Análise de Séries Temporais

ACF, CCF, Diferenciação e Retornos

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Departamento de Estatística
Universidade de Brasília

Section 1

Estimando a autocorrelação

Estacionaridade

- **Estacionaridade:** dizemos que um processo com variância finita é *fracamente estacionário* se
  1. a função média é constante, isto é, $\mu_t = E[x_t] = \mu, \ \forall \ t = 1, 2, \ldots$
  2. a função de autocovariâncias, $\gamma(s, t) = cov(x_s, x_t)$, depende de s e t apenas a partir da diferença $|s - t|$

- O item 2) é equivalente a afirmar que a função de autocoariâncias é constante entre quaisquer pontos com a mesma defagem, isto é, dado um valor inteiro h então $\gamma(h) = \gamma(t + h, t)$ é constante para todo $t = 1, 2, 3, \ldots$. Por conta disto, é comum denotar a função de autocovariâncias apenas como função da defasagem, $\gamma(h)$.

Estimando autocorrelação em séries estacionárias

Assumindo que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma série observada de um processo **estacionário**, então

- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$ é um estimador pra média $\mu = \mu_t = E[x_t]$, pois esta é constante.
- como a autocovariância é constante entre pontos com a mesma defasagem, então a autocovariância amostral de ordem h, dada por

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})$$

  é um estimador para $\gamma(h) = cov(x_t, x_{t-h})$.
- da mesma forma, a autocorrelação amostral de ordem h, dada por

$$\widehat{\rho}(h) = \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)}$$

  é um estimador para a $\rho(h) = cor(x_t, x_{t-h})$.
- geralmente nos referimos a $\widehat{\rho}(h)$ como Função de Autocorrelação (FAC) ou do inglês *autocorrelation function* (ACF).

OBS: se o processo é **não estacionário**, então $\widehat{\gamma}(h)$ e $\widehat{\rho}(h)$ **não são estimadores** para $\gamma(t+h,\, t)$ e $\rho(t+h,\, t)$.

FAC - Correlograma

- Se $x_1, \ldots, x_n$ foram obtidos de um processo i.i.d. com variância finita, então pode-se mostrar que

$$\widehat{\rho}(h) \ \sim^{a} \ Normal(\,0\,,\,1/n\,)$$

para qualquer $h = 1, 2, 3, \ldots$.

  - Referência: Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1991), Time Series: Theory and Methods, 2nd Edi- tion, Springer-Verlag, New York.

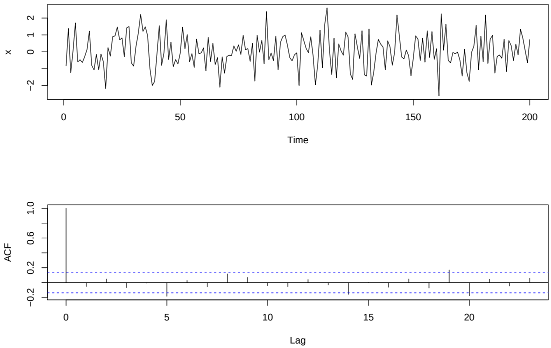
- E comum considerar $\rho(h)$ significantemente diferente de zero (95%) se $\widehat{\rho}(h)$ esta fora do intervalo $0 \pm 2/\sqrt{n}$

- O gráfico correlograma consiste em plotar os valores de $\widehat{\rho}(h)$ para $h = 1, 2, 3, \ldots$, juntamente com os limites $\pm 2/\sqrt{n}$.

Exemplos

- Ruido Branco - série estacionária

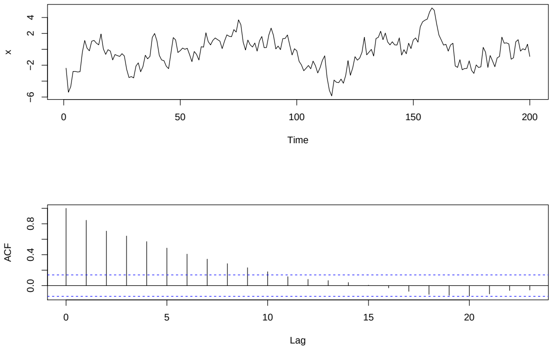
```
x <- rnorm(200)
par(mfrow=c(2,1))
plot.ts(x)
acf(x, main='')
```



