

Análise de Séries Temporais: Tendência, Sazonalidade e Decomposição

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Decomposição clássica

- Decomposições

- Aditiva:

$$X_t = T_t + S_t + E_t$$

- Multiplicativa:

$$X_t = T_t \times S_t \times E_t$$

Sendo

- T_t : a componente de tendência;
 - S_t : a componente de sazonalidade;
 - E_t : um ruído (a parte não explicada, que espera-se ser puramente aleatória)

Decomposição

- Objetivos
 - Reduzir a série temporal em componentes que sejam simples de serem modeladas;
 - Obter a série sem tendência (tendência ajustada)
 - Aditiva: $Z_t = X_t - T_t$
 - Multiplicativa: $Z_t = X_t / T_t$
 - Obter a série sem sazonalidade (sazonalmente ajustada ou desazonalizada)
 - Aditiva: $Y_t = X_t - S_t$
 - Multiplicativa: $Y_t = X_t / S_t$

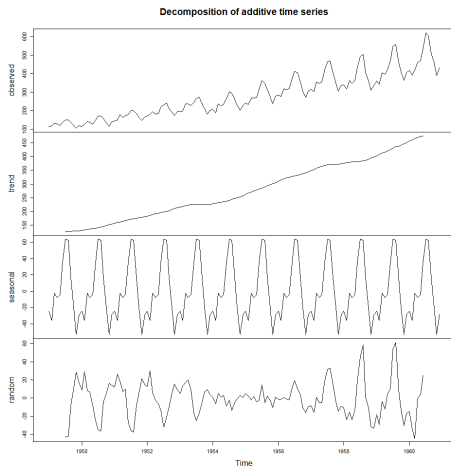
Exemplo 1: Decomposição Aditiva

- Aditiva:

$$X_t = T_t + S_t + E_t$$

- Código do R:

```
X <- AirPassengers  
dec <- decompose(X, type="a")  
plot(dec)
```



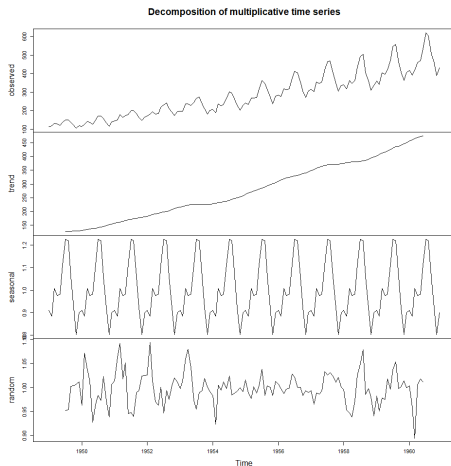
Exemplo 2: Decomposição Multiplicativa

- Multiplicativa:

$$X_t = T_t \times S_t \times E_t$$

- Código do R:

```
X <- AirPassengers  
dec <- decompose(X, type="m")  
plot(dec)
```



Formas de extrair a tendência: função linear

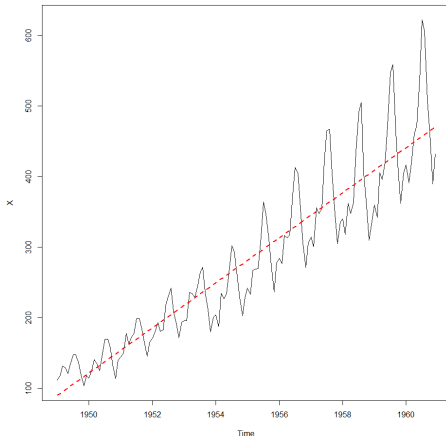
- Função linear:

$$X_t = a + b t + E_t$$

sendo a e b parâmetros;

- Código do R:

```
X <- AirPassengers
tempo <- time(X)
out <- lm(X ~ tempo)
plot(X)
lines(x=tempo, y=out$fitted,
type='l')
```



Formas de extrair a tendência: função polinomial

- Função polinomial:

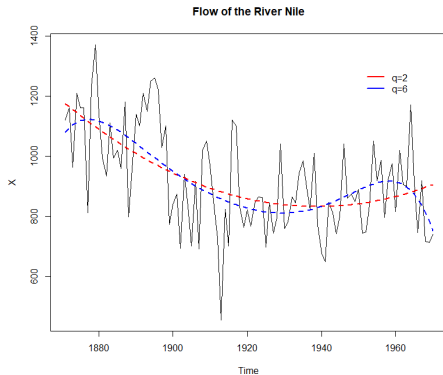
$$X_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_q t^q + E_t$$

sendo a_0, a_1, \dots, a_q

parâmetros;

