Análise de Séries Temporais

Previsão utilizando modelos ARIMA

José Augusto Fiorucci

Section 1

Previsão em Séries Temporais

Introdução

Def.: Dado uma série temporal $x_1, \ldots, x_n$, definimos a previsão para x_{n+h} (h-passos a frente), com $h \geq 1$, de duas maneiras:

- **Previsão pontual:** o valor esperado condicional de x_{n+h}, isto é,

$$\widehat{x}_{n+h|n} = \mu_{n+h|n} = E[x_{n+h}|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1]$$

  - Obs: a variância condicional, dada por

$$\sigma^2_{n+h|n} = Var[x_{n+h}|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] = E[(x_{n+h} - \mu_{n+h|n})^2|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1]$$

    é chamada de *erro quadrático médio de previsão*.
- **Previsão intervalar:** dado uma probabilidade de cobertura, $100(1-\alpha)\%$, a previsão intervalar consiste no intervalo (LI, LS), tal que,

$$1 - \alpha = P[LI < x_{n+h} < LS|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1]$$

  - Note que, se $x_{n+h|n} \sim N(\mu_{n+h|n}, \sigma^2_{n+h|n})$, então

$$LI = \mu_{n+h|n} - Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\sigma^2_{n+h|n}}$$

$$LS = \mu_{n+h|n} + Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\sigma^2_{n+h|n}}$$

    em que $Z_{(p)}$ denota o quantil p da Normal padrão.

Obs: o lag de previsão h é chamado de **horizonte de previsão**.

Introdução

- Em muitos modelos $\mu_{n+h|n}, \sigma^2_{n+h|n}$ ou mesmo a distribuição de probabilidade de $x_{n+h|n}$ é difícil de ser obtido analíticamente. Nestes casos, geralmente métodos numéricos são empregados.

Section 2

Previsão em modelos ARMA

Previsão em modelos MA(q)

Modelo MA(q),

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

em que $\{\varepsilon_t\}$ é um processo i.i.d com média zero e variância σ^2_ε

Após o ajuste do modelo, os resíduos $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ são conhecidos. Então:

- 1-passo: como $x_{n+1} = \varepsilon_{n+1} + \theta_1\varepsilon_n + \cdots + \theta_q\varepsilon_{n-q+1}$, segue que
  - $\mu_{n+1|n} = E_n[x_{n+1}] = \theta_1\varepsilon_n + \cdots + \theta_q\varepsilon_{n-q+1}$
  - $\sigma^2_{n+1|n} = Var_n[x_{n+1}] = Var[\varepsilon_{n+1}] = \sigma^2_\varepsilon$
- 2-passos: como $x_{n+2} = \varepsilon_{n+2} + \theta_1\varepsilon_{n+1} + \theta_2\varepsilon_n + \cdots + \theta_q\varepsilon_{n-q+2}$, segue que
  - $\mu_{n+2|n} = E_n[x_{n+2}] = \theta_2\varepsilon_n + \cdots + \theta_q\varepsilon_{n-q+2}$
  - $\sigma^2_{n+2|n} = Var_n[x_{n+2}] = Var[\varepsilon_{n+2} + \theta_1\varepsilon_{n+1}] = (1 + \theta_1^2)\sigma^2_\varepsilon$

$\vdots$

- h-passos: $x_{n+h} = \varepsilon_{n+h} + \theta_1\varepsilon_{n+h-1} + \theta_2\varepsilon_{n+h-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{n-q+h}$
  - $\mu_{n+h|n} = \begin{cases} \theta_h\varepsilon_n + \cdots + \theta_q\varepsilon_{n-q+h}, & h \leq q \\ 0, & h > q \end{cases}$
  - $\sigma^2_{n+h|n} = \left(1 + \sum_{j=1}^{\min(h-1,q)} \theta_j^2\right)\sigma^2_\varepsilon$

- Segue da equação anterior que o erro quadrático de previsão em um modelo MA(∞) é dado por

$$\sigma^2_{n+h|n} = \left(1 + \sum_{j=1}^{h-1} \theta_j^2\right) \sigma_\varepsilon^2$$

- Uma vez que qualquer modelo estacionário, AR(p) ou ARMA(p,q), pode ser escrito como um MA(∞), a equação anterior pode ser utilizada para calcular o erro quadrático de previsão desses modelos.

