Análise de Séries Temporais:

Sazonalidade multipla e modelos avançados

Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Universidade de Brasília

Departamento de Estatística

Múltiplos ciclos sazonais

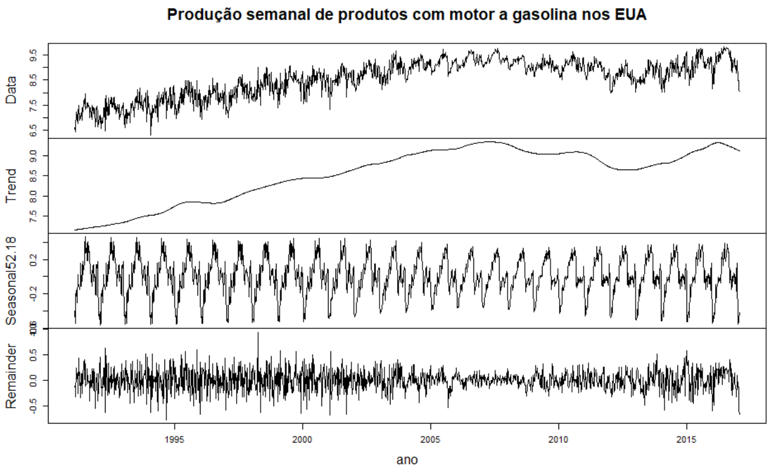
- Algumas séries possuem múltiplos ciclos sazonais que não são captados por modelos de alisamento exponencial convencionais, em especial, dados de frequência maior que mensal (também chamada de alta frequência):
  - Séries semanais usualmente apresentam ciclos sazonais mensal e anual
  - Séries diárias podem apresentar ciclos sazonais semanal, mensal e anual
  - Séries horárias podem apresentar ciclos sazonais diário, semanal, mensal e anual
- Estas também podem conter ciclos não inteiros (complexos)
  - Séries semanais possuem ciclo anual de $365.25/7 = 52.17857$

MSTL: decomposição STL com multiplas sazonalidades

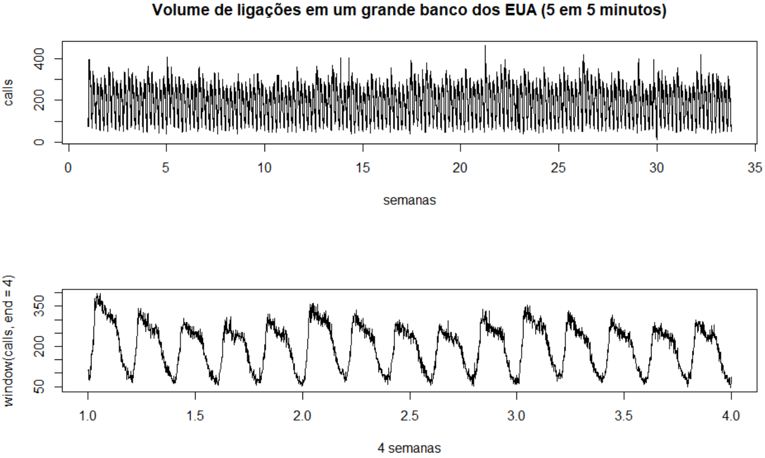
- Decomposição **STL**: Sazonalidade, Tendência e Loess
  - Referência: Cleveland, R. B., Cleveland, W. S., McRae, J. E., & Terpenning, I. J. (1990). STL: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess. Journal of Official Statistics, 6(1), 3–33.
  - Vantagens em relação ao método clássico:
    - Tendência via Loess (regressão dinâmica)
    - Sazonalidade dinâmica
    - Usualmente fornece melhores resultados que a decomposição clássica
- Decomposição **MSTL**: STL com multiplas sazonalidades
  - Faz múltiplas aplicações da decomposição STL
  - No pacote *forecast* do R, utilize mstl();

