P también se pueden expresar
6 en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas $\mathbf{d}_g =$
7 $(\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$. Esta tienen origen en la configuración de referencia o material hasta
8 la deformada como se muestra en la Figura 1.3.

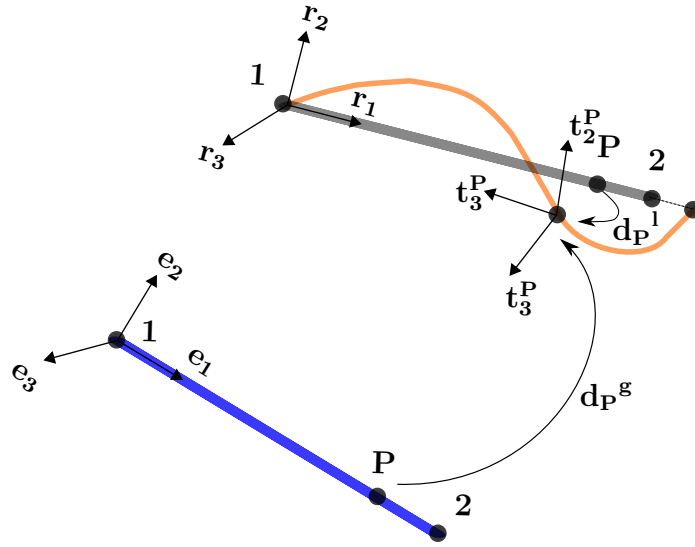


Figura 1.3: Desplazamientos locales y globales del nodo P

9 Acorde con los desplazamientos presentados anteriormente, es propicio cal-
10 cular sus diferenciales asociados. Estos emplearan un rol esencial para el cálculo
11 de matrices tangentes y fuerzas internas. A continuación las Ecuaciones (1.4)
12 y (1.5) definen las variaciones de los desplazamientos locales y globales respec-
13 tivamente.

$$\delta \mathbf{d}_l = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T \quad (1.4)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^g, \delta \mathbf{u}_2^g, \mathbf{w}_1^g, \mathbf{w}_2^g]^T \quad (1.5)$$

14 Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, se desarrollan los dife-
15 renciales asociados a las transformaciones de giro \mathbf{R}_r^g , \mathbf{R}_i^g , \mathbf{R}_0 y $\bar{\mathbf{R}}_i$. Para esto,
16 primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla
17 1.1. Las entradas de \mathbf{R}_r y \mathbf{R}_i^g se hallan siguiendo las Ecuaciones (1.6) y (1.7)

1 a continuación:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (1.6)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (1.7)$$

2 Los versores \mathbf{r}_i se hallan a partir del vector director \mathbf{r}_1 que apunta del nodo
 3 1 al 2. Es por esto que es preciso definirlo en función de las posiciones iniciales
 4 de los nodos en coordenadas globales \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , sus desplazamientos \mathbf{u}_1^g y \mathbf{u}_2^g y
 5 el largo l_n una vez deformado.

$$l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\| \quad (1.8)$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1}{l_n} \quad (1.9)$$

6 El vector auxiliar \mathbf{p} surge se define para hallar primeramente los vectores
 7 \mathbf{r}_i y partir de estos la base \mathbf{t}_i . Estos versores son dinámicos y solidarios al
 8 movimiento. Están unidas a la configuración rígida y local respectivamente.
 9 El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la
 10 necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen
 11 \mathbf{p} , \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 en la Ecuación (1.10):

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ 1 \ 0]^T \quad (1.10)$$

12 En la expresión anterior la matriz \mathbf{R}_0 se obtiene colgando los vectores \mathbf{e}_i
 13 escritos como combinación lineal de la base \mathbf{E}_i . Una vez calculada esta matriz y
 14 evaluado las expresiones de la Ecuación (1.10) se obtienen los restantes versores
 15 directores de la componente rígida. Esto es:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 \quad (1.11)$$

16 Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones
 17 de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de
 18 variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}}_i = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (1.12)$$

En la Ecuación (1.12) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de diferenciales matriciales. Como la transformación \mathbf{R}_0 comunica la configuración indeformada y ambas configuraciones son fijas, su matriz es constante. Por lo tanto, su variación es nula. A diferencia de las matrices de giro $\overline{\mathbf{R}}_i$ y \mathbf{R}_i^g sus variaciones pueden hallarse según las Ecuaciones (1.13) y (1.14) respectivamente.

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g \quad (1.13)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r \quad (1.14)$$

En la ecuación (1.14) el término $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$ refiere a la operación skew del vector de ángulos de la componente rígida. Esta operación simplifica el producto vectorial de forma matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a matrices de rotación. La función aplicada al vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ toma la siguiente forma:

$$\text{Skew}(\boldsymbol{\Omega}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

En función de lo descrito anteriormente resta vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las variaciones globales. Para esto se definen las matrices \mathbf{E} y \mathbf{G} según las Ecuaciones (1.16) (1.17).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g \quad (1.16)$$

Notoese que las matrices \mathbf{R}_r tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas dimensiones, $\mathbf{0}$ es una matriz nula de 3x3 e \mathbf{I} una matriz identidad del mismo número de filas y columnas. De forma subsiguiente \mathbf{E} posee 12 entrada en filas y columnas asociadas a los 12 grados de libertad por elemento.

