Análise de Séries Temporais

Escrevendo AR(p) como MA(∞) e as Equações Yule-Walker

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Departamento de Estatística
Universidade de Brasília

Section 1

Escrevendo AR(p) como MA(∞)

Aulas anteriores

- Modelos AR(p)

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

em que $\phi_1, \ldots, \phi_p$ são constantes.

Ou equivalentemente,

$$\Phi(B) x_t = \varepsilon_t$$

em que $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ é chamado de *polinômio autoregressivo* de ordem p.

  - Estacionaridade: O processo é estacionário se as raízes do polinômio autoregressivo estão fora do circulo unitário

AR(1) como MA(∞)

Considere o modelo AR(1): $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, com $|\phi| < 1$

Note que,

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi x_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi(\phi x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \phi^2 x_{t-2} + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi^2 (\phi x_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi^3 x_{t-3} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \ \vdots \\
&= \phi^k x_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \phi^i \varepsilon_{t-i}
\end{aligned}
$$

Assim, no limite $k \to \infty$, temos:

$$
x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}
$$

o que corresponde a um modelo de *médias móveis* de ordem infinita, MA(∞).

- Generalizando o resultado anterior, temos que qualquer modelo AR(p) estacionário pode ser escrito como um processo MA(∞).
- Para um processo AR(p) estacionário, $\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$, suponha que representação desse processo como MA(∞) seja dado por

$$x_t = \Psi(B)\varepsilon_t$$

em que $\Psi(B) = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots)$, sendo $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ os coeficientes.

Logo

$$\Phi(B)^{-1}\varepsilon_t = \Psi(B)\,\varepsilon_t$$

e portanto

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi(B)\Psi(B) \\ &= (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots) \end{aligned}$$

- Desenvolvendo a equação anterior e agrupando em $B, B^2, B^3, \ldots$, obtemos

$$(\psi_1 - \phi_1)B + (\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2)B^2 + (\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3)B^3 + \ldots \quad = 0$$

- Obtemos assim os coeficientes MA de forma recursiva

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \phi_1 \\
\psi_2 &= \phi_1\psi_1 + \phi_2 \\
\psi_3 &= \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 + \phi_3 \\
\psi_4 &= \phi_1\psi_3 + \phi_2\psi_2 + \phi_3\psi_1 + \phi_4 \\
&\vdots \\
\psi_i &= \sum_{j=1}^{i} \phi_j \psi_{i-j}
\end{aligned}$$

com $\psi_0 = 1$ e $\phi_j = 0$ para $j > p$.

Exemplo 1:

- Processo AR(1): $x_t = 0.7\, x_{t-1} + \varepsilon_t$

```
ARMAtoMA(ar=c(0.7),ma=numeric(), lag.max=15) %>% round(4)
```

```
##  [1] 0.7000 0.4900 0.3430 0.2401 0.1681 0.1176 0.0824 0.0576 0.0404 0.0282
## [11] 0.0198 0.0138 0.0097 0.0068 0.0047
```

- Processo AR(2): $x_t = 0.5\, x_{t-1} - 0.4\, x_{t-2} + \varepsilon_t$

```
ARMAtoMA(ar=c(0.5,-0.4),ma=numeric(), lag.max=15) %>% round(4)
```

```
##  [1]  0.5000 -0.1500 -0.2750 -0.0775  0.0713  0.0666  0.0048 -0.0242 -0.0140
## [10]  0.0027  0.0070  0.0024 -0.0016 -0.0018 -0.0002
```

Section 2

Equações de Yule-Walker

Equações de Yule-Walker

- Considere o modelo Modelos AR(p)

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

e suponha que as raízes do polinômio autoregressivo estejam foram do círculo unitário (processo estacionário).

- Como $E[x_t] = 0$ e o processo é estacionário, segue que

$$E[x_t x_{t-k}] = cov(x_t, x_{t-k}) = \gamma(k)$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Assim, se multiplicarmos a equação do modelo por x_{t-k}, obtemos

$$x_t x_{t-k} = \phi_1 x_{t-1} x_{t-k} + \phi_2 x_{t-2} x_{t-k} + \cdots + \phi_p x_{t-p} x_{t-k} + \varepsilon_t x_{t-k}$$

Assim ao tomar o valor esperado, obtemos a seguinte relação

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p)$$

Equações de Yule-Walker

- Agora ao dividir ambos os lados da equação anterior pela variância ($\gamma(0)$), obtemos as chamadas equações de Yule-Walker

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p)$$

- Note que as equações de Yule-Walker permitem o calculo iterativo da a função de autocorrelação dos modelos AR(p) estacionarios.
- Essas equações também podem ser utilizados para estimar os parâmetros dos modelos autoregressivos.

Exemplos:

- AR(1): $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, com $|\phi| < 1$
  - Yule-Walker: $\rho(h) = \phi\rho(h-1), h = 1, 2, 3, \ldots$

Logo

$$\begin{aligned}
\rho(0) &= 1 \\
\rho(1) &= \phi\rho(0) = \phi \\
\rho(2) &= \phi\rho(1) = \phi^2 \\
\rho(3) &= \phi\rho(2) = \phi^3 \\
&\vdots \\
\rho(h) &= \phi^h, \qquad h = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Exemplos:

- AR(2): $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-1} + \varepsilon_t$, estacionário
  - Yule-Walker: $\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2)$

Logo

$$\begin{cases} \rho(0) = 1 \\ \rho(1) = \phi_1\rho(0) + \phi_2\rho(-1) \end{cases}$$

Dado a simetria da correlação, temos $\rho(-1) = \rho(1)$, assim resolvendo o sistema obtemos

$$\begin{cases} \rho(0) = 1 \\ \rho(1) = \phi_1/(1-\phi_2) \end{cases}$$

As autocorrelações de maiores lags podem ser calculas através do processo iterativo,

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2), \quad h = 2, 3, 4, \ldots$$