Modelo de Holt-Winters

Análise de Séries Temporais

José Augusto Fiorucci

Método Holt-Winters

- Inicialmente proposto por Holt (1957) e depois estudado em Winters (1960)
- Construido com 3 equações de alisamento, uma para level, uma o crescimento e outra para a sazonalidade
- Duas versões:
  - HW aditivo (sazonalidade aditiva)
  - HW multiplicativo (sazonalidade multiplicatica)

Section 1

Holt-Winters aditivo

Holt-Winters aditivo

- Baseado na decomposição aditiva da série (Aula 2: $Y = T + S + E$)
- Seja "m" o tamanho do ciclo sazonal e $\{s_t\}$ a componente de sazonalidade
  - Serie mensal, $m = 12$
  - Serie bimestral, $m = 6$
  - Serie trimestral, $m = 4$
  - Serie semestral, $m = 2$
- Considere que a previsão um passo a frente seja formada pela soma da tendência $(\ell_t + b_t)$ e da sazonalidade (s_t), isto é,

$$\widehat{y}_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$$

- Seja $z_t = y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}$, assim $\{z_t\}$ é um processo com level ajustado e crescimento ajustado (podemos entende-lá como tendência ajustada), ou seja, a série $\{z_t\}$ é uma mistura das demais componentes, no caso, sazonalidade e ruído.

- A componente sazonal pode ser extraída ao aplicar um filtro de alisamento exponencial com intervalos sazonais em $\{z_t\}$. Seja $\gamma \in (0,1)$ o parâmetro desse alisamento exponencial, então

$$\begin{aligned}
s_t &= \gamma\, z_t + \gamma(1-\gamma)\, z_{t-m} + \gamma(1-\gamma)^2\, z_{t-2m} + \gamma(1-\gamma)^3\, z_{t-3m} + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(1-\gamma)^i z_{t-i\,m} \\
&= \gamma\, z_t + (1-\gamma) \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(1-\gamma)^{i-1} z_{t-i\,m} \qquad < j = i-1 > \\
&= \gamma\, z_t + (1-\gamma) \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(1-\gamma)^j z_{(t-m)-j\,m}
\end{aligned}$$

logo

$$s_t = \gamma\, z_t + (1-\gamma) s_{t-m}$$

ou equivalentemente

$$s_t = \gamma\left(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}\right) + (1-\gamma) s_{t-m}$$

Assim podemos escrever o **método de Holt-Winters aditivo**:

$$\begin{aligned} \text{Previsão:} \quad & \widehat{y}_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} \\ \text{Level:} \quad & \ell_t = \alpha\,(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}) \\ \text{Crescimento:} \quad & b_t = \beta^*\,(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)\,b_{t-1} \\ \text{Sazonalidade:} \quad & s_t = \gamma\,(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m} \end{aligned}$$

- $\{y_t - s_{t-m}\}$ consiste na série com sazonalidade ajustada e $\{y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}\}$ na série com tendência ajustada.
- $\alpha \in (0,1)$, $\beta^* \in (0,1)$ e $\gamma \in (0,1)$ são parâmetros alisamento
- $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $b_0 \in \mathbb{R}$ e $(s_{-m+1}, s_{-m+2}, \ldots, s_{-1}, s_0) \in \mathbb{R}^m$ são parâmetros de inicialização

Admitindo erros aditivos ($y_t = \mu_t + \varepsilon_t$), é facil ver que o MEE correspondente é dado por (veja a aula anterior)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t \\
\ell_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\, \varepsilon_t \\
b_t &= b_{t-1} + \beta\, \varepsilon_t \\
s_t &= s_{t-m} + \gamma\, \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

em que $\beta = \alpha\, \beta^*$.

- Exercício 1: verifique as equações
- Exercício 2: mostre que

$$
y_{n+h} = \ell_n + h\, b_n + s_{n+h-m} + \sum_{i=1}^{h-1} (\alpha + i\, \beta)\, \varepsilon_{n+h-i} + \varepsilon_{n+h}
$$

Dica: aula anterior.

Previsão da componente sazonal

Previsão da componente sazonal:

Note que,

- Se $h \leq m$, então $n + h - m \leq n$ e portanto

$$E_n[s_{n+h-m}] = s_{n+h-m}$$

- Se $h > m$, então $n + h - m > n$, no entanto considere k como o menor número inteiro positivo tal que $n + h - km \leq n$, assim

$$\begin{aligned} s_{n+h-m} &= s_{n+h-2m} + \gamma\, \varepsilon_{n+h-m} \\ &= s_{n+h-3m} + \gamma\left(\varepsilon_{n+h-2m} + \varepsilon_{n+h-m}\right) \\ &\;\vdots \\ &= s_{n+h-km} + \gamma \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_{n+h-i\,m} \end{aligned}$$

e portanto, o valor esperado corresponde a última componente observada, isto é,

$$E_n[s_{n+h-m}] = s_{n+h-km}$$

No caso geral, temos

$$E_n[s_{n+h-m}] = s_{n+h_m^+ - m}$$

em que $h_m^+ = [(h-1) \mod m] + 1$.