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}^g}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{1} : \mathbf{6}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta/l_n & \eta_{12}/2 & -\eta_{11}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{7} : \mathbf{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta/l_n & \eta_{22}/2 & -\eta_{21}/2 & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la columna 1 y 12 de la matriz \mathbf{G} las entradas son nulas ya que los desplazamiento angulares globales no dependen de los estiramientos axiales de los nodos. Además, los parámetros η se calculan realizando los cocientes entre las componentes de los vectores \mathbf{p}_j y \mathbf{p}_{ij} según la Ecuación (1.18). Siendo el vector p_j el producto $\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}$ y \mathbf{p}_{ij} la multiplicación de $\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$.

$$\eta = \frac{p_1}{p_2}, \quad \eta_{11} = \frac{p_{11}}{p_2}, \quad \eta_{12} = \frac{p_{12}}{p_2}, \quad \eta_{21} = \frac{p_{21}}{p_2}, \quad \eta_{22} = \frac{p_{22}}{p_2}, \quad (1.18)$$

La relación entre los diferenciales anteriores, se pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos de ángulos locales en términos globales. Tal cual se expresa en la Ecuaciones (1.19) donde la matriz \mathbf{P} queda definida. Esto es de sumo interés ya que para el cálculo de fuerzas internas las variables causa y efecto de su generación son los desplazamientos locales. Por ende resulta imprescindible calcular su variación en términos globales.

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (1.19)$$

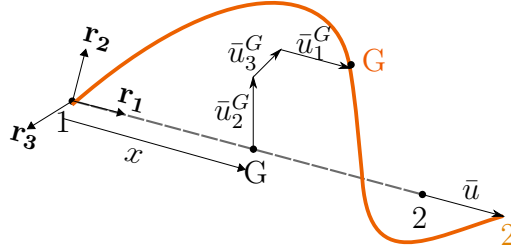
Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coordenadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar \mathbf{r} que vincula los incrementos del desplazamiento axial $\delta \bar{u}$ con los globales. Esto permite escribir la Ecuación (1.4) en relación a (1.5) haciendo uso de la expresión que prosigue (1.20)

$$\delta \bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3} \mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3}] \quad (1.20)$$

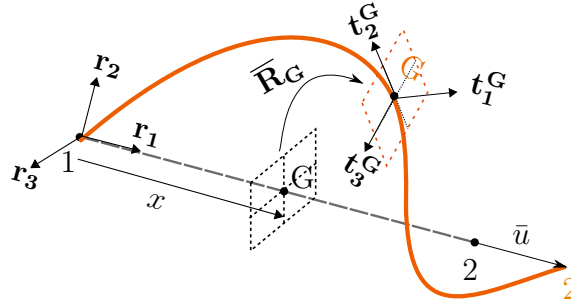
1.1.2. Formulación local

La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este apartado, se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 1.1.3.

El movimiento local de una sección ubicada a una distancia x de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir de la rotación y traslación de la sección correspondiente a su centroide G . Una ilustración de esto se muestra en la Figura 1.4, donde la configuración rígida se identifica en punteado y la deformada en color naranja.



(a) Esquema de desplazamientos locales



(b) Esquema de ángulos locales

Figura 1.4: Ilustración grados de libertad locales

El movimiento de la base \mathbf{t}_i en respecto del sistema \mathbf{r}_i^G esta dado por los desplazamientos \bar{u}_3 según el versor \mathbf{r}_3^G y análogamente para los vectores \bar{u}_2 y \bar{u}_1 . Esto determina la ubicación del baricentro G . Su orientación se define a partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores \mathbf{t}_3^G y \mathbf{t}_2^G dentro del plano y un versor perpendicular \mathbf{t}_1^G . La transformación $\bar{\mathbf{R}}_G$ permite encontrar los transformados de la base \mathbf{r}_i^G etiquetados con las letras \mathbf{t}_i^G . Por último se observa el desplazamiento axial de la barra \bar{u} correspondiente al del

1 nodo 2 en la dirección \mathbf{r}_1 .

2 Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las
3 hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para
4 los desplazamientos axiales \bar{u}_1 y para los ángulo de torsión θ_1 . Por la contraria,
5 tanto para los desplazamientos transversales \bar{u}_2 y \bar{u}_3 como para los ángulos de
6 flexión, las interpolaciones es través de polinomios cúbicos. Estas funciones
7 interpolantes se detallan en las Ecuaciones (1.21), 1.22 y (1.23).

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0} \quad (1.21)$$

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (1.22)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right) \quad (1.23)$$

8 Para un punto ubicado a una distancia x del nodo 1 según el vector \mathbf{r}_1
9 es posible calcular los desplazamientos locales en la base \mathbf{r}_i . Dado el punto
10 arbitrario G que se desplace en el sistemas de coordenadas locales según el
11 vector \mathbf{d}_1^G . Los valores en términos de la componente rígida \mathbf{r}_i se calculan
12 aplicando la Ecuación 1.24.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G \quad (1.24)$$

13 Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nu-
14 las es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas.
15 De esta forma se construyen las matrices \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 . Estas expresan los despla-
16 zamientos transversales \bar{u}_2, \bar{u}_3 como también los ángulos $\bar{\theta}_1^G$ y $\bar{\theta}_2^G$ y $\bar{\theta}_3^G$ según
17 los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales $\bar{\theta}_1$ y $\bar{\theta}_2$ para el
18 nodo 1 y 2 respectivamente. Esta artimaña analítica se expresa a continuación
19 en las Ecuaciones (1.25) y (1.26):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_1 = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Las hipótesis de Bernoulli desprecian las deformaciones por fuerzas cortantes, esto se refleja en sus polinomios de interpolación. Esta premisa no tiene perjuicios sobre la aplicación con la que se modelará el elemento. La estructura de cables es extremadamente esbelta, con relaciones de diámetro respecto a largo ínfimas. Por la tanto, las deformaciones por cortante son efectivamente despreciables respecto a las inducidas por los momentos flectores.

1.1.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura ?? queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa en según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$OG = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (1.27)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente definidos en (1.27) y haciendo uso la matriz auxiliar \mathbf{N} es posible escribir los desplazamientos del baricentro y su diferencial asociado.

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad N_2 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (1.28)$$

$$OG = N_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + N_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (1.29)$$

$$\delta OG = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_1 \quad (1.30)$$

La expresión presentada (1.30) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta el cálculo de su magnitud, ya que esos grados de libertad se encuentran

1 solidarios a sistemas de coordenadas móviles. Para solucionar este problema,
 2 se sustituyen las Ecuaciones (1.16), (1.17), (1.19) y (1.13) lográndose de este
 3 modo, escribir a $\delta \mathbf{u}$ en coordenadas globales. Además se compacta la notación
 4 definiendo la matriz \mathbf{H}_1 según la Ecuación (1.31).

