

PROCESO DE ADmisión 2018

PSU.[®]



UNIVERSIDAD DE CHILE
Vicerrectoría de Asuntos Académicos
DEMRE

RESOLUCIÓN MODELO DE PRUEBA: **MATEMÁTICA**



RESOLUCIÓN DEL MODELO DE PRUEBA DE MATEMÁTICA

PRESENTACIÓN

En esta publicación se resolverán las preguntas que aparecen en el Modelo de Prueba de Matemática publicado el presente año, en este sitio web.

El objetivo de esta publicación es entregar información a profesores y estudiantes acerca de los temas y habilidades cognitivas que se evalúan en cada uno de los ítems de este modelo, de manera que sirva de retroalimentación al trabajo que realizan. Para ello, se muestra una propuesta de resolución de cada pregunta, junto a una ficha de referencia curricular de cada una de ellas, explicitando el eje temático y el nivel al cual pertenece, así como también el contenido, el objetivo fundamental y la habilidad cognitiva medida, además de la clave.

Este documento ha sido elaborado por el Comité de Matemática del Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE), dependiente de la Vicerrectoría de Asuntos Académicos de la Universidad de Chile.

RESOLUCIÓN DE LAS PREGUNTAS

PREGUNTA 1

$$(0,1:0,01) + 0,001 =$$

- A) 0,101
- B) 9,09
- C) 0,002
- D) 10,001
- E) 0,01

RESOLUCIÓN

Para encontrar la solución a esta pregunta se debe realizar en primer lugar la operación entre los números decimales que se encuentran en el paréntesis, para luego realizar la adición entre el resultado obtenido y el número 0,001, tal como se muestra a continuación:

$$(0,1:0,01) + 0,001 = 10 + 0,001 = 10,001$$

Valor que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operaciones con números racionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 2

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$$

- A) 31
- B) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-5}$
- C) $\frac{13}{36}$
- D) $-\frac{13}{36}$
- E) $-\frac{31}{108}$

RESOLUCIÓN

Para resolver esta pregunta se puede aplicar una propiedad de las potencias de exponente entero y base racional para luego, realizar la adición. En efecto,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 2^2 + 3^3 = 4 + 27 = 31$$



Aplicando

$$\left(\frac{l}{a}\right)^{-n} = a^n$$

El valor encontrado se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Potencias de base racional y exponente entero.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 3

Si $M = 1,4 + 4,05$; $P = 5,6 - 0,21$ y $Q = 3,21 + 2,24$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

- A) $P > Q > M$
- B) $M = Q > P$
- C) $Q > P > M$
- D) $P > M > Q$
- E) $Q > M > P$

RESOLUCIÓN

La solución a la pregunta se determina ordenando los números M, P y Q, en este caso de mayor a menor, para lo cual se realizarán las adiciones y sustracciones entre los números decimales que aparecen en el enunciado.

Así, para encontrar el valor de M se deben sumar dos números decimales finitos:

$$\begin{array}{r} 1,40 \\ + 4,05 \\ \hline 5,45 \end{array}$$

Ahora, para determinar el valor de P se debe restar a un número decimal periódico un número decimal semiperiódico:

$$\begin{array}{r} 5,6666... \\ - 0,21\overline{11}... \\ \hline 5,4555... \end{array}$$

Y para calcular el valor de Q se deben sumar dos números periódicos:

$$\begin{array}{r} 3,21\overline{21}... \\ + 2,24\overline{24}... \\ \hline 5,4545... \end{array}$$

Luego, una forma de ordenar números decimales es comparar la parte entera, luego las décimas, luego las centésimas, luego las milésimas, y así sucesivamente hasta encontrar una diferencia que permita establecer el orden entre los números. La siguiente tabla muestra este procedimiento con los números M, P y Q.

Número	Parte entera	Décima	Centésima	Milésima
M = 5,4500...	5	4	5	0
P = 5,4555...	5	4	5	5
Q = 5,4545...	5	4	5	4

Como se observa en la tabla, a partir del valor posicional de la milésima existe una diferencia entre ellos, lo que implica que P > Q > M, relación que se encuentra en la opción A).

Otra forma de resolver el ítem es transformar los números a fracción, operarlos y luego comparar las fracciones.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Orden de números racionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 4

¿Cuál de los siguientes es un número racional que **NO** es un número entero?

- A) $1,\bar{9}$
- B) $\frac{-1}{(0,2)^3}$
- C) $\frac{0,\bar{4}\bar{6}}{0,\bar{2}\bar{3}}$
- D) $\frac{0,\overline{24}}{0,\overline{08}}$
- E) $\frac{2}{(0,4)^5}$

RESOLUCIÓN

La solución a la pregunta se obtiene calculando el número en cada una de las opciones operando los números decimales planteados en cada caso.

En A) se transforma el número decimal periódico a fracción.

Recuerde que:

Para transformar de un **número periódico a fracción** en el numerador se escribe la diferencia entre el número decimal, sin considerar la coma y el número que aparece en la parte entera, y en el denominador se escriben tantos 9 como dígitos tenga el periodo.

$$1,\bar{9} = \frac{19-1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

En B) se transforma el número decimal finito a fracción, luego se calcula la potencia, para terminar dividiendo -1 por el resultado obtenido:

Recuerde que:

Para transformar de un **número decimal finito a fracción** en el numerador se escribe el número decimal sin considerar la coma y en el denominador se escribe una potencia de 10 que tenga tantos ceros como dígitos tenga la parte decimal del número.

$$\frac{-1}{(0,2)^3} = \frac{-1}{\left(\frac{2}{10}\right)^3} = \frac{-1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{-1}{\frac{1}{125}} = -1 \cdot \frac{125}{1} = -125$$



Aplicando
$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Aplicando
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

En C), se transforman los números semiperiódicos a fracción para luego dividir los números resultantes:

Recuerde que:

Para transformar de un **número semiperiódico a fracción** en el numerador se escribe la diferencia entre el número decimal sin considerar la coma y el número que aparece antes del período y en el denominador se escriben tantos 9 como dígitos tenga el período seguido de tantos 0 como dígitos tenga el anteperíodo.

$$\frac{0,4\overline{6}}{0,2\overline{3}} = \frac{\frac{46-4}{90}}{\frac{23-2}{90}} = \frac{\frac{42}{90}}{\frac{21}{90}} = \frac{42 \cdot 90}{90 \cdot 21} = \frac{42}{21} = 2$$



En D), se transforman los números periódicos a fracción y luego, se dividen los números resultantes:

$$\frac{0,\overline{24}}{0,\overline{08}} = \frac{\frac{24-0}{99}}{\frac{8-0}{99}} = \frac{\frac{24}{99}}{\frac{8}{99}} = \frac{24 \cdot 99}{99 \cdot 8} = \frac{24}{8} = 3$$

Por último, en E) se realiza el mismo procedimiento que en B):

$$\frac{2}{(0,4)^5} = \frac{2}{\left(\frac{4}{10}\right)^5} = \frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)^5} = \frac{2}{\frac{2^5}{5^5}} = 2 \cdot \frac{5^5}{2^5} = 195,3$$

Como solo el valor de la opción E) es un número racional no entero, esta opción es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cuociente de dos números enteros con divisor distinto de cero.

Contenido: Números racionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 5

Un técnico cobró, en total, \$ 48.000 por la reparación de un computador. Si en repuestos gastó \$ 24.000 y cobra \$ 7.500 por hora de trabajo, ¿cuánto tiempo demoró en realizar la reparación de ese computador?

- A) 6 horas y 40 minutos
- B) 3 horas y 12 minutos
- C) 6 horas y 24 minutos
- D) 3 horas y 20 minutos
- E) 9 horas y 36 minutos

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema, primero se puede determinar la cantidad de dinero que el técnico cobró solo por su trabajo, restando al cobro total lo que gastó en repuestos, es decir,

$$48.000 - 24.000 = 24.000$$

Y para determinar la cantidad de horas de trabajo se divide el cobro del trabajo del técnico, por el valor de cada hora de trabajo, esto es

$$24.000 : 7.500 = 3,2$$

Esto quiere decir, que el técnico se demoró 3,2 horas en reparar el computador, tiempo que debe ser transformado en horas y minutos.

Recuerde que:
1 hora = 60 minutos

Luego, 3,2 horas es equivalente a 3 horas y x minutos, y teniendo en consideración lo anterior se puede plantear la siguiente proporción:

$$\frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ minutos}} = \frac{0,2 \text{ horas}}{x \text{ minutos}}$$

De donde se tiene que, $x = 60 \cdot 0,2 = 12$.

Así, se llega a que el técnico se demoró 3 horas y 12 minutos en reparar el computador, tiempo que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas en el conjunto de los números racionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 6

¿Cuál de los siguientes números está más cerca del número 25:10 en la recta numérica?

A) 15:5

B) $4\frac{1}{2}$

C) $2\frac{1}{4}$

D) 17:7

E) 19:9

RESOLUCIÓN

Una forma de determinar cuál de los números de las opciones está más cerca en la recta numérica del número dado en el enunciado, es transformar todos los números a decimal y luego ver cuál de ellos tiene una menor distancia al número 25:10 en la recta numérica.

Recuerde que:

- La **distancia** entre los números p y q **en la recta numérica** es $|q - p|$.
- $\frac{1}{2} = 0,5$ y $\frac{1}{4} = 0,25$

En primer lugar, se tiene que $25:10 = 2,5$.

Ahora, en la siguiente tabla se observa el desarrollo descrito anteriormente en cada una de las opciones:

Opción	Número	Distancia entre 2,5 y el número
A)	$15:5 = 3$	$ 2,5 - 3 = 0,5$
B)	$4\frac{1}{2} = 4,5$	$ 2,5 - 4,5 = 2$
C)	$2\frac{1}{4} = 2,25$	$ 2,5 - 2,25 = 0,25$
D)	$17:7 \approx 2,43$	$ 2,5 - 2,43 = 0,07$
E)	$19:9 = 2,\bar{1}$	$ 2,5 - 2,\bar{1} = 0,3\bar{8}$

Como se observa en la tabla, la menor distancia se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Orden de números racionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 7

Sea p un número racional tal que $0 < p < 1$ y n un número entero mayor que cero. De las siguientes opciones, ¿cuál representa el mayor número?

- A) p^n
- B) $n \cdot p^n$
- C) p^{n+1}
- D) p^{2n}
- E) $(p + 1)^n$

RESOLUCIÓN

Para analizar los números representados en las opciones y así, determinar cuál de ellos es el mayor, se considerarán las condiciones dadas en el enunciado

- ❖ Como p es un número racional tal que $0 < p < 1$, se tiene que p es de la forma $\frac{r}{m}$, donde $r < m$, con m y r números enteros positivos.
- ❖ Como n es un número entero mayor que cero, entonces $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Ahora, utilizando la información anterior, cada una de las expresiones de las opciones se pueden expresar como:

$$\text{A)} \quad p^n = \left(\frac{r}{m}\right)^n = 1 \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^n$$

$$\text{B)} \quad n \cdot p^n = n \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^n$$

$$\text{C)} \quad p^{n+1} = \left(\frac{r}{m}\right)^{n+1} = \left(\frac{r}{m}\right) \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^n$$

$$\text{D)} \quad p^{2n} = \left(\frac{r}{m}\right)^{2n} = \left(\frac{r}{m}\right)^n \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^n$$

$$\text{E)} \quad (p + 1)^n = \left(\frac{r}{m} + 1\right)^n$$

Recuerde que:

$$p^{m+n} = p^m \cdot p^n$$

Para determinar cuál de las expresiones representa el número mayor se puede comparar cada una de las opciones.

Teniendo en consideración que las expresiones en A), en B), en C) y en D) tienen como factor común $\left(\frac{r}{m}\right)^n$, bastaría con solo comparar el otro factor.

Al comparar A) con B), se tiene que $1 \leq n$, por lo tanto, el número representado en B) es mayor o igual que el que está representado en A).

Ahora, al comparar B) con C), se tiene $\left(\frac{r}{m}\right)^n < n$, luego el número representado en B) es mayor que el que está representado en C).

Ahora, al comparar B) con D), se tiene $\left(\frac{r}{m}\right)^n < n$, pues al elevar un número racional entre cero y uno por un exponente entero positivo, el número resultante está entre cero y uno. Luego, el número representado en B) es mayor que el que está representado en C).

Por último, al comparar B) con E), se pueden expresar las opciones de la siguiente manera:

$$B) n \cdot p^n = n \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{n} \cdot r}{m}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{n} \cdot r)^n}{m^n}$$

$$E) (p + 1)^n = \left(\frac{r}{m} + 1\right)^n = \left(\frac{r + m}{m}\right)^n = \frac{(r + m)^n}{m^n}$$

Recuerde que:

- $p = p^1 = p^{\frac{q}{q}} = \sqrt[q]{p^q} = (\sqrt[q]{p})^q$
- $\frac{p^s}{q^s} = \left(\frac{p}{q}\right)^s$

Como ambas fracciones tienen igual denominador, se puede comparar sus numeradores, o sea, $(\sqrt[n]{n} \cdot r)^n$ y $(r + m)^n$, como estas expresiones están elevadas a n , basta con comparar la base de las potencias, es decir, $(\sqrt[n]{n} \cdot r)$ y $(r + m)$.

Para realizar esta comparación se considera que $m = r + k$, con $k > 0$, ya que $r < m$, por lo que $(r + m) = (r + r + k) = (2r + k)$.

Ahora, se puede concluir que $\sqrt[n]{n} \cdot r < (2r + k)$, porque no existe un número entero positivo n para el cual $\sqrt[n]{n}$ sea mayor o igual que 2, así el número representado en E) es mayor que el que está representado en B).

Luego, del desarrollo anterior se concluye que la expresión que representa el número mayor está en la opción E).

Una manera de ejemplificar esto es considerando $p = \frac{1}{2}$ y $n = 3$.

Opción	Valor
A)	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$
B)	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0,375$
C)	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3+1} = \frac{1}{16} = 0,0625$
D)	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 3} = \frac{1}{64} = 0,015625$
E)	$\left(\frac{1}{2} + 1\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3,375$

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Potencias de base racional y exponente entero.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 8

Se puede determinar que la expresión $\frac{a - b}{c}$, con a , b y c números enteros y $c \neq 0$, representa un número entero positivo, si:

- (1) $(a - b)$ es múltiplo de c .
 - (2) $a = ck$ y $b = cp$, con p y k números enteros positivos.
-
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

En este ítem se debe determinar si con las condiciones dadas en (1) y/o en (2) la expresión $\frac{a - b}{c}$ representa un número entero positivo, sabiendo que a , b y c son números enteros y $c \neq 0$.

Recuerde que:

$\frac{p}{q}$ representa un número entero si p es
múltiplo de q .

- ✓ En (1) se plantea que $(a - b)$ es múltiplo de c , lo que implica que la expresión $\frac{a - b}{c}$ representa un número entero, pero no se tiene información que permita establecer que ese número sea positivo, por ejemplo si $a - b = 6$ y $c = -2$, se tiene que $\frac{a - b}{c}$ es un número entero negativo.
- ✓ En (2) se tiene que $a = ck$ y $b = cp$, con p y k números enteros positivos, lo que significa que a es múltiplo de c y que b también es múltiplo de c .

Luego, se tiene que $\frac{a - b}{c} = \frac{ck - cp}{c} = \frac{c(k - p)}{c} = k - p$, como k y p son números enteros positivos, se tiene que $k - p$ es un número entero, pero no necesariamente un número entero positivo, por ejemplo para $a = 4$, $b = 6$ y $c = 2$.

- ✓ Ahora, al considerar ambas informaciones, las dadas en (1) y en (2), tampoco se puede determinar el signo del número representado por $\frac{a - b}{c}$, pues en ambas se llega a la misma conclusión.

Por lo anterior, se deduce que se requiere información adicional para determinar si la expresión dada representa un número positivo, así la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cuociente de dos números enteros con divisor distinto de cero.

Contenido: Números racionales.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 9

$$\sqrt{(-4)^{-2}} =$$

- A) $\sqrt{8}$
- B) $-\frac{1}{4}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) -4
- E) 4

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se puede utilizar las propiedades de las potencias y luego las propiedades de las raíces.

En efecto, para determinar el resultado de $\sqrt{(-4)^{-2}}$, se puede realizar el siguiente desarrollo:

$$\sqrt{(-4)^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{(-4)^2}} = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

Aplicando
 $p^{-l} = \frac{1}{p}$

Utilizando
 $(-a)^2 = a^2$

Aplicando
 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, con a y b
números positivos.

De lo anterior, se tiene que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Raíces enésimas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 10

Si $P = 3 + \sqrt{5}$, $Q = \sqrt{14}$ y $R = \sqrt{30} - 4$, entonces

- A) $R < Q < P$
- B) $P < Q < R$
- C) $P < R < Q$
- D) $R < P < Q$
- E) $Q < R < P$

RESOLUCIÓN

Para determinar la relación de orden que existe entre P , Q y R se debe considerar los valores de $\sqrt{5}$, $\sqrt{14}$ y $\sqrt{30}$, de tal manera que se pueda saber el valor de P , Q y R .

Recuerde que:

$$\sqrt{a^2} = a, \text{ con } a > 0$$

Así, por la relación de orden que existe en los números reales, se tiene que $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$, es decir, $2 < \sqrt{5} < 3$, pues $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{9} = 3$.

Recuerde que:

Para $a < b$ y p es un número real, se cumple que $a + p < b + p$.

Luego, $\sqrt{5}$ es un número que se ubica entre los números 2 y 3, por lo que, al agregar 3 en la desigualdad se cumple que, $3 + 2 < 3 + \sqrt{5} < 3 + 3$, es decir, $5 < P < 6$.

Este mismo procedimiento se puede realizar con $\sqrt{14}$ y $\sqrt{30}$, obteniéndose lo siguiente:

- $\sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$, de donde $3 < \sqrt{14} < 4$, porque $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{16} = 4$, luego se tiene que $\sqrt{14}$ es un número entre 3 y 4, por lo que, $3 < Q < 4$.
- De $\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$, se tiene que $5 < \sqrt{30} < 6$, esto porque $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{36} = 6$, luego se llega a que $\sqrt{30}$ es un número entre 5 y 6, por lo que al restar 4 en la desigualdad se cumple que $5 - 4 < \sqrt{5} - 4 < 6 - 4$, es decir, $1 < R < 2$.

De lo anterior, se tiene que $5 < P < 6$, $3 < Q < 4$ y $1 < R < 2$, de donde se puede concluir que $R < Q < P$, siendo la opción A) la correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.

Contenido: Orden de números reales.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: A

PREGUNTA 11

Si $\log \sqrt{m} = p$ y $\log b^5 = q$, ¿cuál de las siguientes expresiones es **siempre** igual a $\log \sqrt{mb}$?

A) $p + \frac{q}{10}$

B) $p + \frac{q}{5}$

C) $p + \frac{\sqrt[5]{q}}{2}$

D) $\frac{pq}{5}$

E) $\frac{pq}{10}$

RESOLUCIÓN

Para encontrar cuál de las expresiones dadas en las opciones es siempre equivalente a la expresión $\log \sqrt{mb}$, se debe utilizar propiedades de logaritmos y propiedades de raíces. Una forma de desarrollar este ítem es como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\log \sqrt{mb} &= \log (\sqrt{m} \cdot \sqrt{b}) \\&= \log \sqrt{m} + \log \sqrt{b} \\&= \log \sqrt{m} + \log b^{\frac{1}{2}} \\&= \log \sqrt{m} + \frac{1}{2} \cdot \log b\end{aligned}$$

Aplicando $\sqrt{h \cdot n} = \sqrt{h} \cdot \sqrt{n}$, con $h \geq 0$ y $n \geq 0$.

Aplicando $\log(h \cdot n) = \log h + \log n$, con $h > 0$ y $n > 0$.

Aplicando $\sqrt[r]{p^r} = p^{\frac{r}{t}}$, con $p > 0$.

Aplicando $\log h^n = n \cdot \log h$, con $h > 0$.

Ahora, según el enunciado se tiene que

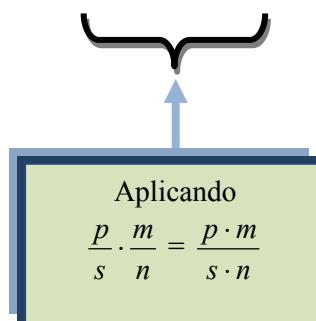
$$\log b^5 = q$$

$$5 \cdot \log b = q$$

$$\log b = \frac{q}{5}$$

Por lo que al reemplazar $\log \sqrt{m} = p$ y $\log b = \frac{q}{5}$ en $\log \sqrt{m} + \frac{1}{2} \cdot \log b$, se obtiene

$$p + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{5} = p + \frac{q}{10}$$



Siendo A) la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Propiedades de los logaritmos.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 12

Si $H = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$, con $x \geq 1$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a H^2 ?

- A) $2x$
- B) $4x - 2$
- C) $3x - 1$
- D) $2x + 2\sqrt{x^2 - 2x - 1}$
- E) $2x + \sqrt{x^2 - 2x - 1}$

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a este ítem se debe elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad presentada en el enunciado, y utilizar propiedades de raíces, potencias y cuadrado de binomio.

Como $x \geq 1$, se tiene que el radicando de las raíces del enunciado es un valor mayor o igual a cero y por lo tanto se puede desarrollar la igualdad de la siguiente forma:

$$H = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad.

$$H^2 = \left(\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} \right)^2$$

Desarrollando $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$H^2 = \left(\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} \right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} \right) \cdot \left(\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} \right) + \left(\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} \right)^2$$

Aplicando $(\sqrt{p})^2 = p$, con $p > 0$

$$H^2 = x + \cancel{\sqrt{2x-1}} + 2 \cdot \left(\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} \right) \cdot \left(\sqrt{x - \sqrt{2x-1}} \right) + x - \cancel{\sqrt{2x-1}}$$

Reduciendo términos semejantes.

$$H^2 = 2x + 2 \cdot \left(\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} \right) \cdot \left(\sqrt{x - \sqrt{2x-1}} \right)$$

Aplicando $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{p \cdot q}$, con $p \geq 0$ y $q \geq 0$

$$H^2 = 2x + 2 \cdot \sqrt{(x + \sqrt{2x-1}) \cdot (x - \sqrt{2x-1})}$$

Desarrollando $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$

$$H^2 = 2x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - (\sqrt{2x-1})^2}$$

Aplicando $(\sqrt{p})^2 = p$, con $p > 0$

$$H^2 = 2x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - (2x-1)}$$

Aplicando $-(p-q) = -p + q$

$$H^2 = 2x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

Aplicando $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$$H^2 = 2x + 2 \cdot \sqrt{(x-1)^2}$$

Aplicando $\sqrt{p^2} = p$, con $p > 0$

$$H^2 = 2x + 2(x-1)$$

Aplicando $p(q-r) = pq - pr$

$$H^2 = 2x + 2x - 2$$

Reduciendo términos semejantes.

$$H^2 = 4x - 2$$

De lo anterior, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Raíces enésimas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 13

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) La medida de la diagonal de un cuadrado de lado p unidades es siempre un número irracional.
- B) El perímetro de una circunferencia es siempre un número irracional.
- C) Si la medida de la altura de un triángulo equilátero es un número racional, entonces la medida de sus lados son números racionales.
- D) Si el perímetro de un triángulo es un número racional, entonces la medida de sus lados son números racionales.
- E) Ninguna de las anteriores.

RESOLUCIÓN

Para dar solución a esta pregunta se debe analizar cada una de las afirmaciones de las opciones determinando cuál de todas ellas es la verdadera.

De esta manera, la afirmación en A) es falsa debido a que si, por ejemplo, la medida del lado de un cuadrado es $\sqrt{2}$ su diagonal es 2, siendo este un número que no es irracional.

Recuerde que:

La **diagonal de un cuadrado** de lado p es $p\sqrt{2}$.

La afirmación en B) es falsa, pues, por ejemplo, si el radio de la circunferencia es $\frac{1}{\pi}$, entonces su perímetro es $2\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 2$, valor que no es un número irracional.

Recuerde que:

El **perímetro de una circunferencia** de radio r es $2\pi r$.

En la afirmación en C) si se designa a h como la altura de un triángulo equilátero de lado m , se tiene que $h = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, luego se puede despejar m como se muestra a continuación:

$$h = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

$$2h = m\sqrt{3}$$

Multiplicando por 2 en ambos lados de la igualdad.

$$\frac{2h}{\sqrt{3}} = m$$

Multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en ambos lados de la igualdad.

$$\frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = m$$

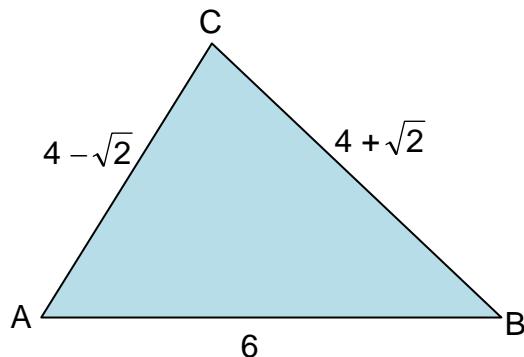
Racionalizando $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{2\sqrt{3} \cdot h}{3} = m$$

Luego, como $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ es un número irracional, se tiene que al multiplicarlo por h que es un número racional, su resultado es un número irracional.

De lo anterior, la altura de los triángulos equiláteros cuya altura es un número racional tienen lados cuyas medidas son números irracionales, por lo que la afirmación en C) es falsa.

La afirmación en D) es falsa, lo que se clarifica en el siguiente ejemplo:



El perímetro de este triángulo es $(4 - \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2}) + 6 = 14$, valor que es un número racional.

Del desarrollo presentado, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

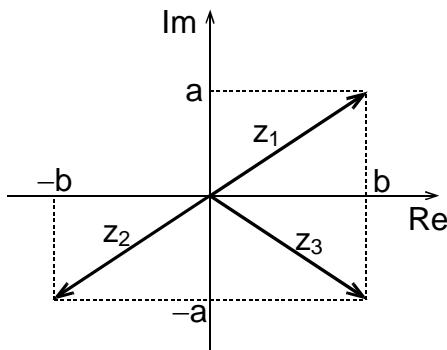
Contenido: Números irracionales.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 14

Con respecto a los números complejos z_1 , z_2 y z_3 representados en el plano complejo de la figura adjunta, ¿cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) verdadera(s)?



- I) $z_1 = -z_2$
 - II) $z_3 = \overline{z_1}$
 - III) $z_2 = \overline{z_3}$
-
- A) Solo II
 - B) Solo III
 - C) Solo I y II
 - D) Solo I y III
 - E) Ninguna de ellas.

RESOLUCIÓN

Para dar solución a este ítem se debe determinar la veracidad de las relaciones presentadas en I), en II) y en III), para lo cual se debe comprender la representación gráfica de un número complejo en el plano complejo.

Recuerde que:

- El número complejo de la forma $p + qi$, es representado en el **plano complejo** mediante un vector de coordenadas (p, q) .
- El **conjugado del número complejo** $z = p + qi$, es $\bar{z} = p - qi$.
- Dado el número complejo $z = p + qi$, se tiene que $-z = -p - qi$.

En efecto, de los datos presentados en el plano complejo, se tiene que

$$z_1 = (b, a), \text{ por lo tanto, } z_1 = b + ai$$

$$z_2 = (-b, -a), \text{ por lo tanto, } z_2 = -b - ai$$

$$z_3 = (b, -a), \text{ por lo tanto, } z_3 = b - ai$$

Ahora, en la relación I) como $b + ai = -(-b - ai) = -z_2$, se tiene $z_1 = -z_2$, por lo que esta relación verdadera.

En la relación II), $z_1 = b + ai$ y su conjugado es $\overline{z_1} = b - ai$, además $z_3 = b - ai$, por lo tanto, $z_3 = \overline{z_1}$, siendo esta igualdad verdadera.

Por último, en III) se tiene que $z_3 = b - ai$, su conjugado es $\overline{z_3} = b + ai$, y como $z_2 = -b - ai$ se obtiene que $z_2 \neq \overline{z_3}$, siendo la relación en III) falsa.

Como solo las relaciones en I) y en II) son verdaderas, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Números complejos.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 15

Si $z = a + bi$ es un número complejo, con a y b números reales distintos de cero, entonces la expresión $z^2 + z \cdot \bar{z} - (\bar{z})^2$ es

- A) $3a^2 - b^2$
- B) $a^2 + b^2 + 4abi$
- C) $a^2 - b^2 - 4abi$
- D) $a^2 - b^2$
- E) $a^2 + b^2$

RESOLUCIÓN

Para resolver esta pregunta se debe reemplazar el número complejo z en la expresión presentada en el enunciado y desarrollar la operatoria correspondiente. A continuación, se muestra un posible desarrollo de la operatoria.

