Análise de Séries Temporais

Adequação dos modelos ARMA/ARIMA

José Augusto Fiorucci

Resíduos do modelo ARMA(p,q)

Modelo ARMA(p,q)

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

em que $\beta = (\alpha, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)'$ é o vetor de parâmetros e $\{\varepsilon_t\}$ é um ruido branco com média zero e variância σ^2.

Equivalentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned} x_t &= \mu_{t|t-1} + \varepsilon_t \\ \mu_{t|t-1} &= \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned}$$

Assim

$$\varepsilon_t = x_t - \mu_{t|t-1}$$

em que $\mu_{t|t-1}$ é função dos parâmetros, isto é, $\mu_{t|t-1} = \mu_{t|t-1}(\beta)$.

Logo se $x_1, \ldots, x_n$ é a série observada e $\widehat{\beta}$ é a estimativa de β, então os resíduos do modelo são dados por

$$\varepsilon_t(\widehat{\beta}) = x_t - \mu_{t|t-1}(\widehat{\beta})$$

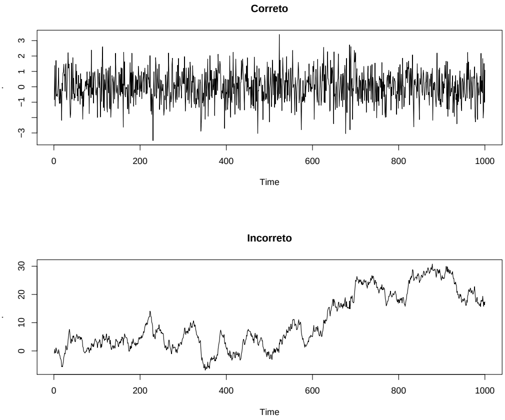
para $t = 1, \ldots, n$.

Adequação do modelo

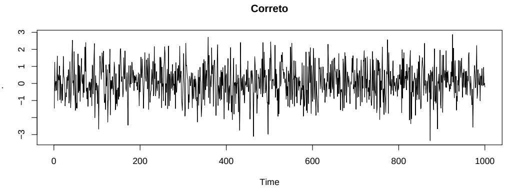
- Suposições sobre $\{\varepsilon_t\}$
  - Média zero, $E[\varepsilon_t] = 0, \ t = 1, 2, 3, \ldots$
  - Variância constante, $Var[\varepsilon_t] = \sigma^2, \ t = 1, 2, 3, \ldots$
  - Covariância nula, $Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}] = 0, \ h \neq 0, \ t = 1, 2, 3, \ldots$
  - "Normalidade"
    - Caso paramétrico
    - Especialmente importante em previsões intervalares (será visto a frente)

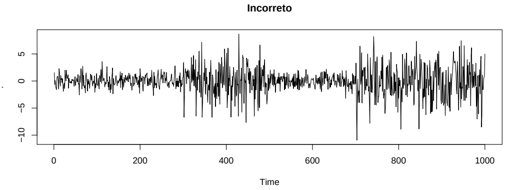
- De modo geral, o modelo estará bem ajustado se a série de resíduos satisfizer todas as hipóteses levantadas sobre $\{\varepsilon_t\}$.
  - Entre os modelos que atendem esses critérios, deve-se escolher o mais parcimonioso.

- Média

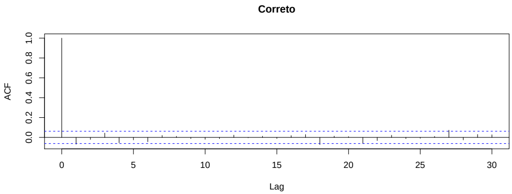

Correto
3
2
1
0
−1
−3
0
200
400
600
800
1000
Time
Incorreto
30
20
10
0
0
200
400
600
800
1000
Time