Exemplo: decomposição STL na série gasoline

```
> plot(mstl(gasoline))
```



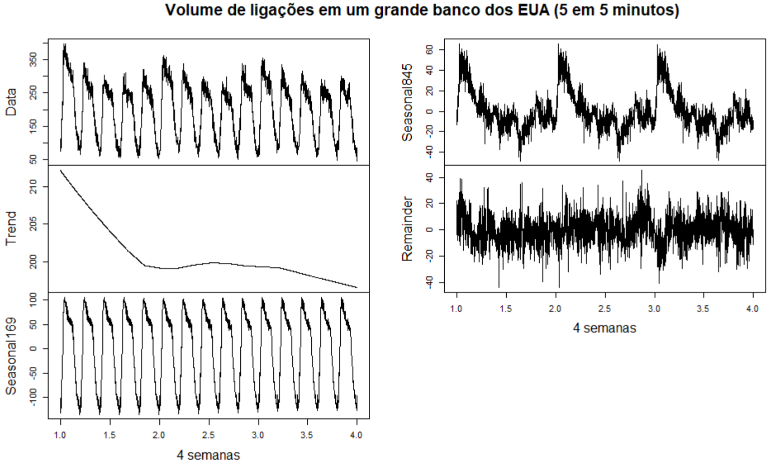
```
> plot(calls)
> plot(window(calls, end=4))
```



Exemplo call center - decomposição MSTL

> y = window(calls, end=4)

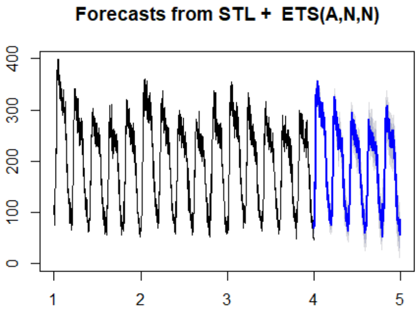
> plot(mstl(y))



Previsão via STL + ETS

- Função stlf()
  - Retira a sazonalidade via MSTL;
  - Faz previsão da série com sazonalidade ajustada utilizando ETS;
  - Inclui a sazonalidade do ultimo ciclo na previsão;
- Exemplo: (série call center)

  > plot(stlf(y, h=frequency(y))) # previsão de uma semana



Modelo BATS

- Modelo BATS

  B: transformação de **B**ox-cox para heterogeneidade

  A: modelo **A**RMA para erros

  T: **T**endência via alisamento exponencial

  S: **S**azonalidade multipla via alisamento exponencial

- Referência:

  De Livera, A. M., Hyndman, R. J., Snyder, R. D. (2011). Forecasting time series with complex seasonal patterns using exponential smoothing. Journal of the American Statistical Association, 106(496), 1513-1527.

Modelo BATS

$$
\begin{aligned}
y_t &= \text{série original no tempo } t \\
y_t^{(\omega)} &= \begin{cases} (y_t^{\omega} - 1)/\omega & \text{se} \quad \omega \neq 0 \\ \log y_t & \text{se} \quad \omega = 0 \end{cases} \qquad \text{(Transformação de Box-Cox)} \\
y_t^{(\omega)} &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^{M} s_{t-m_i}^{(i)} + e_t \qquad \text{(HW+Damped)} \\
\ell_t &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\, e_t \\
b_t &= (1-\phi) b + \phi b_{t-1} + \beta\, e_t \\
s_t^{(i)} &= s_{t-m_i}^{(i)} + \gamma_i\, e_t \\
e_t &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i e_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \qquad \text{(ARMA)}
\end{aligned}
$$

em que ω é o parâmetro da transformação de Box-Cox, $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ são parâmetros de alisamento sazonal e $m_1, m_2, \ldots, m_M$ são os tamanhos dos ciclos sazonais.

