



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

1

2 Implementación de una formulación  
3 corrotacional en dinámica no lineal y aplicación  
4 al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería

7

Estructural

8

Instituto de Estructuras y Transporte

9

Universidad de la República

10

Montevideo – Uruguay

11

Marzo de 2021



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

1

2

3

4

# Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica

5

Mauricio Camilo Vanzulli Pena

6

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

Dr. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

D.Sc. Prof. Gabriel Usera

7

Montevideo – Uruguay

8

Marzo de 2021

Vanzulli Pena, Mauricio Camilo

Implementación de una formulación corrotacional en dinámica no lineal y aplicación al modelado de líneas de transmisión eléctrica / Mauricio Camilo Vanzulli Pena. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte, 2021.

XX, 131 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Gabriel Usera

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 88 – 94.

1. Elementos de viga corrotacional, 2. Método de los Elementos Finitos, 3. Dinámica estructural, 4. Cables de alta tensión, 5. Transmisión eléctrica. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado Maestría en Ingeniería Estructural Ingeniería Estructural. III. Título.

1 INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

2 

---

3 D.Sc. Prof. Gonzalo Cetrángolo

4 

---

5 M.Sc. Prof. Bruno Bazzano

6 

---

7 D.Sc. Prof. Marcelo Forets

8 Montevideo – Uruguay

9 Marzo de 2021

A mi Madre por su apoyo  
incondicional,  
por enseñarme a aprender y  
enseñar,  
por impulsarme a hablar, a crear  
y amar

# 1 Agradecimientos

2 Agradezco al universo por haberme dado hálito de vida a través de ese río  
3 inefable que fluye entre la casualidad y la causalidad. Por haberme maravilla-  
4 do con la lagrima, la risa y el atrapante mundo del conocimiento. Las raíces  
5 de ese universo son principalmente mi familia, que me nutrieron de valores y  
6 vivencias envueltas de un afecto incommensurable. A mi padre, por haberme  
7 enseñado a remar por mis objetivos, pelear por mis proyectos con determina-  
8 ción, sacrificio y sobre todo, por haberme inculcado que no hay que ganarle a  
9 nadie, únicamente aprender a levantarse. A mi madre por su incondicionalidad  
10 eterna, por transferirme la vocación de la enseñanza. Por enseñarme la diver-  
11 sidad de las inteligencias múltiples y sobre todo, la semilla del amor inmenso.  
12 A Quique por su sabiduría, su visión biocéntrica y su flecha existencial que  
13 atraviesa cualquier tormenta.

14 También agradezco a mis tutores; A Jorge por ser primero un gran ser  
15 humano con una visión fascinante, por enseñarme no solo conocimientos técni-  
16 cos, sino para la vida. Además por su paciencia, constancia y persistencia  
17 para guiarme hacia las salidas en los laberintos. A Gabriel por darme la  
18 oportunidad de dedicarme a la investigación e instruirme desde su experiencia  
19 insoslayable en aspectos estratégicos profesionales.

20 A Flor por convidarme de sus dulces pétalos y por perfumar cada parte  
21 de mi ser con el más sincero y sano amor. Por ser un alero cuando llueve y  
22 dos alas cuando hay sol. Que este camino hubiese sido árido y desolado sin  
23 ella. A Maximiliano por estar siempre latente en mi pensamiento, convertir las  
24 palabras en aves y despertarme un sin fin de ideas. Por enseñarme la senda de  
25 la filosofía, e iluminar el portal donde un punto es la inmensidad, y un segundo  
26 la eternidad.

27 Agradezco enormemente a mis compañeros del IIMPI y del grupo MISEs  
28 por guiarme, apoyarme y cuestionarme en este camino de aprendizaje. Por el  
29 ambiente relajado y distendido que hacen del trabajo una instancia de disfrute.

1        Finalmente, quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrados  
2        (CAP) de la Universidad de la República por viabilizar económicamente es-  
3        ta investigación. También a la Agencia Nacional de Investigación (ANII) por  
4        financiar el proyecto VioLETa "Modelado del efecto del viento sobre líneas  
5        eléctricas de transmisión y su mitigación" que fue el pilar indispensable en este  
6        trabajo.

(Epígrafe:) *Hay una fuerza  
motriz más poderosa que el  
vapor, la electricidad y la energía  
atómica; la voluntad*

Albert Einstein



2 Los sistemas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectados por even-  
3 tos climáticos severos como corrientes descendentes o tornados. Estos even-  
4 tos pueden provocar su desconexión con consecuencias a la integridad de los  
5 componentes potencialmente graves, así como también a la integridad de las  
6 personas circundantes. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte  
7 eventos de salida en servicio. Otro antecedente de este tipo fenómenos, se re-  
8 monta al 10 de marzo de 2002 cuando una tormenta convectiva afectó un área  
9 de alrededor 6500 km<sup>2</sup> en el sur del país (“El tornado de Canelones del año  
10 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#)). La tormenta causó una destrucción masiva para el país  
11 colapsando 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV perte-  
12 necientes a la empresa La Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones  
13 Eléctricas (UTE). De igual modo, unos 700 edificios y 1250 techos de hogares  
14 fueron destruidos según (Durañona, [2015](#)). El costo de reparación de las torres  
15 se estimó en 2 millones de dólares y en simultaneo se gastaron unos 10 millo-  
16 nes de dólares destinados a suplir la red con energía geotérmica, proveniente  
17 de combustibles fósiles (Duranona et al. [2019](#)). Esta problemática en parte  
18 responde a la falencia de las normas internacional como ser *Design criteria of*  
19 *overhead transmission lines*, [2003](#) para considerar fuerzas debidas a fenómenos  
20 de vientos extremos.

21 Este trabajo apuntala la creación de una herramienta capaz de reproducir  
22 el comportamiento de conductores eléctricos, sometidos a perfiles de viento  
23 tipo tormenta convectiva. Para esto, se extendió un planteo de la formula-  
24 ción corrotacional de vigas 3D, considerando componentes aerodinámicos y se  
25 implementó en la herramienta de software libre *Open Non-linear Structural*  
26 *Analysis Solver* ([ONSAS](#)). Con este cometido se desarrollaron tres modelos: el  
27 primero de ellos valida la formulación para un ejemplo clásico en el área corro-  
28 tacional, el segundo es una modificación de un modelo presentado en el trabajo  
29 de (Foti y Martinelli, [2016](#)), referente en simulación estructural de conductores  
30 eléctricos, donde se observan resultados semejantes. Por último, se construye  
31 un ejemplo compuesto por tres torres y seis conductores, integrando elementos  
32 de viga con barras, atacados por un perfil de corriente descendente, extraído

1 de un estudio experimental en el norte de Alemania publicado por Stengel y  
2 Thiele, [2017](#).

3 Finalmente, se concluye que los resultados generados representan un dis-  
4 parador para seguir profundizando en la temática, generando capacidades del  
5 software para emular el fenómeno de manera más precisa y poder así, incluirlo  
6 como una herramienta complementaria durante el diseño de sistemas de tras-  
7 misión. Según los resultados obtenidos, se observa como las tormentas con-  
8 vectivas afectan severamente a las instalaciones, pudiendo causar potenciales  
9 perjuicios graves. De esta forma la metodología planteada en esta tesis cons-  
10 tituye el puntapié inicial para la publicación de un trabajo donde se extiende  
11 la formulación corrotacional de vigas 3D considerando fuerzas aerodinámicas  
12 sobre los elementos.

13 Palabras claves:

14 Elementos de viga corrotacional, Método de los Elementos Finitos, Dinámica  
15 estructural, Cables de alta tensión, Transmisión eléctrica.

# 1 Lista de figuras

2	1.1 Ilustración de balanceos excesivos. Fuente: <a href="#">Noticias24</a> . . . . .	2
3	3.1 Rotaciones a cada configuración. . . . .	21
4	3.2 Descripción de las sistemas de coordenadas corrotacionales. . . .	22
5	3.3 Esquema de desplazamientos locales. . . . .	28
6	3.4 Ilustración grados de libertad locales. . . . .	28
7	4.1 Esquema de condición inicial y de borde. . . . .	40
8	4.2 Ilustración del viento y sus efectos. . . . .	41
9	4.3 Esquema en sistema de referencias absoluto. . . . .	43
10	4.4 Esquema en sistema de referencias relativo. . . . .	43
11	5.1 Disposición geométrica de la estructura. . . . .	59
12	5.2 Perfil de fuerza transversal en el nodo A. . . . .	60
13	5.3 Desplazamientos de control del nodo A. . . . .	61
14	5.4 Desplazamientos de control del nodo B. . . . .	61
15	5.5 Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s. . . . .	62
16	5.6 Desplazamientos en x de los nodos A y B . . . . .	63
17	5.7 Esquema del conductor ASCR 7/26. . . . .	64
18	5.8 Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .	65
19	5.9 Perfil de velocidad progresiva $z$ . . . . .	67
20	5.10 Perfil de fuerza nodal según el eje $z$ . . . . .	67
21	5.11 Desplazamientos del nodo A. . . . .	68
22	5.12 Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado. .	69
23	5.13 Angulo de balanceo $\Phi$ en función de la velocidad media $W(t)$ . .	69
24	5.14 Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo. . . . .	70
25	5.15 Esquema geométrico de cotas principales en la torre. . . . .	72
26	5.16 Ilustración de magnitudes de balanceo. . . . .	73

1	5.17 Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D. . . . .	74
2	5.18 Desplazamientos de los nodos medios B y C. . . . .	75
3	5.19 Curva analítica y numérica carga desplazamiento. . . . .	76
4	5.20 Estructura indeformada y deformada para $t = 400$ s. . . . .	77
5	2.1 Esquema simplificado del problema . . . . .	108
6	2.2 Perfil de velocidad media a lo largo del cable según Stengel y	
7	Thiele, 2017 . . . . .	109
8	2.3 Angulo medio del modelo en contraste con Stengel y Thiele,	
9	2017 . . . . .	110
10	2.4 Curva desfajase ángulo fuerza . . . . .	111
11	2.5 Esquema simplificado del problema 3D . . . . .	112
12	2.6 Configuración adoptada por el primer modo. . . . .	114
13	2.7 Distribución de masas colocadas. . . . .	114
14	2.8 Desplazamiento horizontal de la cadena de aisladora en función	
15	del tiempo con y sin masas. . . . .	115
16	2.9 Ángulo de la cadena de aisladora en función del tiempo con y	
17	sin masas. . . . .	115
18	2.10 Respuesta del angulo de la cadena de aisladora en función del	
19	tiempo. . . . .	116
20	2.11 Datos del ángulo sin procesar y luego de aplicarle una media	
21	móvil . . . . .	116
22	2.12 Contraste de los modelos 2D/3D . . . . .	117
23	2.13 Respuesta del ángulo para tormenta convectiva utilizando una	
24	media móvil y masas sobre el cable . . . . .	118

# <sup>1</sup> Lista de tablas

<sup>2</sup>	3.1	Caracterización de matrices en términos de los sistemas de re-	
<sup>3</sup>		ferencia. . . . .	<a href="#">23</a>
<sup>4</sup>	5.1	Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26 . . .	<a href="#">65</a>
<sup>5</sup>	5.2	Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para $W_{max}$ . .	<a href="#">66</a>
<sup>6</sup>	1.1	Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826 . . . . .	<a href="#">97</a>
<sup>7</sup>	1.2	Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826. . . . .	<a href="#">98</a>
<sup>8</sup>	1.3	Tabla de factores para terrenos según referencia Davenport,	
<sup>9</sup>		<a href="#">1960</a> . . . . .	<a href="#">99</a>

# 1 Lista de símbolos

- 2  $\ddot{\mathbf{w}}$  Aceleración angular en coordenadas globales.
- 3  $\ddot{\mathbf{u}}$  Aceleración lineal en coordenadas globales.
- 4  $\alpha_{HHT}$  Parámetro alpha de HHT característico del método HHT.
- 5  $\alpha_{NW}$  Parámetro alpha característico del método de Newmark.
- 6  $\Phi$  Ángulo de balanceo de la cadena aisladora.
- 7  $\beta_{NW}$  Parámetro beta característico del método de Newmark.
- 8  $x$  Distancia respecto al nodo 1 de la sección con centroide G.
- 9  $\mathbf{x}_1$  Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.
- 10  $\mathbf{x}_2$  Coordenadas del nodo 1 en el sistema de referencia global.
- 11  $\Delta_T$  Incremento temporal.
- 12  $\rho$  Densidad del aire a presión atmosférica y una temperatura de 20°C.
- 13  $d_c$  Diámetro del conductor considerandolo cilíndrico.
- 14  $\mathbf{d}_g$  Desplazamientos globales del elemento.
- 15  $\mathbf{u}^g$  Desplazamientos lineales globales del elemento.
- 16  $\mathbf{w}^g$  Desplazamientos angulares globales del elemento.
- 17  $\mathbf{d}_l$  Desplazamientos locales del elemento.
- 18  $\mathbf{d}_r$  Desplazamientos lineales locales referenciados a la configuración de defor-
- 19 mación rígida.
- 20  $C_d(Re)$  Coeficiente de drag en función del coeficiente adimensionado de Rey-
- 21 nolds.
- 22  $\mathbf{E}_1$  Vector 1 de la base isoparamétrica.
- 23  $\mathbf{E}_2$  Vector 2 de la base isoparamétrica..
- 24  $\mathbf{E}_3$  Vector 2 de la base isoparamétrica.
- 25  $K$  Energía cinética del elemento.
- 26  $fl_1$  Fuerza axial del elemento que integra el nodo i.
- 27  $F_d$  Fuerza de drag sobre el conductor.

- 1  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  Fuerza interna del elemento en coordenadas locales.
- 2  $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$  Fuerza interna del elemento en coordenadas globales.
- 3  $F_l$  Fuerza de lift sobre el conductor.
- 4  $\mathbf{f}_{\text{vis}}$  Vector de fuerzas viscosas.
- 5  $\mathbf{I}_\rho$  Tensor de inercia del elemento en su configuración deformada.
- 6  $\mathbf{f}_k$  Fuerza inercial en coordenadas globales.
- 7  $\mathbf{u}_0$  Condición inicial en desplazamientos aplicada sobre el conductor.
- 8  $\mathbf{K}$  Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 9  $\mathbf{C}_k$  Matriz de giroscópica consistente del elemento en coordenadas globales.
- 10  $\mathbf{M}$  Matriz de masa consistente del elemento en coordenadas globales.
- 11  $\mathbf{K}_g$  Matriz tangente del elemento en coordenadas globales.
- 12  $\mathbf{K}_1$  Matriz tangente local del elemento en coordenadas locales.
- 13  $\mathbf{C}_{\text{vis}}$  Matriz viscosa.
- 14  $M_1^i$  Momento flector del nodo i en la dirección local 1.
- 15  $M_2^i$  Momento flector del nodo i en la dirección local 2.
- 16  $M_3^i$  Momento torsor del nodo i.
- 17  $\mathbf{R}_0$  Matriz de rotación de referencia.
- 18  $\mathbf{R}_1^g$  Matriz de global del nodo 1.
- 19  $\mathbf{R}_2^g$  Matriz de global del nodo 2.
- 20  $\mathbf{r}$  Vector de fuerzas residuales.
- 21  $\mathbf{R}_r$  Matriz de rotación de configuración rígida.
- 22  $\overline{\mathbf{R}}_1$  Matriz de rotación de configuración local del nodo 1.
- 23  $\overline{\mathbf{R}}_2$  Matriz de rotación de configuración local del nodo 2.
- 24  $\tilde{\mathbf{A}}$  Operador Skew aplicado al variable A.
- 25  $\dot{\mathbf{w}}$  Velocidad angular en coordenadas globales.
- 26  $\dot{\mathbf{u}}$  Velocidad lineal en coordenadas globales.
- 27  $q$  Velocidad de viento en el sentido perpendicular al conductor.
- 28  $w$  Velocidad de viento en el sentido transversal al conductor.
- 29  $\mathbf{e}_1$  Vector tangente de la configuración de referencia.
- 30  $\mathbf{e}_2$  Vector normal de la configuración de referencia.
- 31  $\mathbf{e}_3$  Vector bi-normal de la configuración de referencia.
- 32  $l_n$  Largo del elemento deformado.
- 33  $\mathbf{r}_1$  Vector tangente de la configuración de deformación rígida.
- 34  $\mathbf{r}_2$  Vector normal de la configuración de deformación rígida.

- 1  $\mathbf{r}_3$  Vector bi-normal de la configuración de deformación rígida.
- 2  $\mathbf{t}_1^1$  Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 3  $\mathbf{t}_1^i$  Vector tangente de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 4  $\mathbf{t}_2^1$  Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 5  $\mathbf{t}_2^i$  Vector normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 6  $\mathbf{t}_3^i$  Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo i.
- 7  $\mathbf{t}_3^1$  Vector bi-normal de la configuración de deformación no rígida del nodo 1.
- 8  $\overline{\theta}_1$  Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 1.
- 9  $\overline{\theta}_2$  Desplazamientos angulares en coordenadas locales del nodo 2.
- 10  $\bar{u}$  Desplazamiento axial en coordenadas locales del elemento.



# <sup>1</sup> Lista de siglas

<sup>2</sup> Lista de siglas

<sup>3</sup> **CD** Corrientes Descendentes.

<sup>4</sup> **HHT** Hughes, Hilbert y Taylor.

<sup>5</sup> **IEC** International Electrotechnical Commission.

<sup>6</sup> **MEF** Método de Elementos Finitos.

<sup>7</sup> **N-R** Newton Raphson.

<sup>8</sup> **TC** Tormentas Convectivas.

<sup>9</sup> **UNIT** Instituto Uruguayo de Normas Técnicas.

<sup>10</sup> **UTE** La Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas

# 1 Tabla de contenidos

2	Lista de figuras	XI
3	Lista de tablas	XIII
4	Lista de símbolos	XVI
5	Lista de siglas	XVII
6	<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
7	1.1 Motivación . . . . .	1
8	1.2 Enfoque . . . . .	3
9	1.3 Estructura de la tesis . . . . .	4
10	<b>2 Estado del arte</b>	<b>6</b>
11	2.1 Historia de la temática . . . . .	6
12	2.2 Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión	
13	eléctrica . . . . .	9
14	2.3 Tormentas convectivas . . . . .	11
15	2.4 Análisis semi-analíticos de conductores . . . . .	13
16	2.5 Análisis corrotacional de vigas . . . . .	16
17	<b>3 Preliminares</b>	<b>20</b>
18	3.1 Cinemática corrotacional . . . . .	20
19	3.1.1 Matrices de rotación . . . . .	21
20	3.1.2 Sistemas de coordenadas . . . . .	22
21	3.1.3 Desplazamientos lineales y angulares . . . . .	24
22	3.2 Formulación local . . . . .	27
23	3.2.1 Variaciones en desplazamientos . . . . .	29
24	3.3 Dinámica corrotacional . . . . .	31

1	3.3.1	Velocidades y aceleraciones . . . . .	31
2	3.3.2	Fuerza interna y matriz tangente . . . . .	33
3	3.3.3	Fuerza inercial y matrices de masa tangentes . . . . .	35
4	<b>4</b>	<b>Metodología</b>	<b>38</b>
5	4.1	Aspectos de modelado físico . . . . .	39
6	4.1.1	Condiciones iniciales y de borde para la estructura . . .	39
7	4.1.2	Modelo de viento . . . . .	41
8	4.2	Aspectos de modelado computacional . . . . .	46
9	4.2.1	Ecuación de equilibrio . . . . .	46
10	4.2.2	Resolución numérica mediante HHT . . . . .	49
11	4.2.3	Implementación numérica en ONSAS . . . . .	53
12	<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>58</b>
13	5.1	Viga en voladizo con ángulo recto . . . . .	58
14	5.2	Modelo simplificado de una linea . . . . .	63
15	5.3	Sistema de transmisión eléctrica . . . . .	70
16	<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>78</b>
17	6.1	Conclusiones técnicas . . . . .	78
18	6.1.1	Sobre el fenómeno . . . . .	78
19	6.1.2	Sobre la metodología . . . . .	79
20	6.1.3	Sobre los resultados . . . . .	80
21	6.2	Conclusiones de formación . . . . .	83
22	6.3	Trabajos a futuro . . . . .	84
23	6.4	Reflexión . . . . .	85
24	<b>Bibliografía</b>		<b>88</b>
25	<b>Glosario</b>		<b>94</b>
26	<b>Anexos</b>		<b>95</b>
27	Anexo 1	. . . . .	96
28	1.1	Norma IEC 60826 . . . . .	96
29	1.1.1	Tensión en el conductor . . . . .	101
30	Anexo 2	. . . . .	103
31	2.1	Modelado dinámico de un conductor de alta tensión utilizando	
32		elementos de barra . . . . .	103

1	2.1.1	Fundamentos teóricos . . . . .	103
2	2.1.2	Resultados numéricos 2D . . . . .	108
3	2.1.3	Resultados numéricos 3D . . . . .	112
4	2.1.4	Frecuencias naturales . . . . .	112
5	2.1.5	Respuesta a tormenta convectiva . . . . .	116
6	Anexo 3	. . . . .	119

# Capítulo 1

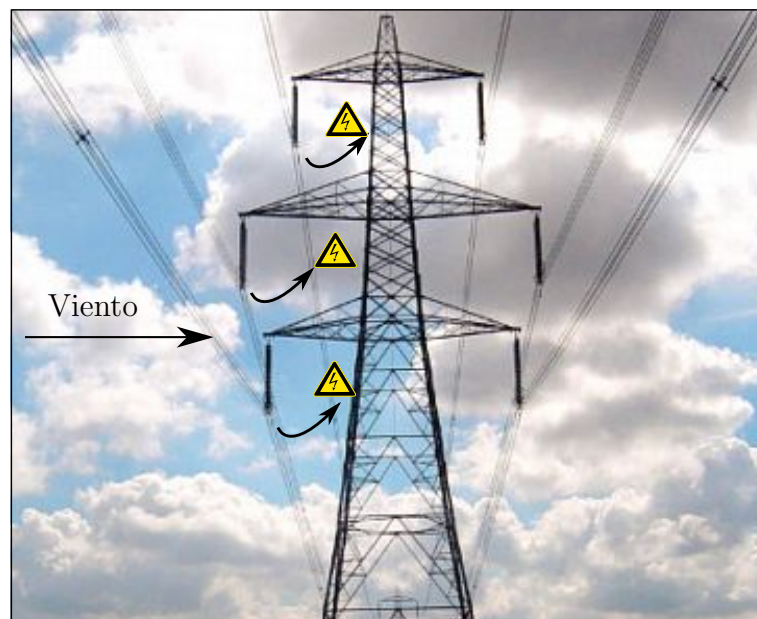
## Introducción

### 1.1. Motivación

Debido a las condiciones climáticas específicas del territorio uruguayo. Se produce una atmósfera inestable provocada por el choque de masas de aire cálidas, originadas en los trópicos, y corrientes de aires fríos que migran desde el polo. Este eminente peligro, produce vientos extremos no sinópticos sumamente violentos y destructivos. Un registro trágico de este tipo de eventos, sucedió el 10 de marzo del 2002, cuando una tormenta convectiva afectó un área de alrededor 6500 km<sup>2</sup> en el sur del país “El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay)”, [s.f.](#) En el norte de Montevideo los anemómetros capturaron velocidades de ráfaga de 34 m/s y de acuerdo con el nivel daño causado, se estimaron en determinados puntos podría haber superado los 56 m/s. Fue tal el nivel de devastación, que 19 torres de transmisión eléctrica de 500 kV y 48 de 150kV colapsaron, además de unos 700 edificios y 1250 techos de hogares que fueron destruidos (Durañona, [2015](#)). No solo afectó a las construcciones, sino también muchos productores rurales y sus estancias productivas, derribando invernaderos, montes y plantaciones. El costo de reparación asociado con las torres es estimado en 2 millones de dólares y en simultáneo se gastaron unos 10 millones de dólares destinados a suplir la red con energía geotérmica, proveniente de combustibles fósiles. El presupuesto estimado a los daños en total asciende a la suma de 27 millones de dólares según Duranona et al. [2019](#).

Las líneas de transmisión eléctrica son frecuentemente afectadas por eventos climáticos severos como Corrientes Descendentes. (CD) o tornados. Estos eventos pueden provocar su desconexión, con consecuencias potencialmente

1 graves. En el periodo 2000-2007 se registraron más de veinte eventos de sa-  
2 lida en servicio por esta causa en una de las principales líneas de Uruguay  
3 (Palmar-Montevideo). Este tipo de fenómenos inducen fuertes movimientos en  
4 los cables, provocando un balanceo excesivo de los mismos. Estas amplitudes  
5 desmesuradas implican vulneraciones en la aislación del sistema, al aproximar  
6 sus cadenas aisladoras a las torres. Produciéndose descargas a tierra e indesea-  
7 bles interrupciones del suministro que han afectado a la capital durante varias  
8 horas. Una ilustración del fenómeno se encuentra la Figura 1.1.



**Figura 1.1:** Ilustración de balanceos excesivos. Fuente: [Noticias24](#)

9 El modelado estructural de vientos severos sobre líneas de transmisión  
10 eléctrica, ha sido abordado por la comunidad científica internacional desde  
11 diversas ópticas, principalmente a lo largo de las últimas cuatro décadas. Se  
12 han presentado modelos semi-analíticos, análisis experimentales en túneles de  
13 viento y de campo, más recientemente utilizando métodos computacionales.

14 Esto plantea la necesidad de contar con herramientas computacionales que  
15 sean capaces de representar la respuesta de estos sistemas ante perfiles de vien-  
16 to no sinópticos. Este es el principal objetivo de este trabajo, profundizar en  
17 la bibliografía para el modelado estructural de conductores y crear un modelo  
18 robusto, consistente capaz de simular líneas de transmisión eléctrica atacadas  
19 por vientos extremos.

## 1.2. Enfoque

2       Numerosos autores de la literatura han acuñado sus investigaciones en ele-  
3       mentos multinodales de barras como ser: Desai et al. [1995](#), Yan et al. [2009](#), los  
4       trabajos de Gani y Légeron, [2010](#) y Yang y Hong, [2016](#). No obstante, debido  
5       a la inherente rigidez a flexión en el comportamiento estructural del cable,  
6       deben considerarse vigas tridimensionales. Por otra parte, los grandes despla-  
7       zamientos y rotaciones que se presentan durante las trayectorias en tormentas,  
8       conducen a implementar un modelo de vigas apto para este tipo de solicitacio-  
9       nes. El abordaje corrotacional es idóneo, pues desde su base matemática, se  
10      construye desacoplando la deformación local con deformaciones cinemáticas de  
11      cuerpo rígido para grandes amplitudes. Este es el atractivo fundamental de la  
12      propuesta corrotacional, su versatilidad ante diferentes formulaciones locales,  
13      permitiendo incorporar distintos tipos de elementos fácilmente.

14      El campo de la metodología corrotacional es muy amplio, pero debido a  
15      la claridad y contemporaneidad en el desarrollo de sus publicaciones, se eligió  
16      un grupo de investigadores específicos. En (Le et al. [2011](#)) se publicó una  
17      formulación para vigas 2D, en conjunción con la parte estática desarrollada por  
18      el Dr. Jean Marc Battini en (Battini y Pacoste, [2002](#)). La extensión dinámica  
19      de este último devino en el artículo de (Le et al. [2014](#)), que fue el artículo  
20      fuente de la implementación central de esta tesis. Lo innovador y atractivo se  
21      centra en el desarrollo analítico consistente, no solo para los términos estáticos,  
22      sino también dinámicos. Además, según la opinión del autor en comparación  
23      con otras formulaciones, se obtienen resultados certeros y confiables con un  
24      menor número de elementos, ventaja principal para modelar grandes dominios  
25      como las líneas de alta tensión.

26      Debido a las ventajas mencionas, esta metodología es implementada en di-  
27      versos campos de aplicación ingenieril. Entre ellas se encuentran: aeronaves,  
28      turbinas propulsoras, molinos. En particular, la formulación de (Le et al. [2014](#))  
29      ha sido aplicado en trabajos recientes en el área de ingeniera marina, robótica  
30      y civil en (Albino et al. [2018](#)), Asadi y Johansson, [2019](#) y Viana et al. [2020](#).  
31      Esto evidencia que la metodología es potente para diversos campos de estu-  
32      dio. No obstante, según el conocimiento del autor, ningún software comercial  
33      hasta la fecha utiliza formulaciones corrotacionales para la solución de proble-  
34      mas dinámicos. Asimismo, esta no ha sido aplicada conductores sometidos por  
35      vientos extremos, donde se desarrollan grandes desplazamientos en distancias

1 de centenas de metros.

2 Según el exhaustivo análisis realizado en el estado del arte, aun no se obser-  
3 van extensiones de la formulación corrotacional de Le et al. 2014 considerando  
4 términos aerodinámicos dependientes del flujo de viento aplicado, incorporan-  
5 do factores viscosos de fuerzas externas dependientes de los desplazamientos.  
6 Por otra parte, tampoco hay registros de los detalles de programación para su  
7 implementación computacional.

8 En la temática específica de conductores, la tesis del autor Foti (2013)  
9 destaca por su nivel de detalle utilizando elementos corrotacionales de vigas  
10 3D. Sin embargo, sus estudios experimentales mostraban discordancias respec-  
11 to al modelo, debido a dos factores, las actualizaciones angulares mediante  
12 aproximaciones incrementales y el comportamiento de histéresis inmanente al  
13 sistema. En trabajos posteriores del mismo autor, se corrigen las limitaciones  
14 y modelan los deslizamientos internos de las hebras y cómo influyen sobre el  
15 fenómeno Foti y Martinelli (2018). La respuesta de estos modelos sometidos  
16 ante Tormentas Convectivas. (TC) aun es una interrogante.

### 17 1.3. Estructura de la tesis

18 Este documento consta de cinco capítulos: Introducción, Estado del arte,  
19 Preliminares, Resultados Numéricos y Conclusiones. Inicialmente en el Capítu-  
20 lo 2 se realiza un recorrido histórico en materia de simulaciones aplicadas a  
21 conductores eléctricos, con un enfoque computacional y semi analítico. Tam-  
22 bién se narran los diferentes estudios locales e internacionales sobre vientos  
23 extremos, para concluir en un tour dentro del abordaje corrotacional. Conti-  
24 nuamente en el Capítulo 3, con el objetivo de acercar la metodología corro-  
25 tacional al lector, se presenta una descripción con foco conceptual, según lo  
26 propuesto por la bibliografía principal de Le et al. (2014). Una vez presentada  
27 dicha formulación, se despliega la metodología utilizada para esta investigación  
28 en el Capítulo 4. Aquí se detallan las hipótesis fundamentales del modelado  
29 estructural y de viento, explicándose las condiciones de borde impuestas y un  
30 análisis sobre el amortiguamiento aerodinámico. En este mismo capítulo, se de-  
31 sarrolla la implementación del algoritmo numérico utilizado con la extensión de  
32 fuerzas viscosas y las estructuras de pseudocódigo referentes a los principales



1 scripts de la implementación computacional en el software [ONSAS](#)<sup>1</sup>.

2       Posteriormente, se resuelven tres aplicaciones numéricas en el Capítulo 5.  
3 La primera de ellas persigue el objetivo de validar numéricamente la implan-  
4 tación. Este ejemplo es un modelo clásico en la literatura corrotacional donde  
5 se observan resultados acordes en contraste con los presentados en Le et al.  
6 [2014](#). De manera subsiguiente, se modela un ejemplo presentado por los auto-  
7 res Foti y Martinelli, [2016](#). Este consiste en un conductor eléctrico sometido  
8 a una carga artificial, extraída de un viento tipo capa límite atmosférica. Por  
9 último, se presenta un problema realista de dos vanos consecutivos, compuesto  
10 por tres torres de alta tensión modeladas con elementos de barra tipo Green  
11 y seis conductores por elementos de viga corrotacional. El sistema de trasmi-  
12 sión eléctrica, con geometrías y propiedades reales, es atacado por un perfil de  
13 viento capturado durante una CD en el norte de Alemania por Stengel y Thie-  
14 le, [2017](#). Finalmente en el Capítulo 6 se sintetizan los principales resultados  
15 enriquecedores de esta investigación, además de plasmarse eventuales traba-  
16 jos a futuro, con lineamientos para profundizar en la temática y sus posibles  
17 aplicaciones en el mercado de distribución eléctrica.

---

<sup>1</sup><https://github.com/ONSAS/ONSAS/>

# 1 Capítulo 2

## 2 Estado del arte

3 Este capítulo incluye la revisión de la literatura, desde diversas aristas y  
4 focos, explicándose los conceptos y teorías en los cuales se fundamenta esta in-  
5 vestigación. Primeramente en la Sección 2.1, se presenta un relato cronológico  
6 en el estudio de conductores desde el crepúsculo del Siglo XVIII. A continua-  
7 ción en la Sección 2.2, se expone un recorrido a partir de los años 60's en  
8 simulaciones computacionales aplicadas a conductores de alta tensión. Conse-  
9 cutivamente en la Sección 2.3 se describen los fenómenos de CD que afectan  
10 las líneas a partir de trabajos nacionales e internacionales. Estas tormentas  
11 y otros fenómenos de viento afectan a las líneas produciendo inestabilidades  
12 aeroelásticas numerosos trabajos han estudiado dicha temática y un breve re-  
13 corrido por ellos se presenta en el apartado 2.4. Por último, en la Sección 2.5 se  
14 recorre la metodología corrotacional y los principales autores que desarrollaron  
15 esta formulación.

### 16 2.1. Historia de la temática

17 El sistema masa resorte ha sido uno de los problemas principales abordados  
18 por la física y la matemática moderna. En particular, la aparición en escena  
19 del libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Issac Newton en el  
20 1657 revolucionó el conocimiento científico en occidente, tal es así que un siglo y  
21 medio después, en consonancia con los avances de la termodinámica, devino en  
22 la aplicación de las principales invenciones que arrojó la Revolución Industrial.

23 El problema masa resorte no fue ajeno a las grandes eminencias científicas  
24 de la época, Brook Taylor, d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli aplicaron

1 las ecuaciones diferenciales desarrolladas por Gottfried Leibniz y Newton al  
2 sistema masa resorte en los albores del siglo XVII (Starossek, [1991](#)).

3 Partiendo del problema elemental del oscilador simple masa resorte, en 1788  
4 Lagrange et al, hallaron la solución para las vibraciones de un cable inextensible  
5 compuesto de un número finito de elementos, de masa despreciable, sometido  
6 a la acción de fuerzas externas. Posteriormente, Poisson en 1820 presentó la  
7 ecuación diferencial que debería cumplir el sistema en el continuo, sin embargo  
8 según (H. M. Irvine y Caughey, [1974](#)), las herramientas matemáticas analíticas  
9 desarrolladas hasta la fecha, no permitían hallar la solución general a dicha  
10 ecuación.

11 Debió pasar más de un siglo para que en Routh et al. [1955](#) se presentara  
12 una solución exacta para un cable, también inextensible, de forma cicloidal  
13 (curva que describe un punto sobre una esfera girando a velocidad angular  
14 constante). En el año 1942 se logró modelar el comportamiento elástico del  
15 cable, el primero en su época fue (Klöppel y H., [1942](#)), a partir de esto en  
16 Pugsley, [1949](#) se determinó experimentalmente, para una relación entre la de-  
17 flexión y el largo de vano entre 4 y 10 metros, desarrolló una fórmula para las  
18 frecuencias naturales de vibración. En 1953 considerando un cable inextensible  
19 en Saxon y Cahn, [1953](#) resolvieron la expresión teórica, formulada por Pois-  
20 son, de la curva catenaria para grandes deflexiones. Esto fue un resultado de  
21 suma importancia para la ingeniería de distribución eléctrica, ya que permitía  
22 calcular analíticamente los descensos máximos del vano entre dos torres.

23 La seguridad de las personas e integridad de los distintos elementos cir-  
24 cundantes son factores que imprimen criterios de seguridad sobre el descenso  
25 máximo de la línea. Actualmente la tensión del conductor durante el montaje,  
26 se ajusta de manera tal, que la altura mínima respete un valor exigido por  
27 norma. Esta imposición depende principalmente del grado de urbanización,  
28 los umbrales de contaminación magnética y la topografía del terreno.

29 A pesar del avance en resultados teóricos y experimentales disponibles, las  
30 frecuencias naturales de un cable extensible, no concordaban con los modelos  
31 masa resorte cuando las deflexiones tendían a cero. En H. M. Irvine y Caughey,  
32 [1974](#) se halló el rango transitorio entre ambos estados, corrigiendo dicha dis-  
33 continuidad al incluir una descripción completa del modelo de elasticidad del  
34 cable. Su trabajo reveló la comprensión del fenómeno para cables horizontales  
35 (las cotas de sus extremos a la misma altura), para un ratio deflexión-largo del  
36 vano entre  $1/8$  y 0. El mismo autor H. M. Irvine y Caughey, [1974](#) extendió lo

1 postulado para conductores con extremos desnivelados, aun bajo la hipótesis  
2 de que el peso se aplicaba perpendicular al conductor.

3 A posteriori, el mismo investigador profundizó sobre la dinámica con ex-  
4 tremos acelerados, obteniendo resultados experimentales para un movimiento  
5 tipo terremoto en (H. M. Irvine y Griffin, 1976) y (M. Irvine, 1978). La teoría  
6 postulada por Irvine fue confirmada en Triantafyllou, 1984 para distin-  
7 tos casos experimentales, considerando variaciones espaciales en la geometría  
8 y tomando en cuenta las componentes del vector peso, colineales con el vector  
9 tangente al movimiento.

10 Autores contemporáneos estudiaron en simultaneo condiciones de borde  
11 dinámicas ejercidas por el viento. Este tipo de solicitaciones pueden inducir  
12 vibraciones y respuestas de resonancia. Los pioneros en la materia fueron Da-  
13 venport, 1965. Resultados más refinados se obtienen en Starossek, 1991. En  
14 estas se exponen formulaciones dinámicas lineales para el movimiento de los  
15 cables sometidos a la acción del viento, obviando no linealidades geométricas  
16 y materiales.

17 Estos estudios revelaron el fenómeno de “Galloping”, este refiere a una  
18 respuesta de inestabilidad aeroelástica donde el movimiento del cable entra en  
19 régimen y en resonancia con las fuerzas ejercidas por el viento. Teóricamente,  
20 las geometrías perfectamente simétricas no inducen este tipo de fenómenos.  
21 Sin embargo, debido a la existencia de imperfecciones constrictivas y durante  
22 la instalación, el fenómeno es factible. En este caso, se genera un aporte de  
23 energía neto hacia el cable. Los primeros estudios de este tipo de respuesta  
24 se presentaron en (Simiu y Scanlan, 1986), quienes hallaron condiciones de  
25 velocidad crítica eólica en función de coeficientes experimentales, obtenidos  
26 mediante ensayos consumados en túnel de viento.

27 Las vicisitudes del conocimiento viraron radicalmente el abordaje al pro-  
28 blema de conductores eléctricos. El advenimiento del (Método de Elementos  
29 Finitos. (MEF)) aplicado a armaduras en la década del 40 y 50 constituyó  
30 una herramienta sumamente potente e innovadora. Esto provocó que, en los  
31 años venideros, se desarrollasen vastas metodologías numéricas incorporando  
32 diferentes elementos y algoritmos de resolución computacional. En particular,  
33 en Italia un grupo de investigadores insoslayables, pertenecientes a La Univer-  
34 sidad de Milan, aplicaron métodos numéricos a la simulación de conductores.  
35 Un recorrido cronológico y descriptivo de los emblemáticos aportes de estos  
36 científicos se presenta a continuación en la Sección 2.2.

## 2.2. Simulaciones numéricas aplicadas a conductores de transmisión eléctrica

Los primeros artículos publicados en el primer lustro del corriente siglo, por Di Pilatto y Martinelli, estaban basados en elementos trinodales isoparamétricos. En estos estudios se asumió pequeñas deformaciones unitarias, considerándose para el desarrollo no linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos lineales. No obstante, cuando las rotaciones de los elementos alcanzan valores significativos, estos modelos de barras presentan limitaciones para la representación y captura de la orientación del sistema. Además, a este tipo de modelos poseen la debilidad de no satisfacer las condiciones de equilibrio dinámico para específicos tipos de balanceo. Esto se justifica en Martinelli y Perotti, 2001 y Martinelli y Perotti, 2004. En consonancia, estudios contemporáneos evidencian que la rigidez flexional y torsional toman un rol protagónico, por lo que despreciar estas magnitudes puede inducir a inestabilidades numéricas y predicciones erróneas sobre las frecuencias naturales de mayor orden. Tal y como se remarca en Koh y Rong, 2004.

