VaR - *Value at Risk*

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Universidade de Brasília

Departamento de Estatística

Aulas anteriores

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma série financeira (Ex.: fechamento diário de uma ação)

- Retornos

$$y_t = (x_t - x_{t-1})/x_{t-1} = \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1$$

- log-retornos (ou simplesmente retornos)

$$y_t = \log(x_t/x_{t-1}) = \nabla \log(x_t)$$

- Vimos que na prática a definição de retornos ou log-retornos se equivalem

$$\log(x_t/x_{t-1}) \;\approx\; (x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$$

Aulas anteriores

- Volatilidade

$$h_t = Var_{t-1}[y_t]$$

Obs: aqui nos referimos a volatilidade como sendo a variância condicional dos retornos, no entanto, alguns livros equivalentemente referem a volatilidade como sendo o desvio padrão condicional ($\sqrt{h_t}$).

- A homocedasticidade (variância constante) de uma série de retornos pode ser testada aplicando o teste de independência de Ljung-Box em $\{y_t^2\}$. Assim, se o teste rejeita a hipótese nula, então a série é considerada heterocedástica.

Aulas anteriores

- Modelo GARCH(p,q)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \sqrt{h_t}\,\varepsilon_t \\
h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}
\end{aligned}
$$

  sendo $\{\varepsilon_t\}$ i.i.d $N(0,1)$ (ou outra distribuição padronizada);

- Quando os retornos apresentam autocorrelação ou média diferente de zero, pode-se utilizar primeiramente um modelo ARMA e depois o GARCH para os resíduos;

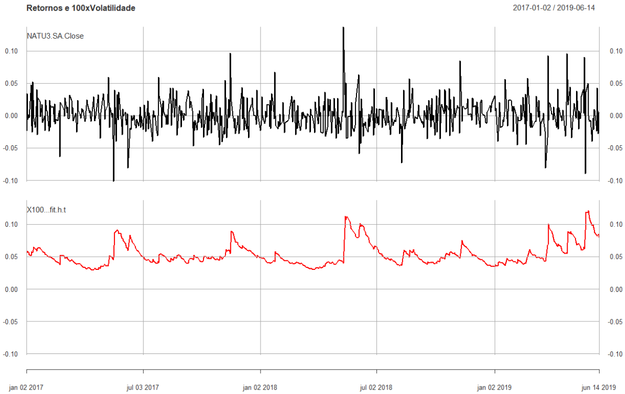
Aulas anteriores

- Ajuste: código do R

```
> require(fGarch)

> fit = garchFit(formula =  garch(1,1), data=y)
```

- Gráfico dos retornos e da volatilidade ($\times$100)



Value at Risk (VaR)

- A ideia básica do VaR é responder a seguinte pergunta:

  Em condições normais do mercado, qual a perda máxima esperada dentro de um horizonte de tempo e de uma probabilidade?

- Exemplo:

  Se um fundo de investimento afirma que o VaR de 95% da carteira deles é de $R\$100.000,00$, significa que só existe 5% de chance da carteira desvalorizar mais que $R\$100.000,00$ em um dia.

- OBS: catástrofes financeiras do tipo, delação do Joesley Batista, greve dos caminhoneiros, Brumadinho, entre outras, não são consideradas.

Value at Risk (VaR)

- Na prática, o VaR pode ser entendido como uma proporção ou o capital (abordagem mais comum)
  - **percentual:** o VaR consiste no quantil da distribuição condicional dos retornos.
    - Exemplo: O VaR de 95% da ação PETR4 para amanhã é de 2%, ou seja, existe 95% de chance da carteira não perder mais que 2% do capital até amanhã.
  - **capital:** o VaR consiste no quantil da distribuição condicional dos retornos multiplicado pelo capital investido.
    - Exemplo: Suponha que no exemplo anterior a carteira possui hoje o capital de R$ 10.000,00, assim podemos afirma que o VaR de 95% é 2% de R$10.000,00, ou seja, VaR(95%) = R$200,00.

- VaR para modelo GARCH
  - Admitindo um modelo GARCH com erros normais para a série de retornos, isto é,

$$y_t = \sqrt{h_t}\,\varepsilon_t$$

    em que $\{\varepsilon_t\}$ é i.i.d. $N(0,1)$ com h_t sendo modelado pelo GARCH.
  - Então

$$y_{t|t-1} \sim N(0, h_t)$$

  - Portanto

$$VaR_t\,[(1-\alpha)\%] = (-\sqrt{h_t}\,q_\alpha)\,C$$

    em que q_α é o quantil α da $N(0,1)$ e C é o montante investido.
  - OBS: Se outra distribuição de probabilidade é assumida para o termo de erro, então o quantil desta outra distribuição deve ser considerado para o calculo do VaR;

- VaR para modelo ARMA-GARCH
  - Admitindo um modelo ARMA-GARCH com erros normais para a série de retornos, isto é,

$$y_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\,\varepsilon_t$$

em que $\{\varepsilon_t\}$ é i.i.d. $N(0,1)$, com μ_t sendo modelado pelo ARMA e h_t sendo modelado pelo GARCH.