Sea $z = a + bi$, luego su conjugado es $\bar{z} = a - bi$.

Ahora, al reemplazar z y \bar{z} en la expresión $z^2 + z \cdot \bar{z} - (\bar{z})^2$, se tiene lo siguiente:


$$\begin{aligned} & (a + bi)^2 + (a + bi)(a - bi) - (a - bi)^2 && \text{Aplicando } (p \pm q)^2 = p^2 \pm 2pq + q^2 \text{ y } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\ & a^2 + 2abi + (bi)^2 + a^2 - (bi)^2 - (a^2 - 2abi + (bi)^2) && \text{Aplicando } (ki)^2 = -k^2, \text{ con } k \in IR \\ & a^2 + 2abi - b^2 + a^2 + b^2 - (a^2 - 2abi - b^2) && \text{Aplicando } -(p + q) = -p - q \\ & a^2 + 2abi - b^2 + a^2 + b^2 - a^2 + 2abi + b^2 && \text{Reduciendo términos semejantes.} \\ & a^2 + b^2 + 4abi \end{aligned}$$

Expresión que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operatoria con números complejos.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 16

Sean a y b números enteros distintos de cero y n un número entero positivo. La ecuación $ax^2 - b^n = 0$, en x , tiene como solución **siempre** números complejos de la forma $p + qi$, con p y q números reales y $q \neq 0$, si

- A) $a < 0$ y n es un número impar.
- B) $a > 0$ y n es un número impar.
- C) $a < 0$ y n es un número par.
- D) $b < 0$ y n es un número impar.
- E) $b < 0$ y n es un número par.

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se deben analizar las condiciones que deben cumplir a y n para que la solución de la ecuación presentada en el enunciado pertenezca al conjunto de los números complejos, con parte imaginaria distinta de cero.

De esta manera, la ecuación $ax^2 - b^n = 0$ se puede desarrollar como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} ax^2 - b^n &= 0 \\ ax^2 &= b^n \\ x^2 &= \frac{b^n}{a} \end{aligned}$$

Recuerde que:

- Si $\frac{p}{q} < 0$, entonces $p > 0$ y $q < 0$ ó $p < 0$ y $q > 0$.
- Si p es un número entero negativo y n es un número par, entonces p^n es un número positivo.
- Si p es un número entero positivo y n es un número impar, entonces p^n es un número positivo.

Ahora, para que x sea un número complejo con parte imaginaria distinta de cero, $\frac{b^n}{a}$ debe ser un número negativo, esto ocurre si se cumple $b^n > 0$ y $a < 0$ ó $b^n < 0$ y $a > 0$.

Al analizar $b^n > 0$ y $a < 0$, se tiene que para que $b^n > 0$, n debe ser par, sin importar el valor que tome b .

Al analizar $b^n < 0$ y $a > 0$, se tiene que para que $b^n < 0$, n debe ser impar y $b < 0$.

De lo anterior, las condiciones que se presentan en la opción C) satisfacen $b^n > 0$ y $a < 0$, por lo que la solución de la ecuación serán números complejos con la parte imaginaria distinta de cero.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números complejos constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números reales, y reconocer su relación con los números naturales, números enteros, números racionales y números reales.

Contenido: Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números reales a los números complejos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 17

Sean k y r números enteros e $i^2 = -1$. La expresión $(i^{2k} + i^{6k})^r$ representa un número real positivo, si se sabe que:

- (1) k es un número par.
- (2) r es un número par.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para determinar si la expresión $(i^{2k} + i^{6k})^r$ representa un número real positivo, considerando la información dada en (1) y/o en (2), se puede escribir la expresión del enunciado tal como se muestra a continuación.

$$(i^{2k} + i^{6k})^r = ((i^2)^k + (i^6)^k)^r$$

Aplicando
 $(a^{cd}) = (a^c)^d$

Del enunciado se tiene que $i^2 = -1$, luego $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$.

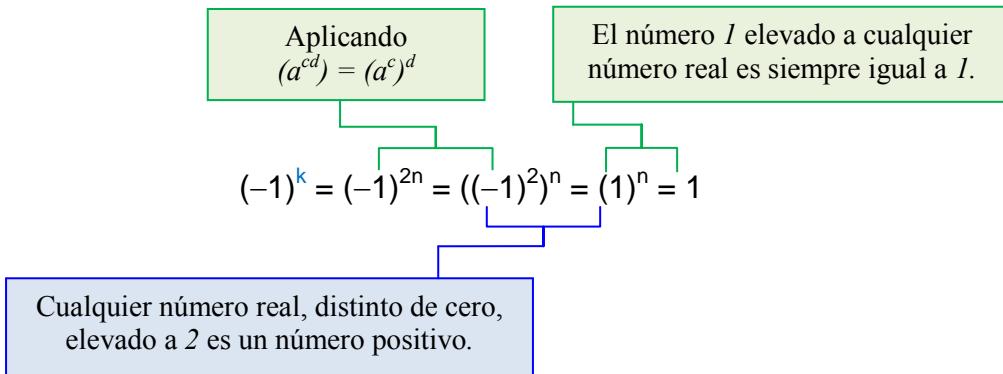
Ahora, al reemplazar $i^2 = -1$ e $i^6 = -1$ en la expresión $((i^2)^k + (i^6)^k)^r$, se tiene:

$$((i^2)^k + (i^6)^k)^r = ((-1)^k + (-1)^k)^r = (2(-1))^k)^r$$

Reduciendo términos semejantes.

De esta forma, se puede analizar si con la información dada en (1) y/o en (2) se puede determinar que la expresión $(2(-1))^k)^r$ representa un número real positivo.

La información en (1) dice que k es un número par, por lo tanto, se puede considerar que $k = 2n$, con n un número entero, luego se tiene que:



Por lo tanto, $(2(-1)^k)^r = (2 \cdot 1)^r$, luego 2^r es un número real positivo para cualquier valor de r.

En (2) se señala que r es un número par, de esta forma se tiene que $(2(-1)^k)^r$ es siempre positivo, pues el número $2(-1)^k$ elevado a un número par es siempre positivo, cualquiera sea el valor de k.

Así, se puede concluir que la clave es D), ya que con la información entregada en (1) y en (2), por separado, se puede determinar que la expresión $(i^{2k} + i^{6k})^r$ representa un número real positivo.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números complejos constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números reales, y reconocer su relación con los números naturales, números enteros, números racionales y números reales.

Contenido: Potencia de un número complejo.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: D

PREGUNTA 18

Si $\frac{(p - b)}{5} = \frac{3(p + b)}{20}$, entonces p es **siempre** igual a

- A) $7b$
- B) $-\frac{b}{7}$
- C) $2b$
- D) 0
- E) $\frac{2b}{5}$

RESOLUCIÓN

Para determinar la expresión que representa p, se debe “despejar” p en la ecuación $\frac{(p - b)}{5} = \frac{3(p + b)}{20}$, tal como se propone a continuación:

$$\begin{aligned} & \frac{(p - b)}{5} = \frac{3(p + b)}{20} \\ & 20 \cdot \frac{(p - b)}{5} = 20 \cdot \frac{3(p + b)}{20} \\ & 4(p - b) = 3(p + b) \\ & 4p - 4b = 3p + 3b \\ & 4p - 4b - 3p + 4b = 3p + 3b - 3p + 4b \\ & p = 7b \end{aligned}$$

Multiplicando por 20 en ambos lados de la igualdad y simplificando.

Sumando por $-3p + 4b$ en ambos lados de la igualdad.

Distribuyendo en ambos lados de la igualdad.

Reduciendo términos semejantes.

Expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

Contenido: Ecuaciones literales de primer grado.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 19

Si $a + b = 8$ y $ab = 10$, entonces el valor de $(a^2 + 6ab + b^2)$ es

- A) 76
- B) 104
- C) 48
- D) 124
- E) indeterminable con los datos dados.

RESOLUCIÓN

Para determinar el valor de la expresión $(a^2 + 6ab + b^2)$ se puede encontrar una relación entre $(a + b)$, ab y dicha expresión. Una manera de hacerlo es la que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} a + b &= 8 && \text{Elevando al cuadrado cada lado de la igualdad.} \\ (a + b)^2 &= 8^2 && \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 64 && \text{Desarrollando } (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 \\ \text{Reemplazando } ab = 10. & && \\ a^2 + 2 \cdot 10 + b^2 &= 64 \\ a^2 + 20 + b^2 &= 64 && \\ a^2 + 20 + b^2 - 20 &= 64 - 20 && \text{Sumando } -20 \text{ en ambos lados de la igualdad.} \\ a^2 + b^2 &= 44 \end{aligned}$$

Luego, al reemplazar $a^2 + b^2 = 44$ y $ab = 10$ en la expresión $(a^2 + 6ab + b^2)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}a^2 + 6ab + b^2 &= a^2 + b^2 + 6ab \\&= 44 + 6 \cdot 10 \\&= 44 + 60 \\&= 104\end{aligned}$$

De esta forma, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelo de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Expresiones algebraicas no fraccionarias.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 20

En los números reales, ¿cuál es el conjunto de todos los números x , para los cuales la expresión $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$ se indetermina?

- A) \emptyset
- B) $\{-4\}$
- C) $\{-2, 2\}$
- D) $\{-4, -1\}$
- E) $\{-2\}$

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de los conjuntos que se muestran en las opciones contiene los elementos que indeterminan la fracción del enunciado, se debe recordar que una fracción se indetermina cuando el denominador es igual a cero, de esta forma, la fracción del enunciado se indetermina si la expresión $x^2 + 4 = 0$.

Para lo cual se analizan dos casos para x , cuando $x = 0$ ó cuando $x \neq 0$.

Para $x = 0$	Para $x \neq 0$
$x^2 + 4 = 0^2 + 4 = 4$, por lo tanto, $x^2 + 4 \neq 0$.	$x^2 > 0$, luego $x^2 + 4 > 0$, por lo tanto, $x^2 + 4 \neq 0$.

Por lo anterior, se concluye que no existen números reales en el que la fracción $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$ se indetermine, luego el conjunto buscado es el que se encuentra en A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Interpretar la operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias como una generalización de la operatoria con fracciones numéricas, establecer estrategias para operar con este tipo de expresiones y comprender que estas operaciones tienen sentido solo en aquellos casos en que estas están definidas.

Contenido: Determinación de aquellos valores que indefinen una expresión algebraica fraccionaria.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: A

PREGUNTA 21

El precio de un artículo es \$ M, el cual es cancelado con 16 monedas de dos tipos, x de un tipo e y del otro tipo, cuyos valores son de \$ p y \$ q, respectivamente. ¿Cuál de los siguientes sistemas, al resolverlo, da como solución **siempre** la cantidad de monedas de cada valor utilizadas para cancelar el artículo?

A)
$$\begin{aligned} (p + q) \cdot (x + y) &= M \\ x + y &= 16 \end{aligned}$$

B)
$$\begin{aligned} px + qy &= M \\ (p + q) \cdot (x + y) &= 16 \end{aligned}$$

C)
$$\begin{aligned} xp + yq &= M \\ x + y &= 16 \end{aligned}$$

D)
$$\begin{aligned} x + y &= M \\ xp + yq &= 16 \end{aligned}$$

E)
$$\begin{aligned} p + q &= M(x + y) \\ xp + yq &= 16 \end{aligned}$$

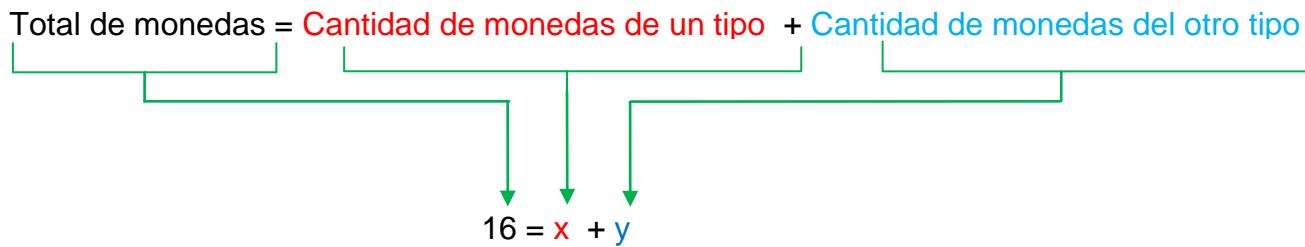
RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes literales, presentados en las opciones, permite calcular **siempre** la cantidad de monedas de cada valor se puede interpretar el enunciado, tal como se muestra a continuación:

Los datos que se desprenden del enunciado son:

- Precio del artículo = \$ M
- Cantidad de monedas de un tipo = x
- Cantidad de monedas del otro tipo = y
- Total de monedas = 16
- Valor de las monedas de un tipo = \$ p
- Valor de las monedas del otro tipo = \$ q

A continuación, se pueden establecer las siguientes relaciones:



De esta forma, la primera ecuación del sistema es $x + y = 16$.

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Precio del artículo} &= \underbrace{\text{Dinero total cancelado con monedas de un tipo.}}_{\left(\begin{array}{l} \text{Cantidad de monedas de un tipo.} \\ \cdot \\ \text{Valor de las monedas de un tipo.} \end{array} \right)} + \underbrace{\text{Dinero total cancelado con monedas del otro tipo.}}_{\left(\begin{array}{l} \text{Cantidad de monedas del otro tipo.} \\ \cdot \\ \text{Valor de las monedas del otro tipo.} \end{array} \right)} \\ \text{Precio del artículo} &= \left(\begin{array}{l} \text{Cantidad de monedas de un tipo.} \\ \cdot \\ \text{Valor de las monedas de un tipo.} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Cantidad de monedas del otro tipo.} \\ \cdot \\ \text{Valor de las monedas del otro tipo.} \end{array} \right) \\ M &= xp + yq \end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda ecuación del sistema es $xp + yq = M$,

luego el sistema solicitado es $\boxed{\begin{array}{l} xp + yq = M \\ x + y = 16 \end{array}}$, el que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 22

Jorge retira del banco \$ 6.540.000 en billetes de \$ 5.000 y de \$ 20.000. Si le entregaron en total 450 billetes, ¿cuántos billetes de \$ 20.000 recibió?

- A) 170
- B) 164
- C) 280
- D) 225
- E) 286

RESOLUCIÓN

Para determinar la cantidad de billetes de \$ 20.000 que recibió Jorge, se puede escribir y resolver un sistema de ecuaciones lineales que relaciona la cantidad de billetes de cada tipo, con la cantidad de dinero que retira y con la cantidad de billetes que recibe.

Luego, del enunciado se tienen los siguientes datos:

- Dinero que retira = \$ 6.540.000
- Cantidad de billetes de \$ 20.000 = x
- Cantidad de billetes de \$ 5.000 = y
- Cantidad total de billetes = 450

Ahora, se puede establecer la siguiente relación:

$$\text{Cantidad total de billetes} = \text{Cantidad de billetes de \$ 20.000} + \text{Cantidad de billetes de \$ 5.000}$$
$$450 = x + y$$

Para determinar la segunda ecuación del sistema se puede establecer, la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\text{Dinero que retira} &= \left(\text{Dinero total recibido en billetes de \$ 20.000.} + \text{Dinero total recibido en billetes de \$ 5.000.} \right) \\ \text{Dinero que retira} &= \left(\begin{array}{c} \$ 20.000 \\ \text{Cantidad de billetes de \$ 20.000.} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \$ 5.000 \\ \text{Cantidad de billetes de \$ 5.000.} \end{array} \right) \\ 6.540.000 &= 20.000 \cdot x + 5.000 \cdot y\end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que se debe resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}x + y &= 450 \\20.000x + 5.000y &= 6.540.000\end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver por cualquier método, en este caso se usa el de reducción:

$$\begin{aligned}x + y &= 450 \\20.000x + 5.000y &= 6.540.000\end{aligned}$$

Multiplicando por -5.000 en ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned}-5.000x + -5.000y &= -2.250.000 \\20.000x + 5.000y &= 6.540.000\end{aligned}$$

Sumando cada una de las componentes de las ecuaciones, en ambos lados de la igualdad.

$$-5.000x + 20.000x - \cancel{-5.000y} + \cancel{5.000y} = -2.250.000 + 6.540.000$$

Reduciendo términos semejantes.

$$15.000x = 4.290.000$$

$$x = 286$$

Multiplicando por $\frac{1}{15.000}$ en ambos lados de la igualdad.

De esta forma, la cantidad de billetes de \$ 20.000 que recibió Jorge es 286, siendo E) la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

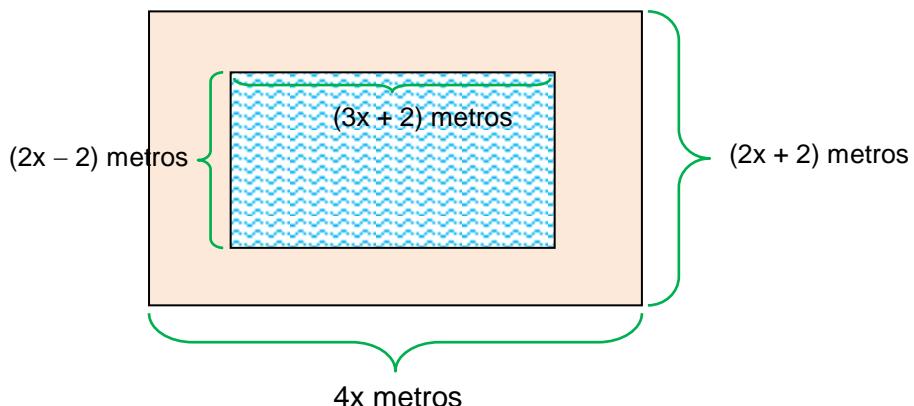
PREGUNTA 23

En un terreno rectangular de largo $4x$ metros y ancho $(2x + 2)$ metros se construye una piscina rectangular de $(3x + 2)$ metros de largo y $(2x - 2)$ metros de ancho y se embaldosa el resto del terreno. Si $x > 2$ y el área de la región embaldosada es 136 metros cuadrados, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el valor de x ?

- A) $(8x^2 + 8x) - (6x^2 - 4) = 136$
- B) $(8x^2 + 2) - (6x^2 - 4) = 136$
- C) $(8x^2 + 8x) - (6x^2 - 2x - 4) = 136$
- D) $(8x^2 + 2) - (6x^2 + 10x - 4) = 136$
- E) $(8x^2 + 8x) - (6x^2 - 10x - 4) = 136$

RESOLUCIÓN

Una forma de responder la pregunta es representar las medidas del largo y ancho de la piscina y el terreno embaldosado, tal como se muestra a continuación:



De la figura anterior se pueden establecer las siguientes relaciones para determinar el área del terreno rectangular y el área de la piscina:

Área del terreno rectangular

$$\begin{aligned} &= 4x \cdot (2x + 2) \\ &= 4x \cdot 2x + 4x \cdot 2 \\ &= 8x^2 + 8x \end{aligned}$$

Distribuyendo $4x$ en el binomio.

Luego, el área del terreno rectangular es $(8x^2 + 8x)$ metros cuadrados.

Área de la piscina

$$\begin{aligned}
 &= (3x + 2)(2x - 2) \\
 &= 3x \cdot 2x + 3x \cdot (-2) + 2 \cdot 2x + 2 \cdot (-2) \\
 &= 3x \cdot 2x - 3x \cdot 2 + 2 \cdot 2x - 2 \cdot 2 \\
 &= 6x^2 - 6x + 4x - 4 \\
 &= 6x^2 - 2x - 4
 \end{aligned}$$

Multiplicando dos binomios, término a término.

Reduciendo términos semejantes.

Por lo tanto, el área de la piscina es $(6x^2 - 2x - 4)$ metros cuadrados.

De esta forma, se puede establecer que el área del terreno embaldosado es igual al área del terreno rectangular menos el área de la piscina, es decir,

$$\text{Área del terreno embaldosado} = \text{Área del terreno rectangular} - \text{Área de la piscina}$$

$$136 = (8x^2 + 8x) - (6x^2 - 2x - 4)$$

Por lo tanto, la ecuación que permite determinar el valor de x es $(8x^2 + 8x) - (6x^2 - 2x - 4) = 136$, luego la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 24

Si la ecuación $(p - 1)x^2 + 2(p - 3)x + p - 3 = 0$, en x , con p un número real distinto de 1, tiene dos soluciones reales distintas, entonces

- A) $p > 1$
- B) $p = 3$
- C) $p < 3$
- D) $p > 3$
- E) $p > 1$

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se puede determinar el discriminante de la ecuación cuadrática planteada en el enunciado y analizar la condición de p para que dicha ecuación tenga dos soluciones reales y distintas.

Recuerde que:

Para una **ecuación cuadrática** de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en x , con a, b y c números reales y a distinto de cero, se tiene que si $b^2 - 4ac > 0$, entonces las soluciones de dicha ecuación son dos números reales y distintos.

Ahora, de la ecuación $(p - 1)x^2 + 2(p - 3)x + p - 3 = 0$ se obtiene que $a = p - 1$, $b = 2(p - 3)$ y $c = p - 3$, luego, al reemplazar en $b^2 - 4ac$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Aplicando } (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 && \text{Multiplicando los binomios término a término.} \\ &(2(p - 3))^2 - 4(p - 1)(p - 3) = 2^2(p - 3)^2 - 4(p^2 - 3p - p + 3) && \\ &= 4(p^2 - 6p + 9) - 4(p^2 - 4p + 3) && \text{Aplicando } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 4p^2 - 24p + 36 - 4p^2 + 16p - 12 && \text{Aplicando } a(b + c) = ab + ac \\ &= 24 - 8p && \text{Reduciendo términos semejantes.} \end{aligned}$$

Así, para determinar la condición que debe tener p para que la ecuación del enunciado tenga dos soluciones reales y distintas se debe resolver la desigualdad $24 - 8p > 0$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} 24 - 8p &> 0 && \text{Sumando } 8p \text{ en ambos lados de la desigualdad.} \\ 24 &> 8p \\ \frac{24}{8} &> \frac{8p}{8} && \text{Multiplicando por } \frac{1}{8} \text{ en ambos lados de la desigualdad.} \\ 3 &> p \end{aligned}$$

Por lo tanto, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Ecuaciones de segundo grado.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 25

Si a los números mayores que 1 y menores que 3 se les resta $-p$ y luego se divide por el número entero negativo b , entonces los números que se obtienen son **siempre** mayores que

- A) 1
- B) $\frac{3+p}{b}$
- C) $\frac{3-p}{b}$
- D) $\frac{1-p}{b}$
- E) $\frac{1+p}{b}$

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta al ítem se puede operar en los números reales, así, si se considera el número k que se encuentra entre 1 y 3, es decir, $1 < k < 3$, se puede realizar el siguiente desarrollo:

Recuerde que:

Si $a < b < c$, entonces para todo $d \in IR$, $a + d < b + d < c + d$.

$$1 < k < 3$$

$$1 - (-p) < k - (-p) < 3 - (-p)$$

$$1 + p < k + p < 3 + p$$

Restando $-p$ en los tres términos de la desigualdad.

Aplicando $-(-a) = a$

Recuerde que:

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

$$\frac{1+p}{b} > \frac{k+p}{b} > \frac{3+p}{b}$$

Dividiendo por b en ambos lados de la desigualdad, con $b < 0$.

Por lo tanto, el número que se obtiene es $\frac{k+p}{b}$, el cual es siempre mayor que $\frac{3+p}{b}$, expresión que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

Contenido: Desigualdades.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 26

Si $a^2 > b$ y $b > 0$, con a y b números reales y $a \neq b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I) $a < b$
 - II) $a \neq 0$
 - III) $\sqrt{b} < a$
-
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) Solo II y III
 - E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para dar solución a la pregunta se puede determinar la veracidad de las relaciones dadas en I), en II) y en III), como se muestra a continuación:

- En I), si $a = 2$ y $b = 1$, se cumple que $2^2 > 1$, y $1 > 0$, pero no se cumple que $2 < 1$. Luego, la relación $a < b$ es falsa.
- En II), del enunciado se tiene que $a^2 > b$ y $b > 0$, y si se asume que $a = 0$ se tiene que $0 > b$, lo cual es una contradicción con las condiciones del enunciado, por lo tanto, $a \neq 0$. Así, esta relación es verdadera.
- En III), si $a = -4$ y $b = 4$, se cumple que $(-4)^2 > 4$ y $4 > 0$, pero no se cumple que $\sqrt{4} < -4$. Luego, la relación $\sqrt{b} < a$ es falsa.

Como solo la relación en II) es siempre verdadera, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

Contenido: Desigualdades.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 27

En la ecuación $(ax - bx)(a - b) = a^2 - b^2$, con a y b números reales tal que $a \neq b$, se puede determinar el valor numérico de x , si se sabe que:

- (1) $a = 2b$
 - (2) El 20% de $(a + b)$ es 2.
-
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver el ítem es despejar x en la ecuación $(ax - bx)(a - b) = a^2 - b^2$ dada en el enunciado, con a y b números reales y $a \neq b$, para luego determinar si con las informaciones dadas en (1) y/o en (2) se puede encontrar el valor numérico de x .

Así,

$$\begin{aligned} (ax - bx)(a - b) &= a^2 - b^2 \\ x(a - b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\ x = \frac{a^2 - b^2}{(a - b)(a - b)} & \quad \left. \begin{array}{l} \text{Factorizando por } x. \\ \text{Multiplicando por } \frac{1}{(a - b)(a - b)} \text{ en ambos lados de la igualdad, ya que } a \neq b. \end{array} \right\} \\ x = \frac{\cancel{(a - b)}(a + b)}{\cancel{(a - b)}(a - b)} & \quad \left. \begin{array}{l} \text{Aplicando } p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) \\ \text{Simplificando por } (a - b). \end{array} \right\} \\ x = \frac{(a + b)}{(a - b)} & \end{aligned}$$

Ahora, con la información dada en (1), $a = 2b$, se tiene $x = \frac{(2b+b)}{(2b-b)} = \frac{3b}{b} = 3$. Luego, con esta información se puede encontrar el valor numérico de x .

En (2) se señala que el 20% de $(a + b)$ es 2, es decir, $0,2 \cdot (a + b) = 2$ de donde se obtiene que $(a + b) = 10$, que al reemplazarlo en $x = \frac{(a+b)}{(a-b)}$ se llega a $x = \frac{10}{(a-b)}$, expresión que no permite determinar el valor numérico de x , pues existen infinitos valores para a y b .

Como solo la información en (1) es suficiente para determinar el valor numérico de x , la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

Contenido: Ecuaciones literales de primer grado.

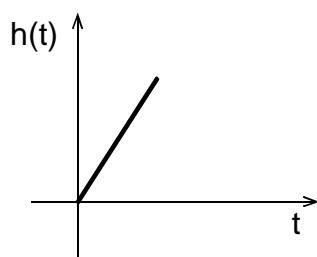
Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: A

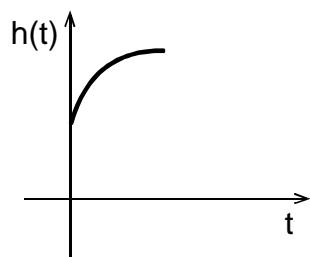
PREGUNTA 28

Una bomba comienza a llenar con agua un estanque cilíndrico de base horizontal y plana, a caudal constante. Si inicialmente el estanque contenía 2 m³ de agua, ¿cuál de los siguientes gráficos representa mejor la altura $h(t)$, en m, que alcanza el nivel de agua en el estanque, después de t segundos desde que se comenzó a llenar?

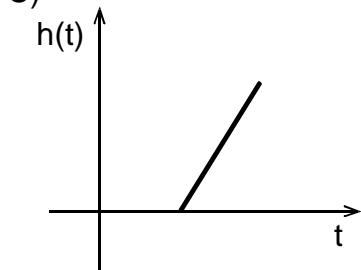
A)



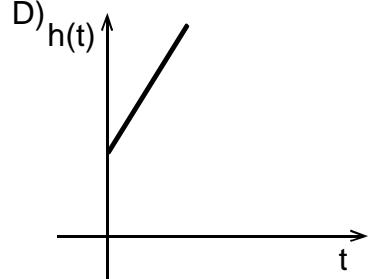
B)



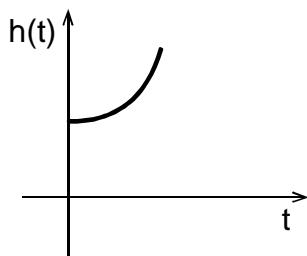
C)



D)



E)



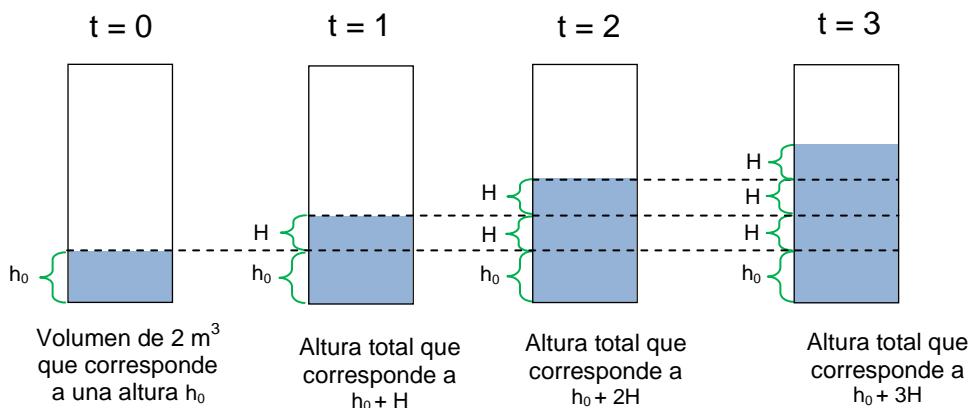
RESOLUCIÓN

Una manera de determinar cuál de los gráficos de las opciones representa mejor la altura h que alcanza el nivel del agua en el estanque, es encontrar el tipo de función que permite modelar la situación planteada. Para ello, se puede construir una tabla que relacione la altura h que alcanza el nivel del agua del estanque con el tiempo t de llenado.

