Análise de Séries Temporais

Média, autocorrelação e estacionaridade

José Augusto Fiorucci

Section 1

Distribuição de probabilidade e alguns processos estocásticos

Distribuição de probabilidade em séries temporais

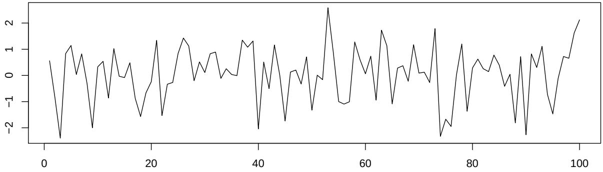
- Seja $\{X_t, t = 1, 2, \ldots, n\}$ uma sequência de v.a.'s definidas no espaço amostral Ω.
- Segue da teoria de probabilidades que

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n|X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

- Neste contexto nos referimos a $P(.)$ como a função de probabilidade se o processo é discreto, bem como a função densidade de probabilidade se o processo é contínuo.
- Notação simplificada
  - Variável aleatória: x_t
  - Processo: $\{x_t\}$
  - Distribuição de probabilidade: $p(x_i) = P(X_i = x_i)$
  - Distribuição condicional: $p_j(x_i) = P(X_i = x_i|X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j)$
  - Distribuição conjunta: $p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{i-1}(x_i)$

Ruído Branco

- Um processo $\{x_t\}$ é chamado de *ruído branco* se as variáveis são i.i.d. com distribuição Normal(0, σ^2).



- Observe que neste tipo de processo a média e variância permacem constantes.

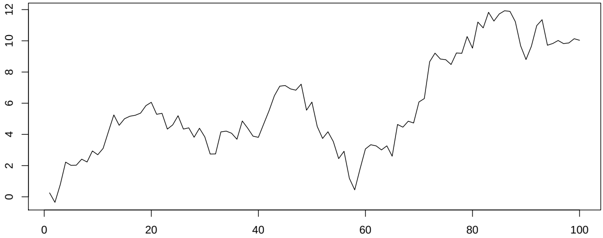
$$\mu_t = E[x_t] = 0$$
$$\sigma_t^2 = V[x_t] = \sigma^2$$

Passeio Aleatório

- Um processo $\{x_t\}$ é chamado de *passeio aleatório* se

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

em que $\{\varepsilon_t\}$ é um ruido branco.



Passeio Aleatório - densidade conjunta

- Admitindo x_0 conhecido, note que
  - $x_1 = x_0 + \varepsilon_1$, logo $x_1 \sim N(x_0, \sigma^2)$
  - $x_2 = x_1 + \varepsilon_2$, logo $x_2 | x_1 \sim N(x_1, \sigma^2)$
  - $\vdots$
  - $x_n = x_{n-1} + \varepsilon_n$, logo $x_n | x_{n-1} \sim N(x_{n-1}, \sigma^2)$
- A função densidade de probabilidade conjunta é dada por

$$
\begin{aligned}
p(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{t=1}^{n} p_{t-1}(x_t) \\
&= \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \ \exp\left[-\frac{(x_t - x_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right]
\end{aligned}
$$

Passeio Aleatório - média e variância

- Admitindo x_0 conhecido, note que

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= x_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= x_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= x_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \end{aligned}$$

- Logo
  - $\mu_t = E[x_t] = x_0$
  - $\sigma_t = Var[x_t] = Var[x_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_t] = \sum_{i=1}^{t} Var[\varepsilon_i] = t\,\sigma^2$

- Obs: note que $Var[x_t] \to \infty$ se $t \to \infty$.

Função de Autocorrelação

- A *Função de Autocovariâncias* é definida como

$$\gamma(s,t) = cov(x_s, x_t) = E[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)]$$

  - Variância: $Var[x_t] = \gamma(t,t)$

- A *Função de Autocorrelação* é definida como

$$\rho(s,t) = cor(x_s, x_t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)}\,\sqrt{\gamma(t,t)}} = \frac{\gamma(s,t)}{\sigma_s\,\sigma_t}$$

Obs 1: $\rho(s,t) = \rho(t,s)$

Obs 2: $-1 \leq \rho(s,t) \leq 1$

Obs 3: $\rho(s,t)$ mede a relação linear entre dois pontos da série.