Previsão em Modelos ARMA

Modelo ARMA(1,1)

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

- 1-passo: como $x_{n+1} = \phi x_n + \varepsilon_{n+1} + \theta \varepsilon_n$, segue que
  - $\mu_{n+1|n} = E_n[x_{n+1}] = \phi x_n + \theta \varepsilon_n$
  - $\sigma^2_{n+1|n} = Var_n[x_{n+1}] = Var[\varepsilon_{n+1}] = \sigma^2_\varepsilon$
- 2-passos: como $x_{n+2} = \phi x_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \theta \varepsilon_{n+1}$, segue que
  - $\mu_{n+2|n} = E_n[x_{n+2}] = \phi E_n[x_{n+1}] = \phi \mu_{n+1|n}$
  - $$\begin{aligned} \sigma^2_{n+2|n} &= Var_n[x_{n+2}] = Var_n[\phi x_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \theta \varepsilon_{n+1}] \\ &= \phi^2 Var_n[x_{n+1}] + Var[\varepsilon_{n+2}] + \theta^2 Var[\varepsilon_{n+2}] + \phi\theta cov_n(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \\ &= \phi^2 \sigma^2_{n+1|n} + (1 + \theta^2 + \phi\theta)\sigma^2_\varepsilon \end{aligned}$$

⋮

- h-passos: $x_{n+h} = \phi x_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h} + \theta \varepsilon_{n+h-1}$
  - $\mu_{n+h|n} = E_n[x_{n+h}] = \phi \mu_{n+h-1|n}$
  - $$\begin{aligned} \sigma^2_{n+h|n} &= \phi^2 Var_n[x_{n+h-1}] + Var[\varepsilon_{n+h}] + \theta^2 Var[\varepsilon_{n+h-1}] + \phi\theta cov_n(x_{n+h-1}, \varepsilon_{n+h-1}) \\ &= \phi^2 \sigma^2_{n+h-1|n} + (1 + \theta^2 + \phi\theta)\sigma^2_\varepsilon \end{aligned}$$

Modelo ARMA(p,q) - Caso Geral

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

em que $\alpha = (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)\mu$ é o intercepto e $\mu = E[x_t]$ é a média incondicional da série.

- Média condicional (Previsão Pontual)

$$\mu_{n+h|n} = \alpha + \phi_1 x^*_{n+h-1} + \cdots + \phi_p x^*_{n+h-p} + \theta_1 \varepsilon^*_{n+h-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon^*_{n+h-q}$$

em que

$$x_j^* = \begin{cases} x_j \ , \ j \leq n \\ \mu_{j|n} \ , \ j > n \end{cases}$$

e

$$\varepsilon_j^* = \begin{cases} \varepsilon_j \ , \ j \leq n \\ 0 \ , \ j > n \end{cases}$$

Desta forma, as previsões pontuais de qualquer modelo ARMA podem ser calculadas de forma recursiva para $h = 1, 2, 3, \ldots$.

- Variância condicional - Modelo ARMA(p,q)
  - Pro caso geral, $\sigma^2_{n+h|n}$ é difícil de ser obtido diretamente.
  - Vimos na Aula 7 que se verificada a condição de estacionariedade, então existe a representação do processo na forma causal, isto é, o processo pode ser escrito como um MA(∞).
  - Digamos que essa representação seja dada por

$$x_t - \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

    em que $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ são os coeficientes calculados do MA(∞) (veja aula 7).
  - Logo, o erro quadrático de previsão é obtido do processo MA(∞)

$$\sigma^2_{n+h|n} = \left(1 + \sum_{i=1}^{h-1} \psi_i^2\right) \sigma^2_\varepsilon$$

Exemplo

Exemplo: Suponha o modelo $x_t = 0.4x_{t-1} + 0.3x_{t-2} + \varepsilon_t$ com $\{\varepsilon_t\}$ sendo i.i.d $N(0, 2)$, foi identificado como sendo o mais adequado para uma série temporal terminada nos pontos $x_{n-1} = 6.7, x_n = 5$. Determine a previsão pontual para cinco pontos a frente de n, calcule o erro quadrático de previsão e calcule a previsão intervalar com 95% de confiança.