Así, se debe considerar lo siguiente:

- Para un tiempo $t = 0$, el volumen del agua en el estanque es 2 m^3 , lo que corresponde a la altura inicial (h_0).
- El caudal de agua que ingresa al contenedor es constante, es decir, el volumen de agua que ingresa al contenedor es constante en el tiempo, lo cual implica que la altura aumenta de manera constante en el tiempo.

Considerando que H es la altura que aumenta en un segundo, en el siguiente esquema se muestra el incremento de la altura en el tiempo.



Ahora, el esquema anterior permite construir la siguiente tabla que muestra la regularidad entre el tiempo de llenado t y la altura h alcanzada por el agua en el estanque.

Tiempo t transcurrido	Altura h transcurrido el tiempo t
0	$h = h_0 + 0 \cdot H$
1	$h = h_0 + 1 \cdot H$
2	$h = h_0 + 2 \cdot H$
...	...
t	$h = h_0 + t \cdot H$

Luego, se puede observar que la relación que existe entre el tiempo t y la altura $h(t)$, se puede modelar por la función afín $h(t) = Ht + h_0$, la cual se representa gráficamente por una recta que intersecta al eje y en el punto $(0, h_0)$. Por lo tanto, el gráfico que mejor representa a dicha función se encuentra en D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función afín.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 29

Sean las funciones f , g y h , todas con dominio el conjunto de los números reales, definidas por $f(x) = \frac{3}{4}x$, $x - 2g(x) + 2 = 0$, $5x + 6h(x) - 30 = 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) $h(x)$ es inversamente proporcional a x .
- B) $g(x)$ es directamente proporcional a x .
- C) Las rectas que representan a las gráficas de las funciones f y g tienen la misma pendiente.
- D) $g(2x) = 2g(x)$
- E) $g(0) = \frac{1}{5}h(0)$

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se deben analizar las afirmaciones que se encuentran en cada una de las opciones, para esto se despeja $g(x)$ y $h(x)$ de las igualdades dadas en el enunciado:

De $x - 2g(x) + 2 = 0$, se obtiene $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.

De $5x + 6h(x) - 30 = 0$, se obtiene $h(x) = -\frac{5}{6}x + 5$.

Recuerde que:

- Dos variables son **inversamente proporcionales** si el producto entre ellas es constante.
- Dos variables son **directamente proporcionales** si el cuociente entre ellas es constante.
- Dada una recta de ecuación $y = mx + n$, m es su pendiente.

Para determinar el valor de verdad de la afirmación en A) se puede construir una tabla de valores que permita verificar si $x \cdot h(x)$ es un valor constante.

x	$h(x) = -\frac{5}{6}x + 5$	$x \cdot h(x)$
1	$h(1) = -\frac{5}{6} \cdot 1 + 5 = -\frac{5}{6} + 5 = \frac{25}{6}$	$1 \cdot \frac{25}{6} = \frac{25}{6}$
2	$h(2) = -\frac{5}{6} \cdot 2 + 5 = -\frac{10}{6} + 5 = \frac{10}{3}$	$2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$
3	$h(3) = -\frac{5}{6} \cdot 3 + 5 = -\frac{15}{6} + 5 = \frac{5}{2}$	$3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

Por lo tanto, $x \cdot h(x)$ no es constante, porque $\frac{15}{2} \neq \frac{20}{3} \neq \frac{25}{6}$, lo que implica que la afirmación en A) es falsa.

De la misma manera, para determinar el valor de verdad de la afirmación en B) se puede construir una tabla de valores que permita verificar si $\frac{g(x)}{x}$ es un valor constante.

x	$g(x) = \frac{x}{2} + 1$	$\frac{g(x)}{x}$
1	$g(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
2	$g(2) = \frac{2}{2} + 1 = 2$	$\frac{2}{2} = 1$
3	$g(3) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

Por lo tanto, $\frac{g(x)}{x}$ no es constante, pues $\frac{5}{6} \neq 1 \neq \frac{3}{2}$, lo que implica que la afirmación en B) es falsa.

Para determinar la veracidad de C) se tiene que la pendiente de la recta que representa a f es $\frac{3}{4}$ y la pendiente de la recta que representa a g es $\frac{1}{2}$, luego estas pendientes no son iguales, por lo que la afirmación en C) es falsa.

En D), se debe verificar que $g(2x) = 2g(x)$, para ello se tiene que $g(2x) = \frac{2x}{2} + 1 = x + 1$ y $2g(x) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = x + 2$, por lo que $g(2x) \neq 2g(x)$, luego la relación en D) es falsa.

En E), se deben valorar las funciones g y h en 0, para verificar que $g(0) = \frac{1}{5}h(0)$. Así, $g(0) = \frac{0}{2} + 1 = 1$ y $\frac{1}{5}h(0) = \frac{1}{5}\left(-\frac{5}{6} \cdot 0 + 5\right) = 1$, de donde $g(0) = \frac{1}{5}h(0)$ siendo la igualdad planteada en esta opción verdadera y por lo tanto, la clave del ítem.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función lineal y afín.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 30

Si f y g son funciones, ambas con dominio el conjunto de los números reales, definidas por $f(x) = x - 3$ y $g(x + 2) = 3x + 10$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $(g \circ f)(x)$?

- A) $3x + 7$
- B) $3x - 5$
- C) $3x + 5$
- D) $3x - 1$
- E) $3x + 6$

RESOLUCIÓN

Para determinar la composición $(g \circ f)(x)$ se puede encontrar $g(x)$ a partir de $g(x + 2)$.

Recuerde que:

La gráfica de la función $p(x) = f(x - n)$ corresponde a la gráfica de la **función $f(x)$ trasladada n unidades horizontalmente hacia la derecha.**

Para determinar $g(x)$ se considera que $m(x) = g(x + 2) = 3x + 10$, luego si se traslada 2 unidades horizontalmente hacia la derecha la gráfica de la función m se obtiene una nueva gráfica cuya función es $g(x)$ tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}m(x - 2) &= g(x + 2 - 2) = 3(x - 2) + 10 \\g(x) &= 3x - 6 + 10 \\g(x) &= 3x + 4\end{aligned}$$

Ahora, al realizar la composición se obtiene

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\&= 3f(x) + 4 \\&= 3(x - 3) + 4 \\&= 3x - 9 + 4 \\&= 3x - 5\end{aligned}$$

De lo anterior, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones.

Contenido: Composición de funciones.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 31

Sea la función f definida por $f(x) = \sqrt{3x + k}$, cuyo dominio es el intervalo $\left[\frac{-k}{3}, \infty \right]$.

Si la pre-imagen de 5 es 3, ¿cuál es el valor de k ?

- A) -14
- B) -6
- C) 10
- D) 4
- E) 16

RESOLUCIÓN

Para determinar el valor de k en la función,

Recuerde que:

Sea f una función y q perteneciente al recorrido de f . Si p pertenece al dominio de f y $f(p) = q$, entonces se dice que p es **pre-imagen** de q .

En la función dada en el enunciado, $f(x) = \sqrt{3x + k}$, para $x = 3$, $f(x) = 5$, luego se puede proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(3) &= 5 \\ \sqrt{3 \cdot 3 + k} &= 5 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \text{Evaluando en } f(x).$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + k} &= 5 \\ 9 + k &= 25 \\ k &= 16 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad y considerando que si } x \geq 0, \text{ entonces } (\sqrt{x})^2 = x. \\ &\text{Sumando } -9 \text{ en ambos lados de la igualdad.} \end{aligned}$$

Este valor se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Utilizar las funciones exponenciales, logarítmica y raíz cuadrada como modelos de situaciones o fenómenos en contextos significativos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función raíz cuadrada.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 32

La parábola que representa la gráfica de una función cuadrática, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, intersecta al eje de las ordenadas en el punto A(0, 2) y tiene su vértice en el punto B(2, -2). ¿Cuál de las siguientes funciones, con dominio el conjunto de los números reales, está asociada a esta parábola?

- A) $g(x) = x^2 - 4x + 2$
- B) $h(x) = x^2 + 4x + 2$
- C) $p(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$
- D) $m(x) = x^2 + 4x + 3$
- E) No se puede determinar.

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las funciones que están en las opciones corresponde a la parábola que intersecta al eje de las ordenadas en el punto A(0, 2) y tiene su vértice en el punto B(2, -2),

Recuerde que:

Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, se tiene que:

- La **parábola** asociada a f intersecta al eje de las ordenadas en $(0, c)$.
- El **vértice de la parábola** asociada a f es el punto $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Por lo anterior, como $(0, 2)$ es el punto de intersección con el eje de las ordenadas se descarta la opción D), ya que $c = 2$, por lo que la función es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + 2$.

Ahora, como el vértice de la parábola es $(2, -2)$, se tiene que $\frac{-b}{2a} = 2$, de donde se obtiene que $4a + b = 0$. Ahora al reemplazar el punto $(2, -2)$ en una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + 2$, se tiene que $-2 = 2^2a + 2b + 2$, llegando a que $4a + 2b = -4$.

Así, tomando ambas ecuaciones se forma el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = -4 \end{array}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones lineales se obtiene que $a = 1$ y $b = -4$.

Luego, la función que corresponde a la parábola que cumple las condiciones del enunciado es $g(x) = x^2 - 4x + 2$, que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

Contenido: Función cuadrática.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 33

Sean las funciones f y g , ambas con dominio el conjunto de los números reales, definidas por $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = (x - 3)^2$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) Las gráficas de f y g se intersectan en el punto $(1, 4)$.
 - II) Si $x = 5$, entonces $f(x) - g(x) = 24$.
 - III) Las pre-imágenes del 7 según la función f son -2 y 2 .
- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe determinar la veracidad de las afirmaciones en I), en II) y en III).

Para ver el valor de verdad de la afirmación en I), se debe comprobar que el punto $(x, y) = (1, 4)$ pertenece a las gráficas de las dos funciones dadas en el enunciado, y para ello basta comprobar que $f(1) = g(1) = 4$.

Ahora, como $f(1) = 1^2 + 3 = 4$ y $g(1) = (1 - 3)^2 = 4$, se tiene que el punto $(1, 4)$ es un punto de intersección de ambas gráficas, siendo la afirmación en I) verdadera.

Ahora, en II) se debe corroborar que si $x = 5$, entonces $f(x) - g(x) = 24$, para ello se valora $x = 5$ en ambas funciones y luego se restan ambos valores, tal como se muestra a continuación:

$$f(5) = 5^2 + 3 = 25 + 3 = 28$$

$$g(5) = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$$

$$f(5) - g(5) = 28 - 4 = 24$$

Por lo que la afirmación en II), también es verdadera.

Por último, para determinar si la afirmación en III) es verdadera,

Recuerde que:

Sea f una función y q perteneciente al recorrido de f . Si p pertenece al dominio de f y $f(p) = q$, entonces se dice que p es **pre-imagen** de q .

Luego, se debe encontrar un x perteneciente al dominio de f tal que $f(x) = 7$, por lo que se tiene lo siguiente:

The diagram illustrates the steps to solve the equation $7 = x^2 + 3$:

Starting with $7 = x^2 + 3$, an orange bracket indicates summing -7 on both sides, leading to $0 = x^2 - 4$. Another orange bracket indicates applying the difference of squares formula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, leading to $0 = (x - 2)(x + 2)$.

From $0 = (x - 2)(x + 2)$, two blue arrows point down to the solutions $x - 2 = 0$ and $x + 2 = 0$, which are then solved to find $x_1 = 2$ and $x_2 = -2$.

Sumando -7 en ambos lados de la igualdad.

Aplicando $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Así, la afirmación en III) es verdadera.

Como las afirmaciones en I), en II) y en III) son verdaderas, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

Contenido: Función cuadrática.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 34

Sea f una función, con dominio el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = mx^n$, con m un número real distinto de cero y n un número entero positivo, tal que $0 < n \leq 3$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) Para cualquier m y n , las gráficas de las funciones tienen un eje de simetría.
- B) Si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$, para todo n y m .
- C) La función f no puede ser decreciente.
- D) Si para $n = 1$ se tiene que f se denota por g , para $n = 2$ se tiene que f se denota por h y para $n = 3$ se tiene f se denota por t , entonces hay al menos un punto donde se intersectan las gráficas de g , h y t .
- E) Para $m < 0$ y para n un número par, el recorrido de f es el conjunto de los números reales positivos.

RESOLUCIÓN

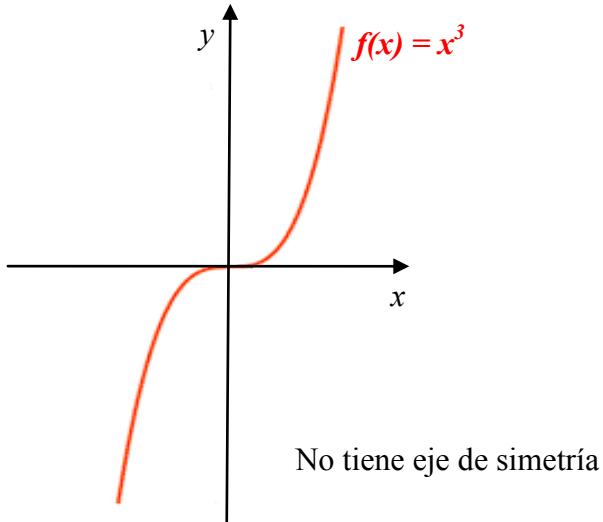
Para resolver el ítem se debe analizar cada una de las afirmaciones dadas en las opciones y determinar cuál de ellas es la verdadera.

Para analizar la afirmación dada en A),

Recuerde que:

El **eje de simetría** de una figura es una línea recta que la divide en dos figuras simétricas.

Para $m = 1$ y para $n = 3$, se tiene la función $f(x) = x^3$, la cual no tiene eje de simetría, si no que centro de simetría, que es el origen del plano cartesiano, como se muestra a continuación:



Por lo tanto, la afirmación en A) es falsa.

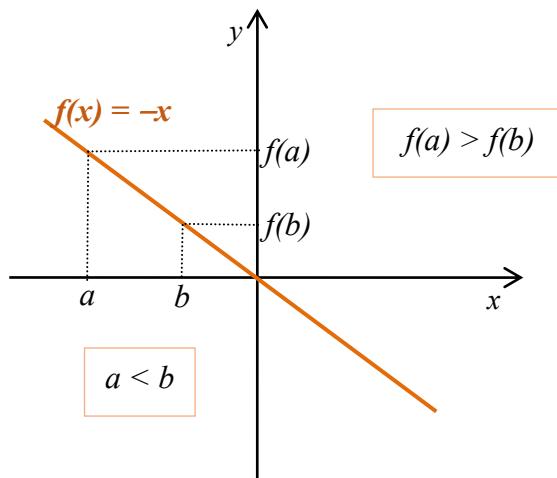
En B) se afirma que si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$, para todo n y m , esto es falso, pues si $n = 2$ y $m = 2$, se tiene la función $f(x) = 2x^2$, donde $f(2) = 8$ y $f(-2) = 8$, pero $2 \neq -2$.

Para analizar la afirmación dada en C),

Recuerde que:

Una **función f es decreciente** si, para todo p y q pertenecientes al dominio de f , con $q < p$, se tiene que $f(q) \geq f(p)$.

Así, si $m = -1$ y $n = 1$, se tiene la función $f(x) = -x$, la cual es decreciente, como se observa en la siguiente gráfica:



Por lo anterior, la afirmación en C) es falsa.

Para determinar si la afirmación en D) es verdadera, se puede encontrar una expresión para las funciones g , h y t , cuando n toma los valores 1, 2 y 3, respectivamente. Es así como,

$$\text{Para } n = 1 \rightarrow g(x) = mx$$

$$\text{Para } n = 2 \rightarrow h(x) = mx^2$$

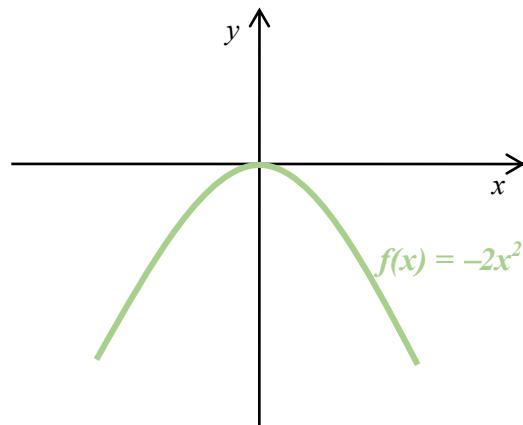
$$\text{Para } n = 3 \rightarrow t(x) = mx^3$$

Ahora bien, se debe determinar si las tres funciones, g , h y t , se intersectan en algún punto, para ello, se puede construir la siguiente tabla:

x	$g(x)$	$h(x)$	$t(x)$
-3	-3m	9m	-27m
-2	-2m	4m	-8m
-1	-m	m	-m
0	0	0	0
1	m	m	m
2	2m	4m	8m
3	3m	9m	27m
4	4m	16m	64m

De la tabla precedente se puede observar que los puntos de intersección de las tres funciones son el punto $(0, 0)$ y el punto $(1, m)$, por lo tanto, la afirmación en D) es verdadera.

Por último, la afirmación de la opción E) es falsa, ya que, como $m < 0$ y n es un número par, se puede considerar la función $f(x) = -2x^2$, cuyo recorrido es el conjunto de los números reales negativos y el cero, como se muestra en la siguiente figura:



FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

Contenido: Función potencia.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: D

PREGUNTA 35

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) La función f definida por $f(x) = x^2$, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, es biyectiva.
- II) Si las funciones f y g son inyectivas, ambas con dominio el conjunto de los números reales, entonces $f \circ g$ es inyectiva.
- III) Si $h: S \rightarrow S$ es una función sobreyectiva, entonces h es inyectiva.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y III
- E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

Para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) se deben aplicar los conceptos de función inyectiva, función epiyectiva y función biyectiva.

Recuerde que:

- Una **función f** es **inyectiva** cuando a elementos diferentes del dominio le corresponden elementos diferentes del codominio (conjunto de llegada). O dicho de otra manera cuando a cada elemento del dominio de f le corresponde un único elemento en el recorrido de f , es decir, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.
- Una **función f** es **sobreyectiva (epiyectiva)** cuando cualquier elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio de la función. O dicho de otra manera cuando el recorrido de f y el codominio (conjunto de llegada) de f coinciden.
- Una **función f** es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva a la vez.

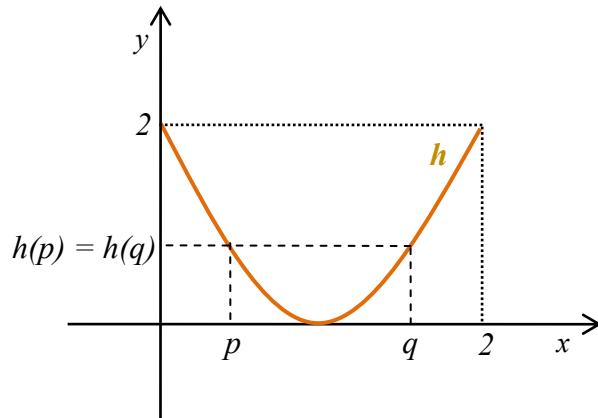
En I) se afirma que la función $f(x) = x^2$, con dominio el conjunto de los números reales, es biyectiva, lo cual es falso, pues no es inyectiva, ya que existen elementos distintos del dominio que tienen la misma imagen, por ejemplo, $f(2) = f(-2) = 4$.

Para determinar la veracidad de la afirmación en II) se puede realizar lo siguiente:

Sean x e y pertenecientes al dominio de $f \circ g$, tal que $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$. Luego, para que $f \circ g$ sea inyectiva, se debe demostrar que $x = y$.

Así, como $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$, se tiene que $f(g(x)) = f(g(y))$, pero f es inyectiva, lo que implica que $g(x) = g(y)$, ahora g también es inyectiva, por lo que $x = y$, luego la afirmación en II) es verdadera.

La afirmación dada en III) es falsa, pues si h es una función sobreyectiva no necesariamente es inyectiva, por ejemplo, si $h: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ es una función cuadrática definida por $h(x) = 2x^2 - 4x + 2$, cuyo gráfico se representa a continuación, se tiene que es una función sobreyectiva pero no inyectiva, ya que a elementos distintos del dominio le corresponden el mismo elemento en el codominio.



Por el análisis anterior, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebras

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.

Contenido: Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 36

Se lanza un objeto hacia arriba y su altura, en metros, se modela mediante la función $f(t) = -t^2 + bt + c$, donde t es el tiempo transcurrido desde que es lanzado, en segundos, y $f(t)$ su altura. Se puede determinar la altura máxima alcanzada por el objeto, si se sabe que:

- (1) El objeto es lanzado desde 10 metros de altura con respecto al suelo.
 - (2) Toca el suelo por primera vez a los 10 segundos.
-
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Este ítem requiere del análisis del enunciado y de las informaciones dadas en (1) y en (2), para determinar si es posible calcular la altura máxima alcanzada por el objeto.

Se tiene la función cuadrática $f(t) = -t^2 + bt + c$, que modela la altura que alcanza un objeto, donde la altura máxima corresponde a la ordenada del vértice de la parábola asociada a esa función cuadrática.

Recuerde que:

Las coordenadas del **vértice de la parábola** asociada a la gráfica de la función

$$f(x) = px^2 + qx + r, \text{ en } x, \text{ son } \left(-\frac{q}{2p}, f\left(-\frac{q}{2p}\right)\right).$$

Así, en la función $f(t) = -t^2 + bt + c$, se tiene que $p = -1$, $q = b$ y $r = c$, por lo tanto, el vértice de la parábola está dado por $\left(\frac{b}{2}, f\left(\frac{b}{2}\right)\right)$.

Como se debe encontrar el valor de la ordenada del vértice, es decir $f\left(\frac{b}{2}\right)$, se obtiene lo siguiente:

$$f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{b}{2}\right) + c$$

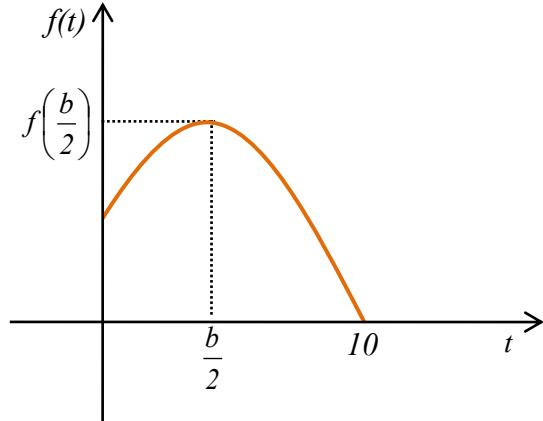
Así, de la expresión anterior se debe conocer el valor de b y de c para determinar la altura máxima del objeto.

Recuerde que:

La **parábola** asociada a la gráfica de la función $f(x) = px^2 + qx + r$, en x , intersecta al eje y en el punto $(0, r)$.

Ahora, en la afirmación (1) se dice que el objeto es lanzado desde 10 metros de altura, esto quiere decir que la altura del objeto en el tiempo $t = 0$ es de 10 metros, es decir, $c = 10$. Luego, con la información entregada en (1) no se puede determinar la altura máxima que alcanza el objeto, ya que no se conoce el valor de b .

Por otra parte, si se representa la situación del enunciado y la información entregada en (2) en una gráfica, se tiene lo siguiente:



Por lo que, si el objeto toca por primera vez el suelo a los 10 segundos, significa que la altura de este objeto en $t = 10$ es cero, es decir, $f(10) = 0$. Luego, al valorar $t = 10$ en la función se obtiene la ecuación $-10^2 + 10b + c = 0$, que tiene dos incógnitas, la cual entrega infinitas soluciones para b y para c , por lo que no se puede determinar la altura máxima alcanzada por el objeto considerando solo la información entregada en (2).

Ahora, si se consideran ambas afirmaciones se tiene que $c = 10$ y que $10b + c = 100$, de donde se puede obtener el valor de b , y por lo tanto, se puede determinar la altura máxima alcanzada por el objeto, siendo C) la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

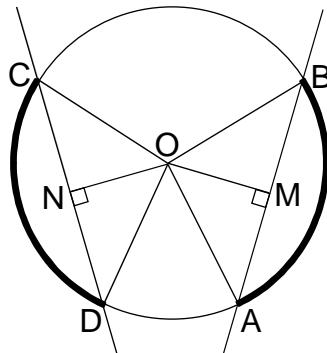
Contenido: Función cuadrática.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 37

En la circunferencia de centro O de la figura adjunta, los puntos A, B, C y D pertenecen a ella, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y CD, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes relaciones puede ser **FALSA**?



- A) $\overline{OC} \cong \overline{OB}$
- B) $\overline{CN} \cong \overline{ND}$
- C) arco CD \cong arco AB
- D) $\overline{ON} \cong \overline{OM}$
- E) $\overline{BM} \cong \overline{DM}$

RESOLUCIÓN

Para encontrar la solución a la pregunta se debe determinar cuál de las relaciones dadas en las opciones puede ser falsa.

En efecto, en la opción A) se indica que $\overline{OC} \cong \overline{OB}$, relación que es verdadera, pues las medidas de ambos segmentos son radios de la circunferencia.

Ahora, la relación dada en B) también es verdadera, pues \overline{CN} y \overline{ND} son congruentes por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Recuerde el **criterio lado-ángulo-lado (LAL)** de congruencia de triángulos:

Si dos triángulos tienen dos de sus lados respectivos congruentes y el ángulo comprendido entre ellos de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

En efecto, $\triangle CON \cong \triangle DON$, por el criterio de congruencia LAL, esto es,



Para determinar si la relación dada en C) puede ser falsa se procede de la siguiente manera:

Recuerde el **criterio lado-lado-lado (LLL) de congruencia de triángulos:**

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivos congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Del enunciado se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $OC = OD = OB = OA$ por ser radios de la circunferencia, lo que implica que $\triangle AOB \cong \triangle DOC$, por el criterio de congruencia LLL, de donde se concluye que $\angle COD \cong \angle BOA$, luego arco $CD \cong$ arco AB por subtender ángulos del centro de igual medida, siendo de esta forma la relación en C) verdadera.

Con respecto a la relación dada en D), se tiene que también es verdadera, pues como $\triangle AOB \cong \triangle DOC$, se concluye que $\overline{ON} \cong \overline{OM}$, por ser alturas correspondientes de triángulos congruentes.

Por último, para que la relación dada en E), es decir, $\overline{BM} \cong \overline{OM}$, sea verdadera se tiene que cumplir que $\triangle OMB$ sea rectángulo isósceles, pero esto ocurre solo en un caso, donde se cumple que $\angle OBM = \angle OAM = 45^\circ$. En conclusión, la relación dada en E) puede ser falsa y por lo tanto, es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.

Contenido: Congruencia de figuras planas.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 38

Consideré los vectores $\vec{p}(6, -4)$, $\vec{q}(2, 9)$, $\vec{r}(5, -2)$ y $\vec{s}(3, 7)$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El vector $(\vec{q} - \vec{r})$ se encuentra en el segundo cuadrante.
 - II) El vector $(\vec{s} - 2\vec{p})$ se encuentra en el tercer cuadrante.
 - III) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r} + \vec{s}$
-
- A) Solo I
 - B) Solo I y II
 - C) Solo I y III
 - D) Solo II y III
 - E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para determinar si las afirmaciones en I), en II) y en III) son verdaderas hay que realizar las operaciones de vectores que aparecen en ellas, las cuales se pueden verificar tanto algebraicamente como geométricamente.