Esta problemática fue inicialmente atacada por Di Pilato y otros en 2007 utilizando abordajes corrotacionales. Di Pillato presentó una formulación considerando elementos de viga tridimensionales corrotacionales, para calcular el vector de fuerzas internas e inerciales teniendo en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones, en coordenadas globales. No obstante, esta formulación basada en lo propuesto por(Oran, 1973 tiene como desventaja principal que no es fiable ante grandes rotaciones locales de los nodos, como también, ante significativos incrementos angulares entre dos pasos de carga sucesivos. Consecuentemente para capturar dinámicas complejas resulta necesario e ineludible discretizar el dominio temporal y especial pequeños intervalos, lo que conlleva a costos computacionales desmedidos.

El mismo autor y su equipo, corrigieron las limitaciones relacionadas con las pequeñas rotaciones nodales al año siguiente en Di Pilato et al. 2008. La solución consiste en localizar las coordenadas nodales en la configuración deformada, utilizando el teorema de ángulos de Euler. En este marco, el impedimento de grandes incrementos angulares, entre dos pasos de carga, se resuelve aplicando la metodología propuesta en Simo y Vu-Quoc, 1988.

Conforme las simulaciones numéricas avanzaron sobre la materia, la especificación del problema y el grado de complejidad del mismo se intensificó. Otro

1 foco de investigación en el área, se basaba en que los resultados experimen-  
2 tales en vanos largos, no reflejaban lo arrojado por el modelo predictivo para  
3 grandes desplazamientos. Dado esto, las hipótesis de no linealidad material y  
4 geométrica se fueron desvaneciendo y se publicaron resultados novedosos so-  
5 bre el comportamiento no holomónico del fenómeno. Esto refiere a un modeló  
6 realista, que incorpora detalladamente las interacciones de contacto y fricción  
7 entre las diferentes hebras que conforman al conductor. Los pioneros en dicha  
8 temática los trabajos de Papailiou, 1997 y Kutterer y Starossek, 1992.

9 Este tipo de estudios sugiere escindir la dinámica del problema en dos  
10 escenarios, “full slip” donde las hebras se encuentran todas en deslizamiento  
11 relativo, por lo que cada una de ellas no ejerce contacto con sus hebras aledañas.  
12 El otro estado antagónico, es aquel donde no existe deslizamiento relativo entre  
13 ninguna de las partes que componen al conductor, este estado recibe el nombre  
14 de “full stick”. En esta situación, el conjunto se comporta como un rígido, he  
15 aquí la razón de su nomenclatura. En Papailiou, 1997 se establece la tensión  
16 máxima que se puede presentar en un cable, dadas determinadas condiciones  
17 de borde, para que exista deslizamiento en función del ángulo de giro. En este  
18 trabajo se contrastaron resultados analíticos con ensayos experimental donde  
19 se concluyó que el modelo lograra reproducir adecuadamente el deslizamiento  
20 interno.

21 Según exponen los autores en estos trabajos, las deformaciones del conjun-  
22 to, se traducen en momentos y fuerzas internas a cada hebra que conforma  
23 al conductor. Debido a esto, es posible vincular a la curvatura o deformación  
24 axial de cada hebra con la del conjunto. A partir de esto, se obtiene la matriz  
25 de rigidez global, derivando dichas fuerzas y momentos internos, en función de  
26 la deformación y curvatura del conductor.

27 Esta matriz de rigidez depende del estado en que se encuentre la dinámica  
28 del cable. Si el conductor se encuentra completamente bajo el régimen “full  
29 slip.” “full-sitck” la matriz es simétrica. No obstante, si partimos del caso “full-  
30 stick” cuando ocurre el deslizamiento de algún cable que integra el conductor, la  
31 matriz de rigidez pierde su simetría. Consecuentemente, no se le puede atribuir  
32 un potencial, lo que se asocia al comportamiento no holomónico o de histéresis  
33 inherente al fenómeno. En dicho estado un modelo de viga uniforme no es  
34 aplicable.

35 Con el propósito de desarrollar una formulación que sea capaz de represen-  
36 tar el fenómeno computacionalmente se publicó el artículo de Foti y Martinelli,

1 2016. Aquí se implementa un modelo de contacto donde se desprecian las fuer-  
2 zas tangenciales y axiales entre las hebras del cable. Estas hipótesis de carácter  
3 simplificadoras son estudiadas en Costello, 1990 y Rawlins, 2005. En estos tra-  
4 bajos para el estudio de a los contactos radiales se asume que: las superficies de  
5 contacto no se deforman debido a la interacción entre los mismos, los puntos de  
6 contacto entre cables se pueden aproximar por una línea continua, la fricción  
7 entre los cables se caracteriza a través del modelo de Coulomb y por último  
8 que la presión externa es idéntica para todos los cables de la misma capa.

9 Planteando balances de fuerzas longitudinales y transversales en conjun-  
10 to con las condiciones de no deslizamiento, se hallan los valores límites para  
11 la fuerza axial no lineal, para que no se produzca deslizamiento relativo. El  
12 carácter innovador de estos trabajos se estriba en la detección y modelado  
13 sobre la pérdida de rigidez súbita que ocurre en el conductor, al producirse  
14 deslizamiento relativo al interior del mismo. Esta disminución abrupta de rigi-  
15 dez, puede producir mayores desplazamientos para elevados niveles de carga,  
16 lo que agudiza la problemática de balanceos excesivos. Estos movimientos son  
17 inminentes para determinadas condiciones atmosféricas, entre ellos las TC.  
18 Las CD originadas por TC han sido objeto de estudio en los últimos 50 años  
19 por expertos en ingeniería del viento. En la siguiente Sección se presenta una  
20 somera descripción de la literatura investigada.

## 21 2.3. Tormentas convectivas

22 Las TC son fenómenos atmosféricos que generan inestabilidades en el flujo  
23 debido a sus severos gradientes de temperatura y humedad. Cuando estas se  
24 ocasionan, masas de aire caliente ascienden hasta la parte superior de la nube,  
25 quedando depositado como una especie de domo o cúpula al interior de la  
26 misma. De pronto, ante un gradiente abrupto de presiones al interior de la  
27 tormenta, el domo colapsa arrastrando el aire frío que lo rodeaba por debajo.  
28 Esta corriente desciende a velocidades intensas e impacta con vehemencia sobre  
29 la superficie terrestre. Al chocar se produce una especie de anillo vorticoso que  
30 puede ser devastador con velocidades de hasta 270 km/h Fujita (1985). En  
31 este trabajo se establecen escalas espaciales entre 40 m y 4 km. No obstante  
32 recientes estudios plantean que se explayan en un diámetro entre 1 y 5 km  
33 Darwish et al. (2010).

34 Para determinar las cargas de viento, sobre los elementos de transmisión

1 eléctrica, ciertas normativas se estriban en perfiles de vientos clásicos (sinópti-  
2 cos) tipo capa límite atmosférica. Esto se traduce en una subestimación de las  
3 presiones que se ejercen sobre la línea, un caso ejemplar es la norma Internatio-  
4 nal Electrotechnical Commission. (IEC) 60826. Esto pone en riesgo al sistema  
5 es atacado por tornados o CD. La probabilidad de ocurrencia es baja para  
6 dominios de corta longitud, pero cuando las líneas discurren largas distancias  
7 estos vientos extremos suelen suceder esporádicamente Ang y Tang (1984).

8 La altura de velocidad máxima es un variable crucial para el estudio de  
9 daños vinculado a este tipo de fenómenos. Según expresan investigadores con-  
10 temporáneos el diámetro de desarrollo del anillo se encuentra intrínsecamente  
11 relacionadas con dicha altura Holmes (2002), Abd-Elaal et al. 2013. Comple-  
12 mentando a esto, Stengel y Thiele (2017) en Alemania capturó este fenómenos  
13 utilizando anemómetros colocados en líneas de transmisión. Esto permitió es-  
14 tablecer un perfil de velocidades media y la función de coherencia relacionada  
15 con la turbulencia a partir de datos experimentales. De este artículo se extrajo  
16 el perfil de vientos implementado en este trabajo.

17 En nuestro país investigadores integrantes del Grupo de Eolo Dinámica  
18 perteneciente a la Facultad de Ingeniería extrajeron datos durante TC traba-  
19 jo de campo exhaustivo. El primer informe relevado en el artículo Durañona  
20 y Cataldo, 2009 se realiza un cálculo del ángulo de balanceo, simplificando  
21 cauasi-estáticamente que la tangente del mismo es igual al ratio de la fuerza  
22 de viento por unidad de peso. En este trabajo se mostró que para valores de  
23 velocidad de viento de 97.9 m/s el conductor alcanza los 85°.

24 Dados los alarmantes resultados de Durañona y Cataldo, 2009 posterior-  
25 mente se realizaron investigaciones con datos de hace un siglo hasta la fecha  
26 en el trabajo (Durañona, 2015). En este estudio se atisba que fenómenos de  
27 CD producen mayores velocidades de ráfaga en 10 minutos que los vientos tipo  
28 capa límite atmosférica. El valor máximo de velocidad registrado alcanzó los 40  
29 m/s en promedio de 10 minutos. En el año 2019, este grupo de investigadores  
30 presentó un trabajo relevante donde se resalta que los vientos extremos afecta  
31 principalmente al norte del país Duranona et al. (2019). En este se sugiere  
32 que la norma (Instituto Uruguayo de Normas Técnicas. (UNIT):50-84, 1984)  
33 debe ser actualizada incluyendo cálculos de cargas por fenómenos de vientos  
34 no sinópticos. Pero los eventos de vientos extremos no son los únicos que afec-  
35 tan a los conductores, también pueden ocurrir inestabilidades estructurales  
36 inherentes a interacción entre fluido-estructura.



## 2.4. Análisis semi-analíticos de conductores

Los cables suspendidos en sus extremos e inmersos en un flujo de aire pueden experimentar oscilaciones aeroelásticas autoexcitadas de gran amplitud, principalmente en el plano vertical. Esta problemática ha sido ampliamente estudiada por distintos autores de la literatura. Como por ejemplo Blevins y Vibrations, 1990, Jones, 1992. Para vigas de gran esbeltez, o elementos de cuerdas tensados en sus bordes, se han aplicado formulaciones tanto lineales como no lineales. En estos trabajos se implementaron elementos de uno o dos grados de libertad por nodo. Los objetivos de estas publicaciones consisten en abordar analíticamente el fenómeno de Galloping, examinando la relación intrínseca entre el movimiento vertical y horizontal y verificar estos resultados en la práctica. Algunos de ellos, estudiaron el efecto de perfiles geométricos sin simetría tangencial, debido a formaciones de escarcha o hielo. En la temática destaca el trabajo Chabart y Lilien (1998), en este se propuso una aproximación innovadora teniendo en cuenta aspectos complejos del fenómeno como ser: la variación de ángulo de ataque durante la trayectoria y sus consecuencias en la fuerza lift ante la presencia de excentricidades geométricas.

El fenómeno Galloping presenta las frecuencias del movimiento excesivo suelen ser bajas y son exuberantes a simple vista. Este fenómeno devastador tiene consecuencias severas sobre todo en líneas que se encuentran en climas gélidos, recientemente en Julio del 2020 derribó 55 torres sólidas en el sur de Argentina y las imágenes son impactantes (Ver vídeo). La principal causa del fenómeno es el ataque de vientos intensos y constantes. La presencia de irregularidades geométricas en las líneas induce inestabilidades aerodinámicas y cuanto mayor sea la cantidad y discontinuidad de las excentricidades más aguda será la respuesta inducida. Las velocidades requeridas de viento suelen ser mayor a 7 m/s y las frecuencias de respuesta del conductor suelen oscilar entre los 0.15 y 1 Hz.

Existen determinados componentes que pueden mitigar la inminente aproximación de las líneas, y por tanto la aparición de un cortocircuito. Los separadores si bien no evitan los desmedidos desplazamientos globales, si los relativos entre conductores, siendo una solución atenuante del problema. Otros elementos se han creado para suprimir el fenómeno en conductores propensos a la formación de hielo. Estos son amortiguadores de torsión. Este dispositivo en inglés (Torsional Damper Detuner) gira relativo al conductor anulando las

1 formas irregulares producto de la formación de hielo.

2 En el artículo Jones, [1992](#) se halló la solución a la ecuación de movimiento,  
3 despreciándose su componente axial. Bajo esta hipótesis, se presentaron los  
4 autovalores que permiten detectar analíticamente bajo que condiciones del sis-  
5 tema se efectiviza la inestabilidad. De manera complementaria, se desarrolló el  
6 estudio matemático de las trayectorias que describían las líneas, deduciéndose  
7 un perfil tipo helicoidal con una componente vertical significativamente mayor  
8 a la horizontal. Esto indica la potencial amenaza respecto a los excesivos e inde-  
9 seables desplazamientos que el Galloping es capaz de generar en el eje vertical.  
10 Esto amenaza la seguridad y fiabilidad del sistema ya que esta componente,  
11 es limitada durante la instalación a través de cálculos estáticos. Al generarse  
12 desplazamiento dinámicos desmedidos, ya no hay garantías de salvaguardar la  
13 salud de las personas y los componentes cercanos.

14 Los estudios de Jones y Blevins, se fraguaban en premisas de linealidad  
15 geométrica. Sin embargo, autores han destacado que los efectos no lineales  
16 juegan un rol importante en el desarrollo, como ser: las referencias Luongo et  
17 al. [1984](#) y Lee y Perkins, [1992](#). En el trabajo propuesto por Lee se incluyen  
18 componentes no lineales de tercer y cuarto orden en el estiramiento del conduc-  
19 tor durante el movimiento. Se cotejan estos resultados con los de un modelo  
20 lineal de primer orden, concluyéndose que los términos de segundo y tercer  
21 orden influyen notoriamente en la respuesta al integrarse numericamente la  
22 ecuación diferencial del movimiento.

23 Esta problemática fue abordada unos años mas tarde, por el trabajo pu-  
24 blicado Luongo y Piccardo, [1998](#). En este artículo se hallaron las soluciones  
25 no lineales de resonancia desencadenadas por un flujo transversal uniforme. Se  
26 contrastaron dos soluciones arrojadas por disimiles modelos, uno de pequeños  
27 desplazamientos y otro incorporando no linealidades geométricas. En este tra-  
28 bajo se distinguen dos regímenes del movimiento, el primero de ellos nominado  
29 crítico refiere a valores de velocidad cercana a la crítica donde los movimientos  
30 no presetan gran amplitud. Al aumentar la velocidad de viento, las trayec-  
31 torias se amplifican y el régimen es llamado post-crítico. De este análisis, se  
32 concluye que la solución para pequeños desplazamientos es simple y confiable  
33 para valores de velocidad media de viento correspondiente al estado crítico.  
34 Posteriormente al incrementar la velocidad de viento y se desata el fenómeno  
35 post-crítico y el incluir términos de grandes desplazamientos es imprescindible  
36 para representar cabalmente las trayectorias. Sin embargo, para perfiles

1 simétricos, la velocidad crítica que lo origina puede ser hallada con un análisis  
2 lineal.

3 Según los autores del trabajo Luongo et al. [2007](#), hasta la fecha de publi-  
4 cación, era necesaria una formulación orientada al modelado no lineal de la  
5 dinámica del problema. En numerosos trabajos publicados, se calculaban las  
6 fuerzas en su régimen cuasi estacionario y los desarrollos en elementos finitos  
7 aplicados eran exigüos, en especial para el régimen post-crítico del Galloping.  
8 Por otra parte, escasos estudios consideraban las variaciones de ángulo de ata-  
9 que y velocidad relativa entre el conductor y del fuljo. Además eran desprecia-  
10 das las rigideces a torsión de los elementos, esto se debe a que la rigidez según  
11 el eje axial suele ser mayor respecto a la rigidez flexional, principalmente por  
12 un argumento de esbeltez y disposición geométrica del conductor de estudio.

13 El propósito de Luongo et al. [2007](#) fue proponer un elemento de viga orien-  
14 tado a la simulación del cable, capaz de incorporar la rigidez de este a torsión.  
15 Estos términos representan diferencias notorias para secciones antisimétricas  
16 en los modos de respuesta. Por otra parte, se presentaron resultados numéri-  
17 cos utilizando el método de Galerkin para un caso simple con el objetivo de  
18 hallar las condiciones de inestabilidad incipiente. Se demostró, que el ángulo  
19 de balanceo es capaz de influir considerablemente en las condiciones críticas  
20 del sistema, a través de la matriz tangente, cuando se tienen en cuenta los mo-  
21 dos simétricos. En particular, para valores pequeños de balanceo, la inclusión  
22 del ángulo puede influir significativamente en el valor de velocidades críticas  
23 aeroelásticas.

24 A posteriori, en el trabajo Luongo et al. [2009](#) se profundizó en los efectos  
25 del ángulo de balanceo en la dinámica del fenómeno. Para esto se utilizó la  
26 formulación de vigas propuesta por los mismos autores dos años antes, como  
27 destacado resultado, se probó que mientras la rigidez de torsional no afecta  
28 significativamente los desplazamientos traslacionales, en cambio sí lo hace a  
29 la solución del ángulo de giro. En especial para perfiles sin simetría de revolu-  
30 ción. La consideración del balanceo en el lift y en el ángulo de ataque, afecta  
31 notoriamente las frecuencias naturales del cable, en particular las propiedades  
32 de la sección aerodinámica y por tanto sus velocidades críticas. Por ende, se  
33 resalta la importancia de incorporar un modelo robusto y completo de vigas  
34 para el modelado del conductor, como ser un modelo de vigas corrotacional.

## 2.5. Análisis corrotacional de vigas

Los modelos de vigas flexibles se utilizan en un amplio abanico de aplicaciones entre ellas: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos y terrestres. A pesar de las formulaciones “Updated z “Total Lagrangian clásicas, dentro de estas últimas el abordaje corrotacional es idóneo para este tipo de aplicaciones. Esto se fundamenta en la necesidad de incluir términos de no linealidad geométrica generados por los grandes desplazamientos en servicio. Destacados autores han contribuido al desarrollo histórico de esta metodología en las últimas décadas, entre ellos el emblemático trabajo de Nour-Omid y Rankin, 1991 quienes sentaron las bases del método.

Este modelado se funda principalmente en la descomposición cinemática del elemento finito en dos etapas sucesivas. Primeramente considerándolo como un rígido y luego incluyendo su carácter deformable. Para ubicar la componente rígida, se considera un sistema de coordenadas solidario que permite localizar al elemento en el espacio. Mientras que para la componente deformable se considera una formulación local esfuerzo-deformación, con su respectivo sistema de coordenadas, específica para cada material. La principal ventaja de la propuesta corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, fácilmente. Además, destaca el desacople de las no linealidades. La componente rígida del elemento representa términos de no linealidades geométricas mientras que la deformables incorpora no linealidad materiales.

El cálculo de las matrices tangentes y los vectores de fuerzas internas se calculan en función de la fragmentación cinemática antes descrita. La variación de la componente rígida respecto al desplazamiento, resulta una matriz tangente anti-simétrica. La deducción consistente de la formulación conduce a esta propiedad anti-simétrica, esta característica depende principalmente del des-balanceo en el vector de fuerzas residuales. Representar las propiedades anti-simétricas de la matriz puede implicar grandes costos computacionales al resolver el sistema mediante métodos numéricos como (Newton Raphson. (N-R)). Los autores Nour-Omid y Rankin, 1991 con el objetivo de optimizar el método, demostraron que simetrizando la matriz tangente, N-R mantiene su orden de convergencia cuadrático.

Debido a voluble capacidad de la metodología corrotacional, en los años posteriores se publicaron numerosos trabajos aplicando diversos tipos de ele-

1 mentos y leyes materiales. La mayor cantidad de los trabajos se ciñeron al  
2 considerar funciones de interpolaciones lineales, matrices de masas concentra-  
3 da y elementos de viga de Timoshenko. Para estos elementos, es posible obtener  
4 de manera sencilla la matriz de masa al derivar los términos de fuerzas inercia-  
5 les. Como habrá notado el sagaz lector, este cálculo conduce ineludiblemente  
6 a la matriz de masa constante de Timoshenko. Por otra parte, interpolaciones  
7 lineales asumen que los desplazamientos transversales al eje de la viga son nu-  
8 los, esta hipótesis reduce el campo de aplicación del modelo, en especial para  
9 mallas de bajo numero de elementos, ya que la matriz de masa tangente y el  
10 vector de fuerzas inerciales no representan las componentes omitidas.

11 En la referencia De Borst et al. [2012](#) se sugiere que el proceso de obten-  
12 ción requerido para el cálculo de la matriz de masa concentrada es demasiado  
13 intrincado, debido a su grado de complejidad geométrico. El autor propone  
14 utilizar funciones de interpretación cúbicas, como por ejemplo las asociadas al  
15 elemento de Bernoulli. Este tipo de soluciones resultan controversiales a la hora  
16 de derivar el vector de fuerzas inerciales. Como consecuencia, el autor consi-  
17 deró un modelo simplificado híbrido. Este consiste en utilizar interpolaciones  
18 cúbicas para el vector de fuerzas internas y matriz tangente, considerando una  
19 matriz de masa constante. Esto resulta en una formulación no consistente pero  
20 numéricamente eficiente. Esta forma de proceder también se aplico en Pacoste  
21 y Eriksson, [1997](#).

22 En paralelo otros autores, desarrollaron eficientes elementos de viga bidi-  
23 dimensionales y tridimensionales, con el propósito de modelar estructuras en  
24 grandes desplazamientos bajo cargas estáticas (Battini y Pacoste, [2002](#) Alsafadie et al. [2010](#)). Estos autores afirman que al seleccionar adecuadamente el  
25 largo de elemento, los desplazamientos locales son significativamente menores  
26 que los asociados a la componente rígida. Por esta razón, se compararon resul-  
27 tados con diferentes número y tipos de elementos para los mismos ejemplos.  
28 Estos estudios, en conjunto con lo publicado por Alsafadie et al. [2010](#), con-  
29 cluyen que formulaciones cúbicas son más eficaces y precisas que las lineales  
30 bajo ciertas circunstancias. Estos trabajos sentaron las bases para la extensión  
31 analítica hacia las componentes dinámicas.

32 Investigadores de origen europeo trabajaron en este desafío en los últimos  
33 años. El primero de ellos fue Behdinan et al. [1998](#) a finales de siglo, pero las fun-  
34 ciones de forma utilizadas para describir los desplazamientos globales no eran  
35 consistente con la formulación canónica del método corrotacional propuesta  
36

1 por Simo y Vu-Quoc (1988). De hecho, según el conocimiento del autor, no  
2 existía hasta la fecha ninguna investigación publicada sobre una formulación  
3 consistente que derivara analíticamente, no solo los vectores de fuerza interna  
4 sino también, las componentes inerciales.

5 Años mas tarde, Le et al. 2011 publicaron una formulación para vigas  
6 2D implementando funciones de forma cúbicas del elemento de interpolación  
7 independiente "IIE" de la referencia Reddy, 1997. Estos elementos fueron desa-  
8 rrollados con el objetivo de obtener el vector de fuerzas inerciales y la matriz  
9 tangente fácilmente. Estas funciones de forma son una leve modificación basa-  
10 das en los polinomios de Hermitian, con el propósito de incluir consideraciones  
11 adicionales sobre las deformaciones por flexión y cortante. Esta publicación es  
12 una de las primeras en obtener el vector fuerzas inerciales matemáticamente y  
13 su matriz respectiva de masa tangente. Para este cálculo, se introducen algu-  
14 nas aproximaciones con respecto a las cantidades cinemáticas locales. Además  
15 se comparan los resultados con respecto a las clásicas aproximaciones de la li-  
16 teratura, matriz de masa concentrada y de Timoshenko. Se concluyó que esta  
17 nueva formulación, con respecto a los dos enfoques clásicos, permite reducir  
18 significativamente el número de elementos. Esta ventaja se debe a una mayor  
19 precisión en los términos inerciales y sus cambios temporales en función de los  
20 desplazamientos locales.

21 Los mismos autores en conjunto con Lee extendieron la formulación en su  
22 trabajo del 2014 Le et al. 2014 agregando una dimensión, este desarrollo se  
23 vio dificultado debido a la carencia de propiedades como aditividad y conmutatividad en las matrices de rotación. Estas desempeñan un rol indispensables a la hora de caracterizar la cinemática angular del planteo. En este artículo, se presenta la parte estática desarrollada por Battini en Battini y Pacoste, 2002, además de exponerse detalladamente la obtención del vector de fuerzas inerciales y su derivada. Asumiendo determinadas simplificaciones para las deformaciones angulares locales. Con respecto a la iteración temporal se selecciono el clásico método (Hughes, Hilbert y Taylor. (HHT)) con los parámetros convencionales (Hilber et al. 1977). Este algoritmo es utilizado por reconocidos software comerciales (Abaqus, Lusas) e implica una disipación sobre la energía total del sistema para frecuencias de oscilación altas, mas presenta como ventaja la estabilidad para grandes incrementos temporales.

35 En Le et al. 2014 se consideraron cuatro ejemplos numéricos para comparar  
36 la nueva formulación con otros dos enfoques. La primer comparación, se deriva

1 de la nueva formulación reemplazando las intercalaciones cúbicas por lineales.  
2 El segundo enfoque es el TL clásico propuesto por Simo y Vu-Quoc, [1988](#).  
3 En base a estos ejemplos de contraste se concluyen las siguientes afirmaciones:  
4 todas las formulaciones conducen a idénticos resultados refinando las mallas, no  
5 así con mayados gruesos. En este caso tanto la formulación bi-nodal de Simo y  
6 Vu-Quoc como la lineal corrotacional son significativamente mas imprecisas en  
7 comparación con la formulación cúbica corrotacional. Esto justifica el esfuerzo  
8 computacional y analítico en los términos dinámicos inerciales incluidos en el  
9 modelo. La formulación corrotacional es ligeramente mas lento (12 %) respecto  
10 a lo descrito por Simo and Vu-Quoc . Sin embargo, bajo ciertas condiciones  
11 altamente dinámicas, para un mismo nivel de precisión exigido, la formulación  
12 innovadora de este trabajo lo logra en menor tiempo.

13 Debido a estas ventajas, esta metodología es implementada en diversos  
14 campos de aplicación ingenieril. La robustez, solidez y versatilidad del modelo  
15 es un atractivo para distintos investigadores del área. En Albino et al. [2018](#)  
16 Albino modelaron tuberías elevadoras flexibles, manufacturadas por materiales  
17 graduados, para la carga o descarga de barcos petroleros en alta mar. En  
18 2019 Asadi y Johansson, [2019](#) simularon palas de aerogeneradores utilizando  
19 elementos de viga para el diseño de las componentes mecánicas, entre ellas  
20 el tren de transmisión, los cojinetes y la soldadura de la raíz cuchilla-pala.  
21 En el mismo año el autor Barzanooni et al. [2018](#) atacó la problemática de  
22 anillos y interacciones de contacto aplicado a robots industriales también con  
23 la formulación propuesta por Le et al. [2014](#).

24 Esto nos permite concluir que la formulación es idónea para la aplicación  
25 central de este trabajo. Donde se desarrollan grandes desplazamientos y térmi-  
26 nos inerciales. Estudios recientes se encuentran desarrollando softwares para  
27 ser aplicados a diferentes problemáticas de la ingeniería estructural y mecáni-  
28 ca. No obstante, ningún software comercial hasta la fecha utiliza formulaciones  
29 corrotacionales para la solución de problemas dinámicos.

# 1 Capítulo 3

## 2 Preliminares

3 A continuación se presenta una descripción cualitativa y cuantitativa de la  
4 formulación corrotacional según lo propuesto en Le et al. [2014](#), Battini y Pa-  
5 coste, [2002](#). La temática se abordará progresivamente según la naturaleza de  
6 las variables. En primera instancia, se describen la caracterización de magnitu-  
7 des cinemáticas en las Secciones [3.1](#) y [3.2](#). Una vez presentadas las magnitudes  
8 cinemáticas se desarrolla el análisis corrotacional, para las variables estáticas  
9 y dinámicas en la Sección [3.3](#).

### 10 3.1. Cinemática corrotacional

11 El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, se basa en  
12 escindir la cinemática del movimiento en dos componentes. La primera de ellas  
13 representa grandes rotaciones y desplazamientos, dados por el movimiento de  
14 la viga considerandola como un elemento rígido. La segunda componente tiene  
15 en cuenta los desplazamientos locales asociados a la flexibilidad del material.  
16 Este enfoque se suele aplicar en casos estáticos, donde resulta intuitivo imagi-  
17 nar inicialmente como se deformaría la estructura de manera rígida para luego  
18 aplicarle la componente no rígida. Para poder realizar esta descomposición,  
19 hace falta introducir una serie de sistemas de coordenadas que permiten repre-  
20 sentar los desplazamientos de cada una de las componentes. Para encontrar la  
21 curva deformada que describe el elemento, hace falta la orientación y trasla-  
22 ción de un sistema de coordenadas solidario a cada punto. Estas magnitudes se  
23 obtienen a partir de transformaciones representables matemáticamente con la  
24 artillería del álgebra matricial para rotaciones. Una presentación de la temática

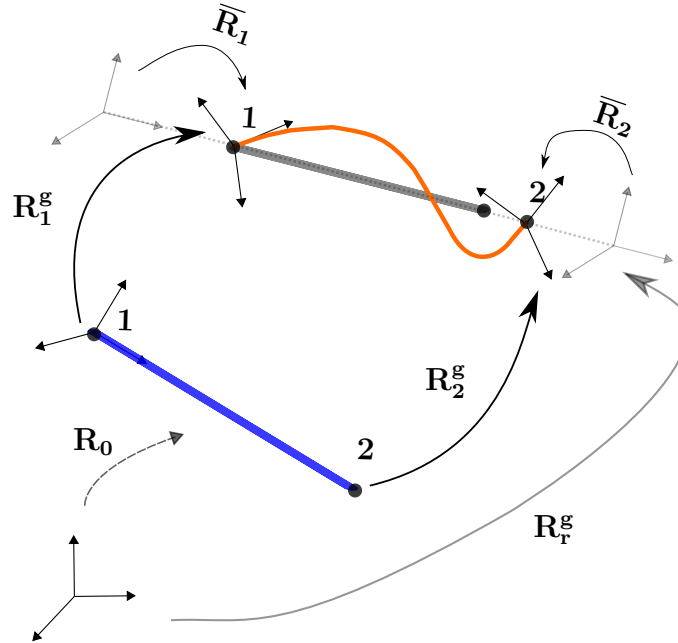


1 puede hallarse en la publicación (Kořar y Ibrahimbegović, 1995).

### 2 3.1.1. Matrices de rotación

3 Las configuraciones utilizadas son dos rotaciones consecutivas ilustradas en  
4 la Figura 3.1. Para un elemento formado por los nodos 1 y 2 en sus extremos,  
5 se distinguen tres configuraciones. La primera de ellas en color azul representa  
6 el elemento en su configuración indeformada o de referencia. El color naranja  
7 identifica a la componente de deformación no rígida mientras que en gris se  
8 ilustra la configuración de deformación rígida del elemento.

9 Para realizar cambios de coordenadas de una componente a otra se definen  
10 una serie de rotaciones, la primera de ellas denominada  $\mathbf{R}_0$  lleva al elemento  
11 desde su configuración canónica a su configuración de referencia. A partir de  
12 esa configuración, se halla la geometría deformada aplicando las transforma-  
13 ciones  $\mathbf{R}_1^g$  o  $\mathbf{R}_2^g$ , dependiendo el nodo de interés. La notación con supraíndice  
14 “g” refiere a la palabra globales. Es ilustrativo referirse de esta forma a di-  
15 cha transformación, ya que permite encontrar de forma “macro” cual es la  
16 configuración deformada partiendo del sistema de coordenadas canónico.



**Figura 3.1:** Rotaciones a cada configuración.

17 En la Figura 3.1, tanto las rotaciones locales  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$  como globales  $\mathbf{R}_1^g$  o  
18  $\mathbf{R}_2^g$  se utiliza el subíndice 1 o 2, mientras que para la rotación de deformación  
19 rígida no hace falta esta distinción. Este detalle resulta clave para comprender

la metodología corrotacional. Dado que la componente de deformación rígida es rectilínea, la orientación de cada nodo es idéntica por lo que es posible prescindir del subíndice. Para hallar la configuración deformada del elemento a partir de su configuración de referencia. Una alternativa dado un nodo arbitrario, por ejemplo el 1, consiste en aplicar consecutivamente las transformaciones  $\mathbf{R}_r$  y  $\bar{\mathbf{R}}_1$  encontrando así la configuración deformada.

### 3.1.2. Sistemas de coordenadas

Habiendo descrito las rotaciones del elemento, para deducir las matrices asociadas a cada transformación, resulta imprescindible definir un conjunto de sistemas de coordenadas que permitan seguir al elemento en cada configuración. Estas tríadas de vectores se muestran gráficamente a continuación en la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Descripción de las sistemas de coordenadas corrotacionales.

Primeramente se define un sistema de referencia canónico integrado por el sistema de coordenadas ortogonal  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ . Al aplicarle a estos vectores la transformación  $\mathbf{R}_0$ , se obtienen los vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Estos permiten ubicar al elemento en su configuración de referencia. Consecuentemente, para definir el sistema de coordenadas  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  solidario a la configuración de deformación rígida, basta con aplicar la transformación  $\mathbf{R}_1^g$ . Por último, para los nodos 1 y

2, denominado arbitrariamente con el subíndice  $i$ , el sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$  permite identificar la orientación y posición del nodo  $i$  en su configuración deformada. Esta es posible obtenerla rotando el sistema de coordenados  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  por la matriz  $\mathbf{R}_i^g$ .

La definición de los sistemas de coordenadas mencionados en el párrafo anterior no es arbitraria. Una vez definidas las matrices de rotación resulta, intuitivo y oportuno escribirlas a partir de los sistemas de coordenadas solidarios a cada configuración. Esa relación intrínseca entre matrices y los sistemas de referencia se establece en la Tabla a continuación:

Matriz	Vínculo de sistemas de referencia
$\mathbf{R}_0$	$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
$\mathbf{R}_i^g$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\bar{\mathbf{R}}_i$	$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rightarrow (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$
$\mathbf{R}_r$	$(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i) \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$

**Tabla 3.1:** Caracterización de matrices en términos de los sistemas de referencia.

Los vínculos descritos en la tabla anterior se desprenden de las definiciones para cada matriz. Los vectores a la izquierda y derecha hacen referencia a la y a su respectiva imagen. A modo de ejemplo para la primera fila se tiene:  $\mathbf{R}_0$ .  $(\mathbf{E}_1) = \mathbf{e}_1^T$ . Al plantear este tipo de vínculos entre el sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$  se puede hallar a partir del sistema de coordenadas canónico  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  de dos formas. La primera consiste aplicar consecutivamente las rotaciones  $\mathbf{R}_0$  y  $\mathbf{R}_i^g$  y la segunda en aplicar  $\mathbf{R}_r$  y luego  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Esto se muestra en la ecuación a continuación:

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_i. \quad (3.1)$$

A partir de la Ecuación (3.1) se puede obtener la matriz de rotación  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Para esto se hace uso de la propiedad de matrices ortonormales  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$  y se obtiene la ecuación que prosigue:

$$\bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_r)^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.2)$$

### 3.1.3. Desplazamientos lineales y angulares

El propósito de la descripción anterior, responde a la necesidad de crear herramientas analíticas que permitan vincular los desplazamientos lineales y angulares, para las distintas configuraciones, ubicando a cada elemento en coordenadas locales y globales. Las coordenadas globales se referencian al sistema de vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mientras que las locales a  $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$ . El vector de desplazamientos locales del elemento es compuesto por: el desplazamiento axial, etiquetado con la letra  $\bar{u}$ , y sus desplazamientos angulares nodales con el nombre  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$ . El escalar  $\bar{u}$  representa el estiramiento del elemento respecto de su largo inicial  $(l_0)$ . A su vez, el ángulo  $\bar{\theta}_1$  se asocia con la rotación del sistema de coordenadas  $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$  respecto de  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  indicados en la Figura 3.2. Estos siete grados de libertad se compactan en el vector  $\mathbf{d}_1 = (\bar{u}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ .

El vector de desplazamiento axial  $\bar{u}$  se descompone en tres componentes según el sistema de vectores  $\mathbf{r}_i$ , solidario a la configuración de deformación rígida. A este vector de desplazamientos se le denomina  $\mathbf{d}_r$ . Además, los desplazamientos de la viga se pueden expresar en coordenadas globales. Para esto se utilizan las 6 magnitudes clásicas  $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$ . Estas tienen origen en la configuración de referencia y permiten encontrar los desplazamientos en la configuración deformada. Para el nodo 1 los  $\delta \mathbf{w}_1^g$  hacen referencia a la rotación de los vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  hasta  $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1, \mathbf{t}_3^1)$ . Además, los desplazamientos globales del nodo 1  $\delta \mathbf{u}_1^g$  se corresponden con los desplazamientos del este nodo desde su configuración de referencia hasta la deformada. Esto se puede observar en la Figura 3.2.

Para resolver el problema mediante métodos numéricos, es necesario definir variaciones. Estas emplearán un rol esencial para el cálculo de matrices tangentes y fuerzas internas. Las variaciones infinitesimales de los desplazamientos se definen según:

$$\delta \mathbf{d}_1 = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T]^T \quad (3.3)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^g, \delta \mathbf{u}_2^g, \delta \mathbf{w}_1^g, \delta \mathbf{w}_2^g]^T \quad (3.4)$$

Consecuente con los desplazamientos infinitesimales, los diferenciales asociados a las transformaciones de giro  $\mathbf{R}_r^g, \mathbf{R}_i^g, \mathbf{R}_0$  y  $\bar{\mathbf{R}}_i$ . Para esto, primeramente deben obtenerse las matrices según lo explicitado en la Tabla 3.1. Las entradas

1 de  $\mathbf{R}_r$  y  $\mathbf{R}_i^g$  se hallan siguiendo las ecuaciones:

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_i^g = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] \quad (3.6)$$

2 Los vectores  $\mathbf{r}_i$  se hallan a partir del vector director  $\mathbf{r}_1$  que apunta del nodo  
3 1 al 2. El versor  $\mathbf{r}_1$  tiene como dirección la recta que une los puntos 1 y 2 en  
4 la configuración deformada, esto es equivalente a  $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1^g}{l_n}$ , donde  $l_n$   
5 es la distancia entre 1 y 2 en la configuración deformada. Dadas las posiciones  
6 iniciales de los nodos en coordenadas globales  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , sus desplazamientos  $\mathbf{u}_1^g$   
7 y  $\mathbf{u}_2^g$ , el largo una vez deformado se calcula  $l_n = \|\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1\|$ .