- Previsão pontual:

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}_{n+1} &= 0.4x_n + 0.3x_{n-1} = 0.4 \times 5 + 0.3 \times 6.7 = 4.01 \\
\widehat{x}_{n+2} &= 0.4\widehat{x}_{n+1} + 0.3x_n = 0.4 \times 4.01 + 0.3 \times 5 = 3.10 \\
\widehat{x}_{n+3} &= 0.4\widehat{x}_{n+2} + 0.3\widehat{x}_{n+1} = 0.4 \times 3.10 + 0.3 \times 4.01 = 2.44 \\
\widehat{x}_{n+4} &= 0.4\widehat{x}_{n+3} + 0.3\widehat{x}_{n+2} = 0.4 \times 2.44 + 0.3 \times 3.10 = 1.91 \\
\widehat{x}_{n+5} &= 0.4\widehat{x}_{n+4} + 0.3\widehat{x}_{n+3} = 0.4 \times 1.91 + 0.3 \times 2.44 = 1.50
\end{aligned}
$$

- coeficientes da forma causal (aula 6.2 e aula 7): $\psi_i = \theta_i + \sum_{j=1}^{i} \phi_j \psi_{i-j}$, com $\psi_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \phi_1\psi_0 = 0.4 \times 1 = 0.4 \\
\psi_2 &= \phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_0 = 0.4 \times 0.4 + 0.3 \times 1 = 0.46 \\
\psi_3 &= \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 + \phi_3\psi_0 = 0.4 \times 0.46 + 0.3 \times 4 + 0 \times 1 = 0.304 \\
\psi_4 &= \phi_1\psi_3 + \phi_2\psi_2 + \phi_3\psi_1 + \phi_4\psi_0 = 0.2596
\end{aligned}
$$

- erro quadrático de previsão: $\sigma^2_{n+h|n} = \left(1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2\right) \sigma^2_\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{n+1|n} &= \sigma^2_\varepsilon = 2 \\
\sigma^2_{n+2|n} &= (1 + \psi_1^2)\sigma^2_\varepsilon = 2.32 \\
\sigma^2_{n+3|n} &= (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2)\sigma^2_\varepsilon = 2.743 \\
\sigma^2_{n+4|n} &= (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2)\sigma^2_\varepsilon = 2.928 \\
\sigma^2_{n+5|n} &= (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2)\sigma^2_\varepsilon = 3.063
\end{aligned}
$$

- previsão intervalar: $(\mu_{n+h|n} - 1,96\sqrt{\sigma^2_{n+h|n}}\,,\ \mu_{n+h|n} + 1,96\sqrt{\sigma^2_{n+h|n}})$

$$
\begin{aligned}
(LI_{n+1}\,,\ LS_{n+1}) &= (1.238\,,\ 6.781) \\
(LI_{n+2}\,,\ LS_{n+2}) &= (0.120\,,\ 6.079) \\
(LI_{n+3}\,,\ LS_{n+3}) &= (-0.803\,,\ 5.683) \\
(LI_{n+4}\,,\ LS_{n+4}) &= (-1.445\,,\ 5.265) \\
(LI_{n+5}\,,\ LS_{n+5}) &= (-1.928\,,\ 4.928)
\end{aligned}
$$

Section 3

Previsão em modelos integrados

Previsão Pontual em Modelos Integrados

- Previsão Pontual: consiste basicamente em tomar o inverso das transformações de diferença que levaram ao modelo estacionário.
  - Exemplo: Modelo ARIMA(p,1,q)

    Se $\{x_t\}$ é um processo ARIMA(p,1,q), então a série $\{w_t\}$, dada por

    $$w_t = \nabla x_t = x_t - x_{t-1}, \qquad t = 2, 3, \ldots, n$$

    é um processo ARMA(p,q).

    Logo se $\widehat{w}_{n+1|n}, \widehat{w}_{n+2|n}, \ldots, \widehat{w}_{n+h|n}$ são as previsões pontuais de $\{w_t\}$, então as previsões de $\{x_t\}$ são calculadas recursivamente tomando o inverso da diferença

    $$\begin{aligned}
    \widehat{x}_{n+1|n} &= x_n + \widehat{w}_{n+1|n} \\
    \widehat{x}_{n+2|n} &= \widehat{x}_{n+1|n} + \widehat{w}_{n+2|n} = x_n + \widehat{w}_{n+1|n} + \widehat{w}_{n+2|n} \\
    &\vdots \\
    \widehat{x}_{n+h|n} &= \widehat{x}_{n+h-1|n} + \widehat{w}_{n+h|n} = x_n + \sum_{i=1}^{h} \widehat{w}_{n+i|n}
    \end{aligned}$$

Previsão Pontual em Modelos Integrados

- Obs 1: No caso de diferenças de ordens maiores, d>1, a inversão deve ser feita recursivamente para $d = 1, d = 2, \ldots$.
- Obs 2: O mesmo procedimento se aplica aos modelos sazonais.