Decomposição em série harmônica (Séries de Fourier)

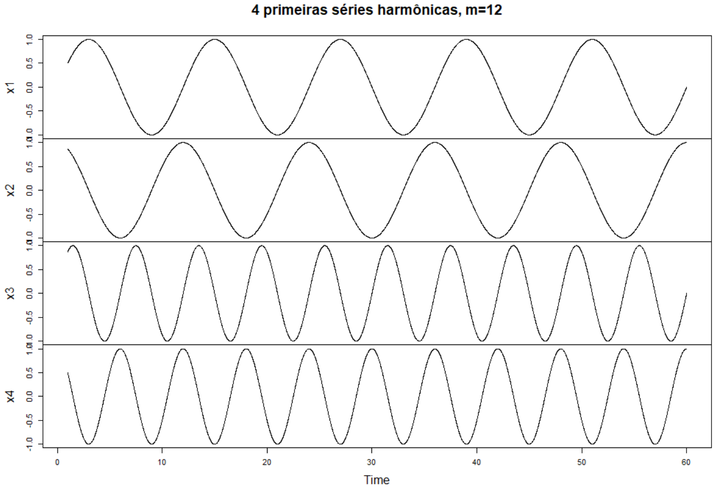
- Idéia: a sazonalidade pode ser vista como uma sobreposição de séries harmônicas (senos, cossenos) .
- Transformação de Fourier:

$$\begin{aligned} s_t &= a_0 + a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{m}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{m}\right) + a_3 \sin\left(\frac{4\pi t}{m}\right) + a_4 \cos\left(\frac{4\pi t}{m}\right) \\ &\quad + a_5 \sin\left(\frac{6\pi t}{m}\right) + a_6 \cos\left(\frac{6\pi t}{m}\right) + \ldots \end{aligned}$$

  onde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são parâmetros e m é a frequência da série (ou ciclo sazonal);
- Permite que sazonalidades múltiplas sejam modeladas;
- Permite que ciclos não inteiros sejam modelados;

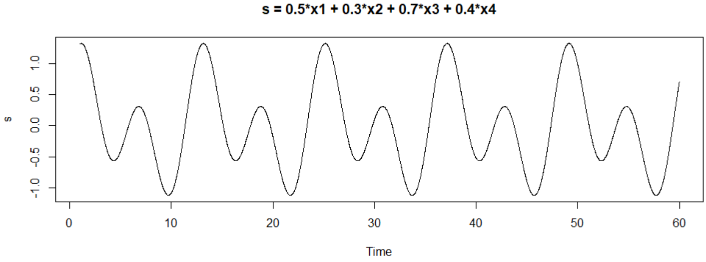
Decomposição em série harmônica (Séries de Fourier)

- Exemplo:



Decomposição em série harmônica (Séries de Fourier)

- Exemplo: combinando as 4 primeiras séries harmônicas



Modelo TBATS

- Modelo TBATS

  T: termos **T**rigonometricos para sazonalidade

  B: transformação de **B**ox-cox para heterogeneidade

  A: modelo **A**RMA para erros

  T: **T**endência via alisamento exponencial (ETS)

  S: **S**azonalidade multipla ou para períodos não inteiros

- Referência:

  De Livera, A. M., Hyndman, R. J., Snyder, R. D. (2011). Forecasting time series with complex seasonal patterns using exponential smoothing. Journal of the American Statistical Association, 106(496), 1513-1527.

Modelo TBATS

$$
\begin{aligned}
y_t &= \text{série original no tempo } t \\
y_t^{(\omega)} &= \begin{cases} (y_t^{\omega} - 1)/\omega & \text{se} \quad \omega \neq 0 \\ \log y_t & \text{se} \quad \omega = 0 \end{cases} \qquad \text{(Transformação de Box-Cox)} \\
y_t^{(\omega)} &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^{M} s_{t-m_i}^{(i)} + e_t \qquad \text{(HW+Damped)} \\
\ell_t &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\, e_t \\
b_t &= (1-\phi) b + \phi b_{t-1} + \beta\, e_t \\
s_t^{(i)} &= \sum_{j=1}^{k_i} s_{j,t}^{(i)} \qquad \text{(Fourier)} \\
s_{j,t}^{(i)} &= s_{j,t-1}^{(i)} \cos \lambda_j^{(i)} + s_{j,t-1}^{*(i)} \sin \lambda_j^{(i)} + \gamma_1^{(i)} e_t \\
s_{j,t}^{*(i)} &= -s_{j,t-1}^{(i)} \sin \lambda_j^{(i)} + s_{j,t-1}^{*(i)} \cos \lambda_j^{(i)} + \gamma_2^{(i)} e_t \\
e_t &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i e_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \qquad \text{(ARMA)}
\end{aligned}
$$

em que $\lambda_j^{(i)} = 2\pi j / m_i$ e $m_1, m_2, \ldots, m_M$ são os tamanhos dos ciclos sazonais. O número de funções harmônicas requiridas para cada componente é denotado por k_i.