Passeio Aleatório - autocovariância e autocorrelação

- Para o processo de passeio aleatório, segue que

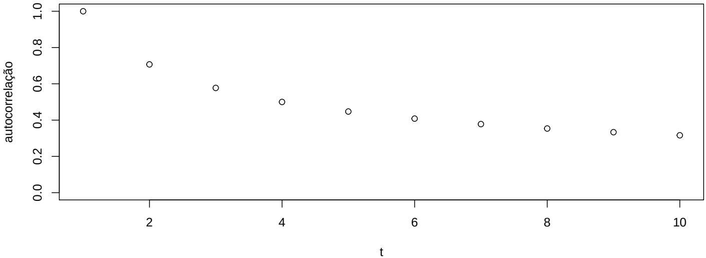
$$\gamma(s,t) = cov\left(x_0 + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i \;,\; x_0 + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j\right) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

$$= cov(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + cov(\varepsilon_2, \varepsilon_2) + \cdots + cov(\varepsilon_{\min(s,t)} \;,\; \varepsilon_{\min(s,t)})$$

$$= min(s,t)\,\sigma^2$$

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)}\,\sqrt{\gamma(t,t)}} = \frac{\min(s,t)}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}}$$

- Fixando s=1



Exercício 1:

- Para o processo conhecido como *Passeio Aleatório com drift*, definido como
$$x_t = \theta + x_{t-1} + \varepsilon_t$$
calcule a função de densidade conjunta, a média, a variância e a função de autocovariâncias.

Section 2

Estacionaridade

Processos Estacionários

- **Estacionaridade Forte:** dizemos que um processo é *estritamente estacionária* se a distribuição conjunta de $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}\}$ é a mesma de $\{x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \ldots, x_{t_k+h}\}$ para quaisquer indices $t_1, t_2, \ldots, t_k$ e qualquer defazagem $h = 0, 1, 2, \ldots$.

- **Estacionaridade:** dizemos que um processo com variância finita é *fracamente estacionário* se
  - a função média é constante, isto é, $\mu_t = E[x_t] = \mu, \ \forall \ t = 1, 2, \ldots$
  - a função de autocovariâncias, $\gamma(s, t)$, depende de s e t apenas a partir da diferença $|s - t|$

  Obs 1: se o processo é estacionário, então $Var[x_t]$ e $E[x_t^2]$ são constantes.

  Obs 2: dizemos que um processo é estacionário de primeira ordem se $E[x_t]$ é constante, e dizemos que esse processo é estacionário de segunda orgem se $E[x_t]$ e $E[x_t^2]$ são constantes.

Exemplos

- **Ruído Branco**
  - $E[x_t] = 0$
  - $\gamma(t, s) = cov(x_t, x_s) = \sigma^2 I_{(t,s)} = \sigma^2 I_{(t-s,0)}$, em que $I_{(t,s)} = 1$ se $t = s$ e $I_{(t,s)} = 0$ se $t \neq s$.

  Logo, ruído branco é um processo **estacionário**.

- **Passeio Aleatório**
  - $E[X_t] = x_0$
  - Se $t < s$ então $\gamma(t, s) = \min(t, s)\,\sigma^2 = t\,\sigma^2$

  Logo, a função de autocovariância depende do tempo t e não da defasagem $|t - s|$, ou seja, o passeio aleatório é **não estacionário**. No entanto, ele é estacionário de primeira ordem.

Exemplos

- **Séries com tendência**

  Se $x_t = T_t + \varepsilon_t$, em que

  - $T_t = a + b\,t$ (linear)
  - $T_t = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots + a_k\,t^k$ (polinomial)
  - $T_t = a_0 + a_1 \exp(a_2 t)$ (exponencial)
  - $T_t = a_0 + a_1 \log(t)$ (logaritma)

  em qualquer um desses casos, note que $E[x_t] = T_t$ é não constante. Séries com tendência são **não estacionárias**.

  Obs: quando o critério (ii) pode ser verificado, então dizemos que a série é *estacionária com tendência*.

Exercícios 2:

1. Mostre que o ruído branco é estritamente estacionário
2. Mostre que se o processo é estacionário então $Var[x_t]$ e $E[x_t^2]$ são constantes
3. Mostre que o processo $x_t = ax_{t-1} + \varepsilon_t$ é estacionário apenas se $|a| < 1$.
4. Mostre que o processo $x_t = b\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ é estacionário.
5. Seja $x_t = a + b\,t + \varepsilon_t$ um processo estocástico com tendência linear, mostre que a série $\{y_t\}$ formada pelas diferenças $y_t = x_t - x_{t-1}$ é estacionária.