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r(\mathbf{N} + \mathbf{P}_1\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_1\mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g \quad (1.31)$$

5 Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares
 6 de las componentes locales, definidas en la Ecuación (1.4), son despreciables
 7 frente a los de la componente rígida. Para el autor **Le2014**, debido a sus
 8 cambios de magnitud entre miseraciones, no hay diferencias asociadas a los
 9 incrementos de ángulos locales y rígidos. Esto es: $(\delta \overline{\theta_{ri}} = \overline{\delta \mathbf{w}_i})$.

10 Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magni-
 11 tudes angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa
 12 se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según se
 13 establece en la Ecuación

$$\delta \mathbf{w}^g(\mathbf{OG}) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r(\mathbf{P}_2\mathbf{P} + \mathbf{G}^T)\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_2\mathbf{E}^T\delta \mathbf{d}_g \quad (1.32)$$

14 1.1.2.2. Velocidades y aceleraciones

15

16

17 Las magnitudes dinámicas desempeñan un papel primordial en el análisis im-
 18 plementado. Tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en
 19 términos globales. De igual modo, que en la Sección 1.1.2.1, se obtienen sus
 20 diferenciales asociados. Derivando respecto al tiempo la Ecuación (1.31) se de-
 21 ducen las velocidades traslacionales según la Expresión (1.33). Al aplicar la
 22 regla del producto en (1.33) se halla la aceleración lineal del centro de masa
 23 del elemento en (1.34).

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (1.33)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T\delta \dot{\mathbf{d}}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r\mathbf{H}_1\mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r\dot{\mathbf{H}}_1\mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{E}}^T)\delta \mathbf{d}_g \quad (1.34)$$

24 Para calcular las igualdades anteriores hace falta evaluar las derivadas tem-

1 porales de las matrices \mathbf{E} y \mathbf{R}_r . Esta operatoria matricial, se traduce en derivar
2 cada una de las entradas que integran la matriz. Como la variable \mathbf{E} depende
3 de \mathbf{R}_r se calculan inicialmente sus derivadas, para luego sustituirlas en $\dot{\mathbf{E}}$. Esto
4 se realiza mediante la expresión en variaciones (1.14) y resulta $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}$. Al
5 sustituir esta expresión en la derivada de $\dot{\mathbf{E}}$ se deduce la ecuación que prosigue:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{E}_t \quad (1.35)$$

6 El valor skew de los desplazamientos globales sobre la componente rígida $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}$
7 se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación (1.15), aplicado al vector
8 $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$. Además para simplificar la notación a futuro, se condensa la
9 Expresión (1.34) definiendo la matriz \mathbf{C}_1 como se enseña a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t \quad (1.36)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (1.37)$$

10 Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simplificó
11 la nomenclatura para evitar el abuso de notación. Derivando la Ecuación (1.32)
12 respecto a la variable temporal. se deduce la velocidad angular a continuación:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (1.38)$$

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (1.39)$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (1.40)$$

13 Una descripción detallada puede encontrarse en **Le2014**. Dentro del
14 apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las deri-
15 vadas temporales de las matrices \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 . También es posible escudriñar la
16 deducción de las matrices \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .

1.1.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (**Le2014**) y (**battini2002co**). Acompasando con el avance histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente los vectores de fuerza interna y su matriz de rigidez asociada, para luego ahondar en la incorporación de términos dinámicos.

1.1.3.1. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial fl_1 , dos momentos flectores M_1^1 , M_2^1 y un momento torsor M_3^1 para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección análoga a los desplazamientos locales para las fuerzas internas, se presenta en la Ecuación (1.41).

$$\mathbf{f}_i = [fl_1 \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2] = [fl_1 \ \mathbf{m}] \quad (1.41)$$

Tanto las magnitudes de fuerza interna como inercial se calcularán inicialmente para coordenadas locales, donde su cálculo es relativamente sencillo, para luego transcribir estos resultados en términos globales. Con este cometido se define la matriz \mathbf{B} según se expresa en la Ecuación (1.42).

$$\delta \mathbf{d}_i = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_i. \quad (1.42)$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Esta primer transformación en la Figura 1.3, refiere a escribir los desplazamientos locales en términos de los rígidos ($\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración rígida a la indeformada ($\delta \mathbf{d}_i \rightarrow \delta \mathbf{d}_g$). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en

1 función de coordenadas estáticas y globales.

2 Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares \mathbf{G} y \mathbf{E} , en las Ecuaciones
3 (1.16) y (1.17) es posible vincular los ángulos diferenciales locales $\delta\bar{\theta}_i$ con
4 los incrementos globales $\delta\mathbf{d}_g$. Esto permite conocer los momentos flectores y
5 torsos de la viga en coordenadas globales.