Modelo TBATS

- Para detalhes sobre a componente sazonal, veja o livro:

  West, M. Harrison, J. (1997), Bayesian forecasting and dynamic models, 2nd edn, Springer-Verlag, New York.

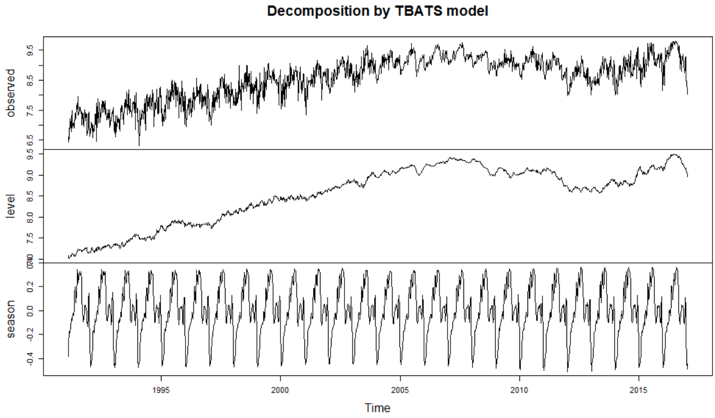
- O modelo TBATS também pode ser escrito como um modelo de espaço de estado não linear;
- A verossimilhança é conhecida;
- Previsão pontual e intervalar podem ser feitos via bootstrap;
- Identificação da ordem do modelo:

  $\text{TBATS}(\omega, \{p, q\}, \phi, \{< m_1, k_1 >, < m_2, k_2 >, \ldots, < m_M, k_M >\})$

Exemplo gasoline: decomposição

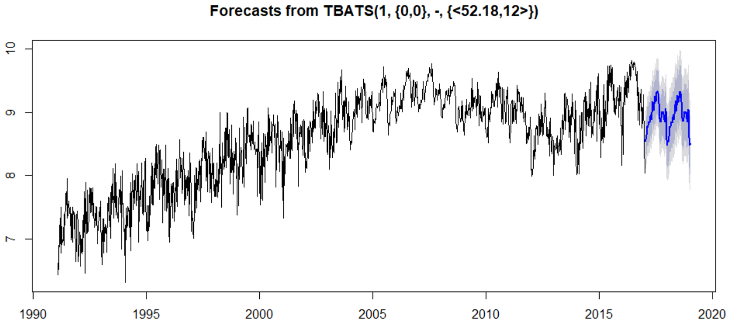
> fit = tbats(gasoline)

> plot(fit)



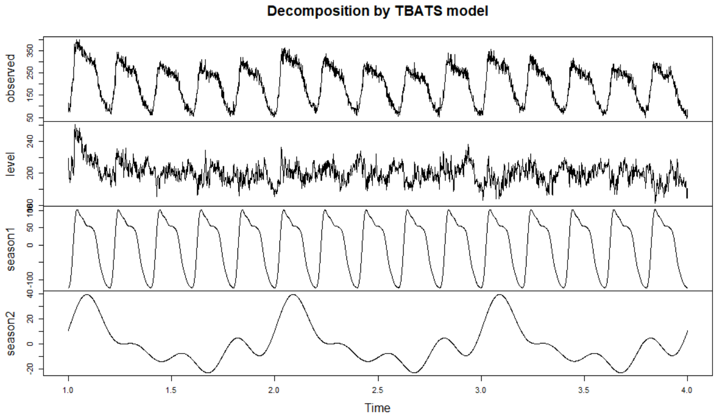
Exemplo gasoline: previsão

> plot(forecast(fit, h=104)) # dois anos de previsão (104 semanas)



Exemplo call center: decomposição

```
> fit = tbats(y)
> plot(fit)
```



Exemplo call center: previsão

```
> plot( forecast(fit,h=frequency(y)) ) # previsão de uma semana
```