Exemplo:

Exemplo: Considere que o modelo SARIMA(1,1,1)x(1,0,0)$_6$, com parâmetros , $\phi = 0.5$, $\varphi = 0.7$ e $\theta = 0.3$ foi identificado como sendo o mais adequado para uma determinada série temporal $\{x\}$, em que as ultimas 7 observações foram $100, 105, 109, 103, 95, 90, 96$ e o ultimo resíduo $\varepsilon_n = -5$. Calcule a previsão pontual para os próximos 12 pontos.

- Modelo estacionário: $w_t = (1 - B)x_t$ é SARIMA(1,0,1)x(1,0,0)$_6$, ou seja,

$$w_t = 0.5w_{t-1} + 0.7w_{t-6} + \epsilon_t + 0.3\epsilon_{t-1}$$

- Carregando os dados no R e preparando os vetores

```
( x <- c(100,105,109,103,95,90,96,rep(NA,12)) )
```

```
##  [1] 100 105 109 103  95  90  96  NA  NA  NA  NA  NA  NA  NA  NA  NA  NA  NA  NA
```

```
( w <- c(NA, diff(x)) )
```

```
##  [1] NA  5  4 -6 -8 -5  6 NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
```

```
( e <- c(rep(NA,6),-5,rep(0,12)) )
```

```
##  [1] NA NA NA NA NA NA -5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

```
( n <- 7 )
```

```
## [1] 7
```

- Previsão do *w*

```
for(h in 1:12){
  w[n+h] = 0.5*w[n+h-1] + 0.7*w[n+h-6] + e[n+h] + 0.3*e[n+h-1]
}
w %>% tail(12) %>% round(2)
```

```
##  [1]  5.00  5.30 -1.55 -6.37 -6.69  0.86  3.93  5.67  1.75 -3.59 -6.47 -2.64
```

- Previsão do *x*

```
for(h in 1:12){
  x[n+h] = x[n+h-1] + w[n+h]
}
x %>% tail(12) %>% round(2)
```