  - Então

$$y_{t|t-1} \sim N(\mu_t, h_t)$$

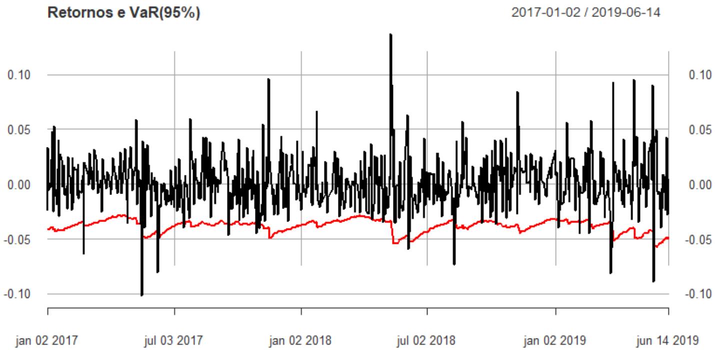
  - Portanto

$$VaR_t\,[(1-\alpha)\%] = -(\sqrt{h_t}\,q_\alpha + \mu_t)\,C$$

em que q_α é o quantil α da $N(0,1)$ e C é o montante investido.

Exemplo NATU3: Retornos e VaR(95%)

- Modelo GARCH(1, 1) com erros normais



Volatilidade e VaR em períodos maiores

- Vimos em aulas anteriores que o log-retorno de um período maior corresponde a soma dos log-retornos dos períodos menores.

  Exemplo

  - Retorno para 2 dias

    $y_t^{(2)} = \log(x_t/x_{t-2}) = y_t + y_{t-1}$
  - Retorno para k dias

    $y_t^{(k)} = \log(x_t/x_{t-k}) = y_t + y_{t-1} + \cdots + y_{t-(k+1)}$

  em que $\{y_t\}$ denota os log-retornos diários;

- Sob a suposição de não autocorrelação dos retornos, temos

  - Volatilidade para 2 dias

    $\hat{h}^{(2)}_{t+2|t} = \hat{h}_{t+2|t} + \hat{h}_{t+1|t}$
  - Volatilidade para k dias

    $\hat{h}^{(k)}_{t+k|t} = \hat{h}_{t+k|t} + \hat{h}_{t+k-1|t} + \cdots + \hat{h}_{t+1|t}$

Aplicação: VaR para uma semana

- Suponha que deseja-se calcular o VaR para uma semana (5 dias úteis)
- Inicialmente calcule a previsão de volatilidade para os próximos 5 dias.
- Some as previsões para obter a volatilidade no período,
  $\hat{h}^{(5)}_{t+5|t} = \hat{h}_{t+5|t} + \hat{h}_{t+5-1|t} + \cdots + \hat{h}_{t+1|t}$
- O VaR de $(1-\alpha)\%$ para uma semana é dado por
  - Modelo GARCH

$$VaR_{t+5}[(1-\alpha)\%]^{(5)} = -\left(\sqrt{\hat{h}^{(5)}_{t+5|t}}\, q_\alpha\right) C$$

  - Modelo ARMA+GARCH

$$VaR_{t+5}[(1-\alpha)\%]^{(5)} = -\left(\sqrt{\hat{h}^{(5)}_{t+5|t}}\, q_\alpha + \mu_{t+5|t}\right) C$$

Exemplo:

- $VaR(95\%)$ para 1 e 5 dias via modelo GARCH(1,1) com erros N(0,1).

  Código do R

  ```
  > h = predict(fit,n.ahead=5)[,3]^2
  > -qnorm(0.05,mean=0,sd=sqrt(h[1])) # 1 dia
  0.0474639
  > -qnorm(0.05,mean=0,sd=sqrt(sum(h))) # 5 dias
  0.1056352
  ```

- Interpretação:
  - Com 95% de probabilidade, a perda máxima esperada para um dia é de 4,74% do capital investido;
  - Com 95% de probabilidade, a perda máxima esperada para uma semana é de 10,56% do capital investido;

VaR para uma carteira de ações

- Suponha que o investimento esteja dividido em mais de uma ação
- A técnica anterior permite calcular o VaR para cada ação individualmente
- Mas e para a carteira como um todo?