- Código do R:

```
X <- Nile  
tempo <- as.numeric( time(X) )  
out <- lm(X ~ poly(tempo,2))  
out2 <- lm(X ~ poly(tempo,6))
```



Formas de extrair a tendência: suavização

- Média Móvel (q)

- Apenas de valores passados

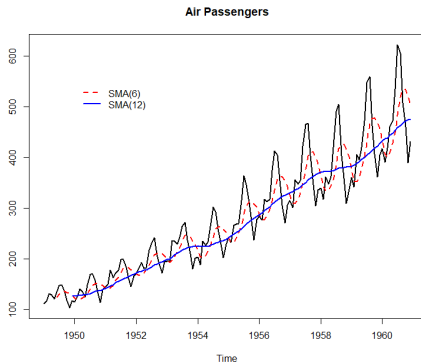
$$SMA_t = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^q X_{t-i}$$

- Código do R:

```
X <- AirPassengers  
sma6 <- filter(X, rep(1/6,  
6),sides=1)  
sma12 <- filter(X, rep(1/12,  
12),sides=1)
```

- Note que a média móvel de ordem $q = 12$ remove praticamente toda a influência da sazonalidade. Esse é

um comportamento esperado uma vez que a série é mensal;



Formas de extrair a tendência: suavização

- Média Móvel (q) - Simétrica

- Se q é ímpar

$$MM_t = \frac{1}{q} \sum_{i=-s}^s X_{t+i}$$

onde $s = (q - 1)/2$

- Se q é par

$$MM_t = \frac{1}{q} \sum_{i=-s+1}^s X_{t+i}$$

onde $s = q/2$

- Código do R:

A função `filter()` também permite a aplicação da média móvel simétrica. Por exemplo, a $MM(3)$ - simétrica

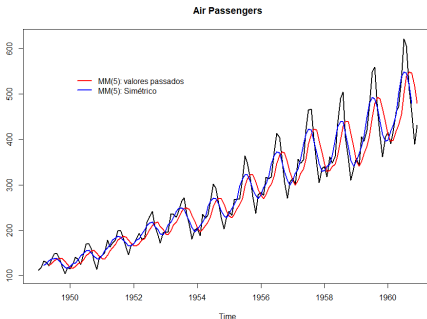
$$MM_t = \frac{1}{3} (X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$$

pode ser calculado com o seguinte comando:

```
mm3 <- filter(X, rep(1/3, 3), sides=2)
```

Formas de extrair a tendência: suavização

- Média Móvel: valores passados vs simétrica



- Código do R:

```
X <- AirPassengers
```

```
pass5 <- filter(X, rep(1/5, 5), sides=1)
```

```
sim5 <- filter(X, rep(1/5, 5), sides=2)
```

- Note que a MM que considera apenas valores passados reage mais lentamente;

Formas de extrair a tendência: suavização

- Filtro linear (p,q), caso geral:

$$F_t = \sum_{i=-p}^q a_i X_{t+i}$$

sendo a_{-p}, \dots, a_q os pesos com $\sum_{i=-p}^q a_i = 1$.

- Código do R:

Por exemplo, o filtro

$$MM_t = 0.2X_{t-1} + 0.6X_t + 0.2X_{t+1}$$

pode ser calculado com o seguinte comando:

```
mm2 <- filter(X, c(0.2, 0.6, 0.2), sides=2)
```

Extraindo a Sazonalidade: decomposição Aditiva

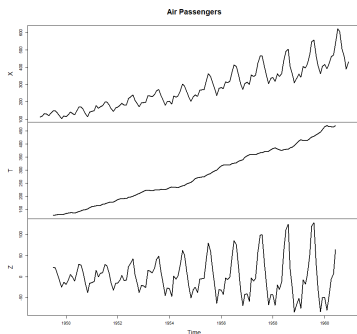
- Decomposição Aditiva:

$$X_t = T_t + S_t + E_t$$

- Supondo que a componente de tendência foi estimada utilizando uma das técnicas acima, a série com tendência ajustada é dada por:

$$Z_t = X_t - T_t = S_t + E_t$$

- Exemplo: Ajustando na série mensal uma Média Móvel de ordem 13, simétrica.



- Código do R:

```
X <- AirPassengers
T <- filter(X, rep(1/13, 13),
sides=2)
Z <- X - T
```

Extraindo a Sazonalidade: decomposição Aditiva

- Da série com tendência ajustada (Z), extraímos a componente sazonal fazendo um novo processo de suavização sazonal.

Por exemplo, em uma série mensal (12 observações no ano) podemos tomar as médias de cada mês, de modo que, a série S de janeiro seja a média de todos Z em janeiro, a série S de fevereiro seja a média de todos Z em fevereiro, e assim por diante.