8 El vector auxiliar  $\mathbf{p}$  se define para hallar los vectores  $\mathbf{r}_i$  y partir de estos  
9 la base  $\mathbf{t}_i$ . Estos vectores son solidarios al movimiento ya que se encuentran  
10 anidados a la configuración de deformación rígida y local respectivamente.  
11 El constante cambio de estas configuraciones en cada iteración, conduce a la  
12 necesidad de expresarlos en función de vectores asistentes. Para esto se definen  
13  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [\mathbf{0} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0}]^T. \quad (3.7)$$

14 En la expresión anterior la matriz  $\mathbf{R}_0$  se obtiene colgando los vectores  $\mathbf{e}_i$   
15 escritos como combinación lineal de la base  $\mathbf{E}_i$ . Una vez calculada esta matriz  
16 y evaluado las expresiones de las Ecuaciones (3.7) se obtienen los restantes  
17 vectores asociados a la componente de deformación rígida según la siguiente  
18 ecuación:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1. \quad (3.8)$$

19 Habiendo definido las matrices de rotación es útil calcular las variaciones  
20 de las mismas. Estos cálculos son fundamentales para la transformación de  
21 variables y sus respectivos diferenciales.

$$\delta \overline{\mathbf{R}_i} = \delta \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_r^T \delta \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 \quad (3.9)$$

22 En la Ecuación (3.9) se aplica la regla de la cadena para el cálculo de  
23 diferenciales matriciales. Dado que la matriz de rotación  $\mathbf{R}_0$  vincula la con-  
24 figuración canónica con la de referencia, como ambas son fijas esta matriz es

1 constante. Por lo tanto, su variación es nula. Definiendo el vector de ángulos  
2 de la componente de deformación rígida con el símbolo  $\delta \mathbf{w}_r^g$ , las matrices de  
3 giro  $\overline{\mathbf{R}}_i$ ,  $\mathbf{R}_i^g$  y sus variaciones pueden hallarse según las expresiones:

$$\delta \mathbf{R}_i^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_i^g} \mathbf{R}_i^g \quad (3.10)$$

$$\delta \mathbf{R}_r^g = \widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g} \mathbf{R}_r. \quad (3.11)$$

4 En las Ecuaciones (3.10) y (3.11) el término  $\widetilde{\delta \mathbf{w}_r^g}$  refiere a la operación  
5 skew del vector  $\delta \mathbf{w}_r^g$ . Esta operación simplifica el producto vectorial de forma  
6 matricial y es sumamente útil para el cálculo de diferenciales asociados a ma-  
7 trices de rotación. La función  $\tilde{\mathbf{A}}$  aplicada al vector  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  toma la  
8 siguiente forma:

$$(\boldsymbol{\Omega}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

9 Para vincular los diferenciales de ángulos locales en términos de las varia-  
10 ciones globales se definen las matrices  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g, \quad (3.13)$$

11 Según los cocientes entre las componentes de los vectores  $\mathbf{p}_j$  y  $\mathbf{p}_{ij}$  de la Ecuación  
12 (3.7), el vector  $\mathbf{p}_{ij} = (\mathbf{R}_r^T \mathbf{p}) \mathbf{p}_{ij}$  y  $\mathbf{p}_j = \mathbf{R}_r^T \mathbf{p}_i$  se calcula matriz  $\mathbf{G}$  de acuerdo  
13 con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{\partial \mathbf{w}_r^g}{\partial \mathbf{d}^g} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] \\ \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_{12}}{2p_2} & -\frac{p_{11}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_1}{p_2 l_n} & \frac{p_2}{2p_2} & -\frac{p_{21}}{2p_2} & 0 \\ 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

1 Notoese que las matrices  $\mathbf{R}_r$  tiene dimensión 3x3. Para respetar dichas  
2 dimensiones,  $\mathbf{0}$  es una matriz nula de 3x3 e  $\mathbf{I}$  una matriz identidad del mismo  
3 número de filas y columnas. La relación entre los diferenciales anteriores, se  
4 pueden combinar de manera matricial, logrando así expresar los incrementos  
5 de ángulos locales en términos globales, según la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{\theta}_1 \\ \delta\bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.15)$$

6 Análogamente se debe transcribir la fuerza axial en función de las coorde-  
7 nadas globales. Con este objetivo se define un versor auxiliar  $\mathbf{r}$  que vincula los  
8 incrementos del desplazamiento axial  $\delta\bar{u}$  con los globales. Esto permite escribir  
9 la Ecuación (3.3) en relación a (3.4) haciendo uso de la expresión:

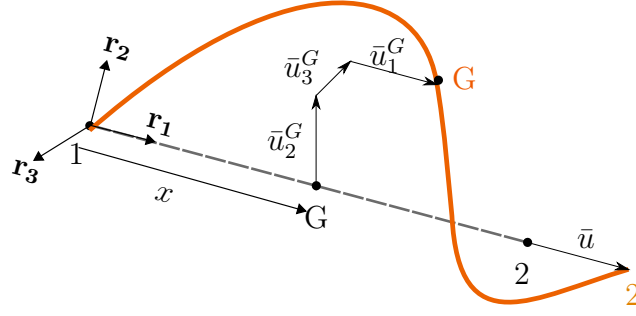
$$\delta\bar{u} = \mathbf{r} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r} = [-\mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3} \mathbf{r}_1^T \mathbf{0}_{1,3}]. \quad (3.16)$$

## 10 3.2. Formulación local

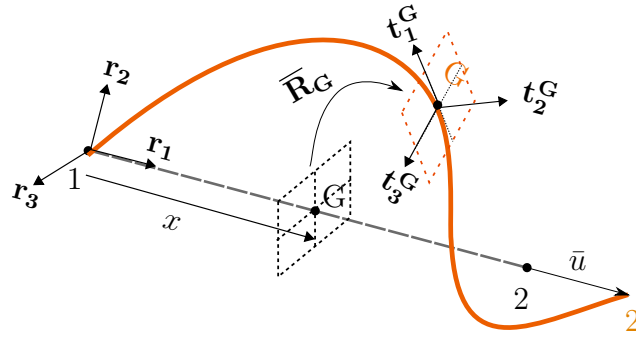
11 La fundamental ventaja y atractivo de la formulación corrotacional es su  
12 versatilidad ante diferentes tipos de elementos. Esto se debe al desacoplamiento  
13 analítico en la caracterización de los desplazamientos locales y globales. En este  
14 apartado, se detallan las magnitudes cinemáticas en la configuración local para  
15 el cálculo de los vectores y matrices dinámicas de la Sección 3.3.

16 Sea una sección transversal de un punto G ubicado a una distancia  $x$  del  
17 nodo 1 en la configuración rotada, el movimiento local de una sección ubicada  
18 a una distancia  $x$  de la viga, desde su configuración inicial, se define a partir  
19 de la rotación y traslación de dicha sección. Una ilustración de esto se muestra  
20 en la Figura 3.3, donde la configuración de deformación rígida se identifica en  
21 punteado y la configuración deformada en color naranja.

22 El movimiento de la base  $\mathbf{t}_i$  con respecto al sistema  $\mathbf{r}_i^G$  esta dado por los  
23 desplazamientos  $\bar{u}_3$  según el versor  $\mathbf{r}_3^G$  y análogamente para los vectores  $\bar{u}_2$  y  
24  $\bar{u}_1$ . Esto determina la ubicación del baricentro G. Su orientación se define a  
25 partir del plano punteado en color negro. La rotación de este respecto de tres  
26 ejes esta dada por el plano en naranja. Este se define por dos vectores  $\mathbf{t}_3^G$  y  $\mathbf{t}_2^G$   
27 dentro del plano y un versor perpendicular  $\mathbf{t}_1^G$ . La transformación  $\bar{\mathbf{R}}_G$  permite  
28 encontrar los transformados de la base  $\mathbf{r}_i^G$  etiquetados con las letras  $\mathbf{t}_i^G$  de  
29 acuerdo con la Figura 3.4. En esta también se observa el desplazamiento axial



**Figura 3.3:** Esquema de desplazamientos locales.



**Figura 3.4:** Ilustración grados de libertad locales.

1 de la barra  $\bar{u}$  correspondiente al del nodo 2 en la dirección  $\mathbf{r}_1$ .

2 Las interpolaciones para los puntos interiores al elemento se basan en las  
3 hipótesis de Bernoulli. Consecuentemente las interpolaciones son lineales para  
4 los desplazamientos axiales  $\bar{u}_1$  y el ángulo de torsión  $\bar{\theta}_1^G$ , según las ecuaciones:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_0}, \quad N_2 = \frac{x}{l_0}. \quad (3.17)$$

5 Por la contraria, tanto para los desplazamientos transversales  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_3$  como  
6 para los ángulos de flexión  $\bar{\theta}_2^G$  y  $\bar{\theta}_3^G$ , las interpolaciones se realizan través de  
7 los siguientes polinomios cúbicos:

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \quad N_4 = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \frac{x^2}{l_0} \quad (3.18)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{3x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad N_6 = \left(\frac{3x}{l_0} - 2\right) \left(\frac{x}{l_0}\right). \quad (3.19)$$

8 Para el punto G que se desplazó en el sistemas de coordenadas locales según  
9 el vector  $\mathbf{d}_1^G$ . Los valores en términos de la componente de deformación rígida  
10  $\mathbf{r}_i$  se calculan aplicando la siguiente ecuación:



$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^G \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \\ \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1^G. \quad (3.20)$$

Debido a que la matriz anterior presenta una gran cantidad de entradas nulas es útil agrupar las funciones de interpolaciones en matrices más pequeñas. De esta forma se construyen las matrices  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ . Estas expresan los desplazamientos transversales  $\bar{u}_2, \bar{u}_3$  como también los ángulos  $\bar{\theta}_1^G$  y  $\bar{\theta}_2^G$  y  $\bar{\theta}_3^G$  según los desplazamientos lineales del baricentro y los ángulos locales  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$  para el nodo 1 y 2 respectivamente. Analíticamente esto es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2^G \\ \bar{u}_3^G \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^G \\ \bar{\theta}_2^G \\ \bar{\theta}_3^G \end{bmatrix} = \theta_1 = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.2.1. Variaciones en desplazamientos

Ya se ha remarcado en reiteradas ocasiones la importancia de los desplazamientos diferenciales para el desarrollo de matrices tangentes y fuerzas. Antes de introducir al lector en la siguiente Sección, es preciso realizar una descripción previa para el cálculo de variaciones. En función de la Figura 3.3 queda definida la ubicación del baricentro OG partiendo desde el nodo 1. Esto se expresa según la siguiente ecuación con notación simplificada:

$$\text{OG} = \mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g + (\mathbf{x} + \bar{u}_1)\mathbf{r}_1 + (\bar{u}_2)\mathbf{r}_2 + (\bar{u}_3)\mathbf{r}_3 \quad (3.23)$$

Sustituyendo los polinomios interpolantes anteriormente en las Ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) es posible escribir los desplazamientos del baricentro según:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{I} \ \mathbf{0}] \quad (3.24)$$

$$OG = \mathbf{N}_1(\mathbf{x}_1^g + \mathbf{u}_1^g) + \mathbf{N}_2(\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g) + \mathbf{R}_r \mathbf{u}_l \quad (3.25)$$

1 y su diferencial asociado se calcula de la siguiente forma:

$$\delta OG = \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_g + \mathbf{R}_r \delta \mathbf{u}_l + \delta \mathbf{R}_r \mathbf{u}_l. \quad (3.26)$$

2 La Ecuación (3.26) depende de los desplazamientos locales. Esto dificulta  
3 el cálculo de su magnitud, ya que dicha variable es solidaria a sistemas de  
4 coordenadas móviles. Para solucionar este problema, se sustituyen las Ecuaciones  
5 (3.13), (3.14), (3.15) y (3.10) lográndose de este modo, escribir a  $\delta \mathbf{u}$  en  
6 coordenadas globales según la siguiente ecuación:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r (\mathbf{N} + \mathbf{P}_1 \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{u}}_l \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.27)$$

7 Además se compacta la notación definiendo la matriz  $\mathbf{H}_1$  según la ecuación  
8 a continuación:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.28)$$

9 Para deducir la igualdad anterior se asumió que los incrementos angulares  
10 de las componentes locales, definidas en la Ecuación (3.3), son despreciables  
11 frente a los de la componente de deformación rígida. Para el autor Le et al.  
12 2014, debido a las reducidas variaciones en la geometría de dos iteraciones  
13 consecutivas, no hay diferencias asociadas a los incrementos de ángulos locales  
14 y rígidos, matemáticamente :  $(\delta \overline{\boldsymbol{\theta}}_{ri} = \overline{\delta \mathbf{w}}_i)$ .

15 Un procedimiento similar se aplicará en los siguientes párrafos a las magnitudes  
16 angulares. Consecuentemente el diferencial rotación del centro de masa  
17 se puede calcular en función de los desplazamientos nodales globales según:

$$\delta \mathbf{w}^g(OG) = \delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r (\mathbf{P}_2 \mathbf{P} + \mathbf{G}^T) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.29)$$

18 Análogamente a la Ecuación (3.28), se compacta la notación definiendo la  
19 matriz  $\mathbf{H}_2$  según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.30)$$

### 3.3. Dinámica corrotacional

Una vez descritas las magnitudes cinemáticas de la Sección resulta plausible calcular los efectos dinámicos que generan sus variaciones. A continuación se presentan brevemente las variables más relevantes y una explicación concisa de su obtención. Estas variables son el vector de fuerzas internas, inerciales y sus respectivas matrices tangentes según las referencias (Le et al. 2014) y (Battini y Pacoste, 2002). Acompasando con el desarrollo histórico de la materia, resulta natural analizar primeramente definir las velocidades y aceleraciones para luego obtener los vectores de fuerza interna e inercial y sus matrices tangentes asociadas.

#### 3.3.1. Velocidades y aceleraciones

Las magnitudes dinámicas desempeñan un papel primordial en el análisis implementado y tanto velocidades como aceleraciones deben ser calculadas en términos globales. Para calcular estas expresiones hace falta expresar las derivadas temporales de las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{R}_r$ . Esta operatoria matricial, se traduce en derivar cada una de las entradas que integran la matriz. Dado que variable  $\mathbf{E}$  depende de  $\mathbf{R}_r$  se calculan inicialmente sus derivadas según La (3.11). Al derivar se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_r = \mathbf{R}_r \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r}. \quad (3.31)$$

Al sustituir esta ecuación en  $\dot{\mathbf{E}}$  se deduce su según la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\dot{\mathbf{w}}_r} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{E}_t. \quad (3.32)$$

Derivando respecto al tiempo la Ecuación (3.28) se deduce la siguiente expresión para la velocidad lineal  $\dot{\mathbf{u}}$ :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.33)$$

Aplicando la regla del producto a la Ecuación (3.33) se halla la aceleración lineal  $\ddot{\mathbf{u}}$  del baricentro:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g + (\dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{E}^T + \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{E}}^T) \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.34)$$

1 El valor skew de las velocidades angulares sobre la componente de deforma-  
2 ción rígida  $\widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r$  se obtiene a partir del operador definido en la Ecuación (3.12),  
3 aplicado al vector  $\dot{\mathbf{w}}_r = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g$ . Además para simplificar la notación a fu-  
4 turo, se condensa la Expresión (3.34) definiendo la matriz  $\mathbf{C}_1$  como se escribe  
5 a continuación:

$$\mathbf{C}_1 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_1 + \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_t, \quad (3.35)$$

6 quedando definida la aceleración lineal de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_1 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{R}_r \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.36)$$

7 Al igual que para las velocidades de traslación, por practicidad se simpli-  
8 ficó la nomenclatura para evitar la lectura engorrosa de notación. Derivando  
9 la Ecuación (3.29) respecto a la variable temporal, se obtiene la siguiente ex-  
10 presión para la velocidad angular  $\dot{\mathbf{w}}$ :

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g. \quad (3.37)$$

11 Utilizando la regla del producto se deduce la siguiente expresión para la  
12 aceleración angular  $\ddot{\mathbf{w}}$ :

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_r \mathbf{H}_2 \mathbf{E}^T \ddot{\mathbf{d}}_g + \dot{\mathbf{R}}_r \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.38)$$

13 A partir de esto, se compacta la expresión de la Ecuación (3.38) definiendo la  
14 matriz  $\mathbf{C}_2$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_2 = \widetilde{\dot{\mathbf{w}}}_r \mathbf{H}_2 + \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{E}_t \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

15 Una descripción detallada puede encontrarse en Le et al. 2014. Dentro del  
16 apéndice de este trabajo, se desglosa las operaciones para calcular las deri-  
17 vadas temporales de las matrices  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{H}_2$ . También es posible escudriñar la  
18 deducción de las matrices  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .

### 3.3.2. Fuerza interna y matriz tangente

En este apartado se buscan obtener las expresiones de fuerza interna del elemento y su matriz tangente estática. El vector de fuerza interna  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  para el nodo  $i$  se compone, de acuerdo a la nomenclatura desplazamiento-ángulo, por la fuerza axial  $fl_1$ , dos momentos flectores  $M_1^i$ ,  $M_2^i$  y un momento torsor  $M_3^i$  para cada nodo en su configuración deformada. Esta elección de nomenclatura para el vector  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$  de fuerza interna se presenta a continuación:

$$\mathbf{f}_1^{\text{int}} = [ fl_1 \ M_1^1 \ M_2^1 \ M_3^1 \ M_1^2 \ M_2^2 \ M_3^2 ] = [ fl_1 \ \mathbf{m} ]. \quad (3.41)$$

La fuerza interna calculará inicialmente para coordenadas locales denominada  $\mathbf{f}_1^{\text{int}}$ , donde su obtención es relativamente sencilla, para luego transcribir estos resultados en términos globales  $\mathbf{f}_g^{\text{int}}$ . Con este cometido se define la matriz  $\mathbf{B}$  de cambio de base según la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{d}_1 = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_1^{\text{int}}. \quad (3.42)$$

Haciendo uso de la descomposición corrotacional, el cambio de variables se realiza en dos etapas sucesivas. El primer cambio de coordenadas permite expresar los grados de libertad locales referenciados a la configuración de deformación rígida. Para clarificar, se ejemplificarán estos cambios de base para los desplazamientos, siendo análogo para el resto de las magnitudes. Según los sistemas de referencia de la Figura 3.2, los cambios de variables refieren a escribir primeramente los desplazamientos locales en términos de los rígidos ( $\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{r}_i$ ). Consecutivamente, el segundo cambio de variables, transforma los desplazamientos desde la configuración de deformación rígida a la de referencia ( $\delta \mathbf{d}_1 \rightarrow \delta \mathbf{d}_g$ ). De esta manera se logra expresar todas las magnitudes relevantes en función de coordenadas inmóviles y globales.

Con la ayuda algebraica de la matrices auxiliares  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{E}$ , definidas en las Ecuaciones (3.13) y (3.14) es posible vincular los ángulos diferenciales locales  $\delta \bar{\theta}_i$  con los incrementos globales  $\delta \mathbf{d}_g$ . Esto permite conocer los momentos flectores y torsores de la viga en coordenadas globales. Análogamente el vector auxiliar  $\mathbf{r}$  contiene a  $\mathbf{r}_1$  según el sentido axial de la barra, por lo que reescribir este último permite expresar la fuerza de directa  $fa1$  en términos de la base

1  $\mathbf{E}_i$ . Estos razonamientos se plasman en las ecuaciones a continuación:

$$\mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l^{\text{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P}\mathbf{E}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (3.43)$$

$$\delta \mathbf{f}_g^{\text{int}} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_l^{\text{int}} + \delta \mathbf{r}^T f_{a1} + \delta(\mathbf{E}\mathbf{P}^T) \mathbf{m}. \quad (3.44)$$

2 Una vez calculadas las fuerzas internas es de sumo interés, para la resolución  
3 empleando métodos numéricos, obtener sus derivadas respecto de los despla-  
4 zamientos. La matriz tangente  $\mathbf{K}_g$  representa esta magnitud y su expresión se  
5 escribe a continuación:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{f}_l)}{\partial \mathbf{d}_g} \quad (3.45)$$

6 La matriz  $\mathbf{B}$  permite realizar el cambio de coordenadas  $\delta \mathbf{d}_a$  a  $\delta \mathbf{d}_g$ , de acuer-  
7 do con lo definido en (3.42). A su vez, se define la variable  $\mathbf{K}_l$  correspondiente  
8 al aporte de rigidez local del elemento. Esta depende de los estiramientos y  
9 rotaciones de la viga en su configuración local y también de la ley material  
10 implementada. Esto evidencia la versatilidad del planteo corrotacional ante  
11 diferentes tipos de elementos, donde solo hace falta modificar la matriz  $\mathbf{K}_l$ .

12 Para calcular las matrices tangentes se define la matriz  $\mathbf{D}$  anti-simétrica y  
13 se calcula en función de los productos internos de los vectores  $\mathbf{e}_i$ , esta aporta  
14 la rigidez no lineal correspondiente al a fuerza axial  $f_{l1}$  de la barra. Esta se  
15 calcula según la siguiente expresión:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \frac{1}{l_n} (\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T) \quad (3.46)$$

16 Por otra parte, se define matriz auxiliar  $\mathbf{Q}$  a partir del producto de  $\mathbf{P}$  y  
17 los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, de acuerdo con la  
18 ecuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(2)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(3)} \\ \widetilde{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

1 Ademias el vector auxiliar **a** se construye de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(M_1^2 + M_2^2)/l_n - (M_1^3 + M_2^3)/l_n \\ (M_1^3 + M_2^3)/l_n \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

2 Operando con la regla del producto al diferencial de fuerza interna de la  
3 Ecuación (3.44) y sustituyendo las definiciones postuladas en las Ecuaciones  
4 (3.48), (3.46) y (3.47), la matriz tangente resulta:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a} \mathbf{r}. \quad (3.49)$$

5 Se destaca que la matriz tangente de la Ecuación (3.49) es asimétrica,  
6 sin embargo según Nour-Omid y Rankin, 1991 esta puede ser simetrizada sin  
7 perder la convergencia cuadrática para el método de N-R, siempre y cuando  
8 momentos externos nodales no sean aplicados. En este trabajo se simetrizó  
9 la matriz tangente, ya que en la aplicación los elementos serán cargados con  
10 fuerzas, esto conlleva a un numero mayor de iteraciones en converger para un  
11 determinado nivel de carga. No obstante, debido a la precisión y consistencia  
12 del vector de fuerza interna el método debe converger Rankin y Nour-Omid,  
13 1988.

### 14 3.3.3. Fuerza inercial y matrices de masa tangentes

15 A continuación se explayan las ecuaciones y razonamientos fundamentales  
16 para la deducción del vector de fuerzas inerciales y sus matrices tangentes  
17 asociadas. El atractivo principal de la referencia de Le et al. 2014 se fragua en  
18 la consistencia de las matrices tangentes. Según el autor y otros el grado de  
19 complejidad matemático no permitía desarrollarlas De Borst et al. 2012. Esta  
20 consistencia se debe al encare analítico del vector de fuerzas inerciales, según el  
21 planteo cinemático de las variables descritas en la Sección 3.3. El abordaje será  
22 análogo al desarrollado para fuerzas internas y su matriz tangente. Se calculará  
23 primeramente la fuerza inercial y luego sus derivadas, con la salvedad de que  
24 la magnitud primaria será la energía cinética del elemento  $K$ . Esta propiedad  
25 escalar depende de las velocidades y aceleraciones de traslación globales ( $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ )

1 como también angulares ( $\dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}$ ) según la siguiente ecuación:

$$K = \frac{1}{2} \int_{l_0} \dot{\mathbf{u}}^T A_\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}} dl_0 \quad (3.50)$$

2 Dada la Ecuación (3.50) se calcula la variación de energía cinética del ele-  
3 mento. Para la obtención de esta expresión se aplicó la regla del producto de  
4 diferenciales y el teorema de Leibniz para integrales de extremos fijos, obte-  
5 niéndose la siguiente expresión:

$$\delta K = - \int_{l_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}}] dl_0 \quad (3.51)$$

6 Se hace notar que por conveniencia se omitieron los subindices "g" para  
7 las magnitudes dinámicas ( $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ ) y sus respectivas derivadas. De igual forma,  
8 las variables del integrando en las Ecuaciones (3.50) y (3.51) se omitió la no-  
9 menclatura OG referida al centroide del área transversal a la viga, que si el  
10 elemento es de densidad uniforme coincide con el centro de masa de la sec-  
11 ción. Los elementos serán de área constante siendo  $A_\rho$  el producto del área  
12 transversal y la densidad del material, análogamente la matriz  $\mathbf{I}_\rho$  es el tensor  
13 de inercia en la configuración deformada. Si se conoce el tensor en la configu-  
14 ración de referencia este se puede obtener al aplicarle las rotaciones  $\mathbf{R}^g$  y  $\mathbf{R}_o$   
15 consecutivamente.

16 Análogo al vector de fuerzas internas, los términos dinámicos son responsa-  
17 bles del cambio de energía cinética del elemento. De igual forma, al diferenciar  
18 el vector de fuerza inercial  $\mathbf{f}_k$  se obtienen las matrices tangentes dinámicas  
19 según las siguientes ecuaciones:

$$\delta K = \mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{d}_g \quad (3.52)$$

$$\delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K} \delta \mathbf{d}_g. \quad (3.53)$$

20 En la Ecuación 3.53 se diferencian tres matrices tangentes. Cada una de  
21 ellas asociada a la derivada parcial de la energía cinética respecto de los des-  
22 plazamientos, velocidades y aceleraciones. Evidentemente, la matriz de masa  
23 consistente  $\mathbf{M}$  se corresponde con la derivada respecto de la aceleración, conse-  
24 cutivamente la matriz  $\mathbf{C}_k$  giroscópica se asocia la velocidad. Por ultimo  $\mathbf{K}$ , se le  
25 llama a la derivada en desplazamientos y recibe el nombre de matriz centrífuga.



1 Determinados autores Cardona y Geradin, 1988 y Hsiao et al. 1999 proponen  
2 considerar unicamente  $\mathbf{M}$ , sin embargo exhaustivos estudios en (Hsiao et al.  
3 1999) prueban que agregar la matriz  $\mathbf{C}_k$  mejora el desempeño computacional  
4 para numerosos casos.

5 Las expresiones detalladas de estas matrices, en conjunto con el vector  
6 de fuerzas, se deducen aplicando cambios de variables sucesivos. Esto resulta  
7 idéntico a la metodología aplicada para fuerzas internas. A diferencia de la  
8 energía elástica, la energía cinética depende, no solo de desplazamientos sino  
9 también de velocidades y aceleraciones del elemento, detalladas en la Sección  
10 3.3.1.

11 Sustituyendo la Ecuación (3.53) en (3.51) se halla una fórmula para la  
12 fuerza inercial respecto de las variables cinemáticas y sus diferenciales. Al  
13 integrar los desarrollos en coordenadas globales de las Ecuaciones (3.34), (3.36),  
14 (3.37) y (3.38) es factible calcular el vector de fuerza inercial como se muestra  
15 a continuación:

$$\mathbf{f}_k = \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_r^T A_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}] \right\} d_l \right] \quad (3.54)$$

16 Como se mencionó anteriormente para el obtener analíticamente las expre-  
17 siones de la matriz consistente y giroscópica hace falta hallar analíticamente el  
18 diferencial fuerza interna. Una vez identificadas los términos que multiplican a  
19 cada incrementos de las magnitudes cinemáticas, se deducen ambas matrices.  
20 Finalmente, esto se expresa de forma matemática en las siguientes expresiones:

$$\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{d}_g \approx \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_g + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{d}}_g \quad (3.55)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{H}_2 \right\} d_l \right] \mathbf{E}^T \quad (3.56)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{E} \left[ \int_{l_0} \left\{ \mathbf{H}_1^T A_\rho (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T \mathbf{I}_\rho (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_4) + \dots \right\} \right] \mathbf{E}^T \quad (3.57)$$

$$\dots \int_{l_0} \mathbf{H}_2^T (\ddot{\mathbf{w}} \mathbf{I}_\rho - \widetilde{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{I}_\rho) d_l \quad (3.58)$$

# 1 Capítulo 4

## 2 Metodología

3       En este capítulo se exponen los métodos centrales desarrollados durante  
4 este trabajo de tesis. Este desarrollo metodológico es el principal atractivo de  
5 esta investigación, ya que constituye un aporte original e innovador respecto a  
6 la bibliografía consultada. El problema de modelado computacional de líneas  
7 eléctricas afectadas por fenómenos de vientos extremos se construyó sobre dos  
8 etapas sucesivas. En primer lugar, se explican cuestiones sobre el modelado  
9 físico. Los protagonistas del fenómeno son el viento y la estructura. Respecto  
10 al primero se describe en la Sección [4.1.2](#) el campo de velocidades absoluto,  
11 relativo y las fuerzas que el viento genera sobre el conductor. Análogamente  
12 se despliegan las condiciones iniciales y de borde consideradas para el mo-  
13 delado estructural en la Sección [4.1.1](#). Posteriormente, dentro de la Sección  
14 [4.2](#) se describe la deducción del algoritmo de HHT aplicado a la formulación  
15 corrotacional para modelado de conductores con fuerzas aerodinámicas. Este  
16 desarrollo no se ha registrado en la bibliografía consultada y tampoco los pseu-  
17 docódigos que permiten incorporar dicha formulación al software [ONSAS](#). Por  
18 último una vez explicada la deducción se postulan las hipótesis del modelado  
19 físico y computacional en las Secciones [4.1.2.2](#) y [4.2.2.1](#) respectivamente.

## 1 4.1. Aspectos de modelado físico

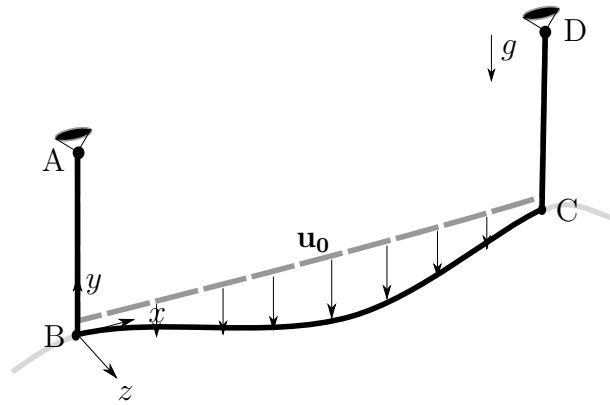
### 2 4.1.1. Condiciones iniciales y de borde para la estruc- 3 tura

4 El abordaje científico computacional consiste en abstraer un fenómeno de  
5 la realidad, para crear un modelo en el computador, que se comporte de for-  
6 ma análoga. Permitiendo emular y controlar determinadas variables de estudio  
7 relevantes al observador. En este acto de representación existen simplificacio-  
8 nes inherentes, que reducen los factores incidentes al sistema como objeto de  
9 estudio.

10 Una vez aislado el objeto de su entorno, es necesario imponer determina-  
11 das condiciones que representan la interacción del entorno sobre el sistema.  
12 Estas imposiciones efectuadas por el contexto, del cual el objeto está siendo  
13 desvinculado, se nominan condiciones de borde. En particular, para esta in-  
14 vestigación, se consideraron las siguientes hipótesis del modelado estructural  
15 respecto a sus condiciones de borde y e iniciales.

- 16 1. Las torres del sistema de transmisión se encuentran a la misma altura,  
17 ignorándose cualquier variación en el perfil topográfico del terreno. Como  
18 consecuencia, los puntos de anclaje que unen las cadenas a las torres (D  
19 y A), pertenecen a un mismo plano paralelo a la superficie terrestre.
- 20 2. El conductor es conformado por un único cable continuo que discurre  
21 el espacio sujetado por aisladores eléctricos. Su proceso de fabricación  
22 es mediante una trenza con lingas de acero y aluminio, que poseen una  
23 significativa rigidez a flexión. Esta razón conduce inevitablemente a mo-  
24 delarlo con elementos de vigas, las cuales tienen un variación de ángulo  
25 continuo. Consecuentemente, al escindir el vano BC de su continuación  
26 (en color gris), se deben imponer las condiciones de ángulo nulo en  $x$  para  
27 los nodos C y B. Esta condición es la única que respeta las condiciones  
28 de deformación angulares impostadas por la geometría del sistema.
- 29 3. Como el conductor no presenta fuerzas en el sentido axial, los puntos B y  
30 C no se deforman según el eje  $x$ , ergo sus trayectoria pertenecen al plano  
31  $z-y$ . Esto debe forzarse en los nodos B y C.
- 32 4. La exigua resistencia a flexión de los elementos aisladores DC y AB,  
33 obliga a instalarlos con sus extremos articulados. Es por esto que se mo-  
34 delaron a partir de barras de Green. Las condiciones de borde dependen

- 1 del ejemplo al que se haga referencia. Para el Ejemplo 3 los puntos D  
2 y A se encuentran anclados a la torre, acompañando sus movimientos,  
3 mientas que para el 2 se encuentran fijos.
- 4 5. A partir de la configuración de referencia, dibujada con línea punteada  
5 en La Figura 4.1, se aplica una condición inicial de desplazamiento  $\mathbf{u}_0$ .  
6 Esta se corresponde con la solución estática del sistema cargado por el  
7 peso propio en la dirección de  $z$  de la gravedad.



**Figura 4.1:** Esquema de condición inicial y de borde.

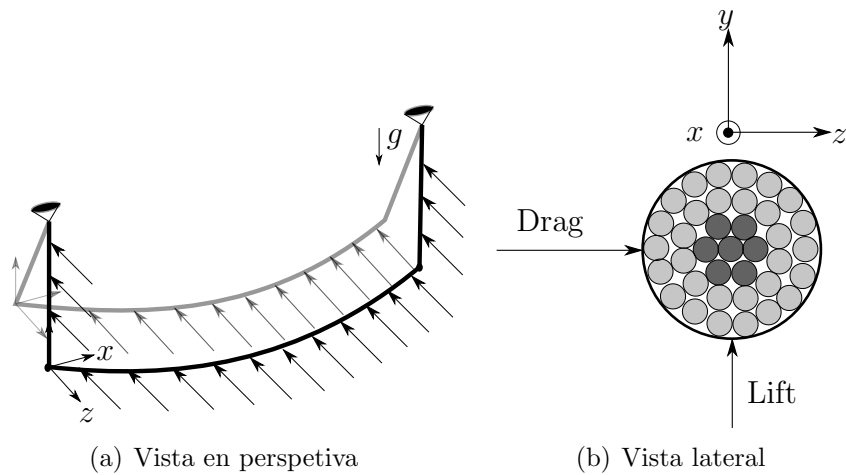
8 Una vez plasmadas las condiciones de borde cinemáticas (referidas a los  
9 desplazamientos) anteriores. Se establecen a continuación las principales con-  
10 diciones de borde (referidas a las fuerzas, momentos) dinámicas:

- 11 1. No se consideran las fuerzas internas transmitidas por los vanos aledaños.
- 12 2. Se supone que no existe deslizamiento relativo entre las hebras que com-  
13 ponen al conductor.
- 14 3. Se desprecian las fuerzas de tensado y las condiciones de desplazamiento  
15 no homogéneas durante el proceso de instalación en la línea. Vale aclarar  
16 que este caso de pretensión refiere a la configuración punteada en la  
17 Figura 4.1, en ese estado la tensión es 0  $N$ . No obstante, al aplicarse  
18 el peso propio la tensión en el conductor se incrementa hasta que se  
19 equilibre las fuerzas externas de la gravedad con las internas.
- 20 4. Las simulaciones se realizan en dos etapas sucesivas, primeramente se  
21 imponen la condiciones iniciales de desplazamientos y una vez estabiliza-  
22 da la respuesta por el amortiguamiento interno y aerodinámico se ejerce  
23 la fuerza del viento sobre el cable.

1 5. Los vínculos dinámicos entre los elementos de vigas y de barra se im-  
2 plementaron de forma tal, que no se transmiten los momentos de unos a  
3 otros. Por lo tanto, en los nodos de sujeción los elementos de barra CD  
4 y AB transmiten únicamente fuerzas direccionales en C y B.

#### 5 4.1.2. Modelo de viento

6 Un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento sufre determinadas car-  
7 gas debido al campo de presiones en su superficie. Este campo suele producir  
8 fuerzas de arrastre (drag), en la dirección del flujo y fuerzas perpendiculares  
9 (lift). Las cargas de drag son el resultado de integrar las tensiones rasantes,  
10 en la capa limite a lo largo de la frontera del cuerpo. Y luego proyectarla la  
11 fuerza neta en la dirección del flujo medio. A diferencia de estas, las fuerzas  
12 lift que aparecen sobre el sólido, se deben a la asimetría del campo de presio-  
13 nes entre el intradós (sona de menor presión) y el extradós del sólido inmerso.  
14 Esta diferencia de presiones puntuales entre dos superficies contrarias, genera  
15 una circulación circundante en el campo de velocidades relativos. Al integrar  
16 ese campo en curva cerrada, correspondiente a la silueta del cuerpo, se induce  
17 una fuerza. Ambos efectos dinámicos sobre el cable se ilustran en la Figura  
18 4.2(b). Para cuerpos perfectamente simétricos, en términos tangenciales, la  
19 componente de lift es nula. Esto se debe a la simetría de revolución del cuerpo,  
20 garantiza que la circulación sea nula, pues no hay diferencias, ni geométricas,  
21 ni dinámicas entre las superficies del sólido.



**Figura 4.2:** Ilustración del viento y sus efectos.

La componente unidireccional del flujo a una altura dada, puede ser desglosada en un termino medido y otro fluctuante  $w_v(t) = w_m(t) + w'(t)$ . A partir de esto, la velocidad media para un período  $T$  toma la expresión de la Ecuación (4.1):

$$w_m(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} w_v(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

El valor del periodo  $T$  debe ajustarse minimizando la desviación estándar asociada a la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre la desviación estándar de la velocidad fluctuante y la media para un instante de tiempo dado. Sin embargo, para este trabajo no se consideran las fluctuaciones debido a la presencia de vórtices en el flujo, por lo que el valor de  $T = 1/30$  s y de velocidad media, se extrajo del artículo (Stengel y Thiele, 2017).

Considerando el aire como un fluido no newtoneano,  $\rho$  su densidad asociada a determinada temperatura,  $C_d(Re)$  el coeficiente de drag para como función del número de Reynolds, entonces la fuerza media en el sentido del flujo (“drag”) para un elemento cilíndrico de diámetro  $d_c$  y largo  $l_e$  se calcula según la Expresión (4.2):

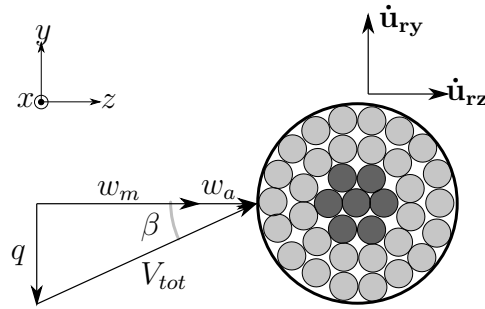
$$F_d(t) = \int_{l_0} \frac{\rho(T)C_d(Re)}{2} d_c w_m(t)^2 dl = \frac{\rho C_d}{2} d_c w_m(t)^2 l_e \quad (4.2)$$

Para este cálculo se asumió constantes las magnitudes al interior del elemento, es por esto, que el valor de la integral, es simplemente el producto del integrando por el largo del intervalo. Además se para este trabajo la carga del viento sobre el elemento se modeló como una fuerza nodal equivalente a la mitad de  $F_v$ . Si bien la fuerza del viento es distribuida, los momentos nodales que estas inducen, se cancelan con los elementos aledaños. Por otra parte, los valores de  $C_d$  se extrajeron de las referencias (Foti y Martinelli, 2016) y se verificaron con el estudio para estos coeficientes durante TC (Mara, 2007). La densidad  $\rho$  del aire se consideró la usual para presión atmosférica y una temperatura de 20 °C.

#### 4.1.2.1. Campo de velocidades relativos, absolutos y fuerzas asociadas.

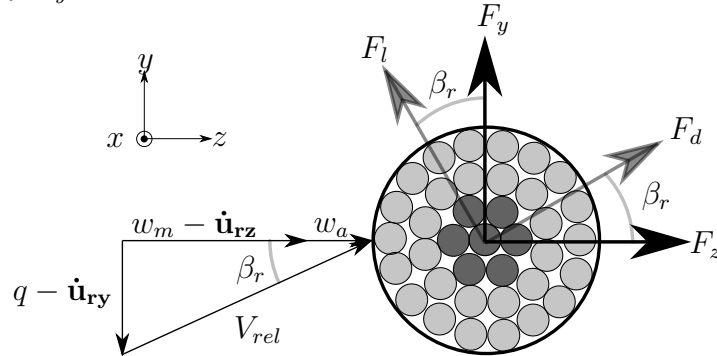
En este trabajo no se resuelve un sistema acoplado fluido-estructura. No obstante, es preciso notar determinadas consideraciones sobre el amortigua-

1 miento introducido. Dada una sección transversal al cable arbitraria, donde  
 2 el viento tiene determinada componente transversal según  $z$  y perpendicular  
 3 (según  $y$ ). En la figura 4.3 se indican con el nombre  $w$  y  $q$ . En esta figura las  
 4 velocidades se referencian a un observador solidario con la tierra y por tan-  
 5 to absoluto. Asimismo en esta imagen se representan las velocidades media  
 6 y fluctuante  $w_m$  y  $w_a$ , que sumada a la velocidad  $v$ , resulta en el vector  $V_{tot}$   
 7 formando un ángulo  $\beta$  con la horizontal. Debido a la fuerza que el viento ejerce  
 8 sobre el conductor, este despliega una determinada velocidad rígida en ambas  
 9 direcciones identificadas con las letras  $\dot{\mathbf{u}}_{ry}$  y  $\dot{\mathbf{u}}_{rz}$ .