Exemplos

- AR(1): $X_t = 0.8\,X_{t-1} + \varepsilon_t$ - série estacionária

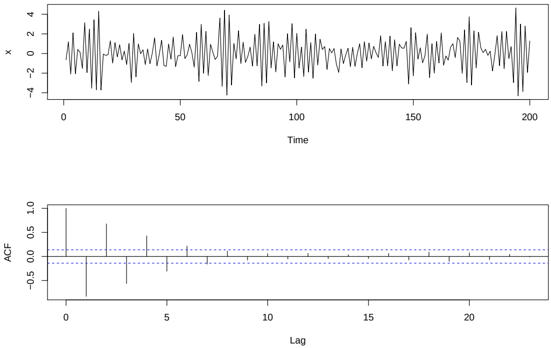
```
x<-arima.sim(n=200, rand.gen = rnorm, list(ar = 0.8))
par(mfrow=c(2,1))
plot.ts(x)
acf(x, main='')
```



Exemplos

- AR(1): $X_t = -0.8\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ - série estacionária

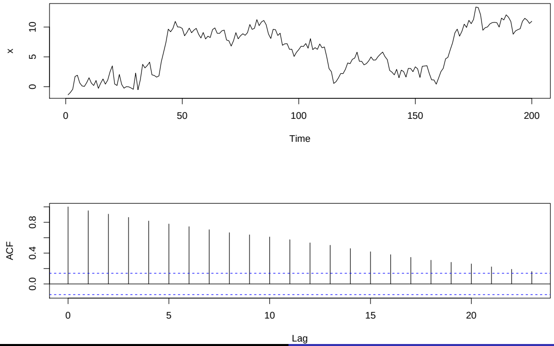
```
x<-arima.sim(n=200, rand.gen = rnorm, list(ar = -0.8))
par(mfrow=c(2,1))
plot.ts(x)
acf(x, main='')
```



Exemplos

- Passeio Aleatório: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ - série não estacionária

```
e <- rnorm(200)
x <- cumsum(e)
par(mfrow=c(2,1))
plot.ts(x)
acf(x, main='')
```



Section 2

Estimando a Correlação Cruzada

Correlação Cruzada

Seja $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, 3, \ldots, n\}$ uma série temporal bivariada.

- Covariância Cruzada

$$\gamma_{xy}(s, t) = cov(x_s, y_t), \quad s = 1, 2, \ldots, n\,; \;\; t = 1, 2, \ldots, n$$

- Correlação Cruzada

$$\rho_{xy}(s, t) = cor(x_s, y_t), \quad s = 1, 2, \ldots\; n; \;\; t = 1, 2, \ldots, n$$

Correlação Cruzada - Estimação

Sob a suposição de **estacionaridade** de ambas as séries, então $\gamma_{xy}(s,t)$ e $\rho_{xy}(s,t)$ são funções que dependem apenas da defasagem $h = |t - s|$, ou seja, podemos simplificar a notação para

$$\gamma_{xy}(h) = \gamma_{xy}(t, t+h), \forall t = 1, 2, ...$$

e

$$\rho_{xy}(h) = \rho_{xy}(t, t+h), \forall t = 1, 2, ...$$

Logo a autovariância amostral e a autocorrelação amostral, dadas por

$$\widehat{\gamma}_{xy}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(x_t - \bar{x})(y_{t+h} - \bar{y})$$

e

$$\widehat{\rho}_{xy}(h) = \frac{\widehat{\gamma}_{xy}(h)}{\sqrt{\widehat{\gamma}_x(0)\widehat{\gamma}_y(0)}}$$

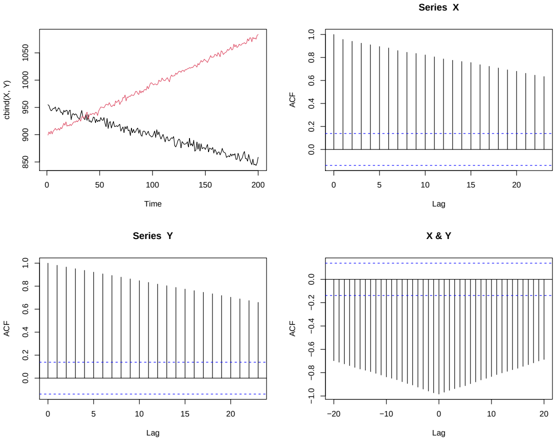
são estimadores para $\gamma_{xy}(h)$ e $\rho_{xy}(h)$, respectivamente.

Correlação Cruzada - Gráfico CCF

- Se x e y são processos i.i.d., pode-se mostrar que $\widehat{\rho}_{xy}(h) \sim^{a} Normal(\,0,\, 1/n)$.
- $\rho_{xy}(h)$ é considerado significativamente (95%) diferente de zero se $\widehat{\rho}_{xy}(h)$ esta fora do intervalo $0 \pm 2/\sqrt{n}$
- O gráfico de correlograma cruzado (CCF) consiste em plotar os valores de $\widehat{\rho}_{xy}(h)$, juntamente com os limites $\pm 2/\sqrt{n}$.