```
##  [1] 101.00 106.30 104.75  98.38  91.69  92.54  96.47 102.15 103.90 100.31
## [11]  93.84  91.20
```

Previsão Intervalar em Modelos Integrados

- Previsão Intervalar:
  - O erro quadrático de previsão de 1-passo para qualquer modelo arima é σ^2_ε, pois
  $$\sigma^2_{n+1|n} = E_n[(x_{n+1} - \widehat{x}_{n+1|n})^2] = E[\varepsilon^2_{n+1}] = \sigma^2_\varepsilon$$
  - Para horizontes maiores, o calculo não é direto.
    - Brockwell & Davis (1996), cap 6.5, demostra sob certas hipóteses, para n suficientemente grande, o seguinte resultado
    $$\sigma^2_{n+h|n} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma^2_\varepsilon$$
    em que $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{h-1}$ são os primeiros $h-1$ coeficientes do polinômio de médias móveis de ordem infinita, dado por,
    $$\Psi(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i = \frac{\Theta_Q(B^s)\,\Theta_q(B)}{\Phi_P(B^s)\,\Phi_p(B)\,(1-B^s)^D\,(1-B)^d}$$
    - A demonstração é controversa, pois implica que mesmo um modelo integrado ($d \geq 1$ ou $D \geq 1$, não estacionário por definição) ainda poderia ser representado na forma de causal, isto é, como um MA(∞) (estacionário).
    - Desta forma, sob a hipótese de normalidade da componente de erro, a previsão intervalar pode ser calculada analiticamente (slide 1).

Exemplo

Exemplo: Determine a equação dos erros quadráticos de previsão do ARIMA(1,1,1).

- Modelo: $(1-\phi B)(1-B)x_t = (1+\theta B)\varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad x_t = \frac{(1+\theta B)}{1-(1+\phi)B+\phi B^2}\varepsilon_t$
- De Brockwell & Davis, segue que: $\frac{(1+\theta B)}{1-(1+\phi)B+\phi B^2} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \psi_4 B^4 \ldots$
- Então

$$
\begin{aligned}
& 1+\theta B = [\,1-(1+\phi)B+\phi B^2\,](\,1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\psi_4 B^4 \ldots) \\
\Rightarrow\ & 1+\theta B = \ 1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\psi_4 B^4 \ldots \\
& \qquad\qquad -(1+\phi)B-(1+\phi)\psi_1 B^2-(1+\phi)\psi_2 B^3-(1+\phi)\psi_3 B^4+\ldots \\
& \qquad\qquad +\phi B^2+\phi\psi_1 B^3+\phi\psi_2 B^4+\ldots \\
\Rightarrow\ & \qquad 0 = B[\psi_1-\theta-(1+\phi)]+B^2[\psi_2-(1+\phi)\psi_1-\phi]+B^3[\psi_3-(1+\phi)\psi_2+\phi\psi_1] \\
& \qquad\qquad +B^4[\psi_4-(1+\phi)\psi_3+\phi\psi_2]+B^5[\psi_5-(1+\phi)\psi_4+\phi\psi_3]+\ldots
\end{aligned}
$$

- Logo, $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \theta + 1 + \phi$ e os demais $\psi_j = (1+\phi)\psi_{j-1} - \phi\psi_{j-2}$, $j = 2, 3, 4, \ldots$
- E portanto, $\sigma^2_{n+1|n} = \sigma^2_\varepsilon$, $\sigma^2_{n+2|n} = (1+\psi_1^2)\sigma^2_\varepsilon$, $\sigma^2_{n+3|n} = (1+\psi_1^2+\psi_2^2)\sigma^2_\varepsilon$, $\sigma^2_{n+4|n} = (1+\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)\sigma^2_\varepsilon$, $\ldots$

Algumas considerações sobre previsão intervalar

- Previsões intervalares como vistas aqui tendem a ser mais afuniladas do que o real, isto ocorre devido as suposições que os parâmetros ajustados são os parâmetros verdairos e que a distribuição do termo de erro é Normal.

- Alternativamente, intervalos de confiança podem ser calculados via procedimentos de simulação conhecidos como Boostrap.
  - Flexibiliza a escolha da distribuição de probabilidade do termo de erro.
  - Algumas abordagens permitem incluir a variabilidade do estimador no calculo da previsão intervalar. Essas são conhecidas como Bootstrap Aggregating (Bagging).

Section 4

Previsão de modelos ARIMA utilizando o R

Previsão de modelos ARIMA utilizando o R

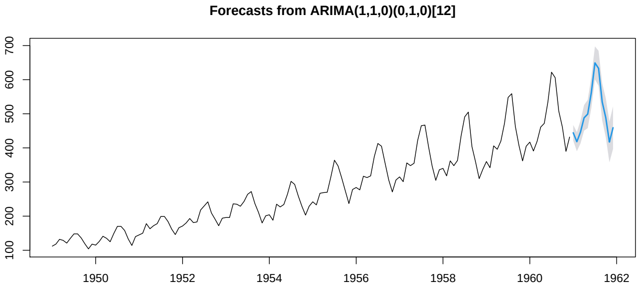
- O R disponibiliza de forma nativa a função *predict()* que permite fazer previsões de modelos ARIMA.
  - Exemplo: na aula 10 identificamos o modelo SARIMA(1,1,0)x(0,1,0) como sendo adequado para a série AirPassengers do R.

```
fit <- arima(AirPassengers, order=c(1,1,0), seasonal = c(0,1,0))
fit %>% predict(n.ahead=12) ## um ano de previsão
```

```
## $pred
##           Jan      Feb      Mar      Apr      May      Jun      Jul      Aug
## 1961 444.3076 418.2130 446.2421 488.2331 499.2359 562.2351 649.2353 633.2352
##           Sep      Oct      Nov      Dec
## 1961 535.2353 488.2352 417.2353 459.2352
##
## $se
##           Jan      Feb      Mar      Apr      May      Jun      Jul      Aug
## 1961 11.70537 14.23728 16.95777 19.13818 21.13870 22.95303 24.63769 26.21327
##           Sep      Oct      Nov      Dec
## 1961 27.69968 29.11020 30.45549 31.74380
```

- O pacote *forecast* permite calcular previsão intervar e fazer gráficos

```
require(forecast)
fit %>% forecast(h=12, level=95) %>% plot()
```



- O pacote *forecast* também disponibiliza uma heurística ajustar automaticamente modelos da família ARIMA. Comando: *auto.arima()*

```
fit <- auto.arima(AirPassengers)
fit %>% forecast(h=12, level=95) %>% plot()
```