Recuerde que:

Sean \vec{u} y \vec{w} dos **vectores** con el punto inicial en el origen del sistema de coordenadas cartesiano, cuyos extremos son (a, c) y (b, d) , respectivamente, se tiene:

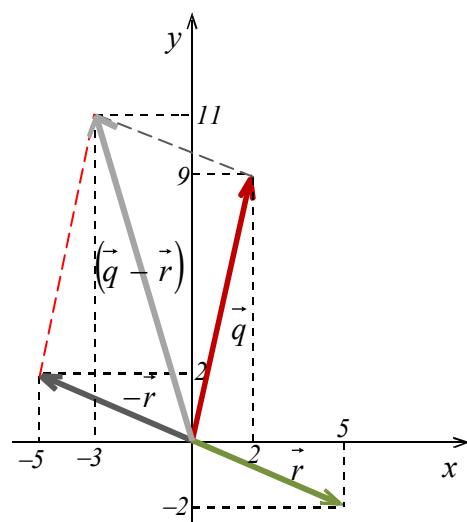
- $\vec{u} + \vec{w} = (a, c) + (b, d) = (a + b, c + d)$
- $\vec{u} - \vec{w} = (a, c) + (-b, -d) = (a - b, c - d)$
- $k\vec{u} = k(a, c) = (ka, kc)$, con k un número real distinto de cero.

Ahora, para determinar si la afirmación en I) es verdadera, se tiene lo siguiente:

Algebraicamente

$$\begin{aligned}\vec{q} - \vec{r} &= (2, 9) - (5, -2) \\ &= (2 - 5, 9 - (-2)) \\ &= (-3, 11)\end{aligned}$$

Gráficamente



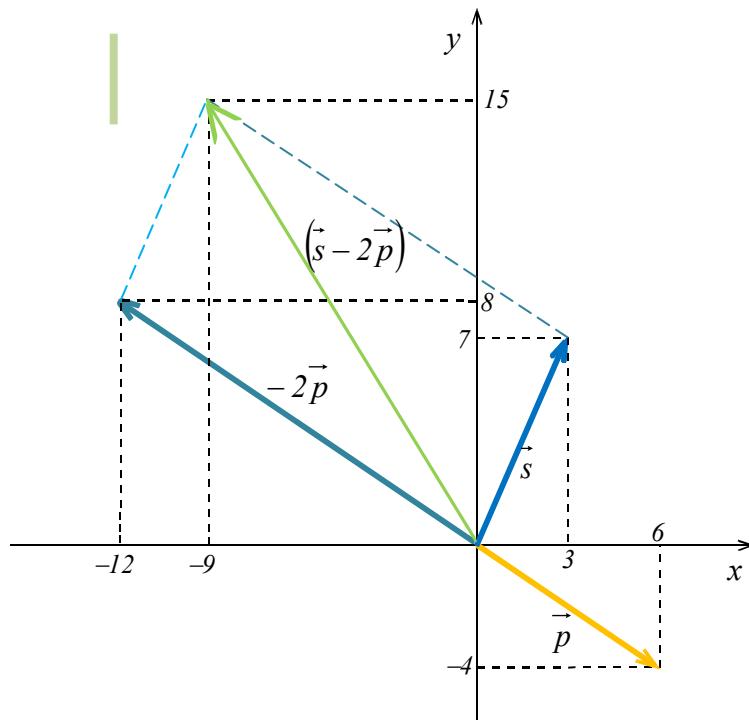
Así, se verifica que el vector $(\vec{q} - \vec{r})$ está en el segundo cuadrante, por lo tanto, la afirmación en I) es verdadera.

De igual manera, para verificar la veracidad de la información en II), se tiene:

Algebraicamente

$$\begin{aligned} (\vec{s} - 2\vec{p}) &= (3, 7) - 2(6, -4) \\ &= (3, 7) - (12, -8) \\ &= (-9, 15) \end{aligned}$$

Gráficamente



Luego, el vector $(\vec{s} - 2\vec{p})$ pertenece al segundo cuadrante, por lo tanto, la afirmación en II) es falsa.

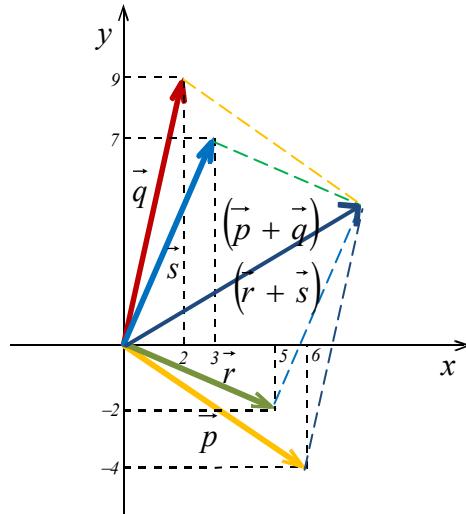
Por último, en III) se debe comprobar que $(\vec{p} + \vec{q})$ es igual a $(\vec{r} + \vec{s})$, para ello se realiza lo siguiente:

Algebraicamente

$$\begin{aligned} \vec{p} + \vec{q} &= (6, -4) + (2, 9) = (8, 5) \\ \vec{r} + \vec{s} &= (5, -2) + (3, 7) = (8, 5) \end{aligned} \quad \boxed{\quad}$$

$$(\vec{p} + \vec{q}) = (\vec{r} + \vec{s})$$

Gráficamente



Por lo anterior, la relación en III) es verdadera.

Como solo las afirmaciones en I) y en III) son verdaderas, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

Contenido: Vectores en el plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 39

Si al triángulo de vértices $M(1, 2)$, $N(2, 5)$ y $P(3, 3)$ se le aplica una rotación con centro en el origen del sistema de ejes coordenados, se obtiene un triángulo de tal forma que el vértice homólogo a M es $M'(-2, 1)$. ¿Cuáles de los siguientes puntos corresponden a los otros dos vértices del triángulo homólogo?

- A) $(-1, 4)$ y $(0, 2)$
- B) $(5, -2)$ y $(3, -3)$
- C) $(-1, -2)$ y $(-3, -1)$
- D) $(-5, 2)$ y $(-3, 3)$
- E) $(-2, -5)$ y $(-3, -3)$

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe rotar el triángulo MNP en el sistema de ejes coordinados, según los datos entregados en el enunciado, para ello,

Recuerde que:

Una **rotación** es una transformación isométrica donde cada punto de una figura se gira en torno a un punto fijo, llamado centro de rotación, en cierto ángulo y en un sentido horario o antihorario.

Para determinar las coordenadas de los otros dos vértices (N' y P') del triángulo homólogo del ΔMNP , se debe encontrar el ángulo de rotación.

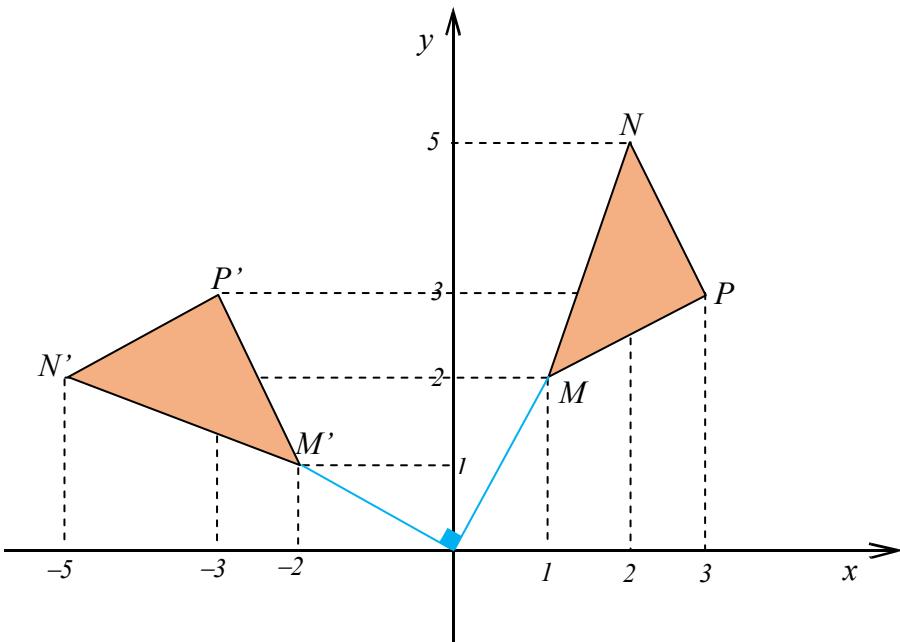
Ahora, en el enunciado se señala que, luego de aplicada una rotación con centro en el origen del sistema de ejes coordenados, el vértice homólogo de $M(1, 2)$ es $M'(-2, 1)$.

Recuerde que:

Si a un punto de coordenadas (x, y) se le aplica una **rotación** con centro en el origen del plano cartesiano en 90° en sentido antihorario, se obtiene el punto de coordenadas $(-y, x)$.

Como los puntos M y M' cumplen la relación anterior, se tiene que el ángulo de rotación puede ser de 90° en sentido antihorario.

Ahora, la imagen de $N(2, 5)$ según esta rotación es $N'(-5, 2)$ y la imagen de $P(3, 3)$ es $P'(-3, 3)$, lo cual se puede visualizar en la siguiente figura:



De esta forma, se tiene que la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas y utilizar la composición de funciones para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.

Contenido: Rotación de figuras en el plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 40

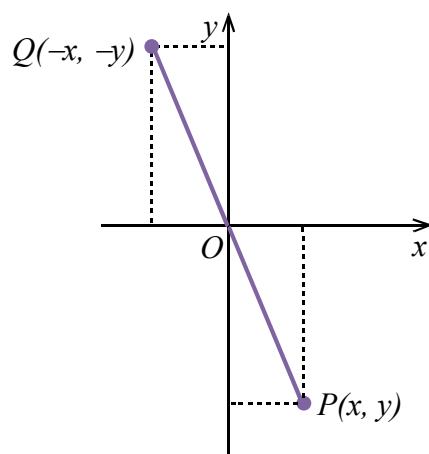
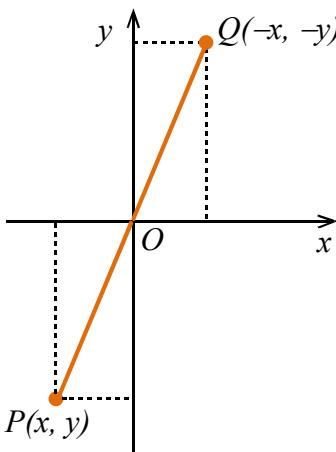
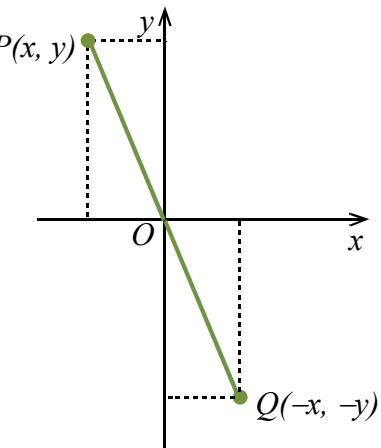
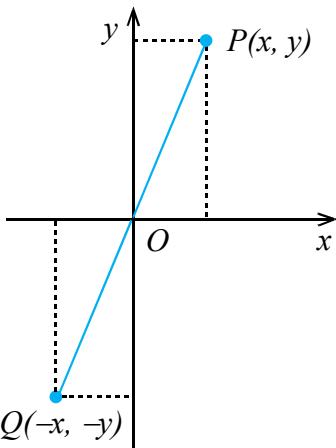
Consideré los puntos $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$ y $O(0, 0)$, con x e y números enteros. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I) La distancia entre P y Q es 0.
 - II) La distancia entre P y O es la misma que la distancia entre Q y O .
 - III) Los puntos P , Q y O son colineales.
-
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) Solo I y III
 - E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

Para encontrar la solución a la pregunta, se debe verificar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III).

Como no se conocen las coordenadas de los puntos P y Q , solo se sabe que son números enteros y que las coordenadas de Q son los inversos aditivos de las coordenadas de P , puede ocurrir, por ejemplo, los siguientes casos:



En I) se afirma que la distancia entre P y Q es 0, dicha información es falsa, pues en los ejemplos anteriores los puntos P y Q pertenecen a cuadrantes distintos, por lo tanto, su distancia no es 0.

Para determinar si la afirmación en II) es verdadera,

Recuerde que:

Si dos **puntos** (a, b) y (c, d) son **simétricos** respecto al origen del plano cartesiano, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

- $(c, d) = (-a, -b)$
- Las distancias de estos puntos al origen del plano cartesiano son iguales.
- Estos puntos son colineales con el origen del plano cartesiano.

Dado que $(x, y) = -(-x, -y)$, la distancia entre P y O es igual a la distancia entre Q y O, luego la afirmación en II) es siempre verdadera.

Por último, en III) se afirma que los puntos P, Q y O son colineales, situación que es verdadera pues P y Q son simétricos respecto al origen O.

Otra forma de verificar la afirmación en III), de manera algebraica, es determinando la distancia entre los puntos P y Q, P y O, Q y O y luego considerar la pendiente que contiene a esos puntos.

Como solo las afirmaciones en II) y en III) son verdaderas, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría.

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica.

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

Contenido: Representación de puntos en el plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 41

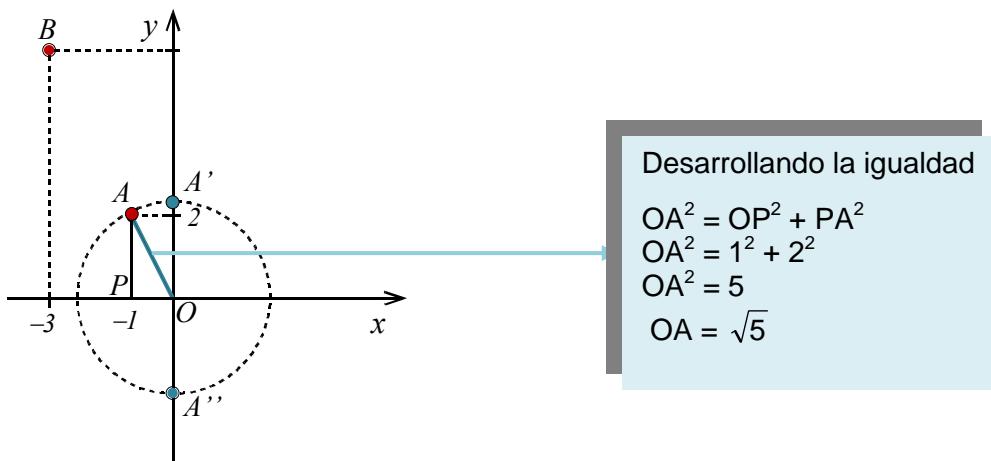
Considere el triángulo ABC, donde dos de sus vértices son A(-1, 2) y B(-3, 6). Si a este triángulo se le aplica una traslación de modo que la imagen del punto A pertenece al eje de las ordenadas y está a la misma distancia del origen que se encuentra A, ¿cuál de las siguientes coordenadas podrían corresponder a la imagen del punto B?

- A) $(1, \sqrt{5} - 2)$
- B) $(-2, 4 + \sqrt{5})$
- C) $(\sqrt{5} - 2, 4)$
- D) $(\sqrt{5} + 1, -2)$
- E) $(-2 - \sqrt{5}, 4)$

RESOLUCIÓN

Una forma de responder el ítem es ubicar los puntos A y B del $\triangle ABC$ en el plano cartesiano, con el fin de visualizar las posibles ubicaciones de la imagen del punto A, luego de aplicar una traslación que cumpla las condiciones dadas en el enunciado y así, determinar sus coordenadas, para luego encontrar el vector de traslación que se aplica a B y determinar la imagen de este punto.

De esta manera, como en el enunciado se señala que la imagen del punto A está en el eje de las ordenadas y a la misma distancia del origen que la distancia que está A del origen, entonces hay 2 posibles puntos que pueden ser imágenes de A y que se encuentran en la intersección del eje y con la circunferencia de centro O y radio $OA = \sqrt{5}$ unidades, como se muestra en la siguiente figura, donde A' y A'' son dichas posibles imágenes:



De la figura anterior se obtiene que las coordenadas de las imágenes de A pueden ser los puntos $A'(0, \sqrt{5})$ o $A''(0, -\sqrt{5})$. De esta manera, con las coordenadas de estos puntos se puede determinar el vector de traslación en cada caso.

Recuerde que:

La imagen de un **punto** (p, q) **trasladado** por un vector (v, w) es el punto $(p + v, q + w)$.

Ahora, si se considera (x, y) un vector de traslación de A, se tienen dos opciones:

Se aplica el vector traslación (x, y) al punto $(-1, 2)$ cuya imagen es $(0, \sqrt{5})$.	Se aplica el vector traslación (x, y) al punto $(-1, 2)$ cuya imagen es $(0, -\sqrt{5})$.
$(-1, 2) + (x, y) = (0, \sqrt{5})$ $(x, y) = (0, \sqrt{5}) - (-1, 2)$ $(x, y) = (1, \sqrt{5} - 2)$	$(-1, 2) + (x, y) = (0, -\sqrt{5})$ $(x, y) = (0, -\sqrt{5}) - (-1, 2)$ $(x, y) = (1, -\sqrt{5} - 2)$

Por último, al trasladar el punto B según el vector $(1, \sqrt{5} - 2)$ se llega a que la imagen de él es $(-3, 6) + (1, \sqrt{5} - 2) = (-2, 4 + \sqrt{5})$, luego la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas y utilizar la composición de funciones para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.

Contenido: Traslación de figuras en el plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 42

Un terreno cuadrado de área 160.000 m^2 está representado en un mapa mediante un cuadrado de área 1 cm^2 , ¿cuál es la escala de este mapa?

- A) 1 : 4.000
- B) 1 : 160.000
- C) 1 : 400
- D) 1 : 40.000
- E) 1 : 16.000.000

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a este problema se debe determinar la razón de semejanza entre el terreno cuadrado y el cuadrado representado en el mapa.

Recuerde que:

La **escala de un mapa** corresponde a la razón que existe entre una distancia sobre el mapa y su distancia correspondiente en una superficie terrestre.

Ahora, se debe expresar las medidas de los lados de los cuadrados del terreno y del mapa, en una misma unidad, para lo cual se designa por t al lado del terreno cuadrado y por s al lado del cuadrado en el mapa.

Recuerde que:

Para **transformar una medida** de K metros a X centímetros, se debe considerar la

$$\text{siguiente proporción } \frac{K}{1} = \frac{X}{100}, \text{ luego } X = 100 \cdot K.$$

Así, del enunciado se tiene que el terreno cuadrado tiene un área de 160.000 m^2 , por lo tanto, su lado mide $t = \sqrt{160.000} = 400 \text{ m}$, luego si X es la medida del lado del terreno, en cm, se tiene:

$$\frac{400}{1} = \frac{X}{100} \quad \longrightarrow \quad X = 40.000 \text{ cm}$$

Por otra parte, el cuadrado en el mapa tiene un área de 1 cm^2 , lo que implica que su lado mide $s = 1 \text{ cm}$.

De esta manera, la escala solicitada es $s : t = 1 : 40.000$, la cual se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

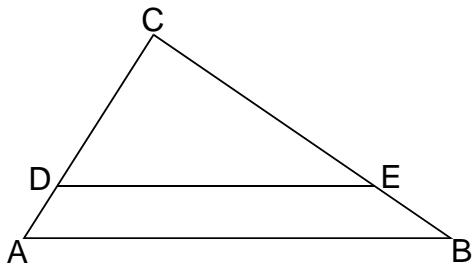
Contenido: Semejanza de figuras planas.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 43

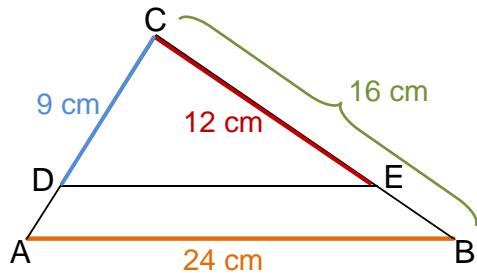
En el triángulo ABC de la figura adjunta, D pertenece a \overline{AC} , E pertenece a \overline{BC} y $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Si $AB = 24$ cm, $BC = 16$ cm, $CE = 12$ cm y $CD = 9$ cm, entonces el perímetro del trapecio ABED es



- A) 50 cm
- B) 47 cm
- C) 49 cm
- D) 45 cm
- E) 103 cm

RESOLUCIÓN

Para determinar el perímetro del trapecio ABED se deben determinar las medidas de sus lados. En la siguiente figura se indican las medidas dadas en el enunciado:



De la figura se tiene que: $CE + EB = CB$

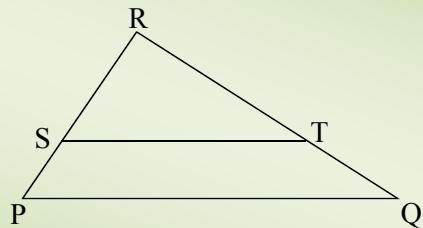
$$12 + EB = 16$$

$$EB = 4 \text{ cm}$$

Ahora, para determinar la medida de los lados \overline{DE} y \overline{AD} se puede aplicar el teorema de Thales.

Recuerde que:

Al aplicar el **teorema de Thales** al triángulo de la figura, donde $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$, se obtiene la relación $\frac{RS}{RP} = \frac{RT}{RQ} = \frac{ST}{PQ}$.



Así, de la figura del ítem se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{DE}{AB} &= \frac{CE}{CB} \\ \frac{DE}{24} &= \frac{12}{16} \\ DE &= \frac{12 \cdot 24}{16} \\ DE &= 18 \text{ cm}\end{aligned}$$

}

Reemplazando las medidas respectivas.

Multiplicando por 24 en ambos lados de la igualdad.

y

$$\begin{aligned}
 \frac{CE}{CB} &= \frac{CD}{CA} \\
 \frac{12}{16} &= \frac{9}{9 + AD} \\
 12(9 + AD) &= 16 \cdot 9 \\
 108 + 12 \cdot AD &= 144 \\
 12 \cdot AD &= 36 \\
 AD &= 3 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Reemplazando las medidas respectivas.
 Multiplicando por $16(9 + AD)$ en ambos lados de la igualdad.
 Aplicando $a(a + b) = ab + ac$ y multiplicando.
 Restando 108 en ambos lados de la igualdad.
 Dividiendo por 12 en ambos lados de la igualdad.

Luego, el perímetro del trapecio ABED es $AB + EB + DE + AD = 24 + 4 + 18 + 3 = 49$ cm.

Por lo anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

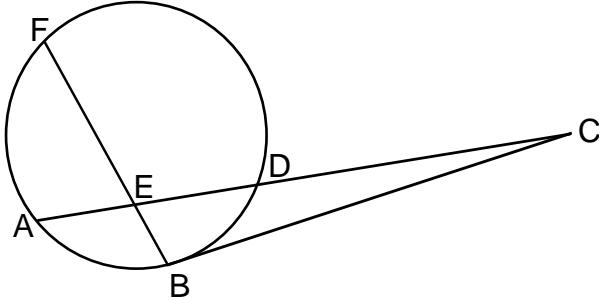
Contenido: Teorema de Thales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 44

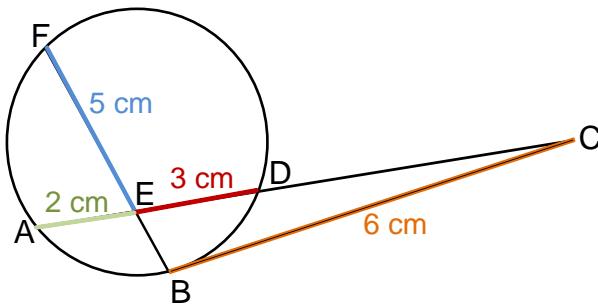
En la circunferencia de la figura adjunta los puntos A, B, D y F pertenecen a ella, \overline{AC} y \overline{BF} se intersectan en E, el punto D está en \overline{AC} y \overline{CB} es tangente a la circunferencia en B. Si $EF = 5$ cm, $ED = 3$ cm, $AE = 2$ cm y $CB = 6$ cm, entonces $(DC + EB)$ es igual a



- A) $\frac{22}{3}$ cm
- B) $(4 + \sqrt{13})$ cm
- C) $\frac{26}{5}$ cm
- D) 9 cm
- E) $\frac{23}{2}$ cm

RESOLUCIÓN

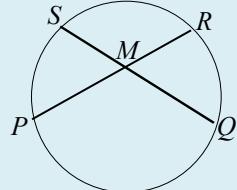
Para resolver el ítem, se representan los datos del enunciado en la siguiente figura:



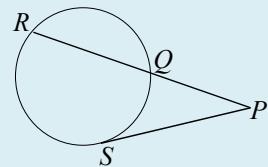
Así, para determinar la medida de los segmentos EB y DC se puede aplicar la relación entre los segmentos de las cuerdas \overline{AD} y \overline{BF} de la circunferencia y la relación entre la secante \overline{AC} y la tangente \overline{BC} a la circunferencia.

Recuerde que:

En una circunferencia donde las cuerdas \overline{SQ} y \overline{PR} se intersectan en el punto M se cumple que $SM \cdot MQ = PM \cdot MR$



En una circunferencia donde la secante \overline{PR} se intersecta con la tangente \overline{PS} en el punto P se cumple que $PS^2 = PQ \cdot PR$



De esta manera, aplicando las relaciones anteriores a la figura del ítem, se tiene que:

$$\begin{aligned} FE \cdot EB &= AE \cdot ED \\ 5 \cdot EB &= 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot EB &= 6 \\ EB &= \frac{6}{5} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= DC \cdot AC \\ 6^2 &= DC \cdot (DC + 5) \\ 36 &= DC^2 + 5 \cdot DC \\ 0 &= DC^2 + 5 \cdot DC - 36 \\ 0 &= (DC + 9) \cdot (DC - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} DC + 9 = 0 & \text{ó} & DC - 4 = 0 \\ DC = -9 & \text{ó} & DC = 4 \end{array}$$

Como un segmento no puede tener una medida negativa, $DC = 4$ cm.

Luego, $DC + EB = 4 + \frac{6}{5} = \frac{26}{5}$ cm, medida que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

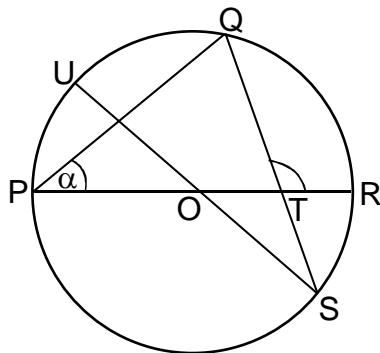
Contenido: Relaciones entre segmentos en cuerdas y secantes en una circunferencia.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 45

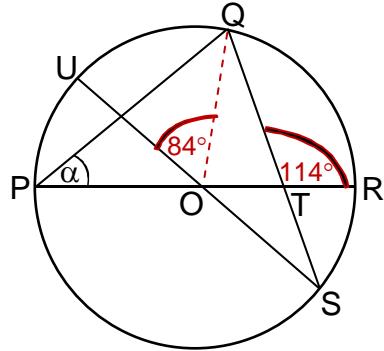
En la figura adjunta \overline{PR} y \overline{SU} son diámetros de la circunferencia que se intersectan en O, el punto Q pertenece a ella y los segmentos QS y PR se intersectan en T. Si $\angle QTR = 114^\circ$ y $\angle QOU = 84^\circ$, entonces la medida de α es



- A) 36°
- B) 42°
- C) 66°
- D) 72°
- E) 57°

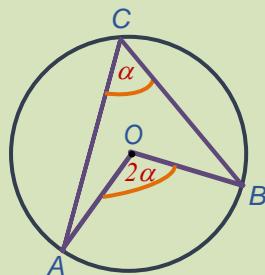
RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se ubican los datos dados en el enunciado en la figura, con el fin de visualizar los ángulos de la circunferencia que se conocen y así, relacionarlos con otros ángulos, como se muestra a continuación:



Recuerde que:

En la circunferencia de centro O , la medida del **ángulo del centro** $\angle AOB$ es igual al doble de la medida del **ángulo inscrito** $\angle ACB$ que subtienede el mismo arco.



En la figura del ítem se observa que el ángulo del centro $\angle QOU$ y el ángulo inscrito $\angle QSU$ subtienden el mismo arco QU , luego por la propiedad anterior se tiene que el $\angle QSU = \frac{84}{2} = 42^\circ$.

Ahora, en el $\triangle QOS$ los lados \overline{OQ} y \overline{OS} son radios de la circunferencia, lo que implica que este triángulo es isósceles, por lo tanto $\angle QSO = \angle SQO = 42^\circ$.