VaR para uma carteira de ações

- Suponha que o capital C esteja distribuído em k ações com os seguintes pesos $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k)'$;
- Definimos o retorno na carteira como a soma dos retornos individuais ponderado pelos w's, isto é,

$$y_t = \sum_{i=1}^{k} w_i \, y_{i,t}$$

em que $y_{i,t} = \log(x_{i,t}/x_{i,t-1})$ é o retorno da i-ésima ação no momento t.

- Assim, a volatilidade da carteira é dada por

$$h_t = \sum_{i=1}^{k} w_i^2 h_{i,t} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{k} w_i \, w_j \, Cov_{t-1}(y_{i,t}, y_{j,t})$$

em que $h_{i,t}$ denota a volatilidade da i-ésima ação no tempo t.

VaR para uma carteira de ações

- Equivalente também podemos escrever a volatilidade da carteira no formato matricial

$$h_t = \mathbf{w}'H_t\mathbf{w}$$

em que H_t denota a matriz de auto-covariâncias condicional do retornos no tempo t.

- Obtida a volatilidade da carteira, o $VaR[(1-\alpha)\%]$ pode ser calculado da mesma forma que anteriormente, isto é,

$$VaR_t\left[(1-\alpha)\%\right] = -(\sqrt{h_t}\, q_\alpha + \mu_t)\, C$$

- Logo, a única dificuldade gira em torno de se obter as auto-covariâncias condicionais;

Exercício 1:

Suponha que na presente data, a sua carteira de investimento esteja distribuída como na tabela abaixo

Ativo	Custódia
PETR4	500
VALE3	300
BBAS3	250
Total	1050

(a) Supondo covariância constante entre os retornos, obtenha uma aproximação para a matriz $\mathbf{H}_t$;

(b) Calcule o VaR[95%] para o próximo dia;

Modelo CCC-GARCH

- Seja $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \ldots, y_{k,t})'$ é o vetor dos retornos no tempo t
- CCC-GARCH: Constante Conditional Correlation GARCH

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y_t} &= H_t^{1/2} \boldsymbol{\epsilon_t} \\
H_t &= D_t \, R \, D_t \\
D_t &= diag(h_{1,t}^{1/2}, \ldots, h_{k,t}^{1/2})
\end{aligned}
$$

  em que $H_t^{1/2}$ denota a decomposição de Cholesky de H_t e R denota a matriz de correlação dos retornos, a qual é admitida ser constante por este modelo.

- Proposto em Bollerslev, T. 1990, Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model, The Review of Economics and Statistics, 72(3), 498–505

Modelo DCC-GARCH

- DCC-GARCH: Dynamic Conditional Correlation GARCH

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y_t} &= H_t^{1/2} \boldsymbol{\epsilon_t} \\
H_t &= D_t R_t D_t \\
D_t &= diag(h_{1,t}^{1/2}, \ldots, h_{k,t}^{1/2}) \\
R_t &= \text{diag}(Q_t)^{-1/2}\ Q_t\ \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \\
Q_t &= (1 - a - b)R + a\,\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}'_{t-1} + b\,Q_{t-1}
\end{aligned}
$$

em que $\mathbf{u}_t = D_t^{-1}\mathbf{y}_t$ são os retornos padronizados e R é a matriz de covariância incondicional de $\mathbf{u}_t$. Q_t pode ser interpretada como a matriz de covariância dos erros padronizados, e por ser modelada como um GARCH(1,1), temos $a > 0$, $b > 0$ e $a + b < 1$. Após alguma algebra, pode-se demonstrar que $h_{ij,t} = q_{ij,t}\sqrt{h_{ii,t}h_{jj,t}}/\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}$.

- Proposto em Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation - a simple class of multivariate GARCH models. Journal of Business and Economic Statistics 20, 339-350.

Implementações no R

- **Inferência clássica**:

  pacotes: ccgarch, rmgarch

- **Inferência Bayesiana**:

  Pacote: bayesDccGarch

  Vantagens: considera a incerteza a respeito do estimador

  Desvantagens: custo computacional

  Referência:

  Fiorucci, J. A., R. S. Ehlers, and M. G. Andrade (2014). Bayesian multivariate GARCH models with dynamic correlations and asymmetric error distributions. Journal of Applied Statistics 41 (2), 320-331.

Exercício 2

Considerando a carteira de investimento abaixo, verifique o histórico do VaR[95%] pelo modelo DCC-GARCH.

Ativo	Custódia
PETR4	500
VALE3	300
BBAS3	250
Total	1050