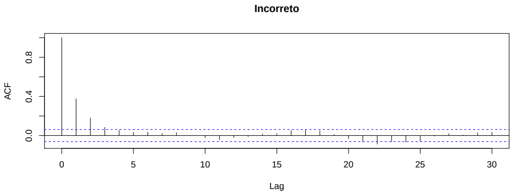
- Variância


Correto
3
2
1
0
−1
−3
0
200
400
600
800
1000
Time

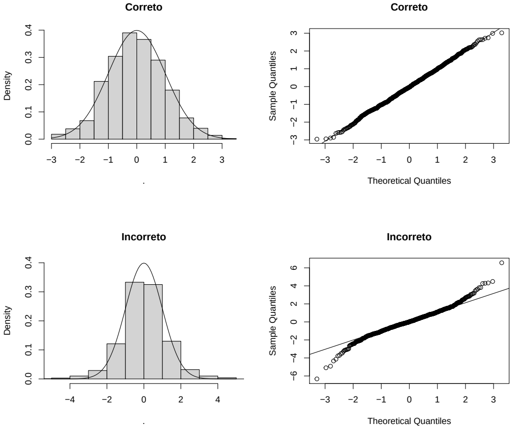

Incorreto
5
0
−5
−10
0
200
400
600
800
1000
Time

- Autocovariância/Autocorrelação





- Aderência


Correto
Density
Correto
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Incorreto
Density
Incorreto
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles

- Estacionariedade
  - Teste KPSS

    Kwiatkowski D, Phillips PCB, Schmidt P and Shin Y (1992), "Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root", Journal of Econometrics 54:159-178

  - Teste de Phillips-Perron

    Phillips, P.C.B. and Perron, P. (1988), "Testing for a unit root in time series regression", Biometrika, 72(2), 335-346.

  - Teste ADF

    Dickey DA and Fuller WA (1979), "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", Journal of the American Statistical Association 74:427-431.

Obs: Disponíveis no pacote *tseries* do R. Comandos: *kpss.test()*, *adf.test()*, *pp.test()*.

- Testes de indepêndencia:
  - Hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \rho(1) = \rho(2) = \cdots = \rho(m) = 0 \\ H_1 &: \ \text{pelo menos um diferente de zero} \end{aligned}$$

  - Teste de Box-Pierce (Box, G. E. P.; Pierce, D. A. (1970))
    - Estatística:

$$Q = n \sum_{h=1}^{m} \widehat{\rho}(h)^2$$

    em que $\widehat{\rho}(h)$ é a autocorrelação amostral com lag h.
    - Sob H_0, como $\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(h) \sim^a N(0,1)$, segue que $Q \sim^a \chi^2_m$. Portanto, com nível de significância α, rejeita-se H_0 se $Q > \chi^2_{m,1-\alpha}$.
  - Teste de Ljung-Box (Ljung, G. M. & Box, G. E. P. (1978))
    - Estatística:

$$Q = n(n+2) \sum_{h=1}^{m} \widehat{\rho}(h)^2/(n-h)$$

    - Sob H_0, pode-se mostrar que $Q \sim^a \chi^2_m$. Portanto, com nível de significância α, rejeita-se H_0 se $Q > \chi^2_{m,1-\alpha}$.

- Testes de indepêndencia (continuação):
  - O teste de Ljung-Box é mais recente e apresenta melhores resultados, especialmente para séries com poucas observações;
  - Quando empregado nos resíduos dos modelos ARMA(p,q), as refências sugerem que utilizar $Q \sim \chi^2_{m-p-q}$ traz melhores resultados.
    - Neste caso, obviamente deve-se garantir que $m > p + q$.
    - Geralmente escolhe-se $m \approx 15$.
  - No R utilize *Box.test()* para ambos os testes.

Testes estatísticos

- Testes de Aderência:
  - Normalidade
    - Teste de Shapiro-Wilk
    - No R: *shapiro.test()*
  - Outras distribuições
    - Teste de Kolmogorov-Smirnov
    - No R: *ks.test()*

Parcimônia

- De modo geral, quando dois ou mais modelos da mesma família atendem todas as hipóteses é preferível escolher aquele com menos parâmetros

- Os critérios de parcimônia fazem um balanço entre a qualidade do ajuste e o grau de complexidade do modelo
  - Critério de informação de Akaike

    $$AIC = 2k - 2\log(L(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma^2}))$$

    em que, k denota o número de parâmetros do modelo e $L(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma^2})$ a função de verossimilhança ajustada.
  - AIC corrigido para pequenas amostras

    $$AICc = AIC + (2k^2 + 2k)/(n - k - 1)$$

  - em ambos os casos, deve-se escolher o modelo com menor valor do critério escolhido.