6 Análogamente el vector auxiliar \mathbf{r} contiene a \mathbf{r}_1 según el sentido axial de la
7 barra, por lo que reescribir este permite expresar la fuerza de directa f_{a1} en
8 términos de la base \mathbf{E}_i . Al unir los razonamientos detallados en los párrafos
9 anteriores, se obtienen las Ecuaciones (1.43) y (1.44) para el cálculo de la fuerza
10 interna y su diferencial:

$$\mathbf{F}^g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P}\mathbf{E}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (1.43)$$

$$\delta\mathbf{F}^g = \mathbf{B}^T \delta\mathbf{f}_1 + \delta\mathbf{r}^T f_{a1} + \delta(\mathbf{E}\mathbf{P}^T) \mathbf{m} \quad (1.44)$$

11 Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés obtener sus de-
12 rivadas respecto de los desplazamientos. La matriz tangente representa esta
13 magnitud y es un operador indispensable para la resolución mediante méto-
14 dos numéricos iterativos. Este cálculo de derivadas respecto a desplazamientos
15 globales de la expresión (1.43) concluye en la Ecuación (1.45) a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{B} + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{f}_1)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (1.45)$$

16 Operando con la regla del producto y sustituyendo la Ecuación (1.44) para
17 el diferencial para la fuerza interna la matriz tangente resulta :

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a} \mathbf{r} \quad (1.46)$$

18 La matriz \mathbf{B} permite realizar el cambio de coordenadas $\delta\mathbf{d}_a$ a $\delta\mathbf{d}_g$, de acuer-
19 do con lo definido en (1.42). Esta transformación de cambio de base multiplica
20 la variable \mathbf{K}_1 correspondiente al aporte de rigidez local del elemento. Esta
21 depende de los estiramientos y rotaciones de la viga en su configuración local
22 y también de la ley material implementada. Esto evidencia la versatilidad del
23 planteo corrotacional ante diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta
24 modificar la matriz \mathbf{K}_1 .

25 En la Ecuación (1.46) la matriz \mathbf{D} es anti-simétrica y se calcula en función

de los productos internos de los vectores \mathbf{e}_i , esta aporta la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial f_{l1} de la barra. Por otra parte, la matriz auxiliar \mathbf{Q} se halla a partir del producto de \mathbf{P} y los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, y proviene de la componente no lineal de los momentos. Por último, se define el vector \mathbf{a} agrupando así el resto. Dichas defunciones se encuentran en las siguientes Ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n}(\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (1.47)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (1) \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (2) \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (3) \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}} (4) \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (1.46) es asimétrica, sin embargo según **Rankin1986** esta puede ser simetrizada sin perder la convergencia cuadrática para el método de Newton Raphson (N-R), siempre y cuando momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia del vector de fuerza interna el método debe converger **Rankin1986**.

1.1.3.2. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes asociadas. El atractivo principal de la referencia **Le2014** se fragua en la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de complejidad matemático no permitía desarrollarlas **Crisfield**. Esta coherencia se debe a la cabal derivación analítica del vector de fuerzas inerciales según el planteo cinemático de las variables descritas en 1.1.3. El abordaje será análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad que la magnitud pri-

1 maría será la energía cinética del elemento. Esta propiedad escalar depende
2 de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ($\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$) como también
3 angulares ($\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$). En las ecuaciones (1.49) y (1.50) a continuación, se presen-
4 tan la energía cinética de un elemento y su diferencial. Para la obtención de la
5 Expresión se aplicó (1.50) la regla del producto de diferenciales y el teorema
6 de Leibniz para integrales de extremos fijos.

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} \quad (1.49)$$

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] d\mathbf{l} \quad (1.50)$$

7 Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subíndices "g" para las
8 magnitudes dinámicas (\mathbf{u}, \mathbf{w}) y sus respectivas derivadas. De igual forma, las
9 variables del integrando en las Ecuaciones (1.49) y (1.50) se omitió la nomen-
10 clatura OG referida al centroide del área transversal a la viga. Los elementos
11 serán de área constante siendo A_ρ el producto del área transversal y la densidad
12 del material, análogamente la matriz \mathbf{I}_ρ es el tensor de inercia en la configura-
13 ción deformada. Si se conoce el tensor en la configuración de referencia este se
14 puede obtener al aplicarle las rotaciones \mathbf{R}^g y \mathbf{R}_o consecutivamente.

15 Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsa-
16 bles del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar
17 el vector de fuerza inercial se obtienen las matrices tangentes dinámicas. Esto
18 se expresa en las Ecuaciones (1.51) y (1.52).

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}^g \quad (1.51)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K} \delta \mathbf{d}_g \quad (1.52)$$

19 En la Ecuación 1.52 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de
20 ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los des-
21 plazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa
22 consistente \mathbf{M} se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, con-
23 secutivamente la matriz \mathbf{C}_k giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo \mathbf{K} ,
24 se le llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz cen-
25 trifuga. Determinados autores **cardona1988beam** y **hsiao1999consistent**

1 proponen considerar unicamente \mathbf{M} , sin embargo exhaustivos estudios en
2 (**hsiao1999consistent**) prueban que agregar la matriz \mathbf{C}_k mejora el desem-
3 peño computacional para numerosos casos.

4 Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector
5 de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta
6 idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la
7 energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino
8 también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección
9 1.1.2.2.

10 Sustituyendo la Ecuación (1.52) en (1.50) se halla una fórmula para la
11 fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al
12 integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (1.34), (1.37),
13 (1.38) y (1.40) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra
14 a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \quad (1.53)$$

15 Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expre-
16 siones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el
17 diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a
18 cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices.
19 Finalmente esto se expresa de forma matemática en las Ecuaciones (1.55) y
20 (1.56).

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (1.54)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \right\} d_l \right] \mathbf{E}^T \quad (1.55)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[\int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) + \dots \right\} \right] \mathbf{E}^T \quad (1.56)$$

$$\dots \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho}) d_l \quad (1.57)$$

1 Capítulo 2

2 Metodología

3 2.1. Aspectos de modelado computacional

4 2.1.1. Ecuación de equilibrio

5 En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámi-
6 co con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado
7 registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta impres-
8 cionable formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis
9 que subyacen a las expresiones postuladas en (Le2014). Por añadidura, se
10 construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no
11 lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

12 Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuer-
13 zas internas \mathbf{f}_{int} , inerciales \mathbf{f}_{ine} y externas \mathbf{f}_{ext} . Este equilibrio es equivalente
14 al postulado de PTV donde el incremento diferencial en la energía interna
15 y cinética se debe a un trabajo externo. La Ecuación de balance (2.1) debe
16 satisfacerse para todo instante temporal, en particular para $t + \Delta_t$. Dadas
17 determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de re-
18 ferencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese
19 instante. Estas son: el desplazamientos $\mathbf{d}(t + \Delta_t)$, las velocidades $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$
20 y aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$. Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente
21 de manera exacta en la Ecuación (2.1).