- Exemplo: Se $m = 12$, então

$$\begin{aligned}
h = 1 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 1 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_{n-11}] = s_{n-11} \\
h = 2 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 2 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_{n-10}] = s_{n-10} \\
&\vdots \\
h = 12 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 12 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_n] = s_n \\
h = 13 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 1 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_{n+1}] = s_{n-11} \\
h = 14 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 2 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_{n+2}] = s_{n-10} \\
&\vdots \\
h = 24 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 12 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_{n+12}] = s_n \\
h = 25 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 1 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_{n+13}] = s_{n-11} \\
h = 26 \quad &\Rightarrow \quad h_m^+ = 2 \quad \Rightarrow \quad E_n[s_{n+14}] = s_{n-10} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Previsão

Como (*Exercício 2*)

$$y_{n+h} = \ell_n + h\, b_n + s_{n+h-m} + \sum_{i=1}^{h-1} (\alpha + i\,\beta)\, \varepsilon_{n+h-i} + \varepsilon_{n+h}$$

- **Previsão Pontual**:

$$\widehat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = \ell_n + h\, b_n + s_{n+h_m^+ - m}$$

- **Variância**: pode-se mostrar que

$$\sigma^2_{n+h|n} = \sigma^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{h-1} (\alpha + i\,\beta)^2 + (k-1)\gamma^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \gamma\, (\alpha + j\beta) \right]$$

em que k é o menor número inteiro positivo tal que $n - k\, m + h \leq n$.

Exercício

Exercício 3: Para uma série temporal trimestral (4 observações por ano, m=4), o modelo de Holt-Winters foi ajustado, as datas com os valores observadas da série e os respectivos valores das componentes do modelo são apresentados na tabela abaixo.

```
            y     ell      b       s
1992 Q2 4998 5167.86  48.60 -204.50
1992 Q3 5510 5534.82 112.27  -77.87
1992 Q4 5212 5350.45  52.94  -89.01
1993 Q1 4939 5110.51  -5.64 -122.70
1993 Q2 5002 5165.85   6.56 -174.01
```

Suponha que os valores ajustados foram $\alpha = 0.6, \beta = 0.12$ e $\gamma = 0.3$, então:

- Sabendo que a próxima observação (1993 Q3) foi 4820, calcule as demais componentes.
  - Resposta:

```
            y     ell      b       s
1993 Q3 4820 5007.69 -26.38 -160.24
```

- Calcule a previsão pontual para os próximos 5 trimestres.
  - Resposta:

```
       Qtr1   Qtr2   Qtr3   Qtr4
1993                      4892.3
1994 4832.2 4754.5 4741.9 4786.8
```

Exercício 4

- Inclua tendência damping no método de HW aditivo
- Escreva como modelo de espaço de estado
- Conclua que

$$\widehat{y}_{n+h|n} = \ell_n + (\phi + \phi^2 + \cdots + \phi^h)\, b_n + s_{n-m+h_m^+}$$

Section 2

Holt-Winters multiplicativo

Holt-Winters com sazonalidade multiplicativa

- Objetivo: construir previsões do tipo

$$\widehat{y}_{n+h|n} = (\ell_n + h\, b_n)\, s_{n+h_m^+ - m}$$

em que $h_m^+ = [(h-1) \mod m] + 1$.

- Baseado em decomposição do tipo: $Y = T \times S + E$
- Método HW multiplicativo

$$\begin{aligned}
\text{Previsão: } & \widehat{y}_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})\, s_{t-m} \\
\text{Level: } & \ell_t = \alpha\, y_t / s_{t-m} + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}) \\
\text{Crescimento: } & b_t = \beta^* \,(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)\, b_{t-1} \\
\text{Sazonalidade: } & s_t = \gamma\, y_t / (\ell_{t-1} + b_{t-1}) + (1-\gamma) s_{t-m}
\end{aligned}$$

Obs 1: aplicável apenas para séries estritamente positivas

Obs 2: $\{y_t / s_{t-m}\}$ consiste na série com sazonalidade ajustada e $\{y_t / (\ell_{t-1} + b_{t-1})\}$ na série com tendência ajustada.

Modelo HW Multiplicativo

Admitindo erros aditivos ($y_t = \mu_t + \varepsilon_t$), é facil ver que o MEE correspondente é dado por (veja a aula anterior)

$$
\begin{aligned}
y_t &= (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t \\
\ell_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + \frac{\alpha}{s_{t-m}}\varepsilon_t \\
b_t &= b_{t-1} + \frac{\beta}{s_{t-m}}\varepsilon_t \\
s_t &= s_{t-m} + \frac{\gamma}{\ell_{t-1} + b_{t-1}}\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

em que $\beta = \alpha\beta^*$.

- Obs: essas equações configura um MEE não linear, de modo que essas equações não podem ser escritas na forma matricial.
- Exercício 5: verifique as equações.

Previsão

- **Previsão pontual**:

$$\widehat{y}_{n+h|n} = (\ell_n + h\, b_n)\, s_{n+h_m^+ - m}$$

- Obs: a variância de previsão é desconhecida.