- Código do R:

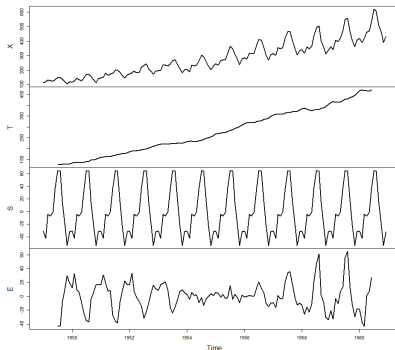
```
n_periodos <- length(X)/12  
MS <- t(matrix(data = Z, nrow = 12))  
S <- colMeans(MS, na.rm = T)  
S <- ts(rep(S,n_periodos), start=start(X), frequency=frequency(X))
```

Decomposição Aditiva

- Resíduo:

$$E = X - T - S$$

- Resultado do exemplo:



- Código do R:

```
E <- X - T - S
```

```
plot(cbind(X,T,S,E), main=, plot.type="m", lwd=2)
```

Decomposição Multiplicativa

- Decomposição Multiplicativa:

$$X_t = T_t \times S_t \times E_t$$

- Passos

- 1 Ajuste a tendências da série;
- 2 Obtenha a série com tendência ajustada: $Z_t = \frac{X_t}{T_t}$
- 3 Obtenha a série S_t a partir de Z_t por um processo de suavização sazonal;
- 4 Calcule a série de resíduos: $E_t = \frac{X_t}{T_t \times S_t}$

Exercício 1

- Repita o exemplo para a decomposição multiplicativa;

Exercício 2

- Ajuste as decomposições aditiva e multiplicativa para as seguintes séries temporais

UKgas, USAccDeaths, co2, nottem, presidents

Decomposição STL

- STL é uma adaptação de 'Seasonal and Trending using Loess';
- A componente sazonal é dinâmica, ou seja, pode mudar ao longo do tempo;
- Pode ser mais robusta para lidar com outliers (No R, o usuário precisa optar pela estimação robusta);
- Apenas para decomposição aditiva:

$$X_t = T_t + S_t + E_t$$

No entanto, a decomposição multiplicativa sempre pode ser obtida tomando o log da série e depois fazendo a transformação inversa das componentes;

- A decomposição multiplicativa pode ser obtida aplicando STL no log da série, i.e.,
se

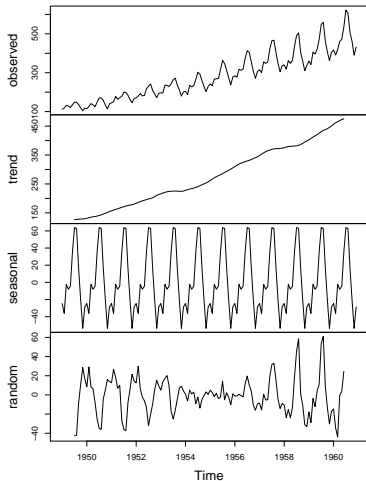
$$X_t = T_t \times S_t \times E_t$$

então

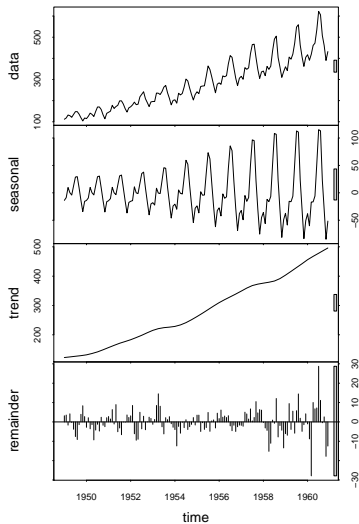
$$\log X_t = \log T_t + \log S_t + \log E_t$$

Clássica vs STL

Decomposition of additive time series



Decomposição STL



Decomposição STL

- No R utilize o seguinte comando:

```
stl(x, s.window, t.window=NULL, robust=TRUE)
```

- `s.window`: tamanho da janela de ajuste para sazonalidade, menores valores produzem mudanças de sazonalidade mais rápidas. Se `s.window="periodic"` então é utilizado a média. Cleveland et al (1990) sugere que seja usado pelo menos 7;
- `t.window`: tamanho da janela de ajuste para tendência, menores valores produzem mudanças de tendência mais rápidas;
- `robust=TRUE`: permite que a estimação robusta seja utilizada, diminuindo a influência de outliers;

Exercício 3

- Ajuste a decomposição STL para as seguintes séries temporais

`UKgas, USAccDeaths, co2, nottem, presidents`

Obs: procure ajustar os parâmetros `t.window` e `s.window` de modo que os resíduos tenham um comportamento próximo de um ruído branco.

