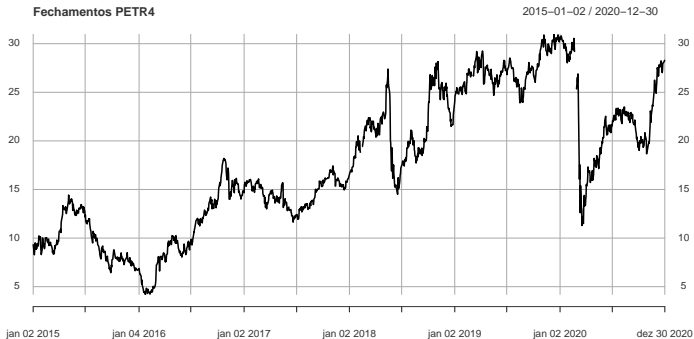


Séries financeiras, retornos e volatilidade

Análise de Séries Temporais

José Augusto Fiorucci

- Exemplo: ação da Petrobrás (PETR4)



- Seja x_1, \dots, x_n uma série temporal financeira

- Retornos podem ser definidos de duas formas

- 1 Tipo Aritmético

$$y_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$$

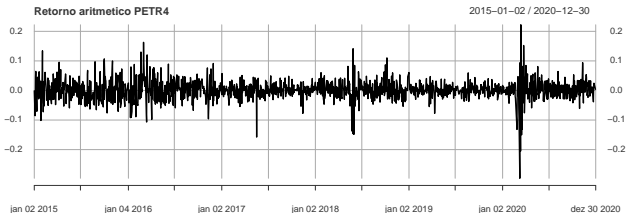
- 2 Tipo Logaritmo (log-retornos)

$$y_t = \log \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

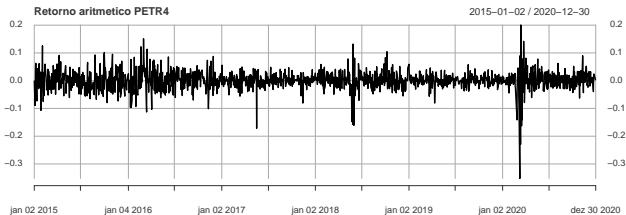
- Para ambas as definições note que:

- a. Variação positiva (negativa) em x_t implica em retornos positivos (negativos);
 - b. Quanto maior a variação em x_t maior a variação no retorno;
 - c. Livre de escala;

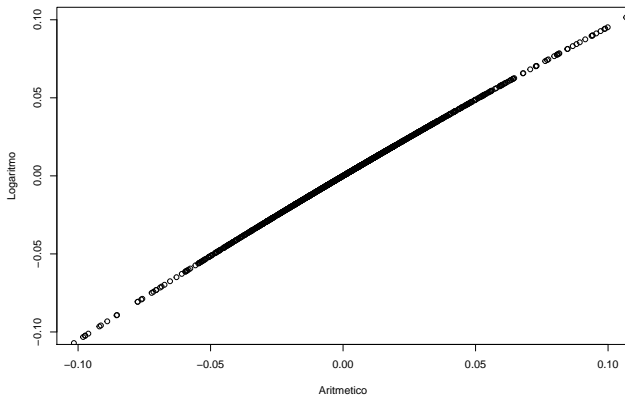
1 Retorno Aritmético



1 Log-retornos



4 Aritmético vs Logaritmo



- Numéricamente, as duas definições são equivalentes.

No entanto, a definição como log-retornos possui uma vantagem matemática:

- Retorno para 1 dia:

$$y_t = \log \frac{x_t}{x_{t-1}} = \log x_t - \log x_{t-1} = \nabla \log x_t$$

- Retorno para 2 dias:

$$y_t^{(2)} = \log \frac{x_t}{x_{t-2}} = y_t + y_{t-1}$$

- Demonstração:

$$\log x_t - \log x_{t-2} = (\log x_t - \log x_{t-1}) + (\log x_{t-1} - \log x_{t-2}) = \nabla \log x_t + \nabla \log x_{t-1}$$

- Retorno para 3 dias:

$$y_t^{(3)} = \log \frac{x_t}{x_{t-3}} = y_t + y_{t-1} + y_{t-2}$$

- Demonstração:

$$\begin{aligned} \log x_t - \log x_{t-3} &= (\log x_t - \log x_{t-1}) + (\log x_{t-1} - \log x_{t-2}) + (\log x_{t-2} - \log x_{t-3}) \\ &= \nabla \log x_t + \nabla \log x_{t-1} + \nabla \log x_{t-2} \end{aligned}$$

No caso geral, temos

- Retornos para k dias

$$y_t^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i}$$

Ou seja, conhecendo retornos diários, a transformação desses para semanas ou meses é praticamente direta.

NOTE: No que segue adotaremos a definição *Tipo Logaritmo* para *retornos*.

Em séries de retornos financeiros as seguintes hipóteses costumam ser válidas:

- Média condicional igual a zero

$$E_{t-1}[y_t] = 0$$

- Variância condicional dinâmica

$$Var_{t-1}[y_t] = h_t$$

em que h_t é uma função que varia no tempo (“não constante”).

- Por conta desta propriedade, a série de retornos $\{y_t\}$ costuma ser chamada *condicionalmente heretocedástica*.
- Segue da propriedade anterior que

$$h_t = Var_{t-1}[y_t] = E_{t-1}[y_t^2]$$

Def.: O termo **volatilidade** refere-se a magnitude da variância condicional dos retornos de uma série (h_t).

Obs.: Não raramente, o termo volatilidade também é empregado para o desvio padrão condicional ($\sqrt{h_t}$).

Outras propriedades geralmente observadas em séries de retornos $\{y_t\}$ são

- Gráficos acf de $\{y_t\}$ **não mostram** autocorrelação significativas.
 - Modelos comuns não podem ser empregados para determinar o futuro do mercado.
- Gráficos acf de $\{y_t^2\}$ **mostram** autocorrelações significativas.
 - Essas autocorrelações são aproveitadas pelos modelos de volatilidade para estimar h_t , uma vez que $h_t = E_{t-1}[y_t^2]$.
 - Isto ocorre devido ao chamado cluster de volatilidade (períodos de alta volatilidade e períodos com baixa volatilidade).
- Curtose > 3 (distribuição leptocurtica), ou seja, a distribuição dos retornos apresenta caudas mais pesadas que a distribuição normal.
- Assimetria a esquerda (Coeficiente de assimetria < 0)
 - Movimentos de baixa no mercado financeiro costumam ser mais rápidos que os movimentos alta, isto reflete nos retornos, tornando-os assimétricos a esquerda.

- Códigos e Exemplos direto no R.