**Figura 4.3:** Esquema en sistema de referencias absoluto.

10 Si el observador se encuentra solidario al rígido, en un sistema de referencia  
 11 anidado a el, la velocidad percibida de viento, sería la diferencia entre las  
 12 velocidades absolutas y las rígidas. Esto se muestra en la figura 4.4. Este campo  
 13 de velocidades relativos es el responsable de las fuerzas de drag  $F_d$  y de lift  $F_l$ .  
 14 Estas pueden ser proyectada en el sistema de ejes globales, ocasionando dos  
 15 fuerzas  $F_z$  y  $F_y$ .



**Figura 4.4:** Esquema en sistema de referencias relativo.

16 Habiendo descrito las variables que intervienen en este análisis plano, donde  
 17 no se consideran cambios de orientación en sentido axial del conductor, resulta  
 18 natural escudriñar en las fórmulas que vinculan las magnitudes cinemáticas

1 y dinámicas. La velocidad relativa absoluta, es el cuadrado de los catetos,  
2 tal y como se expresa en la Ecuación (4.3). Tomando como hipótesis que las  
3 velocidades relativas del rígido y la componente vertical  $v$ , son mucho menores  
4 que las asociada al flujo medio, en el sentido de  $z$  se deduce la Ecuación (4.4).

$$V_{rel}^2 = (w_m + w_a - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rx}})^2 + (v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}})^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{V_{rel}^2}{w_m} = w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}}) \quad (4.4)$$

5 La carga de drag postulada en la Ecuación (4.1) se escribe por unidad de  
6 longitud y se reescribe en (4.6). Además, se muestra que para las asunciones  
7 de velocidad media predominante, el ángulo de ataque es cercano a  $0^\circ$ . Para  
8 formular esto matemáticamente se plantean las Ecuaciones (4.6) y (4.5).

$$\tan(\beta_r) = \frac{v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}}}{w_m - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}} + w_a} = \frac{\frac{v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}}}{w_m}}{1 - \frac{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}} + w_a}{w_m}} \approx 0 \quad (4.5)$$

$$F_d = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m + 2(w_a - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}})) w_m \quad (4.6)$$

9 Resulta relevante descomponer la fuerza de arrastre según las componentes  
10  $z$  e  $y$ . Estas son importantes ya que permiten, en un sistema de coordenadas  
11 absoluto, calcular la carga a la que se somete el conductor. A partir de estas  
12 se hallan el campo de desplazamientos, velocidad y aceleraciones del sólido.  
13 Considerando que el ángulo  $\beta$  es ínfimo y por lo tanto  $\tan(\beta) \approx \sin(\beta) \approx 0$  y  
14  $\cos(\beta) = 1$  al aplicar trigonometría se obtienen los siguientes valores de fuerza:

$$F_z = \frac{\rho d_c C_d}{2} (u_m^2 + w_a^2 - 2w_a \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}}) \cos(\beta_r) = \bar{F}_x + F_a - F_{vis} \quad (4.7)$$

$$F_y = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2 + w_a^2 - 2w_a \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}}) \sin(\beta_r) \approx 0 \quad (4.8)$$

15 Al igual que las variables cinemáticas, las dinámicas se pueden desglosar en  
16 componentes alternantes y medias. La parte media de cada magnitud, es una  
17 promedio móvil a lo largo del tiempo y naturalmente, las fuerzas de este tipo,  
18 se vinculan con las velocidades medias. En contraste, los términos alternantes  
19 tienen media nula y emanan de las velocidades fluctuantes. Ahora bien, un  
20 tercer termino surge al desarrollar la Ecuación (4.6). Este factor depende del



1 producto entre la velocidad media de viento y la del rígido. Vinculando al fluido  
2 y al sólido, es por esto que recibe el nombre de amortiguamiento aerodinámico.  
3 Por otra parte, desde la perspectiva del autor resulta sorprendente el sentido de  
4 esta fuerza, siendo contrario a la ejercida por el viento. A esta descomposición  
5 de fuerzas según  $z$  se le llaman  $\bar{F}_x$ ,  $F_a$ ,  $-F_{vis}$  a la componente media, alternante  
6 y de amortiguamiento dinámico respectivamente. Sus expresiones se detallan  
7 a continuación:

$$\bar{F}_x = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_m^2) \quad (4.9)$$

$$F_a = \frac{\rho d_c C_d}{2} (w_a^2) \quad (4.10)$$

$$F_{vis} = \frac{\rho d_c C_d}{2} (2\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{rz}} w_m) \quad (4.11)$$

#### 8 4.1.2.2. Hipótesis aplicadas al modelado de viento

9 Una vez descrito el análisis general de los anteriores párrafos, se postulan  
10 las premisas en las cual se fragua este trabajo. Estas evidencian las limitaciones  
11 de la metodología sobre el modelado de viento. Este si bien no el eje central  
12 de la investigación, es el agente externo principal y el causante de este estudio.  
13 Dicho esto es menester establecer las hipótesis del modelo y sus implicancias:

- 14 1. No se consideran cambios en la orientación axial del conductor.
- 15 2. La velocidad incide en el sentido  $z$  de forma perpendicular a la línea.
- 16 3. La velocidad relativa transversal  $v - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{ry}}$  al igual que la componente  
17 alternante son mucho menores en magnitud a la velocidad media en el  
18 sentido de  $z$  llamada  $w_m$ .
- 19 4. La fuerza lift debido a la simetría de revolución del conductor se considera  
20 despreciable frente al drag.
- 21 5. Para la fuerza en el sentido de  $z$  se desprecia la componente fluctuante  
22  $F_a$ .
- 23 6. Para cálculo del amortiguamiento aerodinámico  $f_{vis}$  se promedió la ve-  
24 locidad media en un valor constante igual al valor medio para todo el  
25 dominio temporal de simulación.

26 El primer supuesto parte del modelo figurado en 4.4, para poder realizar  
27 este análisis plano, se obvian las fluctuaciones espaciales en el sentido axial

1 del conductor. Esta asunción no es del todo correcta, pues la turbulencia del  
2 fenómeno provoca fluctuaciones en las cargas a lo largo de la línea, cambiando  
3 así, su orientación. Esto se asocia directamente con la hipótesis 4, donde la  
4 fuerza alternante proveniente de la presencia de vórtices se desprecia.

5 Por otra parte el flujo se consideró unidimensional según el eje  $z$  en la Fig-  
6 ra 4.2(a), siendo este el caso más amenazante para el conductor. Esta hipótesis  
7 proviene de diferentes trabajos publicados, donde la componente perpendicu-  
8 lar a la superficie terrestre o ascendente (según  $y$ ) suele ser significativamente  
9 menor a la paralela (en el sentido de  $z$ ) (Durañona y Cataldo, 2009) (Stengel  
10 y Thiele, 2017) Yang y Hong, 2016. Si bien simplifica lo hace de forma con-  
11 servadora. Puesto que supone al sistema de transmisión, en el tiempo inicial,  
12 dispuesto completamente perpendicular al sentido del viento, es así que este  
13 descarga su mayor fuerza sobre el sistema (Hipótesis 2).

14 Este escenario es el más peligroso y desafiante para la seguridad e integridad  
15 de la línea. Otro argumento posible a favor de esta hipótesis, se sustenta en  
16 la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo, además del  
17 peso que se opone a la fuerza de sustentación. De todos modos, esta fuerza en  
18 sentido ascendente se despreció frente al drag, consecuencia de la simetría de  
19 revolución tangencial del conductor. Esto se establece en la Hipótesis 4.

20 Otra hipótesis a clarificar refiere al amortiguamiento aerodinámico (Hipóte-  
21 sis 6). Se utilizó una simplificación adicional en la velocidad de viento para su  
22 cálculo. Se consideró una velocidad constante, igual al promedio de viento en  
23 todo el dominio temporal. Este es el valor que insertó para el cálculo de  $D$   
24 según la Ecuación (4.11). Por último se explicitan las premisas 3 y 5 que fue-  
25 ron consideradas para calcular el campo de velocidades relativo y sus fuerzas  
26 asociadas.

## 27 4.2. Aspectos de modelado computacional

### 28 4.2.1. Ecuación de equilibrio

29 En esta sección se desarrolla la ecuación de equilibrio del sistema dinámi-  
30 co con valores de fuerzas externas, internas e inerciales. No se ha encontrado  
31 registros de este planteo analítico en la referencia consultada. Resulta impres-  
32 cionante formular esta deducción para comprender los argumentos e hipótesis  
33 que subyacen a las expresiones postuladas en (Le et al. 2014). Por añadidura,

se construye paso a paso la linealización aplicada a la ecuación de movimiento no lineal, insumo fundamental para el abordaje numérico.

El postulado de PTV presentado en De Borst et al. 2012 establece que el incremento diferencial de la energía interna y cinética se origina a partir de un incremento en el trabajo externo. Esto junto con los incrementos asociados a cada una de las energías definidas en el Capítulo 3 se presenta a continuación:

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} + \delta K \quad (4.12)$$

La fuerza externa es la responsable del cambio de trabajo aportando al sistema por lo que  $\delta W_{ext} = (\delta \mathbf{d}^g)^T \mathbf{f}_{ext}$ , análogamente  $\delta W_{int} = (\delta \mathbf{d}^g)^T \mathbf{f}_{int}$  y también así para la fuerza inercial definidas en la Ecuación (3.52). Sustituyendo estas expresiones para el instante  $t + \Delta_t$  y partiendo que debe satisfacerse para todo desplazamiento  $\delta \mathbf{d}^g$ , se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_{ext,t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{vis}(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)) - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}(t + \Delta_t)) \dots \\ & \dots - \mathbf{f}_{ine}(\mathbf{d}(t + \Delta_t), \dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t), \ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para cada punto del cuerpo debe cumplirse el balance vectorial entre fuerzas internas  $\mathbf{f}_{int}$ , inerciales  $\mathbf{f}_{ine}$  y externas  $\mathbf{f}_{ext}$ . Además según la Ecuación (4.11) dentro de las fuerzas externas aparece un término aerodinámico  $\mathbf{f}_{vis}$  que depende de la velocidad lineal del rígido. Este termino debe tratarse aparte ya que su naturaleza función de el estado cinemático del problema, lo que es la incógnita a resolver.

La Ecuación de balance (4.13) debe satisfacerse para todo instante temporal, en particular para  $t + \Delta_t$ . Dadas determinadas propiedades materiales y geométricas en la configuración de referencia, las fuerzas dependen de las magnitudes cinemáticas globales en ese instante. Estas son: el desplazamientos  $\mathbf{d}(t + \Delta_t)$ , las velocidades  $\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t)$ . Es plausible entonces plasmarlo matemáticamente de manera exacta en la Ecuación (4.13).

Los métodos numéricos, a groso modo, si son consistentes y estables construyen una sucesión que al discretizar infinitamente converge a la solución exacta. El método de Newton-Raphson (N-R) vectorial consiste en linealizar una ecuación a través de su diferencial de primer orden. Esta aproximación tiene como consecuencia que la Ecuación (4.13) ya no será nula sino igual a un resto  $\mathbf{r}$ . A su vez, tal y como se detalla en las Ecuaciones (4.14) y (4.15),

1 los métodos numéricos para la solución de problemas dinámicos, escriben las  
2 variables de aceleración y velocidad, en el instante  $t + \Delta_t$ , en función de los  
3 desplazamientos para ese tiempo y las magnitudes cinemáticas en el paso an-  
4 terior. Como los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración para el paso  
5 anterior se encuentran dados, el vector resto depende indirectamente de los  
6 desplazamientos. Para diferenciar las variables aproximadas de las exactas,  
7 se introduce la siguiente nomenclatura:  $(\mathbf{d}(t + \Delta_t) \rightarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_t})$ ,  $(\dot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow$   
8  $\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$  y  $(\ddot{\mathbf{d}}(t + \Delta_t) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t})$ .

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_v(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t) \quad (4.14)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t} = F_a(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t) \quad (4.15)$$

9 Según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, se buscan las apro-  
10 ximaciones cinemáticas tal que el residuo  $\mathbf{r}$  para un instante  $t + \Delta_t$  sea próximo  
11 al vector nulo. Esto se expresa matemáticamente en Ecuación (4.16).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) = & (-\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta_t} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}) + \mathbf{f}_{\text{vis}}(\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}) \dots \\ & \dots + \mathbf{f}_{\text{ine}}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t), \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_t}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}, \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}_t)) \approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.16)$$

12 Por otro lado, según el método de N-R presentado en Quarteroni et al.  
13 2010 es posible construir una sucesión iterativa en  $k$ , de forma tal que en el  
14 paso siguiente, el vector resto se acerque al nulo. Para aplicar esto se utiliza  
15 el teorema de Taylor aplicado a la función resto, obteniéndose la siguiente  
16 expresión:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta_t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta_t}}|_k \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta_t}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

17 Para calcular la derivada del residuo, se utiliza la regla de la cadena apli-  
18 cada a las funciones de velocidades y aceleraciones, expresando las derivadas  
19 en función de los desplazamientos. Esta operatoria en términos analíticos, se

1 presenta en la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}}\end{aligned}\quad (4.18)$$

2 En las expresiones anteriores se distinguen varios factores. En primer lugar  
3 las derivadas de la función residuo respecto de: desplazamientos, velocidades  
4 y aceleraciones. Estas son las matrices tangentes  $\mathbf{K}_g$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}_k$  descritas en  
5 el Capítulo 3. Asimismo, al derivar la función de fuerza residual aparece un  
6 termino  $\mathbf{C}_{vis}$  correspondiente la derivada de la fuerza viscosa respecto de la  
7 velocidad del viento. Esto resulta una matriz diagonal esparsa con valores  
8 nulas salvo las entradas correspondientes a la dirección del viento, con valor  
9  $\rho d_c C_d w_m$ . Incorporando estas matrices se obtiene a la Ecuación (4.19).

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \right|_k = \left( \mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{vis}) \right) \Big|_k \quad (4.19)$$

10 Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (4.19) de N-R se halla  
11 el paso en desplazamientos en  $k + 1$  a partir de las magnitudes en  $k$   $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t}^{k+1}$ .  
12 Matemáticamente:

$$\left( \mathbf{K}_g + \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} \mathbf{M} + \frac{\partial F_v}{\partial \mathbf{d}_{t+\Delta t}} (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{vis}) \right) \Big|_k^{-1} (-\mathbf{r}(\mathbf{d}_{t+\Delta t}^k)) = \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t}^{k+1} \quad (4.20)$$

13 Una vez planteada la ecuación de equilibrio no lineal y su método de reso-  
14 lución numérico hace falta conocer explícitamente las funciones  $F_a$  y  $F_v$ . Para  
15 esto se implementó el Método de HHT presentado a continuación en La sección  
16 4.2.2.

### 17 4.2.2. Resolución numérica mediante HHT

18 Este método consiste en una innovadora propuesta respecto del algoritmo  
19 de Newmark presentado en Newmark, 1959. Según el artículo Hilber et al.  
20 1977 el método de HHT, es incondicionalmente estable para la integración de  
21 ecuaciones dinámicas en el área estructural. Esto implica que el paso de tiempo

1 puede incrementarse considerablemente conservando la convergencia numérica  
2 del método. Además de esta ventaja, cuando se buscan representar modos de  
3 baja frecuencia, el factor de disipación que atenúa la energía del sistema, no  
4 depende del incremento de tiempo elegido. Complementario a esto, evita la  
5 aparición indeseada de altas frecuencias numéricas, sin eliminar los modos de  
6 baja frecuencia endógenos a la estructura.

7 En la publicación (Hilber et al. 1977) se compara el método de HHT con  
8 otros métodos del clásicos en el área de análisis numérico estructural, como ser:  
9 el Método del Trapecio, el de Wilson y la familia de algoritmos de Newmark.  
10 El autor concluye que HHT además de su mayor grado de ajuste, es mas  
11 preciso para bajas frecuencias. Dado que esto se ajusta a la perfección para  
12 la aplicación de conductores, superpuesto que este se implementó en Le et al.  
13 2014, resulta oportuno aplicarlo a esta investigación.

14 Para este abordaje inicialmente se deben distinguir las magnitudes lineales  
15 de las angulares, para esto se utiliza la nomenclatura  $\mathbf{d} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$ . Se presentan  
16 entonces las funciones de aproximación para aceleraciones y velocidades linea-  
17 les globales en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones se escribirán  
18 inicialmente en términos de los parámetros de Newmark  $\alpha_{NW}$  y  $\beta_{NW}$  para  
19 luego vincularlo con el método de HHT. Esto permite ejecutar fácilmente uno  
20 u otro, dependiendo de las necesidades. Consecuentemente, las funciones de  
21 actualización para el instante  $t + \Delta_T$  se escriben:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)^2} \mathbf{u}_t - \frac{1}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}_t - \dots \quad (4.21)$$

$$\dots - \frac{1}{2\alpha_{NW}} (1 - 2\alpha_{NW}) \ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}(\Delta t)} \mathbf{u}_t + \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{\alpha_{NW}}\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \dots \quad (4.22)$$

$$+ \dots \left(1 - \frac{\beta_{NW}}{2\alpha_{NW}}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t$$

22 Para implementar HHT basta unicamente con definir los parámetros  $\alpha_{NW}$   
23 y  $\beta_{NW}$  en términos del valor de  $\alpha_{HHT}$ . Esto se realiza mediante las Ecuaciones  
24 (4.23) y (4.24). En estas funciones, es posible notar las equivalencias, paren-  
25 tescos y similitudes entre los métodos. El de Newmark clásico con  $\beta_{NW} = 1/2$   
26 y  $\alpha_{NW} = 1/4$  se logra ajustando el parámetro  $\alpha_{HHT} = 0$ .

$$\beta_{NW} = \frac{1 - 2\alpha_{HHT}}{2} \quad (4.23)$$

$$\alpha_{NW} = \frac{(1 - \alpha_{HHT})^2}{4} \quad (4.24)$$

Se calculan entonces las derivadas respecto al desplazamiento para las funciones de aproximación. Estas se expresan a partir del parámetro  $\alpha_{HHT}$  y el incremento  $\Delta_T$  ente dos tiempos consecutivos  $t$  y  $t + \Delta_t$ .

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta_T}} = \frac{4}{(1 - \alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta_T}} = \frac{1 - \alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \quad (4.26)$$

A diferencia de la aproximación para velocidades y aceleraciones lineales, las magnitudes angulares deben actualizarse mediante otras funciones. Este tipo de variables no cumple la propiedad de conmutatividad. Es por esto, que los vector de velocidades y aceleraciones angulares para el paso  $k+1$ , en el instante  $t + \Delta_t$ , deben calcularse según las Ecuaciones (4.27) y (4.28) presentadas en la referencias (Ibrahimbegović y Mikdad, 1998) y (Ibrahimbegovic y Mamouri, 2002).

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{t+\Delta t}^g \left[ \frac{\alpha}{\beta \Delta_t} \theta_{t+\Delta t} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \dot{\mathbf{w}}_t + \frac{(\beta - 0.5\alpha)\Delta_t}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_t \right] \quad (4.27)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \Lambda_{t+\Delta t}^g \left[ \frac{1}{\beta \Delta_t^2} \theta_{t+\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta_t} \dot{\mathbf{w}}_t - \frac{(0.5 - \beta)}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} \right] \quad (4.28)$$

En las Ecuaciones (4.27) y (4.28) la transformación  $\Lambda_{t+\Delta t}^g$  es la composición de las rotaciones globales para dos instantes consecutivos:

$$\Lambda_{t+\Delta t}^g = \exp(\widetilde{\theta_{t+\Delta t}^g}) = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^g (\mathbf{R}_t^g)^T \quad (4.29)$$

Un procedimiento análogo al de las funciones angulares se aplican a las lineales. Esto se obtiene a partir de la derivación analítica de las Ecuaciones expresadas en (4.27) y (4.28).

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{T}_s^{-\mathbf{T}}(\theta_{1,\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{w}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}} = \frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \mathbf{T}_s^{-\mathbf{T}}(\theta_{1,\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \quad (4.31)$$

Es posible compactar las derivadas lineales y angulares de las Ecuaciones (4.30), (4.31), (4.25) y (4.26) al definir convenientemente la matriz  $\mathbf{B}_t$ . En función de esta es posible escribir los incrementos de velocidades y aclaraciones globales en términos del vector de desplazamientos incremental. Estas relaciones se expresan a continuación:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_s^{-\mathbf{T}}(\theta_{1,\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_s^{-\mathbf{T}}(\theta_{2,\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{g}}) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left( \frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{g},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} \quad (4.33)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\mathbf{g}} = \left( \frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{g},\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}} \quad (4.34)$$

Al escindir las Ecuaciones (4.33) y (4.34) se identifican las funciones  $F_a$  y  $F_v$  de la sección 4.2.1. Estas relaciones matemáticas deben de integrarse a la Ecuación linealizada de equilibrio (4.20) para obtener el incremento en  $k$  que permita conocer el vector desplazamientos en el paso  $k+1$  para el instante  $t + \Delta_T$ . Finalmente, eso se plantea en la Ecuación (4.35).

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}(\mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{k}}) = \\ & - \left( \mathbf{K}_{\mathbf{g}} + \left( \frac{4}{(1-\alpha_{HHT})^2 \Delta_T^2} \right) \mathbf{M} \mathbf{B}_t + \left( \frac{1-\alpha_{HHT}}{2\Delta_T} \right) (\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{C}_{\mathbf{vis}}) \mathbf{B}_t \right) \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t}}^{\mathbf{k}+1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Se aclara que para despejar la Ecuación (4.35) anterior, la matriz entre paréntesis curvos debe invertirse y por tanto ser no singular. De lo contrario, el método podría presentar un número de condición nulo arrojando infinitas soluciones o ninguna. Esto se encuentra garantizado por la naturaleza de las



1 matrices que la integran (de masa, centrífuga y tangente). Las matrices tan-  
2 gentes fueron simetrizadas .artificialmentecomose aclaró anteriormente, man-  
3 teniendo el orden de convergencia de N-R. Las matrices centrífugas y de masa  
4 devienen de un potencial asociado (la energía cinética) como los parámetros  
5  $\alpha_{HHT}$  son menores a uno, en general en el intervalo  $[-0.1; 0.1]$ , la suma de esta  
6 matrices suele ser definidas positivas. Por lo que  $\mathbf{K}_{tot}$  será invertible.

#### 7 4.2.2.1. Hipótesis de modelado numérico

8 Se esclarecen las premisas y simplificaciones durante la implementación  
9 numérica de los códigos creados:

- 10 1. Los incrementos angulares no se calcularon componiendo dos rotaciones  
11 consecutivas sino de forma aditiva, es decir:  $\theta_{t+\Delta t}^{k+1} = \theta_{t+\Delta t}^k + \Delta\theta_{t+\Delta t}^{k+1}$ .
- 12 2. La matriz de amortiguamiento viscoso  $\mathbf{C}_{vis}$  se considero una diagonal con  
13 elementos no nulos en las componentes asociadas a los desplazamientos  
14 transaccionales. Se copió el valor del amortiguamiento aerodinámico con  
15 el valor correspondiente a la coordenada lineal  $\rho d_c C_d w_m$  para el resto  
16 de los desplazamientos. Esto garantiza la estabilidad y atenuación de la  
17 respuesta en la primer etapa asociada al peso.
- 18 3. La simulación se separó en dos etapas consecutivas, en primer lugar se  
19 carga con la fuerza de la gravedad (a partir de la condición inicial) y una  
20 vez que la respuesta es constante se aplica la carga del viento.

#### 21 4.2.3. Implementación numérica en ONSAS

22 En la sección que prosigue se detallan los códigos implementados en el  
23 software ([ONSAS](#)). Este código de carácter abierto y se desarrolló de forma  
24 general integrando distintos elementos, materiales y geometrías dentro del mis-  
25 mo modelo. Además permite resolver mediante diversos algoritmos numéricos  
26 y visualizar gráficamente sus salida en 3D a través del programa de código  
27 abierto *Paraview* difundido en (Ahrens et al. [2005](#)).

28 Las líneas de código relacionadas con la formulación local, las funciones  
29 matemáticas de rotación, las fuerzas internas y sus matrices tangentes fueron  
30 aportadas por el Dr. Jean Mark Battini. Su intervención constituye uno de  
31 los pilares fundamentales en la construcción de este trabajo, no solo por ser  
32 pionero dela formulación corrotacional aplicada a estructuras, publicadas en

los trabajos (Battini y Pacoste, 2002) (Le et al. 2014), sino también por su predisposición a difundir los códigos de su investigación, cuyo valor es invaluable. A continuación en el Algoritmo 1 se detalla un pseudo-código panorámico sobre el esqueleto ejecutado en ONSAS.

---

**Algorithm 1** Pseudocódigo de iteración general.

---

**Require:** :  $tol_r, tol_u, \maxIter, \Delta_T, \alpha_{HHT}$   
 Iniciar cinemáticas:  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_0 \quad \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_0 \quad \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$   
 Iniciar tiempo:  $t \leftarrow t_0$   
**while**  $t < t_f$  **do**  
   finDisp = 0  
   Definir:  $\mathbf{d}^k \leftarrow \mathbf{d}_t, \dot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_t, \ddot{\mathbf{d}}^k \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_t$ .  
   Evaluar  $\mathbf{f}_{\text{ext}, t+\Delta t}$   
   **while** FinDisp = 0 **do**  
     Calcular fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k), \mathbf{f}_{\text{int}}^k(\mathbf{d}^k)$  y  $\text{res}^k(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, \ddot{\mathbf{d}}^k)$ .  
     Calcular y ensamblar matrices Tangentes:  $\mathbf{K}_g^k \mathbf{M}^k \mathbf{C}_k^k, \mathbf{C}_{\text{vis}}^k$ .  
     Despejar  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$   
     Actualizar desplazamientos globales:  $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^{k+1}$   
     Recalcular velocidades y aceleraciones lineales:  $(\dot{\mathbf{u}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1})$ .  
     Recalcular velocidades y aceleraciones angulares:  $(\dot{\mathbf{w}}^{k+1}), (\ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$ .  
     Ensamblar velocidades:  $\dot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\dot{\mathbf{u}}^{k+1}, \dot{\mathbf{w}}^{k+1})$   
     Ensamblar aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{d}}^{k+1} \leftarrow (\ddot{\mathbf{u}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{w}}^{k+1})$   
     Actualizar fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}^{k+1}(\mathbf{d}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}^{k+1}), \mathbf{f}_{\text{int}}^{k+1}(\mathbf{u}^{k+1})$  y  $\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})$ .  
     Calcular:  
     **if**  $\|\Delta \mathbf{d}^{k+1}\| < tol_d \|\mathbf{d}^{k+1}\| \vee \|\text{res}(\mathbf{d}^{k+1})\| < tol_r \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\| \vee k \geq \max_{iter}$   
       **then**  
         finDisp = 1  
       **end if**  
     **end while**  
     Actualizar  $\mathbf{d}_t \leftarrow \mathbf{d}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \dot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}, \ddot{\mathbf{d}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta_T}^{k+1}$ .  
      $t = t + \Delta_T$   
   **end while**

---

En la estructura de códigos anterior se observan dos bucles en simultaneo. Inicialmente se ejecuta un primer **while** de avance cronológico, que permite incrementar la variable temporal en pasos de  $\Delta T$ . Además debe evaluar los valores que son constantes en el tiempo, como ser: la magnitud de  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Para resolver el estado del sistema en el tiempo  $t + \Delta T$ , hace falta resolver la ecuación no lineal del resto descrita en la Expresión (4.16). Con este cometido, se construye una sucesión en desplazamientos que tienda a la solución para ese paso, esto se realiza mediante (N-R) en el segundo **while** en desplazamientos. Para este bucle en el pseudocódigo 1 se omitió la notación en  $t + \Delta T$  para

1 simplificar, mas todas las variables se corresponden a dicho tiempo.

2 Esta parte del código se podría subdividir en dos estructuras, primeramente  
3 el cálculo del incremento que determina el paso  $k + 1$ , a partir de los despla-  
4 zamientos en el paso actual  $k$ . Luego se actualizan las variables cinemáticas de  
5 desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este conjunto de pasos se realiza  
6 mientras que la variable booleana `finDisp` sea nula. La alteración de estado, se  
7 encuentra atada a la operación lógica de la sentencia **if**. Esta se rige por la  
8 operación lógica disyunta, aplicada a tolerancias en desplazamientos  $tol_u$ , en  
9 vector de fueras residuales  $tol_{res}$  y número máximo de iteraciones  $maxIter$ . Las  
10 primeras dos son relativas al valor de fuerzas externas y desplazamientos en ese  
11 tiempo, lográndose de este modo independizarse de las magnitudes absolutas  
12 desconocidas. Una vez que el segundo bucle en desplazamientos converge, la  
13 variable `finDisp` alcanza la unidad. A partir de esto, se actualizan tanto el valor  
14 del tiempo, como las magnitudes cinemáticas para el instante siguiente.

15 Habiendo explicado la estructura general del código, resulta importante  
16 profundizar y desplegar el cálculo de la función de fuerzas inerciales y matrices  
17 dinámicas tangentes. Este código se agregó a [ONSAS](#) procurando su versatili-  
18 dad. De esta forma será posible aplicarlo a futuras aplicaciones que trascienden  
19 al alcance y foco de este trabajo. Se presenta a continuación un esquema tipo  
20 pseudocódigo de la función [elementbeamforces.m](#) implementada.

21 El diagrama presentado en el Pseudocódigo 2, puede dividirse en tres divi-  
22 siones principales. Esto ordena el código consecutivamente según el desarrollo  
23 constructivo de las variables intervinientes. Primeramente se hallan las matri-  
24 ces de rotación, que vinculan las configuraciones: de referencia, rígida y defor-  
25 mada. Una vez representadas estas transformaciones, se procede a calcular las  
26 fuerzas internas y las matrices tangentes en la configuración local a través de  
27 la función [beamLocalStaticForces](#). Desafortunadamente, tanto entradas como  
28 salidas de esta función, se encuentran referidas al sistema de coordenadas loca-  
29 les. Es por esto, que resulta inevitable calcular los ángulos y desplazamientos  
30 locales. Asimismo transformar las salidas a coordenadas globales, para luego  
31 integrarlas al código general expuesto en 1.

32 De forma subsiguiente se arman las matrices dinámicas y los vectores de  
33 fuerza inercial asociados al elemento. Con este fin, se calculan primero las  
34 expresiones analíticas de las magnitudes cinemáticas en cada sección. Estas  
35 están referidas a su baricentro, ubicado a una distancia  $x$  en la configuración  
36 de referencia. Como su obtención directa es algo compleja, se definen una serie

---

**Algorithm 2** Pseudocódigo elementBeamForces.

---

**Require:**  $A_\rho$   $\mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$   $E$   $\nu$   $G$   $\mathbf{X}_1$   $\mathbf{X}_2$   $\mathbf{d}_g^e$

**for** 1 **to**  $N_{elem}$  **do**

Separar vector desplazamientos  $\mathbf{d}_g = (\mathbf{u}^g, \mathbf{w}^g)$

—————Cálculo de matrices de rotación —————

Computar matrices de rotación global  $\mathbf{R}_g^1$  y  $\mathbf{R}_g^2$

Evaluar matriz de rotación de referencia  $\mathbf{R}_o$

Hallar  $\mathbf{q}_1$   $\mathbf{q}_2$   $\mathbf{q}$  y calcular  $\mathbf{e}_1$   $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .

Evaluar matriz de rotación rígida  $\mathbf{R}_r$

Calcular matrices de rotación locales  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_g^i \mathbf{R}_o$

————— Cálculo de fuerza interna y matriz tangente —————

Calcular largos iniciales, actuales y estiramiento  $l_0$  y  $l$   $u = l - l_0$

Invertir  $\mathbf{R}_i$  y hallar ángulos locales  $\bar{\theta}_i$ .

Ejecutar *beamLocalStaticForces* para fuerza interna  $\mathbf{f}_{\text{int}}^{\text{loc}}$  y matriz tangente local  $\mathbf{K}_T^{\text{loc}}$ .

Construir matrices auxiliares:  $\mathbf{H}$   $\mathbf{G}$   $\mathbf{P}$   $\mathbf{B}$   $\mathbf{r}$

Transformar a coordenadas globales:  $\mathbf{K}_T^g \leftarrow \mathbf{K}_T^{\text{loc}}$  y  $\mathbf{f}_{\text{int}}^g \leftarrow \mathbf{f}_{\text{int}}^{\text{loc}}$ .

————— Cálculo de fuerza inerciales y matrices dinámicas —————

Todas las variables dependen de la coordenada ( $\mathbf{x}$ )

Definir funciones de interpolación  $N_i$

Calcular matrices:  $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{H}_1$ .

Hallar velocidades  $\dot{\mathbf{w}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\dot{\mathbf{w}}_r$

Calcular matrices auxiliares:  $\mathbf{H}_1$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  y  $\mathbf{C}_4$ .

Hallar las aceleraciones:  $\ddot{\mathbf{w}}$   $\ddot{\mathbf{u}}$ .

Girar el tensor de inercia a la configuración deformada:  $\mathbf{I}_\rho \leftarrow \mathbf{I}_\rho^{\text{ref}}$

Hallar expresiones e integrar en el elemento:  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$   $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}_k$

Ensamblar :  $\mathbf{f}_{\text{ine}}$   $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_k$   $\mathbf{K}_T^g$   $\mathbf{f}_{\text{int}}^g$

**end for**

---

1 de variables auxiliares y sus respectivas derivadas que permiten calcularlas.  
2 Una vez finalizado estos pasos, se integran las matrices tangentes y el vector  
3 de fuerzas inerciales, empleando el método de integración numérica de cuadra-  
4 tura de Gauss. Este se implementó con 3 puntos de integración. Por último,  
5 los valores obtenidos tanto para las matrices tangentes dinámicas y estáticas,  
6 como para los vectores de fuerza inercial e internas se ensamblan a las matrices  
7 de todo el sistema en coordenadas globales.

# 1 Capítulo 5

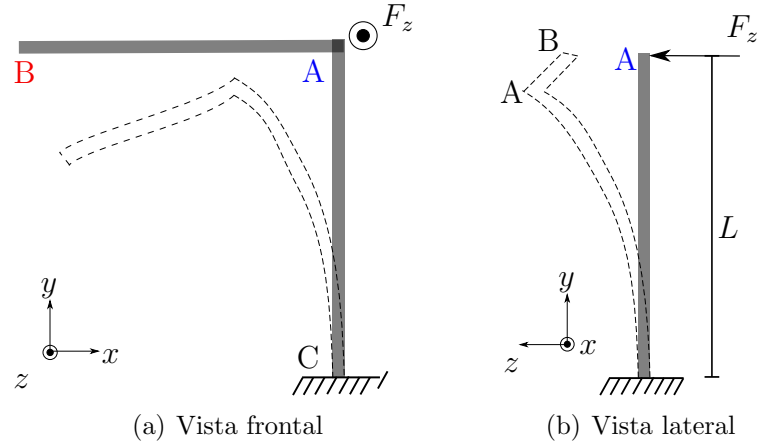
## 2 Resultados numéricos

3 En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos durante  
4 el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se valida la implementa-  
5 ción corrotacional detallada en el Capítulo 3, para luego aplicarse a modelos  
6 específicos de conductores. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando  
7 un computador portátil con un procesador i7 6700HQ y una memoria ram de 8  
8 Gb. La formulación se implementó en el software de código abierto [ONSAS](#) el  
9 cual se ejecutó en GNU-Octave Eaton et al. (2007) y visualizándose los resulta-  
10 dos haciendo uso de la herramienta Paraview Ahrens et al. (2014). Vale notar  
11 que el hilo conductual de este capítulo fue ideado con un aumento progresivo  
12 de complejidad. Capturando en modelos simples y académicos los movimientos  
13 fundamentales de los elementos, para garantizar así una representación cabal  
14 del fenómeno de oscilación del conductor en servicio.

### 15 5.1. Viga en voladizo con ángulo recto

16 Este ejemplo fue publicado por primera vez en Simo y Vu-Quoc, 1988 y es  
17 usualmente considerado en la literatura para validar formulaciones de elemen-  
18 tos de viga tridimensionales aplicadas a estructuras no lineales (Albino et al.  
19 2018 Le et al. 2014). El mismo consta de dos barra idénticas en ángulo recto  
20 formando una forma de L. Cada miembro que la integra, mide un largo  $L = 10$   
21 m tal y como se ilustra en las Figuras 5.1.

22 Las propiedades del rigideces de torsión, flexión y directa del ejemplo se se-  
23 leccionaron de manera sintética por el autor original. Estos valores artificiales,  
24 garantizan movimientos de gran amplitud y para esto deben cumplir determi-



**Figura 5.1:** Disposición geométrica de la estructura.

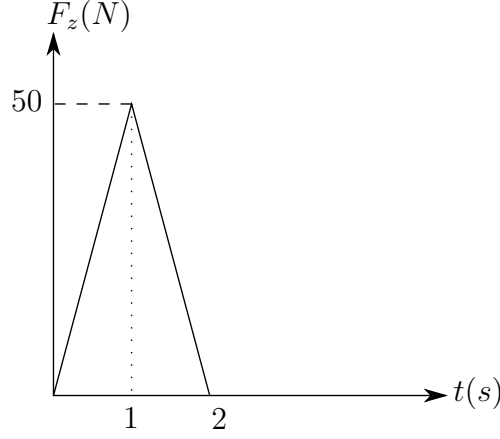
1   nadas igualdades Por esta razón la elección de dichas magnitudes se obtiene  
2   resolviendo el sistema compatible indeterminado de Las Ecuaciones (5.1) y  
3   (5.2) descritas en la bibliografía. Para este trabajo los segundos momentos de  
4   inercia según el eje  $z$  e  $y$  además de los valores del módulo de elasticidad lineal  
5   y transversal valen:  $E = G = 10^6$   $A = 1$   $I = J = 10^{-3}$  y  $\nu = 0.3$ . Se hace notar  
6   que el carácter arbitrario de los parámetros implica que sus unidades carezcan  
7   de sentido.

$$GA = EA = 10^6 \quad (5.1)$$

$$GJ = EI = 10^3 \quad (5.2)$$

8   La estructura se encuentra empotrada en su base imponiendo desplaza-  
9   mientos y ángulos nulos en el nodo C. Este apoyo ejerce reacciones que per-  
10   miten aplicar una fuerza en el sentido del eje  $z$  tal y como se muestra en la  
11   Figura 5.2. Este forzante flecta y trosiona al sistema en un plano saliente al  $xy$ ,  
12   produciendo oscilaciones de gran amplitud. En la expresión anterior el adjetivo  
13   gran, hace alusión a que los movimientos desarrollados durante el movimiento,  
14   son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la estructura. Estos  
15   desplazamientos significativos, están ligados al perfil brusco de aplicación de la  
16   carga. Esta fuerza actúa linealmente en los dos segundos iniciales, crece hasta  
17   un valor máximo de 50 N en el primer segundo de simulación y luego decrece  
18   hasta cero. Imponiendo en el perfil un impacto severo y gradual en un corto  
19   intervalo de tiempo. Para reproducir este comportamiento altamente dinámico

1 se eligieron 10 elementos por miembro y un incremento de tiempo  $\Delta T = 0.25$   
2 s.



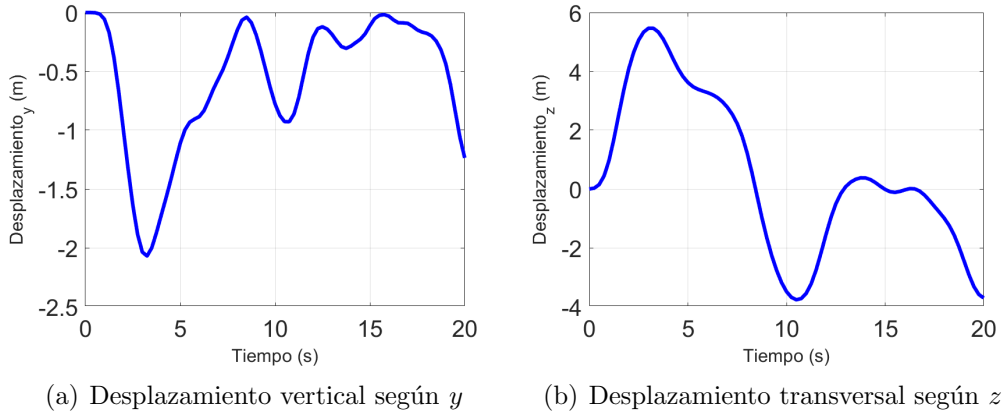
**Figura 5.2:** Perfil de fuerza transversal en el nodo A.

