Análise de Séries Temporais

Modelos ARMA e ARIMA

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Departamento de Estatística
Universidade de Brasília

Section 1

Modelo Misto: ARMA

Modelos Autoregressivos Médias Móveis (*autoregressive moving avarage*, ARMA(p,q))

- Def: Considere $\{\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots\}$ um ruído branco com média zero e variância σ^2. Um processo ARMA(p,q) é definido como sendo um processo **estacionário** do tipo

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

sendo $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ constantes.

  - No caso do processo ter média $\mu = E[x_t]$ diferente de zero, então o modelo pode ser aplicado para a série com média ajustada, isto é,

  $$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(x_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

  ou equivalentemente,

  $$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

  em que $\alpha = (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)\,\mu$ é o intercepto.

  - No que segue, assumiremos sem perda de generalidade $\mu = 0$.

- Os modelos ARMA podem ser escrito em função dos operadores de retardo

$$\Phi_p(B)\ x_t = \Theta_q(B)\ \varepsilon_t$$

em que

$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

é o *polinômio autoregressivo* e

$$\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

é o *polinômio de média móvel*.

Propriedades

Os Seguintes pontos devem ser destacados a respeito dos modelos ARMA(p,q)

1. O processo é **estacionário** se as raízes de $\Phi(B)$ estão fora do círculo unitário.
2. O processo é **inversível** se as raízes de $\Theta(B)$ estão fora do círculo unitário.
3. O modelo ARMA(p,0) equivale ao AR(p) e o modelo ARMA(0,q) equivale ao MA(q).
4. **Parcimonioso**, um modelo ARMA costuma requerer menos parâmetros que um modelo AR ou MA. Na maior parte das vezes um modelo ARMA(1,1) será suficiente para modelar uma séries estacionária.
5. **Redundância na parametrização**, quando os polinômios $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$ compartilham o mesmo fator, o modelo pode ser simplificado.
   - Por exemplo: o modelo ARMA(2,1) dado por $x_t = \frac{5}{6}x_{t-1} - \frac{1}{6}x_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$, pode ser escrito como $(1 - \frac{5}{6}B + \frac{1}{6}B^2)\,x_t = (1 - \frac{1}{2}B)\,\varepsilon_t$, que por sua vez, pode ser escrito como $(1 - \frac{1}{2}B)(1 - \frac{1}{3}B)\,x_t = (1 - \frac{1}{2}B)\,\varepsilon_t$ e então podemos simplificar o termo em comum, resultando no modelo AR(1), dado por $(1 - \frac{1}{3}B)\,x_t = \varepsilon_t$.

Propriedades

6. Se verificada a condição de **estacionaridade**, um modelo ARMA(p,q) pode ser escrito como MA(∞)

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

com $\psi_0 = 1$.

- Pode-se mostrar que os coeficientes são dados por

$$\psi_i = \theta_i + \sum_{j=1}^{i} \phi_j \psi_{i-j}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

em que $\psi_0 = 1$, $\phi_j = 0$ para $j > p$ e $\theta_i = 0$ para $i > q$. A demonstração é semelhante ao que foi para os modelos AR na aula anterior (Brockwell & Davis, 1996).

- Essa representação do modelo é chamada de **forma causal** ou **forma de choques aleatórios**.

Propriedades

7. Se verificada a condição de **inversibilidade**, um modelo ARMA(p,q) pode ser escrito como

$$x_t = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

- Essa representação do modelo é chamada de **forma inversível**

8. Se verificada as condições de **estacionaridade** e **inversibilidade**, podemos esperar que para um modelo ARMA(p,q)

- FAC: decaia para zero de forma amortizada ou oscilando;
- FACP: decaia para zero de forma amortizada ou oscilando;

Resumo FAC e FACP

	FAC	FACP
AR(p)		
	decai para zero de forma amortizada ou oscilando	corte após lag p
MA(q)		
	corte após lag q	decai para zero de forma amortizada ou oscilando
ARMA(p,q)		
	decai para zero de forma amortizada ou oscilando	decai para zero de forma amortizada ou oscilando

ARMA(1,1)

- Propriedades do modelo ARMA(1,1):

$$x_t = \phi\, x_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\, \varepsilon_{t-1}$$

com $|\phi| < 1$ (*estacionário*) e $|\theta| < 1$ (*inversível*).

