# Análise de Séries Temporais

## Operadores, Modelos AR, Gráfico FACP

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Departamento de Estatística
Universidade de Brasília

- Operador de diferença ($\nabla$)
  - Definição: $\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$
  - $2^a$ ordem:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 x_t &= \nabla(\nabla x_t) \\
&= \nabla(x_t - x_{t-1}) \\
&= \nabla x_t - \nabla x_{t-1} \\
&= x_t - x_{t-1} - (x_{t-1} - x_{t-2}) \\
&= x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}
\end{aligned}$$

- Operador de retardo ($B$)
  - Definição: $B\,x_t = x_{t-1}$
  - $2^a$ ordem:

$$\begin{aligned}
B^2 x_t &= B(B\,x_t) \\
&= B\,x_{t-1} \\
&= x_{t-2}
\end{aligned}$$

  - p-esima ordem: $B^p\,x_t = x_{t-p}$

- Equivalências:
  - $\nabla x_t = (1 - B)x_t$
  - $\nabla^2 x_t = x_t - 2Bx_t + B^2 x_t = (1 - B)^2 x_t$

# Modelos Autoregressivos (AR)

- Def: Um processo estacionário $\{x_t, t = 1, 2, \dots\}$ é autoregressivo de ordem "p" se

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

  sendo $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p$ constantes e $\{\varepsilon_t\}$ um ruído branco com média zero e variância $\sigma^2$.
  - Geralmente denotado por AR(p).

- Sem perda de generalizadade podemos assumir $\mu = 0$,
  - pois se $\mu \neq 0$ então podemos considerar o processo sendo aplicado para $x_t - \mu$.

- O processo pode ser escrito em função do operador de retardo

$$x_t = \phi_1 B x_t + \phi_2 B^2 x_t + \cdots + B^p x_t + \varepsilon_t$$

  ou equivalentemente

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) x_t = \varepsilon_t$$

  ou ainda

$$\Phi(B) x_t = \varepsilon_t$$

  em que $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ é chamado de *polinômio autoregressivo* de ordem $p$.

Considere o modelo AR(1): $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, com $|\phi| < 1$

Note que,

$$\begin{aligned} x_t &= \phi x_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \phi(\phi x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \phi^2 x_{t-2} + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \phi^2 (\phi x_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \phi^3 x_{t-3} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \vdots \\ &= \phi^k x_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

Assim, no limite $k \to \infty$, temos:

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$$

o que corresponde a um modelo de *médias móveis* de ordem infinita, MA($\infty$).

- Modelos MA serão estudados em breve.

Segue do resultado anterior que

- Média

$$\mu_x = E[x_t] = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \, \varepsilon_{t-i}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \, E\left[\varepsilon_{t-i}\right] = 0$$

- Autocovariancias

$$\begin{aligned}
\gamma(h) = cov(x_{t+h}, x_t) &= cov\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \, \varepsilon_{t+h-i} \; , \; \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \, \varepsilon_{t-j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{i+j} \, cov(\varepsilon_{t+h-i} \; , \; \varepsilon_{t-j}) && < \text{note que } cov(\varepsilon_k \; , \; \varepsilon_p) = 0, \; \text{se } k \neq p) > \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{h+2j} E[\varepsilon_{t-j}^2] && < \text{note que } t + h - i = t - j \; \Leftrightarrow \; i = j + h) > \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{h+2j} \sigma^2 && < \text{soma de PG infinita: } \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = 1/(1 - \phi^2) > \\
&= \sigma^2 \frac{\phi^h}{1 - \phi^2}, \qquad h = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

- Variância

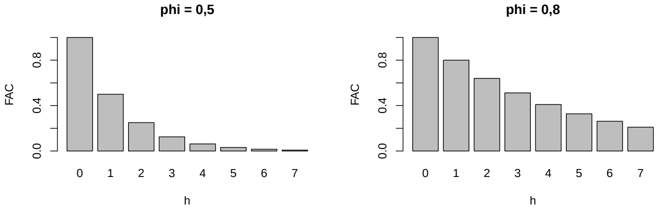
$$\sigma_x^2 = V[x_t] = \gamma(0) = \sigma^2 \frac{1}{1-\phi^2}$$

- Autocorrelação

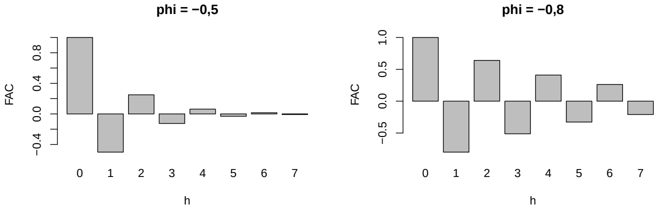
$$\rho(h) = cor(x_{t+h}, x_t) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h$$

# FAC teórico do AR(1)

- Gráfico correlograma (FAC)
    - $0 < \phi < 1$




    - $-1 < \phi < 0$



Teorema: O processo AR(p) é estacionário se as raízes do polinômio característico

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

estão fora do circulo unitário, isto é, em módulo as raízes são maiores que 1.