Função `mstl()` do pacote `forecast`

- A função `mstl()` é uma versão automática da decomposição STL. Geralmente faz um bom balanço dos parâmetros `t.window` e `s.window`;
 - Assim como qualquer função automática, pode precisar de alguns ajustes dependendo da série temporal;
- Outras vantagens:
 - Decomposição MSTL: STL com múltiplas sazonalidades
 - Permite o uso automático da transformação de Box-Cox;
- No R utilize o seguinte comando:

```
library(forecast)
```

```
mstl(x, lambda = NULL, ...)
```

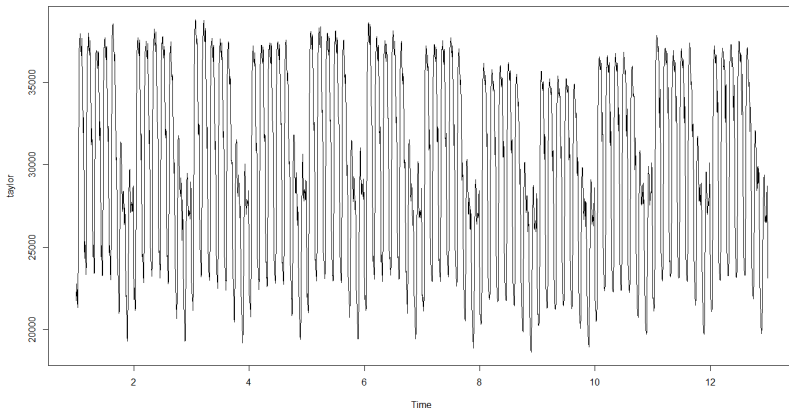
- `lambda`: parâmetro da transformação de Box-Cox, automaticamente estimado se `lambda = 'auto'`. Ignorado se igual a `NULL`;

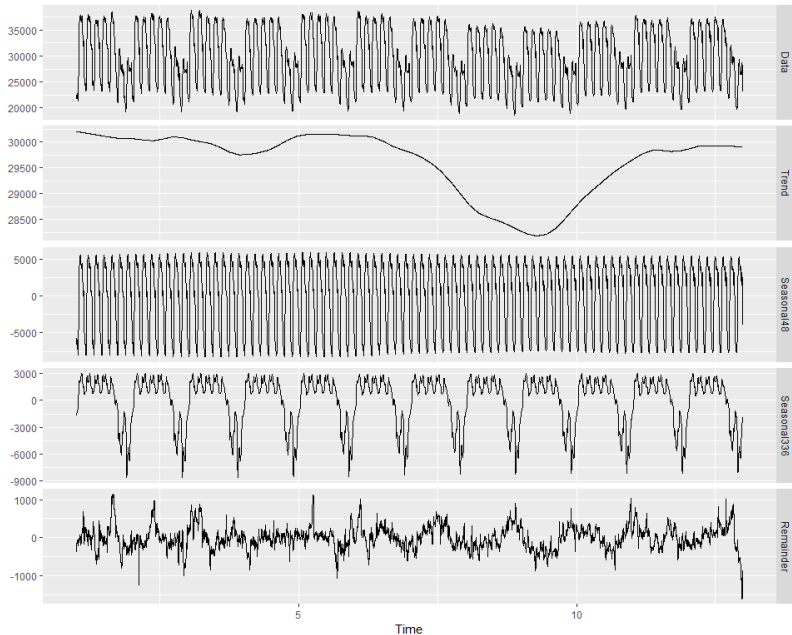
Função `mstl()` do pacote `forecast`

- Algumas séries temporais podem apresentar múltiplas sazonalidades. Nestes casos, a função `mstl()` pode trazer grande vantagem quando comparada a `stl()`.
 - Exemplo, uma série semanal pode apresentar um padrão de repetição mensal e outro anual.
 - Exemplo, séries intradiárias (observadas em períodos menores que 1 dia) podem apresentar sazonalidade diária e semanal.

Exemplo

A série taylor do pacote forecast contém medições de meia em meia hora da demanda de eletricidade (MW) na Inglaterra e no País de Gales, entre 05/06/2000 e 27/08/2000.





Exercício 4

- A série `calls` do pacote `fpp2` contém observações do volume de ligações que um grande banco recebe de 5 em 5 minutos. Para as 4 primeiras semanas dessa série (utilize `window(calls, end=4)`), compare os resultados da decomposição STL com a decomposição MSTL.
- Note que enquanto a STL identifica apenas a sazonalidade diária, enquanto a MSTL identifica sazonalidades diária e semanal.