  - Média

$$E[x_t] = 0$$

  - Variância

$$Var[x_t] = \frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2}\, \sigma^2$$

  - Autocovariâncias

$$\gamma(1) = \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{(1 - \phi^2)} \sigma^2$$
$$\gamma(h) = \phi\, \gamma(h-1), \qquad h = 2, 3, 4, \ldots$$

  - Autocorrelações

$$\rho(1) = \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}$$
$$\rho(h) = \phi\, \rho(h-1), \qquad h = 2, 3, 4, \ldots$$

Section 2

Modelo Misto Integrado: ARIMA

Modelo ARMA Integrado (ARIMA)

- Modelos ARMA só podem ser aplicados para séries estacionárias. No entanto, a maior parte das séries não são estacionárias.
- Um modelo ARMA Integrado, ARIMA(p,d,q), consiste em aplicar o modelo ARMA(p,q) na d-ésima diferença da série.
    - Seja $\{x_t\}$ um processo não estacionário
    - Geralmente após algumas diferenças a série formada por $w_t = \nabla^d x_t$ se torna estacionária
    - Assim, o modelo ARIMA(p,d,q) pode ser escrito como o modelo ARMA(p,q) aplicada a série $\{w_t\}$, isto é,

$$\Phi_p(B)\, w_t = \Theta_q(B)\, \varepsilon_t$$

        - Lembrete: $\nabla x_t = (1 - B)x_t$ e portanto $w_t = \nabla^d x_t = (1 - B)^d x_t$
- O modelo ARIMA(p,d,q) pode ser escrito como

$$\Phi_p(B)\, (1 - B)^d x_t = \Theta_q(B)\, \varepsilon_t$$

Modelo ARMA Integrado (ARIMA)

- Note que o modelo ARIMA(p,0,q) equivale ao modelo ARMA(p,q)
- Frequentemente $d = 1$ ou $d = 2$ é suficiente para séries não sazonais (ou com sazonalidade ajustada)
- Um processo que se torna estacionário após "d" diferenças é chamado integrado de ordem d.

Section 3

Testes de estacionariedade

Testes de estacionariedade

- Hipóteses usuais

$$\begin{cases} H_0 : \text{o processo é estacionário} \\ \\ H_1 : \text{o processo possui raiz unitária ou} \\ \qquad \text{possui tendência} \end{cases}$$

- Raiz unitária: processos em que o número 1 é raiz do polinômio autoregressivo.
  - Exemplos:
    - Passeio aleatório: $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$

      $\Phi(B) = 1 - B \quad \rightarrow \quad B = 1$ é raiz, logo esse processo possui raiz unitária.

    - ARIMA(p,d,q), d>0: $\Phi_p(B)\,(1 - B)^d x_t = \Theta_q(B)\,\varepsilon_t$

      como $B = 1$ é raiz de $\Phi_p(B)\,(1 - B)^d$, esse processo possui raiz unitaria.

Testes estatísticos para estacionaridade

- Teste KPSS

  Kwiatkowski D, Phillips PCB, Schmidt P and Shin Y (1992), "Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root", Journal of Econometrics 54:159-178

- Teste de Phillips-Perron

  Phillips, P.C.B. and Perron, P. (1988), "Testing for a unit root in time series regression", Biometrika, 72(2), 335-346.

- Teste ADF

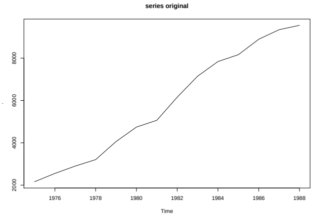
  Dickey DA and Fuller WA (1979), "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", Journal of the American Statistical Association 74:427-431.

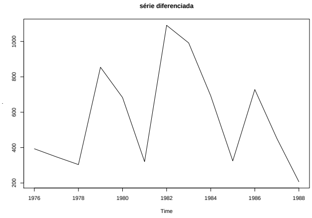
Obs 1: E testado a hipótese de que a série temporal é estacionária contra a hipótese de raiz unitária (tipo de série não estacionária, que será visto a frente).

Obs 2: Disponíveis no pacote *tseries* do R. Comandos: *kpss.test()*, *adf.test()*, *pp.test()*.

Exemplo

```
x %>% plot(main='series original'); diff(x) %>% plot(main='série diferenciada');
```






```
kpss.test(x)
```

```
##
##  KPSS Test for Level Stationarity
##
## data:  x
## KPSS Level = 0.56549, Truncation lag parameter = 2, p-value = 0.02692
```

```
kpss.test(diff(x))
```

```
## Warning in kpss.test(diff(x)): p-value greater than printed p-value

##
##  KPSS Test for Level Stationarity
##
## data:  diff(x)
## KPSS Level = 0.15403, Truncation lag parameter = 2, p-value = 0.1
```

Exemplo

- Função *ndiffs()* do pacote *forecast*: mostra o número de diferenças necessárias até a série se tornar estacionária.

```
x %>% ndiffs()
```

```
## [1] 1
```

```
diff(x) %>% ndiffs()
```

```
## [1] 0
```