$$\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t)) - \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}(t + \Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

1 Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables constru-
 2 yen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta.
 3 El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecua-
 4 ción a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como
 5 consecuencia que la Ecuación (2.1) ya no será nula sino igual a un resto \mathbf{r} . A su
 6 vez, tal y como se detalla en las Ecuaciones (2.2) y (2.3), los métodos numéricos
 7 para la solución de problemas dinámicos, escriben las variables de aceleración
 8 y velocidad en función de los desplazamientos. Por lo tanto indirectamente,
 9 el vector resto depende unicamente de dicha magnitud. Para diferenciar las
 10 variables aproximadas de las exactas, se introduce la siguiente nomenclatura:
 11 $(\mathbf{d}(t + \Delta_t) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_t})$, $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ y $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$.

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_v(\mathbf{d}_t) \quad (2.2)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_a(\mathbf{d}_t) \quad (2.3)$$

12 Según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, se buscan las apro-
 13 ximaciones cinemáticas tal que el residuo para un instante $t + \Delta_t$ sea próximo
 14 al vector nulo. Esto se expresa matemáticamente en Ecuación (2.4).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) &= (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) + \dots \\
 &\dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

15 Por otro lado, según el método
 16 de N-R presentado en **quarteroni2010numerical** es posible construir una
 17 sucesión iterativa en k , de forma tal que en el paso siguiente, el vector resto se
 18 acerque al nulo. Para aplicar esto se utiliza el teorema de Taylor aplicado a la
 19 función resto, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}|_k \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

20 Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena apli-
 21 cada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas
 22 en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se

1 presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}\end{aligned}\quad (2.6)$$

2 En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar
3 las derivadas de la función residuo respecto de: desplazamientos, velocidades
4 y aceleraciones. Estas son las matrices tangentes \mathbf{K}_g \mathbf{M} y \mathbf{C}_k descritas en la
5 Sección 1.1.3. Incorporándolas se llega a:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \right|_k = \left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k \quad (2.7)$$

6 Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (2.7) de N-R se halla el
7 paso en desplazamientos en $k + 1$ a partir de las magnitudes en k $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}$.
8 Matemáticamente:

$$\left(\mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}} \mathbf{C}_k \right) \Big|_k^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k)) = \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (2.8)$$

9 Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de reso-
10 lución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones F_a y F_v . Para
11 esto se implementó el Método de HHT presentado a continuación en La sección
12 2.1.2.

13 2.1.2. Resolución numérica mediante HHT

14 Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algorit-
15 mo de Newmark presentado en **newmark1959method**. Según el artículo
16 **hilber1977improved** el método de HHT, es incondicionalmente estable pa-
17 ra la integración de ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica
18 que el paso de tiempo puede incrementarse considerablemente conservando la
19 convergencia numérica del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan
20 representar modos de baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la
21 energía del sistema, no depende del incremento de tiempo elegido. Comple-
22 mentario a esto, evita la aparición indeseada de altas frecuencias numéricas,
23 sin eliminar los modos de baja frecuencia endógenos a la estructura.

En la publicación (**hilber1977improved**) se compara el método de HHT con otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser: el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark:. El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para la aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en **Le2014**, resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

Para este abordaje inicialmente se deben distinguir las magnitudes lineales de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Se presentan entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades lineales globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán inicialmente en términos de los parámetros de Newmark α y β para luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones de actualización para el instante $t + \Delta_T$ se escriben:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{y}}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t\end{aligned}$$

Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros α_{NW} y β_{NW} en términos del valor de α_{HHT} . Esto se realiza mediante las Ecuaciones (2.11) y (2.12). En estas funciones, es posible notar las equivalencias, parentescos y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con $\beta_{NW} = 1/2$ y $\alpha_{NW} = 1/4$ se logra ajustando el parámetro $\alpha_{HHT} = 0$.

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (2.11)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (2.12)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro α_{HHT} y el incremento Δ_T ente dos tiempos consecutivos t y $t + \Delta_t$.

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \quad (2.14)$$

1 A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales,
2 las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este
3 tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. Es por esto, que los
4 vector de velocidades y aceleraciones angulares para el paso $k+1$, en el instante
5 $t + \Delta_t$, deben calcularse según las Ecuaciones (2.15) y (2.16) presentadas en la
6 referencias (ibrahimbegovic1998finite) y (ibrahimbegovic2002energy).

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} \left[\frac{\alpha}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}} \theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} + \frac{(\beta - 0.5\alpha) \Delta_{\mathbf{t}}}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} \right] \quad (2.15)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} \left[\frac{1}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}^2} \theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} - \frac{1}{\beta \Delta_{\mathbf{t}}} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}} - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} \right] \quad (2.16)$$

7 En las Ecuaciones (2.15) y (2.16) la transformación $\Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}$ es la composición
8 de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\Lambda_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} = \exp(\widetilde{\theta_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}}) = \mathbf{R}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}} (\mathbf{R}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{g}})^{\mathbf{T}} \quad (2.17)$$

9 Un procedimiento análogo al de las funciones angulares se aplican a las
10 lineales. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones
11 expresadas en (2.15) y (2.16).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2 \Delta_T} \mathbf{T}_{\mathbf{s}}^{-\mathbf{T}}(\theta_{\mathbf{1},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (2.19)$$

12 Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones
13 (2.18), (2.19), (2.13) y (2.14) al definir convenientemente la matriz $\mathbf{B}_{\mathbf{t}}$. En
14 función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclaracio-
15 nes globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas
16 relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{1,t+\Delta_t}^g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-T}(\theta_{2,t+\Delta_t}^g) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (2.21)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_g = \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{g,t+\Delta_t} \quad (2.22)$$

Al escindir las Ecuaciones (2.21) y (2.22) se identifican las funciones F_a y F_v de la sección 2.1.1. Estas relaciones matemáticas deben de integrarse a la Ecuación linealizada de equilibrio (2.8) para obtener el incremento en k que permita conocer el vector desplazamientos en el paso $k + 1$ para el instante $t + \Delta_T$. Finalmente, eso se plantea en la Ecuación (2.23).

