Análise de Séries Temporais

Modelo Médias Móveis

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Departamento de Estatística
Universidade de Brasília

Modelo de Médias Móveis (*moving avarage*, MA(q))

- Def: Considere $\{\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots\}$ um ruído branco com média zero e variância σ^2. Um processo MA(q) é definido como

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

  sendo $\theta_1, \dots, \theta_q$ constantes.

- Os modelos MA podem ser escrito em função dos operadores de retardo

$$\begin{aligned} x_t &= \varepsilon_t + \theta_1 B\varepsilon_t + \theta_2 B^2\varepsilon_t + \cdots + \theta_q B^q\varepsilon_t \\ &= \left(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q\right)\varepsilon_t \\ &= \Theta(B)\,\varepsilon_t \end{aligned}$$

  em que $\Theta(B) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q)$ é chamado de *polinômio de média móveis* de ordem q.

Propriedades

- Média:

$$
\begin{aligned}
E[x_t] &= E[\varepsilon_t] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}] + \theta_2 E[\varepsilon_{t-2}] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-q}] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- Variância

$$
\begin{aligned}
Var[x_t] &= Var[\varepsilon_t] + \theta_1^2 Var[\varepsilon_{t-1}] + \theta_2^2 Var[\varepsilon_{t-2}] + \cdots + \theta_q^2 Var[\varepsilon_{t-q}] \\
&= \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)
\end{aligned}
$$

- Autocovariância
  - MA(1)

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= cov(x_t, x_{t+h}) \\
&= cov(\ \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}\ ,\ \varepsilon_{t+h} + \theta_1\varepsilon_{t+h-1}\ ) \\
&= cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h-1}) + \theta_1 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+h}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+h-1}) \\
&= \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma^2 & \text{, se } h = 0 \\ \theta_1\sigma^2 & \text{, se } h = 1 \\ 0 & \text{, se } h > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

  - MA(q) - "Caso geral"

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2)\,\sigma^2 & \text{, se } h = 0 \\ \sigma^2 \displaystyle\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j\theta_{j+h} & \text{, se } h = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \text{, se } h > q \end{cases}$$

em que $\theta_0 = 1$.

- Exercício: demonstre esse resultado.

Propriedades

- Autocorrelação

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } h = 0 \\ \dfrac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} & , \text{ se } h = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & , \text{ se } h > q \end{cases}$$

- OBS 1: processos MA(q) são sempre **estacionários**

- OBS 2: note que a função de autocorrelação possui uma quebra após a defasagem "q", isto é, $\rho(h) = 0, \ h > q$. Esta propriedade é útil para identificar a ordem do modelo.

- Inversibilidade: O modelo MA(q) é inversível se as raízes do polinômio de médias móveis $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$ estão fora do circulo unitário, isto é, todas as raízes são maiores que 1 em valor absoluto.
  - o modelo MA(q) pode ser escrito como um modelo AR(∞)

- OBS: o modelo MA(1) é inversível se $|\theta_1| < 1$. (Exercício: verifique)

- Exemplo: Considere o modelo MA(1), $x_t = \varepsilon_t + \theta\,\varepsilon_{t-1}$, com $|\theta| < 1$.

Note que,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_t &= x_t - \theta\,\varepsilon_{t-1} \\
&= x_t - \theta\,(x_{t-1} - \theta\,\varepsilon_{t-2}) \\
&= x_t - \theta\,x_{t-1} + \theta^2\,\varepsilon_{t-2} \\
&= x_t - \theta\,x_{t-1} + \theta^2\,(x_{t-2} - \theta\,\varepsilon_{t-3}) \\
&= x_t - \theta\,x_{t-1} + \theta^2\,x_{t-2} - \theta^3\,\varepsilon_{t-3} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad < \ \text{no limite, como } |\theta| < 1 \ > \\
&= x_t + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^i\,x_{t-i}
\end{aligned}
$$

logo

$$
x_t = -\sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^i\,x_{t-i} + \varepsilon_t
$$

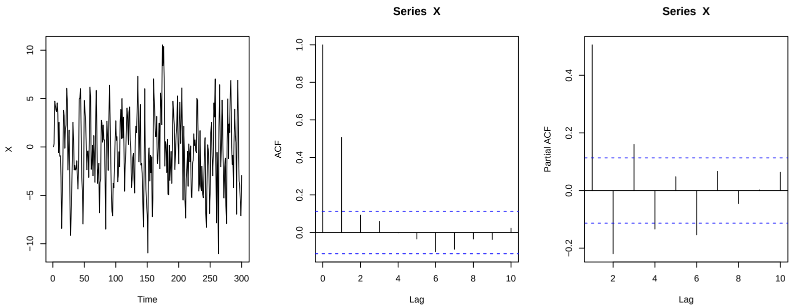
é um processo AR(∞).

Identificando um modelo MA(q)

- Aplica-se apenas para séries **estacionárias**
- FAC: decai progressivamente com corte a partir de q
- FACP: decai para zero sem cortes
  - Uma vez que qualquer modelo MA inversível pode ser escrito como um modelo AR(∞)

Simulação do processo MA(1): $x_t = \varepsilon_t + 0.7\,\varepsilon_{t-1}$ com $\varepsilon_t \sim N(0, 9)$

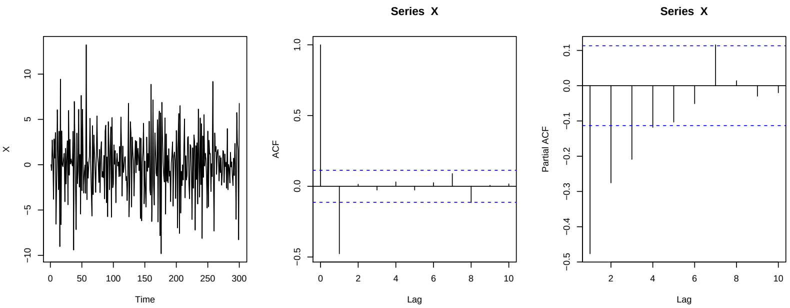
```
n <- 300
E <- rnorm(n,0,3)
X <- numeric(n)
X[1] = 0
for(i in 2:n){
  X[i] <- E[i] + 0.7*E[i-1]
}
par(mfrow=c(1,3))
plot.ts(X)
acf(X, 10)
pacf(X, 10)
```



Exemplo 2:

Simulação do processo MA(1): $x_t = \varepsilon_t - 0.7\,\varepsilon_{t-1}$ com $\varepsilon_t \sim N(0, 9)$

```
n <- 300
E <- rnorm(n,0,3)
X <- numeric(n)
X[1] = 0
for(i in 2:n){
  X[i] <- E[i] - 0.7*E[i-1]
}
par(mfrow=c(1,3))
plot.ts(X)
acf(X, 10)
pacf(X, 10)
```



Simulação do processo MA(2): $x_t = \varepsilon_t + 0.5\,\varepsilon_{t-1} - 0.4\,\varepsilon_{t-2}$ com $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

```
n <- 300
E <- rnorm(n,0,1)
X <- numeric(n)
X[1] = 0
X[2] = 0
for(i in 3:n){
    X[i] <- E[i] + 0.5*E[i-1] - 0.4*E[i-2]
}
par(mfrow=c(1,3))
plot.ts(X)
acf(X, 10)
pacf(X, 10)
```