Por otro lado, se tiene que el $\angle QTR$ es un ángulo exterior del $\triangle OTQ$ y por lo tanto, se cumple que:

$$\begin{aligned}\angle QTR &= \angle TOQ + \angle TQO \\ 114^\circ &= \angle TOQ + 42^\circ \\ 72^\circ &= \angle TOQ\end{aligned}$$

Por último, de la figura se obtiene que el ángulo del centro $\angle QOR$ y el ángulo inscrito $\angle QPR$ subtienden el mismo arco RQ , lo que implica que $\alpha = \angle QPR = \frac{72}{2} = 36^\circ$, valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

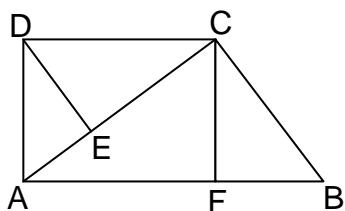
Contenido: Ángulos inscritos y del centro en una circunferencia.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 46

En la figura adjunta, ABCD es un trapecio rectángulo en A y en D, con $\angle DEA = \angle ACB = \angle CFB = 90^\circ$, E pertenece al segmento AC y F pertenece al segmento AB. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?



I) $AD \cdot CF = DE \cdot CB$

II) $DE \cdot CF = EC \cdot FB$

III) $AD^2 + AF^2 = AF \cdot AB$

A) Solo I

B) Solo II

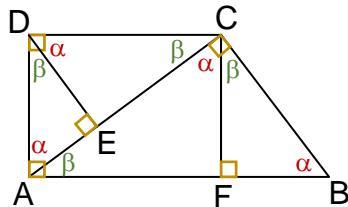
C) Solo III

D) Solo I y II

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

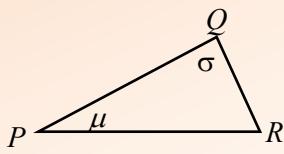
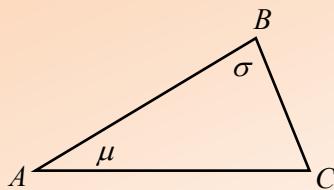
Para dar respuesta a la pregunta se analizan las relaciones dadas en I) en II) y en III) y para ello, en la siguiente figura se representan los ángulos que están mencionados en el enunciado del ítem.



Se considera que
 $\alpha + \beta = 90^\circ$, por ser
ángulos de un triángulo
rectángulo.

Recuerde que:

Sean los siguientes **triángulos semejantes**, por criterio ángulo-ángulo (AA), se cumple que $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{CB}{RQ} = k$, con k constante.

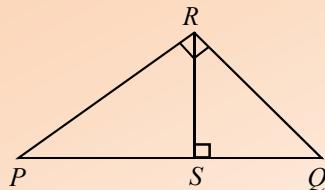


Ahora, la relación en I) es verdadera, ya que $\triangle AED \sim \triangle BFC$, por el criterio de semejanza AA y, por lo tanto, $\frac{AD}{CB} = \frac{DE}{CF}$, de donde se obtiene que $AD \cdot CF = DE \cdot CB$.

La relación en II) también es verdadera, debido a que $\triangle DEC \sim \triangle BFC$, por el criterio de semejanza AA, lo que implica $\frac{DE}{FB} = \frac{EC}{CF}$, de donde se obtiene $DE \cdot CF = EC \cdot FB$.

Por último, la relación en III) también es verdadera, la cual se puede demostrar usando los siguientes teoremas:

Recuerde que en todo triángulo rectángulo:



- ❖ **Teorema de Pitágoras:** la suma de las medidas de los catetos al cuadrado es igual a la medida de la hipotenusa al cuadrado.

$$PR^2 + RQ^2 = PQ^2$$

- ❖ **Teorema de Euclides:** la medida de un cateto al cuadrado es igual al producto entre la medida de su proyección y la medida de la hipotenusa.

$$PR^2 = PS \cdot PQ$$

Así, en el $\triangle AFC$, por el teorema de Pitágoras, se tiene que $FC^2 + AF^2 = AC^2$, pero como $FC = AD$, se llega a que $AD^2 + AF^2 = AC^2$.

Por otro lado, en el $\triangle ABC$, por el teorema de Euclides se tiene que $AC^2 = AF \cdot AB$ y al reemplazar AC^2 por la expresión encontrada anteriormente, se concluye que $AD^2 + AF^2 = AF \cdot AB$.

Como las relaciones dadas en I), en II) y en III) son verdaderas, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: Semejanza de triángulos y Teorema de Euclides.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 47

Sean R y Q rotaciones con centro en el origen del sistema de ejes coordenados y ángulos de rotación de 270° en sentido antihorario y 90° en sentido antihorario, respectivamente. Se puede determinar las coordenadas de un punto A, si se sabe que:

- (1) Al aplicar la rotación R al punto A, se obtiene el punto (2, 3).
 - (2) Al aplicar una traslación según el vector (1, -5) al punto A y al punto resultante la rotación Q, se obtiene el punto (3, -2).
- A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

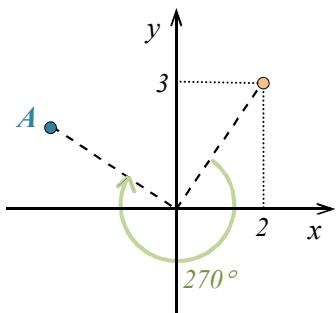
Para resolver el ítem se debe determinar si con los movimientos isométricos dados en (1) y/o en (2) se pueden determinar las coordenadas del punto A.

Recuerde que:

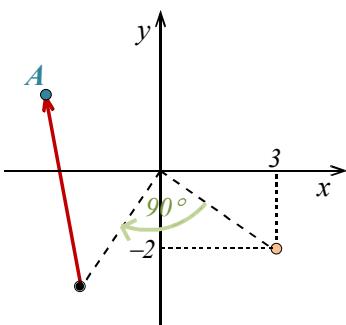
- Si a un punto de coordenadas (x, y) se le aplica una **rotación** con centro en el origen del plano cartesiano de 270° en sentido antihorario, se obtiene el punto de coordenadas $(y, -x)$.
- Si a un punto de coordenadas (x, y) se le aplica una **rotación** con centro en el origen del plano cartesiano de 90° en sentido antihorario, se obtiene el punto de coordenadas $(-y, x)$.

De (1) se tiene que **(2, 3)** son las coordenadas de la imagen del punto A al haberle aplicado la rotación R, por lo tanto, se tiene lo siguiente:

Al aplicar la rotación R al punto A(a, b) se obtiene el punto A'($b, -a$) = A'(2, 3), de donde se puede obtener el valor de a y b . Lo anterior se puede representar mediante la siguiente gráfica, donde A' se le aplica la rotación R, pero en sentido contrario.



Por otro lado, de (2) se tiene que $(3, -2)$ son las coordenadas de la imagen del punto A al haberle aplicado una traslación según el vector $(1, -5)$ seguido de la rotación Q, por lo que al aplicar a este punto la misma rotación, pero en sentido contrario, es decir, en sentido horario y el punto resultante trasladarlo según el vector $-(1, -5)$, es decir, $(-1, 5)$, se pueden determinar las coordenadas del punto A, como se observa a continuación:



Como con la información dada en (1) y con la información dada en (2), por separado, se pueden determinar las coordenadas de A, se obtiene que la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas y utilizar la composición de funciones para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.

Contenido: Transformaciones isométricas.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: D

PREGUNTA 48

Si al triángulo ABC de vértice A(0, 2), B(2, 1) y C(1, 1) se le aplica una homotecia de centro (4, 4) y razón de homotecia -2 , ¿cuál es la imagen de A?

- A) $(-8, -6)$
- B) $(12, 8)$
- C) $(8, 10)$
- D) $(-8, -4)$
- E) $(-4, 0)$

RESOLUCIÓN

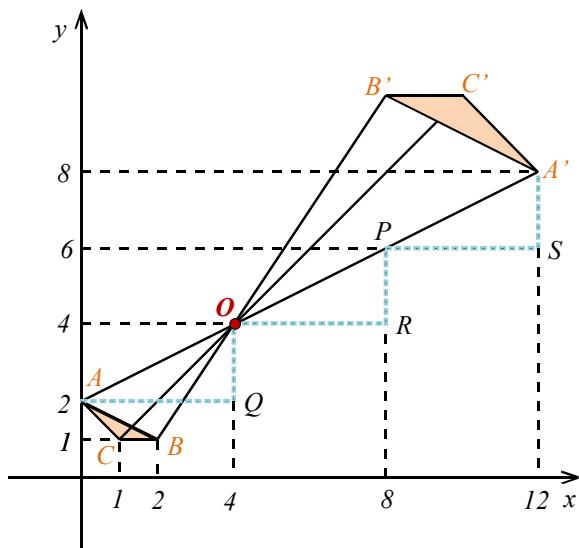
Para determinar la imagen de A, se debe aplicar al $\triangle ABC$ una homotecia de centro $(4, 4)$ y razón de homotecia -2 .

Recuerde que:

Una **homotecia** es la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a un punto en el plano llamado centro de homotecia y a una razón dada llamada razón de homotecia.

Si la razón de homotecia es negativa, entonces las figuras semejantes están a lados opuestos del centro de homotecia.

La siguiente figura muestra la homotecia dada en el enunciado aplicada al $\triangle ABC$, donde su imagen es el $\triangle A'B'C'$ y O es el centro de homotecia:



De estos triángulos homotéticos se tiene que $\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = \frac{C'O}{CO} = 2$ y además, esta razón es negativa. Así, $AO = OP = PA'$ y por lo tanto, $AQ = OR = PS = 4$ unidades y $QO = RP = SA' = 2$ unidades. Luego, las coordenadas de la imagen de A bajo esta homotecia son $A'(12, 8)$, las cuales se encuentran en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Homotecia de figuras planas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 49

¿Cuál es el radio de la circunferencia que tiene como centro el punto $(-1, 1)$ y el punto $(-5, -2)$ pertenece a ella?

- A) $3\sqrt{5}$ unidades
- B) 5 unidades
- C) 7 unidades
- D) $\sqrt{37}$ unidades
- E) $\sqrt{17}$ unidades

RESOLUCIÓN

En este ítem se pide determinar el radio de la circunferencia con centro el punto $(-1, 1)$, para ello se debe calcular la distancia que hay desde el centro de la circunferencia hasta el punto $(-5, -2)$ perteneciente a ella.

Recuerde que:

La **distancia** D entre los **puntos** $P(x, y)$ y $Q(r, s)$ está dada por $D = \sqrt{(r - x)^2 + (s - y)^2}$.

Luego, la distancia entre el centro $(-1, 1)$ y el punto $(-5, -2)$ se determina de la siguiente manera:

$$D = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (-2 - 1)^2}$$
$$D = \sqrt{(-5 + 1)^2 + (-3)^2}$$

Aplicando $-(-a) = a$

$$D = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

Aplicando $(-a)^2 = a^2$

$$D = \sqrt{16 + 9}$$

$$D = \sqrt{25}$$

$$D = 5$$

De lo anterior, el radio de la circunferencia es de 5 unidades, por lo que la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 50

Sean $A(p, q)$ y $B(s, t)$ dos puntos en el plano cartesiano, con p, q, s y t números reales y $s \neq p$. Si L es la recta que pasa por ambos puntos y m su pendiente, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

- A) $m = \frac{s-p}{t-q}$
- B) El punto $(p+s, t+q)$ pertenece a L .
- C) L intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(0, -mq + p)$.
- D) L intersecta al eje de las abscisas.
- E) Una ecuación de L está dada por $mx - y + t - ms = 0$.

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se puede determinar la ecuación de la recta L que pasa por los puntos A y B , y luego determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es siempre verdadera.

Recuerde que:

- Si la ecuación de una recta es $y = mx + n$, entonces m es su **pendiente** y n es su **coeficiente de posición**.
- La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ está dada por $\frac{d-b}{c-a}$, con $c \neq a$.
- Una forma de la **ecuación de una recta** que pasa por el punto (x_0, y_0) y cuya pendiente es m está dada por $(y - y_0) = m(x - x_0)$.

La pendiente de la recta L que pasa por los puntos $A(p, q)$ y $B(s, t)$, es $m = \frac{t-q}{s-p}$, por lo que la afirmación en A) no siempre es verdadera.

Ahora, para determinar la veracidad de la afirmación en B) se determinará la ecuación de la recta L , la cual se puede expresar de dos formas según el punto que se considere, B ó A :

$y - t = m(x - s)$	$y - q = m(x - p)$
$y = mx - ms + t$	$y = mx - mp + q$

Así, al reemplazar el punto $(p + s, t + q)$ en ambas formas de expresar la ecuación de la recta L se obtiene:

$y - t = m(x - s)$	$y - q = m(x - p)$
$(t + q) - t = m((p + s) - s)$ $t + q - t = m(p + s - s)$ $q = mp$ $\text{Luego, } m = \frac{q}{p}$	$(t + q) - q = m((p + s) - p)$ $t + q - q = m(p + s - p)$ $t = ms$ $\text{Luego, } m = \frac{t}{s}$

Por lo tanto, la pendiente en ambos casos es distinta a la pendiente de la recta L, luego la afirmación en B) no siempre es verdadera.

Del coeficiente de posición de la ecuación de la recta L se tiene que esta intersecta al eje de las ordenadas en un punto que puede ser expresado como $(0, -ms + t)$ ó $(0, -mp + q)$. Luego, el punto $(0, -mq + p)$ no siempre es igual al punto anterior, así la afirmación en C) no siempre es verdadera.

La opción D) no siempre es verdadera, ya que por ejemplo, si la pendiente de la recta L es cero y su coeficiente de posición es distinto de cero, entonces la recta es paralela al eje de las abscisas (eje x).

Por último, de la ecuación $y = mx - mp + q$ se obtiene $mx - y + q - mp = 0$, luego E) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

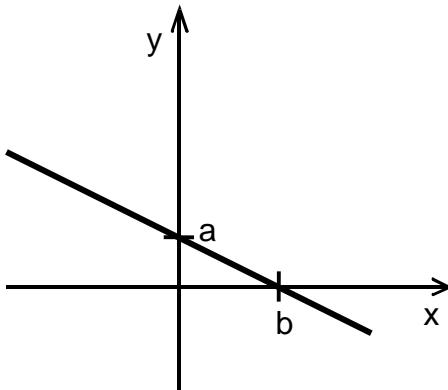
Contenido: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 51

En el gráfico de la figura adjunta está representada la recta de ecuación $Px + Qy = R$, con a y b números reales positivos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones se puede deducir a partir de esta información?



- A) $P < 0$
- B) $R > 0$
- C) $P < Q$
- D) $PR > 0$
- E) $PQ < 0$

RESOLUCIÓN

Para dar solución a este ítem se debe determinar cuál de las afirmaciones presentadas en las opciones se puede deducir considerando la información del enunciado. A continuación, se muestra una forma de resolver este ítem.

Recuerde que:

En una recta de ecuación $y = mx + n$, m es su **pendiente** y n es su **coeficiente de posición**.

En la ecuación dada en el enunciado se despeja la variable y de la siguiente manera:

$$Px + Qy = R$$

$$Qy = -Px + R$$

$$y = -\frac{Px}{Q} + \frac{R}{Q}$$

Sumando $-Px$ a ambos lados de la igualdad.

Dividiendo por Q a ambos lados de la igualdad, esto porque $Q \neq 0$, pues la recta no es vertical.

Como la recta del gráfico pasa por los puntos $(b, 0)$ y $(0, a)$, con a y b números positivos, se tiene que su pendiente es negativa y su coeficiente de posición es positivo, es decir,

$$-\frac{P}{Q} < 0 \text{ y } \frac{R}{Q} > 0.$$

Ahora, la relación en A) no se puede deducir, porque el valor de P depende del valor de Q , ya que si $Q > 0$, entonces $P > 0$.

De igual forma se tiene que la relación en B) no se puede deducir, porque el valor de R depende del valor de Q , ya que si $Q < 0$, entonces $R < 0$.

La relación en C) tampoco se puede deducir, porque P puede ser menor que Q o P puede ser mayor que Q o pueden ser iguales.

En cambio, la relación $PR > 0$ presentada en D) si se puede deducir con los datos dados, por ejemplo, con el siguiente análisis:

Como la pendiente $-\frac{P}{Q}$ es negativa, se deduce que $\frac{P}{Q} > 0$, de donde se pueden dar dos casos $P > 0$ y $Q > 0$ ó $P < 0$ y $Q < 0$.

Así, si se considera que $P > 0$ y $Q > 0$ y dado que $\frac{R}{Q} > 0$, se concluye que R es positivo, luego $PR > 0$.

Lo mismo ocurre si se considera $P < 0$ y $Q < 0$ y dado que $\frac{R}{Q} > 0$, se tiene que R es negativo, luego $PR > 0$.

Por último, la relación dada en E) no se puede deducir, dado que si $P > 0$ y $Q > 0$ su producto es positivo y si $P < 0$ y $Q < 0$ su producto también es positivo.

Por el análisis anterior, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Pendiente e intercepto de una recta con el eje de las ordenadas.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: D

PREGUNTA 52

Sean $L_1: px + 2y = 1$ y $L_2: 2x + py = -2$, dos rectas del plano cartesiano, con p un número real distinto de cero. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I) Si $p \geq 2$, entonces L_1 y L_2 se intersectan en un único punto.
 - II) Si $p = -2$, entonces L_1 y L_2 se intersectan en infinitos puntos.
 - III) Si $p \in]-2, 0[\cup]0, 2[$, entonces L_1 y L_2 son paralelas.
-
- A) Solo I
 - B) Solo III
 - C) Solo I y III
 - D) I, II y III
 - E) Ninguna de ellas.

RESOLUCIÓN

Para dar solución a este ítem se debe analizar la veracidad de las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III).

Una forma de resolverlo es como se muestra a continuación:

Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 se pueden expresar como $L_1: y = -\frac{p}{2}x + \frac{1}{2}$ y $L_2: y = -\frac{2}{p}x - \frac{2}{p}$

Recuerde que:

- ❖ Dos **rectas** son **paralelas** si tienen igual pendiente y si además, tiene igual coeficiente de posición estas son paralelas coincidentes.
- ❖ En una recta de ecuación $y = mx + n$, m es su **pendiente** y n es su **coeficiente de posición**.

Ahora, en I) se tiene que $p \geq 2$, luego p puede ser 2, por lo que se pueden escribir las ecuaciones de las rectas como $L_1: y = -x + \frac{1}{2}$ y $L_2: y = -x - 1$. Como ambas rectas tienen pendiente igual a -1 , estas son paralelas. Luego, la afirmación en I) es falsa.

En II) se indica que $p = -2$, por lo que las ecuaciones de las rectas son $L_1: y = x + \frac{1}{2}$ y $L_2: y = x + 1$. Como ambas rectas tienen igual pendiente y distinto coeficiente de posición, estas son paralelas no coincidentes. Luego, la afirmación en II) es falsa.

Por último, en III) se tiene que $p \in]-2, 0[\cup]0, 2[$, así, si $p = 1$ las ecuaciones de las rectas son $L_1: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ y $L_2: y = -2x - 2$, las cuales tienen distinta pendiente, por lo que no son paralelas. Luego, la afirmación en III) también es falsa.

De lo anterior, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.

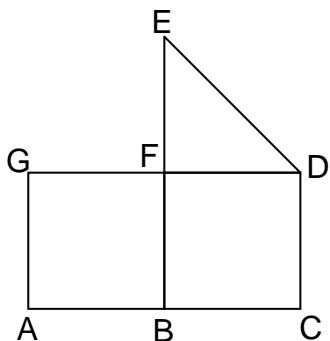
Contenido: Posiciones relativas de rectas en el plano.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 53

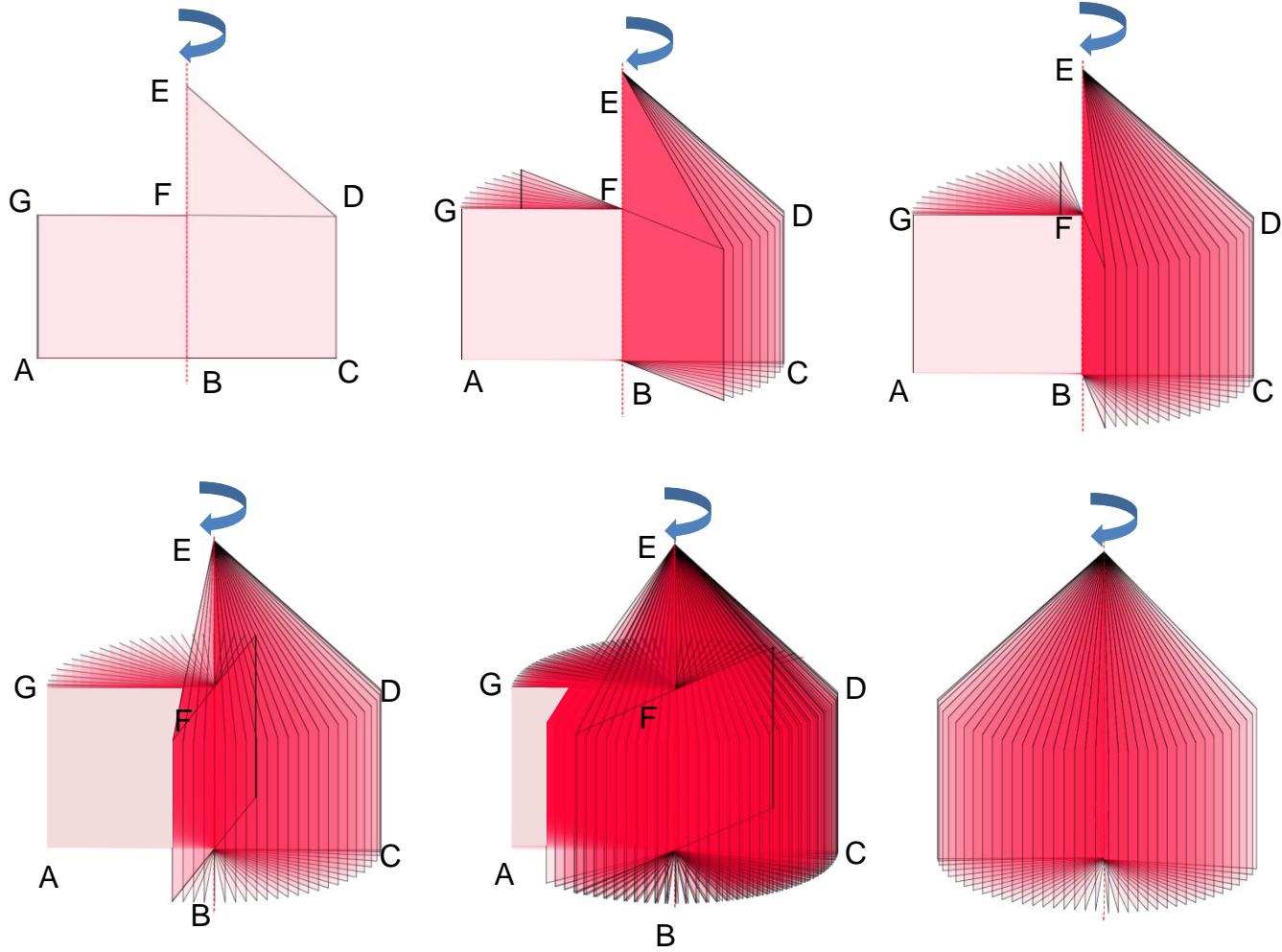
En la figura adjunta, ABFG y BCDF son cuadrados congruentes, con F el punto medio de \overline{BE} . Si el polígono ACDEFG se hace girar indefinidamente en torno a \overline{BE} , entonces se obtiene un cuerpo formado por



- A) dos cubos y un prisma triangular.
- B) un cilindro y un cono.
- C) un tronco de cono.
- D) dos cilindros y un cono.
- E) un cilindro y una pirámide.

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe girar indefinidamente la figura, en torno a \overline{BE} , tal como se muestra a continuación:



De lo anterior, se puede observar que los cuerpos que se forman son un cilindro y un cono, por lo que B) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

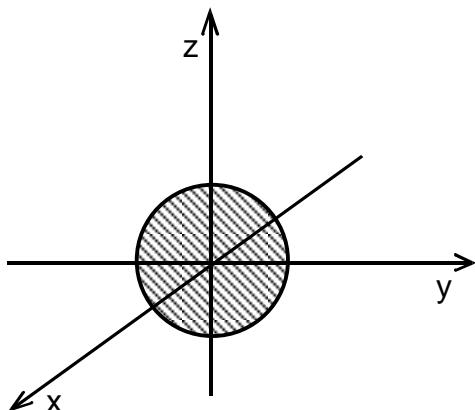
Contenido: Cuerpos geométricos generados a partir de rotaciones de figuras planas en el espacio.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 54

En círculo de centro $(0, 0, 0)$ y radio 6 cm de la figura adjunta está totalmente contenido en el plano yz . Si este círculo se desplaza según el vector $(10, 0, 0)$, entonces el volumen del cuerpo generado por el barrido de este círculo es

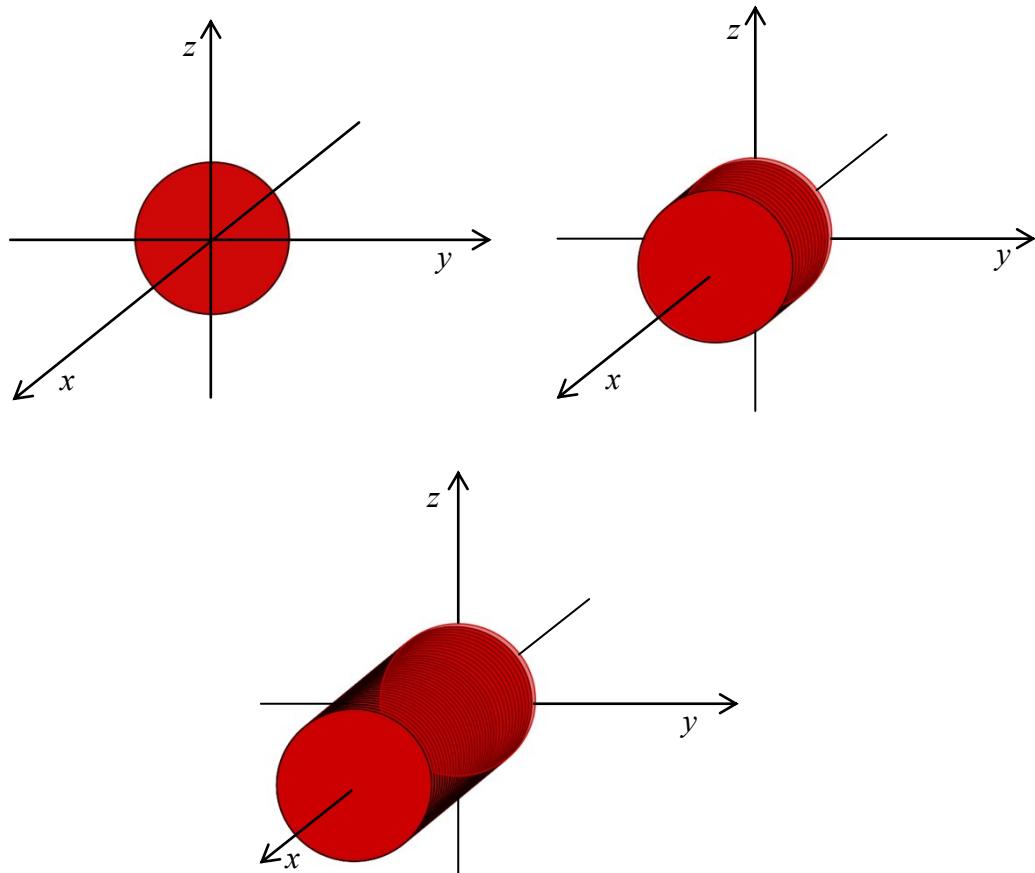


- A) $120\pi \text{ cm}^3$
- B) $60\pi \text{ cm}^3$
- C) $360\pi \text{ cm}^3$
- D) $216\pi \text{ cm}^3$
- E) $288\pi \text{ cm}^3$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar el volumen del cuerpo generado por el barrido que se obtiene al desplazar un círculo con centro en el origen del plano cartesiano según el vector $(10, 0, 0)$.

En efecto, como el círculo está contenido en el plano yz , y se desplaza según el vector $(10, 0, 0)$, se tiene que el cuerpo que forma el barrido de esta traslación es un cilindro, como se muestra a continuación:



Recuerde que:

El **volumen** V de un **cilindro** de radio basal r y altura h se calcula a través de la fórmula $V = \pi r^2 h$.

Ahora, del enunciado se tiene que el radio del círculo es 6 cm y del vector de traslación (10, 0, 0) se obtiene que la altura del cilindro es 10 cm.