3 El objetivo principal del ejemplo es el validar la librería de códigos corro-  
4 tacional incorporados en el software [ONSAS](#), por ende, tanto el método de  
5 resolución, como los parámetros, se ajustaron idénticos a los explicitados en  
6 el artículo Le et al. [2014](#), comparando así resultados semejantes. Consecuente-  
7 mente se implementó un algoritmo que lleva el nombre de sus creadores (HHT)  
8 y se selecciono un valor característico  $\alpha = -0.05$  y un valor de parada en des-  
9 plazamientos de  $10^{-7}$  m. Se fraccionaron 20 s de simulación en intervalos de  
10  $\Delta T = 0.25$  s.

11 Para comparar con el paper de referencia se plasmaron gráficamente de-  
12 terminados grados de libertad correspondientes al nodo A. Estos son: el des-  
13 plazamiento lineal vertical (según el eje  $y$ ) y el transversales (según  $z$ ). Los  
14 resultados extraídos del modelo se muestran en las Figuras [5.3](#) en función  
15 de la variable temporal. En estas se constata efectivamente la significativa  
16 magnitud de los desplazamientos en comparación con las dimensiones de la  
17 estructura. En particular, la Figura [5.3\(b\)](#) denota oscilaciones que alcanzan  
18 varios metros en menos de 30 segundos, esto muestra el carácter exigente en  
19 términos dinámicos del ejemplo. Con respecto a este movimiento no armónico  
20 de vaivén en el eje  $z$ , se puede notar la presencia no conservativa de la formu-  
21 lación corrotacional, ya que las amplitudes prestan una tendencia atenuante  
22 con el tiempo.

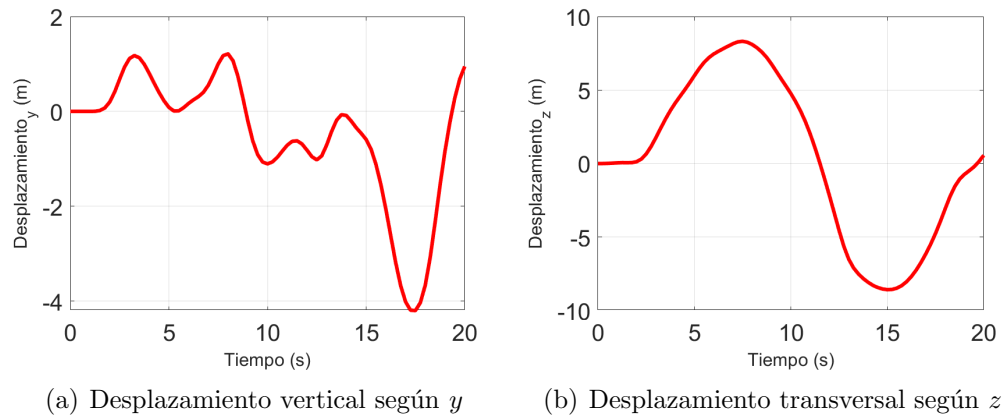
23 Por otra parte al analizar en la Figura [5.3\(a\)](#) se observa que los desplaza-  
24 mientos en  $y$ , son menores a cero para todo instante, esto se vincula al sentido





**Figura 5.3:** Desplazamientos de control del nodo A.

1 de la fuerza aplicada. Al observar la estructura desde un plano  $yz$  con el versor  
2  $x$  saliente, el movimiento del nodo A es análogo al de una viga empotrada con  
3 una fuerza cortante en su extremo. De esta manera, el desplazamiento de A es  
4 siempre en el sentido de  $-y$ , lo que se refleja en La Figura 5.3(a) y se condice  
5 con la respuesta esperada. Contrastando los resultados de la implementación  
6 con los presentados en la bibliografía de referencia Le et al. (2014), observamos  
7 similares valores de máximos y mínimos alcanzados durante el movimiento res-  
8 pecto a las Figuras 5.3 y 5.4. También así los valles y las crestas de la curvas se  
9 suceden en tiempos muy próximos. Congruentemente, es posible afirmar que  
10 el software implementado reproduce correctamente el ejemplo y es capaz de  
11 capturar movimientos de flexo-torsión cabalmente.

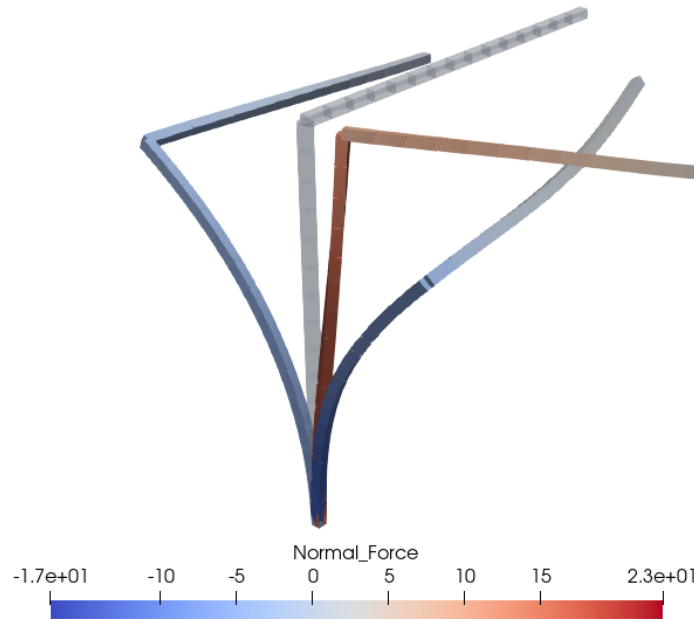


**Figura 5.4:** Desplazamientos de control del nodo B.

12 Resulta oportuno analizar los movimientos en el nodo B. En la Figura

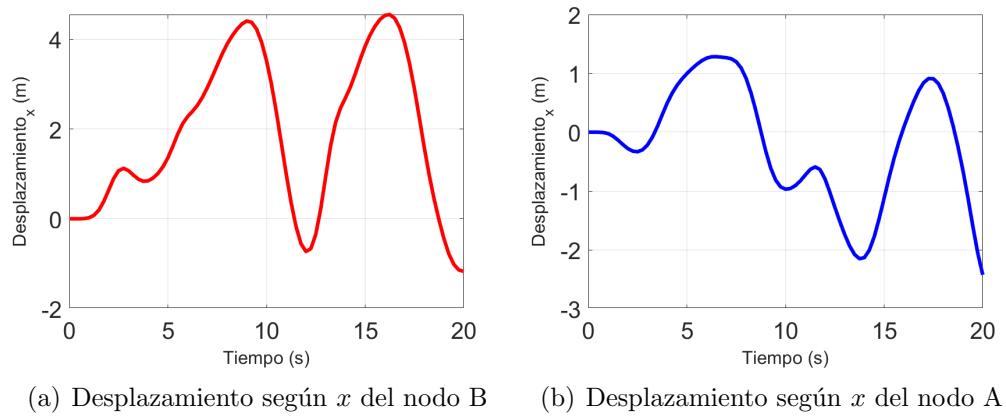
5.4(b) se muestra una oscilación de 16 metros de amplitud aproximadamente, y una forma que se asemeja a una senoide. Esto podría vincularse al modo flector en el plano  $xz$  de la barra A-B excitado por la fuerza externa en la dirección  $z$ . Una vez retirada la carga se manifiestan los modos torsionales de AC superpuestos con los flexionales de A-B C-B incidiendo en el movimiento. El autor del trabajo Le et al. (2014) publicó el desplazamiento en  $z$  de B y los resultados de este trabajo ajustan con exactitud a dicha curva. Complementando este análisis podemos comparar los desplazamientos de los nodos A y B concluyendo que los movimientos inerciales de la barra A-B afectan notablemente a los desplazamientos del nodo B respecto de A, tanto en frecuencia como en magnitud.

Para ilustrar al lector en la cinemática del movimiento, se visualizaron mediante el software *Paraview* las deformadas para diferentes instantes de tiempo:  $t_1 = 4$  s,  $t_2 = 11$  s y  $t_3 = 19$  s. En la Figura 5.5 se observan las oscilaciones flexionales para distintos planos  $yx$  e  $yz$ . Estos movimientos son originados por diferentes razones, en la barra CA se asocia al forzante  $F_z$  mientras que en el miembro AB son generados por los vínculos cinemáticos e inerciales debido a su unión rígida con el resto de la estructura.



**Figura 5.5:** Estructura deformada en los instantes 4 s, 11 s y 21 s.

1      Habiéndose ahondado en las variables cinemáticas, resta por analizar las  
2      magnitudes dinámicas. Para esto se colorearon los esfuerzos normales inma-  
3      nentes a cada elemento en La Figura 5.5. En esta se identifica que el esfuerzo  
4      alcanza valores de compresión y tracción en similar magnitud presentando  
5      considerables fluctuaciones temporales. En simultaneo, la viga horizontal A-B  
6      desarrolla fuerzas normales en todo su largo. Se suceden tanto positivas como  
7      negativas, es oportuno notar que un modelo lineal para pequeños despla-  
8      zamientos concluiría que los esfuerzos en esa viga serían nulos. Además este  
9      modelo lineal arrojaría desplazamientos triviales en  $x$  para ambos nodos, in-  
10     duciéndose significativos errores para este tipo de cargas de alto impacto en  
11     estructuras de exigua rigidez. El modelo implementado desarrolla magnitudes  
12     no despreciables de desplazamientos en  $x$  tal y como se constata en las Figu-  
13     ras 5.6. He aquí las principales diferencias y la importancia de implementar  
14     un modelo considerando no linealidad geométricas, estas consideraciones son  
15     esenciales para la aplicación principal de este trabajo.



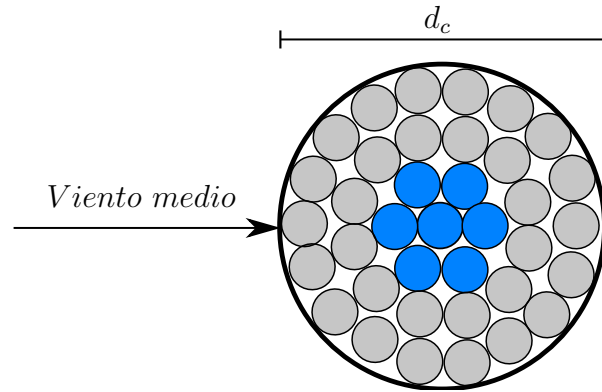
**Figura 5.6:** Desplazamientos en  $x$  de los nodos A y B

## 16      5.2.      Modelo simplificado de una linea

17      En este apartado se presenta un primer modelo simplificado del enfoque  
18      central de esta tesis. El mismo fue contrastado con el trabajo de Foti y Marti-  
19      nelli, 2018 mas ha sido abordado por destacados investigadores en el pasado,  
20      como ser el caso de: Luongo y Piccardo, 1998 y Martinelli y Perotti, 2001. El  
21      ejemplo consiste en un conductor de transmisión eléctrica reforzado con núcleo

1 de acero. La raíz de acero forjado tiene como propósito aportar rigidez mecáni-  
2 ca al componente, disminuyendo la deflexión y flexibilidad del conjunto. Esto  
3 suele ser ventajoso para largos vanos donde la rigidez del conductor es una  
4 variable decisiva. Además su construcción no afecta significativamente la re-  
5 sistividad eléctrica debido al efecto de reluctancia radial variable. que obliga a  
6 la corriente a fluir principalmente en la superficie.

7 El modelo del conductor esta estandarizado bajo la norma IEC europea  
8 *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 y se identifica con la no-  
9 menclatura DRAKE ASCR 7/26. Esto hace referencia a la cantidad de cables  
10 en el núcleo y en la periferia respectivamente. El diámetro se calcula entonces  
11 como la composición del área de los 26 conductores hechos de aluminio (color  
12 gris en la Figura 5.7) y los 7 de acero (color azul). Además asumiremos des-  
13 preciables, sobre las propiedades del flujo y la geometría, las irregularidades  
14 de su perfil en la silueta.



**Figura 5.7:** Esquema del conductor ASCR 7/26.

15 El vano tiene un largo  $L_c=267$  m mientras que el cable en su configuración  
16 deformada mide 269 m. Esta diferencia de longitudes del conductor en su  
17 eje axial, responde a un tensado que se realiza durante su instalación. En  
18 la etapa de montaje del conductor, se ajusta la pre-tensión de manera tal  
19 que la altura ratifique los requerimientos de seguridad según la urbanización,  
20 contaminación magnética y tipografía del terreno. Para esta simulación no se  
21 tendrá en cuenta la tensión previa al momento de la colocación pero si la  
22 tensión debida a la carga del peso. Vale notar que el valor de los esfuerzos  
23 iniciales generados durante la instalación es menor a un 2% respecto a los  
24 esfuerzos axiales desarrollados durante su movimiento. De igual manera se  
25 resalta que para este ejemplo no se consideró amortiguamiento aerodinámico

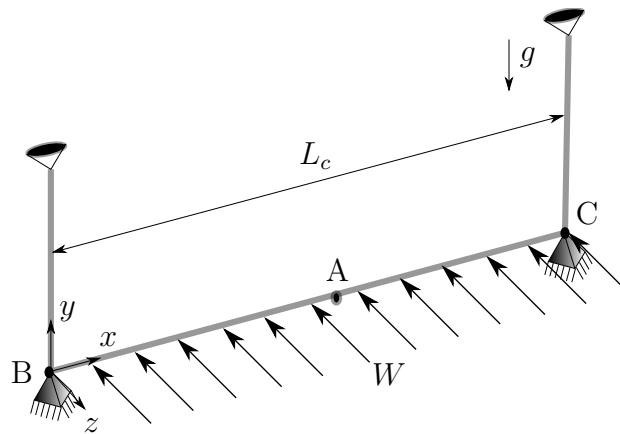
1 de fuerzas viscosas.

2 El material que constituye al cable tiene un módulo de elasticidad  $E$ , módu-  
 3 lo de poisson  $\nu$ , una densidad similar  $\rho$  y una rigidez flexional y torsional  $EI$   
 4 y  $GJ$  respectivamente. Estas propiedades descritas se obtuvieron de la norma  
 5 *ISO:9001* y se presentan en La Tabla 5.1.

$d_c(\text{cm})$	$m(\text{kg/m})$	$EA \text{ kN}$	$EI \text{ N m}^2$	$GJ \text{ Nm}^2$
2.81	1.8	29700	2100	159

**Tabla 5.1:** Propiedades mecánicas del conductor DRAKE ASCR 7/26

6 Con el propósito de aproximarse a la configuración del conductor dispuesto  
 7 en un sistema de transmisión eléctrica real, se introdujeron al ejemplo dos  
 8 cadenas aisladoras en posición vertical, de un largo  $L_a = 3 \text{ m}$  cada una de  
 9 ellas. Estos elementos no reciben fuerza y no se estudiará el desplazamiento ni  
 10 esfuerzos en los mismos. Esto se aseguró en las condiciones de borde impuestas,  
 11 para el modelo se consideró una condición de desplazamiento y ángulo nulo en  
 12 las tres direcciones en  $x$ ,  $z$  e  $y$  en los puntos B y C. Dado esto, las cadenas  
 13 solo toman un rol ilustrativo gráfico y las restricciones de borde representan  
 14 correctamente las presentadas por Foti y Martinelli (2018), donde los extremos  
 15 se encuentran sujetos. Habiendo detallado someramente los componentes que  
 16 integran al ejemplo se presenta un esquema de la geometría en la Figura 5.8.



**Figura 5.8:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

17 Existen una diferencias sustancial respecto al ejemplos originales postu-

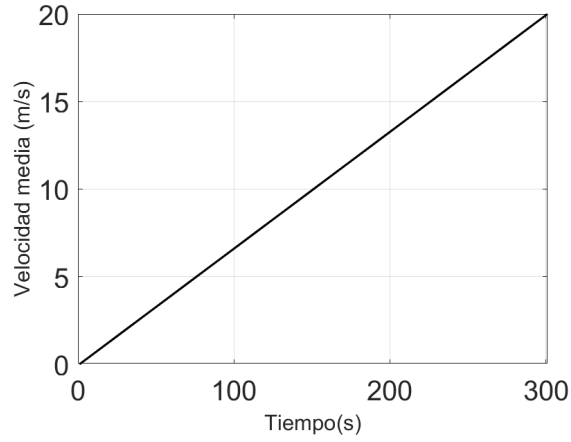
1 lados por Luongo y Piccardo (1998) y Martinelli y Perotti (2001), en donde  
2 se resolvió mediante elementos de barra trinodal y de viga corrtacional res-  
3 pectivamente. Para amibos trabajos se consideraron efectos de turbulencia  
4 generadas artificialmente mediante procesos estocásticos, mientras que para  
5 este estudio se despreciaran las componentes fluctuantes, teniendo en cuenta  
6 el mismo flujo medio  $W$  en la coordenada axial del conductor. Este perfil es  
7 parabólico y alcanza la velocidad media máxima  $W_{max}$  en 20 segundos. Este  
8 valor de velocidad se calculó según *Design criteria of overhead transmission*  
9 *lines*, 2003 considerando un flujo tipo capa límite atmosférica con las propie-  
10 dades indicadas en La Tabla 5.2 asociadas a un tipo de terreno sub-urbano o  
11 industrial.

$k_r$	$z_0$	$z_{min}$
0.22	0.3 m	8 m

**Tabla 5.2:** Parámetros del flujo tipo capa límite atmosférica para  $W_{max}$

12 La simulación consta de dos etapas, primeramente se aplica la fuerza gra-  
13 vitatoria según el eje  $-z$  tal cual se muestra en la Figura 5.8. No se muestran  
14 los resultados de esta etapa debido a que carecen de relevancia y en el trabajo  
15 de referencia se toma la catenaria como condición inicial. La fuerza peso es re-  
16 levante desde un punto de vista dinámico pues mitiga posibles inestabilidades  
17 cuando las normales de los elementos son próximas a cero. Una vez estabili-  
18 zada la respuesta del sistema por el amortiguamiento interno, se aplica una  
19 fuerza lineal de media positiva según el eje  $-z$  desde cero hasta  $W_{max}$ . Esta  
20 forma del perfil podría emular el aumento modulado de un presiones en un  
21 túnel de viento entre las bocas de entrada y descarga. La forma se muestra en  
22 La Figura 5.9.

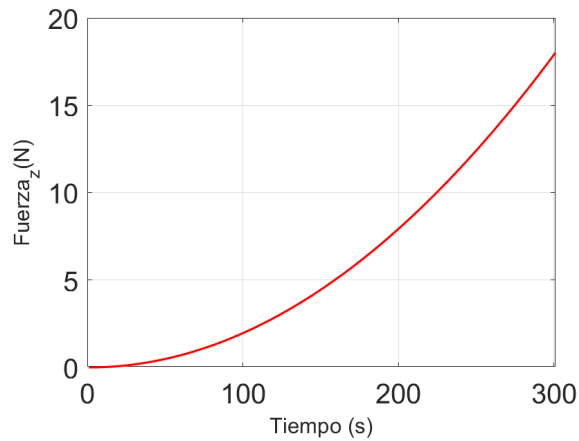
23 Para este estudio no se considerará la fuerza perpendicular al sentido de  
24 flujo: lift. Esta es despreciada por diferentes autores (Lee y Perkins, 1992) (Foti  
25 y Martinelli, 2016) (Papailiou, 1997) principalmente porque la razón de fuer-  
26 zas en las componentes perpendiculares a los flujos esta relacionada posibles  
27 asimetrías tangenciales en el perfil. Para conductores sin formaciones de hielo  
28 en su superficie, la circulación del campo de velocidades relativo circundante es  
29 próxima a cero, lo que se traduce en una fuerza de lift nula. Esta es la principal  
30 diferencia de este caso en comparación por lo propuesto en la literatura fuen-  
31 te (Luongo et al. 1984) y (Foti y Martinelli, 2018) donde si son considerados



**Figura 5.9:** Perfil de velocidad progresiva  $z$ .

1 perfiles con formaciones de hielo.

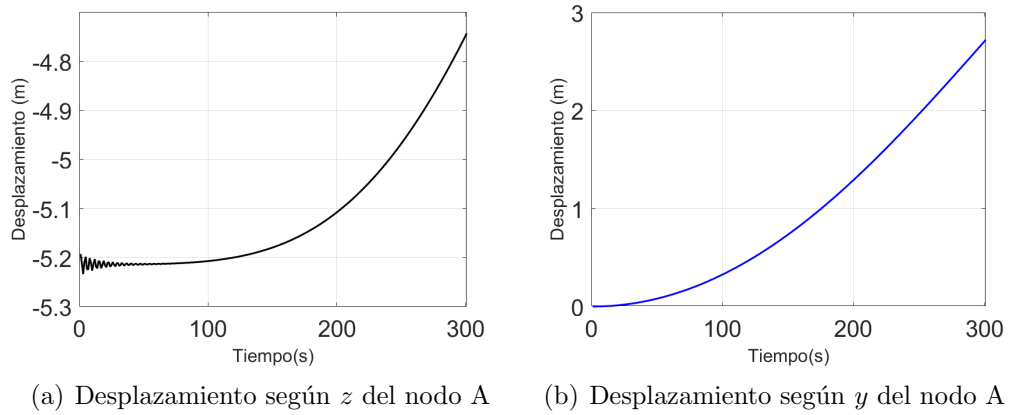
2 El perfil de velocidades en la Figura 5.9 genera fuerzas sobre la estructura.  
 3 La orientación del cable es tal que el flujo en todo punto es transversal a el.  
 4 Los valores de  $C_d = 1.5$  se extrajeron la referencia (Foti y Martinelli, 2018).  
 5 Se aclara que el angulo de ataque varía durante la trayectoria del cable, no  
 6 obstante el coeficiente  $C_d$  permanece constate debido a la simetría de revolución  
 7 del perfil. Se gráfica entonces las fuerzas sobre cada nodo del conductor en La  
 8 Figura 5.10.



**Figura 5.10:** Perfil de fuerza nodal según el eje  $z$ .

9 A continuación se exponen los desplazamientos verticales y horizontales del  
 10 nodo A. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el  
 11 perfil de fuerza y desplazamientos. Esta homología entre los perfiles de ambas  
 12 magnitudes es explicable mediante un análisis de Fourier del sistema. Haciendo

1 referencia a la función de transferencia que relaciona a ambas variables, la  
2 misma produce unicamente en desfazaje en estado estacionario. Como la curva  
3 de carga es de manera gradual y no presenta exabruptos en el tiempo, podemos  
4 suponer que la respuesta es cuasi-estática. Se presentan entonces en las Figuras  
5 5.11 los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente del nodo A  
6 situado en el punto medio del vano.

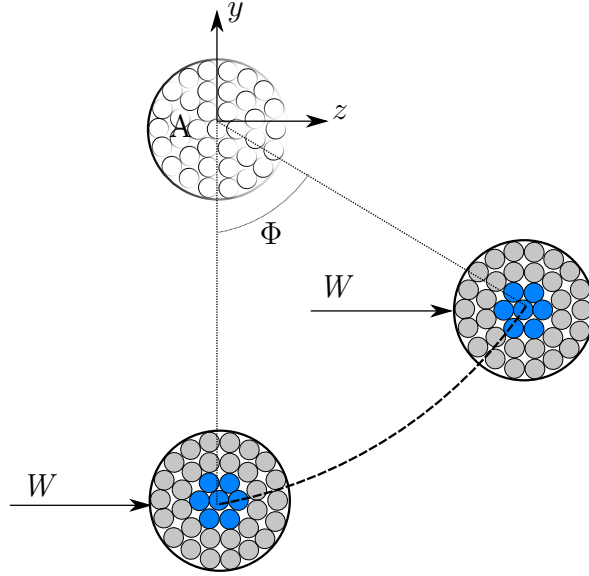


**Figura 5.11:** Desplazamientos del nodo A.

7 Con el objetivo de contrastar los resultados tomando como referencia la  
8 literatura fuente (Foti y Martinelli (2018)), se capturo el ángulo de balanceo  
9 del punto A para todo tiempo. Esta variable se halla mediante la función  
10 tangente que vincula el ángulo respecto da la deformada en el eje  $x$  con los  
11 desplazamiento en  $z$  e  $y$ . Para ilustrar al lector se realizó el esquema mostrado  
12 en la Figura 5.12 del ángulo  $\Phi$  en cuestión.

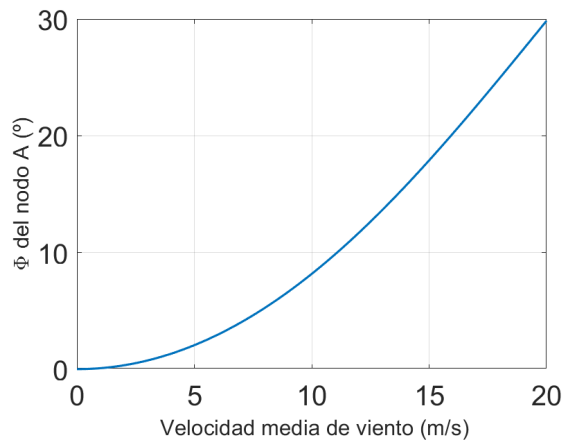
13 Se graficaron las trayectorias del angulo para diferentes valores de velocidad  
14 media de viento, generando así una curva carga desplazamiento aerodinámica.  
15 Es posible notar que la forma de la Figura 5.12 describe un perfil semejante  
16 al de que desarrollan tanto la fuerza, como los desplazamientos en las Figuras  
17 5.11 y 5.10. Esta similitud se fundamenta en que la velocidad es lineal con el  
18 tiempo y por tanto, su escala es proporcional a la temporal. Por otra parte,  
19 en comparación con los resultados presentados por Foti y Martinelli, 2018 se  
20 observan valores similares de ángulo para las diferentes velocidades. Asimismo  
21 la forma del perfil es idéntica para todo el dominio temporal. Sin embargo, el  
22 valor máximo de ángulo alcanzado en este modelo es mayor comparativamen-  
23 te, lo que se puede atribuir al menos a dos factores. En primera instancia la  
24 turbulencia introducida en la bibliografía atenúa los desplazamientos debido a





**Figura 5.12:** Esquema ilustrativo del ejemplo de un conductor simplificado.

que las fluctuaciones axiales en el perfil de viento, se ejercen fuerzas desincornizadas a lo largo del vano mientras que en este modelo las fuerzas se acompasan produciendo mayores amplitudes. El segundo factor se vincula a la presencia del lift y la variación del ángulo de ataque con el ángulo. Como en la referencia Foti y Martinelli, 2018 se toman en cuenta un perfil con formaciones de hielo, y por tanto sin simetría de revolución, las fuerzas generadas afectan de diferente forma al conductor de estudio produciendo resultados discordantes.



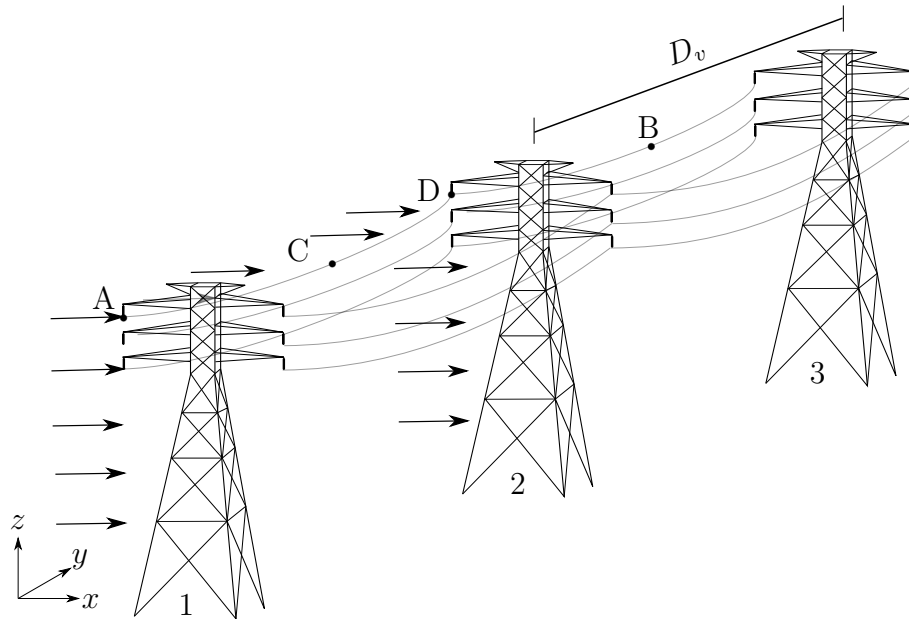
**Figura 5.13:** Ángulo de balanceo  $\Phi$  en función de la velocidad media  $W(t)$ .

El ejemplo permite inferir que la respuesta numéricas del modelo representan de manera acorde y aceptable las dinámicas del fenómeno para conductores

1 de transmisión eléctrica bajo ciertas hipótesis. Dada la semejada en los resulta-  
2 dos arrojados por la formulación, respecto a la bibliografía estudiada, es posible  
3 aventurarse a la aplicación de casos más complejos.

### 4 5.3. Sistema de transmisión eléctrica

5 Este apartado ataca el objetivo central de este trabajo: modelar sistemas de  
6 transmisión eléctricas afectados por vientos extremos no sinópticos, en parti-  
7 cular, TC. Las estructuras de suministro en alta tensión constan de un tendido  
8 eléctrico anclado mediante torres, las que sostienen el conductor garantizan-  
9 do un traslado de la corriente de manera segura y confiable. El dominio del  
10 ejemplo consta de tres torres equiespaciadas colocadas consecutivamente y dos  
11 vanos de idéntico largo  $D_v = 206.5 \text{ m}$  tal cual se indica el Esquema 5.14. Para  
12 el conductor de control se etiquetan los puntos de fijación A y D a la torre 1  
13 y 2 respectivamente. También, se identifican los nodos en el punto medio del  
14 primer y segundo vano con los literales C y B respectivamente. Con el objetivo  
15 de representar una geometría real de una línea de alta tensión y no aborrcer  
16 al lector con descripciones de propiedades, los conductores de la simulación se  
17 corresponden con el Ejemplo 5.2 y cuyas propiedades mecánicas se explicitan  
18 en la Tabla 5.1.



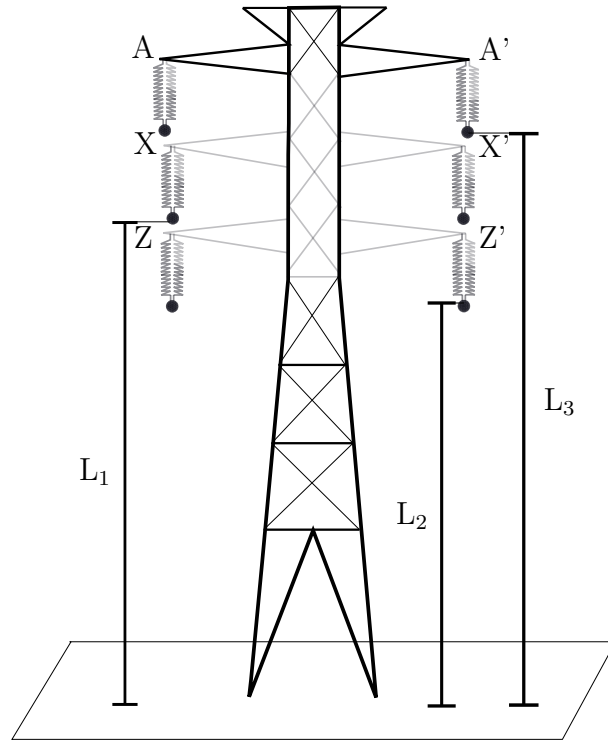
**Figura 5.14:** Ilustración de desplazamientos y ángulos de balanceo.

1 En Uruguay los tendidos eléctricos de alta tensión son aquellos que trans-  
2 portan un voltaje mayor a  $72.5 \text{ kV}$ . Este valor de tensión es eminentemente  
3 peligroso y para asegurar que la torre se encuentre aterrada se utilizan elemen-  
4 tos aisladores. Estas cadenas aisladoras tradicionalmente de vidrio y cerámicas  
5 han ido mutando a poliméricas con un núcleo sólido, aumentando así su tena-  
6 cidad y flexibilidad. Según la normativa Norma IEC 60815, para alta tensión,  
7 deben medir un largo de 10 in. Para el modelo las cadenas se modelaron co-  
8 mo barras de Green, debido a su exigua rigidez a flexión y su articulación de  
9 anclaje en ambos extremos. Además se consideró un modulo de elasticidad  
10 aproximado  $E = 70 \text{ GPa}$  según los estudios experimentales realizados por la  
11 referencia Crespo, 2019.

12 Al igual que los aisladores, las barras de la estructura metálica se modelaron  
13 con elementos de tipo green, con una ley material Saint-Venant-Kirchhoff con  
14  $E = 300 \text{ GPa}$  y  $\nu = 0.3$ . Estos valores se corresponden con un acero ASTM  
15 A 572 laminado en caliente, usual en este tipo de estructuras, junto al A36 y  
16 ASTM <sup>9</sup>65. Estas torres tienen una altura máxima de  $44 \text{ m}$  y un ancho entre  
17 los opuestos de la cercha  $14.8 \text{ m}$ . Además son capaces de sostener 6 líneas,  
18 estas se corresponden a cada altura, con cada una de las fases eléctricas. Las  
19 líneas se encuentran colocadas a tres cotas distintas  $L_1 = 31.75 \text{ m}$ ,  $L_2 = 26.03$   
20  $\text{m}$ ,  $L_3 = 39.76 \text{ m}$ , tal y como se muestra en 5.15.

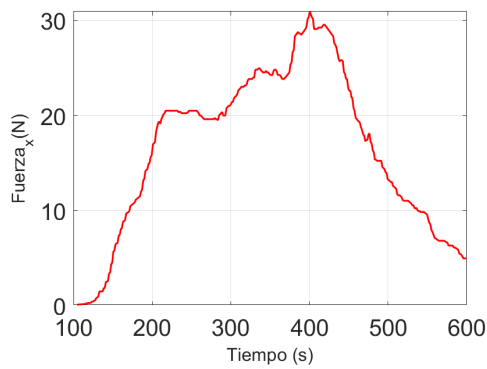
21 La simulación consta de dos etapas, primeramente partiendo de la confi-  
22 guración solución al problema estático del peso propio, se aplica la gravedad  
23 según el eje  $-z$  tal cual se muestra en la Figura 5.15. Nuevamente, al igual que  
24 en el Ejemplo 5.2 , esto suprime posibles inestabilidades cuando las tensiones  
25 son próximas a cero. Esta etapa tomó 100 segundos y es estabilizada por el  
26 amortiguamiento aerodinámico en desplazamientos. Este se calculó como una  
27 aproximación a partir de la literatura Matheson y Holmes, 1981 promediando  
28 la velocidad media de viento, resultando  $c = \rho_a C_d d c l_{elem} \bar{v} = 0.15 \text{ Ns/m}$ .

29 Posteriormente se aplica una fuerza correspondiente a un perfil de tormenta  
30 convectiva capturado en la referencia Stengel y Thiele, 2017, positiva según el  
31 eje  $x$ . No se tienen en cuenta fluctuaciones espaciales en la coordenada axial  
32 del cable, asociada a una función de coherencia de correlación espacial debida  
33 a la turbulencia. Es menester destacar que la tormenta convectiva se aplicó  
34 unicamente al vano que sitúa entre la torre 1 y 2, con el objetivo de extraer  
35 resultados respecto al comportamiento flexional en el plano  $yz$ , lo que se evi-  
36 denciará a continuación en disimil desarrollo de las trayectorias entre los nodos

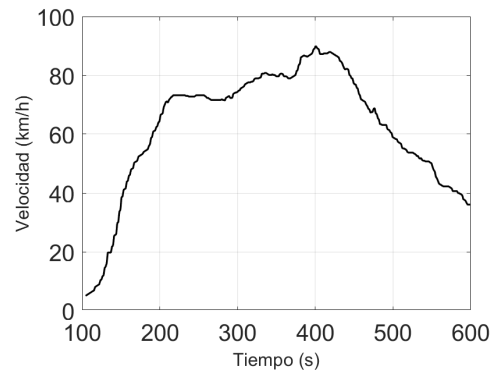


**Figura 5.15:** Esquema geométrico de cotas principales en la torre.

1 A, C, D y B. La aplicación de la tormenta en una fracción del dominio se basa  
 2 en que estos fenómenos tiene dimensiones espaciales del orden de 40 metros a  
 3 40 kilómetros Fujita (1985), consecuentemente es factible que la tormenta afec-  
 4 te a una fracción del tendido. Se muestra continuación en las Figuras 5.16(b)  
 5 y 5.16(a) los valores de fuerza y velocidad aplicados en la coordenada  $x$  entre  
 6 los nodos A y D para cada instante.



(a) Carga aplicada sobre los nodos.

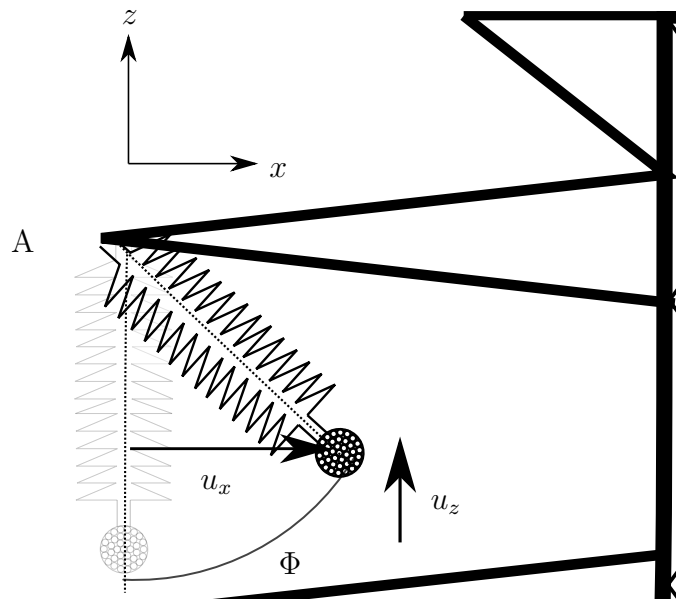


(b) Perfil de velocidades de viento.

7 Las tormentas severas generan CD donde las velocidades aumentan verti-

1 ginosamente en pequeños intervalos de tiempo, alcanzando umbrales de hasta  
2 270 km/h Fujita, 1985. Para este modelo, el perfil representado es menor te-  
3 nor, mas no el aumento súbito del fenómeno. La velocidad se eleva del valor  
4 nulo a 80 km/h en menos de 3 minutos, tal y como se observa en la Figura  
5 5.16(b). Debido al impacto de del viento sobre el conductor se generan fuerzas,  
6 estas se calcularon con los valores de coeficiente drag y fórmula detalladas en  
7 el Ejemplo 5.2 anterior extraídos de la referencia Foti y Martinelli (2016).