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) = - \left(\mathbf{K}_g + \left(\frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \right) \mathbf{M} \mathbf{B}_t + \left(\frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \right) \mathbf{C}_k \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} \quad (2.23)$$

Se aclara que para despejar la Ecuación (2.23) anterior, la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las matrices que la integran (de masa, centrifuga y tangente). Las matrices tangentes fueron simetrizadas .artificialmentecomose aclaró anteriormente, manteniendo el orden de convergencia de N-R. Las matrices centrifugas y de masa devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros α_{HHT} son menores a uno, en general en el intervalo $[-0.1; 0.1]$, la suma de esta matrices suele ser definidas positivas. Por lo que \mathbf{K}_{tot} será invertible. Por último es importante esclarecer que para este trabajo, si bien se consideraron las funciones de actualización angulares para los incrementos, el angulo se sumo de forma aditiva. Lo cual es una hipótesis inconsciente que diverge de lo postulado en la bibliografía consultada.

2.1.3. Implementación numérica en ONSAS

En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el software: *An Open Non Linear Structural Analysis Solver* (ONSAS). Este código de carácter abierto y se desarrolló de forma general integrando distintos elementos, materiales y geometrías dentro del mismo modelo. Además permite resolver mediante diversos algoritmos numéricos y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código abierto *Paraview* difundido en (ahrens2005paraview).

Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser pionero de la formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en los trabajos (Battini2002) (Le2014), sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable. A continuación en ?? se detalla un pseudo-código panorámico sobre el esqueleto ejecutado en ONSAS.

En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo. Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite incrementar la variable temporal en pasos de Δt . Además debe evaluar los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de \mathbf{f}_{ext} . Para resolver el estado del sistema en el tiempo $t + \Delta T$, hace falta resolver la ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (2.4). Con este cometido, se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo ?? se omitió la notación en $t + \Delta T$ para simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramente el cálculo del incremento que determina el paso $k + 1$, a partir de los desplazamientos en el paso actual k . Luego se actualizan las variables cinemáticas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza mientras que la variable booleana `finDisp` sea nula. La alteración de estado, se encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos tol_u , en vector de fueras residuales tol_{res} y número máximo de iteraciones max_{Iter} . Las

Algorithm 1 Pseudocódigo de iteración general.

Require: : $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta_T, \alpha_{HHT}$

Iniciar cinemáticas: $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$

Iniciar tiempo: $t \leftarrow t_0$

while $t < t_f$ **do**

 finDisp = 0

 Definir: $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$.

 Evaluar $\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t}$

while FinDisp = 0 **do**

 Calcular fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$ y $\text{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$.

 Calcular y ensamblar matrices Tangentes: $\mathbf{K}_g^k, \mathbf{M}^k, \mathbf{C}_k^k$.

 Despejar $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$

 Actualizar desplazamientos globales: $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$

 Recalcular velocidades y aceleraciones lineales: $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$.

 Recalcular velocidades y aceleraciones angulares: $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$.

 Ensamblar velocidades: $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$

 Ensamblar aceleraciones: $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$

 Actualizar fuerzas: $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$ y $\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})$.

 Calcular:

if $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\| \vee \|\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\| \vee k \geq \max_{iter}$
 then

 finDisp = 1

end if

end while

 Actualizar $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}$.

$t = t + \Delta_T$

end while

1 primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese
2 tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas
3 desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la
4 variable `finDisp` alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor
5 del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

6 Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante
7 profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices
8 dinámicas tangentes. Este código se agregó a [ONSAS](#) procurando su versatili-
9 dad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden
10 al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo
11 pseudocódigo de la función [elementbeamforces.m](#) implementada.

12 El diagrama presentado en el Pseudocódigo [??](#), puede dividirse en tres divi-
13 siones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo
14 constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matri-
15 ces de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y defor-
16 mada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las
17 fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de
18 la función [beamLocalStaticForces](#). Desafortunadamente, tanto entradas como
19 salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas loca-
20 les. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos
21 locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego
22 integrarlas al código general expuesto en [??](#).

23 De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de
24 fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las
25 expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas
26 están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia x en la configuración
27 de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie
28 de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.

29 Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector
30 de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadra-
31 tura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último,
32 los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas,
33 como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices
34 de todo el sistema en coordenadas globales.

Algorithm 2 Pseudocódigo elementBeamForces.

Require: A_ρ $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$ E ν G \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{d}_g^e
for 1 **to** N_{elem} **do**
 Separar vector desplazamientos $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$
 —————Cálculo de matrices de rotación—————
 Computar matrices de rotación global \mathbf{R}_g^1 y \mathbf{R}_g^2
 Evaluar matriz de rotación de referencia \mathbf{R}_o
 Hallar \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q} y calcular \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 .
 Evaluar matriz de rotación rígida \mathbf{R}_r
 Calcular matrices de rotación locales $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$
 ————— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente —————
 Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento l_0 y l $u = l - l_0$
 Invertir \mathbf{R}_i y hallar ángulos locales $\bar{\theta}_i$.
 Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna $\mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$ y matriz tangente local $\mathbf{K}_T^{\text{loc}}$.
 Construir matrices auxiliares: \mathbf{H} \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{r}
 Transformar a coordenadas globales: $\mathbf{K}_T^g \leftarrow \mathbf{K}_T^{\text{loc}}$ y $\mathbf{f}_{int}^g \leftarrow \mathbf{f}_{int}^{\text{loc}}$.
 ————— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas —————
 Todas las variables dependen de la coordenada (\mathbf{x})
 Definir funciones de interpolación N_i
 Calcular matrices: $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$, \mathbf{P}_2 , \mathbf{N} y \mathbf{H}_1 .
 Hallar velocidades $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{w}}_r$
 Calcular matrices auxiliares: \mathbf{H}_1 , $\dot{\mathbf{H}}_1$, \mathbf{H}_2 , $\dot{\mathbf{H}}_2$, \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 .
 Hallar las aceleraciones: $\ddot{\mathbf{w}}$ $\ddot{\mathbf{u}}$.
 Girar el tensor de inercia a la configuración deformada: $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$
 Hallar expresiones e integrar en el elemento: \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} y \mathbf{C}_k
 Ensamblar : \mathbf{f}_{ine} \mathbf{M} , \mathbf{C}_k \mathbf{K}_T^g \mathbf{f}_{int}^g
end for