Luego, $V = \pi \cdot (6)^2 \cdot 10 = 360\pi$, por lo que el volumen del cilindro es $360\pi \text{ cm}^3$, el cual se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

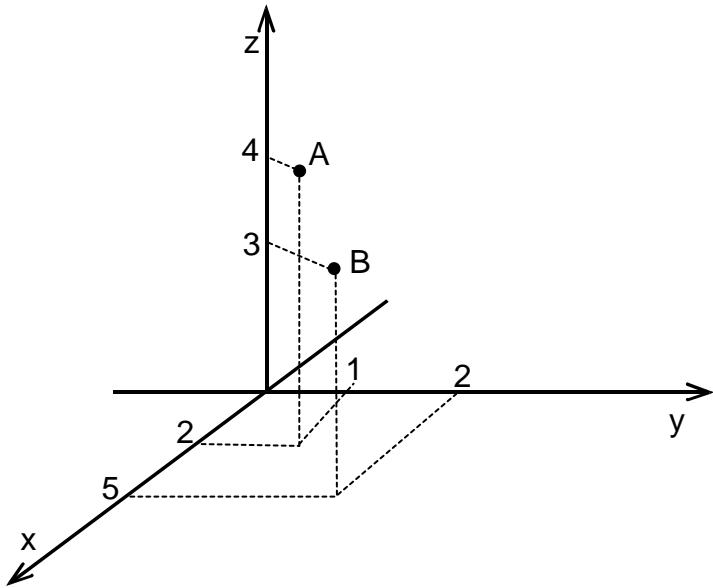
Contenido: Volumen de cuerpos generados por la traslación de figuras planas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 55

Consideré los puntos A y B de la figura adjunta. Si el punto $(-4, y_0, z_0)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos A y B, ¿cuáles son los valores de y_0 y z_0 ?



- A) $y_0 = -1, z_0 = 6$
- B) $y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = -2$
- C) $y_0 = -\frac{7}{5}, z_0 = \frac{2}{5}$
- D) $y_0 = -\frac{1}{5}, z_0 = -\frac{9}{5}$
- E) $y_0 = -\frac{5}{2}, z_0 = -15$

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a este ítem se puede determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A y B, para luego encontrar los valores de y_0 y z_0 .

Recuerde que:

Una forma de escribir la **ecuación vectorial de una recta** en el espacio que pasa por los puntos $A(r, s, t)$ y $B(m, n, p)$ es $(x, y, z) = (m - r, n - s, p - t)\lambda + (m, n, p)$, con $\lambda \in IR$, donde el vector $(m - r, n - s, p - t)$ se conoce como **vector director**.

Del gráfico de la figura se obtienen las coordenadas de A y B, es decir, A(2, 1, 4) y B(5, 2, 3). Luego, un vector director de la recta que pasa por estos puntos es

$$(5 - 2, 2 - 1, 3 - 4) = (3, 1, -1).$$

Con los datos anteriores se puede escribir una ecuación vectorial de la recta como $(x, y, z) = (3, 1, -1)\lambda + (2, 1, 4)$, con λ en el conjunto de los números reales.

Así, $(x, y, z) = (3, 1, -1)\lambda + (2, 1, 4)$

$$(x, y, z) = (3\lambda + 2, \lambda + 1, -\lambda + 4)$$

Como $(-4, y_0, z_0)$ pertenece a la recta, se tiene que $(-4, y_0, z_0) = (3\lambda + 2, \lambda + 1, -\lambda + 4)$, por lo que se puede despejar λ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -4 &= 3\lambda + 2 \\ -4 - 2 &= 3\lambda \quad \left.\right\} \text{ Sumando } -2 \text{ en ambos lados de la igualdad.} \\ -6 &= 3\lambda \\ -2 &= \lambda \quad \left.\right\} \text{ Dividiendo por } 3 \text{ en ambos lados de la igualdad.} \end{aligned}$$

Luego, al reemplazar $\lambda = -2$ en $1 + \lambda$ y en $4 - \lambda$, se tiene que

$$y_0 = 1 - 2 = -1$$

$$z_0 = 4 - (-2) = 6$$

Por lo anterior, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 56

Sea L la recta del espacio que contiene a los puntos P(-1, 1, 2) y Q(0, -1, 1), y sea R(-b², b, b² + 1) un punto en el espacio. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) Existe un único valor de b para el cual R pertenece a L.
- B) R no pertenece a L, cualquiera sea el valor de b.
- C) Existen exactamente dos valores de b para los cuales R pertenece a L.
- D) Cualquiera sea el valor de b, R pertenece a L.
- E) Existen al menos dos valores positivos de b para los cuales R pertenece a L.

RESOLUCIÓN

Para dar solución a esta pregunta se puede determinar la ecuación de la recta L que pasa por P y Q, para luego analizar las condiciones de b para R y así, determinar cuál de las afirmaciones en las opciones es verdadera.

Recuerde que:

Una forma de escribir la **ecuación vectorial de una recta** en el espacio que pasa por los puntos A(r, s, t) y B(m, n, p) es $(x, y, z) = (m - r, n - s, p - t)\lambda + (m, n, p)$, con $\lambda \in IR$, donde el vector $(m - r, n - s, p - t)$ se conoce como **vector director**.

Ahora, una ecuación vectorial de la recta que pasa por P(-1, 1, 2) y Q(0, -1, 1), es $(x, y, z) = ((0 - (-1)), (-1 - 1), (1 - 2))\lambda + (0, -1, 1)$

$$(x, y, z) = (1, -2, -1)\lambda + (0, -1, 1)$$

$$(x, y, z) = (\lambda, -2\lambda - 1, -\lambda + 1)$$

Luego, para que R(-b², b, b² + 1) pertenezca a L se debe cumplir que

$$(-b^2, b, b^2 + 1) = (\lambda, -2\lambda - 1, -\lambda + 1)$$

Al despejar λ en cada una de las igualdades de las coordenadas se tiene:

$$\begin{aligned} -b^2 &= \lambda \\ -\frac{b + 1}{2} &= \lambda \\ -b^2 &= \lambda \end{aligned}$$

Por lo que, al igualar λ se tiene $b^2 = \frac{b + 1}{2} = b^2$, de donde $b^2 = \frac{b + 1}{2}$, que es equivalente a la ecuación cuadrática $2b^2 - b - 1 = 0$.

Así, se puede obtener el valor de b utilizando la fórmula general de resolución de una ecuación cuadrática:

$$\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Luego, las soluciones de la ecuación son: $b_1 = \frac{1+3}{4} = 1$ y $b_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$.

De lo anterior, existen exactamente dos valores de b para los cuales el punto $R(-b^2, b, b^2 + 1)$ pertenece a L , siendo la opción C) la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

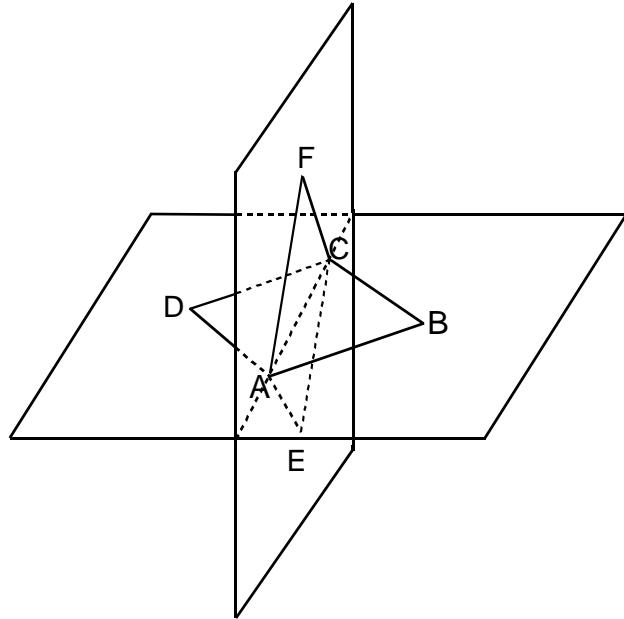
Contenido: Ecuación vectorial de una recta.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 57

En la figura adjunta, $ABCD$ y $AECF$ son dos cuadrados ubicados en planos perpendiculares entre sí, con \overline{AC} diagonal común. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



- I) El triángulo BCF es rectángulo.
 - II) Los puntos A, B, C, D, E y F son los vértices de un octaedro regular.
 - III) \overline{BD} y \overline{EF} son las dos diagonales de un mismo cuadrado.
-
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) Solo II y III
 - E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se pueden analizar las características de los polígonos que forman los dos cuadrados ubicados en planos perpendiculares y así, determinar si las afirmaciones en I), en II) y en III) son verdaderas.

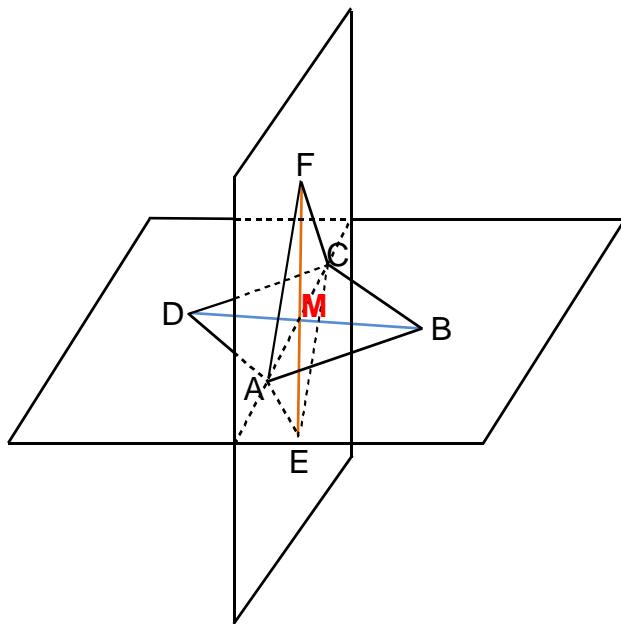
Recuerde que:

La medida de la **diagonal de un cuadrado** de lado p unidades es $p\sqrt{2}$ unidades.

Del enunciado se tiene que ABCD y AECF son cuadrados ubicados en planos perpendiculares con una diagonal común, esto quiere decir, que los cuadrados son congruentes.

Suponiendo que la medida de los lados de los cuadrados es b cm, entonces $CF = CB = b$ cm y la diagonal \overline{AC} mide $b\sqrt{2}$ cm.

Además, sea M el punto de intersección de las diagonales \overline{DB} y \overline{FE} , por lo que $\overline{FM} \perp \overline{MB}$, al pertenecer a planos perpendiculares, lo que se representa en la siguiente figura:



Así, como \overline{FE} es una diagonal del cuadrado AECF y \overline{DB} es una diagonal del cuadrado ABCD, se tiene que $BM = FM = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ cm.

Si se dibuja el segmento FB, se obtiene el triángulo FMB isósceles rectángulo en M y aplicando el teorema de Pitágoras para determinar la medida del segmento FB, se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
FB^2 &= MF^2 + MB^2 \\
&= \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= 2\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= 2 \cdot \frac{b^2(\sqrt{2})^2}{4} \\
&= \frac{b^2 \cdot 2}{2} \\
&= b^2
\end{aligned}$$

De donde se obtiene $FB = b$ cm, por lo que $FB = CF = CB = b$ cm.

Ahora, para determinar si el triángulo BCF es rectángulo, afirmación dada en I), se consideran las medidas del triángulo BCF, es así como se tiene $FC = CB = b$ cm, por ser lados de cuadrados congruentes, y por lo anteriormente desarrollado, se tiene que $FB = b$ cm, por lo tanto, el triángulo BCF es equilátero y no rectángulo, luego, la afirmación dada en I) es falsa.

Luego, para determinar la veracidad de la afirmación en II),

Recuerde que:

Un **octaedro regular** es un poliedro regular formado por 8 triángulos equiláteros congruentes.

Por lo anterior, si la medida del lado de uno de los cuadrado es b cm, entonces se tiene que $FC = CE = EA = AF = CD = DA = AB = BC = b$ cm.

Además, $\overline{DB} \cong \overline{FE}$, por ser diagonales de cuadrados congruentes y $\overline{DB} \perp \overline{FE}$, al pertenecer ambos segmentos a planos perpendiculares, de donde se concluye que $FB = BE = ED = DF$, y por el desarrollo realizado al inicio de la resolución se tiene que $\triangle FCB \cong \triangle FAB \cong \triangle FAD \cong \triangle FDC \cong \triangle CEB \cong \triangle AEB \cong \triangle EDA \cong \triangle ECD$.

Por lo anterior, y como estos triángulos son equiláteros, la afirmación en II) es verdadera, siendo los puntos A, B, C, D, E y F los vértices de un octaedro regular.

Por último, la afirmación en III) también es verdadera, pues como ya se demostró al inicio que $\triangle FMB$ es rectángulo isósceles, se tiene que los ángulos agudos miden 45° . Además, $\triangle FMB \cong \triangle FMD \cong \triangle DME \cong \triangle EMB$, lo que implica que $\angle BFD = \angle FDE = \angle DEB = \angle EBF = 90^\circ$.

Luego, \overline{BD} y \overline{EF} son las dos diagonales de un mismo cuadrado.

Como solo las afirmaciones en II) y en III) son verdaderas, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Geometría

Área temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Puntos, rectas y planos en el espacio.

Habilidad cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: D

PREGUNTA 58

Sea un triángulo ABC al cual se le aplica una homotecia obteniéndose el triángulo A'B'C', donde A' es la imagen de A, B' es la imagen de B y C' es la imagen de C. Se puede determinar las coordenadas del centro de homotecia, si se sabe que:

- (1) El punto A tiene coordenadas (0, 0) y la razón de homotecia es 3.
 - (2) La distancia entre A y A' es cero.
-
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para resolver el problema se debe determinar si con las informaciones dadas en (1) y/o en (2), se pueden encontrar las coordenadas del centro de la homotecia aplicada a un triángulo ABC.

En el enunciado se indica que a un triángulo ABC se le aplica una homotecia obteniéndose el triángulo A'B'C', donde A' es la imagen de A, B' es la imagen de B y C' es la imagen de C. Para esto,

Recuerde que:

Una **Homotecia** es la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a un punto en el plano llamado centro de homotecia y a una razón dada llamada razón de homotecia, tal que cualquier segmento de la figura es paralelo al segmento correspondiente en la figura homotética.

Ahora, con la información dada en (1), que indica que A tiene coordenadas (0, 0) y la razón de homotecia es 3, no es suficiente para determinar las coordenadas del centro de homotecia, ya que con esta información cualquier punto del plano cartesiano podría ser el centro de homotecia.

Con la información dada en (2) por sí sola, la cual señala que la distancia entre A y A' es cero, tampoco se puede determinar el centro de homotecia, esto porque si la distancia entre A y A' es cero se tiene que A' es centro de homotecia pero no están determinadas las coordenadas de A' pudiendo ser cualquier punto del plano cartesiano.

Por último, si se juntan ambas informaciones, las dadas en (1) y en (2), es decir, que A tiene coordenadas (0, 0), que la razón de homotecia es 3 y que la distancia entre A y A' es cero, se tiene que $A = A' = (0, 0)$, donde A' es el centro de homotecia y por lo tanto están determinadas sus coordenadas.

Por el análisis anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Geometría

Área temática: Geometría Proporcional

Nivel: Tercero Medio

Objetivo fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

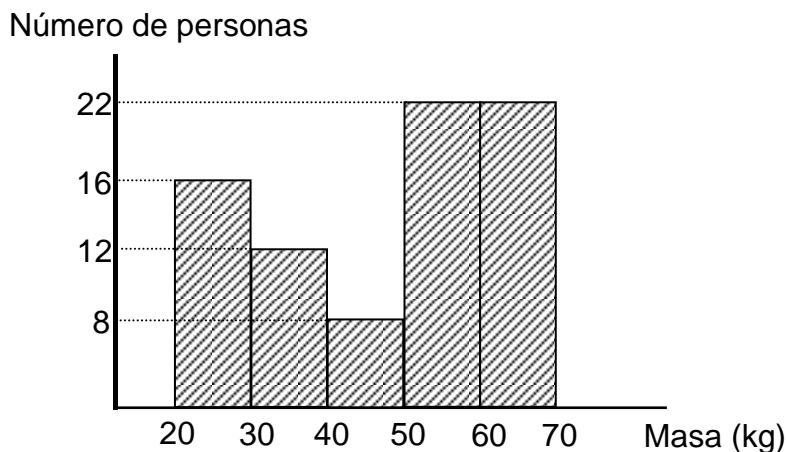
Contenido: Homotecia de figuras planas.

Habilidad cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 59

En el histograma de la figura adjunta se muestra la distribución de las masas corporales, en kg, de un grupo de personas, donde los intervalos del histograma son de la forma $[a, b]$. Según este gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

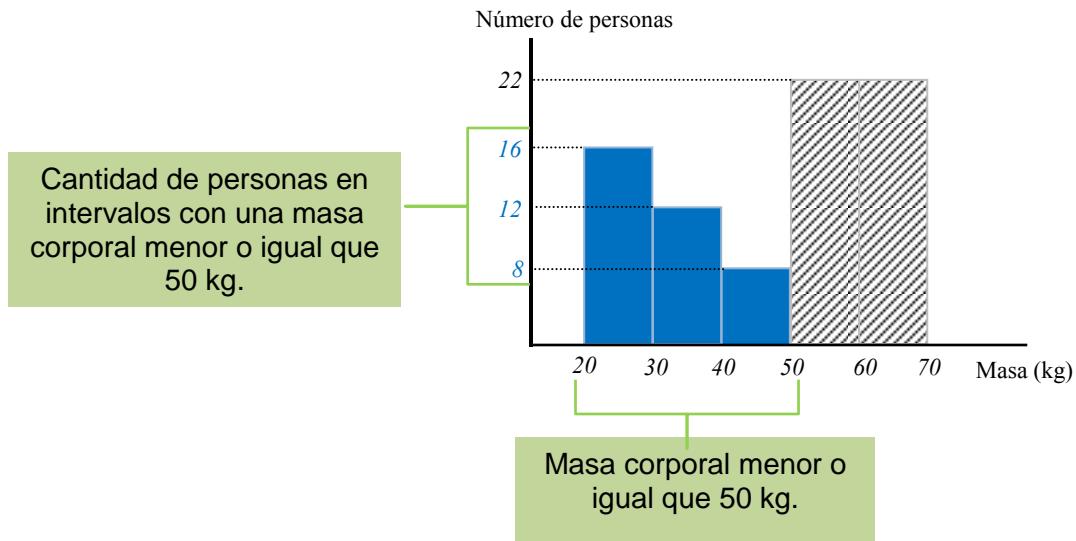


- A) 36 personas tienen una masa corporal menor o igual que 50 kg.
- B) El rango de las masas corporales es menor o igual que 50 kg.
- C) En total hay 58 personas en el grupo.
- D) Más de la mitad de las personas tienen una masa corporal de al menos 50 kg.
- E) Un 20% de las personas tienen una masa corporal menor o igual que 30 kg.

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se debe leer e interpretar la información presentada en el gráfico y así, determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es falsa.

En A) se afirma que 36 personas tienen una masa corporal menor o igual que 50 kg, esto es verdadero, ya que del gráfico se obtiene lo siguiente:



Por lo tanto, la cantidad de personas con una masa menor o igual que 50 kg es $16 + 12 + 8 = 36$.

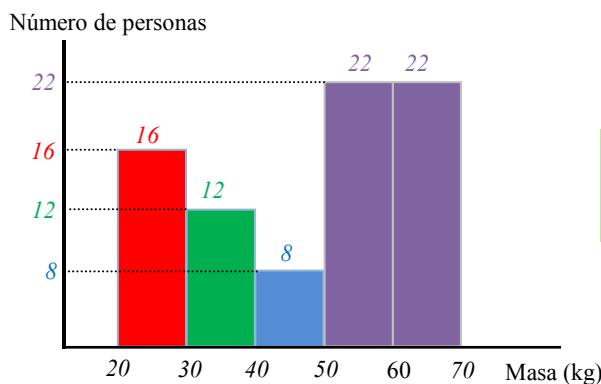
Ahora, en B)

Recuerde que:

El **rango** de un conjunto de datos es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo.

En este caso, el dato mínimo es mayor a 20 kg y el dato máximo es menor o igual a 70 kg, luego el rango es menor que $70 - 20 = 50$ kg, por lo que la afirmación en B) es verdadera.

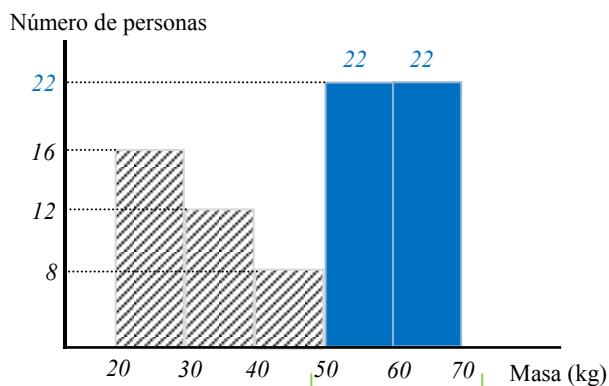
En C) se afirma que la cantidad total de personas del grupo es 58, esto se puede determinar sumando el número de personas de cada intervalo del gráfico, tal como se muestra a continuación:



La cantidad total de personas del grupo es
 $16 + 12 + 8 + 22 + 22 = 80$

De esta forma como $58 \neq 80$, la afirmación en C) es falsa.

En D) se señala que más de la mitad de las personas tienen una masa corporal de a lo menos 50 kg, esto significa que más del 50% de las 80 personas, es decir, más de 40 personas tienen una masa corporal de a lo menos 50 kg. Lo anterior se puede determinar tal como se muestra a continuación:



La cantidad de personas con una masa corporal de más de 50 kg es igual a
 $22 + 22 = 44$

Masa corporal de más de 50 kg.

Así, se tiene que $44 > 40$, por lo tanto, la afirmación en D) es verdadera.

Por último, en E) se afirma que un 20% de las personas tienen una masa corporal menor o igual que 30 kg, lo que también es verdadero pues hay 16 personas que tienen su masa corporal en el intervalo $[20, 30]$, que equivale a un 20% de 80.

Como del desarrollo anterior la afirmación en C) es falsa, se tiene que esta es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Datos y Azar

Área temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Interpretación de Histogramas.

Habilidad cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 60

En la tabla adjunta se agrupan los resultados de haber consultado a un grupo de personas respecto a la cantidad de primos que tiene. Según los datos de la tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir?

Nº Primos	Marca de clase (x_i)	Frecuencia (f_i)	$x_i \cdot f_i$
[0, 3[1,5	5	7,5
[3, 6[4,5	12	54
[6, 9[7,5	16	120
[9, 12[10,5	13	136,5
[12, 15[13,5	9	121,5
[15, 18[16,5	8	132
[18, 21[19,5	5	97,5
[21, 24]	22,5	2	45
			Total: 714

- A) El intervalo modal es [6, 9[.
- B) La media de la variable es 10,2 primos.
- C) El intervalo donde se encuentra la mediana de la variable es [9, 12[.
- D) Por lo menos un 40% de los consultados tiene más de 2 primos y menos de 9 primos.
- E) Un 10% de los consultados tiene más de 18 primos.

RESOLUCIÓN

Para dar solución a esta pregunta se deben interpretar los datos presentados en la tabla con el fin de determinar cuál de las afirmaciones de las opciones no se puede deducir de los datos de esta tabla.

Recuerde que:

- El **intervalo modal** es el intervalo de mayor frecuencia.
- La **media** de un conjunto de datos agrupados en una tabla de frecuencias se calcula sumando todos los productos entre la marca de clase y la frecuencia respectiva de cada intervalo, para luego dividir este resultado por el número total de datos.
- La **mediana** de un grupo de datos, corresponde al valor en el cual aproximadamente el 50% de los datos se encuentra por debajo de él y deja sobre él a aproximadamente al 50% de los datos.

La afirmación en A) se puede deducir de la tabla, debido a que la mayor frecuencia en la tabla es 16, la cual corresponde al intervalo $[6, 9[$.

Ahora, para determinar si la afirmación en B) es verdadera se calculará la media de la variable de la siguiente manera:

Si se designa por \bar{x} a la media, se tiene que esta se puede calcular como:

$$\bar{x} = \frac{\text{Suma total de } x_i \cdot f_i}{\text{Total de datos}}$$

Para determinar el total de datos se deben sumar las frecuencias de todos los intervalos, esto es, $5 + 12 + 16 + 13 + 9 + 8 + 5 + 2 = 70$.

Luego, se llega a que $\bar{x} = \frac{714}{70} = 10,2$, por lo que la afirmación en B) se puede deducir de la tabla.

Para determinar si la afirmación en C) se puede deducir de la tabla se debe buscar el intervalo donde se encuentra la mediana de los datos. Así, se tiene que hasta el tercer intervalo se han acumulado 33 personas, que equivale, aproximadamente, al 47,1% del total de personas y hasta el cuarto intervalo se han acumulado 46 personas que equivale, aproximadamente, al 65,7%, luego la mediana de los datos se encuentra en el intervalo $[9, 12[$, por lo que la afirmación en C) se puede deducir.

La opción en D) también se puede deducir de la tabla, porque el 40% de 70 es 28 y este valor coincide con los encuestados que tienen más de 2 primos y menos de 9 primos, es decir, la suma de las frecuencias correspondientes a los intervalos $[3, 6[$ y $[6, 9[$.

Por último, en la opción E) se señala que un 10% de los encuestados tiene más de 18 primos, esta afirmación no se puede deducir de la tabla, pues 7 personas equivalen al 10% de los encuestados y hay 7 personas que tienen 18 primos o más, pero puede que 5 de ellos tengan exactamente 18 primos, esto porque 5 personas es la frecuencia del intervalo [18, 21[, por lo tanto, E) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Datos y Azar

Área temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Medidas de tendencia central e interpretación de tablas.

Habilidad cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 61

De un conjunto de n elementos distintos, con $n > 2$, se extraen todas las muestras posibles, sin orden y sin reposición, de tamaño 2. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** el número total de estas muestras?

A) $n(n - 1)$

B) 2^n

C) n^2

D) $\frac{n!}{2!}$

E) $\binom{n}{2}$

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem,

Recuerde que:

El **número total de muestras** posibles, sin orden y sin reposición, de tamaño p de una población compuesta por m elementos, con $m > p$, corresponde al número combinatorio $\binom{m}{p}$.

Luego, la expresión que representa siempre al número total de las posibles muestras, sin orden y sin reposición, de tamaño 2 que se pueden extraer de n elementos es $\binom{n}{2}$, expresión que se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Datos y Azar

Área temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo fundamental: Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

Contenido: Número de muestras de un tamaño dado que se pueden extraer de una población de tamaño finito, sin orden y sin reposición.

Habilidad cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 62

En un grupo de datos la mediana es m y la media es \bar{x} . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

- A) El percentil 75 es mayor que \bar{x} .
- B) El percentil 25 es $\frac{m}{2}$.
- C) El percentil 15 es menor o igual a m .
- D) La mitad de los datos es menor o igual a \bar{x} .
- E) El dato más repetido es m .

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es siempre verdadera, se puede realizar el siguiente desarrollo:

Recuerde que:

- El **percentil P** de un conjunto de datos ordenados de menor a mayor, corresponde al valor que deja por debajo de él a aproximadamente el $P\%$ de los datos y deja sobre él a aproximadamente el $(100 - P)\%$ de los datos.
- La **mediana** de un grupo de datos, corresponde al valor en el cual aproximadamente el 50% de los datos se encuentra por debajo de él y deja sobre él a aproximadamente al 50% de los datos.
- La **media** de un conjunto de datos, no agrupados, corresponde a la suma de todos los datos divididos por el total de datos.

La afirmación en A) es falsa, porque si los datos son 2, 2, 2, 2 la media es 2 y el percentil 75 es 2.

La afirmación en B) también es falsa, ya que si los datos son 2, 2, 2, 2 el percentil 25 es 2 y como m es la mediana de los datos, que es 2, se tiene que $\frac{m}{2} = 1$.

Ahora, en relación a lo que se señala en la opción C), que el percentil 15 es menor o igual a m , esto siempre es verdadero, pues como posición el percentil 15 está antes del percentil 50, que en este caso es m , si los datos fueran distintos, el dato que le corresponde al percentil 15 sería menor que m y si los datos fueran iguales el dato que representa al percentil 15 sería igual a m .

La afirmación en D) es falsa, pues si los datos son 1, 1, 1, 1, entonces el promedio de ellos es 1 y la mitad de los datos es 2.

Por último, la afirmación en E) es falsa, porque si los datos son 1, 2, 3, 4 y 5, no hay un dato que más se repita pero si existe la mediana.

Por lo anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Datos y Azar

Área temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

Contenido: Medidas de posición.