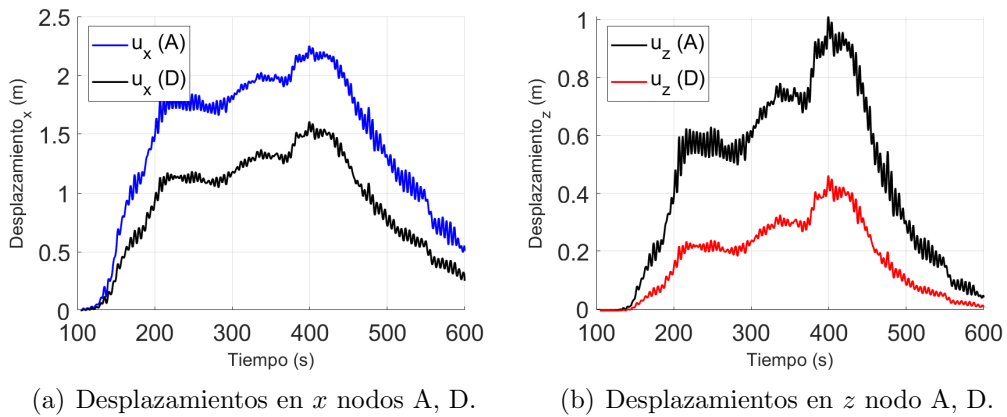
8 Ya se ha resaltado en retiradas ocasiones los posibles daños severos que  
9 puede ocasionar un excesivo balanceo del conductor. Volores desmedidos de  
10 esta variable deben controlarse en todos los aisladores rotulados en el Esque-  
11 ma 5.15. Consecuentemente, se compararon cuantitativamente las oscilaciones  
12 entre fases (A-A', X-X', Z-Z'), no apreciándose sensibles diferencias, tanto en  
13 desplazamientos lineales como angulares. Por otra parte, no existen aprecia-  
14 bles variaciones a ambos lados del plano transversal de simetría (entre A-A').  
15 Esto se explica debido a la distribución espejada de la geometría y el hecho  
16 de omitir las variaciones en el flujo de aire aguas abajo del cable que recibe  
17 antes el impacto del flujo. Aclarados los aspectos mencionados, y considerando  
18 que los desplazamientos de la torre aumentan con la cota, se eligió el nodo A  
19 como variable de control. Para este nodo se registraron su desplazamiento en  
20 los ejes  $x$  y  $z$  como también el ángulo de oscilación  $\Phi$  tal y cual se observa en  
21 la Figura 5.16.



**Figura 5.16:** Ilustración de magnitudes de balanceo.

El modelado numérico del ejemplo se realizó considerando 200 elementos de viga corrotacional por conductor, utilizando un paso temporal de  $\Delta T = 0.5$  s y un algoritmo de resolución numérica HHT con un parámetro característico  $\alpha = -0.05$ , luego de un arduo y tedioso procedimiento iterativo de ajuste de parámetros se realizaron las simulaciones en un período 30 hs aproximado con tolerancias en desplazamientos y en fuerzas residuales de  $10^{-5}$  m y  $10^{-5}$  N respectivamente.

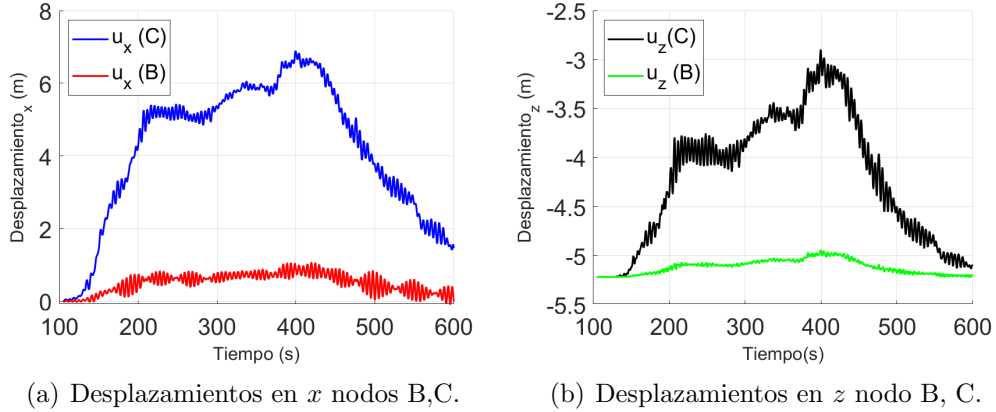
A continuación se figuran los desplazamientos verticales y horizontales de los extremo libre de las cadenas aisladoras, nominadas con las letras A, D. En estos se observa un comportamiento inercial y una relación entre el perfil de fuerza y desplazamientos. Este comportamiento homólogo entre ambas magnitudes externas, responden a un argumento basado en el análisis en frecuencia del sistema, donde la función de transferencia desfasa a ambas magnitudes en estado estacionario. En 5.17(a) y 5.17(b) se observan los desplazamientos en vertical y transversal respectivamente. En ambas figuras es posible notar que debido a la intensidad del viento sobre los conductores entre la torre 1 y 2, el nodo A desarrolla un movimiento de mayor amplitud. No obstante, cabe destacar el carácter sintético de las condiciones de borde para el nodo ya que el modelo no representa los cargas inerciales de los vanos contiguos a este.



**Figura 5.17:** Desplazamientos de las cadenas aisladoras A y D.

Además de los elementos aisladores, los puntos medios en el vano del conductor también despliegan grandes desplazamientos, este fenómeno resulta indeseable debido a múltiples factores, entre ellos: las restricciones de seguridad sobre movimientos máximos, las inductancias magnéticas que puedan generar voltajes peligrosos a objetos paramagnéticos circundantes, y la proxi-

1 mitad entre fases que puede devenir en cortocircuito y daño sobre los compo-  
2 nentes. Por estas razones, en las Figuras 5.18 se ilustran los desplazamientos  
3 para los nodos B y C.

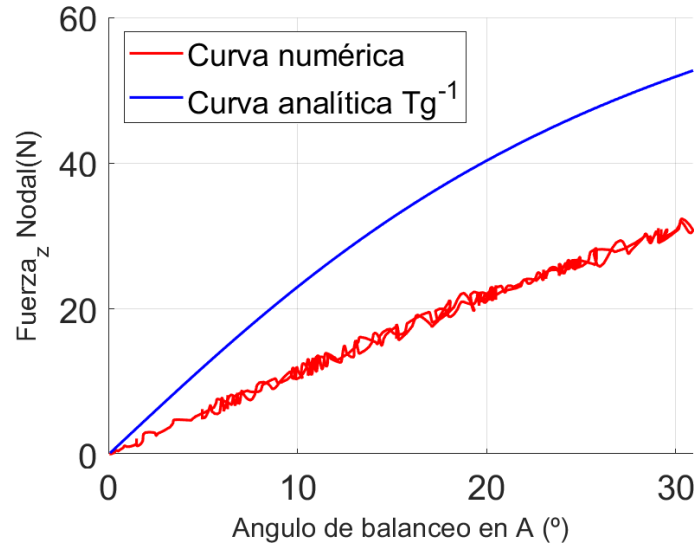


**Figura 5.18:** Desplazamientos de los nodos medios B y C.

4 En la Figura 5.18(a) se aprecia que el orden de los movimientos, para am-  
5 bos nodos, es menor 8 m durante el dominio temporal. Como la separación  
6 entre estos es de unos 14 metros podremos garantizar que no habrá impactos  
7 entre conductores, aun sin considerar desplazamientos sincrónicos entre ambas  
8 líneas. No obstante, otras arquitecturas de torres poseen un conductor central,  
9 para este caso las posibilidades de choque son mayores y la amenaza debe con-  
10 siderarse a la hora del diseño. En la Figura 5.18(b) se muestra que el descenso  
11 máximo de la línea se presenta en la primer etapa de simulación, alcanzando  
12 un valor de 5.2 m. Esto resulta evidente y trivial dado el sentido de la fuerza  
13 ejercida por el viento, pero es una magnitud relevante de seguridad al momento  
14 de la instalación, para regular la fuerza de pre-tensado. Al igual que en el par  
15 de Figuras 5.17, en 5.18 se aprecian comportamientos morfológicos semejantes  
16 en las historias de desplazamiento entre nodos. Cabe notar que, a pesar de  
17 que los perfiles son análogos entre los distintos puntos, los desplazamientos en  
18 puntos medios representados en las Figuras 5.18 presentan una mayor fluctua-  
19 ción temporal respecto los de las cadenas aisladoras mostradas en las Gráficas  
20 5.17.

21 En virtud de escudriñar la relación entre los perfiles de fuerza y las variables  
22 cinemáticas se elaboró la Figura 5.19 carga desplazamiento para el nodo A. En  
23 abscisas, se colocó el valor del ángulo de balanceo, y en ordenadas la fuerza  
24 nodal originada por la tormenta. Además de plasmar los resultados numéricos

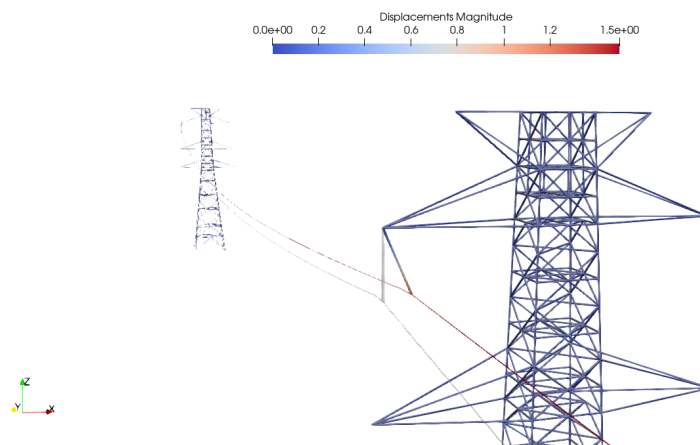
se graficó un calculo estático ampliamente utilizado en la bibliografía, sobre todo en el área de ingeniería del viento (Stengel y Thiele, 2017), (Durañona y Cataldo, 2009) (Yang y Hong, 2016).



**Figura 5.19:** Curva analítica y numérica carga desplazamiento.

El cálculo analítico resulta de análisis estático plano, donde se iguala la tangente del ángulo con el cociente entre la fuerza total ejercida sobre el conductor y su peso. Este razonamiento no tiene en cuenta las componentes inerciales, tanto de la cadena aisladora como también del conductor, cuyas aceleraciones pueden afectar las fuerzas internas transmitidas al elemento aislador. Asimismo, ese calculo desprecia la componente 3D del movimiento en la coordenada axial, proveniente de las distintas orientación de la linea respecto al ángulo de incidencia del flujo. En la Figura 5.19 se evidencian las diferencias entre los modelos y como el cálculo analítico arroja valores sobredimensionados, respecto al umbral de velocidad que produciría el impacto, según los resultados del modelo implementado. Con el objetivo de ilustrar visualmente sobre las deformaciones de la estructura y las fluctuaciones axiales mencionadas, se muestran la configuración indefomradas en gris y las deformadas con una barra de colores en desplazamientos para el instante  $t = 400s$  en la Figura 5.20.





**Figura 5.20:** Estructura indeformada y deformada para  $t = 400$  s.

# **Capítulo 6**

## **Conclusiones**

El presente capítulo puede separarse en tres secciones que se relacionan con diferentes aristas o perspectivas del trabajo llevado a cabo. En primera instancia, se detallan las consideraciones finales y de síntesis, desde un punto de vista técnico sobre los resultados obtenidos. Posteriormente, se narran los aspectos del desarrollo académico de esta tesis, como trabajo culmine de una etapa formativa fundamental para quien escribe. Luego de esto, se analizan limitaciones que deberían mejorarse posibles trabajos a futuro, para finalizar con una reflexión crítica sobre el sujeto y el método científico.

### **6.1. Conclusiones técnicas**

#### **6.1.1. Sobre el fenómeno**

Inicialmente se consultó el estado del arte en el área de ingeniería del viento y estructural. Se analizaron bibliografías en materia de simulaciones numéricas aplicadas a conductores eléctricos, con abordajes semi-analíticos y computacionales. También, se estudiaron trabajos nacionales e internacionales, desde un punto de vista cualitativo y experimental de CD y sus posibles perjuicios sobre líneas de transmisión eléctrica. Asimismo, debido a numerosas ventajas se interiorizó y eligió la formulación corrotacional de vigas 3D para grandes desplazamientos y rotaciones. Una vez ahondado en la temática, se implementó y validó un modelo corrotacional consistente robusto y eficaz, capaz de captar y reproducir desplazamientos de gran amplitud con número reducido de elementos.

Según la bibliografía estudiada, hay vasta evidencia de que el fenómeno

1 de TC ha afectado severamente la calidad e integridad de la vida humana  
2 a lo largo y ancho del globo terráqueo. En particular, debido a las condicio-  
3 nes climáticas singulares de la región, y el progresivo calentamiento global,  
4 se han intensificado los daños devastadores en los sistemas de transmisión y  
5 distribución eléctrica nacionales. Induciendo inevitablemente, en costos millo-  
6 narios de reparación sobre las instalaciones, y perdidas durante la interrupción  
7 del suministro. Esta investigación construye una herramienta de simulación  
8 computacional, capaz de emular los desmedidos desplazamientos y esfuerzos  
9 que estos eventos producen sobre los sistemas de transmisión eléctrica.

10 Uniendo resultados de diferentes trabajos internacionales con los resultados  
11 del ejemplo 5.3, es posible teorizar que la mayoría de las incidencias ocurri-  
12 das en las líneas Palmar-Montevideo de 500kV, pueden deberse al pasaje de  
13 tormentas severas sobre la zona. Estas tormentas producen CD, que ejercen  
14 cargas desmesuradas sobre el conductor, en el orden de minutos, imponiendo  
15 ángulos de balanceo excesivos, acercando los conductores a las torres, a una dis-  
16 tancia tal, que inminentes descarga a tierra pueden sacar del servicio a la línea.  
17 Además según los estudios, las normativas en el diseño de sistemas eléctricos  
18 de transmisión, considerando flujos tipo capa límite atmosférica, se encuentra  
19 subdimensionando. Esto se debe a que los periodos de retorno para velocidades  
20 de hasta 100 km/h es menor para CD en comparación con vientos tipo capa  
21 límite atmosférica.

### 22 6.1.2. Sobre la metodología

23 En la Sección 4.1.2 se desarrolló un estudio general sobre los campos de  
24 velocidades absolutos y relativos, vinculados al efecto relativo del movimiento  
25 del conductor respecto al viento. Este enfoque no se encontró en la biblio-  
26 grafía consultada, esclareciéndose la dinámica del fenómeno. A su vez, según  
27 la Figura 4.4, se develó que despreciar la velocidad perpendicular frente a la  
28 componente media, en el sentido transversal  $z$ , es equivalente a el ángulo de  
29 ataque sea nulo y también así, la componente del drag según el sentido de  $y$ .  
30 Por otra parte, se concluyó que al considerar los campos relativos aparece un  
31 término aeroelástico, que emerge de la diferencia de velocidades, vista desde  
32 un referencial solidario al conductor. A este termino se lo identifica en la mate-  
33 ria con el nombre de amortiguamiento aerodinámico y, según lo estudiado, no  
34 había sido incluido en la metodología corrotacional.

1 Una vez descritas las hipótesis en este mismo capítulo, en la Sección 4.2.2  
2 se generó un análisis analítico no explicado en la bibliografía de referencia (Le  
3 et al. 2014). En este apartado se aplicó el método de resolución para problemas  
4 dinámicos de HHT, incondicionalmente estable, explicando con detenimiento  
5 la deducción y premisas utilizadas. Complementario, al desarrollo teórico, se  
6 establecieron los principales pseudocódigos subyacentes a la implementación  
7 numérica en el Software ONSAS. Esta sección 4.2.3 se desarrolló con el objetivo  
8 de esquematizar y explicar la implementación de la formulación, además de  
9 sentar las bases para posibles estudios e investigaciones posteriores.

10 En función de los avances originales de esta investigación mencionados en  
11 los párrafos anteriores. Esta tesis constituye un desarrollo complementario a  
12 la formulación propuesta, por Le et al. 2014, incluyendo fuerzas aerodinámicas  
13 linealizadas o fuerzas viscosas en el estudio analítico. Esto puede aplicarse  
14 a un espectro enorme de estructuras representables por elementos de viga,  
15 con grandes desplazamientos y rotaciones, atacadas por el viento. Dado este  
16 diverso habanico de aplicaciones, el interés de la comunidad científica puede  
17 ser un impulso catalizador para ciertas publicaciones a futuro.

### 18 6.1.3. Sobre los resultados

19 Esta formulación se validó con el ejemplo 5.1 benchmark del folclore co-  
20 rrotacional presentado por Simo y Vu-Quoc, 1988. Este es cargado con una  
21 fuerza abrupta y de severa magnitud, en relación a la rigidez de la estructura  
22 alcanzando un valor de 50 N en apenas 2 segundos de simulación, tal y como  
23 se muestra en la Figura 5.2. Esta fuerza posee una esencia análoga al fenómeno  
24 de TC per se. Esa semejanza radia en la fuerza aumenta estrepitosamente, en  
25 un corto lapso de tiempo, por ende la capacidad del modelo de reproducir este  
26 tipo de impactos es fundamental para poder representar el fenómeno central  
27 de este trabajo.

28 En la Figura 5.3(b) se observan amplitudes que alcanzan los 8 metros cuan-  
29 do la estructura mide 10. Esto evidencia, la fuerte presencia de grandes des-  
30 plazamientos y rotaciones. Asimismo, en la dirección  $z$ , se puede observar el  
31 carácter no conservativo de la formulación corrotacional, ya que los valles y  
32 crestas de las respuesta, prestan una tendencia decreciente con el tiempo. En  
33 relación a los desplazamientos en el sentido de  $y$  del nodo A, presentados en  
34 la Figura 5.3(a), se observa el signo negativo de este, concordando con lo es-

perado intuitivamente según la fuerza aplicada. Por último, el resultado mas importante de este ejemplo, se destila al cotejar las respuestas del as Figuras 5.3(a), 5.3(b) y 5.4(b) con lo publicado por le articulo de referencia (Le et al. 2014). Al comparar estas figuras se concluye que el modelo implementado es capaz de representar cabalmente movimientos de gran amplitud, con apenas 10 elementos por miembro y unas paso temporal de 0.25 s. Esto permitió validar la formulación para este caso y aplicarla a dominios mas complejos específicamente con el foco en conductores eléctricos.

Como primer ejemplo aplicado al modelado de conductores se eligió un problema postulado en la publicación (Foti y Martinelli, 2016). Para esto, se investigó la normativa *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003 que detalla propiedades geométricas y constructivas de conductores para alta y media tensión. Con el fin de cotejar fielmente los resultados obtenidos, se extrajeron, tanto los parámetros del flujo, como las propiedades geométricas y materiales, del trabajo de referencia correspondientes con un conductor DRAKE ASCR 7/26. No obstante, con el objetivo acercar la representación al fenómeno, se incorporaron dos elementos aisladores ilustrativos, que por sus condiciones de borde, no afectan el comportamiento dinámico y cinemático del problema. (Ver Figura 5.8)

Para este ejemplo de la Sección 5.2, se aplicó un viento progresivo desde un valor nulo hasta una velocidad de un perfil Capa límite atmosférica en 20 segundos, según la Figura 5.9. Este cálculo se realizó considerando las propiedades extraídas de la norma (*Design criteria of overhead transmission lines*, 2003), explicitadas en la Tabla 5.1. Al espejar los perfiles de velocidad presentados en las Figuras 5.11(b) y 5.11(a), con las fuerzas aplicadas de la Ilustración 5.10 se observa una homología. Esto se fundamenta con un análisis de Fourier donde los desplazamientos ofician de salida y las fuerzas de entrada.

Las contribuciones principales del Ejemplo 5.2 se desprenden al contrastar los resultados del ángulo  $\Phi$ , gratificado en la Figura 5.12 con los presentados por Foti y Martinelli. De este análisis se extraen ciertos paralelismos y discordancias. En primer lugar, los perfiles arrojados son semejantes, presentando un relación cuadrática con la velocidad. Esto se atribuye a la función de dependencia cuadrática entre la fuerza y la velocidad media de viento. Sin embargo, para el caso implementado en esta tesis se alcanzan mayores valores de ángulo. Esto puede deberse a múltiples diferencias entre los modelos: la omisión de las componentes turbulentas del flujo, el estado inicial de tensado y la presencia de

1 hielo en las lineas. Los últimos dos factores intuitivamente tienden a disminuir  
2 el ángulo máximo alcanzado por la linea, durante el transcurso del movimiento,  
3 por su mayor rigidez inicial e inercial. Dado estos resultados, se decidió llevar  
4 las simulaciones a un grado mayor de complejidad, e implementar un modelo  
5 con múltiples elementos simulando un sistema de transmisión eléctrica.

6 Este es el ejemplo descrito en la sección 5.3, y es el resultado principal de  
7 este trabajo. Se acoplaron diferentes componentes de un sistema de alta ten-  
8 sión conductores, aisladores y torres. Con este objetivo, se validaron ejemplos  
9 intermedios integrando elementos de biela tipo Green y de viga corrotacional  
10 con resultados lineales y dinámicos conocidos. Las geometrías y propiedades  
11 que integraron el modelo son extraídas de bibliografías experimentales y nor-  
12 mativas buscando representar y emular el fenómeno de forma realista.

13 Con el mismo cometido, el perfil de viento se extrajo de estudios expe-  
14 rimentales en el Norte de Alemania durante el transcurso de una tormenta  
15 convectiva, tipo corriente descendente, publicado en (Stengel y Thiele, 2017).  
16 Esta es de una magnitud intensa, aunque no en comparación con los resultados  
17 capturados en diferentes estudios de campo nacionales, en (Durañona y Catal-  
18 do, 2009) y (Duranona et al. 2019). En estos artículos se presentan medidas  
19 que alcanzan umbrales de 88.2 a 162 km/h a 45 m de altura. Otra diferencia al  
20 respecto, refiere al gradiente de velocidad, el flujo introducido numéricamente  
21 del autor Stengel y Thiele posee una menor aceleración en comparación con  
22 tormentas en el territorio uruguayo.

23 La carga del viento se distribuyo en el primer vano, provocando un perfil  
24 que ataque diferente a la linea en su coordenada axial. Esto genera un efecto  
25 de desfazaje entre los conductores de los vanos entre la torres 1-2 y 2-3 de  
26 la Figura 5.20. Esta variabilidad del flujo, busca representar un fenómeno de  
27 oscilación axial, relacionado con la presencia de vórtices a lo largo del espacio.  
28 Las diferencias en desplazamientos de los puntos A B C Y D de la cadena  
29 aisladora, se evidencia en las Figuras 5.18 y 5.17. Por mas que los movimientos  
30 posean diferentes amplitudes de banda, los perfiles obtenidos se encuentran  
31 gráficamente emparentados con el perfil de la tormenta en la Figura 5.16(b),  
32 al igual que en el Ejemplo 5.2 se podría fundamentar mediante un análisis en  
33 frecuencia de Fourier.

34 Finalmente, se creó un análisis de contraste con un modelo ampliamente  
35 utilizado en el área de Ingeniería del Viento. Esta se utiliza para calcular de  
36 forma cuasistática, utilizando una fórmula de arcoangente. Esta se basa en

1 un péndulo cuasiestático plano, omitiendo términos inerciales. Los trabajos de  
2 Stengel y Thiele, 2017, Durañona y Cataldo, 2009 y Yan et al. 2009 aplican esta  
3 aproximación simplificadora. Si bien en los resultados del Ejemplo 5.3 no son  
4 comprobables, la aproximación plana no funciona. Para este caso en particular,  
5 la curva numérica parece reflejar una linealidad, evaluar el ángulo de la cadena  
6 mediante el modelo estático, arrojaría un resultado de sobrestimado. Esto se  
7 detalla en la Figura 5.19.

8 Estos resultados presentan indicios que para enfrentar la problemática, los  
9 códigos generados pueden gestar una herramienta de análisis complementario  
10 para el diseño de sistemas de transmisión y distribución. Según contactos es-  
11 tablecidos con la empresa de transmisión eléctrica (UTE), las torres de alta  
12 y media tensión suelen encargarse a empresas privadas que obtienen la obra  
13 por licitación y entregan las instalaciones con llave en mano. Estos proyectos  
14 suelen importar soluciones del extranjero, que pueden ser no aplicables a las  
15 condiciones nacionales. Esto se explica por la carencia de las normas interna-  
16 cionales en materia de fenómenos de viento no sinópticos como CD y ciclones  
17 extratropicales. Esto se intensifica en el territorio para sistemas montados hace  
18 30 años en superposición con la asiduidad, intensidad y frecuencia de TC.

## 19 6.2. Conclusiones de formación

20 El desarrollo de este trabajo constituyó una instancia de formación fun-  
21 damental y enriquecedora para el autor enmarcada dentro del programa de  
22 Maestría en Ingeniería Estructural. Este documento es la síntesis y aplicación  
23 de un conjunto de conocimientos profundizados durante la actividad programa-  
24 da, aplicada al modelado numérico de estructuras. Desde la óptica del autor, la  
25 creación de herramientas endógenas con foco en atacar problemáticas a nivel  
26 nacional constituye un pilar fundamental en el desarrollo autónomo y origi-  
27 nal de la ingeniería uruguaya. Este trabajo es una muestra de la convicción  
28 y determinación, que el conocimiento académico, debe desarrollarse de forma  
29 transparente, comunitaria y democrática. Es por esto, que todos los códigos  
30 utilizados en esta investigación se implementaron en la herramienta de soft-  
31 ware libre ONSAS. Esto abre la posibilidad a cualquier tercero, ya sea una  
32 organización o persona, de estudiar, modificar y difundir los códigos creados  
33 como también aplicarlos a sus propias necesidades.

## 1 6.3. Trabajos a futuro

2 Actualmente este trabajo abre claras líneas de investigación y desarrollo  
3 para continuar la mejora de los modelos que se aproximen a la realidad con  
4 mayor precisión. Como trabajo a futuro para continuar la línea de investigación  
5 con un encare general se proponen los siguientes lineamientos:

- 6 1. Incluir en el análisis teórico de la formulación corrotacional condiciones  
7 de Dirichlet no homogéneas en desplazamientos, que sean capaces de  
8 representar el tensado del conductor durante la instalación. La hipótesis  
9 reduccionista sobre la tensión inicial, aparenta ser imprecisa respecto a  
10 la rigidez del sistema y tiende a reducir la exactitud en la representación  
11 del fenómeno. Según el punto de vista del autor, esta implementación en  
12 [ONSAS](#) es el punto de partida en la continuación de este trabajo.
- 13 2. Implementar un módulo modal dentro del [ONSAS](#) capaz de calcular los  
14 modos estructurales, insumo fundamental para realizar un análisis en  
15 frecuencia de posibles resonancias viento-conductor.
- 16 3. Agregar al desarrollo analítico de la formulación corrotacional la posibi-  
17 lidad de incluir relaciones de fuerza viscosas, no lineales con diferentes  
18 coeficientes de drag y lift de acuerdo al perfil geométrico de la sección e  
19 implementarlo en el Software [ONSAS](#).
- 20 4. Agregar al modelo del Ejemplo [5.3](#) los elementos separadores con mas de  
21 un conductor por aislador. En las instalaciones visitadas de forma presen-  
22 cial, se observaron una serie de separadores que mantienen distanciados  
23 los conductores evitando el cortocircuito. Además, al unir cuatro cables  
24 generan una mayor rigidez e inercia en los tendidos. Este análisis deberá  
25 incluir diferentes valores de coeficientes de drag dada la proximidad entre  
26 conductores y sus efectos sobre las líneas de flujo.
- 27 5. Verificar el no deslizamiento interno entre las lingas que conforman el  
28 conductor, según los estudios propuestos por Foti y Martinelli, [2016](#).  
29 Esto permitiría verificar la hipótesis asumida respecto al comportamiento  
30 de unión que mantiene el conductor durante sus trayectorias. Asu vez  
31 generar un aporte original estudiando como las TC afectan al fenómeno  
32 de deslizamiento interno de Papailiou, [1997](#).
- 33 6. Generar un análisis de malla en el numero de elementos por unidad de  
34 largo del conductor y sensibilidad respecto a las condiciones de borde  
35 establecidas. Esto permitiría estudiar el grado de discretización óptimo,



1 para minimizar el error numérico sin incurrir en un tiempo excesivo de  
2 simulación.

3 7. Integrar la herramienta [ONSAS](#) con un solver de fluidos como por ejem-  
4 plo el [caffa.3d.MBRi](#) basado en volúmenes finitos con paralelización mul-  
5 titorrial [Mendina et al. 2014](#). Esta ardua integración permitiría generar  
6 una herramienta sumamente potente para atacar problemas de interac-  
7 ción fluido-estructura.

8 Con el objetivo de generar una herramienta de diseño complementario para  
9 UTE se proponen los siguientes trabajos a futuro:

- 10 1. Incorporar diferentes geometrías de torres presentes en los distintos ten-  
11 didos de distribución del país. Según los intercambios con el personal de  
12 transmisión de UTE, las líneas de distribución, a partir de la década del  
13 2000, respecto a los que se representaron en el [Ejemplo 5.3](#) cambiaron las  
14 geometrías de torres. Es importante este análisis para lograr emular la  
15 influencia de la arquitectura de las torres, en la aproximación excesiva del  
16 conductor a las barras. De igual manera, adquirir datos reales aportados  
17 por UTE podría aportar un valor significativo a esta investigación.
- 18 2. Incorporar al modelo el agarre doble, que en determinadas ocasiones,  
19 se dispone en las líneas centrales de la torre. Esta es una solución ante  
20 la aproximación inminente del aislador, consiste en instalar una cadena  
21 aisladora extra que oficia de sujetador adicional para los conductores.  
22 Rigidizando y evitando de este modo el balanceo desmesurado. Otro  
23 tipo de soluciones implantadas, consiste en agregar pesos sobre puntos  
24 estratégicos en las líneas, aumentando la inercia del sistema. En este  
25 caso, la elección del peso consiste en un compromiso entre los esfuerzos  
26 generados en el cable sin alcanzar la fluencia y la masa que atenúa el  
27 balanceo. Este tipo de soluciones paliativas resultan interesantes como  
28 objeto de simulación.

## 29 6.4. Reflexión

30 Antes que nada, es necesario realizar una arqueología de las palabras su-  
31 jeto y fenómeno en castellano. Sujeto en latín *sub-iectum* significa lo que esta  
32 debajo, según una interpretación posmoderna. Desde esta perspectiva, es el

1 sujeto el sustrato de cualquier ente, que lo dota de sustancia, colores, palabras  
2 y formas. Por otra parte, fenómeno tiene una raíz etimológica en la palabra  
3 *phainomenon* al igual que la palabra fantasía. Esto alude a lo que se muestra,  
4 lo que se deja ver, lo que brilla. Ahora bien, en el acto de percibir cogniti-  
5 vamente existe una dirección previa (inconsciente o consciente) de apuntar el  
6 foco hacia algo, entonces ¿Quién y como se dirige ese foco?

7 Toda disciplina e investigación debería conocer sus propias fugas, fronteras  
8 y puntos ciegos. De lo contrario, cualquier pretensión hermética podría ser un  
9 síntoma de arrogancia y altanería. A lo largo de este trabajo, he canonizado una  
10 redacción en tercera persona, como si existiese una determinada imparcialidad  
11 y transparencia en dicho escritor. O quizás una búsqueda con necesidad de la  
12 verdad absoluta. Este sujeto, apuntado y enfocado en los párrafos siguientes,  
13 merece ensimismarse y cuestionarse a si mismo, según el proverbio en templo  
14 de Apolo del Oráculo de Delfos, *gnóthi sautón* o en castellano *Conócete a ti*  
15 *mismo*.

16 Durante el transcurso de este trabajó me surgieron las siguientes inquietu-  
17 des ¿Es la realidad un conjunto de fenómenos externos o es siempre un acto  
18 de interpretación inmanente al sujeto? Además, ¿Ese sujeto accede la reali-  
19 dad (el objeto) a través de la razón para conocer y explicarla, o simplemente  
20 la experiencia es quien valida ese conjunto de fenómenos?. A partir de esta  
21 pregunta, emana una interrogante natural, ¿Es posible entonces, desligar al  
22 sujeto del objeto, o mas bien este ente (ex-siste) en el mundo, y esta siempre  
23 arrojado, lanzado y en relación con el? Y de ser así, ¿No se encuentra entonces  
24 **ya** sugestionado por el paradigma actual, su cultura nativa y sus experiencias  
25 personales cuando describe?

26 Esas preguntas han sido abordadas por eminencias de la filosofía y la cien-  
27 cia, desde la modernidad hasta hoy. Por un lado, el realismo científico concibe  
28 que es posible constatar la realidad a través de la experiencia o a través del  
29 pensamiento. Para Descartes ese sujeto duda, piensa y por tanto **ya** en ese  
30 acto analítico, existe (*Cogito ergo sum*) Descartes, 1637, osea el ente en tanto  
31 ente. El padre del racionalismo nos plantea que el es yo del sujeto, a través de  
32 la duda metódica puede acceder la verdad. Contrapuesto a este, el empirismo  
33 valida cualquier conocimiento sólo por la experiencia. Esta se define por lo  
34 que es captado por nuestros sentidos, es decir que la experiencia es sensorial.  
35 Estas dos posturas, la del racionalismo de Descartes y la del empirismo de  
36 Hume, pueden ser pensadas como una forma de abordaje a la relación realidad

1 - conocimiento. Para Descartes: conozco en tanto analizo y pienso, y los ob-  
2 jetos existen cuando yo realizo la abstracción. Para el empirismo: conozco en  
3 la medida en que incorporo la realidad “objetiva”, la de los objetos que puedo  
4 percibir a través de los sentidos.

5 En el último tercio del sg XIX surgió un pensador disruptivo que viró ab-  
6 solutamente a la cuestión. Frederick Nietzsche plantea en su libro *Voluntad de*  
7 *Poder* Nietzsche, 2018 “ El pensar no es para nosotros un medio para “cono-  
8 cer” sino para designar el acontecer, para ordenarlo, para volverlo manejable  
9 para nuestro uso: así pensamos hoy acerca del pensar: mañana quizá de otro  
10 modo ”. Esta frase alude, desde mi voz de hoy, a un nihilismo que niega la po-  
11 sibilidad de conocer algo absoluto verdadero pues no es más que un desarrollo  
12 pragmático de poder. Es una cuestión de voluntad de voluntad, un dispositivo  
13 ordenador de la realidad según categorías y características en nuestro acto  
14 de querer/poder conocer. Antípoda a esta teoría nihilista aparece el relativis-  
15 mo. Este se estriba en el principio de incertidumbre Heisenberg, si existe ese  
16 conocimiento, es entonces indisoluble de cierta estructura. Thomas Kuhn en  
17 su libro *La estructura de las revoluciones científicas* Kuhn, 2019 plantea que  
18 el método científico revoluciona, cuando se produce un cambio de paradigma,  
19 no a partir de la observación de nuevos hechos o fenómenos. Junto con otros  
20 destacados sociólogos, acuñan la idea del concepto de “cargado de teoría”, un  
21 cierto conjunto de preconceptos anteriores a la observación, descripción y de-  
22 sarrollo de la cualquier investigación, que llevarán al científico demostrar lo  
23 que realmente quiere demostrar... de un nuevo demostración de poder.

24 ¿Como se demuestran los resultados de esta investigación?, construyendo  
25 un conjunto de artefactos experimentales/computacionales que constatan una  
26 supuesta realidad casi como un espejo, por correspondencia. En ese proceso de  
27 creación o utilización de instrumentos como ser: un programa, un nanómetro  
28 o un código computacional existe una omnipresente intervención humana.  
29 ¿Vale entonces seguir redactando en tercera persona desde un racionalismo  
30 positivista heredado de hace dos siglos? ¿Es coherente no ser categórico en la  
31 descripción de un resultado, cuando **ya** todo el dispositivo ordenador que sub-  
32 yace es una construcción humana? ¿Debemos seguir defendiendo un cadáver  
33 **ya** asesinado por las ciencias humanas, desde un **sujeto que no es mas que**  
34 **un efecto** cultural, histórico y económico?. Por una ciencia que tenga con-  
35 ciencia de sus puntos ciegos, Por una ciencia con conciencia de que la verdad  
36 absoluta ha muerto, Por una ciencia para las personas y en primera persona!

# 1 Bibliografía

- 2 Abd-Elaal, E.-S., Mills, J. E. y Ma, X. (2013). A coupled parametric-CFD  
3 study for determining ages of downbursts through investigation of dif-  
4 ferent field parameters. *Journal of Wind Engineering and Industrial*  
5 *Aerodynamics*, 123, 30-42.
- 6 Ahrens, J., Geveci, B. y Law, C. (2005). Paraview: An end-user tool for large  
7 data visualization. *The visualization handbook*, 717(8).
- 8 Ahrens, J., Jourdain, S., OLeary, P., Patchett, J., Rogers, D. H. y Petersen,  
9 M. (2014). An image-based approach to extreme scale in situ visualiza-  
10 tion and analysis. *SC'14: Proceedings of the International Conference*  
11 *for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*,  
12 424-434.
- 13 Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M. y Paulino, G. H. (2018).  
14 Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers  
15 manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering*  
16 *Structures*, 173, 283-299.
- 17 Alsafadie, R., Hjiiaj, M. y Battini, J.-M. (2010). Corotational mixed finite  
18 element formulation for thin-walled beams with generic cross-section.  
19 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52),  
20 3197-3212.
- 21 Ang, A. H.-S. y Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering plan-*  
22 *ning and design*.
- 23 Asadi, S. y Johansson, H. (2019). Multibody dynamic modelling of a direct  
24 wind turbine drive train. *Wind Engineering*, 0309524X19849827.
- 25 Barzanooni, R., Bog, I. T. y Elhaddad, M. (2018). Modeling of Flexible Wirings  
26 and Contact Interactions in In-dustrial Robots Using Geometrically  
27 Exact Beam Formulation.
- 28 Battini, J. M. y Pacoste, C. (2002). Co-rotational beam elements with warping  
29 effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*

1        *and Engineering*, 191(17-18), 1755-1789. [https://doi.org/10.1016/](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)  
2        [S0045-7825\(01\)00352-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00352-8)

3        Behdinan, K., Stylianou, M. y Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic  
4        analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and*  
5        *engineering*, 154(3-4), 151-161.

6        Belloli, M., Collina, a., Resta, F., Milano, P. y Seminar, O. I. T. a. F. (2006).  
7        Cables vibrations due to wind action. *O.I.T.A.F SEMINAR*, (April)  
8        005.

9        Blevins, R. D. y Vibrations, F.-I. (1990). Van Nostrand Reinhold. *New York*,  
10        104-110.

11       Cardona, A. y Geradin, M. (1988). A beam finite element non-linear theory  
12       with finite rotations. *International journal for numerical methods in*  
13       *engineering*, 26(11), 2403-2438.

14       Çengel, Y. A. y Boles, M. A. (2007). *Termodinamica*. MCGRAW HILL. [https:](https://books.google.com.uy/books?id=1xhpOgAACAAJ)  
15       [//books.google.com.uy/books?id=1xhpOgAACAAJ](https://books.google.com.uy/books?id=1xhpOgAACAAJ)

16       Chabart, O. y Lilien, J.-L. (1998). Galloping of electrical lines in wind tunnel  
17       facilities. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*,  
18       74, 967-976.

19       Costello, G. A. (1990). Average Voting Members and Other Benign Fictions:  
20       The Relative Reliability of Committee Reports, Floor Debates, and  
21       Other Sources of Legislative History. *Duke LJ*, 39.

22       Crespo, C. A. M. (2019). *Análisis en la selección de aisladores para una línea de*  
23       *transmisión*. Facultad de ingeniería/ Universidad Autonma de Mexico.

24       Darwish, M. M., El Damatty, A. A. y Hangan, H. (2010). Dynamic characte-  
25       ristics of transmission line conductors and behaviour under turbulent  
26       downburst loading. *Wind and Structures*, 13(4), 327.

27       Davenport, A. G. (1965). *Dynamic Behaviour of Massive Guy Cables*.

28       Davenport, A. (1960). *Wind Loads on Structures*, Division of Building Re-  
29       search.

30       De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. y Verhoosel, C. V. (2012).  
31       *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley  
32       & Sons.

33       Desai, Y., Yu, P., Popplewell, N. y Shah, A. (1995). Finite element modelling  
34       of transmission line galloping. *Computers & structures*, 57(3), 407-420.