- Demonstração: veja Box, Jenkins & Reinsed (1994)

- Exemplo 1: Mostre que o processo AR(1) é estacionário apenas para $|\phi| < 1$.

$$\Phi(B) = 0 \ \Rightarrow \ 1 - \phi B = 0 \ \Rightarrow \ B = 1/\phi$$

Logo $|B| > 0$ apenas se $|\phi| < 1$.

- Exemplo 2: Verifique se o processo $x_t = 0.5x_{t-1} + 0.4x_{t-2} + \varepsilon_t$ é estacionário.
  - Polinômio característico: $\Phi(B) = 1 - 0.5B - 0.4B^2$
  - Raízes do polinômio: $B_1 = 1.075$ e $B_2 = -2.325$
  - Resultado: como $|B_1| > 1$ e $|B_2| > 1$ o processo é estacionário.

# Gráfico FACP - Função de autocorrelação parcial

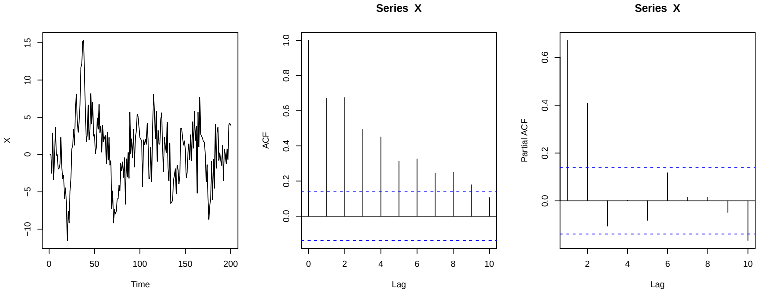
- Em um modelo $AR(p)$, o termo $\phi_p$ mede o excesso da correlação que não é levado em conta por um modelo $AR(p-1)$.

- O gráfico FACP consiste em plotar os valores de $\phi_p$ obtidos dos respectivos modelos AR(p), para $p = 1, 2, 3, \ldots$.

- Esse tipo de gráfico ajuda na determinação da ordem $p$ do processo AR. Por exemplo, se o gráfico FACP apresenta valores de $\phi_p$ significativamente diferentes de zero apenas para $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$, então é provável que se trata de um processo AR(3).

- Processo AR(2) estacionário: $x_t = 0.5x_{t-1} + 0.4x_{t-2} + \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t \sim N(0, 9)$

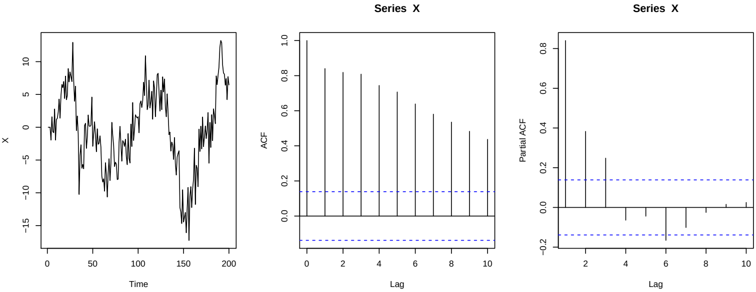
```
n <- 200
X <- numeric(n)
X[1:2] = 0
for(i in 3:n){
  X[i] <- 0.5*X[i-1] + 0.4*X[i-2] + rnorm(1,0,3)
}
par(mfrow=c(1,3))
plot.ts(X)
acf(X, 10)
pacf(X, 10)
```



# Exemplo 2:

- Processo AR(3) estacionário: $x_t = 0.3x_{t-1} + 0.4x_{t-2} + 0.2x_{t-3} + \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t \sim N(0, 9)$

```
n <- 200
X <- numeric(n)
X[1:3] = 0
for(i in 4:n){
    X[i] <- 0.3*X[i-1] + 0.4*X[i-2] + 0.2*X[i-3] + rnorm(1,0,3)
}
par(mfrow=c(1,3))
plot.ts(X)
acf(X, 10)
pacf(X, 10)
```



- A série deve ser estacionária
  - Modelos AR não se aplicam a séries não estacionárias
- A FAC decai de forma amortizada para zero
- A FACP é zero a partir do lag $p$