Habilidad cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 63

Dada una población compuesta por n números enteros, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) Si de esta población se pueden extraer en total 6 muestras de tamaño 2, sin reemplazo y sin orden, entonces $n = 4$.
 - II) Desde la población se extraen todas las muestras posibles, sin orden y sin reposición, de tamaño 3, y a cada una de ellas se les calcula su promedio. Si el promedio de todos estos promedios es S , entonces el promedio de los n datos de la población es S .
 - III) Desde la población se extraen todas las muestras posibles, con reemplazo, de tamaño 4 y a cada una de ellas se calcula su promedio siendo el promedio de todos estos promedios igual a P . Ahora desde la población se extraen todas las muestras posibles, sin reemplazo, de tamaño 6 y a cada una de ellas se calcula su promedio, siendo el promedio de todos estos promedios igual a T . Luego $P = T$.
-
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo I y II
 - D) Solo II y III
 - E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para encontrar la respuesta a la pregunta se debe analizar cada una de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III).

Recuerde que:

- El **total de muestras distintas**, sin reposición y sin orden, de tamaño k que se pueden extraer desde una población de m elementos, es $\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!}$.
- Además, el **factorial de un número** p , es decir, el producto de los primeros p números enteros positivos consecutivos es $p! = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdots \cdot 1$.

De la afirmación en I) se tiene $\binom{n}{2} = 6$, luego,

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 6, \text{ de donde } n(n-1) = 12.$$

Ahora, para determinar el valor de n , que es un número entero positivo, se pueden determinar dos números enteros positivos consecutivos que multiplicados dan como resultado 12, los cuales son 4 y 3, ya que $4 \cdot 3 = 12$, luego $n = 4$, por lo que la afirmación en I) es verdadera.

Para determinar la veracidad en II),

Recuerde que:

Sea una población de tamaño N cuyo promedio es μ . Si de esta población se extraen todas las **muestras** de tamaño r , considerando cualquier forma de muestreo (con reposición, sin reposición y sin orden y sin reposición y con orden) y a cada una de estas muestras se le calcula su promedio y luego se calcula el promedio de los promedios de estas muestras se tiene que este promedio es igual a μ .

Ahora, aplicando lo anterior en la afirmación dada en II) se determina que esta es verdadera, porque si desde la población se extraen todas las muestras posibles, sin orden y sin reposición, de tamaño 3, y a cada una de ellas se les calcula su promedio, para luego calcular el promedio de todos estos promedios dando como resultado S , entonces el promedio de los n datos de la población también es S .

Por otra parte, si desde la población se extraen todas las muestras posibles, con reemplazo, de tamaño 4 y a cada una de ellas se calcula su promedio siendo el promedio de todos estos promedios igual a P , entonces por la propiedad vista, el promedio de todos los datos de la población también es P .

Por último, si desde la población se extraen todas las muestras posibles, sin reemplazo, de tamaño 6 y a cada una de ellas se calcula su promedio, siendo el promedio de todos estos promedios igual a T , se tiene, por propiedad, que el promedio de todos los datos de la población también es T .

Luego, como el promedio de todos los datos de la población es P obtenido por las muestras de tamaño 4 y el promedio de todos los datos de la población es T obtenido de las muestras de tamaño 6, se concluye que $P = T$, siendo la afirmación en III) verdadera.

Como las afirmaciones en I), en II) y en III) son verdaderas, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Datos y Azar

Área temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo fundamental: Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

Contenido: Relación entre las medias muestrales y la media de la población.

Habilidad cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 64

En la tabla adjunta se muestra la distribución del tiempo de duración de cierta cantidad de ampolletas. ¿Cuál de las siguientes relaciones es **FALSA**?

Tiempo de duración en miles de horas	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia acumulada porcentual
[1; 1,15[A	D	25%
[1,15; 1,3[B	E	87%
[1,3; 1,45]	C	F	100%

- A) F > D + E
- B) F > C
- C) B > C
- D) A > C
- E) E = B + D

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las relaciones dadas en las opciones es falsa, se puede analizar los datos entregados en la tabla y encontrar las relaciones que se dan entre los números A, B, C, D, E y F.

Recuerde que:

- En una tabla de datos agrupados la **frecuencia** es la cantidad de elementos que se encuentran en un intervalo.
- La **frecuencia acumulada** es la que se determina sumando las frecuencias de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.
- La **frecuencia acumulada porcentual** es la frecuencia acumulada dividida por el tamaño de la muestra multiplicada por 100%.

Así, como **A**, **B** y **C** son las frecuencias de cada intervalo y aplicando la definición de frecuencia acumulada se tiene que:

$$\boxed{A = D} \quad \boxed{A + B = E} \quad \boxed{A + B + C = F}$$

Por otro lado, como la frecuencia acumulada porcentual del primer intervalo es 25% y la del segundo intervalo es 87%, se puede calcular la frecuencia porcentual del segundo intervalo de la siguiente manera: $87\% - 25\% = 62\%$. De la misma manera, como la frecuencia acumulada porcentual del tercer intervalo es 100%, se concluye que la frecuencia porcentual de este intervalo es 13%, ya que $25\% + 62\% + 13\% = 100\%$. De los porcentaje obtenidos se puede concluir que **B > A > C**, por lo que las relaciones dadas en las opciones C) y D) son verdaderas.

La relación dada en la opción A) es falsa y se puede determinar a través del siguiente desarrollo:

Como $A + B + C = F$, $A + B = E$ y $D = A$, se reemplaza en la relación $F > D + E$, obteniéndose $A + B + C > A + A + B$, y cancelando en ambos lados de la desigualdad se llega a **C > A**, lo que contradice la relación **B > A > C**.

Ahora, en B) se tiene $F > C$, relación que es verdadera, ya que **A** y **B** no son cero y además, $A + B + C = F$.

Por último, la relación de la opción E) es verdadera, porque $A + B = E$ y como $D = A$ se tiene $D + B = E$.

Por lo anterior, la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje temático: Datos y azar

Área temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Interpretación y completación de tablas.

Habilidad cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: A

PREGUNTA 65

Si el promedio y la varianza de una población compuesta por los números 2, 3, a y b son 4 y 2,5 respectivamente, entonces el valor de $(a^2 + b^2)$ es

- A) 225
- B) 61
- C) 76
- D) 121
- E) ninguno de los anteriores.

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se puede encontrar una expresión para el promedio y para la varianza de la población compuesta por los números 2, 3, a y b, para luego igualarlas a 4 y 2,5, respectivamente.

Recuerde que:

- ❖ En este caso, el **promedio** de un conjunto de datos no agrupados es igual a la suma de todos los datos dividido por la cantidad de datos.

- ❖ En este caso, la **varianza** σ^2 de una población de n datos se puede calcular como $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n}$, donde $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$ es la suma de los cuadrados de la diferencia del promedio \bar{x} de los datos de la población y los datos x_i .

Considerando lo anterior, se tiene que el promedio de la población 2, 3, a y b está dado por $\frac{2 + 3 + a + b}{4}$, por lo que $\frac{2 + 3 + a + b}{4} = 4$, de donde $a + b = 11$.

Ahora, se tiene que la varianza de esta población está dada por $\frac{(4 - 2)^2 + (4 - 3)^2 + (4 - a)^2 + (4 - b)^2}{4}$, que es igual a 2,5.

Luego, para encontrar el valor de $(a^2 + b^2)$ se puede realizar el siguiente procedimiento:

$$\frac{(4 - 2)^2 + (4 - 3)^2 + (4 - a)^2 + (4 - b)^2}{4} = 2,5$$

Aplicando $(c - d)^2 = c^2 - 2cd + d^2$.

$$\frac{2^2 + 1^2 + 16 - 8a + a^2 + 16 - 8b + b^2}{4} = 2,5$$

Multiplicando por 4 a ambos lados de la igualdad y reduciendo términos semejantes.

$$37 - 8a + a^2 - 8b + b^2 = 10$$

Sumando $-37 + 8a + 8b$ a ambos lados de la igualdad.

$$a^2 + b^2 = 10 - 37 + 8a + 8b$$

Reduciendo términos semejantes y factorizando por 8.

$$a^2 + b^2 = -27 + 8(a + b)$$

Reemplazando $(a + b)$ por 11.

$$a^2 + b^2 = -27 + 8 \cdot 11$$

$$a^2 + b^2 = 61$$

Por lo anterior, la clave es la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Varianza de una población.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 66

Un nutricionista que decide someter a una dieta a 10 de sus pacientes, escoge a 5 mujeres y a 5 hombres de condiciones físicas similares. Después de un mes de estar sometidos a la dieta, a cada uno de los pacientes se le realiza mediciones para determinar la variación del índice de masa corporal (IMC) durante este tiempo y los resultados obtenidos se encuentran en la tabla adjunta. Basado en estos datos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

Variación del IMC					
Mujeres	0,9	1,2	1	0,4	0,5
Hombres	1,2	-0,5	1,3	1,5	0,5

- I) El promedio de las variaciones del IMC de los hombres y de las mujeres es el mismo.
 - II) La mediana de las variaciones del IMC de las mujeres está por debajo de la de los hombres.
 - III) La desviación estándar de las variaciones del IMC para los hombres es mayor que la desviación estándar de las variaciones del IMC para las mujeres.
- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe analizar cada una de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) y determinar su valor de verdad.

En I) se afirma que el promedio de las variaciones del IMC de los hombres y de las mujeres es el mismo, para verificarlo,

Recuerde que:

En este caso, el **promedio** de un conjunto de datos no agrupados es igual a la suma de todos los datos dividido por la cantidad de datos.

Usando esta definición, se tiene que el promedio de las variaciones del IMC de las mujeres es:

$$\frac{0,9 + 1,2 + 1 + 0,4 + 0,5}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Y el promedio de las variaciones del IMC de los hombres es:

$$\frac{1,2 + (-0,5) + 1,3 + 1,5 + 0,5}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Como ambos promedios son iguales, la afirmación en I) es verdadera.

Ahora, para verificar la afirmación dada en II), se debe encontrar la mediana de las variaciones del IMC de las mujeres y la de los hombres, para luego compararlas.

Recuerde que:

La **mediana** de un conjunto de datos ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 50% de los datos se encuentra por debajo de él y deja sobre él a, aproximadamente, al 50% de los datos.

A continuación, se ordenarán los datos de la tabla en forma creciente, esto es,

Variación del IMC					
Mujeres	0,4	0,5	0,9	1	1,2
Hombres	-0,5	0,5	1,2	1,3	1,5

↓

Mediana

Se puede observar que la mediana de la variación del IMC de las mujeres es menor que la mediana de la variación del IMC de los hombres, por lo tanto, la afirmación dada en II) es verdadera.

Por último, en III) se afirma que la desviación estándar de la variación del IMC para los hombres es mayor que la desviación estándar de la variación del IMC para las mujeres, lo cual es verdadero, como se muestra a continuación:

Recuerde que:

En este caso, para calcular la **desviación estándar** de los datos de una población se puede aplicar la

fórmula $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, donde σ es la desviación estándar de los x_i datos (con $i = 1, 2, 3, \dots, n$) y \bar{x} es el promedio de los x_i datos.

Ahora bien, como se sabe que el promedio es 0,8 se puede calcular la desviación estándar de cada grupo de la siguiente manera.

Desviación estándar de la variación del IMC de las mujeres, σ_M :

$$\begin{aligned}\sigma_M &= \sqrt{\frac{(0,9 - 0,8)^2 + (1,2 - 0,8)^2 + (1 - 0,8)^2 + (0,4 - 0,8)^2 + (0,5 - 0,8)^2}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{(0,1)^2 + (0,4)^2 + (0,2)^2 + (-0,4)^2 + (-0,3)^2}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{0,01 + 0,16 + 0,04 + 0,16 + 0,09}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{0,46}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{46}{500}}\end{aligned}$$

Desviación estándar de la variación del IMC de los hombres, σ_H :

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \sqrt{\frac{(1,2 - 0,8)^2 + (-0,5 - 0,8)^2 + (1,3 - 0,8)^2 + (1,5 - 0,8)^2 + (0,5 - 0,8)^2}{5}} \\&= \sqrt{\frac{(0,4)^2 + (-1,3)^2 + (0,5)^2 + (0,7)^2 + (-0,3)^2}{5}} \\&= \sqrt{\frac{0,16 + 1,69 + 0,25 + 0,49 + 0,09}{5}} \\&= \sqrt{\frac{2,68}{5}} \\&= \sqrt{\frac{268}{500}}\end{aligned}$$

Como se cumple la relación $\sqrt{\frac{46}{500}} < \sqrt{\frac{268}{500}}$, se tiene que la afirmación dada en III) es verdadera.

Luego, del desarrollo realizado se concluye que la clave es la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Comparación de dos o más muestras de datos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 67

Cuando Andrea visita al nutricionista, este le indica que su masa corresponde al percentil 90 de la distribución de las masas de la población de mujeres de su edad y estatura en el país. Si se sabe que la masa de esta población se modela a través de una distribución normal con varianza igual a 4 kg^2 , y Andrea tiene una masa de 50 kg, ¿cuál es, aproximadamente, la media de esta distribución?

- A) 52,56 kg
- B) 47,44 kg
- C) 55,12 kg
- D) 44,88 kg
- E) 53,28 kg

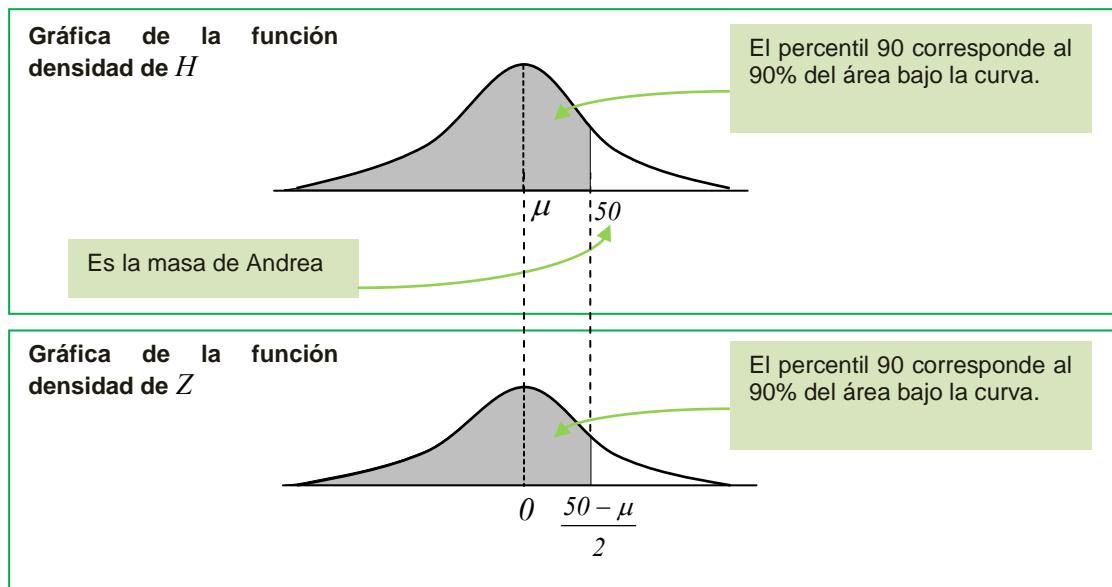
RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta, se puede utilizar la tabla de estandarización de las instrucciones del modelo y de esta manera igualar el valor estandarizado correspondiente al percentil 90 de la distribución con los datos de la masa de Andrea y la varianza de la masa de la población.

Recuerde que:

- Sea X una variable aleatoria continua. El **percentil P** ($0 < P < 100$) de la distribución X es un valor Q , tal que $P(X \leq Q) = \frac{P}{100}$.
- Si $H \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Z = \frac{H - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, por lo que si el percentil P de la distribución de H es Q , entonces el percentil P de la distribución de Z es $\frac{Q - \mu}{\sigma}$, en otras palabras, si $P(X \leq Q) = \frac{P}{100}$, entonces $P(Z \leq \frac{Q - \mu}{\sigma}) = \frac{P}{100}$.

Si se considera el promedio de la población como μ , la variable aleatoria H como la masa de la población de mujeres de la edad y estatura de Andrea en el país, entonces se tiene que $H \sim N(\mu, 4)$, de donde se obtiene lo siguiente:



Como el percentil 90 en H corresponde a $P(Z \leq \frac{50-\mu}{2}) = 0,9$, se determina el valor de z , para el percentil 90 en la tabla que se encuentra en las instrucciones del modelo, tal como se muestra a continuación:

z	$P(Z \leq z)$
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995

Luego, el valor de z es 1,28, por lo que $1,28 = \frac{50-\mu}{2}$ y al despejar μ se tiene lo siguiente:

$$1,28 = \frac{50-\mu}{2}$$

$$2,56 = 50 - \mu$$

$$47,44 = \mu$$

Por lo tanto, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet.

Contenido: Distribución normal.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 68

Un ingeniero de una fábrica debe inferir sobre el diámetro medio (μ) de los rodamientos de su producción, y para ello tomará una muestra al azar de rodamientos y la utilizará para construir un intervalo de confianza del 95% para μ . Si los diámetros de los rodamientos se modelan a través de una distribución normal, con varianza 4 mm^2 , ¿cuál es el mínimo número de rodamientos que debe tener la muestra, para que el margen de error del intervalo construido sea menor o igual a 1 mm?

- A) 62
- B) 7
- C) 11
- D) 4
- E) 16

RESOLUCIÓN

Para determinar el mínimo número de rodamientos que debe tener la muestra, para que el margen de error del intervalo de confianza para el diámetro medio sea menor o igual a 1 mm, se puede realizar el siguiente desarrollo:

Recuerde que:

- Si x_1, x_2, \dots, x_n es una muestra aleatoria simple proveniente de X y $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, por lo que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1).$$

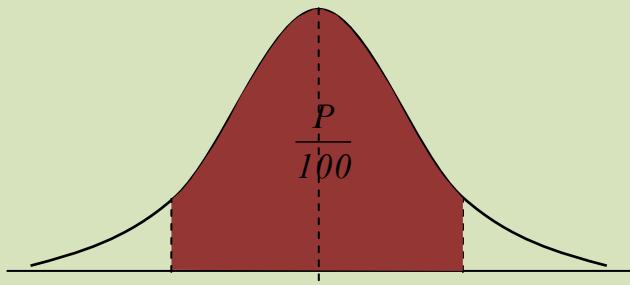
- Si $\left[\bar{x} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ es un **intervalo de confianza** para μ con un nivel de confianza del $P\%$, entonces

$$P\left(\bar{X} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{P}{100},$$

es decir, $P\left(-z \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \frac{P}{100}$,

que es equivalente a $P(-z \leq Z \leq z) = \frac{P}{100}$.

- El margen de error del intervalo de confianza del $P\%$ para μ , corresponde a $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

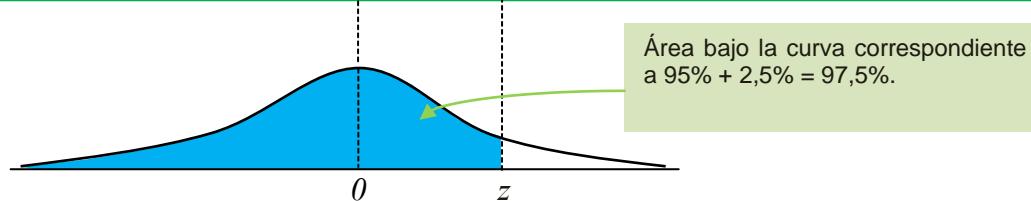
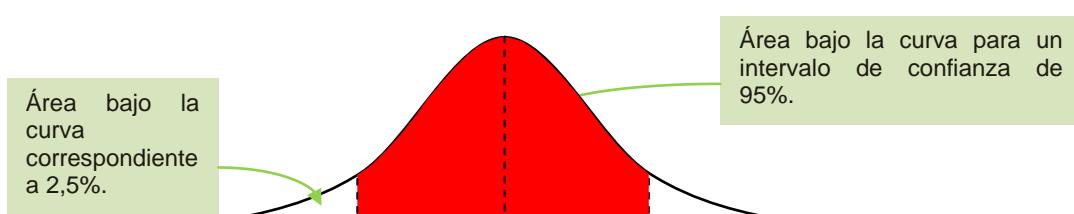


Si se considera la variable aleatoria X como el diámetro de los rodamientos, \bar{X} como la variable aleatoria del promedio de la muestra, la cantidad de rodamientos de la muestra como n y $\sigma = 2$, se tiene que para un intervalo de confianza del 95% ($P = 95$), el margen de error del intervalo es $z \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Ahora, como se busca que el margen de error sea menor o igual que 1 mm, se debe despejar n en la desigualdad $z \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 1$.

Para determinar el valor de z se puede determinar $P(Z \leq z)$, tal como se muestra a continuación:

Gráfica de la función densidad de Z , cuando $Z \sim N(0, 1)$



Ahora, se determina el valor de z , para el área bajo la curva de 97,5% en la tabla que se encuentra en las instrucciones del modelo, tal como se muestra a continuación:

$P(Z \leq z) = 0,975$

z	$P(Z \leq z)$
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995

Luego, el valor de z es 1,96, el cual se reemplaza en $z \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 1$, para despejar n:

$$1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$1,96 \cdot \frac{2}{1} \leq \sqrt{n}$$

$$3,92 \leq \sqrt{n}$$

$$15,3664 \leq n$$

Como n es el número de rodamientos y debe ser mayor o igual que 15,3664, se tiene que n = 16, luego la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Argumentar acerca de la confiabilidad de la estimación de la media de una población con distribución normal, a partir de datos muestrales.

Contenido: Intervalos de confianza.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E.

PREGUNTA 69

En las tablas adjuntas se muestran de manera resumida las notas obtenidas por todos los alumnos, de los cursos A y B, en un examen. Se puede determinar el valor de p , si se sabe que:

Curso A	
Nota	Frecuencia
4,0	p
5,0	20
6,0	10

Curso B	
Nota	Frecuencia
4,0	15
5,0	p
6,0	15

- (1) La media de ambos cursos es la misma.
(2) La mediana de ambos cursos es la misma.
- A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para determinar el valor de p dado en las tablas del problema, se analizará la información dada en (1) y/o en (2).

En (1) se dice que la media de ambos cursos es la misma, para lo que,

Recuerde que:

En este caso, la **media** de un conjunto de datos no agrupados se puede calcular sumando todos los productos entre el dato y su frecuencia, para luego, dividir la suma por la cantidad total de datos.

Así, de las tablas donde están las notas de los cursos, se tiene que:

- ❖ la media del curso A es $\bar{x}_A = \frac{4 \cdot p + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 10}{p + 20 + 10}$.
- ❖ la media del curso B es $\bar{x}_B = \frac{4 \cdot 15 + 5 \cdot p + 6 \cdot 15}{15 + p + 15}$.

Como $\bar{x}_A = \bar{x}_B$, se obtiene la ecuación:

$$\frac{4 \cdot p + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 10}{p + 20 + 10} = \frac{4 \cdot 15 + 5 \cdot p + 6 \cdot 15}{15 + p + 15},$$

de donde se puede determinar el valor de p.

Por otro lado, en (2) se señala que la mediana de ambos cursos es la misma, para lo que,

Recuerde que:

La **mediana** de un grupo de datos, corresponde al valor en el cual aproximadamente el 50% de los datos se encuentra por debajo de él y deja sobre él a aproximadamente al 50% de los datos.

Ahora, por ejemplo, para $p = 1$ se tiene que la mediana es 5 en ambos cursos y para $p = 3$ la mediana también es 5, pues el 5 es el dato central de la distribución de las notas para ambos valores de p, por lo que se concluye, que hay más de una valor para p, en donde la mediana en ambos cursos es la misma. Por lo tanto, con la información dada en (2) no se puede determinar el valor único de p.

Como solo con la información dada en (1) se puede determinar un valor único para p, la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Comparación de dos o más muestras de datos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: A

PREGUNTA 70

Un curso está compuesto por 30 hombres, de los cuales 10 utilizan frenillos y 20 mujeres, de las cuales 6 no los usan. Si se selecciona a un estudiante del curso al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y utilice frenillos?

A) $\frac{35}{50}$

B) $\frac{14}{50}$

C) $\frac{14}{24}$

D) $\frac{24}{125}$

E) $\frac{6}{20}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se puede construir una tabla donde se visualicen los datos dados en el enunciado, como se muestra a continuación:

	Utilizan frenillos	No utilizan frenillos	Total
Hombres	10		30
Mujeres		6	20

Además, para calcular la probabilidad solicitada se puede aplicar el modelo de Laplace.

Recuerde que:

La **probabilidad** de ocurrencia de un suceso en el **modelo de Laplace** está dada por

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}.$$

De esta manera, la probabilidad solicitada en este problema es:

$$\frac{\text{Cantidad de mujeres que utilizan frenillos}}{\text{Cantidad total de estudiantes del curso}}$$

Luego, de la tabla se tiene que la cantidad de mujeres que utiliza frenillos es **20 – 6 = 14** y que el curso está compuesto por **30 + 20 = 50** estudiantes, por lo tanto, la probabilidad solicitada es $\frac{14}{50}$, la cual se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

Contenido: Modelo de Laplace.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 71

¿Cuántos números distintos divisibles por 2, menores que 100.000 y mayores que 10.000 se pueden formar en total usando los dígitos 3, 4, 5, 7 y 9, considerando que estos se pueden repetir?

- A) 625
- B) 20
- C) 256
- D) 120
- E) 24

RESOLUCIÓN

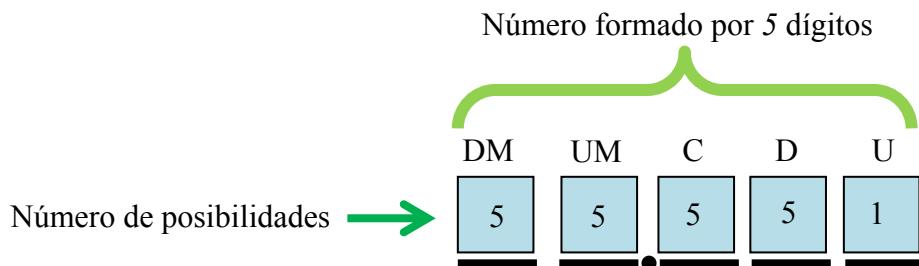
Para determinar la cantidad de números distintos, con las características dadas en el enunciado, que se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5, 7 y 9, se puede aplicar el principio multiplicativo.

Recuerde que:

El **principio multiplicativo** se refiere a que si un experimento se puede efectuar de Q maneras distintas y otro experimento se puede hacer de P maneras distintas, entonces el número total de formas en que se puede efectuar el primer experimento seguido del segundo es igual a $Q \cdot P$.

Como los números solicitados son mayores que 10.000 y menores que 100.000, se tiene que estos son de 5 dígitos. Además, como son números divisibles por 2, la unidad del número formado debe ser un número par, por lo que debe ser 4.

Por otra parte, estos dígitos se pueden repetir, esto quiere decir que hay 5 posibilidades de dígitos a colocar en las restantes posiciones del número, tal como se muestra a continuación:



Así, por el principio multiplicativo, la cantidad de números distintos que se pueden formar está dado por $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 625$, valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.

Contenido: Uso de técnicas combinatorias.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 72

De un grupo formado por 5 ingenieros y 6 economistas, todos de distintas edades, se quiere formar una comisión presidida por el ingeniero de más edad del grupo, la cual estará integrada, en total, por 3 ingenieros y 2 economistas. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

- A) 90
- B) 210
- C) 60
- D) 21
- E) 360

RESOLUCIÓN

Para determinar la cantidad de comisiones que se pueden formar, se debe tener presente que el elegir a la persona A y a la persona B en una comisión es lo mismo que elegir a la persona B y a la persona A, por lo que se puede usar combinatoria para seleccionar a las personas que formarán parte de las comisiones.

Por otra parte, el ingeniero de mayor edad debe estar considerando en la comisión, luego, se deben elegir 2 ingenieros de entre 4 y 2 economistas de entre 6, y por el principio multiplicativo se deben multiplicar estas cantidades.

Recuerde que:

- El **total de muestras distintas**, sin reposición y sin orden, de tamaño k que se pueden extraer desde una población de m elementos, es
$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!}$$
.
- Además, el **factorial de un número** p , es decir, el producto de los primeros p números enteros positivos consecutivos es $p! = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdots \cdot 1$.
- El **principio multiplicativo** se refiere a que si un experimento se puede efectuar de Q maneras distintas y otro experimento se puede hacer de P maneras distintas, entonces el número total de formas en que se puede efectuar el primer experimento seguido del segundo es igual a $Q \cdot P$.

Así, se tiene que:

- la cantidad de 2 personas que se pueden seleccionar de entre los 4 ingenieros está dada por $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$.
- la cantidad de 2 personas que se pueden seleccionar de entre los 6 ingenieros está dada por $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 15$.

Luego, la cantidad de comisiones que se pueden formar aplicando el principio multiplicativo es $6 \cdot 15 = 90$, valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.