35       Descartes, R. (1637). *Discours de la methode*. Leyde.

- 1 Di Pilato, M., Martelli, F. y Martinelli, L. (2008). Corotational Cable Elements  
2 to Simulate the Behaviour of Suspended Cables under Wind Loading.  
3 *not yet published.*
- 4 Duranona, V., Marchesoni, E. y Salles, R. (2019). A first characterization of  
5 high winds that affect the energy distribution system of Uruguay and  
6 their related effects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Ae-*  
7 *rodynamics*, 184, 128-138.
- 8 Durañona, V. (2015). The significance of non-synoptic winds in the extreme  
9 wind climate of Uruguay. *Proceedings of the 14th International Confe-*  
10 *rence on Wind Engineering, Porto Alegre, Brasil*, 21-26.
- 11 Durañona, V. y Cataldo, J. (2009). Analysis of severe storms in Uruguay and  
12 their effect on high voltage transmission lines. *Proceedings of the 11th*  
13 *Americas Conference on Wind Engineering.*
- 14 Durañona, V. y Denis, A. (2018). Bluff and body action, Apuntes del curso  
15 Elementos Aerodinámica y Aerolaticdad Estrcutrul.
- 16 Eaton, J. W., Bateman, D. y Hauberg, S. (2007). *GNU Octave version 3.0. 1*  
17 *manual: a high-level interactive language for numerical computations.*  
18 SoHo Books.
- 19 El tornado de Canelones del año 2002 (Uruguay) [Accessed: 2020-02-24]. (s.f.).
- 20 Foti, F. (2013). *A corotational beam element and a refined mechanical model*  
21 *for the nonlinear dynamic analysis of cables* (Tesis doctoral). Doctoral  
22 Dissertation, Politecnico di Milano, Milan (Italy).
- 23 Foti, F. y Martinelli, L. (2016). An analytical approach to model the hysteretic  
24 bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*,  
25 40(13-14), 6451-6467. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.063>  
26 001
- 27 Foti, F. y Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping  
28 vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal  
29 resonance. *Journal of Vibration and Control*, 24(7), 1322-1340.
- 30 Fujita, T. (1985). The downburst: Microburst and macroburst, SMRP Res.
- 31 Gani, F. y Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines gu-  
32 yed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*,  
33 37(3), 450-465.
- 34 Hilber, H. M., Hughes, T. J. y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipa-  
35 tion for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake*  
36 *Engineering & Structural Dynamics*, 5(3), 283-292.

- 1 Holmes, J. D. (2002). A re-analysis of recorded extreme wind speeds in region  
2 A. *Australian Journal of Structural Engineering*, 4(1), 29-40.
- 3 Hsiao, K. M., Lin, J. Y. y Lin, W. Y. (1999). A consistent co-rotational finite  
4 element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-  
5 D beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,  
6 169(1-2), 1-18.
- 7 Ibrahimbegovic, A. y Mamouri, S. (2002). Energy conserving/decaying impli-  
8 cit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional  
9 beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Me-*  
10 *chanics and Engineering*, 191(37-38), 4241-4258.
- 11 Ibrahimbegović, A. y Mikdad, M. A. (1998). Finite rotations in dynamics of  
12 beams and implicit time-stepping schemes. *International Journal for*  
13 *Numerical Methods in Engineering*, 41(5), 781-814.
- 14 *Design criteria of overhead transmission lines* (Standard). (2003). Internatio-  
15 nal Electrotechnical Commission. Geneva, CH.
- 16 Irvine, H. M. y Caughey, T. K. (1974). The Linear Theory of Free Vibrations of  
17 a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical,*  
18 *Physical and Engineering Sciences*, 341(1626), 299-315. [https://doi.](https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189)  
19 [org/10.1098/rspa.1974.0189](https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0189)
- 20 Irvine, H. M. y Griffin, J. H. (1976). *On the dynamic response of a suspended*  
21 *cable* (Vol. 4). <https://doi.org/10.1002/eqe.4290040406>
- 22 Irvine, M. (1978). Free Vibrations of Inclined Cables. *Journal of the Structural*  
23 *Division*, Vol. 104, 343-347.
- 24 Jones, K. F. (1992). Coupled vertical and horizontal galloping. *Journal of*  
25 *engineering mechanics*, 118(1), 92-107.
- 26 Klöppel, K. y H., L. K. (1942). *Die lotrechten Eigenschwingungen der*  
27 *Hängerbrücken* (23.<sup>a</sup> ed., Vol. 23).
- 28 Koh, C. G. y Rong, Y. (2004). Dynamic analysis of large displacement cable  
29 motion with experimental verification. *Journal of sound and vibration*,  
30 272(1-2), 187-206.
- 31 Kožar, I. y Ibrahimbegović, A. (1995). Finite element formulation of the finite  
32 rotation solid element. *Finite elements in analysis and design*, 20(2),  
33 101-126.
- 34 Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de  
35 cultura economica.

- 1 Kutterer, M. y Starossek, U. (1992). *Dynamic cable stiffness and dynamic*  
2 *interaction between cable and beam* (Tesis doctoral).
- 3 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiar, M. (2011). Efficient formulation for dynamics  
4 of corotational 2D beams. *Computational Mechanics*, 48(2), 153-161.  
5 <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6>  
6 007
- 7 Le, T. N., Battini, J. M. y Hjiar, M. (2014). A consistent 3D corotational beam  
8 element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. *Computer*  
9 *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269, 538-565.
- 10 Lee, C. L. y Perkins, N. C. (1992). Nonlinear oscillations of suspended cables  
11 containing a two-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 3(6),  
12 465-490.
- 13 Luongo, A. y Piccardo, G. (1998). Non-linear galloping of sagged cables in 1:  
14 2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5), 915-940.
- 15 Luongo, A., Rega, G. y Vestroni, F. (1984). Planar non-linear free vibrations of  
16 an elastic cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19(1),  
17 39-52.
- 18 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2007). A linear curved-beam model for  
19 the analysis of galloping in suspended cables. *Journal of Mechanics of*  
20 *Materials and Structures*, 2(4), 675-694.
- 21 Luongo, A., Zulli, D. y Piccardo, G. (2009). On the effect of twist angle on non-  
22 linear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, 87(15-  
23 16), 1003-1014.
- 24 Mara, T. G. (2007). *The effects of multi-directional winds on lattice sections*  
25 (Tesis doctoral). Faculty of Graduate Studies, University of Western  
26 Ontario.
- 27 Martinelli, L. y Perotti, F. (2004). Numerical analysis of the dynamic behavior  
28 of cables under turbulent wind. *Struct. Eng. Mech. & Comput. (SEMC*  
29 *2004)*.
- 30 Martinelli, L. y Perotti, F. (2001). Numerical analysis of the non-linear dy-  
31 namic behaviour of suspended cables under turbulent wind excita-  
32 tion. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1(02),  
33 207-233.
- 34 Matheson, M. y Holmes, J. (1981). Simulation of the dynamic response  
35 of transmission lines in strong winds. *Engineering Structures*, 3(2),  
36 105-110.



- 1 Mendina, M., Draper, M., Soares, A. P. K., Narancio, G. y Usera, G. (2014).  
2 A general purpose parallel block structured open source incompressible  
3 flow solver. *Cluster Computing*, 17(2), 231-241.
- 4 Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics.  
5 *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67-94.
- 6 Nietzsche, F. (2018). *La voluntad de poder*. Edaf.
- 7 Nour-Omid, B. y Rankin, C. C. (1991). Finite rotation analysis and consistent  
8 linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics*  
9 *and Engineering*. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90248-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90248-5)
- 10 Oke, D. G. (2000). Estimating.
- 11 Oran, C. (1973). Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural*  
12 *Division*, 99(6), 987-1001.
- 13 Pacoste, C. y Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Com-*  
14 *puter methods in applied mechanics and engineering*, 144(1-2), 163-197.
- 15 Papailiou, K. O. (1997). On the bending stiffness of transmission line conduc-  
16 tors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(4), 1576-1583. [https:](https://doi.org/10.1109/61.634178)  
17 [//doi.org/10.1109/61.634178](https://doi.org/10.1109/61.634178)
- 18 003
- 19 Pugsley, A. G. (1949). On the natural frequencies of suspension chains. *Quar-*  
20 *terly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2(4), 412-418.  
21 <https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.412>
- 22 Quarteroni, A., Sacco, R. y Saleri, F. (2010). *Numerical mathematics* (Vol. 37).  
23 Springer Science & Business Media.
- 24 Rankin, C. y Nour-Omid, B. (1988). The use of projectors to improve finite  
25 element performance. *Computers & Structures*, 30(1-2), 257-267.
- 26 Rawlins, C. (2005). Flexure of a single-layer tensioned cable at a rigid support.  
27 Proc. 6th International Symposium on Cable Dynamics. Charleston  
28 (USA). 19-22 Sept.
- 29 Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements.  
30 *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 149(1-4),  
31 113-132.
- 32 Riera, J. D. y Ponte, J. (2012). Recent Brazilian research on thunderstorm  
33 winds and their effects on structural design. *Wind and Structures, An*  
34 *International Journal*, 15(2), 111-129. [https://doi.org/10.12989/was.](https://doi.org/10.12989/was.2012.15.2.111)  
35 [2012.15.2.111](https://doi.org/10.12989/was.2012.15.2.111)

- 1 Routh, E. J. et al. (1955). *Dynamics of a system of rigid bodies*. Dover New  
2 York.
- 3 Saxon, D. S. y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended  
4 chain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6(3),  
5 273-285. <https://doi.org/10.1093/qjmam/6.3.273>
- 6 Simiu, E. y Scanlan, R. H. (1986). *Wind Effects on Structures*, 3. ed. (second  
7 edi). Jhon Wiley; Sons.
- 8 Simo, J. C. y Vu-Quoc, L. (1988). On the dynamics in space of rods undergoing  
9 large motions—a geometrically exact approach. *Computer methods in*  
10 *applied mechanics and engineering*, 66(2), 125-161.
- 11 Son, O. y Cetiner, O. (2016). Drag prediction in the near wake of a circular  
12 cylinder based on DPIV data. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 9(4),  
13 1963-1968.
- 14 Starossek, U. (1991). Boundary induced vibration and dynamic stiffness of a  
15 sagging cable. [http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C\\_%7D/  
16 Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C\\_%7DCable%7B%5C\\_%  
17 7DStiffness.pdf](http://www.tu-harburg.de/sdb/starossek%7B%5C_%7D/Veroeffentlichungen/Dateien/Dynamic%7B%5C_%7DCable%7B%5C_%7DStiffness.pdf)
- 18 Stengel, D. y Thiele, K. (2017). Measurements of downburst wind loading  
19 acting on an overhead transmission line in Northern Germany. *Procedia*  
20 *engineering*, 199, 3152-3157.
- 21 Triantafyllou, M. S. (1984). The dynamics of taut inclined cables. *Quarterly*  
22 *Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 37(3), 421-440. [https:  
23 //doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421](https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.421)
- 24 Viana, H. F., da Silva, R. G. L., Costa, R. S. y Lavall, A. C. C. (2020).  
25 Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering  
26 the plastic zone method. *Engineering Structures*, 223, 111197.
- 27 Yan, B., Lin, X., Luo, W., Chen, Z. y Liu, Z. (2009). Numerical study on  
28 dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission  
29 line under wind load. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 25(1),  
30 248-259.
- 31 Yang, S. y Hong, H. (2016). Nonlinear inelastic responses of transmission  
32 tower-line system under downburst wind. *Engineering Structures*, 123,  
33 490-500.

# ANEXOS

# 1 Anexo 1

2 Se acoplan al tesis una revisión bibliográfica realizada en el marco del curso  
3 Elementos de Aerodinámica y Aeroelasticidad de Estructuras en su edición  
4 2019 sobre la norma *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003.

## 5 1.1. Norma IEC 60826

6 En este apartado se exponen las secciones destacadas de la norma inter-  
7 nacional IEC 60826: *Design criteria of overhead transmission lines*, 2003, ex-  
8 plicitándose las hipótesis fundamentales y formulaciones para el desarrollo de  
9 condiciones de diseño.

### 10 1.1.0.1. Campo de aplicación

11 En primera medida esta aplica para geometrías del conductor y terreno con  
12 las siguientes condiciones:

- 13 ■ La longitud de vano debe pertenecer al intervalo (200m, 800m). Para  
14 longitudes fuera de ese rango deben analizarse coeficientes de racha di-  
15 ferentes a los presentados, sin embargo para vanos más largos a 800m el  
16 análisis de la norma resulta sobrestimado.
- 17 ■ Altura de soportes menores a 60 m. Soportes de mayor altura podrían  
18 inducir factores de amplificación dinámicos de la respuesta.
- 19 ■ Altitud del área transversal de la línea no sobrepase los 1300m sobre el  
20 nivel de altura medio topográfica del terreno circundante.
- 21 ■ Terrenos sin características topográficas singulares cuyo tamaño y forma  
22 puedan afectar las consideraciones del flujo. Se aclara que esta norma

1 textitno permite dimensionar para efectos de vientos extremos como tor-  
 2 nados, encause de vientos entre montañas y terrenos de alta pendiente.

### 3 1.1.0.2. Velocidad de referencia y rugosidad del terreno

4 Como primera instancia se establecen diferentes tipos de terrenos según las  
 5 condiciones topográficas del mismo, esto afecta la forma del flujo considerado  
 6 para el diseño. Para un perfil tipo ley potencial, terrenos más rugosos acentúan  
 7 el gradiente de la velocidad en altura para  $z = 0$ , aumentan la intensidad de  
 8 turbulencia e incrementan el  $Z_G$  (valor donde el perfil alcanza las condiciones  
 9 de atmósfera libre).

Categoría de terrenos	Características del terreno
A	Largos y estrechos viento de ultramar, área costera llana, llanura desértica.
B	Campo abierto con escasa densidad de obstáculos. áreas cultivadas con pocos árboles y edificios
C	Terreno con numerosos obstáculos pequeños de baja altura (matorrales, árboles y edificios)
D	Áreas sub-urbanas con pequeños arboles

**Tabla 1.1:** Categorización de terrenos Tablas A.8 IEC 60826

10 Considerando un flujo medio plano tipo capa límite potencial, que se de-  
 11 sarrolla en una atmósfera neutra, la velocidad media  $v(z)$  en función de la  
 12 altura para diferentes constantes de terreno  $\alpha$  puede calcularse de la siguiente  
 13 manera:

$$V(z) = V_G \left( \frac{z}{z_G} \right)^\alpha \quad (1.1)$$

14 Medidas de la velocidad a través de equipos como pueden ser anemómetros  
 15 o sensores de ultra sonido permiten obtener, para determinado periodo de  
 16 adquisición de datos, valores de velocidad media e intensidad de turbulencia  
 17 entre otras. Es por esto que es clave relacionar la velocidad a diferentes alturas  
 18 y para cambios de terreno a lo largo del sentido del flujo, nombrando dos  
 19 puntos 1 y 2 podemos relacionar la velocidad media entre estos operando con  
 20 la Ecuación (1.1).

$$V(z) = V_{ref1} \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \quad (1.2)$$

En la Ecuación (1.2) anterior la velocidad de referencia  $V_{ref}$  es definida, en general como la velocidad media del viento a una altura de  $z = 10m$  para un tipo de terreno categoría B. En la norma se presenta la siguiente tabla para calcular las variaciones de velocidad  $V_{ref}$ , se introduce un factor  $K_R$  el cual permite obtener la relación entre las velocidades de referencia para distintos terrenos  $V_{rX} = K_R V_{rB}$ . Se presentan las diferentes alturas de rugosidad media de obstáculos  $z_0$ .

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_0(m)$	0.01	0.05	0.30	1.00
$\alpha$	0.1 a 0.12	0.16	0.22	0.28
$K_R$	1.08	1.00	0.85	0.67

**Tabla 1.2:** Tabla de factores para terrenos Tabla A.8 IEC 60826.

Los datos presentados en la Tabla 1.2 se corresponden con los conocimientos dictados en el curso, en primera parte los valores de  $\alpha$  se asemejan con lo presentado por Davenport, 1960, para la categoría A y B el numero de  $\alpha$  considerado por la norma es menor, esto se relaciona con que valores más chicos de  $\alpha$ , es decir terrenos menos rugosos inducen una velocidad mayor para la misma cota. En el caso de la categoría C y D el valor es exactamente idéntico a Davenport, 1960. El termino  $z_0$  se coincide con la tabla publicada en Oke, 2000.

Desglosando el factor  $K_R$  para dos puntos de referencia, colocados a una cota de  $z_{ref1} = z_{ref2} = 10m$  en función de la Ecuación (1.2) y combinándola con la definición de  $K_r$  se obtiene la siguiente expresión:

$$V_{ref2}(10m) = V_{ref1} \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \rightarrow K_r = \left( \frac{z_{G1}}{z_{ref1}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z_{ref2}}{z_{G2}} \right)^{\alpha_2} \quad (1.3)$$

Utilizando la Ecuación 1.3 y considerando los valores de  $Z_G$  según la referencia Oke, 2000 se expresan los resultados obtenidos los cuales coinciden con un error menor al 8 % con los estipulados por la norma en la Tabla 1.2.

### 1.1.0.3. Acción del viento sobre los elementos

El valor significativo del problema es la fuerza por unidad de área (Pa) se denota con la letra  $a$  además se define, al igual que lo visto en el curso en

Factor	Categoría de terreno			
	A	B	C	D
$z_G(m)$	250	305	365	410
$\alpha$	0.12	0.15	0.22	0.28
$K_R$	1.13	1.00	0.77	0.61

**Tabla 1.3:** Tabla de factores para terrenos según referencia Davenport, 1960

la sección 2.1 del repartido "Bluff-Body aero dynamics"  $q_0$ , el coeficiente de presión dinámica de referencia ( $N/m^3$ ). Para elementos conductores, cadenas y gran cantidad de elementos de soportes se calcula:

$$a = q_0 C_x G \quad (1.4)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \rho_{ref} \tau (K_r V_{rB})^2 \quad (1.5)$$

En las Ecuaciones 1.4 y 1.5  $\rho$  es la densidad del aire en  $kg/m^3$  y se toma en  $1.225 kg/m^3$  para una temperatura de  $15^\circ C$  y una presión atmosférica de  $101.3 kPa$ . La constante  $\tau$  es un factor que permite corregir las variaciones de densidad del fluido con la presión medida en altura y la temperatura a la que operará el sistema. Los valores de densidad se corroboraron con la referencia Çengel y Boles, 2007, como también el factor de corrección  $\tau = \frac{\rho_{P,T}}{\rho_{ref}}$ .

El parámetro  $C_x$  es el coeficiente de drag dependiendo de la figura transversal al flujo, se desprecian por las grandes longitudes de vanos las condiciones de borde no homogéneas del flujo en los extremos. Por último el factor restante  $G$  toma en consideración la altura y el tipo de terreno, el incremento en la velocidad de acuerdo a ráfagas de viento y la respuesta dinámica, para elementos de cable debe separarse en  $G_L$  y  $G_c$ . Estos últimos factores se vincularán en la siguiente sección con los conocimientos presentados en el curso.

#### 1.1.0.4. Elementos de cable

Los efectos dinámicos que afectan a los conductores específicamente se asocian: al arrastre producido por el viento y la tensión mecánica incrementada durante la instalación. Considerando la hipótesis de baja turbulencia, la fuerza media en Newton de arrastre ( $A_c$ ) sobre un elemento de largo  $L$  y diámetro  $d$ , formando un ángulo de balanceo  $\Omega$  es dada por la expresión:

$$A_c = q_0 C_{xc} G_c G_L dL \sin(\Omega)^2 \quad (1.6)$$

En la Ecuación 1.6 el factor de presión de referencia ( $q_0$ ) se calcula según la Ecuación 1.4. El valor de  $C_{xc}$  es el coeficiente de drag del conductor, su utiliza a menos de obtenerse datos experimentales, un valor unitario para conductores y velocidades de viento estándar. Esto se corresponde con lo presentado en el curso en la figura 19 de Durañona y Denis, 2018 a velocidades equivalentes de 5m/s para un conductor usual de alta tensión. Según Son y Cetiner, 2016 se hallan valores medios del coeficiente de drag para Reynolds de aproximadamente igual 350  $C_{xc}$  y resulta ser 1. Es por esto que considerar un valor unitario para valores los valores Reynolds de trabajo induciendo una fuerza de mayor magnitud sobre el cable, lo cual es conservador.

Existe un efecto en la dirección perpendicular al flujo llamado ".Aeolian". En dicha dirección se generan desprendimientos de vórtices asociados con la frecuencia de Strouhal  $f_s = 0.0925 \frac{v_m}{d_c}$ , cuando estos vórtices se acercan a la frecuencias naturales del cable podrían producirse resonancias, magnificándose las amplitudes del movimiento. Según Belloli et al. 2006 estos efectos deben ser considerados para velocidades medias de viento menores  $6 \frac{m}{s}$ , para el estudio de TC las velocidades alcanzan valores de hasta  $30 \frac{m}{s}$  estando el efecto antes mencionado fuera de rango.

El coeficiente  $G_c$  es el factor de viento combinado, el cual se halla con la Figura 3 de la Sección 6.2.6.1, este depende de la altura y el tipo de terreno. Según de lo visto en el curso este debe contener el factor de ráfaga el cual relaciona la presión media con la máxima puntual. Por último  $G_l$  es el factor de separación según el largo de vano, este tiene en cuenta la distribución de presiones para distintos largos de vano, para vanos largos la presión máxima se da simultáneamente en pocos puntos por tanto decrece, tal como se ve en la Figura 4 de la Sección 6.2.6.1 y se corresponde con lo visto en el curso para el valor de B.

Para cadenas aisladoras múltiples que transporten más de un cable, estos deben tratarse por separado, las solicitaciones totales sobre los soportes deben considerarse la suma de cada una de las partes. La altura considerada para el cálculo de los factores debe ser el centro de gravedad de los conductores cuando este se encuentra a 2/3 de la deflexión máxima. También puede considerarse la altura como la cota del punto de anclaje entre la cadena y el cable, esto



1 inducirá velocidades mayores y por tanto el diseño estará sobredimensionado.

### 2 1.1.0.5. Cargas del viento sobre la cadena aisladora

3 Las cargas actuando en el elemento aislador cerámico se originan sobre el  
4 área proyectada de la cadena en el sentido del flujo, la cual se nombra  $A_c$ . Esta  
5 carga se corresponde a la suma de las cargas debido al campo de presiones  
6 sobre el cable y la fuerza distribuida directamente sobre la cadena aisladora.  
7 La carga aplicada sobre el soporte  $A_l$  en N se expresa:

$$A_l = q_0 C_{xl} G_t S_i \quad (1.7)$$

8 En la Ecuación 1.7 el factor  $q_0$  es la presión dinámica de referencia calculada  
9 según 1.4,  $C_{xl}$  se asocia con el Coeficiente de Drag y se suele considerar 1, 2,  
10 valor mayor que para el cilindro. Se aclara que en general el peso relativo de la  
11 fuerza sobre los soportes debido a las cadenas aisladoras es significativamente  
12 menor respecto a las cargas del viento ejercidas sobre el conductor.

13 El termino  $G_t$  es el factor de viento correlativo que se corresponde con la  
14 Figura 5 de la norma de la sección 6.2.6.3, este se ve afectado por el tipo de  
15 terreno y la altura del centro del gravedad de la cadena, este al igual que en la  
16 Sección 1.1.0.4 el combinado de los factores vistos en el curso. Esta presión es  
17 multiplicada por el valor  $S_i$  del área de la cadena proyectada horizontalmente  
18 en un plano paralelo al eje de la torre en  $m^2$ .

### 19 1.1.1. Tensión en el conductor

20 La tensión que debe ser aplicada sobre los conductores se determina a partir  
21 del método de deflexión, considérese el caso donde las cadenas aisladoras se  
22 encuentra a la misma cota, el conductor tiene un largo L y un peso W por  
23 unidad de longitud en N/m, se ilustra un esquema en la siguiente figura:

24 Considerando el cable como un elemento extensible que no posee rigidez  
25 a flexión, entonces la tensión interna a para cualquier punto de este debe ser  
26 tangente a la curva. Sea P un punto cualquiera con coordenadas (x,y) en el  
27 cable, tomando equilibrio estático sobre la mitad del conductor y planteado la  
28 segunda cardinal o el principio de los trabajos virtuales para un giro arbitrario,  
29 desde P, se obtiene la catenaria, y de esta la deflexión máxima en función de  
30 la tensión:

$$Ty = W \frac{x^2}{2} \rightarrow \delta = \frac{WL^2}{8T} \tag{1.8}$$

1

## 1 Anexo 2

2 Se presenta a continuación resultados extraídos de un modelo generado en  
3 el marco de la unidad curricular Dinámica de Estructuras. Este consiste en un  
4 análisis dinámico 2D y 3D de elementos de biela no lineales con un análisis  
5 modal complementario.

### 6 2.1. Modelado dinámico de un conductor de 7 alta tensión utilizando elementos de barra

#### 8 2.1.1. Fundamentos teóricos

##### 9 2.1.1.1. Ecuación de movimiento

10 En este trabajo se utilizará el principio de D’Alambert para establecer las  
11 ecuaciones de movimiento de un elemento de barra axial, este es el equivalente  
12 dinámico al Principio de los Trabajos Virtuales para el caso estático. A conti-  
13 nuación se notará las variables posición, desplazamiento, deformación unitaria  
14 y tensión como  $(x, u_t, \epsilon_t, \sigma_t)$  y las derivadas parciales, velocidad y aceleración  
15 con  $(\dot{u}_t, \ddot{u}_t)$ .

16 Dicho lo anterior el principio de D’Alambert afirma que  $\forall t$  y  $\forall \delta u$  se cumple:

$$\int_{V_t} \sigma_t \delta \epsilon dV_t = \int_{V_t} \delta u^T b_{ext,t} dV_t - \int_{V_t} \rho \delta u^T \ddot{u} dV_t \quad (2.1)$$

17 En la ecuación (2.1)  $b_{ext,t}$  corresponde a la fuerzas externas por unidad de  
18 volumen. El primer termino que aparece restando es el de a las fuerzas iner-  
19 ciales siendo  $\rho$  la densidad del material. El segundo corresponde a disipaciones  
20 viscosas donde  $c > 0$ . Esta disipación se corresponde con fenómenos de disipa-  
21 ción estructural y rozamiento en juntas, su valor se ajustará de acuerdo con

1 resultados experimentales publicados, no se determinará mediante un resul-  
2 tado teórico. Aplicando una discretización en elementos finitos obtenemos la  
3 ecuación de movimiento de la estructura:

$$M\ddot{u}_t + C\dot{u}_t + K_T(u_t)u_t = f_{ext,t} \quad (2.2)$$

4 Las cargas externas dinámicas se encuentran asociadas con el vector  $f_{ext,t}$ .  
5 La matriz de rigidez  $K(u_t)$  se hallará considerando no linealidad geométrica  
6 por ende tiene la siguiente forma:

$$K_T = K_{T1} + K_{T2} + K_\sigma \quad (2.3)$$

$$K_{T1} = EA_o l_o b_1^T b_1 \quad (2.4)$$

$$K_{T2} = EA_o l_o (b_1^T b_2 + b_2^T b_1 + b_2^T b_2) \quad (2.5)$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma A_o}{l_o} G \quad (2.6)$$

10 En las ecuaciones anteriores  $b_1$  y  $b_2$  contienen a las derivadas de las fun-  
11 ciones de ponderación de  $u_t$  mientras que  $G$  es la matriz de Green. La matriz  
12  $K_{T1}$  es la matriz de rigidez lineal, esta no depende del desplazamiento,  $K_{T2}$   
13 es la llamada matriz de desplazamiento inicial y  $K_\sigma$  la matriz geométrica o de  
14 tensión inicial.

15 La matriz de masa  $M$  puede ser del tipo consistente o concentrada, la  
16 primera de ellas se deduce a partir de las funciones de interpolación de  $u_t$  ( $N_i$ ),  
17 mientras que la segunda se obtiene a partir de concentrar la masa de cada  
18 elemento sobre sus nodos, este último será el utilizado para este trabajo. En  
19 el caso de una barra bidimensional tiene la siguiente forma:

$$M^e = \frac{\rho A_o l_o}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

20 Por último la matriz  $C$  se considero de forma diagonal, para un elemento

1 de barra:

$$C^e = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2 Como se dijo anteriormente el valor de  $c$  se ajustará empíricamente de acuerdo  
3 a resultados experimentales de Stengel y Thiele, [2017](#).

#### 4 **2.1.1.2. Método de diferencias centradas**

5 En este apartado se presenta el método por el cual se resuelve la ecuación  
6 de movimiento, se eligió este método debido a su simplicidad y su bajo coste  
7 computacional. Es de tipo explícito por ende se debe conocer la solución a la  
8 ecuación de movimiento en el tiempo  $t$  para hallarse luego  $t + \Delta t$ , de acuerdo  
9 con esto último la velocidad y aceleración se escriben de la siguiente manera:

$$\dot{u}_t = \frac{u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (2.9)$$

$$\ddot{u}_t = \frac{u_{t+\Delta t} + u_{t-\Delta t} - 2u_t}{\Delta t^2} \quad (2.10)$$

10 Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación de movimiento y agru-  
11 pando según los desplazamientos en los diferentes espacios temporales:

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right] u_{t+\Delta t} = f_{ext,t} - \left[ K_T - \frac{2}{\Delta t^2} M \right] u_t - \left[ \frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right] u_{t-\Delta t} \quad (2.11)$$

12 Notar que la aproximación de la velocidad y la aceleración en el instante  $t$   
13 induce un error de truncamiento, en segunda medida se induce un error adi-  
14 cional ya que  $u_{t+\Delta t}$  no verifica la ecuación dinámica de equilibrio en el instante  
15  $t + \Delta t$  sino la del instante  $t$ . Mencionados errores pueden ser disminuidos al  
16 reducirse el incremento temporal  $\Delta t$ , además condiciones de estabilidad del  
17 método para el caso lineal, donde  $K_T$  no es función del desplazamiento, impo-  
18 ne que  $\Delta t < T_{min}/\pi$  donde  $T_{min}$  es el mínimo periodo de vibración natural del  
19 modelo de elementos finitos.

20 La matriz tangente de desplazamiento y esfuerzo inicial son función del  
21 desplazamiento, como consecuencia deben tenerse en cuenta que un incremen-  
22 to en la rigidez del sistema, conforme avanza el tiempo, conllevará a modos  
23 normales con mayor frecuencia y por tanto a un paso temporal crítico menor.

1 El valor  $\Delta t$  debe elegirse de acuerdo a este compromiso entre disminuir el  
 2 error, permaneciendo dentro de la zona de estabilidad del método y el costo  
 3 computacional.

4 ■ Se presenta un algoritmo del código utilizado:

- 5 1. Ensamblar:  $M$  y  $C$  a nivel de estructura.
- 6 2. Definir tiempo final del análisis dinámico  $t_f$ .
- 7 3. Definir condiciones iniciales  $u_o$  y  $\dot{u}_o$
- 8 4. Calcular:  $\ddot{u}_o \leftarrow M^{-1}(f_{ext,t} - C\dot{u}_o - f_{int}(u_o))$
- 9 5. Definir  $\delta t$ , considerando el compromiso mencionado anteriormente
- 10 6. Calcular  $a_o \leftarrow 1/\Delta t^2, a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t), a_2 \leftarrow 2a_o, a_3 \leftarrow 1/a_2$
- 11 7. Calcular  $a_o \leftarrow 1/\Delta t^2, a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t), a_2 \leftarrow 2a_o, a_3 \leftarrow 1/a_2$
- 12 8. Calcular  $u_{-\Delta t} \leftarrow u_o - \Delta \dot{u}_{o_o} + a_3 \ddot{u}_o$
- 13 9. Calcular y factorizar  $\hat{M} = a_o M + a_1 C$
- 14 10. **while**  $t < t_f$
- 15 11. Calcular  $\tilde{f}_t \leftarrow f_{ext,t} - f_{int}(u_t) + a_2 M u_t - (a_o M - a_1 C) u_{t-\Delta t}$
- 16 12. Resolver:  $u_{t+\Delta t} \leftarrow \tilde{M}^{-1} \tilde{f}_t$
- 17 13. Calcular la aceleración  $\ddot{u}_t \leftarrow a_o(u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t} - 2u_t)$
- 18 14. Calcular la velocidad  $\dot{u}_t \leftarrow a_1(u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t})$
- 19 15.  $t \leftarrow t + \Delta t$
- 20 16. **end while**

### 21 2.1.1.3. Modos normales

22 El análisis dinámico de los modos se vuelve fundamental, este busca las  
 23 soluciones a la oscilación libre no forzada, de forma que estas sean sinusoida-  
 24 les con determinada frecuencia natural  $\omega_n$ , por ende las soluciones toman la  
 25 siguiente expresión  $\sin(\omega_n t)\phi$ . El vector  $\phi$  representa un vector de escala entre  
 26 las amplitudes de los desplazamientos nodales de los grados de libertad de la  
 27 estructura.

28 La ecuación de movimiento, en complejos, de la estructura suponiendo mo-  
 29 vimientos de la forma  $U(t) = \phi \exp i\omega_n(t - t_o)$

$$\omega_n^2 M \phi = K \phi \quad (2.12)$$

30 La ecuación (2.12) (sin amortiguamiento ni fuerzas extremas) se responde

1 con un sistema de valores propios para una matriz simétrica y definida positiva.  
 2 De forma matricial los modos normales de la estructura verifican:

$$M\Phi\Omega = K\Phi \quad (2.13)$$

3 Donde  $\Phi$  es una matriz que tiene como columnas los vectores propios aso-  
 4 ciados a las amplitudes de los modos  $\phi$  y  $\Omega$  es una matriz diagonal con las  
 5 frecuencias angulares de los modos  $\omega_n^2$ .

#### 6 **2.1.1.4. Modelo de viento**

7 El flujo del viento se asume que solo tiene componente en la dirección  $z$ ,  
 8 este flujo se puede desglosar en una parte media en el tiempo y una componente  
 9 fluctuante, por ende la velocidad toma la siguiente forma:  $u_v(z, t) = u_m(z, t) +$   
 10  $u'(z, t)$  donde

$$u_m = \frac{1}{T} \int_0^T u_v(z, t) dt \quad (2.14)$$

11 El valor del periodo  $T$  debe elegirse de forma de minimizar la desviación  
 12 estándar de la intensidad de turbulencia, esta se define como el cociente entre  
 13 la desviación estándar de la velocidad y la velocidad media para un instante  
 14 de tiempo dado.

15 El aire se modelará como un fluido incompresible newtoneano cuya fuerza  
 16 de drag se puede escribir como:

$$F_v = \int_{dl} \frac{1}{2} \rho(T) C_d(Re) d_c u_m^2(z, t) dx \quad (2.15)$$

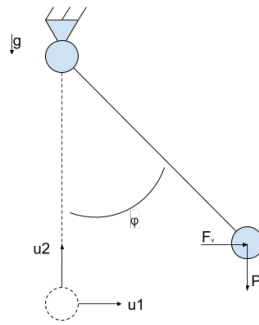
17 La fuerza de lift, en dirección perpendicular al flujo se considera desprecia-  
 18 ble frente a la fuerza de arrastre. Esta simplificación también se acompasa con  
 19 la mayor rigidez del cable en la dirección perpendicular al flujo y el peso que  
 20 se opone a la fuerza de sustentación.

21 Existe un efecto en la dirección perpendicular al flujo llamado "Aeolian".  
 22 En dicha dirección se generan desprendimientos de vórtices asociados con la  
 23 frecuencia de Strouhal  $f_s = 0.0925 \frac{v_m}{d_c}$ , cuando estos vórtices se acercan a la  
 24 frecuencias naturales del cable podrían producirse resonancias, magnificándose  
 25 las amplitudes del movimiento. Según Belloli et al. 2006 estos efectos deben ser  
 26 considerados para velocidades medias de viento menores  $6 \frac{m}{s}$ , para el estudio  
 27 de este trabajo las velocidades alcanzan valores de hasta  $30 \frac{m}{s}$  siendo el efecto

1 antes mencionado de menor importancia.

## 2 2.1.2. Resultados numéricos 2D

3 A continuación se presenta un modelo simplificado en dos dimensiones el  
 4 cual pretende modelar la cadena de aisladores, se toma como hipótesis que  
 5 los desplazamientos de la torre son mucho menores a los desplazamientos de  
 6 la cadena bajo la acción del viento. Un esquema del problema se presenta a  
 7 continuación:



**Figura 2.1:** Esquema simplificado del problema

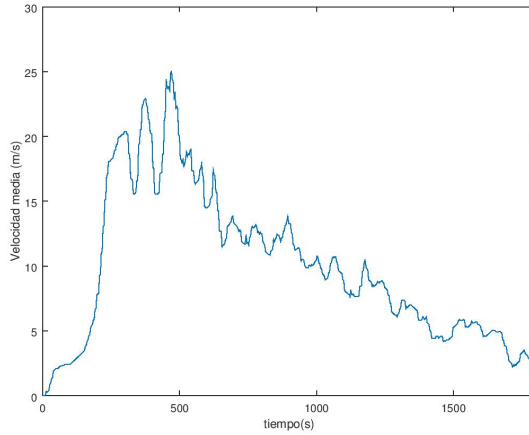
8 En la figura 2.1,  $u_1$  corresponde al desplazamiento horizontal de la unión  
 9 entre el aislador y el cable,  $u_2$  al desplazamiento vertical y  $P_c = 2\frac{m_c g}{2}$  el peso  
 10 del cable que debe soportar el aislador. Los perfiles de velocidad en Stengel  
 11 y Thiele, 2017, correspondientes a ráfagas descendentes alemanas experimen-  
 12 talmente se corroboran como planos. Estos muestran una pequeña variación a  
 13 medida que se avanza en la coordenada axial del conductor, como consecuencia  
 14  $F_v = \frac{1}{2}\rho(T)C_d(Re)d_c u_m^2(z, t)L_c$  donde los valores de  $c_d$  y  $\rho$  se adjuntan en el  
 15 código.

### 16 2.1.2.1. Perfil de velocidad de viento

17 El perfil de velocidad media de viento se obtuvo de Stengel y Thiele, 2017  
 18 y presenta la siguiente forma:

19 El perfil de velocidades anterior presenta una clara característica de tormen-  
 20 ta convectiva descendente, la velocidad aumenta fuertemente en los primeros  
 21 500 segundos para luego ir descendiendo de forma gradual. Otra evidencia de  
 22 este fenómeno es el descenso abrupto de temperatura en cualquiera de las fa-  
 23 ses, al producirse un régimen de mayor velocidad, aumenta el coeficiente de





**Figura 2.2:** Perfil de velocidad media a lo largo del cable según Stengel y Thiele, 2017

1 convención forzada reduciéndose la temperatura de la fase. En Uruguay estos  
 2 eventos de interrupción eléctrica de las líneas se debe principalmente a tor-  
 3 mentas conectivas. El mismo fenómeno se ha reconocido en Brasil desde hace  
 4 cierto tiempo, este pone en exigencia estructural a los cables como a las torres  
 5 Riera y Ponte, 2012.

#### 6 2.1.2.2. Resultados del modelo

7 Las ecuaciones de movimiento para los dos grados de libertad del problema  
 8 son :

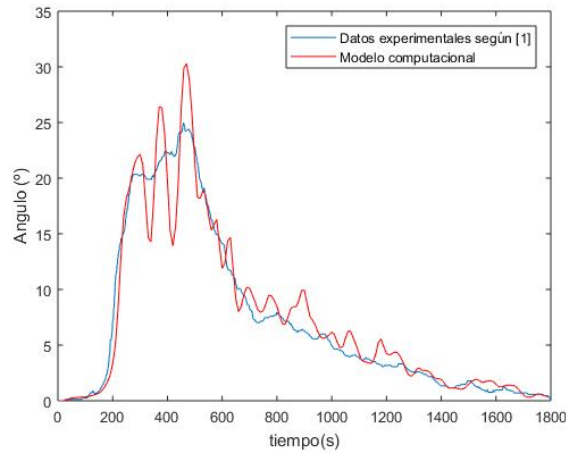
$$\frac{m}{2}\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + K_{11}u_1 + K_{12}u_2 = F_v(t) \quad (2.16)$$

$$\frac{m}{2}\ddot{u}_2 + c\dot{u}_2 + K_{21}u_1 + K_{22}u_2 = P_c \quad (2.17)$$

9 El problema reducido anterior presenta condiciones de borde cinemáticas  
 10 impuestas por la unión entre la torre y la cadena, se agregan el reposo  $u_{t0} = 0$ ,  
 11  $\dot{u}_{t0} = 0$  y la aceleración inicial del movimiento espejo ficticio en  $t = -\Delta t$ .  
 12 La resolución se realizó mediante el método presentado en la sección 2.2, se  
 13 ajustó el valor de  $c$  para reproducir de forma aceptable la curva del angulo  
 14 superpuesta con Stengel y Thiele, 2017, la expresión de este es:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{u_1}{u_2}\right) \cong \arctan\left(\frac{F_v}{P_c}\right) \quad (2.18)$$

La aproximación de que el ángulo va en el sentido de la fuerza externa se basa en el hechos de ser un elemento de biela y que las aceleraciones son nulas, esta hipótesis puede ser considerada en instantes donde el movimiento posee fuerzas no inerciales pequeñas. Para tiempos donde varíe fuertemente la acción externa del viento esta hipótesis no se verifica y se pueden presentar desviaciones en el ángulo. A continuación se muestra la curva del ángulo medio contrastada con Stengel y Thiele, 2017, donde, mediante ensayo y error se ajusto el valor de  $c$  que mejor aproxima dicha curva:



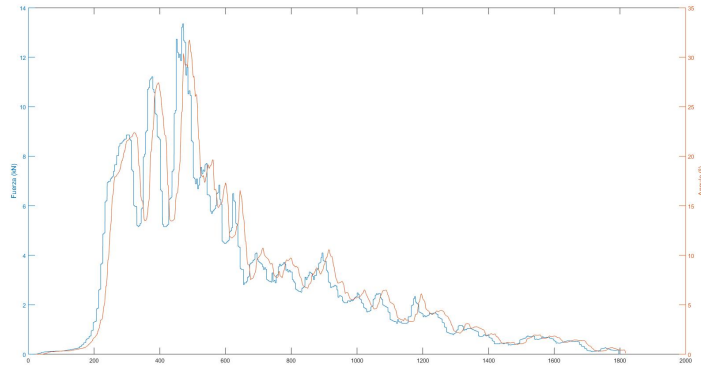
**Figura 2.3:** Ángulo medio del modelo en contraste con Stengel y Thiele, 2017

Como se dijo anteriormente el modelo presentado en Stengel y Thiele, 2017 supone hipótesis de un análisis estático, entre los 230 y 500 segundos se producen fuertes variaciones y las mayores velocidades de viento esto puede dar lugar a las desviaciones mostradas en la figura anterior. Estas últimas, en contra partida, reproducen correctamente el ángulo máximo de balanceo, sin aplicar la media móvil, medido en Stengel y Thiele, 2017, valor que permite predecir la aproximación de la cadena a la torre y por tanto cuando se produciría la salida en servicio de la línea.