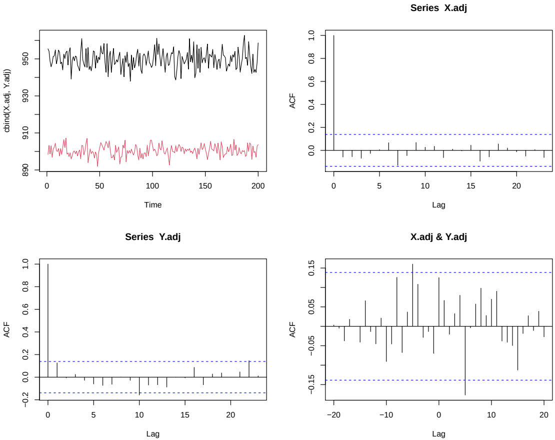
Exemplo de relações espurias - Séries com tendência

```
n <- 200
X <- 950 - 0.5*(1:n) + rnorm(n,0,5)
Y <- 900 + 0.9*(1:n) + rnorm(n,0,3)
par(mfrow=c(2,2))
plot.ts(cbind(X,Y), plot.type = "single", col=c(1,2)) ## Séries não estacionárias
acf(X)   ## Autocorrelação Espuria
acf(Y)   ## Autocorrelação Espuria
ccf(X,Y) ## Correlação Cruzada Espuria
```



Continuação do exemplo: séries com tendência linear ajustada

```r
X.adj <- X + 0.5*(1:n)
Y.adj <- Y - 0.9*(1:n)
par(mfrow=c(2,2))
plot.ts(cbind(X.adj,Y.adj), plot.type = "single", col=c(1,2))  ## Séries estacionárias
acf(X.adj)   ## Autocorrelação
acf(Y.adj)   ## Autocorrelação
ccf(X.adj,Y.adj) ## Correlação Cruzada
```



Cuidado

- Erro comum: calcular correlação em séries que não são estacionárias
  - Séries com tendência geram correlações espurias
  - Solução: aplicar uma transformação a priori para tornar as séries estacionárias

- Exemplo: www.tylervigen.com/spurious-correlations

Section 3

Transformações

Transformações

- Diferenciação

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$$

- Retornos: (apenas para séries com valores positivos)
  - tipo 1

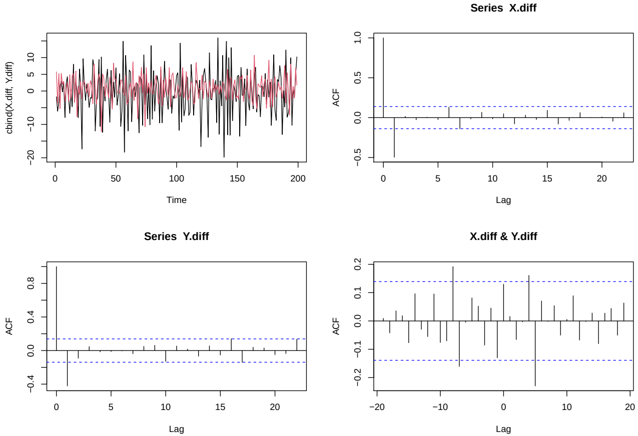
$$r_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$$

  - tipo 2

$$r_t = \log(x_t/x_{t-1}) = \log(x_t) - \log(x_{t-1}) = \nabla \log(x_t)$$

Exemplo - diferenciação

```
X.diff <- diff(X)
Y.diff <- diff(Y)
par(mfrow=c(2,2))
plot.ts(cbind(X.diff,Y.diff), plot.type = "single", col=c(1,2))  ## Séries estacionárias
acf(X.diff)   ## Autocorrelação
acf(Y.diff)   ## Autocorrelação
ccf(X.diff,Y.diff) ## Correlação Cruzada
```



Exemplo - retornos

```
par(mfrow=c(3,2))
r_BVSP <- diff(log(BVSP))
r_AORD <- diff(log(AORD))
plot(BVSP, main='IBOVESPA')
plot(r_BVSP, main='Retornos IBOVESPA')
plot(AORD, main='AORD: Indice Australia')
plot(r_AORD, main='Retornos AORD')
r <- cbind(r_BVSP, r_AORD) %>% na.omit() %>% as.matrix()
ccf(r[,1],r[,2], main='Ret BVSP vs Ret AORD')
```