Contenido: Uso de técnicas combinatorias.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 73

En una bolsa hay en total 22 bolitas del mismo tipo numeradas en forma correlativa del 1 al 22. Si se extrae al azar una bolita de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que esta tenga un número de un dígito o un número múltiplo de 10?

A) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}$

B) $\frac{9}{22} + \frac{2}{21}$

C) $\frac{1}{9} + \frac{1}{2}$

D) $\frac{9}{22} + \frac{2}{22}$

E) $\frac{9}{22} + \frac{1}{22}$

RESOLUCIÓN

Por las condiciones del problema se considerará el modelo de Laplace como modelo probabilístico para resolverlo, así se identificaran los casos posibles y los casos totales del experimento aleatorio dado en el enunciado, y luego, se aplicará la suma de probabilidades para determinar la probabilidad del suceso solicitado en la pregunta.

Recuerde que:

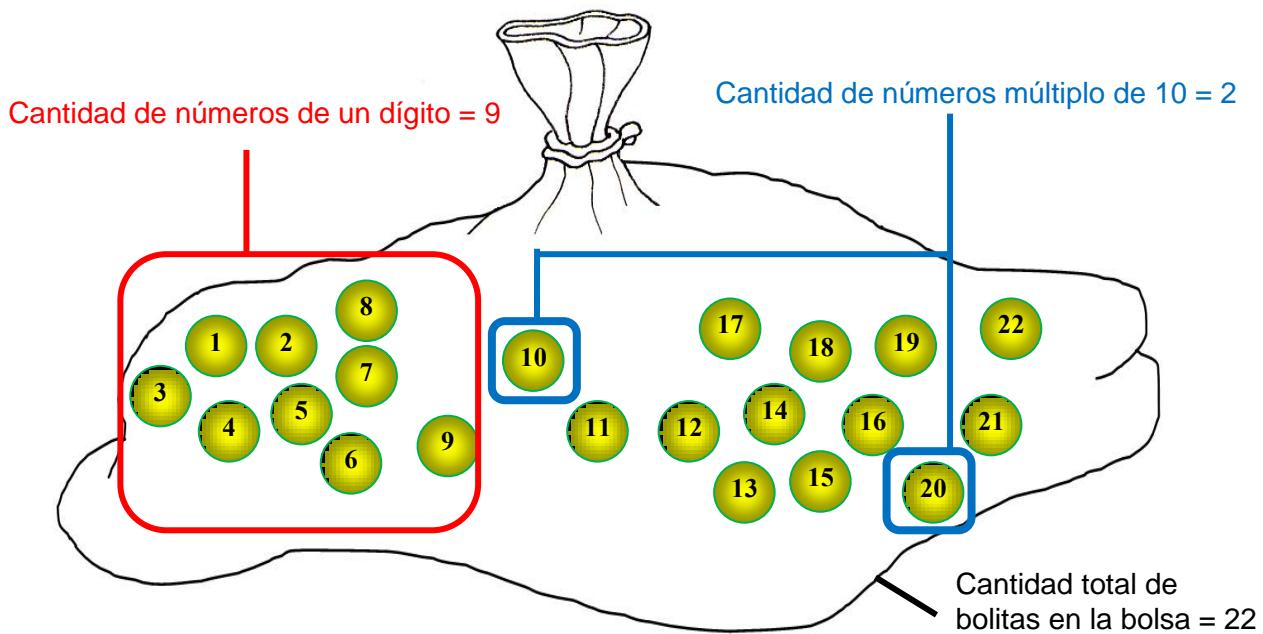
En cualquier modelo probabilístico, si A y B son **sucesos mutuamente excluyentes**, es decir, $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

De esta manera, en el experimento aleatorio de extraer una bolita al azar de la bolsa, se pueden definir los sucesos y la probabilidad de su ocurrencia como sigue:

A: Obtener un número de un dígito y $P(A) = \frac{\text{Cantidad de números de un dígito}}{\text{Cantidad total de bolitas en la bolsa}}$

B: Obtener un número múltiplo de 10 y $P(B) = \frac{\text{Cantidad de números múltiplo de 10}}{\text{Cantidad total de bolitas en la bolsa}}$

De esta forma, la cantidad de **números de un dígito** y la cantidad de **números múltiplo de 10**, son las siguientes:



De esta forma, y como los sucesos son mutuamente excluyentes, se tiene que:

$$P(A) = \frac{9}{22}$$

$$P(B) = \frac{2}{22}$$

$$P(A \cup B) = \frac{9}{22} + \frac{2}{22}$$

Por lo tanto, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Suma de probabilidades.

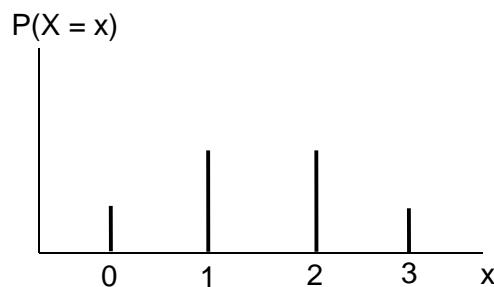
Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

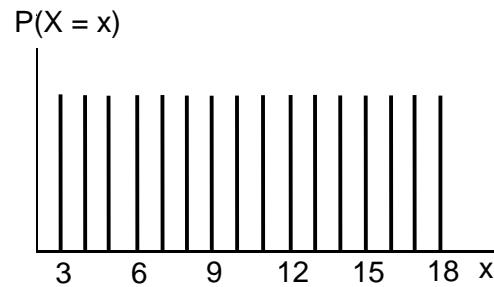
PREGUNTA 74

En el experimento de lanzar tres dados comunes se define la variable aleatoria X como la cantidad de 3 obtenidos. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X?

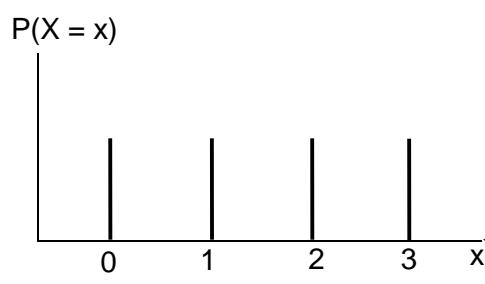
A)



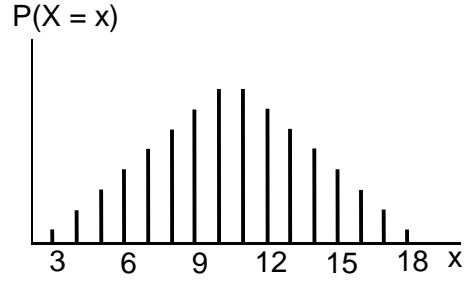
B)



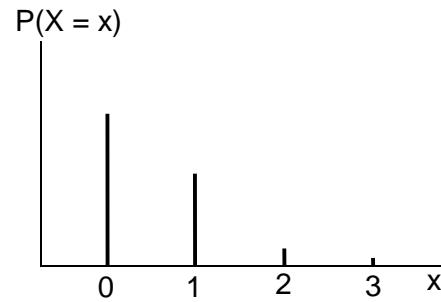
C)



D)



E)



RESOLUCIÓN

Una forma de determinar cuál de los gráficos representa mejor la función de probabilidad de X , es determinar el recorrido de la variable aleatoria X y luego, determinar su función de probabilidad.

Recuerde que:

Si X es una **variable aleatoria discreta**, cuyo recorrido es $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, se tiene que:

$P(X = x_1)$ es la probabilidad de que ocurra el suceso $(X = x_1)$.

$P(X = x_2)$ es la probabilidad de que ocurra el suceso $(X = x_2)$.

...

$P(X = x_n)$ es la probabilidad de que ocurra el suceso $(X = x_n)$.

Ahora, para determinar el recorrido de la variable aleatoria X dada en el enunciado, se deben considerar los sucesos del experimento aleatorio, de esta forma, al lanzar tres dados se puede obtener lo siguiente:

Suceso	Representación del suceso con la variable aleatoria X
No obtener un número tres en los dados, es decir, se obtienen 0 números tres.	$(X = 0)$
Obtener solo un dado con el número tres.	$(X = 1)$
Obtener solo 2 dados con el número tres.	$(X = 2)$
Obtener los 3 dados con el número tres.	$(X = 3)$

De la tabla anterior, se puede concluir que el recorrido de X es $\{0, 1, 2, 3\}$, pues $P(X \in \{0, 1, 2, 3\}) = 1$.

Ahora, para determinar el número de resultados posibles para $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ y $X = 3$, se puede utilizar el principio multiplicativo.

Recuerde que:

El **principio multiplicativo** se refiere a que si un experimento se puede efectuar de Q maneras distintas y otro experimento se puede efectuar de P maneras distintas, entonces el número total de formas en que se puede efectuar el primer experimento seguido del segundo es igual a $Q \cdot P$.

Una manera de ejemplificar el cálculo de los resultados posibles para cada elemento del recorrido de X, se muestra a continuación:

Resultados				Cantidad de resultados posibles para $X = x_i$
X	Dado 1	Dado 2	Dado 3	
0				En el dado 1 se tienen 5 posibilidades, en el dado 2 se tienen 5 posibilidades y en el dado 3 se tienen 5 posibilidades, luego por el principio multiplicativo, se tiene que para $X = 0$, se obtienen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ posibilidades.
1				En el dado 1 se tiene 1 posibilidad, en el dado 2 se tienen 5 posibilidades y en el dado 3 se tienen 5 posibilidades, luego por el principio multiplicativo, se obtienen $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ posibilidades.
				En el dado 1 se tienen 5 posibilidades, en el dado 2 se tiene 1 posibilidad y en el dado 3 se tienen 5 posibilidades, luego por el principio multiplicativo, se obtienen $5 \cdot 1 \cdot 5 = 25$ posibilidades.
				En el dado 1 se tienen 5 posibilidades, en el dado 2 se tienen 5 posibilidades y en el dado 3 se tiene 1 posibilidad, luego por el principio multiplicativo, se obtienen $5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$ posibilidades. Por lo tanto, para $X = 1$ se obtienen $25 \cdot 3 = 75$ posibilidades.
2				En el dado 1 se tiene 1 posibilidad, en el dado 2 se tiene 1 posibilidad y en el dado 3 se tienen 5 posibilidades, luego por el principio multiplicativo, se obtienen $1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$ posibilidades.
				En el dado 1 se tiene 1 posibilidad, en el dado 2 se tienen 5 posibilidades y en el dado 3 se tiene 1 posibilidad, luego por el principio multiplicativo, se obtienen $1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$ posibilidades.
				En el dado 1 se tienen 5 posibilidades, en el dado 2 se tiene 1 posibilidad y en el dado 3 se tiene 1 posibilidad, luego por el principio multiplicativo, se obtienen $5 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ posibilidades. Por lo tanto, para $X = 2$ se obtienen $5 \cdot 3 = 15$ posibilidades.
3				En el dado 1 se tiene 1 posibilidad, en el dado 2 se tiene 1 posibilidad y en el dado 3 se tiene 1 posibilidad, luego por el principio multiplicativo, se tiene que para $X = 3$, se obtiene $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ posibilidad.

De la misma forma, se puede determinar la cantidad total de posibles resultados que se obtienen al lanzar los tres dados, tal como se muestra a continuación:

Dado 1	Dado 2	Dado 3	Número de resultados posibles para $X = x_i$
			En el dado 1 se tienen 6 posibilidades, en el dado 2 se tienen 6 posibilidades y en el dado 3 se tienen 6 posibilidades, luego por el principio multiplicativo, la cantidad total de posibles resultados que se obtienen al lanzar 3 dados es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Recuerde que:

La **probabilidad** de ocurrencia de un suceso en el **modelo de Laplace** está dada por:

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

Así, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{125}{216} \\ P(X = 1) &= \frac{75}{216} \\ P(X = 2) &= \frac{15}{216} \\ P(X = 3) &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

Al ordenarlos de mayor a menor probabilidad.

$P(X = 0) > P(X = 1) > P(X = 2) > P(X = 3)$

De esta forma, se concluye que el gráfico que mejor representa la función de probabilidad de X debe tener como recorrido el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, por lo que se descartan los gráficos de las opciones B) y D). Además se debe verificar la relación entre la probabilidad de sus elementos:

$$P(X = 0) > P(X = 1) > P(X = 2) > P(X = 3)$$

Característica que se encuentra en el gráfico de la opción E), siendo esta la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 75

En el experimento de lanzar un dado común se define la variable aleatoria X como la cantidad de números pares obtenidos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El recorrido de X es {2, 4, 6}.
 - II) $P(X = 0) = P(X = 1)$
 - III) El valor esperado de X es 3.
-
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo I y II
 - D) Solo II y III
 - E) Ninguna de ellas.

RESOLUCIÓN

Para determinar la clave del ítem se deben analizar las afirmaciones que se encuentran en I), en II) y en III).

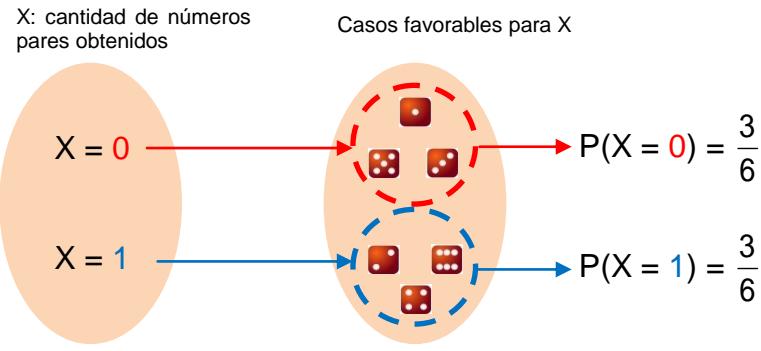
En I) se afirma que el recorrido de la variable aleatoria X es {2, 4, 6}, lo cual es falso, ya que al lanzar un dado común puede que no salga un número par, es decir, **cero** número par, por lo tanto, $X = 0$ o se puede obtener **un** número par, luego $X = 1$, y como $P(X = 0) + P(X = 1) = 1$, se tiene que el recorrido de X es {0, 1}.

Recuerde que:

La **probabilidad** de ocurrencia de un suceso en el **modelo de Laplace** está dada por:

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

Una forma de determinar si la afirmación en II) es verdadera, es calcular la probabilidad de que $X = 0$ y la probabilidad de que $X = 1$, para ello se deben determinar los casos favorables de que al lanzar el dado no se obtenga un número par o de que se obtenga un número par, tal como se muestra a continuación:



Por lo tanto, $P(X = 0) = P(X = 1)$, luego la afirmación en II) es verdadera.

Luego, para determinar si la afirmación en III) es verdadera, se debe calcular el valor esperado de X.

Recuerde que:

El **valor esperado** de una variable aleatoria discreta, cuyo recorrido es finito, es igual a la suma de los productos de cada uno de los valores de su recorrido por su respectiva probabilidad.

De lo anterior, se tiene que el valor esperado de X, $E(X)$, se determina como:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) \\
 &= 0 \cdot \frac{3}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} \\
 &= 0 + \frac{3}{6} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor esperado de X no es igual a 3, luego la afirmación en III) es falsa.

Del desarrollo anterior y como solo la afirmación en II) es verdadera, la clave es la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Variable aleatoria discreta y valor esperado de una variable aleatoria discreta.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 76

Un juego de azar consiste en lanzar un dado común, donde el jugador que lanza el dado pierde si obtiene un número impar o un múltiplo de 3 y en otro caso gana. Si un jugador lanza el dado n veces, con $n > 3$, ¿cuál es la probabilidad de que gane exactamente en tres de ellos?

A) $\binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$

B) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$

C) $\binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$

D) $\binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

E) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta, se puede determinar la probabilidad de que al lanzar el dado común, en una ocasión, el jugador pierda o gane, luego se puede aplicar el modelo de distribución binomial para n lanzamientos.

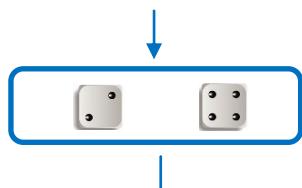
Recuerde que:

En un **modelo binomial**, al repetirse N veces un experimento aleatorio con resultados dicotómicos (éxito o fracaso), se tiene que, si la probabilidad de tener éxito en el experimento es p y la probabilidad de tener fracaso en el mismo experimento es $q = 1 - p$, entonces la probabilidad de obtener exactamente k éxitos, al efectuar de forma independiente N veces dicho experimento, con $N \geq k$, está dado por la expresión:

$$\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k}$$

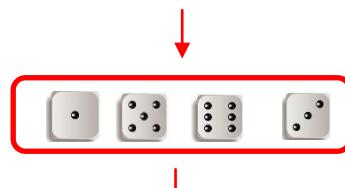
Así, se asignará como p la probabilidad de ganar (éxito) y como q la probabilidad de perder (fracaso) que tiene un jugador al lanzar un dado común, de donde se tiene lo siguiente:

La cantidad de casos favorables para obtener p es la cantidad de números que **no son impares y que no son múltiplos de 3**.



$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La cantidad de casos favorables para obtener q es la cantidad de números que **son impares o son múltiplos de 3**.



$$q = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Finalmente, al aplicar el modelo binomial para calcular la probabilidad de que un jugador gane exactamente en tres ocasiones al lanzar n veces un dado común (obtener exactamente 3 éxitos), con $N = n$, $k = 3$, $p = \frac{1}{3}$ y $q = \frac{2}{3}$, se obtiene $\binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$, expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar el concepto de modelo probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales.

Contenido: Modelo binomial.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: A

PREGUNTA 77

En la tabla adjunta se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas, sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética. Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que este prefiera una mermelada no dietética, sabiendo que es mujer, es

Mermelada		
	No dietética	Dietética
Mujer	6	24
Hombre	18	12

- A) $0,0\bar{3}$
- B) $0,1\bar{6}$
- C) 0,2
- D) 0,25
- E) $0,\bar{3}$

RESOLUCIÓN

Por las condiciones del problema, una manera de resolver este ítem es aplicando la definición de probabilidad condicional.

Recuerde que:

La **probabilidad condicional** consiste en la probabilidad de ocurrencia de un suceso A dado la ocurrencia de un suceso B , la cual se escribe como $P(A/B)$ y se calcula como $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, donde $P(B)$ es la probabilidad de que ocurra B , $P(B) \neq 0$ y $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ocurra A y B .

De esta forma al seleccionar un encuestado al azar, se pueden definir los siguientes sucesos:

A: La persona prefiere mermelada no dietética.

B: La persona es mujer.

($A \cap B$): La persona prefiere mermelada no dietética y es mujer.

Además, se considerará como:

B: La cantidad de casos favorables del suceso B.

($A \cap B$): La cantidad de casos favorables del suceso ($A \cap B$).

$$\text{Luego, } P(B) = \frac{\# B}{\text{Cantidad de casos totales}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\# (A \cap B)}{\text{Cantidad de casos totales}}$$

Así, de la tabla se pueden identificar los casos totales y los casos favorables para calcular $P(B)$ y $P(A \cap B)$, como se muestra a continuación:

		Mermelada	
		No dietética	Dietética
	Mujer	6	24
	Hombre	18	12
		# B = 6 + 24 = 30	
		# (A ∩ B) = 6	

Como la cantidad de casos totales corresponde a la cantidad de personas encuestadas, es decir, $6 + 24 + 18 + 12 = 60$, se tiene lo siguiente:

$$P(B) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$
$$P(A \cap B) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$
$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \cancel{2} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Por lo que, la clave se encuentra en C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Probabilidad condicional.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 78

Sea X una variable aleatoria discreta y F su función de distribución de probabilidad acumulada. Si $F(-1) = \frac{1}{3}$ y $F(1) = 1$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

- A) El recorrido de X es el conjunto $\{-1, 1\}$.
- B) $P(X = 0) = 0$
- C) $F(-2) = 0$
- D) $P(X = -1) = \frac{1}{3}$
- E) Ninguna de las anteriores.

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem, se deben analizar cada una de las afirmaciones que se encuentran en las opciones y de esta forma determinar cuál de ellas es siempre verdadera.

Recuerde que:

Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}$, con n un número entero positivo y su **función de distribución de probabilidad acumulada** F , entonces se cumple lo siguiente:

$$F(x_1) = P(X = x_1)$$

$$F(x_2) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$$

$$F(x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3)$$

$$F(x_4) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4)$$

...

$$F(x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) + \dots + P(X = x_n) = I$$

En A), se afirma que el recorrido de X es $\{-1, 1\}$, sin embargo como $F(-1)$ y $F(1)$ son valores que acumulan la probabilidad de la variable X cuando $X = -1$ y $X = 1$, respectivamente, no se puede determinar los valores del recorrido de X que existen antes de -1 y entre -1 y 1 , es decir, no se puede determinar el recorrido de X con la información del enunciado.

Debido a lo anterior, a que no se puede determinar el recorrido de X , no se puede asegurar que existan los valores de $P(X = 0)$ y $F(-2)$, luego, las igualdades en B) y en C) no son siempre verdaderas.

En D) se afirma que $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, lo cual no es necesariamente verdadero, pues $F(-1)$

acumula la probabilidad de $X = -1$, luego, si existe otro valor del recorrido menor a -1 se tiene que $P(X = -1) \neq F(-1)$.

Por ejemplo, sea la variable aleatoria discreta X con función de probabilidad dada en la siguiente tabla:

k	P(X = k)
-3	$\frac{1}{9}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{5}{9}$
1	$\frac{1}{9}$

De dicha tabla se tiene que $F(-1) = \frac{1}{3}$ y $F(1) = 1$, pero:

- El recorrido de X es el conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$.
- $P(X = 0) = \frac{5}{9}$
- $F(-2) = \frac{2}{9}$
- $P(X = -1) = \frac{1}{9}$

Por lo anterior, se deduce que la clave es E), ya que todas las afirmaciones de las opciones no son siempre verdaderas.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Función de distribución de probabilidad acumulada.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 79

La estatura de una población de estudiantes de educación básica se modela a través de una distribución normal con media 150 cm y varianza de 100 cm^2 . Si se selecciona al azar a un estudiante de esta población y la probabilidad de que este mida a lo menos Q cm es de 0,977, ¿cuál es el valor de Q?

- A) 170 cm
- B) 130 cm
- C) 350 cm
- D) 50 cm
- E) Ninguno de los anteriores.

RESOLUCIÓN

Una forma de determinar el valor de Q, es definir la variable aleatoria X como la estatura de una población de estudiantes, y luego, estandarizar dicha variable utilizando la tabla que aparece en las instrucciones del modelo, considerando que si se selecciona al azar a un estudiante de esta población, la probabilidad de que este mida a lo menos Q cm es de 0,977, es decir, $P(X \geq Q) = 0,977$.

Recuerde que:

Si X es una **variable aleatoria continua** tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ tiene distribución normal $(0, 1)$, es decir, $Z \sim N(0, 1)$, por ello $P(X \geq x) = P\left(Z \geq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.

Como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 150$ cm y $\sigma^2 = 100$ cm², se tiene que, $P(X \geq Q) = P(Z \geq \frac{Q - 150}{10})$, para $Z \sim N(0, 1)$, luego, se obtiene lo siguiente:

$$P(X \geq Q) = 0,977 \longrightarrow P\left(Z \geq \frac{Q - 150}{10}\right) = 0,977$$

Ahora, se puede buscar en la tabla de las instrucciones del modelo el valor de z correspondiente a $P(Z \geq z) = 0,977$, pero se debe tener en consideración que esta tabla entrega valores para $P(Z \leq z)$. Luego, para relacionar $P(Z \geq z) = 0,977$ con los valores de la tabla, se pueden realizar los siguientes pasos:

Paso 1

Se busca la probabilidad de 0,977 en la tabla de las instrucciones y se relaciona dicha probabilidad con un valor de z, en este caso $z = 2,00$.

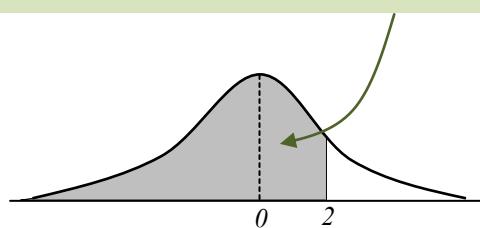
$$P(Z \leq 2,00) = 0,977$$

z	$P(Z \leq z)$
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995

Paso 2

Se relaciona el valor $P(Z \leq 2) = 0,977$ con la gráfica de la función de distribución normal $(0, 1)$, conocida también como campana de Gauss.

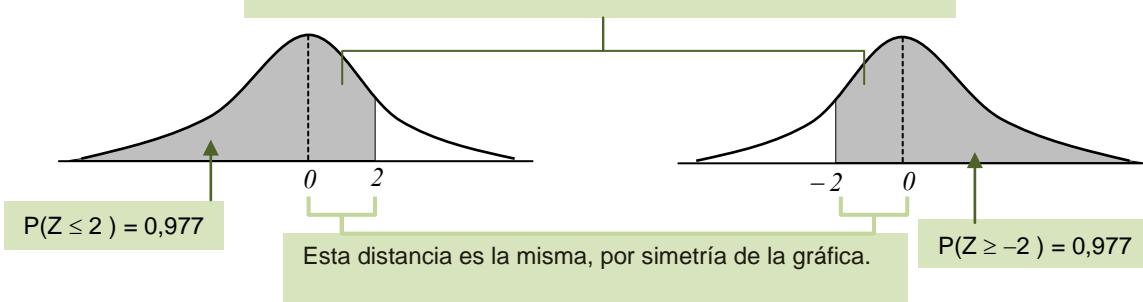
El área bajo la curva corresponde a la probabilidad de 0,977 para todos los valores menores o iguales a 2.



Paso 3

Se utiliza la simetría de la gráfica, para determinar el valor de z para $P(Z \geq z) = 0,977$.

El área bajo la curva en ambas gráficas corresponde a 0,977.



De esta forma, se puede establecer que el valor de z correspondiente a $P(Z \geq z) = 0,977$ es -2 .

Ahora, se despeja Q en la ecuación $-2 = \frac{Q - 150}{10}$, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{Q - 150}{10} \\ -2 \cdot 10 &= Q - 150 \\ -20 &= Q - 150 \\ -20 + 150 &= Q \\ 130 &= Q \end{aligned}$$

De esta manera, se obtiene que el valor de Q se encuentra en la opción B), siendo esta la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.

Contenido: Función de densidad de una variable aleatoria continua con distribución normal.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 80

En una caja hay en total 20 bolitas del mismo tipo, unas de color rojo, otras de color azul y otras de color negro. Al sacar una bolita al azar de la caja, se puede determinar la probabilidad de que esta sea de color negro, si se sabe que:

- (1) Al extraer al azar una bolita de la caja, la probabilidad de que sea negra es igual a la probabilidad de que sea roja.
- (2) La cantidad de bolitas de azules que hay en la caja es la mitad de la cantidad de bolitas rojas que hay en la caja.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem, se pueden establecer los siguientes sucesos en el experimento de extraer una bolita al azar de la caja dada en el enunciado:

N: La bolita escogida es de color negro.

A: La bolita escogida es de color azul.

R: La bolita escogida es de color rojo.

Además, por las condiciones del problema se considerará como modelo probabilístico el modelo de Laplace, donde:

n: es la cantidad de casos favorables del evento N.

a: es la cantidad de casos favorables del evento A.

r: es la cantidad de casos favorables del evento R.

Recuerde que:

La **probabilidad** de ocurrencia de un suceso en el **modelo de Laplace** está dada por:

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

De esta manera, se debe determinar, si con las informaciones dadas en (1) y/o en (2) se puede obtener el valor de P(N), donde $P(N) = \frac{n}{20}$, con $n + a + r = 20$.

Así, la información entregada en (1) indica que $P(N) = P(R)$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$P(N) = P(R)$$
$$\frac{n}{20} = \frac{r}{20}$$

$$n = r$$

La probabilidad de que
ocurra R es $P(R) = \frac{r}{20}$.

Luego, como no se conoce el valor de r, con la información dada en (1), no se puede determinar P(N).

Al analizar la información entregada en (2), se puede establecer que $a = \frac{r}{2}$. Sin embargo esta información, tampoco permite obtener P(N), pues no se conoce la cantidad de bolitas de ninguno de los tres colores.

Ahora, se debe analizar las informaciones dadas en (1) y en (2) a la vez. De (1) se tiene que $n = r$ y de (2) se tiene que $a = \frac{r}{2}$, luego se puede establecer lo siguiente:

La suma de todas las bolitas es igual a la cantidad total de bolitas que contiene la caja.

$$n + a + r = 20$$

$$r + \frac{r}{2} + r = 20$$

Se deja toda la expresión en función de r.

De esta última ecuación se puede determinar el valor de r, por lo tanto, se obtiene el valor de P(R) que es igual a P(N), luego la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento en forma teórica dependiendo de las características del experimento aleatorio.

Contenido: Modelo de Laplace.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C



UNIVERSIDAD DE CHILE
Vicerrectoría de Asuntos Académicos
DEMRE