Con el objetivo de reducir el ruido en el ángulo y velocidad se escogió una media móvil de acuerdo con Stengel y Thiele, 2017. Este periodo debe ser tal que se produzca una velocidad media relativamente suave, sin perder la forma de la señal ni eliminar completamente la característica de aleatoriedad en la componente fluctuante de la velocidad. Para este caso se eligió una media móvil de 30 segundos.

Otro resultado el cual vale analizar es el defasaje que presenta la fuerza

1 del viento con el ángulo debido a la inercia del sistema. Si definimos una  
2 función compleja  $H(\omega)$  tal que  $H(\omega)F = X$  donde  $F$  representa el módulo  
3 de la fuerza y  $X$  el vector complejo de desplazamiento solución a la oscilación  
4 forzada, proyectándolo en el eje real se obtiene el valor de  $X(t)$ . El vector  
5 complejo  $H(\omega)$  presenta cierto ángulo, esto es consecuencia del desfase entre  
6 la respuesta del sistema y su forzante  $F$ . En la siguiente figura se evidencia  
7 dicho retraso en el tiempo de la respuesta del sistema ( $\varphi$ ) en naranja y en azul  
8 el valor de  $F$ .



**Figura 2.4:** Curva desfase ángulo fuerza

9 Se realizó un análisis modal como fue presentado en la sección 2.3, las  
10 frecuencias naturales asociadas al aislador son de:

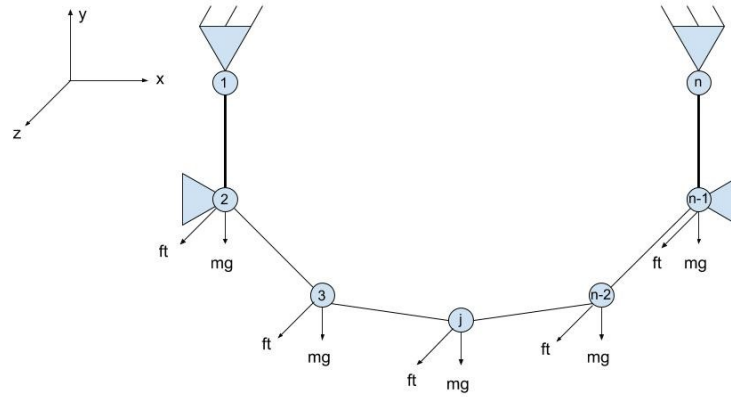
$$f_1 = 0.03Hz \quad (2.19)$$

$$f_2 = 83Hz \quad (2.20)$$

11 La primer frecuencia presenta un vector propio  $(\varphi_1) = (1, 0)$  siendo la  
12 primer componente del vector la asociada con  $u_1$  y la segunda entrada  $u_2$ .  
13 Claramente  $(\varphi_2) = (0, 1)$ , esto se debe a que los vectores son lineal mente  
14 independientes y que es el movimiento restante dinámicamente posible. Se  
15 hace notar el hecho de que que las componentes estén desacopladas, es decir  
16 que  $(\varphi_2) \cdot (\varphi_1) = 0$ , es consecuencia de que los modos se hallaron en un entorno  
17 de la posición  $\varphi = 0$ , solo con la acción de la gravedad donde  $K_T = K_{T1}$ .

### 2.1.3. Resultados numéricos 3D

Se procede a resolver el problema en tres dimensiones. El sistema se compone de dos cadenas de aisladores y un cable. Las cadenas de aisladores serán modeladas como una biela, el nodo superior de esta permanece fijo mientras que al otro se le asignan dos grados de libertad (desplazamientos en  $y$ ,  $z$ ), esto se debe a que hacia ambos lados del cable continuarían cables idénticos haciendo que este punto no tenga desplazamientos en el sentido de  $x$ . El cable será representado como un conjunto de barras articuladas en sus extremos como se muestra en la figura 2.5, con tres grados de libertad en sus nodos, exceptuando la unión con el aislador (nodos 2 y  $n-1$ ).



**Figura 2.5:** Esquema simplificado del problema 3D

Para esta parte se deberá contar con matrices cuadradas de  $(n \times 3)$ , siendo  $n$  el numero de barras. Esto genera un compromiso a la hora de elegir  $n$ , dado que simular el cable con un número pequeño de barras no representa al mismo y un numero extenso de estas hará que la simulación sea de gran costo computacional logrando un modelo más realista, incluso existen casos donde no es posible lograr una simulación. El método de resolución seguirá siendo por diferencias centradas donde la matriz de masa quedará diagonal repartiendo la mitad de la masa en cada uno de sus nodos.

### 2.1.4. Frecuencias naturales

En una primera instancia son calculados los modos para este sistema. Los mismos son calculados en la posición natural del cable, por lo que se debe realizar una simulación donde la única fuerza que actúa es la gravedad, aplicada

1 sobre los nodos, y se logre alcanzar el equilibrio. La particularidad está dada  
2 en que la matriz de rigidez es calculada como la matriz tangente no lineal, por  
3 lo que se debe conocer los desplazamientos una vez cargado el cable.

$$K_T = K_{T1} + K_{T2} + K_\sigma \quad (2.21)$$

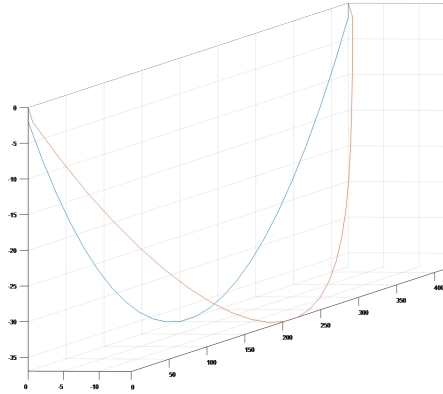
4 Una vez hallada esta matriz se procede a calcular las frecuencias naturales y  
5 los modos del sistema a partir de la ecuación ya mencionada  $(K - \lambda.M).\phi = 0$ .  
6 Se puede observar que los modos revelados por este estudio son en diferentes  
7 planos y con frecuencias pequeñas asociadas, en comparación con modelos de  
8 estructuras. Se presentan a continuación las primeras 5 frecuencias naturales  
9 del sistema e imágenes ilustrando los modos asociados a ellas en el anexo.  
10 Además se adjuntan vídeos del movimiento asociados con los mismos.

- 11     ■  $1^a - 0.0908Hz$
- 12     ■  $2^a - 0.1815Hz$
- 13     ■  $3^a - 0.1818Hz$
- 14     ■  $4^a - 0.2658Hz$
- 15     ■  $5^a - 0.2721Hz$

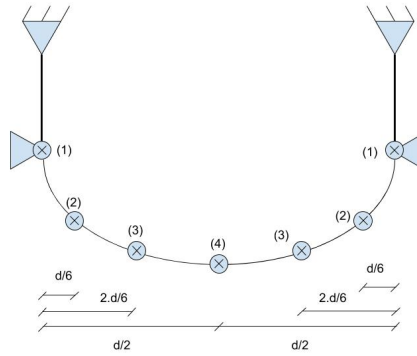
16 El estudio se centra en la primera de las frecuencias, 0.091 Hz, ya que su  
17 modo asociado es el que genera mayor desplazamiento horizontal en la cadena  
18 de aisladores. A continuación se presenta el primer modo con el mayor de los  
19 desplazamientos a 15 metros de la posición original para mejor visualización.  
20 En azul se esboza el cable en su posición natural y en rojo el primer modo  
21 asociado.

22 El planteo consta en excitar el cable con una fuerza sinusoidal con frecuen-  
23 cia igual a la menor de las frecuencias naturales, pretendiendo disminuir los  
24 desplazamientos de la cadena de aisladores colocando masas concentradas de  
25 80 kg en determinados puntos del cable. Es por esto que se simula el cable en  
26 4 instancias diferentes aumentando la masa de determinados nodos. Los nodos  
27 seleccionados para colocar las masas son:

- 28     ■ Los dos que se encuentran vinculados a la cadena de aisladores.
- 29     ■ Los dos ubicados a  $\frac{1}{6}$  de la distancia horizontal de entre aisladores.
- 30     ■ Los dos ubicados a  $\frac{2}{6}$  de la distancia horizontal de entre aisladores.
- 31     ■ En el nodo central con dos masas.



**Figura 2.6:** Configuración adoptada por el primer modo.

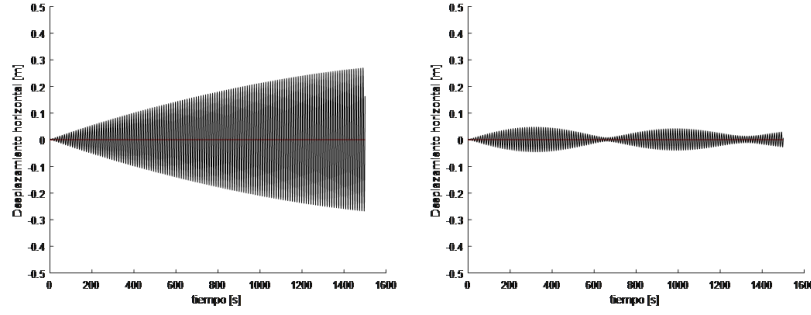


**Figura 2.7:** Distribución de masas colocadas.

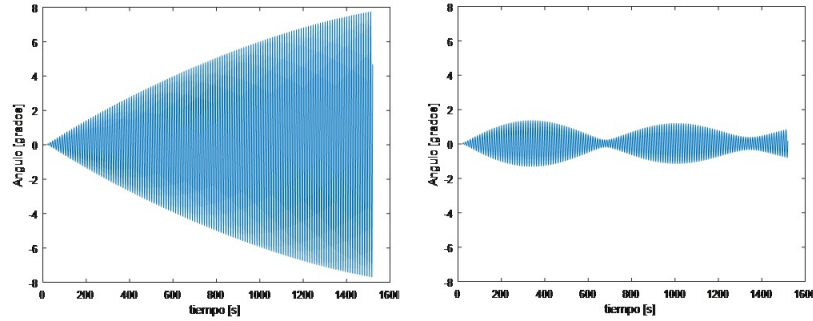
1      Mediante estas cuatro simulaciones se constató que la mejor solución para  
2      este problema es colocar las dos masas concentradas en el medio del cable.  
3      Con esto se logra una reducción en el desplazamiento horizontal de la cadena  
4      de aisladores de aproximadamente un 85 % para un transitorio de 1500 segun-  
5      dos. A continuación se presenta el desplazamiento del nodo estudiado antes y  
6      después de colocar las masas.

7      La respuestas en el tiempo para la fuerza sinusoidal de frecuencia igual al  
8      primer modo se presenta en las Figuras: 2.8, 2.9.

9      Por un lado, la opción de colocar masas en el cable puede parecer muy fácil  
10     de implementar y ayudaría a que los desplazamientos del cable disminuyan de  
11     forma considerable para fuerzas de este tipo en particular, pero no hay que  
12     dejar de evaluar otros cambios que se pueden generar a partir de este método.  
13     Se debe considerar que tanto las torres como la cadena de aisladores quedaran  
14     sometidas a un peso mayor, en este caso se trata de un aumento de 160 Kg, en



**Figura 2.8:** Desplazamiento horizontal de la cadena de aisladora en función del tiempo con y sin masas.



**Figura 2.9:** Ángulo de la cadena de aisladora en función del tiempo con y sin masas.

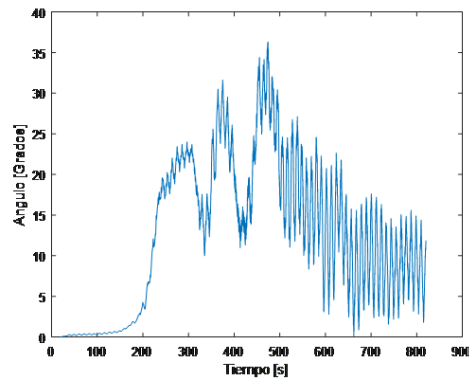
1 cada uno de los cables, donde se deberá tener en cuenta las normas aplicadas  
2 por UTE si es factible este tipo de soluciones. Por otra parte, se debe considerar  
3 que cambian las frecuencias naturales del nuevo sistema. Se presentan las cinco  
4 primeras frecuencias naturales sin masas agregadas y con masas aplicadas en  
5 el nodo central:

- 6 ■  $1^a - 0.0908Hz \rightarrow 1^a - 0.0893Hz$
- 7 ■  $2^a - 0.1815Hz \rightarrow 2^a - 0.1908Hz$
- 8 ■  $3^a - 0.1818Hz \rightarrow 3^a - 0.1913Hz$
- 9 ■  $4^a - 0.2658Hz \rightarrow 4^a - 0.2622Hz$
- 10 ■  $5^a - 0.2721Hz \rightarrow 5^a - 0.2685Hz$

11 Se observa que la primera frecuencia natural disminuye un 2%, esto hace  
12 que la frecuencia con la que se aplica la fuerza en el estudio anterior es próxima  
13 a la frecuencia natural del nuevo sistema, de igual manera los desplazamientos  
14 se atenúan de forma considerable.

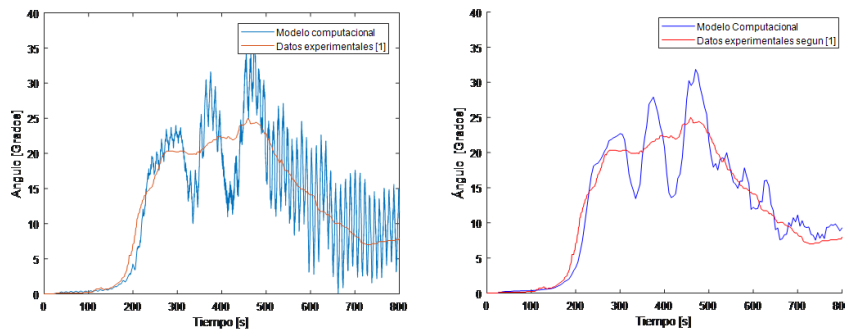
### 2.1.5. Respuesta a tormenta convectiva

En esta instancia se somete al cable a fuerzas ejercidas por el viento. Al igual que en el caso del péndulo, las velocidades y fuerzas ejercidas por el viento son obtenidas a partir de Stengel y Thiele, 2017. Dadas estas condiciones, se compara el movimiento del nodo móvil de la cadena de aisladores contra lo documentado en el artículo antes mencionado, y los resultados arrojados de la simulación Péndulo. Para esto se consideraron los mismos parámetros que en el modelo 2D. A continuación se presenta el ángulo respecto de la vertical que forma la cadena de aisladores en función del tiempo al aplicarle la fuerza ejercida por el viento:



**Figura 2.10:** Respuesta del ángulo de la cadena de aisladora en función del tiempo.

En la siguiente figura se comparan los resultados arrojados del ángulo con los datos de Stengel y Thiele, 2017. Para luego a través de una media móvil filtrar los datos obtenidos.



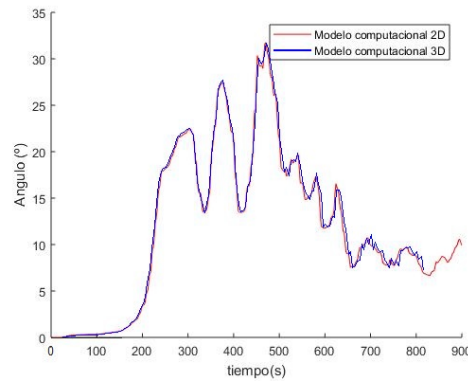
**Figura 2.11:** Datos del ángulo sin procesar y luego de aplicarle una media móvil

Cuando se compara con los datos arrojados por Stengel y Thiele, 2017,



se puede apreciar la misma distorsión que ocurría en la simulación 2D. Este cambio significativo se puede deber a no tener precisamente los mismos datos que se utilizaron en Stengel y Thiele, 2017. De todas formas el programa tiene la misma tendencia a comportarse como los datos de referencia al aplicarle el viento.

Comparando los resultados con el modelo 2D se puede observar que las curvas descritas por ambos modelos reflejan el mismo comportamiento:

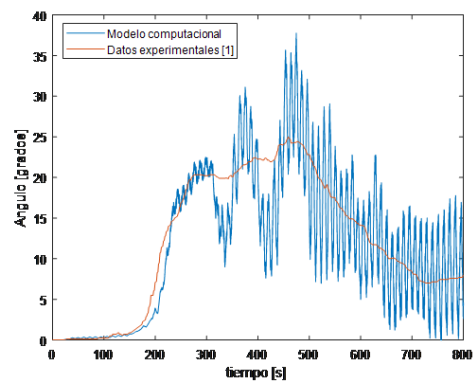


**Figura 2.12:** Contraste de los modelos 2D/3D

Los datos arrojados por el modelo Péndulo y 3D difieren en menos de un 5 % para cada posición en el tiempo. La gran diferencia que existen entre estas dos simulaciones es que en el para el caso 2D se debe asumir que las fuerzas son homogéneas en todo el cable y se puede ver que representa bien esta situación. Las tormentas conectivas son homogéneas en toda la extensión del cable por lo que el programa puede servir para simulaciones futuras.

Por último, se procede a aplicarle al sistema una masa de 160 Kg en el medio del cable, como en la primera simulación 3D, excitándolo con la fuerza del viento para conocer los desplazamientos del nodo móvil de la cadena de aisladores.(Figura 2.13).

A partir de los datos anteriores se puede ver que no existen grandes cambios en el movimiento del nodo libre en la cadena de aisladores cuando se aplica una fuerza proveniente de una tormenta conectiva al añadirle una masa de 160 kg en el centro del cable. Para este tipo de problemas no sería de gran ayuda la solución que se había encontrado en el la primera parte de esta sección.



**Figura 2.13:** Respuesta del ángulo para tormenta convectiva utilizando una media móvil y masas sobre el cable

# 1 Anexo 3

2 Se presenta a continuación los códigos implementados durante el transcurso  
3 de este trabajo:

```
41 % Copyright (C) 2020, Jorge M. Perez Zerpa, J. Bruno Bazzano ,  
5     Joaquin Viera ,  
62 %     Mauricio Vanzulli, Marcelo Forets, Jean-Marc Battini,  
7     Sebastian Toro  
83 %  
94 % This file is part of ONSAS.  
105 %  
116 % ONSAS is free software: you can redistribute it and/or modify  
127 % it under the terms of the GNU General Public License as  
13     published by  
148 % the Free Software Foundation, either version 3 of the License  
15     , or  
169 % (at your option) any later version.  
170 %  
181 % ONSAS is distributed in the hope that it will be useful,  
192 % but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty  
20     of  
213 % MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the  
224 % GNU General Public License for more details.  
235 %  
246 % You should have received a copy of the GNU General Public  
25     License  
267 % along with ONSAS. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.  
27     />.  
288  
299 function [ fs, ks, stress, rotData ]= elementBeamForces( ...  
300     elemCoords, elemCrossSecParams, elemConstitutiveParams,  
31     solutionMethod, Ue, Udote, Udotdote, elemrho ) ;  
321
```

```

12 elemCoords = elemCoords(:) ;
23 xs          = elemCoords(1:2:end) ;
34
45 booleanCSTangs = 0 ;
56
67 % --- material constit params ---
78 rho = elemrho ;
89 E   = elemConstitutiveParams(2) ;
90 nu  = elemConstitutiveParams(3) ;
101 G   = E/(2*(1+nu)) ;
112 % -----
123
134 % --- cross section ---
145 if elemCrossSecParams(1) == 1 %general section
156     Area = elemCrossSecParams( 2 ) ;
167     J     = elemCrossSecParams( 3 ) ;
178     Iyy   = elemCrossSecParams( 4 ) ;
189     Izz   = elemCrossSecParams( 5 ) ;
190     %
201     if length( elemCrossSecParams ) > 5
212         Jrho = diag( elemCrossSecParams( 6:8 ) ) ;
223     else
234         Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
245     end
256 elseif elemCrossSecParams(1) == 2
267     Area = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3) ;
278     Iyy  = elemCrossSecParams(2)*elemCrossSecParams(3)^3/12 ;
289     Izz  = elemCrossSecParams(3)*elemCrossSecParams(2)^3/12 ;
290     if elemCrossSecParams(2)==elemCrossSecParams(3)
301         J      = 1/3*0.40147*elemCrossSecParams(2)^4 ;
312     else
323         error('rectangular section type not implemented yet,
33         please create an issue')
344     end
355     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
366 elseif elemCrossSecParams(1) == 3
377     diameter = elemCrossSecParams(2) ;
388     Area = pi*diameter^2/4 ;
399     Iyy  = pi*diameter^4/64 ;
400     Izz  = Iyy ;
411     J    = Iyy + Izz ;
422     Jrho = rho * diag( [ J Iyy Izz ] ) ;
433 else

```

```

144     error(' section type not implemented yet, please create an
2         issue')
355 end
466 % -----
577
688 % auxiliar matrices
799 I3 = eye(3)      ;
800 O3 = zeros(3)    ;
911 O1 = zeros(1,3)  ;
1022
1133 permutIndxs = [1:2:5 2:2:6 ([1:2:5]+6) ([2:2:6]+6) ] ;
1244
1355 dg          = Ue          ( permutIndxs ) ;
1466 if solutionMethod > 2
1577     ddotg      = Udot     ( permutIndxs ) ;
1688     ddotdotg   = Udotdote( permutIndxs ) ;
1799 end
1800
1911 % global thetas
2022 tg1 = dg (4:6);
2133 tg2 = dg (10:12);
2244
2355 % rotation matrices
2466 Rg1 = expon( tg1 ) ;
2577 Rg2 = expon( tg2 ) ;
2688
2799 x21 = xs(4:6) - xs(1:3) ;
2800 d21 = dg(7:9) - dg(1:3) ;
2911
3022 lo = sqrt( ( x21          )' * ( x21          ) ) ; %
3133 l  = sqrt( ( x21 + d21 )' * ( x21 + d21 ) ) ; %
3244
3355 %~ lo = sqrt(x21' * x21);
3466 %~ l = sqrt( sum( ( x21+d21).^2 ) ) ;
3577 %~ l  = sqrt( (x21+d21)' * (x21+d21) ) ;
3688 %~ l  = norm( x21 + d21 ) ;
3799
3800
3911 %~ if norm(imag(dg))>0
4022     %~ u, d21, l, lo, imag(d21), dg
4133     %~ uimprov = ( l^2 - lo^2 ) / (lo + l)
4244 %~ end
4355

```

```

116 % rotation matrix to reference configuration
127 Ro = beamRefConfRotMat( x21 ) ;
138
149 % --- rigid rotation ---
150
161 % deformed x axis
172 e1 = ( x21 + d21 ) / l ;
183
194 q1 = Rg1 * Ro * [0 1 0]' ;
105 q2 = Rg2 * Ro * [0 1 0]' ;
116 q = ( q1 + q2 ) / 2 ;
127
138 % deformed z local axis
149 e3 = cross (e1, q) ;
150 e3 = e3 / norm(e3) ; % normalization
161
172 % deformed y local axis
183 e2 = cross (e3, e1);
194
205 % rotation matrix
216 Rr = [ e1 e2 e3 ] ;
227 % -----
238
249
250 % --- local displacements ---
261
272 % axial displacement
283 u = l - lo;
294
305 % local rotations
316 Re1 = Rr' * Rg1 * Ro;
327 Re2 = Rr' * Rg2 * Ro;
338
349 t11 = logar( Re1 ) ;
350 t12 = logar( Re2 ) ;
361
372 locDisp = [ u t11' t12' ] ;
383 % -----
394
405
416 % --- local force vector and tangent stiffness matrix ---
427 [f1, k1, strain, stress] = beamLocalStaticForces (u, t11, t12,
43 lo, E, G, Area, Iyy, Izz, J ) ;

```

```

118 % -----
129
130
141 q = Rr' * q ;
152 q1 = Rr' * q1 ;
163
174 nu = q(1)/q(2);
185 nu11 = q1(1)/q(2);
196 nu12 = q1(2)/q(2);
207 nu21 = 2*nu-nu11;
218 nu22 = 2-nu12;
229
230
241 % transformation to the new local coordinates
252
263 De1 = invTs( t11 ) ;
274 De2 = invTs( t12 ) ;
285
296 % matrix for transformation between global and relative
307 rotations/moments
318
329 H = [ 1 01 01 ; ...
340       01' De1 03 ; ...
359       01' 03 De2 ] ;
370
381 fe = H' * fl ;
392 %~ [ fl( 1)
403      %~ De1'*fl(2:4)
414      %~ De2'*fl(5:7)] ;
425
436 Dh1 = dinvTs( t11, fl(2:4) ) * De1 ;
447 Dh2 = dinvTs( t12, fl(5:7) ) * De2 ;
458
469 Kh = [ 0 01 01
480       01' Dh1 03
491       01' 03 Dh2 ] ;
502
513 ke = H' * kl * H + Kh ;
524
535 % transformation to the global coordinates
546 r = [ -e1' 01 e1' 01 ]' ;
557
568 B = [ r'

```

```

1189 -nu/l*e3' (1-nu12/2)*e1'+nu11/2*e2' nu/l*e3' 1/2*(-nu22*e1
2 '+nu21*e2')
1300 -e3'/l e2' e3'/l 0 0 0
1401 e2'/l e3' -e2'/l 0 0 0
1502 -nu/l*e3' 1/2*(-nu12*e1'+nu11*e2') nu/l*e3' (1-nu22/2)*e1'+
6 nu21/2*e2'
1703 -e3'/l 0 0 0 e3'/l e2'
1804 e2'/l 0 0 0 -e2'/l e3'];
1905
1006 fg = B' * fe ;
1107
1208 A = (I3-e1*e1')/l;
1309
1400 Dr=[A 03 -A 03
1501 03 03 03 03
1602 -A 03 A 03
1703 03 03 03 03];
1804
1905 G=[0 0 nu/l nu12/2 -nu11/2 0 0 0 -nu/l nu22/2 -
20 nu21/2 0
2106 0 0 1/l 0 0 0 0 0 -1/l 0
22 0 0
2307 0 -1/l 0 0 0 0 0 1/l 0 0
24 0 0]';
2508
2609 II=[03 I3 03 03
270 03 03 03 I3];
2801
2902 P = II - [G'; G'] ;
3003
3104 F = P' * fe(2:7);
3205
3306 sF=[skew(F(1:3))
3407 skew(F(4:6))
3508 skew(F(7:9))
3609 skew(F(10:12))];
3700
3801 EE=[Rr 03 03 03
3902 03 Rr 03 03
4003 03 03 Rr 03
4104 03 03 03 Rr];
4205
4306 nab=[0

```



```

217      (nu*(fe(2)+fe(5))+fe(3)+fe(6))/1
228      (fe(4)+fe(7))/1];
239
240 Kg = B' * ke * B + Dr * fe(1) - EE*sF*G'*EE' + EE*G*nab*r' ;
251
262
273 % --- transformation to the new global coordinates ---
284
295 Dg1 = Ts( tg1 ) ;
306 Dg2 = Ts( tg2 ) ;
317
328 q=[fg(1:3)
339     Dg1'*fg(4:6)
340     fg(7:9)
351     Dg2'*fg(10:12)];
362
373 Dk1=dTs(tg1,fg(4:6));
384 Dk2=dTs(tg2,fg(10:12));
395
406 H=[I3 03 03 03
417     03 Dg1 03 03
428     03 03 I3 03
439     03 03 03 Dg2];
440
451 Kt = H' * Kg * H ;
462
473 Kt( 4:6 , 4:6 ) = Kt( 4:6 , 4:6 ) + Dk1 ;
484 Kt(10:12,10:12) = Kt(10:12,10:12) + Dk2 ;
495
506 %~ Kt = (Kt+Kt')/2;
517
528 Finte = zeros(size(q)) ;
539 dofscomb = [ 1:2:5 2:2:6 7:2:11 8:2:12 ] ;
540
551 Finte( dofscomb ) = q ;
562 KTe = zeros( size(Kt));
573
584 if booleanCSTangs == 1
595
606     step = 1e-4 * norm(x) ;
617
628     for i=1:12
639         ei = zeros(12,1);    ei(i) = j ;

```

```

210
221     FinteComp = elementBeamInternLoads( x, dg + ei*step, params
3       , 0 ) ;
242
253     KTe(:,i) = imag( FinteComp ) / step;
264
275     %~ if i==1
286         %~ holaaafintecomp = FinteComp(1) ;
297         %~ ei
308 %~ FinteComp
319 %~ stop
320     %~ end
331 end
342 %~ KTeCS = KTe ;
353 %~ KTe = zeros( size(Kt));
364 %~ KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
375 %~ normareldif = norm( KTeCS - KTe ) / norm( KTe )
386 %~ dife = KTeCS - KTe
397 %~ normareldif11 = norm( KTeCS(1,1) - KTe(1,1) ) / norm( KTe
40      (1,1) )
418 %~ entridif = [ KTeCS(1,1) KTe(1,1) holaaafintecomp ]
429 %~ holacomplejos = [ KTeCS(1,1) holaaafintecomp ]
430
441 %~ full(dife)
452
463 %~ stop
474 else
485
496     KTe( dofscomb, dofscomb ) = Kt ;
507 end
518
529 fs = {Finte} ;
530 ks = {KTe};
541
552 rotData = {locDisp, Rr} ;
563
574
585
596 if solutionMethod > 2
607
618     % ----- interpolation functions -----
629     % linear
630     N1 = @(x) 1 -x/lo      ;

```

```

311 N2 = @(x) x/lo ;
322
333 % cubic
344 N3 = @(x) x*(1-x/lo)^2 ;
355 N4 = @(x) -(1-x/lo)*(x^2)/lo ;
366 N5 = @(x) (1-3*x/lo)*(1-x/lo);
377 N6 = @(x) (3*x/lo-2)*(x/lo) ;
388
399 N7 = @(x) N3(x)+N4(x) ;
400 N8 = @(x) N5(x)+N6(x)-1 ;
411 % -----
422
433 P1 = @(x) [ 0 0 0 0 0 0 ; ...
444 0 0 N3(x) 0 0 N4(x) ; ...
455 0 -N3(x) 0 0 -N4(x) 0 ] ; % Eq. 38
466
477 ul = @(x) P1(x) * [ t11; t12 ] ; % Eq. 38
488
499 P2 = @(x) [ N1(x) 0 0 N2(x) 0 0 ; ...
500 0 N5(x) 0 0 N6(x) 0 ; ...
511 0 0 N5(x) 0 0 N6(x) ] ; %
522 Eq. 39
533
544 N = @(x) [ N1(x)*I3 03 N2(x)*I3 03 ];
555
566 H1 = @(x) N(x) + P1( x ) * P - 1*skew( ul(x) ) * G' ; % Eq
577 59
588
599 wdoter= G' * EE' * ddotg ; % Eq. 65
600
611 A1 = [ 01 01 01 01 ;
622 0 -1 0 01 0 1 0 01 ;
633 0 0 -1 01 0 0 1 01 ] ; %Eq. A.4
644
655 udot1 = @(x) P1(x) * P * EE' * ddotg ; %Ec A.9
666
677 % -----
688 % r is defined as column vector!!
699 H1dot = @(x) N7(x)/(1^2)*A1*(r' * ddotg) - skew( udot1(x) )
700 * G' ; %Ec A.8
711 % -----
722
733 ET = [skew(wdoter) 03 03 03 ;

```

```

311      03      skew(wdoter)      03      03      ;
322      03      03      skew(wdoter)      03      ;
333      03      03      03      skew(wdoter)      ];
344
355      C1 = @(x)      skew(wdoter)*H1(x) + H1dot(x) -H1(x)*ET; % Ec 66
366
377      udot      = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotg; %Ec 61
388      udotdot = @(x) Rr*H1(x)*EE'*ddotdotg+Rr*C1(x)*EE'*ddotg; % Ec
9      67
109
110      %Matrix to compute wdot y wdtotdot
121
132      H2 = @(x) P2(x)*P+G'; %Ec 72 se puede usar para comprobar con
14      ec A.10
153
164      wdot      = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotg;%Ec74
175
186
197      A2      = [      01      01      01      01;
208      0 0 1 01 0 0 -1 01;
219      0 -1 0 01 0 1 0 01];%Ec A.12
220
231      H2dot      = @(x) N8(x)/l^2*A2*(r'*ddotg) ;%Ec A.14
242
253      C2      = @(x) skew(wdoter)*H2(x) + H2dot(x) - H2(x)*ET ;%Ec
26      76
274
285      wdotdot      = @(x) Rr*H2(x)*EE'*ddotdotg + Rr*C2(x)*EE'*ddotg ;
29      %Ec 77
306
317      %-----Tensor dyadc of Intertia -----
328      %compute Rg(x)
339      thethaRoof      = @(x) P2(x)*[tl1;tl2];% Ec 39
340      Rex      = @(x) expon(thethaRoof(x)); %Ec 19 elevado en
35      ambos lados
361      Rgx      = @(x) Rr*Rex(x)*Ro';
372
383      Irho      = @(x) Rgx(x)*Ro*(Jrho)*(Rgx(x)*Ro)'; %Ec 45
394      Irhoe      = @(x) Rr'*Irho(x)*Rr; %Ec 80
405
416      % -----Compute interial force by quadrature -----
427      xIntPoints = [ -sqrt(3/5)      0      sqrt(3/5) ] ;
438      wIntPoints = [      5/9      8/9      5/9 ] ;

```

```

319
320 IntegrandoForce = @(x) H1(x)'*Rr'*Area*rho*udotdot(x) ...
331                  + H2(x)'*Rr'*( ...
342                  Irho(x)*wdotdot(x)...
353                  + skew(wdot(x)) * Irho(x) * wdot(x)
6      ...
374                  ) ; %Eq 78
385
396 %~ IntegrandoForce = @(x) H1(x)'*Rr'*Area*rho*udotdot(x)+H2(
10    x)'*Rr'*(Irho(x)*wdotdot(x)...
117                %~ +skew(wdot(x))*Irho(x)*wdot(x)); %Ec 78
128 %~ irho=Irho(sqrt(3/5))
139 %~ termino=H2(1)'*Rr'*(Irho(1)*wdotdot(1)+skew(wdot(1))*Irho
14    (1)*wdot(1))
150
161
172 IntegrandoMassMatrix = @(x) 1*H1(x)'*Area*rho*H1(x)+1*H2(x)
18    '*Irhoe(x)*H2(x);
193
204
215
226
237
248 %~ %Compute C3 and C4
259
260 h1 = @(x) H1(x) * ddotg ; %Eq B6
271 h2 = @(x) H2(x) * ddotg ;
282
293 rElem = [ [-1 0 0]    01  [1 0 0] 01]; %Ec B10
304
315 F1      = [skew(udot(0))' skew(wdot(0))' skew(udot(10))' skew(
32    wdot(10))']'; %Chequear con los nodales
336 %~ Fiaux      = [skew(ddotg(1:3))' skew(ddotg(4:6))' skew(ddotg
34    (7:9))' skew(ddotg(10:12))']' %Chequear con los nodales
357
368 C3      = @(x) -skew(h1(x))*G' + (N7(x)/l^2)*A1*(ddotg*rElem)...
37
389          +skew(wdoter)*P1(x)*P + H1(x)*F1*G'; % B13
390
401 C4      = @(x) -skew(h2(x))*G' + (N8(x)/l^2)*A2*ddotg*rElem + H2(
41    x)*F1*G'; %B14
422
433 %~ Irhoe(1)

```

```

414   ~ c1prueba = C1(1/2)
425   ~ c3prueba =C3(1/2)
436
447   % -----
458   % Compute Gyroscopic Matrix
469   IntegrandoGyroMatrix = @(x) H2(x)' * ( ( skew(wdoter) *
7       Irhoe(x) ) - skew( Irhoe(x) * wdoter) ) * H2(x) ...
480                               + H1(x)' * Area*rho*(C1(x) + C3(x)
9       ) ) + H2(x)'*Irhoe(x)*(C2(x)+C4(x)) ; %Ec88
101
112   sumForce = zeros (12, 1 ) ;
123   sumGyro  = zeros (12      ) ;
134   sumMass  = zeros (12      ) ;
145
156
167   for ind = 1 : length( xIntPoints )
178       sumForce = sumForce ...
189           + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoForce      ( lo/2 *
19       (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
200       %
211       sumGyro = sumGyro ...
222           + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoGyroMatrix( lo/2 *
23       (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
243       %
254       sumMass = sumMass ...
265           + lo/2 * wIntPoints( ind ) * IntegrandoMassMatrix( lo/2 *
27       (xIntPoints( ind ) + 1) ) ;
286   end
297
308   Fine          = EE * sumForce          ;
319   GyroMatrix    = EE * sumGyro * EE' ;
320   MassMatrix    = EE * sumMass * EE' ;
331
342   %Add Bt Matrix
353
364   Bt=[I3      03      03      03
375       03 inv(Dg1)',    03      03
386       03      03      I3      03
397       03      03      03      inv(Dg2)'] ;
408   MassMatrix =MassMatrix*Bt ;
419   GyroMatrix =GyroMatrix*Bt ;
420   ~ MassMatrix
431   Fine          = Cambio_Base(Fine); % En formato [f1 m1 ...];

```

```

412 GyroMatrix = Cambio_Base(GyroMatrix); % En formato [u1 theta1
2     u2 theta2 u3 theta3];
433 MassMatrix = Cambio_Base(MassMatrix); % En formato [u1 theta1
4     u2 theta2 u3 theta3];
454
465 %~ GyroMatrix
476 %~ MassCambiada = MassMatrix
487 %~ stop
498 %~ invPermutIndxs          = zeros(12,1) ;
1009 %~ invPermutIndxs(1:2:end) = [ 1:3  7:9  ] ;
110 %~ invPermutIndxs(2:2:end) = [ 4:6 10:12 ] ;
121
132 %~ Fine          = Fine          ( invPermutIndxs          )
14     ;
153 %~ GyroMatrix = GyroMatrix( invPermutIndxs, invPermutIndxs )
16     ;
174 %~ MassMatrix = MassMatrix( invPermutIndxs, invPermutIndxs )
18     ;
195
206 %~ Fine(permutIndxs)          = Fine ;
217 %~ GyroMatrix( permutIndxs, permutIndxs) = GyroMatrix ;
228 %~ MassMatrix( permutIndxs, permutIndxs) = MassMatrix ;
239
240 %~ function quadSum = integr( hola )
251
262 %~ Fine
273
284 fs{3} = Fine ;
295
306 ks{2} = GyroMatrix ;
317 ks{3} = MassMatrix ;
328
339 end

```