2.2. Aspectos de modelado estructural

2.2.1. Condiciones iniciales y de borde

2.2.2. Modelo de viento

Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas cargas debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir fuerzas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares (lift). Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes, en la capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo. Y luego proyectarla la fuerza neta en la dirección del flujo medio. A diferencia de estas, las fuerzas lift que aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presiones entre el intradós (sona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso. Esta diferencia de presiones puntales entre dos superficies contrarias, genera una circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar ese campo en curva cerrada, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura ?? . Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la componente de lift es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo, garantiza que la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas, ni dinámicas entre las superficies del sólido.

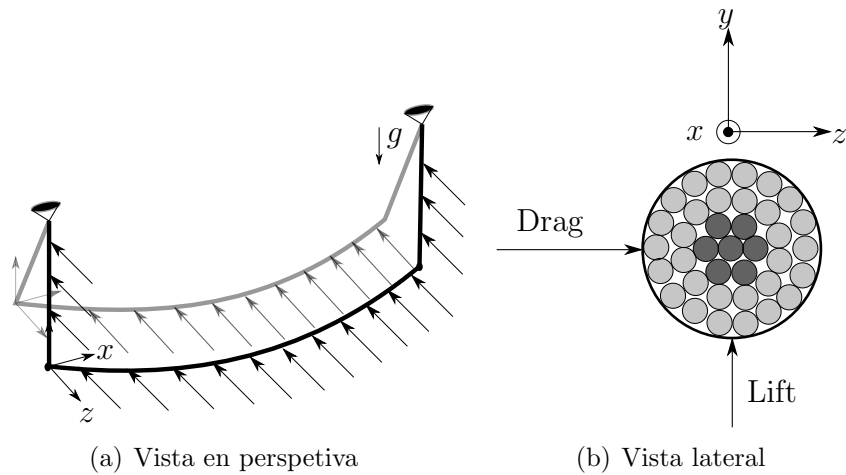


Figura 2.1: Ilustración del viento y sus efectos.

La componente unidireccional del flujo, puede ser desglosada en un termino medido y otro fluctuante $u_v(z, t) = u_m(z, t) + u'(z, t)$. A partir de esto, la

1 velocidad media para un período T toma la expresión de la Ecuación (2.24):

$$u_m(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u_v(t) dt \quad (2.24)$$

2 El valor del periodo T debe ajustarse minimizando la desviación estándar
3 asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la
4 desviación estándar de la velocidad fluctuante y la media para un instante de
5 tiempo dado. Sin embargo, para este trabajo no se consideran las fluctuaciones
6 debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de $T = 1/30$ s
7 y de velocidad media, se extrajo del artículo (**stengel2017measurements**).

8 Considerando el aire como un fluido no newtoneano, ρ su densidad asociada
9 a determinada temperatura, C_d el coeficiente de drag para como función del
10 número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo (“drag”)
11 para un elemento cilíndrico de diámetro d_c y largo l_e se calcula según la Ex-
12 presión (2.25):

$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{\rho(T)C_d(Re)}{2} d_c u_m(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c u_m(t)^2 l_e \quad (2.25)$$

13 Para este cálculo se asumió constantes las magnitudes al interior del ele-
14 mento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto
15 del integrando por el largo del intervalo. Además se para este trabajo la car-
16 ga del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente
17 a la mitad de F_v . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos
18 nodales que estas inducen, se cancelan con los elementos aledaños. Por otra
19 parte, los valores de C_d se extrajeron de las referencias (**Foti2016**) y se ve-
20 rificaron con el estudio para estos coeficientes durante tormentas conectivas
21 (**mara2007effects**). La densidad ρ del aire se consideró la usual para presión
22 atmosférica y una temperatura de 20 °C.

23 **2.2.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas aso-** 24 **ciadas.**

25 En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No
26 obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortigua-
27 miento introducido. Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde
28 el viento tiene determinada componente transversal según z y perpendicular
29 (según y). En la figura 2.2 se indican con el nombre u y v . En esta figura las

1 velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tan-
2 to absoluto. Asimismo en esta imagen se representan las velocidades media
3 y fluctuante u_m y u_a , que sumada a la velocidad v , resulta en el vector V_{tot}
4 formando un ángulo β con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce
5 sobre el conductor, este despliega una determinada velocidad rígida en ambas
6 direcciones identificadas con las letras W_{ry} y W_{rz} .

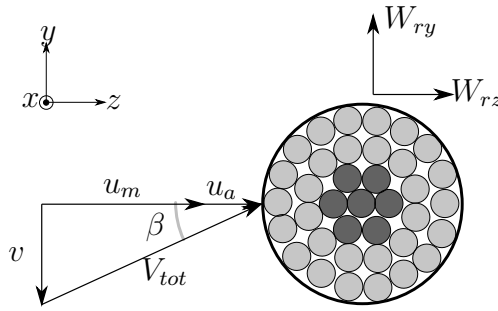


Figura 2.2: Esquema en sistema de referencias absoluto.

7 Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia
8 anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las
9 velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 2.3. Este campo
10 de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de drag F_d y de lift F_l .
11 Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando dos
12 fuerzas F_z y F_y .

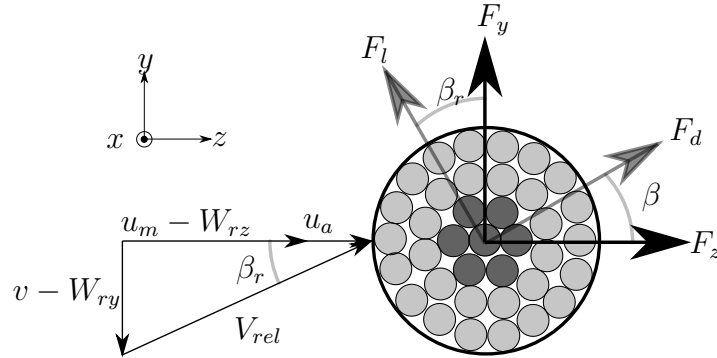


Figura 2.3: Esquema en sistema de referencias relativo.

13 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde
14 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta
15 natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas y
16 dinámicas. La velocidad relativa absoluta, es el cuadrado de los catetos, tal
17 y como se expresa en la Ecuación (2.26). Tomando como hipótesis que las

1 velocidades relativas del rígido y la componente vertical v , son mucho menores
2 que las asociada al flujo medio, en el sentido de z se deduce la Ecuación (2.27).

$$V_{rel}^2 = (u_m + u_a - W_{rx})^2 + (v - W_{ry})^2 \quad (2.26)$$

$$\frac{V_{rel}^2}{u_m} = u_m + 2(u_a - W_{rz}) \quad (2.27)$$

3 La carga de drag postulada en la Ecuación (2.24) se escribe por unidad de
4 longitud y se reescribe en (2.29). Además, se muestra que para las asunciones
5 de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a 0° . Para
6 formular esto matemáticamente se plantean las Ecuaciones (2.29) y (2.28).

$$\tan(\beta) = \frac{v - W_{ry}}{u_m - W_{rz} + u_a} = \frac{\frac{v - W_{ry}}{u_m}}{1 - \frac{W_{rz} + u_a}{u_m}} \approx 0 \quad (2.28)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m + 2(u_a - W_{rz})) u_m \quad (2.29)$$

7 Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes
8 z e y . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas
9 absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de estas
10 se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido.
11 Considerando que el ángulo β es ínfimo y por lo tanto $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$ y
12 $\cos(\beta) = 1$ al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + u_a^2 - 2u_a u_m) \cos(\beta_r) \quad (2.30)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + u_a^2 + 2u_a u_m) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (2.31)$$

13 Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en
14 componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es una
15 promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo,
16 se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes
17 tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un
18 tercer termino surge al desarrollar la Ecuación (2.29). Este factor depende del
19 producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Vinculando al fluido
20 y al sólido, es por esto que recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico.

1 Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sporepresivo el sentido de
2 esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición
3 de fuerzas según z se le llaman \bar{F}_x , F_a , $-D$ a la componente media, alternante
4 y de amoritguamiento dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan
5 a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2) \quad (2.32)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_a^2) \quad (2.33)$$

$$D = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2u_a u_m) \quad (2.34)$$

6 2.2.3. Hipótesis de trabajo

7 Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan
8 las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones
9 de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no el eje central
10 de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio.
11 Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

- 12 1. No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
- 13 2. La velocidad incide en el sentido z de forma perpendicular a la linea.
- 14 3. La velocidad relativa transversal $v - W_r y$ al igual que la componente
15 alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el
16 sentido de z llamada u_m .
- 17 4. La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera
18 despreciable frente al drag.
- 19 5. Para la fuerza en el sentido de z se desprecia la componente fluctuante
20 F_a .
- 21 6. Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico se promedió la velocidad
22 media en un valor constante igual al valor medio para todo el dominio
23 temporal de simulación.

24 El primer supuesto parte del modelo figurado en 2.3, para poder realizar
25 este análisis plano, se obvian las fluctuaciones espaciales en el sentido axial
26 del conductor. Esta asunción no es del todo correcta, pues la turbulencia del
27 fenómeno provoca fluctuaciones en las cargas a lo largo dela linea, cambiando

1 así, su orientación. Esto se asocia directamente con la hipótesis 4, donde la
2 fuerza alternante proveniente de la presencia de vórtices se desprecia.

3 Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje z en la Fi-
4 gura ??, siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipótesis
5 proviene de diferentes trabajos publicados, donde la componente perpendi-
6 cular a la superficie terrestre o ascendente (según y) suele ser significati-
7 vamente menor a la paralela (en el sentido de z) (**duranona2009analysis**)
8 (**stengel2017measurements**) **yang2016nonlinear**. Si bien simplifica lo ha-
9 ce de forma conservadora. Puesto que supone al sistema de transmisión, en el
10 tiempo inicial, dispuesto completamente perpendicular al sentido del viento,
11 es así que este descarga su mayor fuerza sobre el sistema (Hipótesis 2).

12 Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad
13 de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis, se sustenta en
14 la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del
15 peso que se opone a la fuerza de sustentación. De todos modos, esta fuerza en
16 sentido ascendente se despreció frente al drag, consecuencia de la simetría de
17 revolución tangencial del conductor. Esto se establece en la Hipótesis 4.

18 Otra hipótesis a clarificar refiere al amortiguamiento aerodinámico (Hipóte-
19 sis 6). Se utilizó una simplificación adicional en la velocidad de viento para su
20 cálculo. Se consideró una velocidad constante, igual al promedio de viento en
21 todo el dominio temporal. Este es el valor que insertó para el cálculo de D
22 según la Ecuación (2.34). Por último se explicitan las premisas 3 y 5 que fue-
23 ron consideradas para calcular el campo de velocidades relativo y sus fuerzas
24 asociadas.